32
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TABLAS Y ARBOLES DE VERDAD: DOS METODOS DE DECISION PARA LA VALIDEZ DE RAZONAMIENTOS EN LA LOGICA DE ENUNCIADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

CARLOS RAMIREZ DEL CASTILLO

MEXICO, D. F. 1994

CIUDAD UNIVERSITARIA

VNIVERSDAD NACIONAL AVFNMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios
Profesionales.
Exp. Núm. 55

Jefe de la División de Estudios Profesionales.
Universidad Nacional Autónoma de México.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo revisado el trabajo de tesis que realizo el pasante RAMIREZ DEL CASTILLO CARLOS

con el título "TABLAS Y ARBOLES DE VERDAD: DOS METODOS DE DECISION PARA LA VALIDEZ DE RAZONAMIENTOS EN LOGICA DE ENUNCIADOS".

consideramos que reune los meritos necesarios para obtener el título de MATEMATICO.

Comunicamos lo anterior para los fines a que haya lugar.

Atentamente.
México, D.F., a

1.- M. EN C. JOSE ALFREDO AMOR MONTAÑO
(grado) Nombre(s) Apellidos completos (firma)

2.- MAT. CARLOS TORRES ALCARAZ
(grado) Nombre(s) Apellidos completos (firma)

3.- MAT. GONZALO ZUBIETA RUSSI
(grado) Nombre(s) Apellidos completos (firma)

4.- Sup.M.F.C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO
(grado) Nombre(s) Apellidos completos (firma)

5.- Sup.M. EN C. ALEJANDRO RAUL REYES ESPARZA
(grado) Nombre(s) Apellidos completos (firma)

A MIS:

PADRES,

ESPOSA,

HIJOS,

HERMANOS, Y

AMIGOS

AGRADECIMIENTOS:

Al Director de Tesis

M. en C. JOSE ALFREDO AMOR MONTAÑO

cuyas orientaciones, sugerencias y comentarios, contribuyeron en gran medida en la elaboración de este trabajo.

Al profesor

M. en C. ALEJANDRO RAUL REYES ESPARZA

por su labor de asesoría, que con su experiencia y conocimiento enriqueció el trabajo presentado.

A los profesores

Mat. GONZALO ZUBIETA RUSSI

Mat. CARLOS TORRES ALCARAZ

M.F.C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO

por la cuidadosa revision del trabajo, que con dedicación se enfrascaron en su lectura y aportaron valiosas observaciones.

CONTENIDO

INTRODUCCION

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar al estudiante del Ciclo Bachillerato que se enfrenta a un primer curso de Lógica, algunos de sus principios y conceptos básicos, así como dos de los principales Métodos Efectivos para la toma de decisiones, de la manera más organizada y rigurosa posible.

El trabajo se limita a desarrollar las ideas fundamentales para determinar la validez de razonamientos deductivos en el nivel más elemental de análisis lógico formal: La Lógica de Enunciados.

El material expuesto se puede usar como material de apoyo al curso de Lógica I en los planteles del Ciclo Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades.

Aunque no es necesario contar con prerrequisitos específicos de alguna materia anterior, es deseable que el lector este acostumbrado a trabajar con cierto nivel de abstracción.

El trabajo se divide en cuatro capitulos, en el capitulo I se especifica qué se entenderá por la palabra *Lógica* y se mencionan algunos de sus adelantos, se definen los términos *razonamiento*, *premisa* y *conclusión* y se distingue entre la *forma* y el *contenido* de un razonamiento.

En el capitulo II se introduce el concepto de *enunciado* y se muestra la diferencia entre *enunciado simple* y *enunciado compuesto*, a la vez se introducen los *conectivos lógicos* más usuales - *negación, conjunción, disyunción, condicional* y *bicondicional* -. Se obtiene la forma de enunciados (*forma enunciativa*) por medio de un lenguaje artificial (el de la Lógica de Enunciados).

El capítulo III se dedica al manejo del Método de *Tablas de verdad* y se definen algunos términos tales como *interpretación, satisfacción, tautología, contradicción, contingencia* y *consecuencia lógica*. También se muestran algunos resultados importantes que se aplican para determinar la validez de razonamientos deductivos.

En el capitulo IV se exponen las ideas basicas para la construcción de los llamados *Arboles de verdad*, y se hace uso de dicho método para la toma de decisiones.

Finalmente se presentan las conclusiones factibles de derivarse a partir del desarrollo de este trabajo y la forma en que se podria extender en un futuro.

I. EL RAZONAMIENTO

I.1. QUE ES LA LOGICA

Tal vez en ocasiones se ha preguntado

¿ Qué es la Lógica ?

Se inicia este capitulo dando una respuesta a tal pregunta.

Lógica deductiva es la ciencia que se encarga de establecer los principios y metodos que hacen posible distinguir al razonamiento válido del que no lo es.

Si bien es cierto que esta definición recoge la concepción original de la Logica, lo que no es cierto es que su campo de acción se limite exclusivamente al analisis del razonamiento, ya que en su estado actual, y gracias a los grandes avances que ha tenido, se ha desarrollado de tal suerte, que su posible aplicacion abarca diversas áreas de estudio, tales como:

-El estudio de los lenguajes formales, sus interpretaciones y relaciones entre ellos (Teoria de Modelos).

-El estudio de la calculabilidad efectiva de funciones y decibilidad efectiva de relaciones (Teoría de la Recursión).

-El estudio de las pruebas formales (Teoría de la Demostración).

-El estudio de los fundamentos de la Matemática, especialmente en la Teoría de Conjuntos.

-El razonamiento aproximado en sistemas expertos de inteligencia artificial

Un *razonamiento* es un tipo especial de pensamiento, cuyo rasgo característico es que en él siempre se produce el paso de un conjunto de oraciones (las cuales pueden ser verdaderas o falsas), que se consideran el punto de partida, a una oración (que puede ser verdadera o falsa) que se sigue de aquellas.

Al conjunto de oraciones que se toman como punto de partida para establecer un razonamiento reciben el nombre de *premisas*, y la oración que se sigue de ellas se le llama *conclusión*.

Esto es, lo específico de un razonamiento consiste en establecer una conclusión a partir de un conjunto de premisas.

Los siguientes pensamientos son ejemplos de razonamientos.

EJEMPLO 1.O f no es continua en $[a,b]$ o $F(x)\neq\int f(x)dx$.

Por la razón de que $\int_a^b f(x)dx\neq F(b)-F(a)$. Y porque,

si f es continua en $[a,b]$ y $F(x)=\int f(x)dx$, entonces $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

EJEMPLO 2. Si no hay planificación familiar, entonces la población crece ilimitadamente. Por consiguiente, o no aumentará la pobreza o no hay planificación familiar. Puesto que aumentará la pobreza, si la población crece ilimitadamente

EJEMPLO 3. Si compro un automóvil nuevo o si ajusto mi automóvil viejo, iré a Acapulco y pararé en Taxco. Si paro en Taxco, visitaré a mis tios. Si visito a mis tios, insistirán a que pase el Verano con ellos. Si insisten a que pase el Verano con ellos, entonces estaré allí hasta el Otoño. Pero si me quedo con mis tios hasta el Otoño, no iré a Acapulco. Por lo tanto, no ajustaré mi automóvil viejo.

Al primer problema que se deberá enfrentar para realizar el análisis lógico de un razonamiento es el de determinar quiénes son las premisas y quién es la conclusión.

Para resolverlo, es posible auxiliarse de ciertas palabras "claves" que generalmente se incluyen en el razonamiento para distinguir las premisas de la conclusión.

Las palabras "claves" de mayor uso son:

INDICADORES DE PREMISAS: puesto que, porque, pues, ya que, en tanto que, por la razón de que.

INDICADORES DE CONCLUSION: por lo tanto, por consiguiente, por ende, así, luego, se sigue, se infiere, se deduce, se concluye.

A manera de ejemplo se identifican las premisas y la conclusión de los razonamientos de los ejemplos 1, 2 y 3.

EJEMPLO 4. En el razonamiento del ejemplo 1 se tienen como premisas a las oraciones:

(a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \neq F(b)-F(a)$.

(b) Si f es continua en $[a,b]$ y $F(x)=\int f(x)dx$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

La conclusión es la oración:

O f no es continua en $[a,b]$ o $F(x) \neq \int f(x)dx$.

Para lograr la identificación, se hizo uso de los indicadores de premisas "por la razón de que" y "porque".

EJEMPLO 5. En el razonamiento del ejemplo 2 las premisas son:

(a) Si no hay planificación familiar, entonces la población crece ilimitadamente.

(b) Aumentará la pobreza, si la población crece ilimitadamente.

Su conclusión es:

O no aumentará la pobreza o no hay planificación familiar.

La identificación se realizó auxiliándose del indicador de conclusión "por consiguiente" y del indicador de premisa "puesto que".

EJEMPLO 6. En el razonamiento del ejemplo 3 se distinguen las premisas:

(a) Si compro un automóvil nuevo o si ajusto mi automóvil viejo, entonces iré a Acapulco y pararé en Taxco.

(b) Visitaré a mis tios, si paro en Taxco.

(c) Si visito a mis tios de Taxco, insistirán a que pase el Verano con ellos.

(d) Si mis tios de Taxco insisten a que pase el Verano con ellos, estaré allí hasta el Otoño.

(e) Si me quedo en Taxco hasta el Otoño, no iré a Acapulco.

La conclusión de dicho razonamiento es la oración:

No ajustaré mi automóvil viejo.

Ahora se utilizó el indicador de conclusión "por lo tanto".

Observar que toda oración u oraciones que siguen inmediatamente a un indicador de premisas son premisas, mientras que la oración que está después de un indicador de conclusión es la conclusión.

I.2. FORMA Y CONTENIDO DE UN RAZONAMIENTO.

Para el estudio del razonamiento, a éste se le puede considerar como: actividad del ser humano (acto de razonar) o el resultado de dicha actividad.

En el análisis que con la Lógica se realiza al razonamiento solamente interesa el resultado (es su objeto material).

Para efectuar dicho análisis, es necesario distinguir entre *forma* y *contenido*.

La *forma* de un razonamiento es la estructura que tiene, es aquello que lo generaliza, es decir, lo que tiene en común con otros razonamientos. El *contenido* es el asunto o caso que trata, en otras palabras, lo que lo particulariza.

Por ejemplo, considerar los razonamientos siguientes:

EJEMPLO 7. Si los precios suben, entonces la inflación es inevitable.
Los salarios aumentaran, si la inflación es inevitable.
Pero los precios suben.
Por lo tanto, los salarios aumentaran.

EJEMPLO 8. Si Jalisco es sub-sede del campeonato mundial de futbol, entonces aumentará su turismo.
Se construirán nuevos hoteles en Jalisco, si aumenta su turismo.
Jalisco es sub-sede del campeonato mundial de futbol.
Por lo tanto, en Jalisco se construirán nuevos hoteles.

La estructura (forma) para ambos es la misma y es la siguiente (vista toscamente):

Si $\mathscr{A}$, entonces $\mathscr{B}$
$\mathscr{C}$, si $\mathscr{B}$
$\mathscr{A}$
Por lo tanto, $\mathscr{C}$

Pero son dos casos o ejemplos distintos de este tipo de razonamiento.

En el análisis Logico que se haga a un razonamiento solo se tomará en cuenta su forma, *nunca* el contenido.

Por ello, se puede señalar que la lógica se encarga de las formas válidas de razonar, pero no en el sentido de confeccionar y dar una gran lista de ellas, sino en el de establecer los principios y métodos mediante los cuales es posible ante un razonamiento cualquiera decidir si es o no es válido.

Un razonamiento cuya validez depende sólo de su forma es un razonamiento deductivo.

II. ENUNCIADOS, CONECTIVOS LOGICOS Y FORMAS ENUNCIATIVAS

II.1. LOGICA DE ENUNCIADOS Y VALORES DE VERDAD

Es importante señalar que en el desarrollo de este trabajo se toma en cuenta lo siguiente.

(a) El análisis Lógico que se efectua se encuentra en el nivel más elemental de la Lógica Formal: *La Lógica de Enunciados*.

(b) En este primer nivel de análisis Lógico Formal, se divide al lenguaje en dos tipos de signos:

 (i) Por un lado, *oraciones simples*.

 (ii) Por otro, *particulas* que sirven para enlazar oraciones simples y formar oraciones compuestas.

(c) La Lógica que se aborda es la llamada *Lógica Clasica o Bivalente*. Lógica en la cual, para efectuar un analisis, se consideran como primitivos semánticos a los valores de verdad: *verdadero* y *falso*.

II.2. ENUNCIADOS

Toda oración a la que se le puede asignar un y solamente un valor de verdad, dará lugar a un *enunciado*.

Aún cuando se utiliza la terminologia "la oración es un enunciado" no se debe pensar que es lo mismo, ya que la oración es un conjunto de palabras (que cumplen determinadas reglas) y el enunciado es lo que se expresa en la oración.

EJEMPLO 1. Las oraciones siguientes son enunciados.

(1) $3+1<5$.

(2) Cristóbal Colón es el autor del Quijote.

(3) El conjunto A es subconjunto del conjunto B.

(4) Guadalajara es la capital de Jalisco.

(5) Roberto es un estudiante sobresaliente.

(6) 5 es múltiplo de 2.

Las oraciones (1) y (4) son enunciados verdaderos, mientras que las oraciones (2) y (6) son enunciados falsos.

Si todo elemento de conjunto A es elemento del conjunto B, entonces la oración (3) será un enunciado verdadero. De no ser así, será un enunciado falso.

En la oración (5), si Roberto cumple con la propiedad de ser un estudiante sobresaliente, se tendrá un enunciado verdadero. Pero si no cumple con dicha propiedad, entonces se tendrá un enunciado falso.

En todos los casos a la oración se le califica con un y solamente un valor de verdad.

Desde el punto de vista lógico, lo que interesa de un enunciado es el hecho de que tenga la posibilidad de calificársele con un solo valor de verdad.

EJEMPLO 2. Las siguientes oraciones no son enunciados.

(1) Escribe cinco enunciados.

(2) ¿Vives en la capital?.

(3) ¡que fácil es la Lógica!.

No son enunciados porque no es posible calificarlas con algún valor de verdad. Las órdenes, preguntas y exclamaciones no son enunciados.

De los ejemplos mostrados se sigue que para que la oración sea un enunciado, necesariamente deberá pertenecer a la clase conocida como *oraciones declarativas*. Pero dicha condición no es suficiente ya que hay en nuestro lenguaje oraciones como:

"ésta oración es falsa"

la que es declarativa y no es un enunciado (es verdadera y falsa a la vez).

Para su estudio, los enunciados se clasifican en *simples* y *compuestos*, según lo siguiente.

Un enunciado es *simple*, si proviene de una oración simple y en modo afirmativo. Un enunciado es *compuesto*, si proviene de una oración en modo negativo o si está dado por una oración formada por oraciones que también son enunciados.

Considerando esto, se puede observar que todos los enunciados del Ejemplo 1 son enunciados simples.

EJEMPLO 3. El enunciado

Si se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia, entonces se obtiene la ecuación que la describe.

Es un enunciado compuesto.

El enunciado de este ejemplo es un enunciado compuesto porque se pueden identificar las expresiones siguientes, que son enunciados:

(a) Se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia.

(b) Se obtiene la ecuación que describe a la circunferencia.

Dichos enunciados están ligados con las palabras:

"*si* ..., *entonces* ...".

El enunciado del inciso (a) es compuesto y el enunciado del inciso (b) es simple.

El enunciado del inciso (a) es compuesto porque se puede descomponer en las oraciones siguientes que son enunciados:

(c) Se conocen las coordenadas del centro de la circunferencia.

(d) Se conoce la longitud del radio de la circunferencia.

Los enunciados de los incisos (c) y (d) son simples y están conectados con la palabra:

"... y ...".

En fin, un enunciado compuesto se construye partiendo de enunciados simples, haciendo uso de expresiones lingüísticas tales como:

"... y ...", "*si* ..., *entonces* ...", "... *o* ..." etc.

A estas expresiones lingüísticas se les conoce como *conectivos lógicos*. Los más usuales son: *negación*, *conjunción*, *disyunción*, *condicional* y *bicondicional*.

Es importante señalar que existen construcciones gramaticales distintas que conducen a oraciones que son sinónimas, si se aplican a las mismas expresiones.

NEGACION

Para negar un enunciado es común anteponer al verbo de la oración la palabra "*no*". En otras ocaciones se acostumbra poner antes de la oración expresiones tales como "*no es cierto que*","*no se da el caso de que*", "*no ocurre que*" etc.

EJEMPLO 4. La negación del enunciado: Pedro va a nadar.

Se podría expresar como:

(a) Pedro *no* va a nadar.

