

31
2ej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INESTABILIDAD KELVIN-HELMHOLTZ EN REGIONES
DE CAMPO MAGNETICO MIXTO EN LA
CORONA SOLAR.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A :
MIGUEL ANGEL MORENO HERRERA



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D. F.,



FACULTAD DE CIENCIAS
REGISTRACION

1994



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A gradesco mucho a Dios la terminación
de este trabajo. El que sembró la semilla de
su palabra en mi corazón y ahora es fuente
inagotable de fortaleza en mi vida.*

*Agradezco muy especialmente a la
Dna. Blanca Mendoza O. por su gran apoyo
paciencia, consejos e interés mostrados
en el desarrollo de esta tesis.*

*A ti Elsa te dedica esta tesis por
tu gran apoyo y cariño, por todos esos
momentos de oración junto a ti, por esa
hermosa vida llena de Dios que tienes y
por que eres esa amiga que ya esperaba.*

A mi madre Coca que con su gran apoyo y cariño siempre estuvo conmigo. A ella la autora de mis días se la dedico con todo mi cariño y amor.

A mi padre Alfonso que con sus consejos y apoyo pude lograr este objetivo por que fuè un gran apoyo para mi.

A mi abuela Carmelita que
la he considerado siempre como mi
segunda madre y a mi abuela Rosendo
que ya no esta con nosotros pero que
me escucha, con toda mi amor.

A mis cinco hermanos que
quiere mucho: Carmelita, Araceli,
Fabriela, Vicente y a mi pequeño
Edgar con especial afecto.

A los cuatro sobrinos de mi
vida a mi dulce Kera al travieso
David y a mi gorda Brenda y la que
está por nacer con todo mi cariño.

INDICE

INTRODUCCION

f.1.	Objetivos	I-1
f.2.	Contenidos	I-1

I. PARAMETROS QUE DEFINEN AL PLASMA.

I.1.	El estado de plasma.	I-1
I.2.	Apantallamiento de Debye.	I-3
	I.2.1. Dedución de la longitud de Debye.	I-5
I.3.	Oscilaciones electrostáticas plasma-electrón.	I-10
	I.3.1. Derivación de la expresión para la frecuencia de plasma.	I-12

II. ECUACIONES MAGNETOHIDRODINAMICAS.

II.1.	Teoría cinética.	II-17
II.2.	Definición de las variables macroscópicas del plasma.	II-19
II.3.	Ecuación de continuidad.	II-22
II.4.	Ecuación de transporte de momento.	II-23
II.5.	Ecuación de transporte de energía.	II-23

II.6.	Ecuaciones magnetohidrodinámicas.	II-26
	II.6.1. Algunos números magnetohidrodinámicos útiles.	II-31
II.7.	Ondas magnetohidrodinámicas.	II-34
 <u>III. INESTABILIDADES RAYLEIGH-TAYLOR Y KELVIN-HELMHOLTZ.</u>		
III.1.	Conceptos básicos sobre inestabilidades.	III-42
III.2.	Inestabilidad Rayleigh-Taylor.	III-46
III.3.	Inestabilidad Kelvin-Helmholtz.	III-66
	III.3.1 Ecuaciones de perturbación.	III-67
 <u>IV. APLICACION DE LA INESTABILIDAD KELVIN-HELMHOLTZ AL PUNTO NEUTRO DE UNA CONDENSAACION DE CASCO.</u>		
IV.1.	Características del Sol.	IV-81
IV.2.	Origen del Sol	IV-84
IV.3.	Interior solar.	IV-85
IV.4.	Capas externas.	IV-88
IV.5.	El punto neutro en la condensación de casco.	IV-92
	IV.4.1. Configuraciones de campo magnético en la región del punto neutro.	IV-97
	IV.4.2. Inestabilidad Kelvin-Helmholtz en la región del punto neutro.	IV.105
IV.6.	Resultados.	IV-112

IV.7.	Conclusiones.	IV-113
APENDICE A.	<u>RELACION DE BOLTZMANN PARA LOS ELECTRONES.</u>	H-1
APENDICE B	<u>EXPRESION PARA LA LEY DE OHM.</u>	H-4
APENDICE C	<u>ANALISIS DIMENSIONAL PARA LA LEY DE AMPERE.</u>	H-9
REFERENCIAS.		B-1

f.1. OBJETIVO

Estudiar si es posible que cierta clase de inestabilidades se puedan generar en la estructura coronal conocida como casco, y considerada como la fuente de eyección de masa coronal, asociadas a la presencia de un fluido con velocidad v .

Esto nos va a permitir saber si las inestabilidades debidas a la presencia de un fluido en movimiento pueden generar una eyección de masa coronal.

f.2. CONTENIDO

En el primer capítulo se da una definición de plasma y bajo qué condiciones éste existe, así como las características fundamentales de su comportamiento. Posteriormente, usando las ecuaciones de la electrostática, se deducen la longitud de Debye y la frecuencia de plasma empleando algunas aproximaciones físicas para el sistema.

En el segundo capítulo se obtienen las ecuaciones de conservación de masa así como las de momento y transporte de energía a partir de la teoría cinética de la materia. Estas ecuaciones de transporte se aplican para describir un flujo hidrodinámico correspondiente a un

fluido conductor eléctrico perfecto en presencia de un campo magnético.

De las ecuaciones de transporte así como de las ecuaciones de Maxwell se derivan las ecuaciones magnetohidrodinámicas para un fluido cargado, de donde se definen los parámetros adimensionales característicos como el número de Reynolds hidrodinámico y magnético, el número de Prandtl, el parámetro beta, y la velocidad de Alfvén, así como las situaciones en las que cada uno de ellos domina en el sistema de interés.

