8
2EJ.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ACATLAN

"COORDENADAS POLARES"

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

Irma LUZ MARGARITA ESPINOSA MELENDEZ

ACATLAN, EDO. DE MEXICO, 1994

VNIVERSIDAD NACIONAL AVPNOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA
PROGRAMA DE ACTUARIA Y M.A.C.

SRITA. LUZ MARGARITA ESPINOSA M.
Alumna de la carrera de Actuaría
P r e s e n t e .

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 8 de diciembre de 1993, me complace notificarle que esta Jefatura tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesina: "COORDENADAS POLARES", el cual se desarrollará como sigue:

INTRODUCCION

LOCALIZACION DE COORDENADAS POLARES

TRANSFORMACION DE COORDENADAS

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN COORDENADAS POLARES

LA RECTA EN COORDENADAS POLARES

EL CIRCULO EN COORDENADAS POLARES

CONICAS EN COORDENADAS POLARES

GRAFICAS EN COORDENADAS POLARES

DERIVADAS EN COORDENADAS POLARES

INTEGRALES EN COORDENADAS POLARES

CONCLUSIONES

APENDICES

BIBLIOGRAFIA

Asimismo fué desginado como Asesor de Tesis la Act. Laura Ma. Rivera Becerra, profesora de esta Escuela.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento - de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá -- presentar servicio social durante un tiempo mínimo de- seis meses como requisito básico para sustentar examen

. . . . . .

UNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA
PROGRAMA DE ACTUARIA Y M.A.C.

profesional, así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesina el título del trabajo realizado. - Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la tesina.

A T E N T A M E N T E
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Acatlán, Edo. Méx. mayo 19 de 1994.

ACT. LAURA MA. RIVERA BECERRA
Jefe del Programa de Actuaría
y M.A.C.

LMRB'cg.

El punto de llegada no significa más que el inicio de un nuevo ciclo .....

INDICE

OBJETIVO

La carrera de actuario tiene como objetivo fundamental la aplicación de las Ciencias Matemáticas en los estudios y análisis de los fenómenos sociales. Para lograr la adecuada aplicación es relevante la formación matemática que debe adquirirse durante el estudio de la carrera.

Si bien es cierto que existen temas que por sus características resultan áridos y sin aplicación práctica, tambien lo es el hecho de que amplian el conocimiento de las herramientas alternas que en un momento determinado pudieran utilizarse.

Bajo este esquema, el tema de Coordenadas Polares forma parte del bloque de conocimientos que constituyen la parte formativa y teórica de los estudios del actuario. Dada su limitada aplicación el material que existe es tambien limitado, poco desarrollado y, en la mayoría de los casos, incompleto.

Por lo anterior, el **objetivo del presente trabajo es desarrollar el tema de Coordenadas Polares con los conceptos indispensables que permitan visualizarlo integralmente asi como resaltar las bondades que ofrece, en algunos casos, trabajar con ellas.**

INTRODUCCION

La Geometría Analítica, hoy por hoy, es considerada más que una rama de la geometría un método mediante el cual un problema de geometría se reduce a un problema de álgebra o de cálculo, al establecer una correspondencia entre una curva y una ecuación específica.

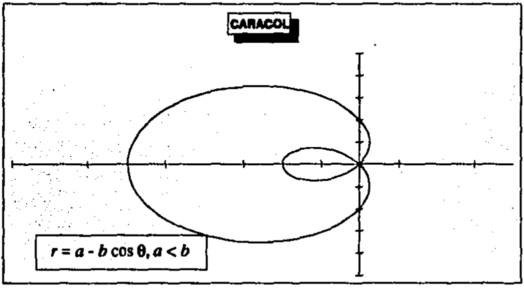
No obstante que las obras de René Descartes (1596-1650), a quien se le considera el padre de la Geometría Analítica, no son un desarrollo sistemático, sus ideas permitieron crear las bases que la formarían tal como la conocemos actualmente.

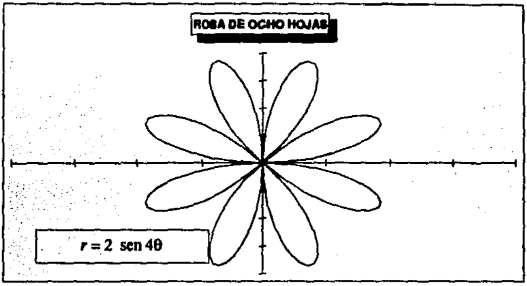
Tal es el caso de los ejes coordenados, que si bien no se describen explícitamente en sus obras, habrían de servir para contruir los métodos y llevar a descubrimientos matemáticos importantes.

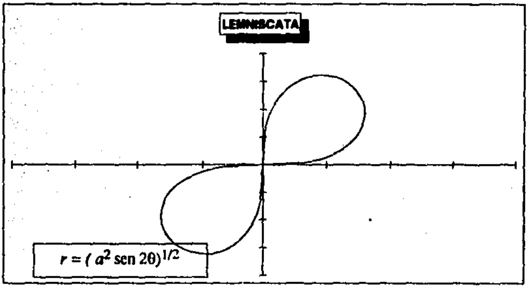
Existen varios sistemas de coordenas, los más comunes son el Sistema de Coordenas Cartesianas, el Sistema de Coordenas Polares para la geometría bidimensional y, para la geometría tridimensional los Sistemas de Coordenas Esféricas y Cilíndricas.

La elección adecuada de un sistema coordenado depende de la naturaleza del problema y en la mayoría de los casos, dependiendo del tipo de ecuación de que se trate, siempre alguno ofrece mayor facilidad en su manejo.

Así, la invención del Sistema de Coordenadas Polares , la cual se acredita a Jacques Bernoulli (1654-1705), forma parte del desarrollo de la Geometría Analítica y la importancia de su utilización se deriva de la facilidad que proveen para expresar relaciones que especifican el contorno de curvas, principalmente cerradas, como las que se muestran a continuación.







No obstante que la intención de este trabajo es presentar las ventajas que las coordenadas polares representan para graficar las curvas indicadas anteriormente, así como la integración y derivación con sus ecuaciones, se mostrará la relación que existe entre los Sistemas de Coordenadas Cartesianas y Polares, y su aplicación con las principales lineas en el plano (recta, circunferencia y cónicas).

LOCALIZACION DE COORDENADAS POLARES

¿Qué es una coordenada?

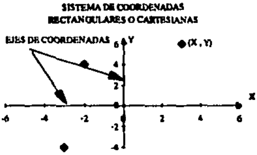
Una coordenada es cada uno de los números que permiten determinar un punto estableciendo su ubicación con respecto a ciertos elementos de referencia.

Para localizar cualquier punto en el plano, los sistemas más comunes son:

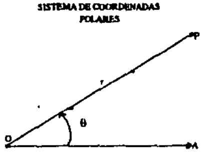
* Sistema de Coordenadas Rectangulares o Cartesianas, y

* Sistema de Coordenadas Polares.

En el Sistema de Coordenadas Cartesianas, la ubicación de un punto se efectúa refiriendo el punto a dos rectas fijas perpendiculares llamadas ejes de coordenadas. Las coordenadas son números llamados la abscisa y la ordenada y son distancias dirigidas desde los ejes de coordenadas.

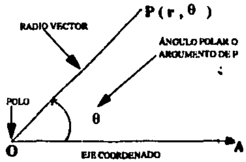


En el Sistema de Coordenadas Polares, un punto se localiza refiriendo su posición a una distancia con respecto a un punto fijo y a un ángulo con respecto a una recta fija.



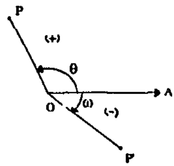
El punto fijo se llama polo u origen, y normalmente se designa por la letra "O". La recta fija se llama eje polar o recta polar y es designada por OA, de manera general se dibuja horizontalmente y se extiende indefinidamente hacia la derecha.

Sea P un punto cualquiera en el plano distinto de O. Tracemos el segmento OP y designemos su longitud por r. Llamemos θ al ángulo AOP.



Cuando conocemos r y θ podemos determinar la posición del punto P con relación al eje polar y al polo.

Así, $(r;\theta)$ se llaman **coordenadas polares del punto P**, r se llama **radio vector** y θ **ángulo polar o argumento de P**. La distancia r es positiva ($r=|OP|$) y la medida en radianes θ del ángulo dirigido AOP es positiva cuando se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj y negativa cuando se mide en dirección a las manecillas del reloj, teniendo como lado inicial OA y como lado terminal OP.



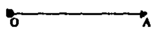
Una diferencia importante entre el Sistema de Coordenadas Rectangulares y el Sistema de Coordenadas Polares, es el hecho de que en las primeras se establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par de números reales, situación que en el Sistema Polar no ocurre porque un punto puede estar representado por un número infinito de pares de coordenadas polares, de otra forma, un par de coordenadas polares $(r;\theta)$ determina uno y solamente un punto en el plano coordenado pero su recíproco no es verdadero ya que un punto P determinado por las coordenadas $(r;\theta)$ está también determinado por cualquiera de los pares de coordenadas representadas por $(r;\theta+2\pi n)$, en donde π está dado en radianes y n es un entero cualquiera.

Ejemplos:

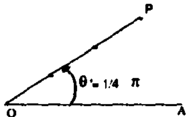
1) Consideremos las coordenadas polares del polo.

✎ Si $r = 0$ y $\theta = \phi$, donde ϕ es cualquier número real, cualquier pareja $(0,\phi)$ determina el polo.

$(0,\pi/2)$; $(0,\frac{3}{6}\pi)$
no importa el valor de θ ya que $r = 0$.

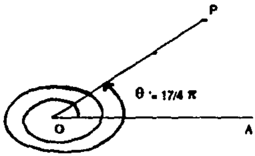


2) Consideremos el punto $P(3,1/4\ \pi)$ como se indica en la figura.

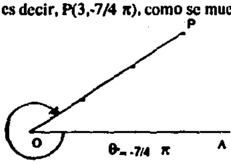


✎ El mismo punto también tiene coordenadas $(3,17/4\ \pi)$ o $(3,-7/4\ \pi)$.

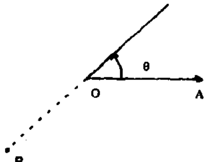
Si el punto es $P(3,1/4\ \pi)$, sabemos que también está determinado por $P(3,1/4\ \pi + 2\pi n)$, para n entero. Si $n= 2$, entonces P también está determinado por las coordenadas $P(3,1/4\ \pi + 2\pi(8/4))$, es decir, $P(3,17/4\ \pi)$, como se muestra en la siguiente figura:



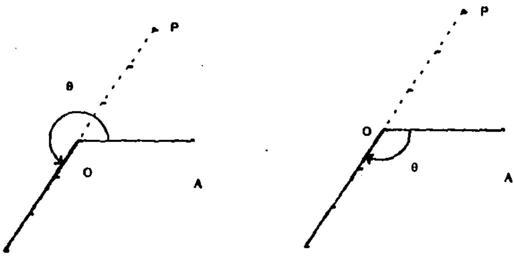
Si $n= -1$, entonces P también está determinado por las coordenadas $P(3,1/4\ \pi + 2\pi(-4/4))$, es decir, $P(3,-7/4\ \pi)$, como se muestra en la siguiente figura:



Ahora bien, si un punto *P* tiene un radio vector negativo, éste se encontrará en la extensión del lado terminal. Para localizarlo primero medimos el ángulo polar de manera normal y tomamos el radio vector en la prolongación opuesta al lado terminal a partir del polo. Si P está sobre la extensión del lado terminal del ángulo de medida en radianes θ, un conjunto de coordenadas polares de P es (r,θ), donde $r = -|OP|$, como se muestra en la siguiente figura:



Si consideramos el ejemplo 2, también el punto *P* queda determinado por las coordenadas $(-3, 5/4\pi)$ o $(-3, -3/4\pi)$, como se muestra en la siguientes figuras:



Como el ángulo polar generalmente es medido en radianes (*Apéndice I*), las coordenadas polares de un punto son parejas ordenadas de números reales.

Por lo anterior, la capacidad de selección de coordenas para un mismo punto es ilimitado, sin embargo convendremos, salvo especificación en contrario, en considerar para todo punto *P* diferente del polo las coordenadas (r,θ) tales que $r > 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. A tal par lo llamaremos **par principal de coordenadas polares del punto *P*** y, en consecuencia, hay un único conjunto de coordenadas para *P*.