(b) *No es cierto que* Pedro va a nadar.

Hay un tipo especial de enunciados, que se conocen bajo el nombre de "*proposiciones categóricas*" y que establecen relaciones de contensión total o parcial entre un par de clases, afirmándola o negándola.

Tales enunciados son:

(a) Universales Afirmativas, del tipo "Todo S es P".

(b) Universales Negativas, del tipo "Ningun S es P".

(c) Particulares Afirmativas, del tipo "Algún S es P".

(d) Particulares Negativas, del tipo "Algún S no es P".

La razón de mencionar las proposiciones categóricas es porque hay que tener cuidado al negar este tipo de enunciados.

Por ejemplo, si seguimos al pie de la letra lo afirmado en el parrafo inicial de este apartado podria suceder casos como este:

La negación del enunciado "algunos hombres son Matemáticos" es el enunciado "algunos hombres *no* son Matemáticos". ¡Situación erronea!, ya que un enunciado y su negación nunca podrán tener el mismo valor de verdad, y los enunciados citados son ambos verdaderos, luego el segundo de ellos no puede ser la negación del primero.

Para evitar este tipo de situaciones, observar que:

(a) La negación de "todo S es P" es "algún S no es P".

(b) La negación de "algún S es P" es "ningún S es P".

EJEMPLO 5. La negación del enunciado: Todos los politicos son mentirosos
es el enunciado: Algunos politicos no son mentirosos.

La negación del enunciado: Todos son falsos
es el enunciado: Algunos no son falsos.

La negación del enunciado: Algunos autos son de lujo
es el enunciado: Ningún auto es de lujo.

La negación del enunciado: Algunos son dominantes
es el enunciado: Nadie (ninguno) es dominante.

Antes de continuar se toma la siguiente convención:

Se utilizarán letras "elegantes" mayúsculas

$$\mathscr{A},\ \mathscr{B},\ \mathscr{C}, \ldots,\ \mathscr{Z}$$

como etiquetas de enunciados (no son sus modelos).

Si $\mathscr{A}$ es un enunciado, su negación se puede expresar como:

no $\mathscr{A}$

no es cierto que $\mathscr{A}$

no ocurre que $\mathscr{A}$

no se da el caso de que $\mathscr{A}$

Los enunciados del tipo *no no* $\mathscr{A}$ (doble negación) son equivalentes a los del tipo $\mathscr{A}$.

CONJUNCION.

Para formar la *conjunción* de enunciados, generalmente se conectan con la palabra "y".

Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son enunciados, la *conjunción* de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ se puede expresar como:

$\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$

a la vez $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$

$\mathscr{A}$ *pero* $\mathscr{B}$

$\mathscr{A}$ *aunque* $\mathscr{B}$

$\mathscr{A}$ *sin embargo* $\mathscr{B}$

$\mathscr{A}$ y *además* $\mathscr{B}$

$\mathscr{A}$ *como también* $\mathscr{B}$

La *negación de una conjunción* se puede expresar como:

no es cierto que a la vez $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$

no $\mathscr{A}$ o *no* $\mathscr{B}$

EJEMPLO 6. La conjunción de los enunciados:

Jaime no es puntual.

Tomás llega tarde.

Podría ser el enunciado:

(a) Jaime no es puntual y Tomás llega tarde.

(b) *a la vez* Jaime no es puntual y Tomás llega tarde.

(c) Jaime no es puntual *pero* Tomás llega tarde.

DISYUNCION.

Al enlazar dos enunciados con la palabra "*o*", se obtiene un nuevo enunciado conocido como *disyunción*.

La palabra "*o*" tiene en el lenguaje natural dos significados (sentidos), *exclusivo* e *inclusivo*.

La palabra "*o*" se toma en sentido *inclusivo* cuando dada la disyunción de dos enunciados, si se "cumple" uno de los enunciados, no evita la posibilidad que el otro de los enunciados también se dé.

Por ejemplo en el enunciado "los estudiantes o profesores de la UNAM tienen derecho a descuento en todo espectáculo universitario", la palabra "*o*" se toma en sentido inclusivo, pues si alguien es profesor de la UNAM, no le prohibe ser estudiante de la misma y tener derecho al descuento.

El sentido *exclusivo* de la palabra "*o*" se da cuando en la disyunción se afirma que uno y solamente uno de sus componentes se "cumple".

Por ejemplo en el enunciado "todo numero natural o es par o es impar", la palabra "*o*" se toma en sentido exclusivo.

Con el fin de evitar confuciones, cada vez que aparezca la palabra "*o*", se considerará en sentido inclusivo, si no se indica lo contrario.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son enunciados, la *disyunción* de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se puede expresar:

$\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$

o $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ *a menos que* $\mathcal{B}$

La negación de una disyunción se podrá expresar con:

no es cierto que o $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$

no $\mathcal{A}$ y no $\mathcal{B}$

ni $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{B}$

EJEMPLO 7. La disyunción de los enunciados:

El hidrógeno no es un liquido.

El hidrógeno es un gas.

Puede ser el enunciado:

(a) El hidrógeno no es un liquido *o* es un gas.

(b) El hidrógeno *o* no es un liquido *o* es un gas.

(d) El hidrogeno no es liquido *a menos que* sea gas.

CONDICIONAL.

Si se enlazan dos enunciados con las palabras "*si...,entonces...*" se obtiene un enunciado nuevo que se conoce como *condicional*.

El enunciado que aparece inmediatamente después de la palabra "*si*" se le llama *antecedente*, y el que es introducido por la palabra "*entonces*", *consecuente*.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son enunciados, el condicional con antecedente $\mathcal{A}$ y consecuente $\mathcal{B}$ se puede expresar como:

si $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}$

si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$

$\mathcal{A}$, solo si $\mathcal{B}$

suponiendo que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ es condición suficiente para $\mathcal{B}$

$\mathscr{B}$ es condición necesaria para $\mathscr{A}$

$\mathscr{B}$, si $\mathscr{A}$

$\mathscr{B}$, a condición de $\mathscr{A}$

Un condicional se puede negar de las maneras siguientes:

no es cierto que si $\mathscr{A}$, entonces $\mathscr{B}$

$\mathscr{A}$ y *no $\mathscr{B}$*

EJEMPLO 8. El condicional con antecedente: hay inflación y consecuente: aumentan los precios podría ser el enunciado:

(a) *si* hay inflación, *entonces* aumentan los precios

(b) *si* hay inflación, aumentan los precios

(c) hay inflación, *solo si* aumentan los precios

(d) para que aumenten los precios *es suficiente* que haya inflación

(e) para que haya inflación *es necesario* que aumenten los precios

BICONDICINAL.

Un *bicondicional* es aquel enunciado compuesto que se obtiene al enlazar un par de enunciados con las palabras "*si y solo si*".

Dados los enunciados *$\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$*, el bicondicional formado con ellos se puede expresar como:

$\mathscr{A}$ si y solo si $\mathscr{B}$

$\mathscr{A}$ es condición suficiente y necesaria para $\mathscr{B}$

La negación del bicondicional se podrá escribir:

no sucede que, $\mathcal{A}$ si y solo si $\mathcal{B}$

EJEMPLO 8. El bicondicional compuesto por los enunciados:

El sol es una estrella.

El sol tiene luz propia.

Podría ser el enunciado:

(a) El sol es una estrella *si* y *solo si* tiene luz propia.

(b) Para que el sol sea una estrella *es suficiente* y *necesario* que tenga luz propia.

(c) Una *condición suficiente* y *necesaria* para que el sol sea una estrella es que tenga luz propia.

II.3. FORMAS ENUNCIATIVAS

Se anotó en el capítulo anterior que en el análisis Lógico de la validez de un razonamiento, intervendrá únicamente su forma y no su contenido. Esto también es válido para los enunciados.

Se llamará *forma enunciativa* (*f.e.*) a la forma (modelo simbólico, modelo matemático) del enunciado.

Para obtener la *f.e.* de un enunciado será necesario hacer uso de algún *alfabeto* (conjunto de signos) así como de un conjunto de reglas que permitan la construcción de expresiones con tal alfabeto (un Lenguaje Simbólico).

Dicho Lenguaje deberá cumplir con las condiciones siguientes:

(a) Considerar a los enunciados simples como un todo.
Es decir, no se analiza su estructura interna (los elmentos que lo conforman internamente no se consideran relevantes para su análisis lógico).

(b) Si el enunciado es compuesto, atender a las conexiones que existan entre los enunciados simples que lo forman.

Para que el Lenguaje Simbólico cumpla con estas condiciones se acuerda lo siguiente:

(a) Para simbolizar a un enunciado simple bastará con un solo signo.
Se propone que dichos signos sean letras mayusculas de nuestro alfabeto (con subíndices, si fuése necesario) y se les denominarán *Símbolos de Enunciado*.

SIMBOLOS DE ENUNCIADO: $A, B, C, \ldots\ A_1, B_1, C_1, \ldots, A_n, B_n, C_n, \ldots$

Los símbolos de enunciado son *f.e.*.

(b) Para simbolizar un enunciado compuesto se construirá una *f.e.* que será el resultado de combinar símbolos de enunciado con los signos que se propongan para representar simbólicamente a las expresiones lingüísticas que se usaron para su formación.
Dicha construcción se basará en un conjunto de reglas llamadas *reglas de construcción de f.e.*.

Convención: Se usarán letras minúsculas griegas, con subíndice en algunos casos

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \ldots$

como etiquetas para *f.e.*.

Con el fin de escribir las *f.e.* sin ambigüedad alguna, se emplearán los símbolos auxiliares:

(*paréntesis izquierdo*

) *paréntesis derecho*

CONSTRUCCION DE UNA *f.e.*

Para construir una *f.e.* se parte de símbolos de enunciado y se aplican reglas de construcción. Dicha construcción se presentará en una lista de *f.e.* numeradas en orden natural. Una línea cualquiera de la lista o es un símbolo de enunciado o es el resultado de aplicar alguna regla de construcción a alguna o algunas de las *f.e.* de renglones precedentes. La expresión del último renglón es la *f.e.* construida.

La partícula "*no*" se simbolizará con el signo $\neg$ y se llamará *negador*.

Regla de construcción para la negación de la f.e. α:

$$(\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$$

EJEMPLO 10. Construcción de la negación del símbolo de enunciado A.

(1) A

(2) $(\neg A)$ $(\neg, 1$

Para simbolizar (obtener la forma de) un enunciado, se seguirán los pasos que se se describen a continuación.

Paso 1. *Identificación de enunciados simples*

Es importante que el modelo indique si el enunciado es simple o compuesto. En caso de ser compuesto, señalar los enunciados simples que lo forman.

Paso 2. *Simbolización de enunciados simples*

Para hacerlo, usar símbolos de enunciado.

Paso 3. *Reemplazo de enunciados simples por su modelo*

La finalidad es obtener una expresión "medio simbolizada" en la que se vean con mayor claridad los conectivos lógicos utilizados.

Paso 4. *Costrucción de "Arbol genealógico"*

En este paso se realiza un diagrama de Arbol en el que se muestra la manera en que se debe proceder para la construcción de la forma del enunciado. Los nodos son o el nombre de algún conectivo Lógico o un símbolo de enunciado y se ramifican con una o dos ramas, que depende que el conectivo sea monario (negación) o binario (conjunción, disyunción, condicional o bicondicional), los nodos finales son símbolos de enunciado.

Por ejemplo, suponer que en el paso 3 se obtiene lo siguiente:

si no A y *no* B, *entonces* no *es cierto que* o A o B

para formar el árbol genealógico identificar:

Conectivo principal: *condicional*

Componentes: (a) *conjunción (antecedente)*

(b) *negación (consecuente)*

Diagrama en forma de árbol:

condicional

(antecedente) *(consecuente)*
conjunción *negación*

Se procede de forma análoga con cada componente.

Antecedente.

Conectivo principal: *conjunción*

Componentes: (a) *negación del símbolo de enunciado* A

(b) *negación del símbolo de enunciado* B

Diagrama en forma de árbol:

conjunción

negación *negación*

A B

Consecuente.

Conectivo principal: *negación*

Componente: *disyunción de los símbolos de enunciado*

A y B

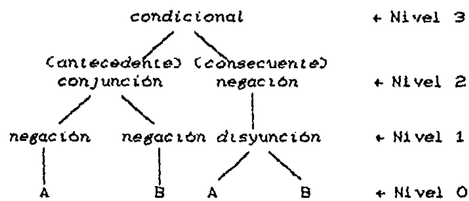
Diagrama en forma de árbol:

negación

disyunción

A B

Si se "pegan" estos dos áboles al primero, se tendrá el árbol genealógico completo.



Paso 5. *Construcción de la f.e.*

Ver párrafo *construcción de f.e.*. Para efectuarla, apoyarse en el árbol genealógico, siguiendo los pasos de "abajo hacia arriba".

Paso 6. *Minimización del número del paréntesis*

Aquí se escribirá la *f.e.* de manera "abreviada", eliminando todos los paréntesis que no se consideran necesarios. Para lograrlo se aplican las reglas:

R_1:Eliminar el primero y último de los parentasis.

R_2:Eliminar las parejas de parentesis introducidos por (¬.

Convención: Siempre se escribirán las *f.e.* de manera "abreviada".

EJEMPLO 11.Simbolizar el enunciado,

El sol no es una estrella.

Paso 1. Enunciados simples *Paso 2*

El sol es una estrella = A

Paso 3. Reemplazo de enunciados simples por su modelo

no A

Paso 4. Arbol genealógico

negación ← Nivel 1
|
A ← Nivel 0

Paso 5. Construcción de la *f.e.*

(1) A (Nivel 0)

(2) $(\neg A)$ $(\neg,1$ (Nivel 1)

Paso 6. Minimización del número de paréntesis

MODELO: $\neg A$

La palabra "y" se representará con el símbolo $\wedge$ y se llamará *conjuntor*.

Regla de construcción para la conjunción de α y β:

$$(\wedge(\alpha,\beta) = (\alpha\wedge\beta)$$

EJEMPLO 12. Simbolizar el enunciado,

Ningun sapo es insecto pero todos tienen cuatro patas.

Paso 1. Enunciados simples *Paso 2*

Algunos sapos son insectos = A

Todos los sapos tienen cuatro patas = B

Paso 3. Reemplazo de enunciados simples por su modelo

no A *pero* B

Paso 4. Arbol genealógico

conjunción ← Nivel 2
/ \
negación | ← Nivel 1
| |
A B ← Nivel 0

Paso 5. Construcción de la *f.e.*.

(1)	A		(Nivel 0)
(2)	B		(Nivel 0)
(3)	$(\neg A)$	$C\neg,1$	(Nivel 1)
(4)	$((\neg A)\wedge B)$	$C\wedge,3,2$	(Nivel 2)

Paso 6. Minimización del número de paréntesis

MODELO: $\neg A\wedge B$

La partícula "*o*" se simboliza con el signo $\vee$ y se le llama *disyuntor*.

Regla de construcción de la disyunción de las f.e. α *y* β:

$$C\vee(\alpha,\beta) = (\alpha\vee\beta)$$

EJEMPLO 13. Simbolizar el enunciado.

O Juan ha llegado temprano o María no ha llegado temprano y el Sr. Pérez está enojado.

Paso 1. Enunciados simples *Paso 2*

Juan ha llegado temprano = A

María ha llegado temprano = B

El Sr. Pérez está enojado = C

Paso 3. Reemplazo de enunciados simples por su modelo

o A *o* *no* B *y* C

Paso 4. Arbol genealógico

```
              disyunción            ← Nivel 3
             /          \
            |        conjunción     ← Nivel 2
            |          /      \
            |   negación       |    ← Nivel 1
            |      |           |
            A      B           C    ← Nivel 0
```

Paso 5. Construcción de la *f.e*

(1)	A		(Nivel 0)
(2)	B		(Nivel 0)
(3)	C		(Nivel 0)
(4)	$(\neg B)$	$C\neg,2$	(Nivel 1)
(5)	$((\neg B)\wedge C)$	$C\wedge,4,3$	(Nivel 2)
(6)	$(A\vee((\neg B)\wedge C))$	$C\vee,1,5$	(Nivel 3)

Paso 6. Minimización del número de paréntesis

MODELO: $A\vee(\neg B\wedge C)$

La partícula "*si..., entonces...*" se simboliza con el signo $\rightarrow$ y se le llama *condicionador*.

Regla para construir el condicional con antecedente α *y consecuente* β.

$$C\rightarrow(\alpha,\beta) = (\alpha\rightarrow\beta)$$

EJEMPLO 14. Simbolizar el enunciado,

Si no ocurre que o el aire o el agua sea buen conductor del calor, entonces no es cierto que a vez el número dos no es positivo y mayor que cero.