En el tercer capítulo se analizan dos clases de inestabilidad en presencia de dos plasmas de diferente densidad. Estas son: inestabilidades de Rayleigh-Taylor (R-T), caso estacionario e inestabilidad Kelvin-Helmholtz (K-H), caso con velocidad relativa del sistema. Estos modos de inestabilidad se basan en un estudio teórico de perturbaciones para plasmas el cual se describe por medio de un modelo de fluido conductor perfecto.

Ambas inestabilidades se analizan primeramente sin campo magnético y luego ante la presencia de un campo magnético paralelo y perpendicular al plano de contacto de los plasmas. En cada uno de los casos se analiza la relación de dispersión indicando bajo qué situación ocurre la inestabilidad.

En el cuarto capítulo se hace una aplicación directa de todo lo anteriormente visto a una situación física real en el contexto de la corona solar; en particular sobre estructuras llamadas

"cascos coronales" que no son más que regiones de líneas de campo magnético abiertas y cerradas que contienen material gaseoso ionizado.

La aplicación de las ecuaciones magnetohidrodinámicas a este tipo de estructuras se lleva a cabo en una región del "casco coronal" llamada "punto neutro". En este punto neutro confluyen una hoja de corriente que divide por encima de la estructura de campo cerrado a las regiones de campo magnético bipolar abierto y por debajo a las regiones abiertas y cerradas. El análisis de esta región es para determinar si dicho punto neutro es una región de inestabilidad para el plasma que lo rodea y, si es así, bajo qué condiciones físicas del medio se podrá dar dicha inestabilidad.

CAPITULO I

PARAMETROS QUE DEFINEN AL PLASMA

I.1.- *El estado de Plasma*

Alrededor de 1923 I. Langmuir desarrollo la teoría básica sobre las propiedades de un gas ionizado al que le dió el nombre de " plasma "

Durante el período de 1923 - 1938 los trabajos sobre plasmas fueron acentuados por L. Tonks, R. Seeliger, B. Klarfeld, M. Steenbeck y muchos otros. La palabra plasma ocurrio primeramente bajo el término de protoplasma el cual fué introducido en 1839 por el biólogo J. Purkynie para designar al cuerpo de las células constituidas por numerosas partículas más pequeñas y basado en esto Langmuir decidió utilizar el mismo esquema propuesto por Purkynie para llamar plasma a un gas ionizado. Pero vayamos a completar nuestra descripción de plasma.

Un plasma es un estado de la materia (de hecho se considera que es el cuarto estado de la materia) donde existen cargas libres: iones y electrones, así como también partículas neutras. Es un gas cuasi neutro eléctricamente, es decir, los campos eléctricos generados por las

partículas cargadas tenderán a cancelarse entre sí, además de que exhiben un comportamiento colectivo, esto quiere decir que en un plasma la fuerza Coulombiana, que es de largo alcance, será la encargada de transmitir la señal a todo el sistema. Existe todavía un criterio más preciso de un plasma en el que se requiere que la energía potencial en el plasma sea mucho menor que la energía cinética de las partículas, es decir:

$$E_c = \frac{3}{2} k T \gg E_p = \frac{e^2 n^{1/2}}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

donde k es la constante de Boltzman, T la temperatura, e la carga del electrón y n la densidad de partículas. No cualquier gas ionizado puede ser llamado plasma como es el caso de la llama de una vela.

Los plasmas son buenos conductores de la electricidad y son altamente sensibles a fuerzas electromagnéticas como ya se mencionó. Además, las aproximaciones cercanas de un gas de partículas coulombianas con energía cinética media E_c , están dadas por lo que se conoce como distancia crítica o longitud de Landau expresada como sigue:

$$\lambda_L = \frac{Z e^2}{E_c} \quad (1.2)$$

Además si la densidad de partículas es N_0 en un elemento de volumen, la distancia entre partículas cercanas se puede aproximar como $d \sim N_0^{1/3}$.

Para la mayoría de los plasmas espaciales, que son muy poco densos, los efectos cuánticos no son importantes*, esto quiere decir que si la onda asociada de De Broglie λ_B de la partícula tiene una longitud mucho menor que el espacio entre las partículas vecinas ($d \gg \lambda_B$) y, además, la longitud de Landau es también mucho mayor que la longitud de onda asociada ($\lambda_L \gg \lambda_B$) entonces al plasma se le da un tratamiento clásico, considerando claro que cualquier velocidad característica del plasma v sea menor que c la velocidad de la luz.

Un plasma tiene una tendencia a permanecer eléctricamente neutro, es decir, tiende a equilibrar la carga espacial positiva y negativa en cada elemento de volumen macroscópico; un ligero desequilibrio en la densidad de carga espacial da origen a fuerzas electrostáticas intensas que actuarán siempre en sentido que sea posible restaurar la neutralidad del plasma en una distancia pequeña comparada con otras longitudes del sistema.

1.2. - *Apantallamiento de Debye.*

Una característica fundamental en el comportamiento de un plasma es su habilidad para blindarse de potenciales eléctricos que le son aplicados.

* Para un estudio de los fenómenos cuánticos y los fenómenos relativistas se puede consultar: A. Beiser, conceptos de Física Moderna, México 1982. Mc.Graw-Hill.

Consideremos un ejemplo bastante sencillo. Supongamos que sometemos al plasma bajo la acción de un campo eléctrico estático debido a una carga de prueba Q que se introduce en él. Los portadores de carga del gas ionizado se redistribuirán rápidamente, es decir, una nube de iones o de electrones rodeará la región de la carga de tal manera que la apantalle, por lo que no habrá un campo eléctrico presente fuera de la nube de plasma a una cierta distancia de la carga prueba. A esta distancia se le conoce como longitud de Debye. Realmente la carga Q se neutraliza gradualmente porque choca continuamente con partículas cargadas procedentes del plasma.