TRANSFORMACION DE COORDENADAS POLARES A RECTANGULARES

La gráfica de una ecuación en coordenadas polares r y θ consiste de todos y cada uno de los puntos P que tienen al menos un par de coordenadas que satisfacen la ecuación. A una ecuación de una gráfica en coordenas polares se le llama ecuación polar para distinguirla de una ecuación rectangular o cartesiana.

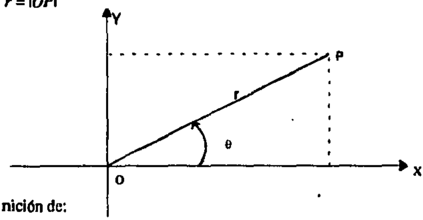
Frecuentemente, para un lugar geométrico determinado, conviene transformar la ecuación polar a la ecuación rectangular o cartesiana y viceversa.

Para efectuar esta transformación es necesario conocer las relaciones que existen entre las coordenadas polares y las rectangulares de cualquier punto.

Es posible determinar facilmente esta relación cuando el eje polar coincide con la parte positiva del eje x y el polo con el origen.

Supongamos que (x,y) y (r,θ) son las coordenadas rectangulares y polares respectivamente del punto P diferente del origen.

Consideremos que $r > 0$, entonces P está en el lado terminal del ángulo de θ radianes y $r = |OP|$



Por la definición de:

- la función seno (razón del cateto opuesto entre la hipotenusa),

$$\operatorname{sen}(\theta) = y/_r$$

- la función coseno (razón del cateto adyacente entre la hipotenusa),

$$\cos(\theta) = x/_r$$

De estas igualdades encontramos que,

A) $$y = r \operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad x = r\cos\theta$$

Si elevamos al cuadrado ambas igualdades tenemos,

B) $$y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \quad \text{y} \quad x^2 = r^2\cos^2\theta$$

igualando la suma de los miembros,

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

o equivalentemente,

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)$$
$$x^2 + y^2 = r^2 (1)$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si dividimos las igualdades del inciso A),

C)

$$\frac{y}{x} = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{r \cos \theta}$$

$$\frac{y}{x} = \tan \theta$$

o de otra forma,

$$\arctan \frac{y}{x} = \theta$$

Ejemplos:

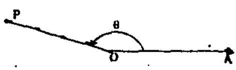
3) Encontrar las coordenadas rectangulares del punto P cuyas coordenadas polares son $(4,\ 5/6\ \pi)$.

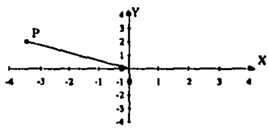
$$r = 4, \quad \theta = 5/6\ \pi$$

Por las igualdades del inciso A)

$$x = 4 \cos 5/6\ \pi, \quad x = 4 \cdot -1/2\sqrt{3}, \quad x = -3.4641$$
$$y = 4 \operatorname{sen} 5/6\ \pi, \quad y = 4 \cdot 1/2, \quad y = 2$$

entonces las coordenadas rectangulares son (-3.4641, 2).





4) Encontrar el par de coordenadas polares del punto P cuyas coordenadas rectangulares son (5,0).

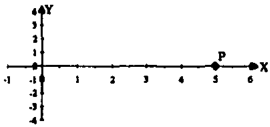
✎ Si despejamos r del inciso B), tenemos

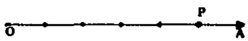
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{(5)^2 + 0}, \quad r = 5$$

del inciso C),

$$\tan\theta = {}^{y}/_{x}, \quad \tan\theta = {}^{0}/_{5}, \quad \theta = 0$$

entonces las coordenadas polares son (5,0).





5) Encontrar una ecuación cartesiana de la gráfica cuya ecuación polar está dada por $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

✎ como el sen $2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, despejando del inciso A) tenemos,

$$r^2 = 2\, a^2 \,(y/r)\ (x/r)$$

sustituyendo r^2 del inciso B) y multiplicando ambos miembros por r^2,

$$(x^2 + y^2)^2 = 2\, a^2\, xy$$

6) Encontrar una ecuación polar de la gráfica cuya ecuación cartesiana está dada por $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$.

✎ sustituyendo r^2 por la igualdad del inciso B) y del inciso A) x y y tenemos,

$$r^2 \cdot r^2 = a^2\,(r^2 \cos^2\theta - r^2 \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$r^2 \cdot r^2 = a^2\ r^2\,(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

como $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$,

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN COORDENADAS POLARES

Sean P_1 (r_1,θ_1) y P_2 (r_2,θ_2) dos puntos cualesquiera, entonces la distancia entre ellos $d = |P_1 P_2|$, está dada por,

C.I)
$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\, r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Demostración:

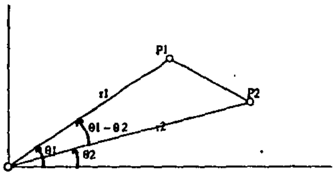
Los radios vectores de P_1 y P_2 son r_1 y r_2 respectivamente. Construyamos el triángulo OP_1P_2, en donde $r_1 = |OP_1|$ y $r_2 = |OP_2|$. El ángulo P_1OP_2 está dado por $\theta_1 - \theta_2$.

Por la Ley de los Cosenos (*Apéndice I*), tenemos

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1\, r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

y de aquí,

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1\, r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$



También podemos demostrarlo transformando los puntos en coordenadas rectangulares y aplicando la definición de distancia entre dos puntos:

Sean $F_1(x_1,y_1)$ y $F_2(x_2,y_2)$ las coordenadas rectangulares de los puntos $P_1(r_1,\theta_1)$ y $P_2(r_2,\theta_2)$ respectivamente.

La distancia entre F_1 y F_2 está dada por,

$$d\,|F_1F_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

sustituyendo las x's y las y's del inciso A), tenemos,

$$d\,|F_1F_2| = \sqrt{(r_2 \cos\theta_2 - r_1 \cos\theta_1)^2 + (r_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_1 \operatorname{sen}\theta_1)^2}$$

$$= \sqrt{r_2^2\cos^2\theta_2 - 2r_2\cos\theta_2\, r_1\cos\theta_1 + r_1^2\cos^2\theta_1 + r_2^2\operatorname{sen}^2\theta_2 - 2r_2\operatorname{sen}\theta_2\, r_1\operatorname{sen}\theta_1 + r_1^2\operatorname{sen}^2\theta_1}$$

$$= \sqrt{r_2{}^2\cos^2\theta_2 + r_2{}^2\text{sen}^2\theta_2 + r_1{}^2\cos^2\theta_1 + r_1{}^2\text{sen}^2\theta_1 - 2r_2\cos\theta_2\, r_1\cos\theta_1 - 2r_2\text{sen}\theta_2 r_1\text{sen}\theta_1}$$

$$= \sqrt{r_2{}^2(\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2) + r_1{}^2(\cos^2\theta_1 + \text{sen}^2\theta_1) - 2r_2r_1(\cos\theta_2\cos\theta_1 + \text{sen}\theta_2\,\text{sen}\theta_1)}$$

como $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$ y

$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, entonces,

$$= \sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

Ejemplos:

7) Encontrar el perímetro del triángulo cuyos vértices son $P_1(1, \pi/3)$, $P_2(3, \pi/4)$ y $P_3(5, \pi/2)$.

$r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = 5$, $\theta_1 = \pi/3$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_3 = \pi/2$

$d|P_1P_2| = \sqrt{1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3\cos(\pi/3 - \pi/4)}$

$d|P_1P_2| = \sqrt{10 - 6\cos(\pi/12)} \approx 2.0505$

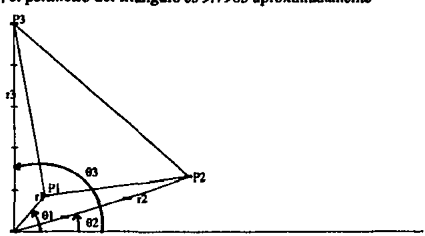
$d|P_2P_3| = \sqrt{3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5\cos(\pi/4 - \pi/2)}$

$d|P_2P_3| = \sqrt{34 - 30\cos(-\pi/4)} \approx 3.5759$

$d|P_3P_1| = \sqrt{5^2 + 1^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1\cos(\pi/2 - \pi/3)}$

$d|P_3P_1| = \sqrt{26 - 10\cos(\pi/6)} \approx 4.1641$

Por lo tanto, el perímetro del triángulo es 9.7905 aproximadamente



ECUACIONES DE LA RECTA EN COORDENADAS POLARES

Cualquier ecuación de primer grado para las variable x y y puede escribirse de la forma

D) $$Ax + By + C = 0$$

donde, A, B y C son números reales y A y B no son simultáneamente iguales a 0.(*Forma General de la ecuación de la recta*).

La gráfica de esta ecuación lineal en x y y es siempre una línea recta.

Si sustituimos x y y por las igualdades dadas en el inciso A), tenemos:

$$A\,r\cos\theta + B\,r\,\mathrm{sen}\,\theta + C = 0$$

despejando r, tenemos:

$$r\,(A\cos\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta) = -C$$

E)

$$r = \frac{-C}{A\cos\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

que es la ecuación polar de la recta.

Ahora bien, consideremos en el plano cartesiano un segmento OP_1 de longitud p con uno de sus extremos en el origen y determinemos su posición exacta por el ángulo ω. Tracemos la recta l que pasa por el punto $P_1(x_1,y_1)$ y que es perpendicular a OP_1, entonces para cualquier posición de la recta l, por trigonometría podemos determinar que:

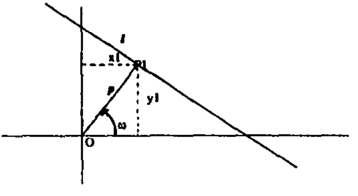
F) $$x_1 = p\cos\omega \quad \text{y} \quad y_1 = p\,\mathrm{sen}\,\omega$$

Entonces podemos determinar que las coordenadas del punto P_1 son ($p\cos\omega$, $p\,\mathrm{sen}\,\omega$).

Como el ángulo de inclinación de OP_1 es ω, su pendiente es $\mathrm{tg}\,\omega$ y como la recta l es perpendicular a OP_1, su pendiente está dada por:(*la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares entre sí, es que el producto de sus pendientes sea igual a -1*)

G)

$$-\mathrm{ctg}\,\omega = -\frac{\cos\omega}{\mathrm{sen}\,\omega}$$



Y por la definición de la ecuación de la recta que pasa por el punto dado $P_1\ (x_1,y_1)$ y tiene pendiente m:

H) $$y - y_1 = m\,(x - x_1),$$

entonces por los incisos F), G) y H), la ecuación de l es:

$$y - p \operatorname{sen} \omega = - \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}\ (x - p \cos \omega)$$

$$y \operatorname{sen} \omega - p \operatorname{sen}^2 \omega = - x \cos \omega + p \cos^2 \omega$$

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p(\operatorname{sen}^2 \omega + \cos^2 \omega) = 0$$

como $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$,

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0$$

es la ecuación polar de la recta en la forma normal.

Consideremos ahora el segmento OP perpendicular a la recta l. N tiene coordenadas $P(\rho \cos \omega, \rho \operatorname{sen} \omega)$ y P sea otro punto que pasa sobre la recta l con coordenadas $(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$, entonces por el inciso H),

$$(\rho \operatorname{sen} \omega - r \operatorname{sen} \theta) = - \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} (\rho \cos \omega - r \cos \theta)$$

$$- \operatorname{sen} \omega\ (\rho \operatorname{sen} \omega - r \operatorname{sen} \theta) = \cos \omega\ (\rho \cos \omega - r \cos \theta)$$

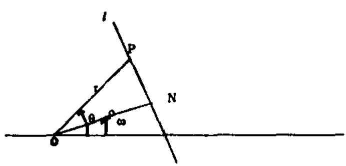
$$-\rho \operatorname{sen}^2 \omega + r \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \theta = \rho \cos^2 \omega - r \cos \omega \cos \theta$$

$$r \cos \omega \cos \theta + r \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \theta = \rho \cos^2 \omega + \rho \operatorname{sen}^2 \omega$$

$$r\,(\cos \omega \cos \theta + \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \theta) = \rho\ (\cos^2 \omega + \operatorname{sen}^2 \omega)$$

I) $$r \cos(\theta - \omega) = \rho$$

que es la ecuación polar de la recta si (ρ,ω) es el par principal de coordenadas polares del pie de la perpendicular trazada desde el polo a cualquier recta en el plano coordenado polar.



Existen tres casos particulares para la ecuación de la recta en coordenadas polares:

RECTAS QUE PASAN POR EL POLO

Si la recta pasa por el polo y con una inclinación α, su ecuación es de la forma,

J) $$\operatorname{tg} \theta = \alpha$$

puesto que tal recta es el conjunto de los puntos cuyo ángulo vectorial es α.