Paso 1. Enunciados simples *Paso 2*

El aire es buen conductor del calor = A

El agua es buen conductor del calor = B

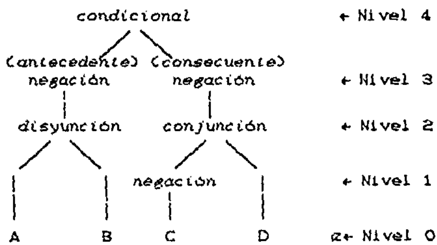
El número dos es positivo = C

El número dos es mayor que cero = D

Paso 3. Reemplazo de enunciados simples por sus modelos

Si no ocurre que o A *o* B, *entonces no es cierto que a la vez no* C *y* D.

Paso 4. Arbol genealógico



Paso 5. Construcción de la *f.e.*

(1)	A		(Nivel 0)
(2)	B		(Nivel 0)
(3)	C		(Nivel 0)
(4)	D		(Nivel 0)
(5)	$(\neg C)$	$(\neg, 3)$	(Nivel 1)
(7)	$(A \vee B)$	$(\vee, 1, 2)$	(Nivel 2)
(8)	$((\neg C) \wedge D)$	$(\wedge, 5, 4)$	(Nivel 2)
(9)	$(\neg(A \vee B))$	$(\neg, 7)$	(Nivel 3)
(10)	$(\neg((\neg C) \wedge D))$	$(\neg, 8)$	(Nivel 3)
(11)	$((\neg(A \vee B)) \rightarrow (\neg((\neg C) \wedge D)))$	$(\rightarrow, 9, 10)$	(Nivel 4)

Paso 6. Minimización del número de paréntesis

MODELO: $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg C \wedge D)$

La partícula "*sí y solo sí*" se simboliza con el signo $\leftrightarrow$ y se le llama *bicondicionador*.

Regla para construir el bicondicional con las f.e. α *y* β:

$$(\leftrightarrow(\alpha, \beta)) = (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

EJEMPLO 15. Simbolizar el enunciado,

Todas las arañas son insectos y ninguna tienen ocho patas si y solo si ni todos los murciélagos son pájaros ni todas las focas son peces.

Paso 1. Enunciados simples *Paso 2*

Todas las arañas son insectos = A

Algunas arañas tienen ocho patas = B

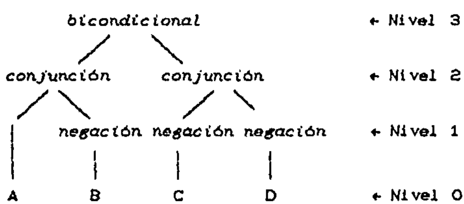
Todos los murciélagos son pájaros = C

Todas las focas son peces = D

Paso 3. Reemplazo de enunciados simples por sus modelos.

A y no B *sí y solo sí ni* C *ni* D

Paso 4. Arbol genealógico



Paso 5. Construcción de la *f.e.*

(1)	A		(Nivel 0)
(2)	B		(Nivel 0)
(3)	C		(Nivel 0)
(4)	D		(Nivel 0)
(5)	$(\neg B)$	$C\neg$, 2	(Nivel 1)
(6)	$(\neg C)$	$C\neg$, 3	(Nivel 1)
(7)	$(\neg D)$	$C\neg$, 4	(Nivel 1)
(8)	$(A\wedge(\neg B))$	$C\wedge$, 1, 5	(Nivel 2)
(9)	$((\neg C)\wedge(\neg D))$	$C\wedge$, 6, 7	(Nivel 2)
(10)	$((A\wedge(\neg B))\leftrightarrow((\neg C)\wedge(\neg D)))$	$C\leftrightarrow$, 8, 9	(Nivel 3)

Paso 6. Minimización del número de paréntesis

MODELO: $(A\wedge\neg B)\leftrightarrow(\neg C\wedge\neg D)$

Solamente se consideran *f.e.* aquellas expresiones simbólicas (formales) que se obtienen a partir de símbolos de enunciado, aplicando las reglas de construcción un número finito de veces.

III. EL METODO DE TABLAS DE VERDAD

III.1. INTERPRETACIONES

La noción de interpretación se maneja matemáticamente para que su uso sea sumamente preciso.

Dar una *interpretación* para la *f.e.* α consistirá en proponer una *función* que se llamará υ, del conjunto de símbolos de enunciado de la *f.e.* al conjunto de valores de verdad (1,0) (1 llamado *verdadero* y 0 *falso*).

NOTACION. Al dar una interpretación se usara:

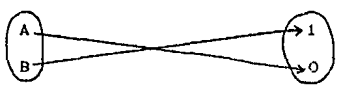
$\upsilon(A)=1$ para representar la expresión "A es verdadero" y

$\upsilon(A)=0$ para sustituir "A es falso"

EJEMPLO 1. Dar una interpretación para la *f.e.* $(\neg A\rightarrow B)\rightarrow\neg(A\wedge\neg B)$.

La interpretación podría ser la siguiente función:

υ



Es decir: $\upsilon(A)=0$ y $\upsilon(B)=1$

Observar que no es la única. ¿cuántas más se podrían dar?.

Si la *f.e.* está construida a partir de un símbolo de enunciado, hay 2 diferentes interpretaciones que se pueden dar. Si el símbolo es A, tales interpretaciones son:

A
1
0

Tabla de interpretaciones

Si la *f.e.* contiene 2 diferentes símbolos de enunciado, hay 2x2=4 distintas interpretaciones. Si esos símbolos de enunciado son A y B, las interpretaciones posibles que se pueden dar son:

A	B
1	1
1	o
0	1
0	0

Tabla de interpretaciones

Obsérvese que el número de distintas interpretaciones que se pueden dar a una *f.e.* coincide con el número de diferentes maneras de calificar los distintos símbolos de enunciado que contiene, tomados a la vez.

Si en la *f.e.* aparecen 3 símbolos de enunciado, hay 2x2x2=8 diferentes interpretaciones. Suponiendo que esos símbolos son A, B y C tales interpretaciones se resumen en la siguiente tabla.

A	B	C
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Cuando se tengan 4 diferentes símbolos de enunciado, A, B, C y D, habrá 2x2x2x2=16 distintas interpretaciones:

A	B	C	D
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

En general se tiene que si la *f.e.* contiene n diferentes simbolos de enunciado, entonces se pueden dar 2^n distintas interpretaciones.

III.2. ASIGNACIONES DE VERDAD

El valor de verdad de una *f.e.* depende por completo de la interpretación que se dé.

Se llamará *asignación de verdad* a la función $\overline{v}$ que asigna el valor de verdad correcto a cada *f.e.*.

NOTACION. La expresión $\overline{v}(\alpha)=1$ se lee "la *f.e.* α es verdadera".

La expresiób $\overline{v}(\alpha)=0$ sustituye a "la *f.e.* α es falsa".

La función $\overline{v}$ deberá cumplir con lo siguiente:

(1) **ASIGNACION DE VERDAD PARA SIMBOLOS DE ENUNCIADO.**

$\overline{v}(A)=v(A)$, para todo símbolo de enunciado A.

(ii) ASIGNACION DE VERDAD DE UNA NEGACION.

(a) $\overline{v}(\neg\alpha)=1$ si y solo si $\overline{v}(\alpha)=0$.

(b) $\overline{v}(\neg\alpha)=0$ si y solo si $\overline{v}(\alpha)=1$.

(iii) ASIGNACION DE VERDAD DE UNA CONJUNCION.

(a) $\overline{v}(\alpha\wedge\beta)=1$ si y solo si a la vez $\overline{v}(\alpha)=1$ y $\overline{v}(\beta)=1$.

(b) $\overline{v}(\alpha\wedge\beta)=0$ si y solo si o $\overline{v}(\alpha)=0$ o $\overline{v}(\beta)=0$.

En general, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ son *f.e.*, entonces

(a) $\overline{v}(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3\wedge\ldots\wedge\alpha_n)=1$ si y solo si para toda $i=1,2,3,\ldots,n$ $\overline{v}(\alpha_i)=1$.

(b) $\overline{v}(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3\wedge\ldots\wedge\alpha_n)=0$ si y solo si hay al menos un i para el cual $\overline{v}(\alpha_i)=0$.

Más adelante se utilizará la siguiente notación:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i \text{ sustituye a } \alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3\wedge\ldots\wedge\alpha_n$$

(iv) ASIGNACION DE VERDAD DE UNA DISYUNCION.

(a) $\overline{v}(\alpha\vee\beta)=1$ si y solo si o $\overline{v}(\alpha)=1$ o $\overline{v}(\beta)=1$.

(b) $\overline{v}(\alpha\vee\beta)=0$ si y solo si a la vez $\overline{v}(\alpha)=0$ y $\overline{v}(\beta)=0$.

Generalizando, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ son *f.e.*, entonces

(a) $\overline{v}(\alpha_1\vee\alpha_2\vee\alpha_3\vee\ldots\vee\alpha_n)=1$ si y solo si hay al menos un i tal que $\overline{v}(\alpha_i)=1$.

(b) $\overline{v}(\alpha_1\vee\alpha_2\vee\alpha_3\vee\ldots\vee\alpha_n)=0$ si y solo si para toda i $\overline{v}(\alpha_i)=0$.

(v) ASIGNACION DE VERDAD DE UN CONDICIONAL.

(a) $\overline{v}(\alpha\rightarrow\beta)=1$ si y solo si o $\overline{v}(\alpha)=0$ o $\overline{v}(\beta)=1$.

(b) $\overline{v}(\alpha\rightarrow\beta)=0$ si y solo si a la vez $\overline{v}(\alpha)=1$ y $\overline{v}(\beta)=0$.

(vi) ASIGNACION DE VERDAD DE UN BICONDICIONAL.

(a) $\overline{\upsilon}(\alpha\leftrightarrow\beta)=1$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\alpha)=\overline{\upsilon}(\beta)$

si y solo si o $\overline{\upsilon}(\alpha)=1$ y $\overline{\upsilon}(\beta)=1$ o $\overline{\upsilon}(\alpha)=0$ y $\overline{\upsilon}(\beta)=0$.

(b) $\overline{\upsilon}(\alpha\leftrightarrow\beta)=0$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\alpha)\neq\overline{\upsilon}(\beta)$

si y solo si o $\overline{\upsilon}(\alpha)=1$ y $\overline{\upsilon}(\beta)=0$ o $\overline{\upsilon}(\alpha)=0$ y $\overline{\upsilon}(\beta)=1$.

EJEMPLO 2. Determinar para cada una de las *f.e.* de los incisos que siguen, la asignación de verdad bajo la interpretación ; $\upsilon(A)=1$, $\upsilon(B)=0$ y $\upsilon(C)=1$.

(1) $\neg A$

(2) $A\leftrightarrow\neg B$

(3) $(\neg A\vee B)\rightarrow C$

(4) $(B\wedge\neg C)\vee(C\rightarrow\neg A)$

(5) $\neg(\neg(A\rightarrow B)\rightarrow\neg(\neg C\rightarrow A))$

Para encontrar el valor de la asignación de verdad se construye un diagrama de árbol que se llamará *"Arbol de asignación de verdad"*.

Dicho diagrama se inicia anotando la *f.e.* y colocando debajo de cada símbolo de enunciado un "1" o un "0", dependiendo del valor dado en la interpretación o el contrario en caso de que el símbolo de enunciado aparezca negado. Después se irá determinando, siguiendo los mismos pasos de su construcción, la asignación de verdad de cada una de sus partes.

(1) $\neg A$
$0\leftarrow$ por ii.b.

Respuesta: $\overline{\upsilon}(\neg A)=0$

(2)

```
      A↔¬B
      1   1
       \ /
        1← por vi.a.
```

Respuesta: $\overline{\upsilon}(A\leftrightarrow\neg B)=1$

(3)

```
            (¬A∨B)→C
              0 0   1
               \ /  |
   por iv.b.→0      1
               \   /
                 1← por v.a.
```

Respuesta: $\overline{\upsilon}((\neg A\vee B)\to C)=1$

(4)

```
            (B∧¬C)∨(C→¬A)
             0  0    1  0
              \/      \/
   por iii.b →0       0← por v.b.
               \     /
                0← por iv.b.
```

Respuesta: $\overline{\upsilon}((B\wedge\neg C)\vee(C\to\neg A))=0$

(5)

```
                 ¬(¬(A→B)→¬(¬C→A))
                 | |  1 0  |  0 1
                 | |   \/  |   \/
   por v.b.→     →|→  0    |    1← por v.a.
                 |  \ /     \  /
   por ii.a.→    |→ 1        0← por ii.b.
                 |     \    /
                 |       0← por v.b.
                  \     /
                    1← por ii.a.
```

Respuesta: $\overline{\upsilon}(\neg(\neg(A\to B)\to\neg(\neg C\to A)))=0$

EJEMPLO 3. Si $\overline{\upsilon}(Q\to(P\vee\neg S))=0$, determinar $\upsilon(P)$, $\upsilon(Q)$ y $\upsilon(S)$.

Solución:

Si $\overline{\upsilon}(Q\to(P\vee\neg S))=0$, entonces $\overline{\upsilon}(Q)=1$ y $\overline{\upsilon}(P\vee\neg S)=0$ (por v.b).

De $\overline{\upsilon}(Q)=1$ se tiene por (i) que $\upsilon(Q)=1$.

Si $\overline{\upsilon}(P\vee\neg S)=0$, entonces $\overline{\upsilon}(P)=0$ y $\overline{\upsilon}(\neg S)=0$ (por iv.b).

De $\overline{\upsilon}(P)=0$ se tiene por (1) que $\upsilon(P)=0$.

Si $\overline{\upsilon}(\neg S)=0$, entonces (por ii.b) $\overline{\upsilon}(S)=1$, de donde $\upsilon(S)=1$.

EJEMPLO 4. Suponiendo que se sabe que $\overline{\upsilon}(A\rightarrow B)=1$, encontrar el valor de asignación de verdad de las *f.e.* siguientes.

(1) $C\rightarrow(A\rightarrow B)$

(2) $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow C$

Respuestas:

(1) $\overline{\upsilon}(C\rightarrow(A\rightarrow B))=1$. Puesto que un condicional solo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso y en este caso, el consecuente es verdadero, luego la *f.e.* no es falsa.

(2) Si $\overline{\upsilon}(A\rightarrow B)=1$, entonces $\overline{\upsilon}(\neg(A\rightarrow B))=0$ y $\overline{\upsilon}(\neg(A\rightarrow B)\rightarrow C)=1$.

En efecto, un condicional falso deberá tener antecedente verdadero y consecuente falso, pero en este caso el condicional tiene antecedente falso. luego es verdadero.

III.3. SATISFACION

Dada la *f.e.* α y la interpretación υ, se dirá que la interpretación υ *satisface* a la *f.e.* α si y solo si $\overline{\upsilon}(\alpha)=1$ bajo dicha interpretación, y si Γ es un conjunto de *f.e.* se dice que υ *satisface* al conjunto Γ si y solo si υ satisface a todo elemento de Γ.

NOTACION. La expresión "la interpretación υ satisface a la *f.e.* α" se simbolizará "υ sat α" y "la interpretación υ *satisface* a Γ" se sustituye por "υ sat Γ". De no ser así, se escribirá ; "υ no-sat α" o "υ no-sat Γ".

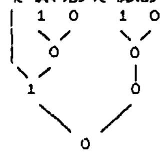
EJEMPLO 5. Dadas la *f.e.* α y la interpretación υ, determinar si la interpretación satisface o no satisface a la *f.e.*

(a) $\alpha=\neg(\neg A\leftrightarrow B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg C)$; $\upsilon(A)=0$, $\upsilon(B)=0$ y $\upsilon(C)=1$

(b) $\alpha=((\neg A\vee B)\wedge\neg B)\rightarrow\neg A$; $\upsilon(A)=1$ y $\upsilon(B)=0$

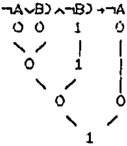
Solución.

(a) $\neg(\neg A\leftrightarrow B)\rightarrow(\neg A\wedge C)$



$\overline{\upsilon}(\alpha)=0$, por lo tanto, υ no-sat α.

(b) $((\neg A\vee B)\wedge\neg B)\rightarrow\neg A$



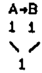
$\overline{\upsilon}(\alpha)=1$, luego, $\overline{\upsilon}$ sat α.

EJEMPLO 6. ¿La interpretación $\upsilon(A)=1$, $\upsilon(B)=1$ y $\upsilon(C)=0$ satisface al conjunto $\Gamma=\{A\rightarrow B,\ \neg C\vee A,\ \neg B\rightarrow C\}$?.

Hay que verificar que υ satisfaga a todo elemento de Γ.

(a) ¿ υ sat $A\rightarrow B$?