Como dato curioso diremos que Langmuir en 1923 llamó plasma a las regiones relativamente libres de campo en el gas, donde las cargas espaciales positivas y negativas casi se equilibran, mientras que a las regiones de carga espacial o a las de campo intenso sobre la frontera del plasma les dió el nombre de vainas.

Todos los estados de la materia presentan grados de ionización y esto depende de la energía de amarre. Para producir un plasma hay que liberar electrones que se encuentran ligados a los átomos. De la tabla I.1 es evidente que las energías de ionización para muchos elementos van desde varios eV a decenas de eV. Existen varias maneras por medio de las

cuales se pueden añadir estas energías al sistema atómico para producir ionización (Ferrest 1968).

TABLA I.1

GAS	ENERGIA DE IONIZACION (eV)
Hidrógeno -----	13.6
Helio -----	24.6
Litio -----	5.4
Neón -----	21.6
Cesio -----	3.4
Argón -----	15.7
Mercurio -----	10.4
Molècula de Hidrógeno -----	15.4
Molècula de Nitrógeno -----	15.8

1.2.1.- *Deducción de la longitud de Debye.*

En la introducción definimos un plasma por dos características, efectos colectivos y cuasineutralidad eléctrica. Es, por tanto, de interes, determinar la distancia a la cual se extiende el campo eléctrico de una partícula de prueba en el plasma antes de que su efecto sea anulado por las partículas de carga opuesta que se encuentran en la vecindad.

Trabajaremos inicialmente en una sola dimensión (x), pues la generalización a tres dimensiones es inmediata.

Supongamos que en la posición $x = 0$ el potencial de la carga de prueba toma el valor $\phi(x=0) = \phi_0$. Buscaremos ahora calcular $\phi(x)$ en cualquier otro punto del sistema. Por simplicidad, supondremos que la razón de masas entre el ión (M) y el electrón (m), M/m , es suficientemente grande como para que la inercia de los iones impida a éstos moverse significativamente.

Dicho potencial satisface la ecuación de Poisson (Reitz, 1984):

$$\nabla^2 \phi(x) = \frac{d^2 \phi(x)}{d x^2} = -4\pi \rho \quad (1.3)$$

Para un plasma con densidad de carga $\rho = e(N_i - N_e)$, donde N_i y N_e definen la concentración de iones y electrones por unidad de volumen respectivamente, y e es la carga electrónica. Por lo tanto:

$$\frac{d^2 \phi(x)}{d x^2} = -4\pi e(N_i - N_e) \quad (1.4)$$

Llamemos ahora N_0 a la densidad del plasma. En todo punto y a distancias

muy alejadas (en infinito) donde $\phi(\infty)=0$ supondremos que:

$$N_1 = N_{00} \quad (1.5)$$

La energía potencial está dada como $q\phi$ para un electrón. Si las partículas que componen al plasma (electrones y iones) se encuentran en un estado de equilibrio térmico unas con otras, la función que describe la distribución de las velocidades de los electrones en el sistema es la llamada función de Maxwell-Boltzmann:

$$f(u) = A \exp \left[-\left(\frac{1}{2} m u^2 + q\phi \right) / kT_e \right] \quad (1.6)$$

donde u es la velocidad de los electrones, m su masa, k la constante de Boltzmann, T_e la temperatura de los electrones y $A = N \left(m / 2\pi k T_e \right)^{3/2}$.

La relación (1.6) no será probada aquí pero nos dice que hay pocas partículas donde la energía potencial es muy grande, ya que no todas las partículas tienen la suficiente energía para estar ahí. De hecho cuando no hay equilibrio térmico entre las dos clases de partículas pero entre clases de partículas existe un equilibrio térmico, la función de distribución de Maxwell-Boltzmann se aplica a cada clase de partícula.

Integrando $f(u)$ sobre u , con $q = -e$, y notando que $N_e(\phi=0) = N_{00}$, encontramos que:

$$N_e = N_{00} \exp(\epsilon\phi / kT_e) \quad (1.7)$$

Esta relación se deriva con más detalle en el apéndice (A).

Sustituyendo ahora las relaciones (1.5) y (1.7) en (1.4) tenemos:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = 4\pi e N_{00} [\exp(\epsilon\phi / kT_e) - 1] \quad (1.8)$$

En la región donde la energía térmica es mucho mayor que la energía potencial, condición (1.1), el exponente de la exponencial $|\epsilon\phi / kT_e| \ll 1$, lo podemos expandir en una serie de Taylor y despreciar los términos de potencias de segundo orden y mayores, por ser estos muy pequeños, tomando sólo el término lineal a primer orden. Por lo tanto tenemos:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = 4\pi e N_{00} \left[\frac{\epsilon\phi}{kT_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon\phi}{kT_e} \right)^2 + \dots \right] \quad (1.9)$$

entonces:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \frac{4\pi N_{00} e^2}{k T_e} \phi \quad (1.10)$$

donde definimos ahora el coeficiente del lado derecho de $\phi(x)$ como:

$$\lambda_0 = \left(\frac{k T_e}{4\pi N_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (1.11)$$

N_0 a sido sustituido por N_e que es la densidad inicial de electrones ya que estos forman la nube electrónica en la vecindad alrededor de la carga prueba. A esta nueva cantidad λ_0 , definida mediante (1.11), se le llama longitud de Debye, la cual fué definida originalmente en la teoría de electrolitos de Debye-Hückel. La solución de la ecuación (1.10) es:

$$\phi(x) = \phi_0 \exp(-|x|/\lambda_0) \quad (1.12)$$

λ_0 por lo tanto es una medida de la distancia de apantallamiento, o dicho de otra manera, es el radio de la densidad de la nube que blinda al plasma.