Podemos comprobarlo si sustituimos en la ecuación rectangular de la recta que pasa por el punto $P(0,0)$ y tiene la pendiente α, dada por

$$y = \alpha x$$

los valores de las igualdades del inciso A):

$$r \operatorname{sen} \theta = \alpha r \cos \theta$$

despejando α,

$$\alpha = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

$$\alpha = \operatorname{tg} \theta$$

que es la inclinación de la recta.

RECTAS PARALELAS AL EJE POLAR

Si la recta es paralela al eje polar y está a e unidades de él, su ecuación es de la forma,

K) $$r \operatorname{sen} \theta = e, \quad e \neq 0$$

donde e es positivo cuando está arriba del eje polar y negativo cuando está abajo de él.

Si consideramos la ecuación general de la recta del inciso **D)**, en la cual A = 0, la ecuación toma la forma,

$$B\,y = C$$

despejando *y* tenemos:

$$y = C / B = e$$

donde *e* significa la intersección del eje y. Si sustituimos *y* de la igualdad del inciso **A)**, tenemos

$$r \operatorname{sen} \theta = e$$

RECTAS PERPENDICULARES AL EJE POLAR

Si la recta es perpendicular al eje polar y está a *d* unidades del polo, su ecuación es de la forma,

L) $$r \cos \theta = d, \quad d \neq 0$$

donde *d* es positivo cuando está a la derecha del eje polar y negativo cuando está a la izquierda de él.

Si consideramos la ecuación general de la recta del inciso **D)**, en la cual B = 0, la ecuación toma la forma,

$$A\,x = C$$

despejando *x* tenemos:

$$x = C / A = d$$

donde *d* significa la intersección del eje x. Si sustituimos *x* de la igualdad del inciso **A)**, tenemos

$$r \cos \theta = d$$

Ejemplos:

8) Obtener la ecuación polar de la recta que es horizontal dos unidades por debajo del origen.

✎ Por el inciso **K)**, ecuación para rectas paralelas al eje polar, la ecuación que buscamos está dada por,

$$r \operatorname{sen} \theta = -2$$

9) Obtener la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $(6, {}^2/_3\,\pi)$ y es perpendicular al eje polar.

✎ Por el inciso **L)**, ecuación para rectas perpendiculares al eje polar,

$$6 \cos {}^2/_3\,\pi = 6 \cdot (-{}^1/_2) = -3$$

por lo tanto la ecuación está dada por,

$$r \cos \theta = -3$$

10) Obtener la ecuación polar de la recta perpendicular al segmento **OP** cuyas coordenadas de **P** son $(2, {}^1/_6\,\pi)$.

✎ Por el inciso **I)**, $r(\cos \theta - \omega) = p$, entonces la ecuación de la recta sería:

$$r(\cos \theta - {}^1/_6\,\pi) = 2$$

11) Obtener la ecuación polar de la recta que pasa por los puntos (4,3) y (6,9).

✎ Por el inciso **H)** tenemos,

$$y - 3 = m(x - 4) \quad \text{y} \quad y - 9 = m(x - 6)$$

$$\frac{y - 3}{x - 4} = \frac{y - 9}{x - 6}$$

resolviendo la ecuación, nos queda

$$6x - 2y = 18$$

por el inciso **E)**, la ecuación polar de la recta es,

$$r = \frac{18}{6 \cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta}$$

CIRCUNFERENCIA

Después de la recta, la línea más familiar es la circunferencia, la cual puede definirse como el lugar geométrico de todos los puntos de un plano a una misma distancia de un punto fijo del plano.

El punto fijo se llama **centro** de la circunferencia y la distancia constante se llama **radio.**

En el plano cartesiano, una circunferencia cuyo centro es el punto (h,k) y cuyo radio es la constante r, tiene por ecuación,

M) $$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Si la circunferencia se encuentra en el origen, entonces la ecuación toma la forma,

N) $$x^2 + y^2 = r^2$$

Partiendo del inciso M), si desarrollamos la ecuación tenemos,

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$

y agrupando,

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

y esta ecuación se puede escribir de la forma,

O) $$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que corresponde a la forma general de la ecuación de un círculo.

En el plano polar, si $C(c,\alpha)$ es el centro de una circunferencia cualquiera de radio a y $P(r,\theta)$ un punto cualquiera de la circunferencia, entonces

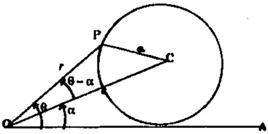
P) $$r^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha) + c^2 = a^2$$

es la ecuación polar de la circunferencia.

Demostración:

En la figura, se muestra el triángulo que forman los puntos OCP y por la ley de los cosenos,

$$a^2 = r^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha) + c^2$$



También podemos, a partir de la ecuación del inciso **M)**, y de las igualdades del inciso **A)**, encontrar la ecuación polar de la circunferencia:

Del inciso **M)**, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$

sustituyendo x y y del inciso **A)**

$$(r \cos \theta - h)^2 + (r \operatorname{sen} \theta - k)^2 = a^2$$

desarrollando y agrupando, nos queda

Q)

$$r^2 - 2r\,(h \cos \theta + k \operatorname{sen} \theta) + h^2 + k^2 = a^2$$

como $h = c \cos \alpha$, $k = c \operatorname{sen} \alpha$ y $h^2 + k^2 = c^2$, sustituyendo, nos queda

$$r^2 - 2cr\,(\cos \alpha \cos \theta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta) + h^2 + k^2 = a^2$$

$$r^2 - 2cr \cos(\theta - \alpha) + c^2 = a^2$$

Como en el caso de la recta, existen casos especiales de la ecuación de la circunferencia que vale la pena comentar.

CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL POLO Y RADIO R.

Del inciso **P)**, si el centro de la circunferencia es el punto $(0,\theta)$, $c = 0$ y $\alpha = \theta$, y la ecuación se reduce a,

$$r^2 - [(2)(0)(r \cos 0)] + 0 = a^2$$

R) $r^2 = a^2$

CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR EL POLO CON CENTRO SOBRE EL EJE POLAR

Si el centro de la circunferencia está sobre el eje polar y pasa por el polo, entonces la ecuación del inciso **P)** se reduce a:

S) $r = \pm 2\,a \cos \theta$

en donde r es positivo si el centro está a la derecha del polo o negativo si está a la izquierda.

CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR EL POLO Y SU CENTRO ESTA SOBRE EL EJE A $\pi/_2$

Si el centro de la circunferencia está sobre el eje a $\pi/2$, la ecuación del inciso **P)** se reduce a,

T) $$r = \pm 2\,a \operatorname{sen} \theta$$

en donde r es positivo si el centro está arriba del eje polar y negativo si está abajo.

Ejemplos:

12) Encontrar las coordenadas polares del centro y el radio del círculo definido por la ecuación $r = 8 \cos \theta$.

✎ por el inciso **S)**,

$$r = 2 \cdot 4 \cos \theta, \quad a = 4 \quad \text{y} \quad \alpha = 0$$

entonces las coordenadas polares del centro son $(4,0)$ y el radio es igual a 4.

13) Encontrar la ecuación polar de la circunferencia que tiene su centro en $(5, \pi/_4)$ y radio 6.

✎ por el inciso **P)**,

$$c = 5, \quad \alpha = \pi/_4 \quad \text{y} \quad a = 6$$

$$r^2 - 2 \cdot 5 \cdot r \cos(\theta - \pi/_4) + 5^2 = 6^2$$

$$r^2 - 10\,r \cos(\theta - \pi/_4) + 25 - 36 = 0$$

es la ecuación que buscamos.

14) Transformar la ecuación rectangular de la circunferencia: $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$, a la ecuación polar.

✎ $$2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$$

dividiendo entre 2 ambos miembros de la ecuación y reagrupando, nos queda

$$(x^2 - 3x) + (y^2 + 5y) = -\,^7/_2$$

completando los cuadrados y reduciendo

$$(x - \,^3/_2)^2 + (y + \,^5/_2)^2 = 5$$

por lo tanto, las coordenadas rectangulares del centro de la circunferencia son $({}^{3}/_{2}, -{}^{5}/_{2})$ y su radio es $\sqrt{5}$.

Ahora del inciso **Q)**

$$r^2 - 2r({}^{3}/_{2} \cos\theta - {}^{5}/_{2} \operatorname{sen}\theta) = -{}^{9}/_{2}$$

es la ecuación polar de la circunferencia.

15) Obtener el radio y las coordenadas polares del centro de la circunferencia que tiene por ecuación polar

$$r = 2\cos\theta + 2\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta$$

✎ por el inciso **P)**, $r^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha) + c^2 = a^2$

entonces multiplicando por r y reagrupando, la ecuación nos queda

$$r^2 - 2r\cos\theta + 2\sqrt{3}\,r\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$r^2 - 2r(\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta) = 0$$

dividiendo el 2o. término del primer miembro por $1 = {}^{c}/_{c}$, nos queda

$$r^2 - 2rc({}^{1}/_{c}\cos\theta + {}^{\sqrt{3}}/_{c}\operatorname{sen}\theta) = 0$$

de aquí podemos observar dos situaciones:

a) $a^2 = c^2$ y por lo tanto es una circunferencia que pasa por el origen, y
b) ${}^{1}/_{c} = \cos\alpha$ y ${}^{\sqrt{3}}/_{c} = \operatorname{sen}\alpha$, como

$$({}^{1}/_{c})^2 + ({}^{\sqrt{3}}/_{c})^2 = 1$$

$c = 2$ y por lo tanto el radio es 4
y sustituyendo c en el inciso b), tenemos que $\alpha = \pi/_3$,
por lo tanto las coordenadas polares del centro son $(2, \pi/_3)$.

CONICAS

Ahora comentaremos las ecuaciones de otras curvas cuyo número de aplicaciones tanto teóricas como prácticas las hace importantes: **las secciones cónicas.**

Su designación proviene del hecho de que el lugar geométrico o curva puede obtenerse como la intersección de un cono circular recto y un plano.

Existen tres clases importantes de cónicas, a saber:

* La Parábola
* La Hipérbola
* La Elipse

En el plano cartesiano, son representadas por ecuaciones de segundo grado o cuadráticas en dos variables de la forma,

U) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

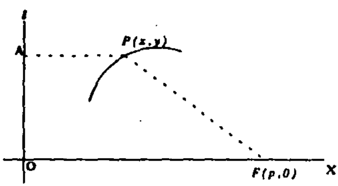
* Si $B = 0$, queda de la forma

V) $$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y el lugar geométrico debe ser una sección cónica con uno de sus ejes paralelo o coincidente con uno de los ejes coordenados, o bien uno de los casos excepcionales (*Apéndice II*).

* Si $B \neq 0$, el eje focal es oblicuo con respecto a los ejes coordenados. Sin embargo, la ecuación del inciso U) se puede transformar en una ecuación de la forma del inciso V).

Un concepto importante que nos permite conocer el tipo de lugar geométrico de que se trata es la **excentricidad de la cónica.**



Dada una recta l y un punto fijo F no contenido en esa recta, se llama cónica al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de l y F, de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de l es siempre igual a una constante positiva, denominada **excentricidad de la cónica.**

$$\frac{|PF|}{|PA|} = e$$

$$\frac{(x - p)^2 + y^2}{|x|} = e$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, quitando denominadores y trasponiendo, nos queda

AA) $$(1 - e^2)\,x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0$$

ecuación que representa una cónica como lugar geométrico, determinando su naturaleza el valor de la excentricidad e:

a) Si $e = 1$

la ecuación del inciso **AA)** toma la forma $y^2 = 2p(x - p/_2)$ y representa una **parábola** cuyo vértice es $(p/_2,0)$ y cuyo eje coincide con el eje X.

b) Si $e < 1$

la ecuación determina una **elipse** y $e = {}^C/_A$.(*Apéndice II*).

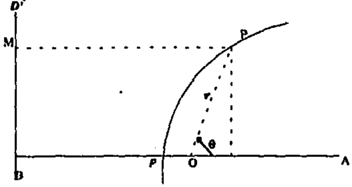
En particular, si $e = 0$, la ecuación representa una circunferencia.

c) Si $e > 1$

la ecuación determina el lugar geométrico de una **hipérbola** y $e = {}^C/_A$. (*Apéndice II*)

ECUACION GENERAL DE LAS CONICAS EN COORDENADAS POLARES

Se pueden obtener ecuaciones polares para la parábola, la elipse y la hipérbola transformando sus ecuaciones en forma rectangular a la forma polar por medio de las ecuaciones de transformación del inciso **A)**, sin embargo se pueden obtener ecuaciones más sencillas si se hace coincidir el foco de la cónica con el origen y utilizando el concepto de excentricidad.