$A\rightarrow B$



$\overline{\upsilon}(A\rightarrow B)=1$, luego υ sat $A\rightarrow B$.

(b) ¿ υ sat $\neg C \vee A$?

$$\begin{array}{c} \neg C \vee A \\ 1 \quad 1 \\ \searrow \swarrow \\ 1 \end{array}$$

$\overline{\upsilon}(\neg C \vee A)=1$, por lo tanto υ sat $\neg C \vee A$.

(c) ¿ υ sat $\neg B \to C$?.

$$\begin{array}{c} \neg B \to C \\ 0 \quad 0 \\ \searrow \swarrow \\ 1 \end{array}$$

$\overline{\upsilon}(\neg B \to C)=1$, así que υ sat $\neg B \to C$.

De (a), (b) y (c) se concluye que υ sat Γ.

EJEMPLO 7. Si $\upsilon(P)=1$, $\upsilon(Q)=0$ y $\upsilon(R)=(1)$, y $\Gamma=(P \wedge \neg Q$, $R \to (Q \vee P)$, $(\neg R \vee Q) \to P$, $(R \wedge \neg Q) \leftrightarrow (P \to Q))$, ¿ υ sat Γ ?.

Determinar la asignación de verdad de cada elemento de Γ para saber si se satisfacen o no se satisfacen bajo υ.

(a) $\overline{\upsilon}(P \wedge \neg Q)=1$, luego, υ sat $P \wedge \neg Q$

(b) $\overline{\upsilon}(R \to (Q \vee P))=1$, por lo tanto, υ sat $R \to (Q \vee P)$

(c) $\overline{\upsilon}((\neg R \vee Q) \to P)=1$, por ende, υ sat $(\neg R \vee Q) \to P$

(d) $\overline{\upsilon}((R \wedge \neg Q) \leftrightarrow (P \to Q))=0$, de donde, υ no-sat $(R \wedge \neg Q) \leftrightarrow (P \to Q)$

No se satisfacen todos los elementos de Γ, luego, υ no-sat Γ.

III.4. TAUTOLOGIA, CONTRADICCION, CONTINGENCIA.

Uno de los problemas que hay que resolver en el análisis lógico de una *f.e.* es, determinar cuántas de las posibles interpretaciones que se pueden dar la satisfacen.

La solución permitirá clasificar a las *f.e.* en 3 categorías: las *tautologías*, las *contradicciones* y las *contingencias*.

Dichas clases se definen a continuación:

(a) La *f.e.* α es una *tautología* si y solo si para toda interpretación υ, υ sat α.

(b) La *f.e.* α es una *contradicción* si y solo si para toda interpretación υ, υ no-sat α.

(c) La *f.e.* α es una *contingencia* si solo si existe υ tal que υ sat α y existe υ tal que υ no-sat α.

La Lógica ofrece métodos para resolver el problema planteado. Uno de esos métodos es el de *Tablas de verdad*.

Dicho método permite tomar decisiones lógicas de una manera *efectiva* . Se dice que un método de decisión es *efectivo*, cuando no depende de la inventiva o ingenio de la persona que lo utiliza sino que puede ser aplicado de manera *mecánica*.

III.5. TABLAS DE VERDAD.

Las tablas de verdad proporcionan un algoritmo que permite tomar decisiones de carácter lógico después de un número finito de pasos, como por ejemplo, clasificar una *f.e.* en tautología, contradicción o contingencia.

La tabla de verdad de una *f.e.* consiste en mostrar en un arreglo formado por columnas y renglones el valor de asignación de verdad que toma la *f.e.* para cada una de las distintas interpretaciones que se le pueden dar.

El *primer paso* en la confección de una tabla de verdad consiste en precisar el número de renglones que esta tendrá, el cual queda completamente determinado por el número de diferentes símbolos de enunciado que contenga la *f.e.*, ya que:

$$\textit{número de renglones en la tabla de verdad} = \textit{número de diferentes interpretaciones para la f.e.}$$

Así, si la *f.e.* α contiene n símbolos de enunciado, entonces

$$\textit{número de renglones} = 2^n$$

El *segundo paso* consiste en especificar las columnas, cada una de ellas tendrá un encabezado, que corresponden a los componentes de la *f.e.*, según su construcción. Las primeras columnas se reservan para los símbolos de enunciado.

El *tercer paso* consiste en el llenado del cuerpo de la tabla, haciendo uso de la definición de asignación de verdad introducida en el apartado III.2.

EJEMPLO 8. Tabla de verdad de la *f.e.* $(P\rightarrow\neg Q)\ (\neg P\vee Q)$

Encabezados →	P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\rightarrow\neg Q$	$\neg P\vee Q$	$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)$
Renglón 1 →	1	1	0	0	0	1	0
Renglón 2 →	1	0	0	1	1	0	0
Renglón 3 →	0	1	1	0	1	1	1
Renglón 4 →	0	0	1	1	1	1	1
Columnas →	1	2	3	4	5	6	7

Interpretaciones

Asignaciones de verdad

Los valores de las primeras columnas (1 y 2) corresponden a las diferentes interpretaciones que se pueden dar a la *f.e.*; los valores que están en la columna 3 $(\neg P)$ se obtienen de negar los de la columna 1 (P) y los de la columna 4 $(\neg Q)$ se obtienen de negar los de la columna 2 (Q) -la mecánica consiste en cambiar el valor de verdad en cada renglón, "1" por "0" y "0" por "1"-; para el llenado de la columna 5 $(P\rightarrow\neg Q)$ se consideran los valores de verdad de las columnas 1 (P) y 4 $(\neg Q)$, la mecánica a seguir es, escribir "0" en aquellos renglones en los que el antecedente (P) sea "1" y el consecuente $(\neg Q)$ "0", después llenar los restantes renglones con "1"; los valores de la columna 6 $(\neg P\vee Q)$ son el resultado de la acción siguiente, se tomaron en cuenta los valores de las columnas 3 $(\neg P)$ y 2 (Q), se anotó "0" en aquellos renglones en que ambas columnas tienen el valor "0" y se llenó los restantes renglones con "1"; la última columna $((P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q))$ se obtuvo de la manera siguiente, se consideráron los valores anotados en las columnas 5 $(P\rightarrow\neg Q)$ y 6 $(\neg P\vee Q)$, procediendo a escribir "1" el los renglones en que ambas columnas sean "1" y completando los renglones restantes con "0".

Notar que el hecho que en la última columna de la tabla se tengan "1" y "0" significa que hay interpretaciones que satisfacen a la *f.e.* y hay interpretaciones que no la satisfacen, de donde concluye que la *f.e.* es una contingencia.

En general, si al realizar la tabla de verdad de la *f.e.* α, en la columna final se tienen valores "1" y "0", entonces α es una *contingencia*; si en la última columna solamente se tiene el valor "1", entonces α es una *tautología*; y si en la última columna solo se obtiene el valor "0", α es una *contradicción*.

EJEMPLO 9. Clasificar cada una de las *f.e.* siguientes como tautología, contradicción o contingencia.

(a) $(A \to B) \vee (A \wedge \neg B)$

(b) $\neg(A \to B) \wedge (B \vee \neg A)$

(c) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg A)$

(a) Tabla de verdad:

A	B	$\neg B$	$A \to B$	$A \wedge \neg B$	$(A \to B) \vee (A \wedge \neg B)$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1

↑
Solo hay el valor "1"

Decisión: La *f.e.* $(A \to B) \vee (A \wedge \neg B)$ es una tautología.

(b) Tabla de verdad:

A	B	$\neg A$	$A \to B$	$\neg(A \to B)$	$B \vee \neg A$	$\neg(A \to B) \wedge (B \vee \neg A)$
1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0

↑
Solo hay el valor "0"

Decisión: La *f.e.* $\neg(A \to B) \wedge (B \vee \neg A)$ es una contradicción.

(c) Tabla de verdad:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \to B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg A)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

↑
Hay "1's" y "0's"

Decisión: La *f.e.* $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg A)$ es una contingencia.

NOTACION: Si la *f.e.* α es una tautología se agregará a su lado izquierdo el símbolo $\models$. Así la expresión "$\models \alpha$" sustituirá a "α es una tautología".

EJEMPLO 10. Probar que

(a) $\models A\to A$

(b) $\models ((P\wedge Q)\to R)\to(P\to(\neg Q\vee R))$

(a)

A	A→A
1	1
0	1

Solo valor "1", por lo tanto, $\models A\to A$

(b)

Sea $((P\wedge Q)\to R)\to(P\to(\neg Q\vee R))=\alpha$

P	Q	R	¬Q	P∧Q	(P∧Q)→R	¬Q∨R	P→(¬Q∨R)	α
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	1

"1" en todo renglón

Del resultado de la tabla de verdad se concluye que $\models \alpha$.

EJEMPLO 11. ¿ Es la *f.e.* $(A\vee B)\to A$ una tautología ?.

Se construye la tabla de verdad.

A	B	A∨B	(A∨B)→A
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	1

$(A\vee B)\to A$ no es una tautología, pues en el resultado de la tabla de verdad no todos los valores son "1".

El concepto de tautología juega un papel fundamental para la toma de decisiones en el ámbito de la Lógica de Enunciados.

III.6. CONSECUENCIA LOGICA .

El concepto lógico que permitirá decidir si un razonamiento es o no es válido es el de *consecuencia lógica*.

En su definición se considera que Γ es un conjunto finito de *f.e.*

$$\Gamma=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n\}$$

La *f.e.* β es *consecuencia lógica* del conjunto Γ si y solo si toda interpretación que satisface a Γ también satisface a β.

NOTACION: (a) "β es consecuencia lógica de Γ" se sustituye por "$\Gamma \models \beta$".

(b) En lugar de "$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n\} \models \beta$" se escribirá simplemente "$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n \models \beta$".

EJEMPLO 12. Mostrar que $A\rightarrow B, A \models B$.

Se elabora una tabla de verdad "conjunta", es decir se construye la tabla de cada una de las *f.e.* en el mismo arreglo.

Para determinar el número de renglones se cuentan el número de diferentes símbolos de enunciados que aparecen en el conjunto de *f.e.* que aparecen en la expresión "$A\rightarrow B, A \models B$", en este caso 2, luego la tabla "conjunta" será de 4 renglones.

	A	B	A→B	A	B	
→	1	1	1	1	1	←
	1	0	0	1	0	
	0	1	1	0	1	
	0	0	1	0	0	

Al observar la tabla se puede ver que la única interpretación que satisface a la vez a las *f.e.* A→B y A es la del renglón 1 (único renglón en aparece el valor "1" para ambas *f.e.*), y dicha interpretación también satisface a la *f.e.* B (está el valor "1" en el primer renglón de la columna "B"). Es decir, A→B, A ⊨ B.

EJEMPLO 13. Responder la pregunta de cada uno de los incisos.

(a) ¿ A∨B, ¬A ⊨ B ?

(b) ¿ A→B, ¬A ⊨ ¬B ?

(a) Tabla de verdad "conjunta".

A	B	A∨B	¬A	B	
1	1	1	0	1	
1	0	1	0	0	
0	1	1	1	1	← renglón a "observar"
0	0	0	1	0	

Del renglón a "observar" se sigue que A∨B, ¬A ⊨ B.

(b) Tabla de verdad "conjunta".

A	B	A→B	¬A	¬B	
1	1	1	0	0	
1	0	0	0	1	
0	1	1	1	0	← renglón a "observar"
0	0	1	1	1	← renglón a "observar"

De la tabla se tiene que la interpretación del renglón 4, satisface a las *f.e.* A→B y ¬A, y también satisface a ¬B. Pero la interpretación del renglón 3 que satisface a A→B y ¬A, no satisface a ¬B, luego no es verdad que A→B, ¬A ⊨ ¬B, ya que la condición es que *toda* interpretación que satisfaga a la vez a A→B y ¬A, también tendrá que satisfacer a ¬B.

En general, no es cierto que Γ ⊨ β si y solo si existe al menos una interpretación que satisface a Γ pero que no satisface a β.

Dichas interpretaciones, si es que existen se conocen como *contraejemplos*.

Con el fin de "ahorrarse" la busqueda de interpretaciones en la "tabla conjunta", a continuación se enuncia un importante resultado y al final del capítulo se demuestra.

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \models \beta \text{ si y solo si } \models \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \rightarrow \beta$$

En otras palabras, el problema de tomar la decisión acerca de la consecuencia lógica se traduce a ver si una *f.e.* es o no es una tautología. Obsérvese que la *f.e.* aludida es un *condicional* que tiene como antecedente a la *conjunción* de las *f.e.* del conjunto Γ y como consecuente a la *f.e.* β.

Luego para mostrar que $\Gamma \models \beta$, se siguen los pasos siguientes.

Paso 1. Construcción de un condicional con:

Antecedente=la *conjunción* de las *f.e.* del conjunto Γ

Consecuente=la *f.e.* β

Paso 2. Elaboración de la tabla de verdad de tal condicional.

Paso 3. Decisión Lógica:

(a) Hay consecuencia lógica, si el condicional es tautología.

(b) *No* hay consecuencia lógica, si el condicional *no* es una tautología.

EJEMPLO 14. Mostrar que $A\to B, \neg B \models \neg A$.

Paso 1. Condicional

$((A\to B)\wedge\neg B)\to\neg A$

Paso 2. Tabla de verdad

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A\to B$	$(A\to B)\wedge\neg B$	$((A\to B)\wedge\neg B)\to\neg A$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

La tabla muestra que $\models ((A\to B)\wedge\neg B)\to\neg A$

Paso 3. Decisión Lógica: $A\to B, \neg B \models \neg A$

EJEMPLO 15: Decidir si hay o no hay consecuencia lógica.

¿ $\neg A, A\vee B, C\to B \models \neg C$?

Paso 1. Condicional

$(\neg A\wedge(A\vee B)\wedge(C\to B))\to\neg C = \alpha$

Paso 2. Tabla de verdad

A	B	C	$\neg A$	$\neg C$	$A\vee B$	$C\to B$	$\neg A\wedge(A\vee B)\wedge(C\to B)$	α
1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	1	0	1

De la tabla se concluye que α no es una tautologia.

Paso 3. Decisión Lógica: No hay consecuencia lógica.

Contraejemplo: $\upsilon(A)=0$, $\upsilon(B)=1$ y $\upsilon(C)=1$ (renglón 5)

III.7. ESQUEMA DE INFERENCIA

Se llamará *esquema de inferencia* al modelo simbólico del razonamiento, el cual se obtiene al simbolizar sus premisas y conclusión.

Si las *f.e.* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ son los modelos simbólicos de las premisas y la *f.e.* β es el modelo de la conclusión, el *esquema de inferencia* o *forma* del razonamiento se representará como sigue:

ESQUEMA DE INFERENCIA

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 & \leftarrow \text{primer premisa} \\ \alpha_2 & \leftarrow \text{segunda premisa} \\ \alpha_3 & \leftarrow \text{tercer premisa} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \alpha_n & \leftarrow \text{n-ésima premisa} \\ \hline \beta & \leftarrow \text{Conclusión} \end{array}$$

Para obtener el esquema de inferencia de un razonamiento se sugiere seguir los pasos siguientes:

Paso 1. Identificar premisas y conclusión.

Paso 2. Identificar enunciados simples.

Paso 3. Simbolizar enunciados simples.

Paso 4. Simbolizar premisas y conclusión, y anotarlos según el diagrama anterior.

EJEMPLO 16. Obtener el esquema de inferencia del razonamiento,

Jesús tiene infección estomacal, solo si se le administró penicilina y se le decretó cuarentena. Pero, ni se le administró penicilina ni se le decretó cuarentena. Por lo tanto, no es cierto que Jesús tenga infección estomacal.

Paso 1.

Premisa 1: Jesús tiene infección estomacal, solo si se le administró penicilina y se decretó cuarentena.

Premisa 2: A Jesús, ni se le administró penicilina ni se le decretó en cuarentena.

Conclusión: Jesús no tiene infección estomacal.

Paso 2. *Paso 3.*

Jesús tiene infección estomacal = A

A Jesús se le administró penicilina = B

A Jesús de le decretó en cuarentena = C

Paso 4. ESQUEMA DE INFERENCIA

$A \rightarrow (B \wedge C)$ ← Premisa 1

$\neg B \wedge \neg C$ ← Premisa 2

$\neg A$ ← Conclusión

III.8. RAZONAMIENTO FORMALMENTE VALIDO

Un razonamiento es *válido* si siempre que sus premisas son verdaderas, entonces necesariamente la conclusión también lo es.

Para efectuar el análisis de la validez de un razonamiento, se tendrá que recurrir al esquema de inferencia y observar que toda interpretación que satisface a las premisas también satisface a la conclusión. Es decir, la validez o invalidez de un razonamiento dependerá de que la conclusión sea o no sea consecuencia lógica de la premisas.