Otras formas alternativas de la longitud de Debye son:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 6.9 (T_e/N_0)^{1/2} \text{ cm,} & \text{con } T \text{ en } ^\circ\text{K y } N_0 \text{ en cm}^{-3} \\ \lambda_0 &= 740 (kT_e/N_0)^{1/2} \text{ cm,} & \text{con } kT_e \text{ en eV y } N_0 \text{ en cm}^{-3} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Notamos en la relación (1.11) que al aumentar la densidad N_e , manteniendo T_e cte., λ_0 disminuye, y si incrementamos T_e , manteniendo la densidad cte., λ_0 se incrementa. Ante la falta de una agitación térmica, la nube cargada se colapsa en una capa infinitamente delgada.

Podemos observar que la temperatura del electrón ha sido usada para definir λ_D y esto es debido a que los electrones tienen mayor movilidad que los iones, por ser éstos más pesados. Por lo tanto, la redistribución de electrones es tal que apantalla a la carga Q en una distancia λ_D .

Un criterio a seguir, para que un gas sea un plasma, es que sea lo suficientemente denso de modo tal que λ_D sea mucho más pequeño que L, donde L representa la longitud que caracteriza las dimensiones del sistema, así como también: la cuasineutralidad del sistema son incorporadas para definir un plasma. Lo anterior es válido solamente si existen las suficientes partículas en una nube cargada para que se lleve a cabo el blindaje. Claramente si hay una o dos partículas, el apantallamiento de Debye no podrá ser satisfecho. Usando la relación (1.11) podemos calcular la densidad N_D de partículas en una esfera de Debye como sigue:

$$N_D = N_e \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 = 1380 T_e^{3/2} / N_e^{1/2} \text{ con } T \text{ en } ^\circ\text{K} \text{ y } N_e \text{ en } \text{cm}^{-3} \quad (1.14)$$

1.3.- Oscilaciones electrostáticas plasma-electron.

Una de las propiedades interesantes del plasma es su capacidad para sufrir oscilaciones y propagar ondas. Estas oscilaciones son

frecuentemente generadas por las partículas más ligeras, debido a su gran movilidad.

Las oscilaciones electrostáticas fueron discutidas primeramente por Tonks y Langmuir (Tonks y Langmuir, 1929). Realmente hay dos tipos de oscilaciones electrostáticas:

- 1).- Oscilaciones de los electrones, o de alta frecuencia, que son demasiado rápidas como para que los iones pesados la sigan.
- 2).- Oscilaciones de los iones, que son tan lentas que los electrones se distribuyen siempre alrededor de los iones en forma estadística.

Estudiaremos aquí sólo el primer caso: las llamadas oscilaciones electrónicas.

Fijemos nuestra atención en una región del plasma que contiene una densidad uniforme de iones positivos N . No hay iones negativos. Inicialmente, los electrones también tienen una densidad uniforme N de partículas. Si los electrones son desplazados ligeramente de su posición original, se genera un campo eléctrico, dentro del plasma, en una dirección tal que se restaure la neutralidad del sistema, atrayendo a los electrones de regreso a su posición inicial.

La fuerza electrostática que se genera sobre los electrones, hace que estos se aceleren y debido a su inercia oscilan alrededor del punto

de equilibrio con una frecuencia característica llamada frecuencia de plasma. Las oscilaciones son tan rápidas que los iones masivos no tienen tiempo de responder a ellas, por este motivo se consideran fijos espacialmente.

I.3.1.- Derivación de la expresión para la frecuencia de plasma.

Para encontrar esta expresión se hacen las siguientes suposiciones: (1) no existe campo magnético \vec{B} , (2) no existe movimiento térmico ($kT = 0$), (3) los iones están fijos en el espacio en una distribución uniforme, (4) el plasma tiene una extensión infinita, (5) el movimiento de los electrones solamente ocurre en la dirección x (la generalización a tres coordenadas es inmediata). Como consecuencia de tales suposiciones, tenemos:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} , \quad \vec{E} = E \hat{x} \quad (1.15)$$

donde \hat{x} es el vector unitario a lo largo del eje x .

Usemos ahora una de las ecuaciones de Maxwell (Reitz, 1984) que relaciona al campo eléctrico con la fuente, ecuación de Poisson:

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho \quad (1.16)$$

Para una densidad de carga neta $\rho = N_0 e$, donde N_0 es la densidad de electrones por unidad de volumen, y e es la carga del electrón, tenemos:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4 \pi N_0 e \quad (1.17)$$

La solución a esta ecuación es:

$$\bar{E} = 4\pi N_0 e \Delta \bar{x} \quad (1.18)$$

donde $\bar{\Delta x}$ es el desplazamiento de los electrones en el plasma en equilibrio. Ahora bien, sabemos además que la fuerza de Coulomb por unidad de área es,

$$\bar{F} = q \bar{E} \quad (1.19)$$

donde $q = -N_0 e$ es la carga por unidad de área. Sustituyendo (1.18) en (1.19) tenemos:

$$\bar{F} = -4\pi N_0^2 e^2 \Delta \bar{x} \quad (1.20)$$

De la segunda ley de Newton tenemos:

$$\bar{a} = \bar{F} / M_0 \quad (1.21)$$

donde M_0 es la masa total del sistema y está definida como $M_0 = N_0 M_e$.

Por lo tanto sustituyendo (1.20) en (1.21) obtenemos:

$$a = -4\pi N_0 e^2 \Delta x / M_e \quad (1.22)$$

Si llamamos $\bar{\Delta x} = \bar{\delta}$, entonces $\bar{a} = \frac{\mu}{\delta}$, y tendremos la ecuación del oscilador armónico simple. Llamemos ω_p a la frecuencia angular del plasma, definida como sigue:

$$\omega_p = \left[4\pi N_0 e^2 / M_e \right]^{1/2} \text{ rad/sec} \quad (1.23)$$

y a su vez podemos calcular la frecuencia de plasma como,

$$f_p = (\omega_p/2\pi) = 8920 (N_0 \text{ cm}^{-3})^{1/2} \text{ sec}^{-1} \quad (1.24)$$

Esta frecuencia, es uno de los parámetros fundamentales y depende solamente de la densidad del plasma. Además, ω_p es independiente del número de onda K por lo que la velocidad de grupo será cero, y la perturbación no se propagará. La radiación en la frecuencia de plasma f_p se encuentra normalmente en el intervalo de la radiación ultravioleta visible de alta y baja frecuencia. Valores de la frecuencia angular y de la frecuencia en algunas regiones del Sol, del medio interplanetario y de la Tierra se presentan en la tabla I.