Sea p la distancia de la directriz DD',que se encuentra a la izquierda del polo, al foco que se encuentra en el polo O. Entonces, el punto $P(r,\theta)$ pertenece a una cónica si y solo sí

$$|OP| = e\,|MP|, \quad e > 0$$

como $|OP| = r$ y $|MP| = p + r\cos\theta$

nos queda

$$r = e\,(p + r\cos\theta)$$

despejando r, se obtiene la ecuación estandar en forma polar

AB)

$$r = \frac{e\,p}{1 - e\cos\theta}$$

Si la directriz se encuentra a la derecha del polo p unidades, la ecuación será

AC)

$$r = \frac{e\,p}{1 + e\cos\theta}$$

Si la directriz es paralela al eje polar y está arriba de éste p unidades, la ecuación es

AD)

$$r = \frac{e\,p}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$$

Finalmente, si la directriz es paralela al eje polar y está abajo de éste p unidades, la ecuación toma la forma

AE)

$$r = \frac{e\,p}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$$

Ejemplos:

16) Determinar el lugar geométrico, encontrar la ecuación rectangular y esbozar la gráfica que representa la ecuación polar

$$r = \frac{9}{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$$

✎ dividiendo el denominador y el numerador del segundo miembro entre 2

$$r = \frac{9/2}{2/2 - 2/2\,\text{sen}\,\theta}$$

considerando la ecuación **AE)** podemos observar que:

* $e = 1$ y por lo tanto el lugar geométrico es una **parábola**,

* $ep = 9/2$, y por lo tanto $p = 9/2$,

* como en el denominador el signo del 2o. término es negativo, la directriz está abajo del eje polar y por lo tanto la parábola abre hacia arriba.

* como el foco está en el origen, el vértice se encuentra en $\theta = 3/2\,\pi$

entonces resolviendo ,

$$r = \frac{9/2}{1 - \text{sen}\,3/2\pi} = 9/4$$

por lo tanto el vértice está en el punto polar $(9/4, 3/2\pi)$.

Utilizando las igualdades del inciso A), las coordenadas rectangulares del vértice son

$$x = 9/4 \cos 3/2\,\pi = 0 \quad \text{y} \quad y = 9/4\,\text{sen}\,3/2\pi = -9/4$$

la ecuación rectangular, *apéndice II*, será de la forma

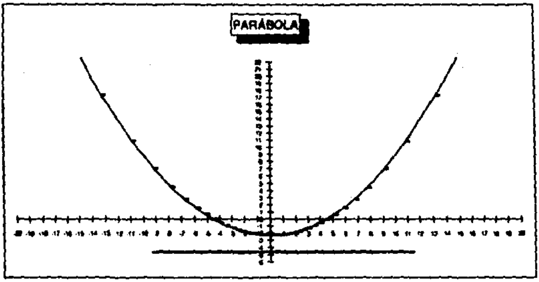
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

y sustituyendo y reduciendo, la podemos obtener

$$x^2 = 3y + 27/12$$

$$x^2 = 3y + 9/4$$

por último, la gráfica de la parábola es:



17) Determinar el lugar geométrico que representa la ecuación polar

$$r = \frac{6}{2 - 3\cos\theta}$$

encontrar su ecuación rectangular y la gráfica correspondiente.

dividiendo el denominador y el numerador del segundo miembro entre 2

$$r = \frac{6/2}{2/2 - 3/2\cos\theta}$$

de aquí podemos observar que

* $e = 3/2 > 1$ y por lo tanto el lugar geométrico es una **hipérbola**.
* $ep = 3$ y por lo tanto $p = 2$
* como el signo del 2o. término del denominador es negativo, la directriz está a la izquierda del polo.
* resolviendo para $\theta = \pi$, y $\theta = 0$ encontraremos las coordenadas de los vértices,

$$r = \frac{3}{1 - {}^{3}/_{2} \cos p} = {}^{6}/_{5}$$

$$r = \frac{3}{1 - {}^{3}/_{2} \cos 0} = -6$$

por lo tanto las coordenadas polares de los vértices son $V({}^{6}/_{5},\pi)$ y $V'(-6,0)$.

* resolviendo para $\theta = \pi/_{2}$, y $\theta = {}^{3}/_{2}\ \pi$ encontraremos las coordenadas del lado recto,

$$r = \frac{3}{1 - {}^{3}/_{2} \cos \pi/_{2}} = 3$$

$$r = \frac{3}{1 - {}^{3}/_{2} \cos {}^{3}/_{2}\ \pi} = 3$$

por lo tanto el lado recto de una de las ramas de la hipérbola tiene una longitud de 6 unidades.

* obteniendo la distancia entre los vértices, por el inciso C.1), para conocer la longitud del eje transverso, encontramos que $2a = {}^{24}/_{5}$ y por lo tanto $a = {}^{12}/_{5}$.

* como sabemos además que la longitud del lado recto está dada por,(*Apéndice II*)

$$\frac{2b^2}{a}$$

igualando a 6 y sustituyendo el valor de a, obtenemos $b = {}^{6}/\sqrt{5}$.

* convirtiendo las coordenadas de los vértices a coordenadas rectangulares de acuerdo a las ecuaciones del inciso A), tenemos

$$V\,(-6,0) \text{ y } V'(-{}^{6}/_{5},0)$$

para conocer las coordenadas del centro, encontramos el punto medio del eje transverso y éste es $C(-{}^{18}/_{5},0)$.

* como la ecuación rectangular de la hipérbola con centro en (h,k) y eje focal paralelo al eje X está dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

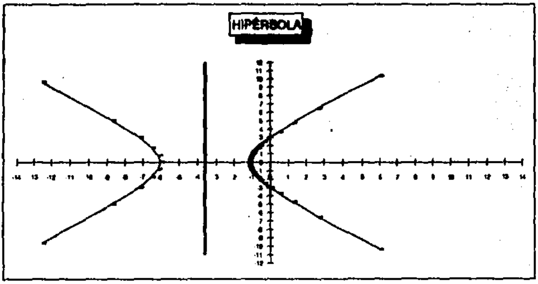
la ecuación rectangular nos queda

$$\frac{(x+{}^{18}/_{5})^2}{({}^{12}/_{5})^2} - \frac{(y-0)^2}{({}^{6}/\sqrt{5})^2} = 1$$

desarrollando el binomio, eliminando cocientes y reordenando términos, nos queda

$$5x^2 + 36x - 4y^2 + 36 = 0$$

* **finalmente la gráfica es:**



18) **Determinar el lugar geométrico que representa la ecuación polar**

$$r = \frac{9}{6 - 4 \text{ sen } \theta}$$

y encontrar su ecuación rectangular y la gráfica correspondiente.

✎ **dividiendo el denominador y el numerador del segundo miembro entre 6**

$$r = \frac{{}^{3}/_{2}}{1 - {}^{2}/_{3} \text{ sen } \theta}$$

de aquí podemos observar que

* $e = {}^{2}/_{3} < 1$ **y por lo tanto el lugar geométrico es una elipse.**

* $ep = {}^3/_2$ y por lo tanto $p = {}^9/_4$

* como el signo del 2o. término del denominador es negativo y la función es seno, el eje focal está sobre el eje a $\pi/_2$ y la directriz está abajo del eje polar.

* resolviendo para $\theta = \pi$, y $\theta = 0$ encontraremos las coordenadas de uno de los lados rectos,

$$r = \frac{{}^3/_2}{1 - {}^2/_3 \operatorname{sen} \pi} = {}^3/_2$$

$$r = \frac{{}^3/_2}{1 - {}^2/_3 \operatorname{sen} 0} = {}^3/_2$$

por lo tanto uno de los lados rectos tiene una longitud de 3 unidades.

* resolviendo para $\theta = \pi/_2$, y $\theta = {}^3/_2\,\pi$ encontraremos las coordenadas de los vértices,

$$r = \frac{{}^3/_2}{1 - {}^2/_3 \operatorname{sen} \pi/_2} = {}^9/_2$$

$$r = \frac{{}^3/_2}{1 - {}^2/_3 \operatorname{sen} {}^3/_2\,\pi} = {}^9/_{10}$$

por lo tanto las coordenadas polares de los vértices son $V({}^9/_2, \pi/_2)$ y $V'({}^9/_{10}, {}^3/_2\pi)$.

* obteniendo la distancia entre los vértices, por el inciso **C.I)**, para conocer la longitud del eje mayor, encontramos que $2a = {}^{27}/_5$ y por lo tanto $a = {}^{27}/_{10}$.

* como sabemos además que la longitud del lado recto está dada por,(*Apéndice II*)

$$\frac{2b^2}{a}$$

igualando a 3 y sustituyendo el valor de a, obtenemos $b = {}^9/_2\sqrt{5}$.

* convirtiendo las coordenadas de los vértices a coordenadas rectangulares de acuerdo a las ecuaciones del inciso **A)**, tenemos

$$V(0, {}^9/_2) \text{ y } V'(0, -{}^9/_{10})$$

para conocer las coordenadas del centro, encontramos el punto medio del eje mayor (*Apéndice II*) y éste es $C(0, {}^9/_5)$.

* como la ecuación rectangular de la elipse con centro en (h,k) y eje focal paralelo al eje Y está dada por

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

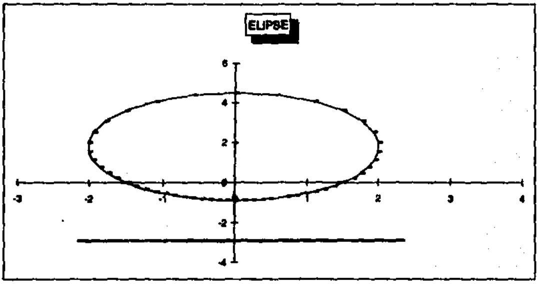
la ecuación rectangular nos queda

$$\frac{(x-0)^2}{(^9/_2\sqrt{_5})^2} - \frac{(y-^9/_5)^2}{(^{27}/_{10})^2} = 1$$

desarrollando el binomio, eliminando cocientes y reordenando términos, nos queda

$$36x^2 + 20y^2 - 72y - 81 = 0$$

* finalmente la gráfica es:



GRAFICAS EN COORDENADAS POLARES

En general el examen de una ecuación puede revelar formas rápidas para la construcción de gráficas. En esta sección, trataremos de plasmar información útil para que, a partir de una ecuación polar, sin necesidad de resolver para un número alto de puntos se pueda graficar el lugar geométrico que representa.

Para este fin, a continuación se especifican los pasos que se seguirán:

1. Determinación de las intersecciones con el eje polar y con el eje a $\pi/_2$.
2. Determinación de la simetría de la curva con respecto al eje polar, al eje a $\pi/_2$ y al polo.
3. Determinación de la extensión del lugar geométrico.
4. Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos.
5. Trazado de la gráfica.

INTERSECCIONES CON EL EJE POLAR Y CON EL EJE A $\pi/_2$

Cuando trazamos una gráfica, es importante determinar en primer lugar, si el polo está en la gráfica. Sustituyendo 0 por r y resolviendo para θ lo podemos averigüar. Si existe un valor para θ cuando $r = 0$, la gráfica pasa por el polo.

Las intersecciones con el eje polar, si existen, se pueden obtener resolviendo la ecuación polar para r cuando a θ se le asignan valores 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, y en general valores $n\pi$, en donde n es un entero cualquiera.

Las intersecciones con el eje a $\pi/_2$, si existen, se pueden obtener resolviendo la ecuación polar para r cuando a θ se le asignan valores $^n/_2\pi$, en donde n es un entero cualquiera.

DETERMINACION DE LA SIMETRIA DE LA CURVA

La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al **eje polar**, si para la ecuación se obtiene una ecuación equivalente cuando (r,θ) es sustituido por $(r,-\theta+2n\pi)$ o $(-r,\pi-\theta+2n)$, donde n es cualquier entero.

Si cuando en una ecuación polar sustituimos (r,θ) por $(r,\pi-\theta+2n\pi)$ o $(-r,-\theta+2n\pi)$ donde n es cualquier entero, se obtiene una ecuación equivalente la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje $\pi/_2$.

Por último, si al sustituir (r,θ) por $(-r,\theta+2n\pi)$ o $(r,\pi+\theta+2n\pi)$ donde n es cualquier entero, se obtiene una ecuación equivalente la gráfica es simétrica con respecto al polo.