Lo anterior se puede expresar de la manera siguiente:

El esquema de inferencia

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \\ \hline \beta \end{array}$$

es la forma de un razonamiento válido

si y solo si $\models \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \rightarrow \beta$.

En otras palabras, para probar que en esquema de inferencia es una forma válida de razonar, se seguirán los pasos siguientes:

Paso 1. Construir un condicional con las siguientes caracteristicas: Antecedente=*conjunción* de premisas y Consecuente=*conclusión*.

Paso 2. Elaborar la tabla de verdad de dicho condicional.

Paso 3. Desición Logica:

(a) El esquema de inferencia es una forma válida de razonar, si el condicional construido es una tautologia.

(b) El esquema de inferencia *no* es una forma válida de razonar, si el condicional construido *no* es una tautología.

EJEMPLO 17. El esquema de inferencia.

$$\begin{array}{c} A\to(B\wedge C) \\ \neg B\wedge\neg C \\ \hline \neg A \end{array}$$

¿Es una forma válida de razonar?

Para responder a la pregunta se procede así:

Paso 1. Construcción del condicional.

$$\underbrace{((A\to(B\wedge C))\wedge(\neg B\wedge\neg C))}_{\textit{conjunción de premisas}}\to\underbrace{\neg A}_{\textit{conclusión}}$$

Paso 2. Tabla de verdad de ese condicional.

			β				α_1	α_2		
A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$B\wedge C$	$A\to(B\wedge C)$	$\neg B\wedge\neg C$	$\alpha_1\wedge\alpha_2$	$(\alpha_1\wedge\alpha_2)\to\beta$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1

La tabla muestra que $\models ((A\to(B\wedge C))\wedge(\neg B\wedge\neg C))\to\neg A$

4. Decisión Lógica: El esquema de inferencia es una forma válida de razonar.

Recordar que la validez de un razonamiento depende únicamente de la forma, por lo cual la noción de razonamiento válido, anotada en al párrafo inicial de este apartado, se traduce a lo siguiente.

Un razonamiento es *válido*, si su esquema de inferencia es una forma válida de razonar.

Para mostrar la validez de un razonamiento se siguen los pasos siguientes:

Paso 1. Obtener esquema de inferencia.

Paso 2. Construcción de condicional (Antecedente=conjunción de premisas y Consecuente=conclusión).

Paso 3. Elaboración de la tabla de verdad del condicional formado.

Paso 4. Decisión lógica.

(a) El razonamiento es *válido*, si el condicional formado es una tautología.

(b) El razonamiento no es válido, si el condicional formado no es una tautología.

EJEMPLO 18. ¿Es válido el razonamiento siguiente?

Si Vasconcelos fue Rector, entonces no fue Matemático.
Si Bolzano no escribió la obra "Teoria de la Ciencia" ni Vasconcelos fue Rector, Vasconcelos fue Matemático.
Por lo tanto, o Bolzano escribió la obra "Teoria de la Ciencia" o Vasconcelos fue Rector.

Paso 1(a)

Premisa 1: Si Vasconcelos fue Rector, entonces no fue Matemático.

Premisa 2: Si Bolzano no escribió la obra "Teoría de la Ciencia" ni Vasconcelos fue Rector, Vasconcelos fue Matemático.

Conclusión: O Bolzano escribió la obra "Teoría de la Ciencia" o Vasconcelos fue Rector.

Paso 1(b) *Paso 1(c)*

Vasconcelos fue Rector = P

Vasconcelos fue Matemático = Q

Bolzano escribió la "Teoría de la Ciencia" = R

Paso 1(d)

Esquema de Inferencia

$$\begin{array}{rl} P\to\neg Q & \leftarrow \text{Premisa 1} \\ (\neg R\wedge\neg P)\to Q & \leftarrow \text{Premisa 2} \\ \hline R\vee P & \leftarrow \text{Conclusión} \end{array}$$

Paso 2. Condicional: $((P\to\neg Q)\wedge((\neg R\wedge\neg P)\to Q))\to(R\vee P)$

Paso 3. Tabla de verdad

$\beta\downarrow$ $\alpha_1\downarrow$ $\alpha_2\downarrow$

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$R\vee P$	$P\to\neg Q$	$\neg R\wedge\neg P$	$(\neg R\wedge\neg P)\to Q$	$\alpha_1\wedge\alpha_2$	$(\alpha_1\wedge\alpha_2)\to\beta$
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1

De la tabla de verdad se tiene que el condicional formado no es tautología.

Paso 4. Decisión Lógica: El razonamiento no es válido.

DETERMINACION DE LA VALIDEZ DE UN RAZONAMIENTO MEDIANTE LA NO EXISTENCIA DE UN CONTRAEJEMPLO

También se puede decir que el esquema de inferencia

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha n \\ \hline \beta \end{array}$$

no es la forma de un razonamiento *válido*, si existe algún contraejemplo.

Esto sugiere otra manera de mostrar la validez de un razonamiento y consiste en tratar de encontrar algún contraejemplo que lo invalide.

Este procedimiento se puede usar cuando en el esquema de inferencia aparecen 5 o más símbolos de enunciado, puesto que en estos casos recurrir al método de tablas de verdad da lugar a la construcción de tablas de por lo menos 32 renglones.

EJEMPLO 18. El esquema de inferencia anotado a continuación, ¿ es la forma de un razonamiento válido?

$$\begin{array}{c} B \to (D \vee \neg C) \\ C \wedge \neg A \\ D \to \neg E \\ \hline B \to \neg E \end{array}$$

Como hay 5 símbolos de enunciado, se tratará de invalidar la forma de razonar con algún contraejemplo.

Si existe tal contraejemplo, entonces debe haber al menos una interpretación υ tal que, υ satisfece a toda premisa y no satisface a la conclusión, es decir, que bajo υ,

$$\begin{array}{cccc} \overline{\upsilon}(B\to(D\vee\neg C))=1, & \overline{\upsilon}(C\wedge\neg A)=1, & \overline{\upsilon}(D\to\neg E)=1 \text{ y } & \overline{\upsilon}(B\to\neg E)=0 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \textit{premisa 1} & \textit{premisa 2} & \textit{premisa 3} & \textit{conclusión} \end{array}$$

Si existe dicha interpretación, entonces

De la conclusión: $\overline{\upsilon}(B\to\neg E)=0$, se sigue que $\overline{\upsilon}(B)=1$ y $\overline{\upsilon}(\neg E)=0$ pero, si $\overline{\upsilon}(\neg E)=0$, entonces $\overline{\upsilon}(E)=1$, luego, $\upsilon(B)=1$ y $\upsilon(E)=1$.

De la premisa 3: Como $\overline{\upsilon}(\neg E)=0$ y $\overline{\upsilon}(D\to\neg E)=1$, se concluye que $\overline{\upsilon}(D)\neq 1$, así que $\overline{\upsilon}(D)=0$ y por ende $\upsilon(D)=0$.

De la premisa 1: Se sabe que $\overline{\upsilon}(B)=1$ y $\overline{\upsilon}(B\to(D\vee\neg C))=1$, luego, $\overline{\upsilon}(D\vee\neg C)\neq 0$, esto es, $\overline{\upsilon}(D\vee\neg C)=1$. Si $\overline{\upsilon}(D)=0$ y $\overline{\upsilon}(D\vee\neg C)=1$, entonces $\overline{\upsilon}(\neg C)=1$. Si $\overline{\upsilon}(\neg C)=1$, $\overline{\upsilon}(C)=0$, y por lo tanto $\upsilon(C)=0$.

Pero si $\overline{\upsilon}(C)=0$, entonces $\overline{\upsilon}(C\wedge\neg A)=0$!!.Contrario al supuesto que υ satisface a la premisa 2. Esta contradicción permite concluir que el contrejemplo buscado no existe y que el esquema de inferencia dado es una forma válida de razonar.

Notar que éste procedimiento no es efectivo, pero ¿existirá un procedimiento efectivo que no sea el de tablas de verdad mediante el cual se pueda investigar la existencia de dichos contraejemplos?. La respuesta es *sí*, como se verá en el capítulo siguiente

Por último se demuestra la proposición:

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n \models \beta \text{ si y solo si } \models \bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\to\beta$$

En efecto, supongamos que $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n \models \beta$ y que $\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\to\beta$ no es una tautología. Si $\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\to\beta$ no es una tautología, entonces existe al menos una interpretación υ' bajo la cual $\overline{\upsilon}(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\to\beta)=0$. Esto es, bajo υ' $\overline{\upsilon}(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i)=1$ y $\overline{\upsilon}(\beta)=0$. Pero $\overline{\upsilon}(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i)=1$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\alpha_i)=1$, para toda i. Luego bajo υ', $\overline{\upsilon}(\alpha_1)=\overline{\upsilon}(\alpha_2)=\overline{\upsilon}(\alpha_3)= \ldots =\overline{\upsilon}(\alpha_n)=1$ y $\overline{\upsilon}(\beta)=0$. En otras palabras υ' sat $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n\}$ y υ' no-sat β. Por lo tanto υ' es un contraejemplo. Este hecho contradice al supuesto $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n \models \beta$, de donde se concluye que no puede suceder que la $f.e.$ $\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\to\beta$ no sea una tautología, lo que finalmente demuestra que,

$$\text{si } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n \models \beta, \text{ entonces } \models \bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\to\beta.$$

Ahora supóngase que $\models \bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\to\beta$. Si $\models \bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\to\beta$, entonces para toda interpretación υ, υ sat $\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\to\beta$. Esto es, para toda υ, $\overline{\upsilon}(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\to\beta)=1$, de donde se afirma que no existe interpretación alguna bajo la cual $\overline{\upsilon}(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i)=1$ y $\overline{\upsilon}(\beta)=0$. Pero $\overline{\upsilon}(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i)=1$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\alpha_i)=1$, para toda $i=1,2,3,\ldots,n$. Es decir que no existe interpretación bajo la cual υ sat $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n\}$ y υ no-sat β. En otras palabras no existe contraejemplo alguno. Por lo tanto, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n \models \beta$. Con lo que se demuestra,

$$\text{si } \models \bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\to\beta, \text{ entonces } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n \models \beta.$$

IV. EL METODO DE ARBOLES DE VERDAD

En este capítulo se describe la aplicación del método de *Arboles de verdad* para la toma de decisiones en Lógica de Enunciados.

Así como el método de Tablas de verdad, el de Arboles de verdad es un método *efectivo*, en el campo de la Lógica de Enunciados. Pues, como se verá más adelante, existen las instrucciones exactas que indican como ejecutarlo y tomar decisiones después de un número finito de pasos.

IV.1. ARBOLES DE VERDAD

La idea fundamental en este método es, presentar en un diagrama de árbol, las condiciones que han de cumplir las interpretaciones que satisfacen a una *f.e.* o a un conjunto de ellas.

Partiendo de esa idea, se obtiene un conjunto de reglas básicas mediante las cuales se podrá construir el Arbol de verdad de una *f.e.* o de un conjunto de ellas.

IV.1.1. REGLA PARA LA CONJUNCION.

De la definición de asignación de verdad para una conjunción se tiene lo siguiente.

$$\overline{v}(\alpha\wedge\beta)=1 \text{ si solo si } \overline{v}(\alpha)=1 \text{ y } \overline{v}(\beta)=1$$

Este hecho se puede diagramar en forma de árbol de la manera que sigue, obteniéndose la regla para la conjunción.

$\alpha\wedge\beta$ ← *nodo conjunción*
| ← *una rama*
α
β] *nuevo nodo*

EJEMPLO 1. Arbol de verdad de la *f.e.* $P\wedge\neg Q$

$P\wedge\neg Q$
|
P
$\neg Q$

IV.1.2. REGLA PARA LA DISYUNCION.

Del capítulo 2 se sabe acerca de la asignación de verdad para una disyunción que:

$$\overline{v}(\alpha\vee\beta)=1 \text{ si y solo si o } \overline{v}(\alpha)=1 \text{ o } \overline{v}(\beta)=1$$

Si se expresa esto en un diagrama de árbol, se tendrá la regla para la disyunción.

$\alpha\vee\beta$ ← *nodo disyunción*
/ \ ← *dos ramas*
α β ← *nuevos nodos*

EJEMPLO 2. Arbol de verdad de la *f.e.* $B\vee\neg P$.

$B\vee\neg P$
/ \
B $\neg P$

EJEMPLO 3. Construir el Arbol de verdad de $(A\vee B)\wedge\neg C$.

Paso 1. Como la *f.e.* es una conjunción, aplicar primero la regla para la conjunción.

NOTA 1: En todos los casos, la primer regla que hay que aplicar es la correspondiente al conectivo principal.

$$\begin{array}{c} (A\vee B)\wedge\neg C \ \checkmark \\ | \\ A\vee B \\ \neg C \end{array}$$

NOTA 2: Se escribirá el signo "$\checkmark$ " a la derecha de la *f.e.* cuando se le aplique la regla correspondiente.

Paso 2. Después de aplicar la regla de conjunción se observa que en el nuevo nodo aparece la *f.e.* $A\vee B$, hay que continuar el desarrollo del árbol aplicándole regla (de disyunción) a dicha *f.e.* y se tendrá el diagrama siguiente que corresponde al árbol de verdad terminado.

$$\begin{array}{lcccl} & & \textit{nodo inicial} \rightarrow (A\vee B)\wedge\neg C \ \checkmark & & \\ & & | & & \\ & & A\vee B \ \checkmark & & \\ & & \neg C & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \textit{nodo final} \rightarrow A & & & & B \leftarrow \textit{nodo final} \\ \textit{trayecto 1} & & & & \textit{trayecto 2} \end{array}$$

NOTA 3: Se llamará *trayecto* a cualquier camino de "arriba hacia abajo" que va desde el nodo inicial hasta alguno de los nodos finales.

En este ejemplo se tiene un árbol con dos trayectos.

EJEMPLO 4. ¿Cuáles interpretaciones satisfacen a $(P\vee\neg Q)\wedge(\neg R\vee P)$?

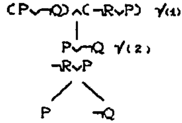
Para responder, elabórese el árbol de verdad.

Paso 1. Aplicar regla de conjunción.

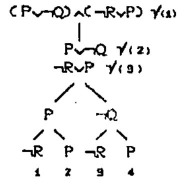
$$\begin{array}{c} (P\vee\neg Q)\wedge(\neg R\vee P) \ \checkmark(1) \\ | \\ P\vee\neg Q \\ \neg R\vee P \end{array}$$

NOTA 4: La simbología "$\checkmark(i)$" representará de aqui en adelante el i-ésimo paso en el desarrollo del árbol.

Paso 2. Aplicar regla de disyunción a $P\vee\neg Q$.



Paso 3. Aplicar regla de disyunción a $\neg R\vee P$ (árbol terminado).



Observar que al efectuar este tercer paso, en el desarrollo del árbol hasta el paso 2 aparecen 2 trayectos, y la disyunción $\neg R\vee P$ pertenece a ambos, luego las dos ramas de la regla hay que dibujarlas en cada uno de ellos.

IV.1.3. REGLA PARA LA NEGACION DE NEGACION.

Así como $\neg\alpha$ es la negación de α, también se tiene que $\neg\neg\alpha$ es la negación de $\neg\alpha$.

Por otro lado, para toda υ, si $\overline{\upsilon}(\alpha)=1$, entonces $\overline{\upsilon}(\neg\alpha)=0$ y si $\overline{\upsilon}(\neg\alpha)=0$, entonces $\overline{\upsilon}(\neg\neg\alpha)=1$, luego, para toda υ, si $\overline{\upsilon}(\alpha)=1$, entonces $\overline{\upsilon}(\neg\neg\alpha)=1$. Ahora, si $\overline{\upsilon}(\neg\neg\alpha)=1$, entonces $\overline{\upsilon}(\neg\alpha)=0$ y si $\overline{\upsilon}(\neg\alpha)=0$, entonces $\overline{\upsilon}(\alpha)=1$, de donde si $\overline{\upsilon}(\neg\neg\alpha)=1$, entonces $\overline{\upsilon}(\alpha)=1$.

De todo lo anterior se concluye que para toda interpretación υ, $\overline{\upsilon}(\alpha)=1$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\neg\neg\alpha)=1$ ....(a).

De manera análoga se demuestra que para toda interpretación υ,

$\overline{\upsilon}(\alpha)=0$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\neg\neg\alpha)=0$ ....(b).

De (a) y (b) se puede concluir que para toda interpretación υ, $\overline{\upsilon}(\alpha)=\overline{\upsilon}(\neg\neg\alpha)$, lo que permite sustituir la *f.e.* α por $\neg\neg\alpha$ y poder afirmar que α es la negación de $\neg\alpha$.