TABLA I

	N_0 (cm^{-3})	ω_p (rad/seg)	f_p (Hz)
IONOSFERA	10^5	1.7828×10^9	10^6
MEDIO INTERPLANETARIO	1	5.6×10^4	8×10^3
VIENTO SOLAR (a 1 A.U.)	10	1.78×10^5	30×10^3
CORONA SOLAR (baja)	10^{10}	5.6378×10^9	10^9
FOTOSFERA	10^{16}	5.6378×10^{12}	10^{12}
INTERIOR SOLAR	10^{22}	5.6378×10^{15}	10^{15}

Las densidades de la tabla I se obtuvieron, como referencia del Priest, (Priest, 1981).

En la misma tabla, ω_p es la frecuencia angular natural del plasma y f_p la frecuencia natural del plasma. En la relación (1.23) hemos escogido como valor de la carga $e = 4.8033 \times 10^{-10}$ u.e.s. y $m_e = 9.1096 \times 10^{-28}$ gr.

Otro parámetro importante de un plasma es su frecuencia ciclotrónica Ω , que es la frecuencia a la que giran los electrones de un plasma cuando éste se encuentra en un campo magnético constante:

$$\Omega \text{ (s}^{-1}\text{)} = \frac{c B}{m_e c} \quad (1.25)$$

Tambièn vamos a definir el radio de giro (radio de Larmor) dado como sigue:

$$r_L \text{ (cm)} = \frac{m_e U_{\perp} c}{e B} \quad (1.26)$$

con U_{\perp} la componente perpendicular de la velocidad del electrón al campo B, m_e masa del electrón y c velocidad de la luz.

CAPITULO II

ECUACIONES MAGNETOHIDRODINAMICAS

II.1.- Teoría cinética.

Hay dos convenciones aproximadas de la teoría sobre las propiedades y procesos de un plasma: la descripción macroscópica (termodinámica y fluido) y la descripción microscópica (cinética y estadística). La aproximación macroscópica está basada en la descripción de cantidades tales como la velocidad promedio y la temperatura como función de la posición y del tiempo. Estas son las cantidades enfatizadas en la medición de las propiedades de un plasma.

La descripción microscópica de un plasma está basada sobre la configuración del espacio de velocidades de la distribución de las partículas de plasma, así como la correlación entre estas partículas y los microcampos producidos por ellas. Las cantidades microscópicas son más difíciles de medir directamente, pero frecuentemente juegan un papel dominante en la determinación de las propiedades macroscópicas del plasma.

La teoría cinética provee una base formal para la idea que formo las bases aún para la descripción del fluido, a saber, que da la inclusión del promedio de los campos debido a muchas partículas, y aveces despreciendo las fuerzas de corto alcance para las partículas

cercanas. La teoría cinética del plasma provee un método de investigación sobre la influencia de colisiones de las partículas del plasma y el cálculo de las propiedades de transporte de un plasma ionizado completamente. Además, para tratar la dispersión y emisión de radiación por un plasma, es necesario desarrollar una descripción cinética que vea a las partículas del plasma individualmente, ya que la radiación es un efecto de partículas individuales.

Como ya vimos en el capítulo I, un plasma es una colección de un número muy grande de partículas cargadas. Por lo general, las colecciones de muchas partículas se tratan estadísticamente como un sistema de muchos cuerpos. El conocimiento exacto del estado de un sistema de muchos cuerpos implica el conocimiento de la posición y la velocidad de todas las partículas del sistema. Sin embargo mucho de la conducta de tales sistemas se describe en términos de variables macroscópicas tales como la densidad (ρ), la temperatura (T), la velocidad (\bar{V}) y la presión (P).

Estas cantidades están relacionadas a través de las leyes de conservación de la masa y de ecuaciones dinámicas para el momento y el transporte de energía. En este capítulo se definen estas variables del plasma en función de la velocidad v de la partícula, la velocidad U promedio para una sola clases de partícula, así como las relaciones entre ellas a través de las ecuaciones de transporte.

Las variables macroscópicas para un plasma, como ya se mencionó,

están definidas en términos de la función de distribución:

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (2.1)$$

la cual depende de siete variables independientes, tres que corresponden a las componentes del vector de posición $\vec{r} = (x, y, z)$, tres componentes para el vector de velocidad $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, y la variable temporal t . Esta función de distribución contiene la descripción estática y temporal del sistema. Las relaciones entre estas variables macroscópicas se derivan del uso de las definiciones de las variables del plasma y una ecuación diferencial para la función de distribución que es la siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m} \langle \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \rangle \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = C_a \quad (2.2)$$

A esta ecuación se le conoce como ecuación de Boltzmann con colisiones¹ (Sanderson, 1969) y no toma en cuenta las fluctuaciones térmicas. En este capítulo se menciona solamente como base para el desarrollo de la descripción reducida de un plasma en términos de variables macroscópicas y de las relaciones entre ellas. Por lo tanto la descripción original del plasma a través de la relación (2.2) contiene la información detallada sobre el comportamiento de un sistema de N partículas.

* 1

El término C_a se le conoce como término de colisiones entre partículas cercanas debido a interacciones de tipo Coulombiana. Un análisis más detallado se puede ver en el libro Principios de Física de Plasmas de Trivelpiece.