EXTENSION DEL LUGAR GEOMETRICO

Para determinar la extensión de la gráfica del lugar geométrico, primero debemos despejar r en función de θ, esto es $r = f(\theta)$

Si r es finito para todos los valores de θ, es una curva cerrada.

Si r, se vuelve infinita en algunos valores de θ, la gráfica no puede ser cerrada.

En valores de θ que hacen a r compleja, no hay curva y por lo tanto, estos valores constituyen intervalos excluídos del lugar geométrico.

Si una curva es cerrada, es útil determinar los valores máximo y mínimo de r.

CALCULO DE COORDENADAS

Asignando un valor particular a θ, podemos obtener el valor o valores correspondientes de r que nos permitan esbozar la gráfica. Con el análisis de la ecuación de los puntos anteriores pueden delimitarse el número y el valor de los intervalos.

Ejemplos:

19) Trazar la gráfica del lugar geométrico que representa la ecuación

$$r = 1 - 2\cos\theta$$

- resolviendo para $r = 0$, nos queda $^1/_2 = \cos\theta$ cuando $\theta = {}^1/_3\pi$, y por lo tanto como si existe un valor de θ cuando $r = 0$, la gráfica pasa por el origen.

- resolviendo para r cuando θ toma los valores 0, π y 2π tenemos,

  $1 - 2\cos 0 = -1$, $1 - 2\cos\pi = 3$ y $1 - 2\cos 2\pi = -1$, por lo tanto la curva cruza el eje polar en el punto $(3, \pi)$

- resolviendo para r cuando θ toma los valores $\pi/_2$ y $^3/_2\pi$ tenemos,

  $1 - 2\cos\pi/_2 = 1$ y $1 - 2\cos {}^3/_2\pi = 1$, por lo tanto la curva cruza el eje a $\pi/_2$ en los puntos $(1, \pi/_2)$ y $(1, {}^3/_2\pi)$.

- sustituyendo θ por $-\theta$, la ecuación no se altera ya que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, por lo tanto la curva es simétrica con respecto al eje polar.

- sustituyendo θ por $\pi - \theta$ la ecuación si se altera ya que,

$$1 - 2\cos\theta \neq 1 + 2\cos\theta, \text{ (\textit{Apéndice I})},$$

  entonces no es simétrica con respecto al eje a $\pi/_2$.

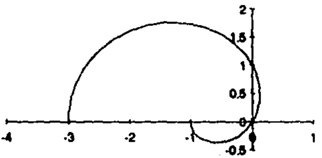
- sustituyendo θ por $\pi + \theta$, la ecuación si se altera ya que,

$1 - 2\cos\theta \neq 1 + 2\cos\theta$, (*Apéndice I*)
por lo tanto no es simétrica con respecto al polo

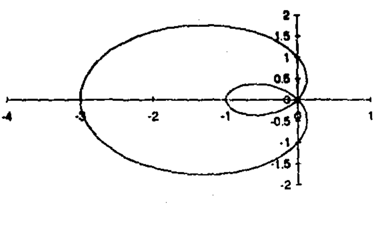
* Como el valor absoluto de $\cos\theta$ nunca es mayor que 1 para cualquier valor de θ, r es finito para todos los valores de θ y por tanto se trata de una curva cerrada. El valor máximo de r se obtiene cuando $1 - 2\cos\theta$ es un máximo y esto es cuando $\theta = \pi$ y el valor máximo de $r = 3$. El valor mínimo de r resulta cuando $\theta = 0$ y es $r = -1$.

* por último, dando valores a θ, podemos esbozar la gráfica, consideremos el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ y las propiedades de simetría,

θ	r
0	-1
$^1/_6\pi$	$1-\sqrt{3}$
$^1/_4\pi$	$1-\sqrt{2}$
$^1/_3\pi$	0
$^1/_2\pi$	1
$^2/_3\pi$	2
$^3/_4\pi$	$1+\sqrt{2}$
$^5/_6\pi$	$1+\sqrt{3}$
π	3



como es simétrica con respecto al eje polar, la gráfica completa quedaría:



en particular, esta gráfica se llama **limaçon**.

20) Trazar la gráfica del lugar geométrico que representa la ecuación

$$r = 1 - 2\ \text{sen}\ \theta$$

✎ resolviendo para $r = 0$, nos queda $^1/_2 = \text{sen}\ \theta$ cuando $\theta = {}^1/_6\pi$ y $\theta = {}^5/_6\pi$, y por lo tanto como si existen valores de θ cuando $r = 0$, la gráfica pasa por el origen.

* resolviendo para r cuando θ toma los valores 0, π y 2π tenemos,

  $1 - 2\ \text{sen}\ 0 = 1$, $1 - 2\ \text{sen}\ \pi = 1$ y $1 - 2\ \text{sen}\ 2\pi = 0$, por lo tanto la curva cruza el eje polar en los puntos $(1,\pi)$ y $(1,2\pi)$

* resolviendo para r cuando θ toma los valores $\pi/_2$ y $^3/_2\pi$ tenemos,

  $1 - 2\ \text{sen}\ \pi/_2 = -1$ y $1 - 2\ \text{sen}\ {}^3/_2\ \pi = 3$, por lo tanto la curva cruza el eje a $\pi/_2$ en los puntos $(-1,\pi/_2)$ y $(3,{}^3/_2\ \pi)$.

* sustituyendo θ por $-\theta$, la ecuación se altera ya que $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\ (\theta)$, y la ecuación quedaría $r = 1 + 2\ \text{sen}\ \theta$, por lo tanto la curva no es simétrica con respecto al eje polar.

* sustituyendo θ por $\pi - \theta$ la ecuación no se altera ya que,

  $$1 - 2\ \text{sen}\ \theta = 1 - 2\ \text{sen}\ (\pi - \theta) = 1 - 2\ \text{sen}\ \theta,\ (\textit{Apéndice I}),$$

  entonces es simétrica con respecto al eje a $\pi/_2$.

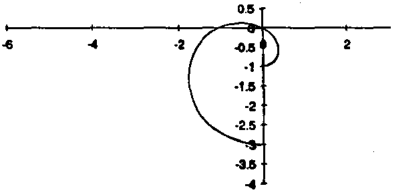
* sustituyendo θ por $\pi + \theta$, la ecuación si se altera ya que,

  $1 - 2\ \text{sen}\ \theta \neq 1 + 2\ \text{sen}\ \theta$, (*Apéndice I*)
  por lo tanto no es simétrica con respecto al polo.

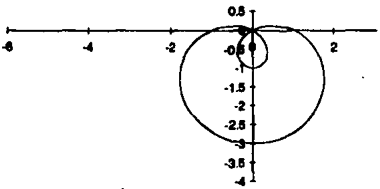
* Como el valor absoluto de sen θ nunca es mayor que 1 para cualquier valor de θ, r es finito para todos los valores de θ y por tanto se trata de una curva cerrada. El valor máximo de r se obtiene cuando $1 - 2\ \text{sen}\ \theta$ es un máximo y esto es cuando $\theta = {}^3/_2\ \pi$ y el valor máximo de $r = 3$. El valor mínimo de r resulta cuando $\theta = {}^1/_2\ \pi$ y es $r = -1$.

* por último, dando valores a θ, podemos esbozar la gráfica, consideremos el intervalo $^1/_2\ \pi \leq \theta \leq {}^3/_2\ \pi$ y las propiedades de simetría,

θ	r
$^1/_2\pi$	-1
$^2/_3\pi$	$1-\sqrt{3}$
$^3/_4\pi$	$1-\sqrt{2}$
$^5/_6\pi$	0
π	1
$^7/_6\pi$	0
$^5/_4\pi$	$1-\sqrt{2}$
$^4/_3\pi$	$1-\sqrt{3}$
$^3/_2\pi$	3



como es simétrica con respecto al eje a $\pi/_2$, la gráfica completa quedaría:



Esta gráfica se llama también **limaçon** y de manera general, la gráfica de una ecuación $r = a \pm b \cos\theta$ o $r = a \pm b \operatorname{sen}\theta$, es un limaçon.

En particular, si a = b , la gráfica de las ecuaciones $r = a \pm b \cos\theta$ ó $r = a \pm b \operatorname{sen}\theta$, se llama cardioide como se muestra en el siguiente ejemplo.

21) Trazar la gráfica del lugar geométrico que representa la ecuación

$$r = 2 - 2 \operatorname{sen} \theta$$

✎ resolviendo para $r = 0$, nos queda $1 = \operatorname{sen} \theta$ cuando $\theta = {}^{1}/_{2}\pi$, y por lo tanto como si existen valores de θ cuando $r = 0$, la gráfica pasa por el origen.

* resolviendo para r cuando θ toma los valores 0, π y 2π tenemos,

  $2 - 2 \operatorname{sen} 0 = 2$, $2 - 2 \operatorname{sen} \pi = 2$ y $2 - 2 \operatorname{sen} 2\pi = 2$, por lo tanto la curva cruza el eje polar en los puntos $(1,\pi)$, $(1,2\pi)$ y $(1,0)$.

* resolviendo para r cuando θ toma los valores $\pi/_2$ y ${}^{3}/_{2}\pi$ tenemos,

  $2 - 2 \operatorname{sen} \pi/_2 = 0$ y $2 - 2 \operatorname{sen} {}^{3}/_{2}\,\pi = 4$, por lo tanto la curva cruza el eje a $\pi/_2$ en los puntos $(0,\pi/_2)$ y $(4,{}^{3}/_{2}\,\pi)$.

* sustituyendo θ por $-\theta$, la ecuación se altera ya que $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$, y la ecuación quedaría $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$, por lo tanto la curva no es simétrica con respecto al eje polar.

* sustituyendo θ por $\pi - \theta$ la ecuación no se altera ya que,

  $$2 - 2 \operatorname{sen} \theta = 2 - 2 \operatorname{sen} (\pi - \theta) = 2 - 2 \operatorname{sen} \theta, \text{ (\textit{Apéndice I})},$$
  entonces es simétrica con respecto al eje a $\pi/_2$.

* sustituyendo θ por $\pi + \theta$, la ecuación si se altera ya que,

  $2 - 2 \operatorname{sen} \theta \neq 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$, (*Apéndice I*)
  por lo tanto no es simétrica con respecto al polo.

* Como el valor absoluto de $\operatorname{sen} \theta$ nunca es mayor que 1 para cualquier valor de θ, r es finito para todos los valores de θ y por tanto se trata de una curva cerrada. El valor máximo de r se obtiene cuando $2 - 2 \operatorname{sen} \theta$ es un máximo y esto es cuando $\theta = {}^{3}/_{2}\,\pi$ y el valor máximo de $r = 4$. El valor mínimo de r resulta cuando $\theta = {}^{1}/_{2}\,\pi$ y es $r = 0$.

* por último, dando valores a θ, podemos esbozar la gráfica, consideremos el intervalo ${}^{1}/_{2}\,\pi \leq \theta \leq {}^{3}/_{2}\,\pi$ y las propiedades de simetría,

* sustituyendo θ por - θ y r por $-r$ la ecuación no se altera ya que,

$-r = -6 \cos 2\theta$ es equivalente a $r = 6 \cos 2\theta$, *(Apéndice I)*, entonces es simétrica con respecto al eje a $\pi/2$.

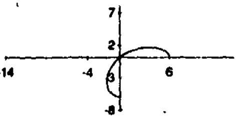
* sustituyendo θ por $\pi + \theta$, la ecuación no se altera ya que,

$6 \cos 2\theta = 6 \cos 2(\pi + \theta)$, *(Apéndice I)* por lo tanto es simétrica con respecto al polo

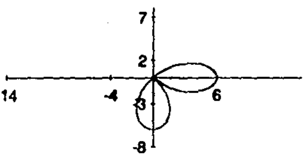
* **Como el valor absoluto de cos 2θ nunca es mayor que 1 para cualquier valor de θ, r es finito para todos los valores de θ y por tanto se trata de una curva cerrada. El valor máximo de r es 6 cuando $\theta = 0$ y el valor mínimo de r es 0 cuando $2\theta = \frac{1}{2}\pi$**

* **por último, dando valores a θ, podemos esbozar la gráfica, consideremos el intervalo $0 \le \theta \le \pi/2$ y las propiedades de simetría**

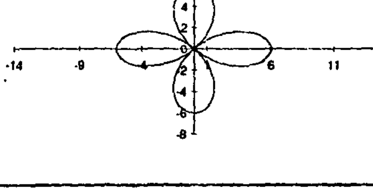
θ	r
0	6
$\frac{1}{12}\pi$	$3\sqrt{3}$
$\frac{1}{6}\pi$	3
$\frac{1}{4}\pi$	0
$\frac{1}{3}\pi$	-3
$\frac{5}{12}\pi$	$-3\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	-6



como es simétrica con respecto al eje $\pi/2$ y al eje polar, la gráfica quedaría:



y como también es simétrica con respecto al polo, la gráfica completa es:



en particular, la gráfica anterior se llama rosa de 4 hojas y la gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a\cos n\theta \quad \text{o} \quad r = a\,\text{sen}\, n\theta$$

es una rosa que tiene n hojas si n es impar y $2n$ hojas si n es par.