Basándose en este hecho, la regla de la negación de la negación para los árboles de verdad se enuncia de la siguiente manera:

"*Eliminar dobles negaciones*"

IV.1.4. REGLA PARA LA NEGACION DE LA CONJUNCION.

Para obtener la regla para la negación de un conjunción, atienda lo siguiente.

Como $\overline{\upsilon}(\neg(\alpha\wedge\beta))=1$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\alpha\wedge\beta)=0$ y puesto que $\overline{\upsilon}(\alpha\wedge\beta)=0$ si y solo si o $\overline{\upsilon}(\alpha)=0$ o $\overline{\upsilon}(\beta)=0$, se sigue que $\overline{\upsilon}(\neg(\alpha\wedge\beta))=1$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\alpha)=0$ o $\overline{\upsilon}(\beta)=0$. Pero, $\overline{\upsilon}(\alpha)=0$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\neg\alpha)=1$ y $\overline{\upsilon}(\beta)=0$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\neg\beta)=1$. De todo esto se concluye que $\overline{\upsilon}(\neg(\alpha\wedge\beta))=1$ si y solo si o $\overline{\upsilon}(\neg\alpha)=1$ o $\overline{\upsilon}(\neg\beta)=1$.

Expresando este resultado en forma de árbol se obtiene la regla para la negación de una conjunción y es:

$$\begin{array}{ccccl} & \neg(\alpha\wedge\beta) & & \leftarrow & \textit{nodo negación de conjunción} \\ / & & \backslash & \leftarrow & \textit{dos ramas} \\ \neg\alpha & & \neg\beta & \leftarrow & \textit{nuevos nodos} \end{array}$$

EJEMPLO 5. Desarróllese el árbol de verdad de $\neg(B\wedge\neg C)$.

Paso 1. Aplicar la regla de negación de conjunción.

$$\begin{array}{ccc} & \neg(B\wedge\neg C)\ \checkmark(1) & \\ / & & \backslash \\ \neg B & & \neg\neg C \end{array}$$

Paso 2. Aplicar regla de negación de negación al nodo $\neg\neg C$, con lo cual se termina el árbol y es el siguiente.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg(B\wedge\neg C)\ \checkmark(1) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
\neg B & & C \text{ (se eliminó la doble negación)}
\end{array}
$$

EJEMPLO 6. Construir el árbol de verdad para la *f.e.* $(A\wedge\neg B)\wedge\neg(\neg C\wedge R)$.

Paso 1. Aplicar regla de conjunción.

$$
\begin{array}{c}
(A\wedge\neg B)\wedge\neg(\neg C\wedge R)\ \checkmark(1) \\
| \\
A\wedge\neg B \\
\neg(\neg C\wedge R)
\end{array}
$$

Paso 2. Aplicar regla de conjunción a $A\wedge\neg B$ para tener:

$$
\begin{array}{c}
(A\wedge\neg B)\wedge\neg(\neg C\wedge R)\ \checkmark(1) \\
| \\
A\wedge\neg B\ \checkmark(2) \\
\neg(\neg C\wedge R) \\
| \\
A \\
\neg B
\end{array}
$$

Paso 3. Aplicar regla de negación de conjunción a $\neg(\neg C\wedge R)$, eliminando la doble negación de C, terminando así el árbol.

$$
\begin{array}{ccc}
 & (A\wedge\neg B)\wedge\neg(\neg C\wedge R)\ \checkmark(1) & \\
 & | & \\
 & A\wedge\neg B\ \checkmark(2) & \\
 & \neg(\neg C\wedge R)\ \checkmark(3) & \\
 & | & \\
 & A & \\
 & \neg B & \\
 \swarrow & & \searrow \\
C & & \neg R \\
1 & & 2
\end{array}
$$

IV.1.5. REGLA PARA LA NEGACION DE UNA DISYUNCION.

La negación de una disyunción será verdadera si y solo si la disyunción es falsa y la disyunción será falsa si y solo si sus componentes son ambos falsos, así se tiene que:

$\overline{v}(\neg(\alpha\vee\beta))=1$ si y solo si a la vez $\overline{v}(\neg\alpha)=1$ y $\overline{v}(\neg\beta)=1$

Si se escribe en forma de árbol dicha afirmación, dará lugar a la regla de árbol de verdad para la *negación de disyunción*.

$$\begin{array}{ll}
\neg(\alpha\vee\beta) & \leftarrow \textit{nodo negación de disyunción} \\
\quad| & \leftarrow \textit{una rama} \\
\left.\begin{array}{l}\neg\alpha \\ \neg\beta\end{array}\right] & \textit{nuevo nodo}
\end{array}$$

EJEMPLO 7. Realizar el árbol de verdad de $\neg(B\vee\neg D)\wedge\neg(\neg A\wedge C)$.

Paso 1. Aplique regla de conjunción.

$$\begin{array}{c}
\neg(B\vee\neg D)\wedge\neg(\neg A\wedge C)\ \checkmark(1) \\
| \\
\neg(B\vee\neg D) \\
\neg(\neg A\wedge C)
\end{array}$$

Paso 2. Aplicar regla de negación de disyunción a $\neg(B\vee\neg D)$, eliminando la doble negación de D.

$$\begin{array}{c}
\neg(B\vee\neg D)\wedge\neg(\neg A\wedge C)\ \checkmark(1) \\
| \\
\neg(B\vee\neg D)\ \checkmark(2) \\
\neg(\neg A\wedge C) \\
| \\
\neg B \\
D
\end{array}$$

Paso 3. Aplicar regla de negación de conjunción a $\neg(\neg A\wedge C)$ y eliminar la doble negación de A.

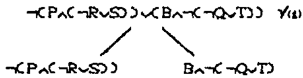
$$\begin{array}{c}
\neg(B\vee\neg D)\wedge\neg(\neg A\wedge C)\ \checkmark(1) \\
| \\
\neg(B\vee\neg D)\ \checkmark(2) \\
\neg(\neg A\wedge C)\ \checkmark(3) \\
| \\
\neg B \\
D \\
\diagup \quad \diagdown \\
A \qquad \neg C
\end{array}$$

EJEMPLO 8. ¿Cuáles interpretaciones satisfacen a la *f.e.*

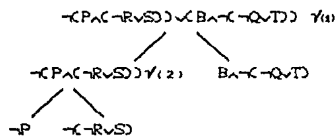
$\neg(P\wedge(\neg R\vee S))\vee(B\wedge\neg(\neg Q\vee T))$?.

Para dar respuesta se sugiere construir su árbol de verdad.

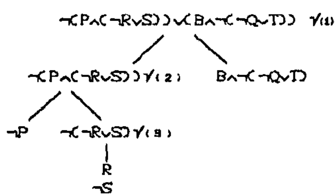
Paso 1. Aplicar regla de disyunción.



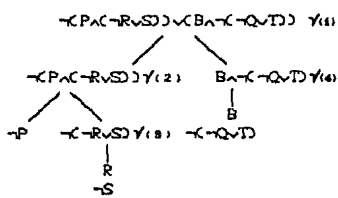
Paso 2. Continuar el desarrollo del árbol por la rama del lado izquierdo, aplicando la regla de negación de conjunción.



Paso 3. Aplicar regla de negación de disyunción al nodo $\neg(\neg R\vee S)$ y eliminar la doble negación de *R*.



Paso 4. Desarrollar la rama derecha formada en el paso 1.



Paso 5. Aplicar regla de negación de disyunción a $\neg(\neg Q\vee T)$ y eliminar la doble negación de Q.

```
            ¬(P∧(¬R∨S))∨(B∧¬(¬Q∨T))  ✓(1)
                   /           \
     ¬(P∧(¬R∨S))✓(2)         B∧¬(¬Q∨T)✓(4)
        /       \                  |
                                   B
   ¬P      ¬(¬R∨S)✓(3)      ¬(¬Q∨T)✓(5)
    1           |                  |
                R                  Q
               ¬S                 ¬T
                2                  3
```

Las interpretaciones que satisfacen a la *f.e.* dada son, según el árbol de verdad las que cumplan con alguna de las condiciones:

(a) Del trayecto 1, $v(P)=0$.

(b) Del trayecto 2, $v(R)=1$ y $v(S)=0$.

(c) Del trayecto 3, $v(B)=1$, $v(Q)=1$ y $v(T)=0$.

IV.1.6. REGLA PARA EL CONDICIONAL.

Un condicional es verdadero si y solo si o el antecedente es falso o el consecuente es verdadero, es decir:

$$\overline{v}(\alpha\to\beta)=1 \text{ si y solo si o } \overline{v}(\alpha)=0 \text{ o } \overline{v}(\beta)=1$$

o bien,

$$\overline{v}(\alpha\to\beta)=1 \text{ si y solo si o } \overline{v}(\neg\alpha)=1 \text{ o } \overline{v}(\beta)=1$$

De este hecho, traducido a diagrama de árbol, se obtiene la regla para el *condicional*.

```
     α→β    ← nodo condicional
     / \    ← dos ramas
   ¬α   β   ← nuevos nodos
```

EJEMPLO 9. Desarrollo del árbol de verdad de $(A\vee B)\to(C\wedge D)$.

Paso 1. Aplicar la regla de condicional.

$$\begin{array}{ccc} & (A\vee B)\to(C\wedge D)\ \checkmark(1) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg(A\vee B) & & C\wedge D \end{array}$$

Paso 2. Desarrollar la rama izquierda, aplicando la regla de negación de disyunción a $\neg(A\vee B)$.

$$\begin{array}{ccc} & (A\vee B)\to(C\wedge D)\ \checkmark(1) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg(A\vee B)\ \checkmark(2) & & C\wedge D \\ | & & \\ \neg A & & \\ \neg B & & \end{array}$$

Paso 3. Por último aplicar la regla de conjunción al nodo $C\wedge D$.

$$\begin{array}{ccc} & (A\vee B)\to(C\wedge D)\ \checkmark(1) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg(A\vee B)\ \checkmark(2) & & C\wedge D\ \checkmark(3) \\ | & & | \\ \neg A & & C \\ \neg B & & D \end{array}$$

IV.1.7. REGLA PARA LA NEGACION DE CONDICIONAL.

Para obtener la regla de árbol de verdad para la negación de un condicional, tomar en cuenta lo que sigue.

$\overline{\upsilon}(\neg(\alpha\to\beta))=1$ si solo si $\overline{\upsilon}(\alpha\to\beta)=0$, pero $\overline{\upsilon}(\alpha\to\beta)=0$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\alpha)=1$ y $\overline{\upsilon}(\beta)=0$, por lo tanto, $\overline{\upsilon}(\neg(\alpha\to\beta))=1$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\alpha)=1$ y $\overline{\upsilon}(\beta)=0$, o como $\overline{\upsilon}(\beta)=0$ si y solo si $\overline{\upsilon}(\neg\beta)=1$, el resultado se puede escribir:

$$\overline{\upsilon}(\neg(\alpha\to\beta))=1 \text{ si y solo si a la vez } \upsilon(\alpha)=1 \text{ y } \overline{\upsilon}(\neg\beta)=1$$

Este último resultado, expresado en un diagrama de árbol, dará lugar a la regla para la negación de un condicional.

$$\begin{array}{ll} \neg(\alpha\to\beta) & \leftarrow \textit{nodo negación de condicional} \\ \quad | & \leftarrow \textit{una rama} \\ \quad \alpha & \left.\right] \textit{nueva nodo} \\ \quad \neg\beta & \end{array}$$

EJEMPLO 10. Desarrrollo del árbol de verdad de $\neg(\neg P\to Q)\wedge\neg((B\vee\neg C)\to(\neg R\vee S))$

Paso 1. Aplicar la regla de conjunción.

$$\begin{array}{cl} \neg(\neg P\to Q)\wedge\neg((B\vee\neg C)\to(\neg R\vee S))\checkmark(1) & \\ | & \\ \neg(\neg P\to Q) & \ldots\ldots\ldots(a) \\ \neg((B\vee\neg C)\to(\neg R\vee S)) & \ldots\ldots\ldots(b) \end{array}$$

NOTA 5: De aquí en adelante, cada vez que en algún nodo aparezcan varias *f.e.* a las que haya que aplicar alguna regla, se tendrá preferencia en aplicar primero aquellas en las que se dibuje una rama.

Así, en el árbol que se esta desarrollando, después del paso 1, hay que aplicar regla a la *f.e.* del inciso (a) y a la del inciso (b). Como ambas son de una rama, se continua el árbol aplicándole regla a alguna de ellas y en cualquier orden.

Paso 2. Aplicar regla de negación de condicional a la *f.e.* del inciso (a).

$$\begin{array}{cl} \neg(\neg P\to Q)\wedge\neg((B\vee\neg C)\to(\neg R\vee S))\checkmark(1) & \\ | & \\ \neg(\neg P\to Q)\checkmark(2) & \ldots\ldots\ldots(a) \\ \neg((B\vee\neg C)\to(\neg R\vee S)) & \ldots\ldots\ldots(b) \\ | & \\ \neg P & \\ \neg Q & \end{array}$$

Paso 3. Aplicar la regla de negación de condicional a la *f.e.* del inciso (b).

$\neg(\neg P\rightarrow Q)\wedge\neg((B\vee\neg C)\rightarrow(\neg R\vee S))\checkmark_{(1)}$

$\neg(\neg P\rightarrow Q)\checkmark_{(2)}$ ....(a)
$\neg((B\vee\neg C)\rightarrow(\neg R\vee S))\checkmark_{(3)}$ ....(b)

$\neg P$
$\neg Q$

$B\vee\neg C$ ....(c)
$\neg(\neg R\vee S)$ ....(d)

Ahora se tendrá que aplicar regla a las *f.e.* de los incisos (c) y (d). Para decidir a cual aplicar regla primero, se observa lo siguiente, al aplicar regla a la *f.e.* (c) se dibujan dos ramas y al aplicar regla a la *f.e.* (d) se dibuja una rama, luego, por la sugerencia hecha en la *NOTA 5*, el paso a seguir es aplicar regla a la *f.e.* del inciso (d).

Paso 4. Aplicar regla de negación de disyunción a la *f.e.* del inciso (d), eliminando la doble negación de R.

$\neg(\neg P\rightarrow Q)\wedge\neg((B\vee\neg C)\rightarrow(\neg R\vee S))\checkmark_{(1)}$

$\neg(\neg P\rightarrow Q)\checkmark_{(2)}$ ....(a)
$\neg((B\vee\neg C)\rightarrow(\neg R\vee S))\checkmark_{(3)}$ ....(b)

$\neg P$
$\neg Q$

$B\vee\neg C$ ....(c)
$\neg(\neg R\vee S)\checkmark_{(4)}$ ....(d)

R
$\neg S$

Paso 5. Por último, aplicar la regla de disyunción a la *f.e.* del inciso (c).

```
¬(¬P→Q)∧¬((B∨¬C)→(¬R∨S))✓(1)
              |
        ¬(¬P→Q)✓(2)            .........(a)
   ¬((B∨¬C)→(¬R∨S))✓(3)        .........(b)
              |
             ¬P
             ¬Q
              |
          B∨¬C✓(5)             .........(c)
        ¬(¬R∨S)✓(4)            .........(d)
              |
              R
             ¬S
            /   \
           R    ¬S
```

EJEMPLO 11. Arbol de verdad de la *f.e.* ¬((A∨¬B)→(¬C→(D∧¬E))).

Paso 1. Aplicar regla de negación de condicional.

```
¬((A∨¬B)→(¬C→(D∧¬E)))✓(1)
          |
        A∨¬B              ........(a)
    ¬(¬C→(D∧¬E))          ........(b)
```

Antes de continuar se debe decidir a cual de las *f.e.* de los incisos (a) y (b) hay que aplicar regla primero. Por la *NOTA 5*, se elige a la *f.e.* del inciso (b).

Paso 2. Aplicar la regla de negación de condicional a la *f.e.* del inciso (b).

```
¬((A∨¬B)→(¬C→(D∧¬E)))✓(1)
          |
        A∨¬B              ........(a)
    ¬(¬C→(D∧¬E))✓(2)      ........(b)
          |
         ¬C
      ¬(D∧¬E)             ........(c)
```

Ahora hay que escoger entre las *f.e.* de los incisos (a) y (c), pero como en ambos casos se dibujan dos ramas, es indistinta la selección.

Paso 3. Aplicar la regla de disyunción a la *f.e.* del inciso (a).

```
¬((A∨¬B)→(¬C→(D∧¬E)))√(1)
           |
        A∨¬B√(3)          ........(a)
     ¬(¬C→(D∧¬E))√(2)     ........(b)
           |
          ¬C
       ¬(D∧¬E)            ........(c)
         /  \
        A    ¬B
```

Paso 4. Para concluir el árbol, aplicar la regla de negación de conjunción a la *f.e.* del inciso (c) y eliminar la doble negación de E.

```
¬((A∨¬B)→(¬C→(D∧¬E)))√(1)
           |
        A∨¬B√(3)          ........(a)
     ¬(¬C→(D∧¬E))√(2)     ........(b)
           |
          ¬C
       ¬(D∧¬E)√(4)        ........(c)
         /  \
        A    ¬B
       / \   / \
     ¬D   E ¬D  E
```

IV.I.8. REGLA PARA EL BICONDICIONAL.