II.2. Definición de las variables macroscópicas del plasma.

En esta sección se dan las definiciones de las variables macroscópicas del plasma las cuales están relacionadas en términos de la integral de la función de distribución sobre el espacio de velocidades.

a).- Densidad media de partículas.

$$n(\bar{x}, t) = \int f(\bar{x}, \bar{v}, t) dv \quad (2.3)$$

que para el caso de una sola clase de partículas (α) tendremos:

$$n\alpha(\bar{x}, t) = \int f\alpha(\bar{x}, \bar{v}, t) dv \quad (2.4)$$

b).- Velocidad promedio.

Se define a la velocidad promedio U de las partículas de tipo α como:

$$\bar{U}\alpha(\bar{x}, t) = \frac{1}{n\alpha} \int \bar{v} f\alpha(\bar{x}, \bar{v}, t) dv \quad (2.5)$$

c).- Densidad de masa y de carga.

$$\rho m\alpha(\bar{x}, t) = n\alpha m\alpha \int f\alpha(\bar{x}, \bar{v}, t) dv \quad (2.6)$$

$$\rho q\alpha(\bar{x}, t) = n\alpha q\alpha \int f\alpha(\bar{x}, \bar{v}, t) dv \quad (2.7)$$

$m\alpha$ y $q\alpha$ denotan la masa y la carga de las partículas (α).

d).- Densidad de corriente eléctrica.

Para partículas cargadas de especie (α) en la posición (x, t) es:

$$\bar{J}_\alpha(\bar{x}, t) = q_\alpha n_\alpha \int \bar{v} f_\alpha(\bar{x}, \bar{v}, t) dv \quad (2.8)$$

e).- Tensor de presión total o tensor de esfuerzos.

Para partículas de especie α en el punto (x, t) se define como sigue :

$$\bar{\pi}_{ij, \alpha}(\bar{x}, t) = n_\alpha m_\alpha \int (\bar{v}_i - U_{i\alpha})(\bar{v}_j - U_{j\alpha}) f_\alpha dv \quad (2.9)$$

Para una simetría esférica esta distribución de velocidades se reduce a un tensor de presión escalar diagonal, el cual está relacionado con la temperatura o con la velocidad azarosa al cuadrado de una sola especie de partículas como sigue:

$$p_\alpha = \frac{m_\alpha n_\alpha}{3} \int (\bar{v} - U_\alpha)^2 f_\alpha(\bar{x}, \bar{v}, t) dv = \frac{n_\alpha m_\alpha}{3} \langle w^2 \rangle = n_\alpha k T_\alpha \quad (2.10)$$

En ausencia de una simetría esférica, el tensor de presión total $\bar{\pi}_{ij, \alpha}$ por lo general se divide en dos partes:

a).- Una presión transversal Γ_α

b).- Una presión diagonal p_α

$$\bar{\pi}_{ij, \alpha} = \Gamma_\alpha \delta_{i, j} + p_\alpha \delta_{i, j} \quad (2.11)$$

donde Γ se define como:

$$\Gamma_\alpha = \int n_\alpha f_\alpha m_\alpha [(\bar{v} - \bar{U}_\alpha)(\bar{v} - \bar{U}_\alpha) - \frac{1}{3} (\bar{v} - \bar{U}_\alpha)(\bar{v} - \bar{U}_\alpha)] dv \quad (2.12)$$

Γ proviene de la desviación de la distribución de una simetría esférica la cual es debida a interacciones entre partículas distintas (viscosidad del fluido) o también conocido como tensor de esfuerzo viscoso, donde p_α es una presión escalar debida a la interacción de partículas de una misma especie.

Si la función de distribución azarosa es isotrópica entonces tenemos el caso más simple $P_\alpha = p_\alpha$, donde $\Gamma_\alpha = 0$. Entonces la relación (2.2) se reduce a un caso más simple.

A la temperatura la podemos definir en términos de su velocidad promedio total y de la velocidad del centro de masa como sigue:

$$T_\alpha(\bar{x}, t) = \frac{1}{n_\alpha} \int \frac{m_\alpha}{3} (\bar{v} - \bar{U}_\alpha)^2 f_\alpha(\bar{x}, \bar{v}, t) dv = \frac{1}{3} m_\alpha \langle (\bar{v} - \bar{U}_\alpha)^2 \rangle \quad (2.13)$$

Con lo anterior podemos mencionar las ecuaciones de transporte que describen el comportamiento macroscópico del plasma.

11.4.- Ecuación de Continuidad.

Supondremos que en el plasma no ocurren reacciones nucleares, ni ionización o recombinación. Entonces, el principio de conservación de masa establece que el cambio en el tiempo de la densidad de masa ρ de un elemento de volumen es igual al flujo de masa a través de la superficie del elemento de volumen, esto es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \bar{U}) = 0 \quad (2.14)$$

Si las partículas tienen fuentes o sumideros el cero ya no se aplica en el lado derecho de la ecuación de continuidad de la relación (2.14) y éste tiene que ser sustituido por una forma funcional de la fuente o sumidero. Esta ecuación de continuidad no solo expresa la conservación de la masa sino que nos indica que el campo de velocidades es también continuo.

II.5.- Ecuación de transporte de momento.

El principio de conservación del momento es una aplicación de la 2a. ley de Newton al movimiento de un elemento de plasma; esto quiere decir que el cambio en el momento del elemento es igual a la fuerza neta externa que actúa sobre dicho elemento de plasma. Estas fuerzas externas sobre el elemento de plasma pueden ser debidas a la gravedad, a una fuerza de Lorentz en presencia de campos electromagnéticos, a fuerzas de superficie que son las generadas por la presión y a los esfuerzos originados por la viscosidad. Esto es

$$\rho \frac{d \bar{v}}{d t} = \rho \bar{g} + \frac{\bar{J}}{c} \times \bar{B} + \text{div} \bar{\Pi} \quad (2.15)$$

donde $\bar{\Pi}$ representa el tensor de esfuerzos.