23) Trazar la gráfica del lugar geométrico que representa la ecuación

$$r = 2\,\theta$$

- resolviendo para $r = 0$, nos queda $0 = 2\,\theta$ cuando $\theta = 0$, y por lo tanto como si existe un valor de θ cuando $r = 0$, la gráfica pasa por el origen.

* resolviendo para r cuando θ toma los valores 0 y π tenemos,

  $0 = 0$., $2\pi = 2\pi$, por lo tanto la curva cruza el eje polar en los puntos (0,0) y $(2\pi,2\pi)$ y además en todos los puntos $n\pi$, donde n es un entero.

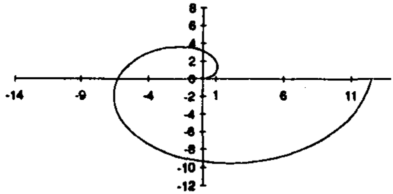
* resolviendo para r cuando θ toma los valores $\pi/_2$ y $^3/_2\pi$ tenemos,

  $2\,\pi/_2 = 2\,\pi/_2$ y $2 \cdot {}^3/_2\,\pi = 2 \cdot {}^3/_2\,\pi$, por lo tanto la curva cruza el eje a $\pi/_2$ en los puntos $(\pi/_2,\pi/_2)$ y $({}^3/_2\,\pi, {}^3/_2\,\pi)$ y además en todos los puntos $(2n+1).\pi/_2$ donde n es un entero.

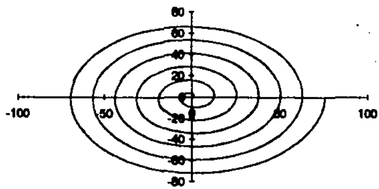
* como θ es cualquier número real, r también es un número real y entonces existen un número infinito de valores para r y por tanto se trata de una curva abierta.

* por último, dando valores a θ, podemos esbozar la gráfica, consideremos el intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$,

θ	r
0	0
$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$
$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
$\frac{1}{2}\pi$	π
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$
π	2π
$\frac{3}{2}\pi$	3π
2π	4π



y la gráfica del intervalo $0 \leq \theta \leq 2n\pi$ con $n = 6$,



esta curva se llama una Espiral de Arquímedes.

DERIVADAS EN COORDENADAS POLARES

En los ejercicios anteriores hemos visto que es necesario encontrar los valores mínimo y máximo de la función de r para poder determinar el intervalo de puntos necesarios para esbozar un lugar geométrico.

Muchas veces es más sencillo si además, podemos encontrar la recta tangente a la curva, y este tópico nos introduce al concepto de derivadas.

Sea $r = f(\theta)$ una ecuación polar de una curva. Para encontrar la pendiente de una recta tangente a una curva polar en un punto (r,θ) en la curva, hagamos las siguientes consideraciones:

* Un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares y un sistema de coordenadas polares en el mismo plano, coincidentes el eje X positivo y el eje polar respectivamente

* La relación de los dos conjuntos de coordenadas mediante las ecuaciones del inciso **A)**.

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Entonces x y y pueden ser consideradas funciones de θ y podemos derivar con respecto a θ ambas ecuaciones,

AF)

$$\frac{\delta x}{\delta\theta} = \cos\theta\,\frac{\delta r}{\delta\theta} - \mathrm{r}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y

AG)

$$\frac{\delta y}{\delta\theta} = \mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\delta r}{\delta\theta} + \mathrm{r}\cos\theta$$

Si α es la medida en radianes de la inclinación de la recta tangente, entonces

$$\tan\alpha = \frac{\delta y}{\delta x}$$

y si $\delta x/\delta\theta \neq 0$ tenemos

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y/\delta\theta}{\delta x/\delta\theta}$$

Sustituyendo AF) y AG) obtenemos

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\text{sen}\,\theta\,(\delta r/\delta\theta) + r\cos\theta}{\cos\theta\,(\delta r/\delta\theta) - r\,\text{sen}\,\theta}$$

Si $\cos\theta \neq 0$, dividiendo el numerador y el denominador del segundo miembro entre $\cos\theta$ y sustituyendo $\delta y/\delta x$ por $\tan\alpha$, tenemos

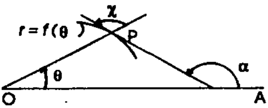
AH)

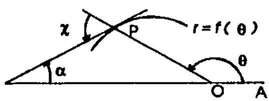
$$\tan\ \alpha = \frac{\tan\theta\,(\delta r/\delta\theta) + r}{\delta r/\delta\theta - r\tan\theta}$$

Sin embargo la fórmula del inciso AH) es generalmente complicada de aplicar. Una fórmula más simple se obtiene al cosiderar el ángulo entre la recta *OP* y la recta tangente. Este ángulo tendrá como medida en radianes χ y se mide desde la recta *OP* en sentido contrario al de las manecillas del reloj a la tangente, $0 \leq \chi < \pi$.

Existen dos casos posibles:

$\alpha \geq \theta$ y $\alpha < \theta$





Si $\alpha \geq \theta$, $\chi = \alpha - \theta$. Y si $\alpha < \theta$, $\chi = \pi - (\theta - \alpha)$. En ambos casos,

$$\tan\chi = \tan(\alpha - \theta)$$

o equivalentemente, (*Apéndice I*)

$$\tan \chi = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \tan \theta}$$

Si sustituimos tan α del inciso **AH)** nos queda

$$\tan \chi = \frac{\{\tan \theta\,(\delta r/\delta\theta) + r\} \,/\, \{(\delta r/\delta\theta) - r \tan \theta\} - \tan \theta}{1 + \{[\tan \theta\,(\delta r/\delta\theta) + r] \,/\, [(\delta r/\delta\theta) - r \tan \theta]\} \tan \theta}$$

$$\tan \chi = \frac{\tan \theta\,(\delta r/\delta\theta) + r - \tan \theta\,(\delta r/\delta\theta) + r \tan^2 \theta}{(\delta r/\delta\theta) - r \tan \theta + \tan^2 \theta\,(\delta r/\delta\theta) + r \tan \theta}$$

$$\tan \chi = \frac{r\,(1 + \tan^2 \theta)}{(1 + \tan^2 \theta)(\delta r/\delta\theta)}$$

AI)

$$\tan \chi = \frac{r}{\delta r/\delta\theta}$$

Si comparamos **AH)** y **AI)**, podemos ver que se simplifica si consideramos χ en lugar de α cuando se trabaja en coordenadas polares.

Ejemplos:

21) Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva cuya ecuación es:

$r = 1 - 2 \cos \theta$ en el punto $(2, {}^{2}/_{3}\,\pi)$.

✎ como $r = 1 - 2 \cos \theta$, $\delta r/\delta\theta = 2 \operatorname{sen} \theta$

en el punto $(2, {}^{2}/_{3}\pi)$, $\delta r/\delta\theta = \sqrt{3}$ y $\tan {}^{2}/_{3}\pi = -\sqrt{3}$
entonces del inciso **AH)**

$$\tan \alpha = \frac{-\sqrt{3}\,\sqrt{3} + [\,1 - (2)(-{}^{1}/_{2})]}{\sqrt{3} - [1-(2)(-{}^{1}/_{2})]\,[-\sqrt{3}\,]} = -{}^{1}/_{3}\sqrt{3}$$

22) Encontrar χ en el punto $({}^{a}/\sqrt{2},\ {}^{1}/_{6}\pi)$, en la curva $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

✎ como $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $\quad r = \sqrt{a^2 \cos 2\theta}$, entonces

$$\delta r/\delta\theta = {}^{1}/_{2}\,(a^2 \cos 2\theta)^{-1/2} \cdot a^2(-\text{sen}\ 2\theta)(2)$$

$$\delta r/\delta\theta = [\ -a^2\ \text{sen}\ 2\theta\ ]\ /\ [\ a^2 \cos 2\theta\ ]^{1/2}$$

para $\theta = {}^{1}/_{6}\pi$ nos queda

$$\delta r/\delta\theta = [\ -a^2\ (\ \sqrt{3}\,/\,_2\ ]\ /\ [\ \sqrt{1}/_2\ ]$$

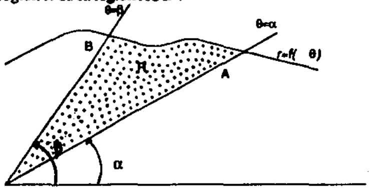
y del inciso AI) y considerando $r = {}^{a}/\sqrt{2}$

$$\tan \chi = {}^{-1}/_{2}\,\sqrt{3}$$

INTEGRALES EN COORDENADAS POLARES

Por último, desarrollaremos un método para encontrar el área de una región acotada por una curva cuya ecuación está dada en coordenadas polares y por dos rectas que pasan por el polo.

Sea la función f continua y no negativa en el intervalo cerrado $[\alpha,\beta]$. Sea R la región acotada por la curva cuya ecuación es $r = f(\theta)$ y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, entonces la región R es la región AOB :



Consideremos una partición Δ de $[\alpha,\beta]$ definida por

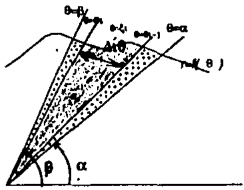
$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{i-1} < \theta_i < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta.$$

De aquí que tenemos n subintervalos de la forma

$$[\,\theta_{i-1}, \theta_i], \text{ donde } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Sea ξ_i un valor de θ en el i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1},\theta_i]$. La medida en radianes del ángulo entre las rectas $\theta = \theta_{i-1}$ y $\theta = \theta_i$, la denotaremos por $\Delta_i\theta$. Entonces el área en unidades cuadradas del sector circular de radio $f(\xi_i)$ unidades y ángulo central de medida en radianes $\Delta_i\theta$ está dada por

$$\tfrac{1}{2}\,[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i\theta$$



Ahora bien, existe un sector circular de este tipo para cada uno de los n subintervalos y la suma de las medidas de las áreas de estos n sectores circulares, la podemos escribir como

$$\tfrac{1}{2}\,[f(\xi_1)]^2\,\Delta_1\theta + \tfrac{1}{2}\,[f(\xi_2)]^2\,\Delta_2\theta + \cdots + \tfrac{1}{2}\,[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i\theta + \cdots + \tfrac{1}{2}\,[f(\xi_n)]^2\,\Delta_n\theta$$

que puede ser escrito como

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\,[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i\theta$$

Si $\|\Delta\|$ es la medida más grande de $\Delta_i\theta$ y A unidades cuadradas es el área de la región R, entonces

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\,[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i\theta$$

y el límite es una integral definida de la forma

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\,f(\theta)\,]^2\,\delta\theta$$

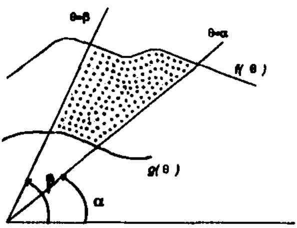
De la misma manera, consideremos ahora dos funciones $f(\theta)$ y $g(\theta)$ y sea R la región limitada por las cuatro ecuaciones:

$R_1 = g(\theta)$, $R_2 = f(\theta)$, para ambas $\theta \in [\alpha,\beta]$,

$\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$,

entonces, si el área A de R existe,

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{\,[\,f(\theta)\,]^2 - [\,g(\theta)\,]^2\,\}\,\delta\theta$$



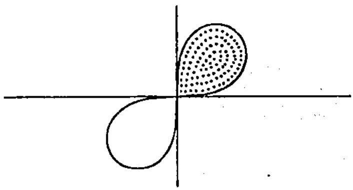
Ejemplos:

23) Encontrar el area A limitada por la curva $r^2 = a^2$ sen 2θ, en el intervalo $0 \le \theta \le \pi/_2$.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (a^2 \operatorname{sen} 2\theta)\, \delta\theta$$

$$A = \frac{a^2}{4} \int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} 2\theta\, \delta\theta = (a^2/_4)(-\cos u) \Big]_0^{\pi/2} = a^2/_4$$

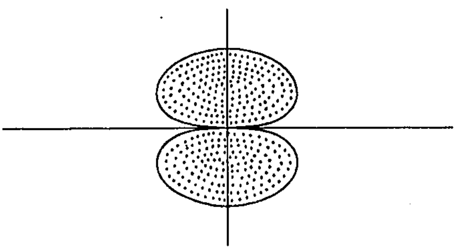
en particular, si $a = 4$, $A = 4$



24) Encontrar el area A limitada por la curva $r^2 = |\operatorname{sen} \theta|$.