En este apartado se obtiene la regla para el bicondicional, procediendo de manera análoga a los casos anteriores.

Un bicondicional es verdadero si y solo si sus componentes tienen el mismo valor de verdad.

Esto es, $\overline{v}(\alpha\leftrightarrow\beta)=1$ si y solo si o $\overline{v}(\alpha)=1$ y $\overline{v}(\beta)=1$ o $\overline{v}(\alpha)=0$ y $\overline{v}(\beta)=0$. Pero como a la vez $\overline{v}(\alpha)=0$ si y solo si $\overline{v}(\neg\alpha)=1$ y $\overline{v}(\beta)=0$ si y solo si $\overline{v}(\neg\beta)=1$, se tiene finalmante que:

$\overline{v}(\alpha\leftrightarrow\beta)=1$ si y solo si o $\overline{v}(\alpha)=1$ y $\overline{v}(\beta)=1$ o $\overline{v}(\neg\alpha)=1$ y $\overline{v}(\neg\beta)=1$

Exhibiendo este resultado en un diagrama de árbol, dará lugar a la regla para el bicondicional.

$$\begin{array}{ccl}
\multicolumn{2}{c}{\alpha \leftrightarrow \beta} & \leftarrow \textit{nodo bicondicional} \\
/ & \backslash & \leftarrow \textit{dos ramas} \\
\alpha & \neg\alpha & \multirow{2}{*}{$\Big]$ \textit{nuevos nodos}} \\
\beta & \neg\beta &
\end{array}$$

EJEMPLO 12. Construcción del árbol de verdad de $\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(R\rightarrow\neg S)$.

Paso 1. Aplicar la regla de bicondicional.

$$\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(R\rightarrow\neg S)\checkmark(1)} \\
/ & \backslash \\
\neg(P\vee Q) & P\vee Q \\
R\rightarrow\neg S & \neg(R\rightarrow\neg S)
\end{array}$$

Observar que se eliminó la doble negación de $P\vee Q$.

Paso 2. Desarrollar la rama izquierda, aplicando regla de negación de disyunción a $\neg(P\vee Q)$ (ver *NOTA 5* de este capítulo).

$$\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(R\rightarrow\neg S)\checkmark(1)} \\
/ & \backslash \\
\neg(P\vee Q)\checkmark(2) & P\vee Q \\
R\rightarrow\neg S & \neg(R\rightarrow\neg S) \\
| & \\
\neg P & \\
\neg Q &
\end{array}$$

Paso 3. Aplicar regla de condicional a $R\rightarrow\neg S$.

$$\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(R\rightarrow\neg S)\checkmark(1)} \\
/ & \backslash \\
\neg(P\vee Q)\checkmark(2) & P\vee Q \\
R\rightarrow\neg S\checkmark(3) & \neg(R\rightarrow\neg S) \\
| & \\
\neg P & \\
\neg Q & \\
/\quad\backslash & \\
\neg R\quad\neg S &
\end{array}$$

Paso 4. Desarrollar la rama derecha formada en el paso 1. Por lo expresado en la *NOTA 5*, aplicar regla de negación de condicional a la *f.e.* ¬(R→¬S), eliminando la doble negación de S.

```
           ¬(P∨Q) ↔ (R→¬S) ✓(1)
               /           \
   ¬(P∨Q) ✓(2)              P∨Q
    R→¬S ✓(3)          ¬(R→¬S) ✓(4)
       |                    |
      ¬P                    R
      ¬Q                    S
     /   \
   ¬R     ¬S
```

Paso 5. Finalmente aplicar regla de disyunción a P∨Q.

```
           ¬(P∨Q) ↔ (R→¬S) ✓(1)
               /           \
   ¬(P∨Q) ✓(2)              P∨Q ✓(5)
    R→¬S ✓(3)          ¬(R→¬S) ✓(4)
       |                    |
      ¬P                    R
      ¬Q                    S
     /   \                /   \
   ¬R     ¬S             P     Q
```

IV.1.9. REGLA PARA LA NEGACION DE BICONDICIONAL.

La negación de un bicondicional será verdadero si y solo si el bicondicional es falso. Un bicondicional es falso si y solo si sus componentes tienen distinto valor de verdad. Luego, la negación de un bicondicional es verdadero si y solo si los componentes del bicondicional negado tienen diferente valor de verdad.

Esto es, $\overline{v}(\neg(\alpha\leftrightarrow\beta))=1$ si y solo si $\overline{v}(\alpha)\neq\overline{v}(\beta)$. Pero las asignaciones de valor de verdad de α y β serán diferentes si y solo si o $\overline{v}(\alpha)=1$ y $\overline{v}(\beta)=0$ o $\overline{v}(\alpha)=0$ y $\overline{v}(\beta)=1$, y como $\overline{v}(\alpha)=0$ si y solo si $\overline{v}(\neg\alpha)=1$ y $\overline{v}(\beta)=0$ si y solo si $\overline{v}(\neg\beta)=1$, se concluye que:
$\overline{v}(\neg(\alpha\leftrightarrow\beta))=1$ si y solo si o $\overline{v}(\alpha)=1$ y $\overline{v}(\neg\beta)=1$ o $\overline{v}(\neg\alpha)=1$ y $\overline{v}(\beta)=1$

La regla de la negación de bicondicional queda de la siguiente forma.

$$
\begin{array}{ccl}
 & \neg(\alpha\leftrightarrow\beta) & \leftarrow \textit{nodo negación de bicondicional} \\
/ & & \backslash \quad \leftarrow \textit{dos ramas} \\
\alpha & & \neg\alpha \quad \left.\right] \textit{nuevos nodos} \\
\neg\beta & & \beta
\end{array}
$$

EJEMPLO 13. Arbol de verdad de la *f.e.* $\neg((B\wedge\neg C)\leftrightarrow(\neg R\rightarrow S))$.

Paso 1. Aplicar la regla de negación de bicondicional.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg((B\wedge\neg C)\leftrightarrow(\neg R\rightarrow S))\checkmark_{(1)} & \\
/ & & \backslash \\
B\wedge\neg C & & \neg(B\wedge\neg C) \\
\neg(\neg R\rightarrow S) & & \neg R\rightarrow S
\end{array}
$$

Paso 2. Desarrollo de la rama izquierda. Aplicar regla de conjunción a $B\wedge\neg C$.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg((B\wedge\neg C)\leftrightarrow(\neg R\rightarrow S))\checkmark_{(1)} & \\
/ & & \backslash \\
B\wedge\neg C\checkmark_{(2)} & & \neg(B\wedge\neg C) \\
\neg(\neg R\rightarrow S) & & \neg R\rightarrow S \\
| & & \\
B & & \\
\neg C & &
\end{array}
$$

Paso 3. Aplicar la regla de negación de condicional a $\neg(\neg R\rightarrow S)$.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg((B\wedge\neg C)\leftrightarrow(\neg R\rightarrow S))\checkmark_{(1)} & \\
/ & & \backslash \\
B\wedge\neg C\checkmark_{(2)} & & \neg(B\wedge\neg C) \\
\neg(\neg R\rightarrow S)\checkmark_{(3)} & & \neg R\rightarrow S \\
| & & \\
B & & \\
\neg C & & \\
| & & \\
\neg R & & \\
\neg S & &
\end{array}
$$

Paso 4. Para el desarrollo de la rama derecha formada en el paso 1 aplicar la regla de negación de disyunción a ¬(B∧¬C) y eliminar la doble negación de C.

```
        ¬((B∧¬C)↔(¬R→S))✓(1)
              /    \
     B∧¬C✓(2)      ¬(B∧¬C)✓(4)
  ¬(¬R→S)✓(3)      ¬R→S
       |            /  \
       B          ¬B    C
      ¬C
       |
      ¬R
      ¬S
```

Paso 5. El último paso consiste en aplicar la regla de condicional a la *f.e.* ¬R→S y eliminar la doble negación de R.

```
        ¬((B∧¬C)↔(¬R→S))✓(1)
              /    \
     B∧¬C✓(2)      ¬(B∧¬C)✓(4)
  ¬(¬R→S)✓(3)      ¬R→S✓(5)
       |            /    \
       B          ¬B      C
      ¬C         /  \    /  \
       |
      ¬R        R    S  R    S
      ¬S
```

EJEMPLO 14. Construcción del árbol de verdad para la *f.e*

¬(¬(¬R→(Q∨¬D))→((A∧¬B)↔C))

Paso 1. Como la *f.e.* es la negación de un condicional, aplicar dicha regla.

```
¬(¬(¬R→(Q∨¬D))→((A∧¬B)↔C))✓(1)
               |
        ¬(¬R→(Q∨¬D))          ........(a)
   ¬((A∧¬B)↔C)                ........(b)
```

Paso 2. Aplicar regla de negación de condicional a la *f.e.* del inciso (a), ver *NOTA 5*.

$\neg(\neg(\neg R \rightarrow (Q \vee \neg D)) \rightarrow ((A \wedge \neg B) \leftrightarrow C)) \checkmark_{(1)}$

$\neg(\neg R \rightarrow (Q \vee \neg D)) \checkmark_{(2)}$ ....(a)

$\neg((A \wedge \neg B) \leftrightarrow C)$ ....(b)

$\neg R$

$\neg(Q \vee \neg D)$ ....(c)

Paso 3. Según lo indicado en la *NOTA 5*, el paso a seguir es aplicar la regla de negación de disyunción a la *f.e.* del inciso (c) y eliminar la doble negación de D.

$\neg(\neg(\neg R \rightarrow (Q \vee \neg D)) \rightarrow ((A \wedge \neg B) \leftrightarrow C)) \checkmark_{(1)}$

$\neg(\neg R \rightarrow (Q \vee \neg D)) \checkmark_{(2)}$ ....(a)

$\neg((A \wedge \neg B) \leftrightarrow C)$ ....(b)

$\neg R$

$\neg(Q \vee \neg D) \checkmark_{(3)}$ ....(c)

$\neg Q$

D

Paso 4. Aplicar la regla de negación de bicondicional a la *f.e.* del inciso (b).

$\neg(\neg(\neg R \rightarrow (Q \vee \neg D)) \rightarrow ((A \wedge \neg B) \leftrightarrow C)) \checkmark_{(1)}$

$\neg(\neg R \rightarrow (Q \vee \neg D)) \checkmark_{(2)}$ ....(a)

$\neg((A \wedge \neg B) \leftrightarrow C) \checkmark_{(4)}$ ....(b)

$\neg R$

$\neg(Q \vee \neg D) \checkmark_{(3)}$ ....(c)

$\neg Q$

D

$A \wedge \neg B \qquad \neg(A \wedge \neg B)$

$\neg C \qquad\qquad C$

Paso 5. De las dos ramas que se formaron, aplicar la regla de conjunción a A∧¬B que se encuentra en la rama de la derecha.

```
¬(¬(¬R→(Q∨¬D))→((A∧¬B)↔C))✓(1)
              |
         ¬(¬R→(Q∨¬D))✓(2)   ........(a)
     ¬((A∧¬B)↔C)✓(4)        ........(b)
              |
             ¬R
          ¬(Q∨¬D)✓(3)       ........(c)
              |
             ¬Q
              D
            /   \
     A∧¬B✓(5)   ¬(A∧¬B)
       ¬C          C
        |
        A
       ¬B
```

Paso 6. Para terminar el árbol, aplicar la regla de negación de conjunción a la *f.e.* ¬(A∧¬B), eliminando la doble negación de B.

```
¬(¬(¬R→(Q∨¬D))→((A∧¬B)↔C))✓(1)
              |
         ¬(¬R→(Q∨¬D))✓(2)   ........(a)
     ¬((A∧¬B)↔C)✓(4)        ........(b)
              |
             ¬R
          ¬(Q∨¬D)✓(3)       ........(c)
              |
             ¬Q
              D
            /   \
     A∧¬B✓(5)   ¬(A∧¬B)✓(6)
       ¬C          C
        |         / \
        A       ¬A   B
       ¬B
        1        2   3
```

IV.2. USO DEL METODO DE ARBOLES DE VERDAD PARA DECIDIR SI UNA *f.e.* ES TAUTOLOGIA, CONTRADICCION O CONTINGENCIA.

En este apartado se aplicará el método de Arboles de verdad para decidir a que clase pertenece una determinada *f.e.*, a las tautologías, contradicciones o contingencias.

Para tal efecto considerar por ejemplo, el árbol de verdad de la *f.e.* $\neg((A\wedge\neg B)\to(C\wedge\neg B))$ que aparece a continuación.

$$\neg((A\wedge\neg B)\to(C\wedge\neg B))\checkmark(1)$$
$$|$$
$$A\wedge\neg B\checkmark(2)$$
$$\neg(C\wedge\neg B)\checkmark(3)$$
$$|$$
$$A$$
$$\neg B$$
$$\diagup \quad \diagdown$$
$$\underset{1}{\neg C} \qquad \underset{2}{B}$$

Del árbol se tiene que $\overline{\upsilon}(\neg((A\wedge\neg B)\to(C\wedge\neg B)))=1$ si y solo si o (del trayecto 1) $\upsilon(A)=1$, $\upsilon(B)=0$ y $\upsilon(C)=0$ o (del trayecto 2) $\upsilon(A)=1$, $\upsilon(B)=0$, $\upsilon(B)=1$ y $\upsilon(C)\in(1,0)$.

De la información vertida por el trayecto 2, se observa un absurdo ¡a la vez $\upsilon(B)=1$ y $\upsilon(B)=0$!. De ese hecho se puede afirmar que por el trayecto 2 no es posible determinar interpretaciones que satisfagan a la *f.e.* del nodo inicial del árbol.

Al construir un árbol de verdad, se deberá observar si hay o no, situaciones como esta.

Por lo anterior, considerar lo siguiente en la construcción de un árbol de verdad.

Si en algún trayecto del árbol aparece un *absurdo* (alguna *f.e.* y su negación), se anotará en dicho trayecto el signo "X" en el momento que se dé y se dirá que la rama está *cerrada*, con lo cual dicho trayecto se clausura. El desarrollo del árbol se continuará solamente por los trayectos no clausurados, que se llamarán ramas *abiertas*.

En el árbol anterior se tiene que el trayecto 1 es rama abierta, mientras que el trayecto 2 es rama cerrada la que hay que clausurar con el símbolo "X".

$\neg((A\wedge\neg B)\rightarrow(C\wedge\neg B))\checkmark(1)$

$A\wedge\neg B\checkmark(2)$

$\neg(C\wedge\neg B)\checkmark(3)$

A

$\neg B$

$\neg C$ B

          X

rama abierta   *rama cerrada*

EJEMPLO 15. ¿Cuáles interpretaciones satisfacen a la *f.e.*

$(\neg R\rightarrow S)\wedge\neg(T\rightarrow(R\vee\neg S))$?

$(\neg R\rightarrow S)\wedge\neg(T\rightarrow(R\vee\neg S))\checkmark(1)$

$\neg R\rightarrow S\checkmark(4)$

$\neg(T\rightarrow(R\vee\neg S))\checkmark(2)$

T

$\neg(R\vee\neg S)\checkmark(3)$

$\neg R$

S

R S

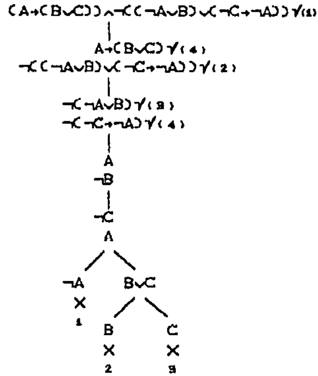
X

El trayecto del lado izquierdo es rama cerrada ya que en su recorrido se encuentra el absurdo $\upsilon(R)=0$ y $\upsilon(R)=1$.

La respuesta a la pregunta es, $\overline{\upsilon}((\neg R\to S)\wedge\neg(T\to(R\vee\neg S)))=1$ para la interpretación $\upsilon(T)=1$, $\upsilon(R)=0$ y $\upsilon(S)=1$.

EJEMPLO 16. Encontrar las interpretaciones que satisfacen a la *f.e.*

$$(A\to(B\vee C))\wedge\neg((\neg A\vee B)\vee(\neg C\to\neg A)).$$



Observar que todos los trayectos son ramas cerradas, el trayecto 1 porque en su recorrido aparece $\upsilon(A)=1$ y $\upsilon(A)=0$, el trayecto 2 por el absurdo $\upsilon(B)=0$ y $\upsilon(B)=1$ y el trayecto 3 porque contiene la información $\upsilon(C)=0$ y $\upsilon(C)=1$.