II.6.- Ecuación de transporte de energía.

El elemento de plasma por unidad de volumen lleva consigo, por el movimiento azaroso de sus partículas, así como el debido a las interacciones entre ellas y la interacción generada por los campos externos, un flujo de energía. Esto es representado como sigue

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} U^2 + \frac{3}{2} nkT \right) + \text{div} \left\{ \left(\frac{\rho}{2} U^2 + \frac{5}{2} nkT \right) U + PU + D \right\} = qnEU + R U + Q \quad (2.16)$$

Ahora bien, D se define como la densidad de flujo de calor que es acarreado por las partículas de una especie dada. Esto representa en sí el transporte de energía asociado con el movimiento azaroso de la partícula, por lo que se le conoce como conductividad térmica.

Q se define como el calor generado en un gas por una especie de partículas como consecuencia de la interacción con otra especie de partículas.

El primer término del lado izquierdo de la relación (2.16) representa el cambio en la energía total de las partículas la cual esta compuesta por dos términos de energía: la energía cinética del gas en su totalidad, y la energía interna por unidad de volumen.

El término entre corchetes representa el flujo de energía total, el cuál consiste en su primer término de un transporte macroscópico de

la energía total con velocidad U y un flujo de energía microscópico, es decir, un flujo de calor debido a una especie de partículas.

El siguiente término $(\bar{\Gamma} \bar{U})$ representa el trabajo hecho por el tensor de esfuerzo viscoso (interacciones entre partículas), o la razón a la cual la presión trabaja sobre la superficie.

$\bar{U} \bar{R}$ representa la energía debida a las colisiones entre partículas de especies distintas.

Por último $(q n \bar{E} \bar{U})$ es la energía promedio debido a los campos externos como consecuencia de su interacción con el movimiento del gas o también se le conoce como el término de calentamiento Joule o pérdida de calor.

El conjunto de ecuaciones que se acaban de mencionar son leyes de conservación. Estas son aplicadas separadamente para cada plasma y para cada componente de un plasma. Si observamos estas ecuaciones no constituyen un conjunto cerrado que nos pueda dar una descripción completa de un plasma ya que tenemos más variables que ecuaciones por lo que es necesario de algún modo cerrar este sistema. Para ello cuando se hace un estudio sobre un fluido conductor en presencia de campos eléctrico y magnético se recurren a otras relaciones como las ecuaciones de Maxwell, la ley de Ohm generalizada y la ecuación politrópica.

Hay dos aproximaciones generales para la descripción macroscópica de un plasma. Aunque las dos aproximaciones son formalmente idénticas,

en una los iones y electrones son tratados separadamente como fluidos independientes interactuando uno con otro, por lo que cada uno de ellos posee un conjunto de ecuaciones por separado. La segunda es describir al plasma como un solo fluido con una densidad y velocidad únicas así como una corriente en cada punto en promedio.

II.7.- Ecuaciones magnetohidrodinámicas para un plasma.

Al plasma se le trata, como ya hemos dicho, como a un fluido y conductor, por lo que en primera aproximación se hace un modelo hidrodinámico de su comportamiento. En esta aproximación hidrodinámica la dinámica de fluidos no conductores tiene que ser estudiada exhaustivamente con la ventaja de que muchos de sus aspectos de comportamiento son bien entendidos. Cuando el fluido es un conductor eléctrico el movimiento es, en general, más complejo, pero se pueden hacer analogías con el comportamiento de un fluido no conductor.

Se van a considerar dos situaciones en las cuales las ecuaciones de momento pueden cerrarse:

1.- Una de las situaciones es la del llamado plasma frío. Aquí la transferencia térmica, la velocidad azarosa, el tensor de presión viscoso y de calor se consideran suficientemente pequeños como para tomarlos en cuenta. Este modelo de plasma frío es muy idealizado por lo que deberá de tomarse con mucha precaución.

2.- Otras de las situaciones en las cuales las ecuaciones de momento

pueden ser cerradas surgen cuando las colisiones de tipo coulombiano son dominantes. En este caso los estudios sobre los efectos de este tipo de interacciones deberán de ser bien comprendidos.

Para nuestro estudio adoptaremos la primera suposición, en donde existe una isotropía del tensor de presión total, además de que vamos a considerar que el plasma tiene la misma densidad de iones que de electrones por unidad de volumen. Por lo tanto, las ecuaciones MHD son las siguientes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \bar{U}) = 0 \quad (2.17)$$

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} = - \text{grad} P + \frac{1}{c} (\bar{J} \times \bar{B}) \quad (2.18)$$

esta relación se le conoce como ecuación de Euler.

Otra ecuación más que relaciona densidad y presión es:

$$P \rho^{5/3} = \text{cte.} \quad (2.19)$$

Esta relación es la llamada ecuación politrópica. En este caso se ha tomado un proceso adiabático ($Q = 0$), así como también que el valor de $\gamma = 5/3$; esto significa que estamos tratando con un gas monoatómico con tres grados de libertad.

Otra relación que se usa es la ley de Ohm generalizada:

$$\bar{J} = \sigma (\bar{E} + \bar{U} \times \bar{B}) \quad (2.20)$$

esta relación se deduce en el apéndice B.

Para cerrar el sistema necesitaremos expresiones para los campos E y B. Estas son obtenidas de las ecuaciones de Maxwell:

$$\text{rot } \bar{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (2.21)$$

que es la ley de Faraday, y

$$\text{rot } \bar{B} = \frac{4\pi}{c} \bar{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (2.22)$$

la ley de Ampere. En esta última relación se va omitir el segundo término del lado derecho ($\partial E/c\partial t$) haciendo un análisis dimensional (de la relación (2.22) y del término ($\partial E/c\partial t$)) el cual se puede ver en el apéndice C. Por último,

$$\text{div } B = 0 \quad (2.23)$$

que es la relación de la no existencia de monopolos magnéticos.