Como es una curva simétrica con respecto a los ejes polar y $\pi/2$, entonces basta con encontrar el area de 0 a $\pi/2$ y luego multiplicar por 4.

$$A = 4 \quad \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\theta\, \delta\theta = 2\,(\cos 0 - \cos \pi/_2) = 2$$



APLICACIONES

Adicionalmente a las ventajas que ofrecen las Coordenadas Polares para manejar curvas cerradas similares a las expuestas con anterioridad, brindan, en otros ámbitos de las matemáticas, bondades que facilitan algunas demostraciones.

Una de ellas se tiene, por ejemplo, en el campo de la estadística con una de las variables aleatorias continuas más importantes: la normal.

Sea X la variable aleatoria definida en el intervalo $< -\infty, +\infty >$.

X tiene una distribución normal, si su función de densidad de probabilidad es de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{(-1/2\,[(x-\mu)/\sigma]^2)}$$

con $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$

Para aseverar que f(x) es una función de densidad de probabilidad, se tiene que demostrar que:

1) $f(x) \geq 0$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta x = 1$

3) Para cualquier a, b, tal que $-\infty < a < b < \infty$,

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{b}^{a} f(x)\,\delta x$$

Demostración de los puntos 1) y 2):

1) $f(x) \geq 0$

como $\sigma > 0 \Rightarrow 1 / \sqrt{2\pi} > 0$, entonces la única posibilidad de que f(x) sea menor que 0, sería que,

$$e^{(-1/2\,[(x-\mu)/\sigma]^2)} < 0 \text{ , pero como}$$

$$e^{(-n)^2/2} \geq 0 \text{ , } \Rightarrow f(x) \geq 0$$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta x = 1$

sustituyendo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{(-1/2\,[[x-\mu]/\sigma]^2)}\, \delta x = 1$$

haciendo $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ entonces,

$$\delta t = \frac{\sigma\,(Dx\,(x-\mu)) - (x-\mu)\,Dx\,\sigma}{\sigma^2} = \frac{\sigma - 0}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma}\,\delta x$$

haciendo el cambio de variable,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{(-1/2\,[t]^2)}\, \delta t = I$$

elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \left(e^{(-1/2\,[t]^2)}\right)^2 \delta t = I^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{(-1/2\,[t]^2)}\right)^2 \delta t = I^2$$

sea $s = t$ entonces,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-1/2\,[s]^2)}\, \delta s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-1/2\,[t]^2)}\, \delta t = I^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-1/2\,[s^2 + t^2])}\, \delta s\, \delta t = I^2$$

si $s = r\cos\theta$ y $t = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

dado que,

$\iint f(x,y)\,\delta x\,\delta y = \iint f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\,\delta r\,\delta\theta$

y sustituyendo,

$s^2 + t^2 = (r\cos\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r^2$

entonces, cuando s y t varían de $-\infty$ a $+\infty$, r varía entre 0 y $+\infty$, θ varía entre 0 y 2π, y

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-1/2\,[s^2+t^2])}\,\delta s\,\delta t$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{+\infty} r\,e^{(-1/2\,[r^2])}\,\delta r\ \delta\theta$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \left.-e^{(-1/2\,[r^2])}\right]_0^{\infty}\delta\theta$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\delta\theta = 1$$

❐ *L.Q.Q.D*

CONCLUSIONES

La elección adecuada de un sistema coordenado depende de la naturaleza del problema; sin embargo, generalmente alguno es preferible para cierto tipo de ecuaciones. El Sistema de Coordenadas Polares proporciona una alternativa importante en algunos problemas.

Dada su limitada aplicación, el material bibliográfico que existe también es limitado y para reforzar el campo teórico y formativo de quienes son estudiosos de las Ciencias Matemáticas, podría representar una oportunidad para desarrollarlo más ampliamente.

Específicamente en el ámbito actuarial, hoy por hoy no representa una herramienta de fácil manejo y aplicación, sin embargo su importancia desde el punto de vista formativo y teórico, resulta relevante.

APENDICE I

MEDIDA EN RADIANES

Usando el hecho de que la medida de la longitud de la circunferencia del círculo unitario es 2π, un ángulo formado por una revolución completa de tal forma que *OA* coincide con *OB* tiene medida en grados de 360 y medida en radianes de 2π. De aquí podemos determinar la siguiente correspondencia entre la medida en grados y la medida en radianes:

- $360^{0} = 2\pi$ rad, o equivalentemente,
- $180^{0} = \pi$ rad,
- $1^{0} = 1/180\,\pi$ rad,
- 1 rad $= 180^{0}/\pi = 57^{o}18'$

La siguiente tabla muestra las correspondientes medidas en grados y radianes de algunos ángulos:

MEDIDA EN GRADOS	MEDIDA EN RADIANES
30	$1/6\,\pi$
45	$1/4\,\pi$
60	$1/3\,\pi$
90	$1/2\,\pi$
120	$2/3\,\pi$
135	$3/4\,\pi$
150	$5/6\,\pi$
180	π
270	$3/2\,\pi$
360	$2\,\pi$

TRIGONOMETRIA

Para la resolución de triángulos oblicuángulos, se pueden aplicar las siguientes leyes:

1) LEY DE LOS SENOS. Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

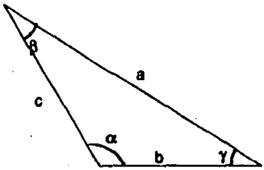
$$a/\text{sen}\ \alpha = b/\text{sen}\ \beta = c/\text{sen}\ \gamma$$

2) LEY DE LOS COSENOS. El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

3) **LEY DE LAS TANGENTES.** En todo triángulo oblicuángulo, la diferencia de dos de sus lados es a su suma como la tangente de la mitad de la diferencia de los ángulos opuestos a esos lados es a la tangente de la mitad de dichos ángulos.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan {}^1/_2(\alpha - \beta)}{\tan {}^1/_2(\alpha + \beta)}$$



IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

$\text{sen}\,(-t) = -\,\text{sen}\,t$

$\cos t = \cos(-t)$

$\text{sen}\,2t = 2\,\text{sen}\,t\cos t$

$\cos 2t = \cos^2 t - \text{sen}^2\,t$

$\cos(t + 2\pi) = \cos t$

$\text{sen}\,(t + 2\pi) = \text{sen}\,t$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\cos b + \cos a\,\text{sen}\,b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$

$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a\cos b - \cos a\,\text{sen}\,b$

$\text{sen}^2\,({}^1/_2\pi) = (1 - \cos t)/2$

$\cos^2({}^1/_2\pi) = (1 + \cos t)/2$

$\tan t = \text{sen}\,t / \cos t$

$\cot t = \cos t / \text{sen}\,t$

$\text{sen}\,t = 1 / \cos t$

COORDENADAS POLARES

$\csc t = 1 / \operatorname{sen} t$

$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$

$\cot^2 t + 1 = \csc^2 t$

$\operatorname{sen} t \csc t = 1$

$\cos t \sec t = 1$

$\tan t \cot t = 1$

$\tan (a - b) = (\tan a - \tan b) / (1 + \tan a \tan b)$

$\tan (-t) = - \tan t$

$\tan (a + b) = (\tan a + \tan b) / (1 - \tan a \tan b)$

DERIVADAS TRIGONOMETRICAS

$D_x (\operatorname{sen} x) = \cos x$

$D_x (\operatorname{sen} u) = \cos u \, D_x u$

$D_x (\cos x) = - \operatorname{sen} x$

$D_x (\cos u) = - \operatorname{sen} u \, D_x u$

$D_x (\tan x) = \sec^2 x$

$D_x (\tan u) = \sec^2 u \, D_x u$

$D_x (\cot x) = - \csc^2 x$

$D_x (\cot u) = - \csc^2 u \, D_x u$

$D_x (\sec x) = \sec x \tan x$

$D_x (\sec u) = \sec u \tan u \, D_x u$

$D_x (\csc x) = - \csc x \cot x$

$D_x (\csc u) = - \csc u \cot u \, D_x u$

COORDENADAS POLARES

INTEGRALES TRIGONOMETRICAS

$\int \text{sen } u \, \delta u = -\cos u + C$

$\int \cos u \, \delta u = \text{sen } u + C$

$\int \tan u \, \delta u = \ln |\sec u| + C$

$\int \cot u \, \delta u = \ln |\text{sen } u| + C$

$\int \sec u \, \delta u = \ln |\sec u + \tan u| + C$

$\int \csc u \, \delta u = \ln |\csc u - \cot u| + C$

$\int \sec^2 u \, \delta u = \tan u + C$

$\int \sec u \tan u \, \delta u = \sec u + C$

$\int \csc^2 u \, \delta u = -\cot u + C$

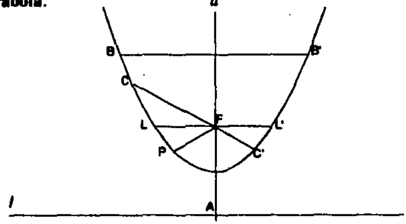
$\int \csc u \cot u \, \delta u = -\csc u + C$

COORDENADAS POLARES

LA PARABOLA

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano y que está igualmente distante de una recta fija del plano y de un punto fijo del plano que no pertenece a la recta.

El punto fijo se llama el **foco** y la recta fija, **la directriz**, y el punto *V*, que está sobre la parábola, situado a la mitad entre el foco y la directriz, se le llama **vértice de la parábola**.



Designemos por *F* el foco y por *l* la directriz. La recta *a* que pasa por *F* y es perpendicular a *l* se llama **eje de la parábola**. Sea *A* el punto de intersección del eje y la directriz.

El punto *V*, punto medio del segmento *AF* que por definición está sobre la parábola, es el **vértice**.

El segmento de recta, tal como *BB'*, que une dos puntos cualesquiera diferentes de la parábola se llama **cuerda**; en particular, una cuerda que pasa por el foco como *CC'* se llama cuerda **focal**.

La cuerda focal *LL'* perpendicular al eje se llama **lado recto**.

Si *P* es un punto cualquiera de la parábola, la recta *FP* que une el foco *F* con el punto *P* se llama **radio focal de *P*, o radio vector**.

Ahora bien, la ecuación de una parábola toma su forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje coincide con uno de los ejes coordenados.

La ecuación de una parábola de vértice en el origen y *eje* el eje *X*, es

I) $$y^2 = 4px$$

en donde el foco es el punto $(p,0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -p$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha y si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda.

Si el eje de una parábola coincide con el eje *Y* y el vértice está en el origen, su ecuación está dada por

II) $$x^2 = 4py$$

en donde el foco es el punto $(0,p)$ y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba y si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo.

En ambos casos, la longitud del lado recto está dada por el valor absoluto de $4p$.

La ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje paralelo al eje X está dada por

III) $$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$$

siendo el valor absoluto de p la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice.

Si p > 0, la parábola se abre hacia la derecha y si p < 0 la parábola se abre hacia la izquierda.

La ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje paralelo al eje Y está dada por

IV) $$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$$

siendo el valor absoluto de p la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice.

Si p > 0, la parábola se abre hacia arriba y si p < 0 la parábola se abre hacia abajo.

Si desarrollamos y trasponemos términos en la ecuaciones de los inciso **III)** y **IV)**

$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$ $\quad$ $(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$

$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$ $\quad$ $x^2 - 4py - 2hx + h^2 + 4pk = 0$

podemos escribirlas de la siguiente forma

$y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$ $\quad$ $x^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$

en donde

$d_1 = -4p$ $\quad$ $d_2 = -4p$

$e_1 = -2k$ $\quad$ $e_2 = -2h$

$f_1 = k^2 + 4ph$ $\quad$ $f_2 = h^2 + 4pk$

y ambas las podemos escribir de la siguiente forma

V) $$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

en donde si A = 0 , C = 0 y D = 0, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincide con el eje X.

Si D = 0,

* la ecuación representa 2 rectas diferentes paralelas al eje *X* si las raíces las raíces de $Cy^2 + Ey + F = 0$ son reales y desiguales,

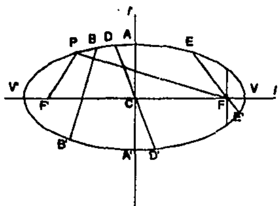
* dos rectas coincidentes paralelas al eje *X* si las raíces son reales o iguales,

* ningún lugar geométrico si las raíces son complejas.