Este hecho se traduce a que no existe interpretación que satisfaga a la *f.e.*. De donde se concluye que la *f.e.* una contradicción.

Este ejemplo muestra la manera de decidir con el método de Arboles de verdad si una *f.e.* es una contradicción.

Para decidir con el Método de Arboles de verdad si la *f.e.* α es (o no es) una *contradicción*, seguir los pasos siguientes:

(1) Construir al árbol de verdad de la *f.e.* α.

(2) Toma de la decisión lógica:

(a) α es contradicción, si *todo* trayecto es rama *cerrada*.

(b) α *no* es contradicción, si hay ramas *abiertas*.

Convensión: Con el fin de simplificar un poco la terminología usada, en lugar de "todos los trayectos son ramas cerradas" se usará la expresión "toda rama es cerrada" o "todas las ramas estan cerradas" y en lugar de "hay trayectos que son rama abiertas" se escribe "hay ramas abiertas" o "no todas las ramas estan cerradas".

EJEMPLO 17. La *f.e.* $\neg((\neg R \vee \neg S) \rightarrow (S \rightarrow \neg R))$, ¿és una contradicción?.

(1). Arbol de verdad

$$\neg((\neg R \vee \neg S) \rightarrow (S \rightarrow \neg R)) \checkmark(1)$$

$$\neg R \vee \neg S \checkmark(3)$$
$$\neg(S \rightarrow \neg R) \checkmark(2)$$

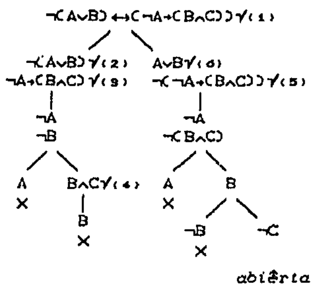
$$S$$
$$R$$

$$\neg R \qquad \neg S$$
$$\times \qquad \times$$

(2). Decisión Lógica: $\neg((\neg R \vee \neg S) \rightarrow (S \rightarrow \neg R))$ es una contradicción.

EJEMPLO 18. La *f.e.* $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow (B \wedge C))$, ¿és contradicción?.

(1). Arbol de verdad.



(2). Decisión Lógica: $\neg(A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\to(B\vee C))$ *no es contradicción.*

Como se ha visto hasta aquí, con el método de árboles de verdad se puede decidir de forma efectiva si una determinada *f.e.* es o no es una contradicción, dependiendo del hecho que se cierren o no se cierren todas las ramas del árbol. Pero, ¿cómo decidir si una *f.e.* α es tautología?.

Para responder a la pregunta, observar que la negación de una tautología es una contradicción y que la negación de una contradicción es una tautología. Luego, para mostrar que la *f.e.* α es una tautología se habrá de probar que su negación es una contradicción.

Por lo cual se tiene lo siguiente:

Para decidir con el Método de Arboles de verdad si la *f.e.* α es (o no es) una *tautología*, seguir los pasos siguientes:

(1) Negar la *f.e.* α.

(2) Construir al árbol de verdad de la negación formada.

(3) Toma de la decisión lógica:

(a) α es tautología, si *todo* rama esta *cerrada.*

(b) α *no* es tautología, si hay ramas *abiertas.*

EJEMPLO 19. Probar que $\models (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$.

(1). Negar la *f.e.*: $\neg((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A))$

(2). Arbol de verdad de la negación formada.

$$
\begin{array}{c}
\neg((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)) \checkmark_{(1)} \\
| \\
\neg A \rightarrow \neg B \checkmark_{(3)} \\
\neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \checkmark_{(2)} \\
| \\
\neg A \rightarrow B \checkmark_{(4)} \\
\neg A \\
\diagup \quad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} A \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} \neg B \\ \diagup \quad \diagdown \\ \begin{array}{cc} A & B \\ \times & \times \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

(3). Decisión Lógica: $\models (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$.

EJEMPLO 20. La expresión $\models (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee \neg A))$ ¿és verdadera?.

(1). Negar la *f.e.*: $\neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee \neg A)))$

(2). Arbol de verdad de la negación formada.

$$
\begin{array}{c}
\neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee \neg A))) \checkmark_{(1)} \\
| \\
\neg A \rightarrow B \checkmark_{(4)} \\
\neg(A \rightarrow (B \vee \neg A)) \checkmark_{(2)} \\
| \\
A \\
\neg(B \vee \neg A) \checkmark_{(3)} \\
| \\
\neg B \\
A \\
\diagup \quad \diagdown \\
\begin{array}{cc} A & B \\ & \times \end{array}
\end{array}
$$

(3). Decisión Lógica: $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee \neg A))$ no es tautología.

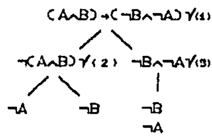
Por lo tanto, la expresión $\models (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee \neg A))$ no es verdadera.

Ya se ha mostrado como utilizar el método de árboles de verdad para probar si una *f.e.* es o no es una contradicción, así como los pasos a seguir para decidir si una *f.e.* es o no es una tautologia. Pero ¿cómo mostrar que la *f.e.* es una contingencia?.

La respuesta está en el hecho que una *f.e.* es una contingencia si y solo si ni es tautología ni es contradicción.

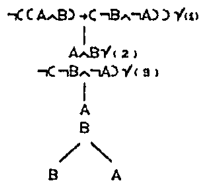
EJEMPLO 21. La *f.e.* $(A\wedge B)\to(\neg B\wedge\neg A)$, ¿és una contingencia?.

Primero se puede plantear la pregunta ¿será contradicción?.



Hay ramas abiertas, luego $(A\wedge B)\to(\neg B\wedge\neg A)$ no es contradicción.

Entonces, ¿será tautologia?.



Hay ramas abiertas, por lo tanto $(A\wedge B)\to(\neg B\wedge\neg A)$ no es tautologia.

Finalmente del par de árboles se puede afirmar que $(A\wedge B)\to(\neg B\wedge\neg A)$ es una contingencia.

Notar que a pesar de haber construido completamente el árbol de verdad en todos los casos, dicha construcción se puede realizar en algunos casos solo de forma parcial, y tomar la decisión lógica pertinente, al tener completo algún trayecto que cumpla con ser una rama abierta.

IV.3. USO DEL METODO DE ARBOLES DE VERDAD PARA DECIDIR LA VALIDEZ DE RAZONAMIENTOS

Como ya se señalo en el capitulo anterior, un esquema de inferencia es una forma válida de razonar si y solo si la conclusión es consecuencia lógica del conjunto de premisas.

Recordar que este hecho se traduce a lo siguiente:

El esquema de inferencia

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \\ \hline \beta \end{array}$$

es una forma válida de razonar si y solo si $\models \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \rightarrow \beta$.

Pero, $\models \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \rightarrow \beta$ si y solo si $\neg(\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \rightarrow \beta)$ es una contradicción, luego,

El esquema de inferencia

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \\ \hline \beta \end{array}$$

es una forma válida de razonar si y solo si se cierran todas las ramas del árbol de verdad de la $f.e.$ $\neg(\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \rightarrow \beta)$.

Pero al aplicar regla de árbol a la *f.e.* $\neg(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i \rightarrow \beta)$ se obtiene:

$$\begin{array}{c} \neg(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i \rightarrow \beta) \\ | \\ \bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i \\ \neg\beta \end{array}$$

Si se generaliza la regla de conjunción se tendrá,

$$\begin{array}{c} \bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i \\ | \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{array}$$

Que sustituyendo en el árbol de $\neg(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i \rightarrow \beta)$ se obtiene,

$$\begin{array}{ll} \neg(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i \rightarrow \beta) & \\ | & \\ \alpha_1 & \text{premisa 1} \\ \alpha_2 & \text{premisa 2} \\ \alpha_3 & \text{premisa 3} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \alpha n & \text{premisa n} \\ \neg\beta & \text{negación de la conclusión} \end{array}$$

Luego, para determinar la validez de un esquema de inferencia se comienza el árbol anotando como nodo inicial el formado por las premisas y la negación de la conclusión. La decisión lógica dependerá de que se cierren o no se cierren todas las ramas del árbol.

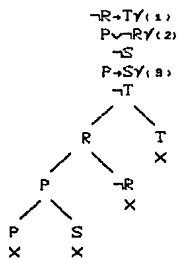
EJEMPLO 22. El esquema de inferencia que sigue, ¿és una forma válida de razonar?.

$$\begin{array}{c} \neg R \rightarrow T \\ P \vee \neg R \\ \neg S \\ P \rightarrow S \\ \hline T \end{array}$$

(1). Formar lista de premisas y *negación* de la conclusión.

$\neg R \rightarrow T$	← premisa 1
$P \vee \neg R$	← premisa 2
$\neg S$	← premisa 3
$P \rightarrow S$	← premisa 4
$\neg T$	← negación de la conclusión

(2). Arbol de verdad de la lista formada.



(3). Decisión Lógica: El esquema de inferencia es una forma válida de razonar.

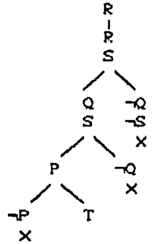
EJEMPLO 23. Determine la validez o invalidez del esquema de inferencia. En caso que no sea válido, mostrar un contraejemplo.

$$\begin{array}{c} P\to T \\ Q\leftrightarrow S \\ R\wedge S \\ P\vee\neg Q \\ \hline \neg R \end{array}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{c} P\to T\checkmark_{(4)} \\ Q\leftrightarrow S\checkmark_{(2)} \\ R\wedge S\checkmark_{(1)} \\ P\vee\neg Q\checkmark_{(3)} \end{array}\right\}\ \textit{premisas}$$

R ← *negación de la conclusión*



El esquema de inferencia no es una forma válida de razonar.

El contraejemplo es: $\upsilon(R)=\upsilon(S)=\upsilon(Q)=\upsilon(P)=\upsilon(T)=1$

Como un razonamiento es *válido*, si su esquema de inferencia es una forma válida de razonar, se tiene lo siguiente.

Para determinar la *validez* de un razonamiento seguir los pasos:

(1) Obtener el esquema de inferencia.

(2) Construir el árbol de verdad de la lista de *f.e.*, premisas y negación de la conclusión.

(3) Decisión Lógica:

(a) El razonamiento es *válido*, si se cierran todas las ramas.

(b) El razonamiento no es válido, si hay ramas abiertas.

EJEMPLO 24. ¿ Es válido el razonamiento ?

Si no hay planificación familiar, entonces la población crece ilimitadamente. Por consiguiente, o no aumentará la pobreza o no hay planificación familiar. Pues, aumentará la pobreza, si la población crece ilimitadamente

(1) Esquema de inferencia

$$\begin{array}{c} \neg A \to B \\ B \to C \\ \hline \neg C \vee \neg A \end{array}$$

(2) Arbol de verdad

$$\begin{array}{c} \neg A \to B \checkmark (3) \\ B \to C \checkmark (2) \\ \neg(\neg C \vee \neg A) \checkmark (1) \\ | \\ C \\ A \\ \diagup \quad \diagdown \\ \begin{array}{cc} \neg B & C \\ \begin{array}{cc} A & B \\ & \times \end{array} & \begin{array}{cc} A & B \\ & \end{array} \end{array} \end{array}$$

(3) Decisión lógica: El razonamiento *no* es válido.

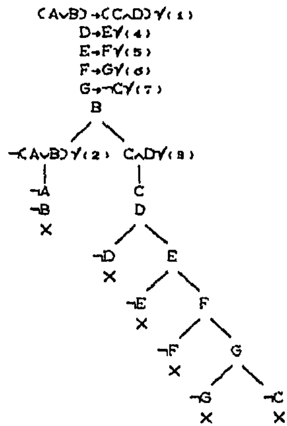
EJEMPLO 25. ¿ Es válido el razonamiento ?

Si compro un automóvil nuevo o si ajusto mi automóvil viejo, iré a Acapulco y pararé en Taxco. Si paro en Taxco, visitaré a mis tios. Si visito a mis tios, insistirán a que pase el Verano con ellos. Si insisten a que pase el Verano con ellos, entonces estaré allí hasta el Otoño. Pero, si me quedo con mis tios hasta el Otoño, no iré a Acapulco. Por lo tanto, no ajustaré mi automóvil viejo.

(1) Esquema de inferencia

$$\begin{array}{c} (A \lor B) \to (C \land D) \\ D \to E \\ E \to F \\ F \to G \\ G \to \neg C \\ \hline \neg B \end{array}$$

(2) Arbol de verdad



(3) Decisión lógica: El razonamiento es válido.

Ultima nota: Cada vez que se mostró la invalidez de un razonamiento se debió entender que no es válido para la Lógica de Enunciados, es decir, que no existe en dicho nivel de análisis alguna forma que lo valide.

CONCLUSIONES

A pesar que el estudio de la Lógica como forma del razonamiento se remonta a Aristóteles, es hasta el siglo XIX la época en que ocurren grandes descubrimientos y avances de la misma. Este cambio se debió a que se introduce en la exposición y desarrollo de la Lógica, las técnicas y recursos del Algebra, en particular sistemas simbólicos y cálculos, dando lugar a la Lógica Simbólica o Matemática.

Por tal razón se considera conveniente un curso introductorio a la Lógica Simbólica en el ciclo bachillerato. Además que rechazar la explicación de los rudimentos de la Lógica, priva al estudiante en muchos de los casos, la posibilidad de alcanzar claridad y precisión en los cursos de Matemáticas.

Al término de la lectura del material elaborado, el estudiante deberá tener presentes cierto número de ideas claras y simples acerca de elementos de la Lógica de Enunciados, tales como negación, condicional, tautología, contradicción, consecuencia lógica, validez formal, etc. y utilizarlos con entero conocimiento.

El alumno podrá observar que los métodos efectivos de decisión que se explican, el método de tablas de verdad y el método de árboles de verdad, conducen a la determinación de la validez o invalidez de razonamientos. Puesto que la noción de validez formal, se formaliza en la Lógica de Enunciados mediante los conceptos definidos y calculables de tautología y contradicción. Y porque dada cualquier forma enunciativa de la Lógica de Enunciados se puede, por el método de tablas de verdad o por el método de árboles de verdad, determinar inequívocamente si se trata o no de una tautología o si se trata o no de una contradicción.

Se observa que al introducir las definiciones de tipo interpretativo, permiten la aplicación de procedimientos de solución fácilmente mecanizables, al menos en el nivel de análisis abordado.

Aunque el propósito del material elaborado es simplemente estimular el estudio de la Lógica con vistas a su aplicación en diversas áreas para probar si un razonamiento es o no válido, en la Lógica de Enunciados; también se sientan las bases para que el estudiante, pueda profundizar en el estudio de temas de Lógica pura o bien ascender a diferentes niveles de análisis lógico formal, en particular a la Lógica de Predicados de Primer Orden.

El material expuesto se puede ampliar, agregando algunos otros temas de la Lógica de enunciados, como la equivalencia lógica y la deducción lógica, con el fin de explicar la aplicación de algún método no-efectivo de decisión, por ejemplo el método de la Deducción Natural, para demostrar la validez de razonamientos.

BIBLIOGRAFIA

ALFREDO DEAÑO. Introducción a la Lógica Formal (Vol. 1), Madrid: Alianza Editorial, 1975.

MANUEL GARRIDO. Lógica Simbólica, Madrid: Editorial Tecnos, 1983.

M. V. QUINE. Los Métodos de la Lógica (Traducción de Juan José Acero y Nieves Guasch), Barcelona: Ariel, 1981.

ELLIOTT MENDELSON Introduction to Mathematical Logic, New York: Van Nostrand, 1964.

P. SUPPES Y S. HILL Introducción a la Lógica Matemática (Traducción de Dr. Enrique Linés Escardo), Madrid: Editorial Reverte, 1975.

IRVING M. COPI. Introducción a la Lógica (Traducción de Néstor Alberto Miquez), Buenos Aires: EUDEBA, 1974.

BENSON MATES. Lógica Matemática Elemental (Traducción de Carmen Garcóa Trevijano), Madrid: Editorial Tecnos, 1974.

JOSE FERRATER MORA Y HUGUES LEBLANC. Lógica Matemática, México: Fondo de Cultura Económica, 1975.

JOSE ANTONIO ARNAZ Y MARIA TERESA YUREN. Métodos de Investigación (Textos 2-3), México: Publicaciones Culturales. 1984.

JAVIER SALAZAR RESINES. Introducción a la Lógica Deductiva y Teoria de Conjuntos (Vol. I), México: UNAM, 1982.