Y si C = 0, A = 0 y E = 0, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincide con el eje *Y*, y si E = 0 cualquiera de las situaciones anteriores equivalentes.

LA ELIPSE

El lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es seimpre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos, define una elipse.



Los dos puntos fijos se llaman **focos** de la elipse

Designemos por *F* y *F'* los focos. La recta *l* que pasa por los focos se **llama eje focal**.

El eje focal corta a la elipse en dos puntos *V* y *V'*, llamados **vértices**.

El segmento VV', porción del eje focal comprendida entre los vértices, se llama **eje mayor**

El punto *C* del eje focal, punto medio del segmento que une los focos, se llama **centro**.

La recta *l'* que pasa por C y es perpendicular al eje focal *l* se llama **eje normal**. El eje normal *l'* corta a la elipse en dos puntos, *A* y *A'*, y el segmento *AA'* se llama **eje menor**.

Un segmento tal como BB', que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, se llama **cuerda**. En particular una cuerda que pasa por uno de los focos, tal como EE' se llama **cuerda focal**.

Una cuerda focal como LL', perpendicular al eje focal l se llama **lado recto**. Como la elipse tiene dos focos, también tiene dos lados rectos.

Una cuerda que pasa por C, como DD' se llama un **diámetro**.

Si P es un punto cualquiera de la elipse, los segmentos FP y $F'P$ que unen los focos con el punto P se llaman **radios vectores** de P.

La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje X, distancia focal igual a $2c$ y cantidad constante igual a $2a$ está dada por

VI)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean $(0,c)$ y $(0,-c)$, la ecuación de la elipse es

VII)

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

En ambos casos, a es la longitud del semieje mayor, b la del semieje menor, y a,b y c están ligados por la relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

también, la longitud de cada lado recto es

$$\frac{2b^2}{a}$$

y la excentricidad e (alargamiento de la curva), está dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a} < 1$$

La ecuación de la elipse de centro el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje x, está dada por

VIII)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje *Y*, su ecuación está dada por

IX)

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

En ambos casos, *a* es la longitud del semieje mayor, *b* es la del semieje menor, *c* es la distancia del centro a cada foco y *a*,*b* y *c* están ligadas por la relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

También para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos es

$$\frac{2b^2}{a}$$

y la excentricidad *e* está dada por la relación

$$e = \frac{c}{\alpha} = \frac{a^2 - b^2}{a} < 1$$

Ahora bien, si desarrollamos, trasponemos, quitamos denominadores y ordenamos términos de las ecuaciones de los incisos **VIII)** y **IX)** tenemos

X)

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

XI)

$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2hx - 2b^2ky + a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

se pueden expresar de la siguiente forma

XII) $$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en donde de la ecuación del inciso

X)	XI)
$A = b^2$	$A = a^2$
$C = a^2$	$C = b^2$
$D = -2b^2h$	$D = -2a^2h$
$E = -2a^2k$	$E = -2b^2k$
$F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$	$F = a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$

Para ambos casos, los coeficientes de A y C deben ser del mismo signo.

Si partimos de la ecuación XII) para llegar a la forma ordinaria de la ecuación de la elipse, completando cuadrados llegamos a

$$\frac{(x + {}^{D}/_{2A})^2}{C} + \frac{(y + {}^{E}/_{2C})^2}{A} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4\,A^2\,C^2}$$

$$\text{si } M = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4\,A^2\,C^2}$$

es diferente de cero, la ecuación puede escribirse

$$\frac{(x + {}^{D}/_{2A})^2}{MC} + \frac{(y + {}^{E}/_{2C})^2}{MA} = 1$$

que es la ecuación ordinaria de la elipse.

Como A y C deben ser de igual signo, podemos suponer que son positivos y por lo tanto para que la ecuación del inciso XII) represente una elipse, M debe ser positivo.

Si designamos a $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$, de lo cual depende el signo de M, podemos afirmar que la ecuación del inciso XII) cuando

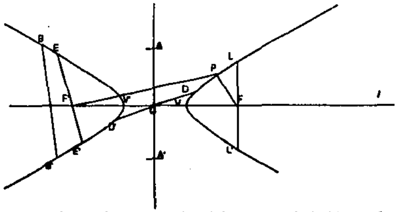
$N > 0$ representa una elipse

$N = 0$ representa el punto único $(-{}^{D}/_{2A}, -{}^{E}/_{2C})$

$N < 0$ no representa ningún lugar geométrico real.

LA HIPERBOLA

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia entre las distancias no dirigidas desde dos puntos fijos a P sea una constante. Los dos puntos fijos reciben el nombre de **focos** de la hipérbola y el punto medio del segmento definido por los focos recibe el nombre de **centro de la hipérbola**



Existe una estrecha analogía entre las definiciones de la hipérbola y la elipse, sin embargo a diferencia de la elipse que es una curva cerrada, la hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita.

Designemos los **focos** por F y F'. La recta l que pasa por los focos se llama **eje focal**. El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos, V y V' llamados **vértices**.

La porción del eje focal comprendido entre los vértices, o sea el segmento **VV'** se llama **eje transverso**. El punto medio C del eje transverso se llama **centro**.

La recta l' que pasa por C y es perpendicular al eje focal l se llama **eje normal**. El eje normal l' no corta a la hipérbola, sin embargo el segmento AA' que tiene C por punto medio se llama **eje conjugado**.

El segmento que une dos puntos diferentes cualesquiera de la hipérbola se llama **cuerda**. Estos puntos pueden o no ser ambos de la misma rama. Como la cuerda BB' o la cuerda VV'. Una cuerda que pasa por un foco como EE' se llama **cuerda focal**.

Una cuerda focal como LL', perpendicular al eje focal l se llama **lado recto**. Por tener dos focos, la hipérbola tiene dos lados rectos.

Una cuerda que pasa por C como DD' se llama **diámetro**. Si P es un punto cualquiera de la hipérbola, los segmentos FP y $F'P$ que unen los focos con el punto P se llaman **radios vectores** de P.

La ecuación de una hipérbola de centro en el origen, eje focal el eje X, y focos los puntos $(c,0)$ y $(-c,0)$ está dada por

XIII)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal de la hipérbola coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean $(0,c)$ y $(0,-c)$, la ecuación de la elipse es

XIV)

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

En ambos casos, a es la longitud del semieje transverso, b la del semieje conjugado, y a,b y c están ligados por la relación

$$c^2 = a^2 + b^2$$

también, la longitud de cada lado recto es

$$\frac{2b^2}{a}$$

y la excentricidad e, está dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a} < 1$$

La ecuación de la hipérbola de centro el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje x, está dada por

XV)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación está dada por

XVI)

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

En ambos casos, a es la longitud del semieje transverso, b es la del semieje conjugado, c es la distancia del centro a cada foco y a,b y c están ligadas por la relación

$$c^2 = a^2 + b^2$$

También para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es

$$\frac{2b^2}{a}$$

y la excentricidad e está dada por la relación

$$e = \frac{c}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a} > 1$$

Ahora bien, si desarrollamos, trasponemos, quitamos denominadores y ordenamos términos de las ecuaciones de los incisos XV) y XVI) tenemos

XVII)

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

XVIII)

$$- a^2x^2 + b^2y^2 + 2a^2hx - 2b^2ky - a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

se pueden expresar de la siguiente forma

XIX) $\quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

en donde de la ecuación del inciso

XVII)	**XVIII)**
$A = b^2$	$A = - a^2$
$C = - a^2$	$C = b^2$
$D = -2b^2h$	$D = -2a^2h$
$E = 2a^2k$	$E = -2b^2k$
$F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$	$F = - a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$

Para ambos casos, los coeficientes de A y C deben ser de signo diferente.

Si partimos de la ecuación XIX) para llegar a la forma ordinaria de la ecuación de la elipse, completando cuadrados llegamos a

$$\frac{(x+{}^{D}/_{2A})^2}{C}+\frac{(y+{}^{E}/_{2C})^2}{A}=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$$

$$\text{si } M=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$$

es diferente de cero, la ecuación puede escribirse

$$\frac{(x+{}^{D}/_{2A})^2}{MC}+\frac{(y+{}^{E}/_{2C})^2}{MA}=1$$

que es la ecuación ordinaria de la hipérbola cuando A y C son de signo diferente.

Si designamos a $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$, de lo cual depende si M es igual o diferente de cero, podemos afirmar que la ecuación del inciso XIX) cuando

$N = 0$ representa una hipérbola

$N = 0$ representa el punto único $(-{}^{D}/_{2A}, -{}^{E}/_{2C})$

$N < 0$ no representa ningún lugar geométrico real.

Ahora bien, las secciones cónicas en el plano cartesiano, son representadas por ecuaciones de segundo grado o cuadráticas en dos variables de la forma,

XX)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta ecuación, si representa un lugar geométrico real:

Si B = 0,queda de la forma

XXI) $$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y el lugar geométrico debe ser una sección cónica con uno de sus ejes paralelo o coincidente con uno de los ejes coordenados, o bien uno de los casos excepcionales.

* Si $B = 0$, el eje focal es oblicuo con respecto a los ejes coordenados. Sin embargo, la ecuación del inciso **XX)** la podemos transformar, si los ejes giran un ángulo θ en

XXII)

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

en donde

$A' = A\cos^2\theta + B\,\text{sen}\theta\cos\theta + C\,\text{sen}^2\theta$

$B' = 2(C-A)\,\text{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)$

$C' = A\,\text{sen}^2\theta - B\,\text{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$

$D' = D\cos\theta + E\,\text{sen}\theta$

$E' = E\cos\theta - D\,\text{sen}\theta$

$F' = F$

Si θ es tal que

si $A = C$ $\qquad$ $\text{tg}\,2\theta = B / A\text{-}C$

si $A = C$ $\qquad$ $\theta = 45^{\circ}$

la ecuación del inciso **XXII)** toma la forma

XXIII)

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Entonces, dependiendo de los valores de los coeficiente A' y C', puede suceder cualquiera de los siguientes casos:

a) Si uno de los dos coeficientes A' o C' es igual a cero, representa una **parábola**.

b) Si A' y C' son del mismo signo, la ecuación representa una **elipse**.

c) Si A' y C' son de signo contrario, la ecuación representa una **hipérbola**.

Usando las 3 primeras relaciones del inciso **XXII)** y la identidad trigonométrica $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, podemos demostrar que

XXIV) $\qquad$ $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$

Como esta cantidad no cambia de valor para ninguna rotación de los ejes coordenados se llama **invariante**.

Cuando la ecuación del inciso **XX)** es transformada en la ecuación del inciso **XXIII)**, B' = 0 y la relación del inciso **XXIV)** se reduce a

XXV) $$B^2 - 4AC = -4\,A'C'$$

Esta expresión, denominada discriminante, dependiendo del valor que tome indica la naturaleza del lugar geométrico que representa la ecuación XXIII), y en consecuencia la ecuación XX):

a) Si A' o C' son cero, es igual a cero y por lo tanto representan una parábola.

b) Si A' y C' son del mismo signo, representan una elipse.

c) Si A' y C' son de signo distinto, representan una hipérbola.

BIBLIOGRAFIA

Apostol, T., "Calculus." Ed. Reverté, S.A.,1973.

Baldor, J., "Geometría Plana y del Espacio.", Publicaciones Culturales, 1983.

Fuller, G., "Geometría Analítica." C.E.C.S.A., 1972.

Kindle, J., "Geometría Analítica." Schaum, Libros Mc. Graw Hill, 1970.

Lehmann, ,"Geometría Analítica." Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana, 1977.

Leithold, L., "Cálculo con Geometría Analítica." Harla, S.A., 1973.

Meyer , Paul L., "Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas." Sistemas Técnicos de Edición, S. A. de C.V., 1986.

Middlemiss, R. y Marks, J., "Geometría Analítica." Libros Mc. Graw Hill, 1968.

Papoulis , Athsnsdiod, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes." McGraw-Hill International Editions, 1984.

Steen , F. y Ballou, D., "Geometría Analítica." Publicaciones Culturales S. A., 1966.

Swokowski , Earl W., "Cálculo con Geometría Analítica." Grupo Editorial Iberoamérica, 1987.

Taylor, H., "Cálculo Diferencial e Integral." Ed. Limusa, 1973.

Wentworth, J., "Geometría Plana y del Espacio." Ed. Porrúa, S.A., 1967.