Tomando las ecuaciones (2.17) a (2.23) podemos ahora combinarlas para reducir el número de ellas. Sustituyendo (2.20) en (2.22) y empleando en la ecuación resultante (2.21) tenemos:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \text{rot} (\bar{U} \times \bar{B}) + \frac{c^2}{\sigma 4\pi} \text{rot} (\text{rot } \bar{B}) \quad (2.24)$$

que es la ecuación llamada de Inducción. Desarrollando ahora el término

rot (rot \vec{B}) suponiendo además que σ es uniforme espacialmente y tomado la relación (2.24) tenemos:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} (\vec{U} \times \vec{B}) + \gamma \nabla^2 \vec{B} \quad (2.25)$$

donde [rot ($\vec{U} \times \vec{B}$)] se le considera como el término de convección al que llamamos T_c . Ahora ($\gamma \nabla^2 \vec{B}$) se le considera como el término de difusión al que denotamos como T_d y $\gamma = (c^2 / \sigma 4\pi)$. Esta ecuación es análoga a la ecuación hidrodinámica que describe la evolución de la velocidad v de un fluido incompresible con una cierta viscosidad ν ,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \vec{v} + \text{rot} (\vec{U} \times \vec{B}) \quad (2.26)$$

Por analogía, podemos interpretar a γ como la viscosidad magnética, también llamada algunas veces difusividad magnética. Pero debemos de tener cuidado en no inferir que \vec{B} sea el análogo de \vec{v} .

Ahora bien la razón de cambio entre T_c y T_d nos va a dar la información acerca del comportamiento del fluido (plasma) y el campo magnético, es decir, esta razón nos va a indicar la medida en la cuál el flujo y el campo están acoplados a través de la conductividad eléctrica. A dicha razón se le llama número de Reynolds magnético y se denota como R_m

$$R_m = \frac{T_c}{T_d} = \frac{4\pi \sigma L^2 U}{c^2} \quad (2.27)$$

donde L denota una longitud de escala, σ la conductividad eléctrica, U la velocidad del sistema y c la velocidad de la luz.

Ahora vamos analizar dos casos interesantes con esta relación:

1.- Si el término de difusión (T_d) domina, $R_m \ll 1$, por lo que σ , U y /o L deben de ser pequeños. Entonces la relación (2.25) se reduce a una simple ecuación de difusión,

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \bar{B} \quad (2.28)$$

Al hacer un análisis dimensional de esta relación tenemos:

$$t_d = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2} \quad (2.29)$$

que es el tiempo característico en el que el campo magnético decae, siendo L una medida de la distancia sobre la cual B cambia apreciablemente (digamos un orden de magnitud).

2.- Si domina el término convectivo (T_c), $R_m \gg 1$. Entonces U, σ , y /o L deben de ser grandes. Por lo tanto, la relación (2.25) se reduce a una ecuación de convección :

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \text{rot} (\bar{U} \times \bar{B}) \quad (2.30)$$

Todo este análisis se hizo postulando que se trata de un fluido incompresible, es decir, que la $\text{div } \bar{v} = 0$.

El término (2.25) nos indica un congelamiento de las líneas de campo magnético (Priest, 1981). Las dos situaciones analizadas simplemente nos están indicando ya sea que el campo magnético es el que confina al plasma o en su caso que el plasma en su movimiento arrastra las líneas de campo magnético.

II.8. Algunos números magnetohidrodinámicos útiles.

Deduciremos ahora unas relaciones útiles en el estudio de la magnetohidrodinámica. Empecemos con el número de Reynolds, a partir de la ecuación de Navier-Stokes para fluidos ordinarios:

$$\rho \frac{d \bar{U}}{d t} = - \text{grad } P + \frac{\rho}{3} \nu \text{ grad } (\text{div } \bar{U}) + \nu \rho \nabla^2 \bar{U} \quad (2.31)$$

Esta relación es análoga a la relación (2.15) para un plasma excepto por la ausencia de la fuerza electromagnética así como de colisiones entre especies de partículas distintas $R = 0$. La falta de una fuerza electromagnética, aún en presencia de un flujo de corriente J y un campo magnético B , puede ser debida a que J sea paralela a B pues entonces $\bar{J} \times \bar{B} = 0$.

Para fluidos incompresibles a presión uniforme, el $\text{grad } P = 0$ y la $\text{div } \bar{U} = 0$. Por lo tanto, la relación (2.31) se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{d \bar{U}}{d t} = \nu \nabla^2 \bar{U} \quad (2.32)$$

A partir de esta ecuación se define el número de Reynolds hidrodinámico Re haciendo el siguiente análisis dimensional:

$$Re = \left| \frac{d U}{d t} \right| / |\nu \nabla^2 U| = \frac{L U}{\nu} \quad (2.33)$$

donde L , U y ν son la longitud, velocidad y viscosidad característica del medio. Analizando por casos tenemos, para una longitud fija:

a).- Si $Re \gg 1$ la velocidad del flujo domina sobre el término de viscosidad.

b).- Si $Re \ll 1$ la viscosidad domina sobre el movimiento del material.

En cada uno de los casos anteriores lo que significa físicamente es que para el caso cuando la velocidad del material domina, caso a), sobre el sistema la fuerza que ejerce la viscosidad no va hacer lo suficientemente intensa como para evitar el libre flujo del material. Por el contrario cuando la viscosidad domina, caso b), entonces el flujo del material se ve disminuido por la presencia de una fuerza debida a la viscosidad.

Se define también el número de Prandtl P_m que compara la viscosidad del medio con la conductividad eléctrica a través de los números de Reynolds hidrodinámico y magnético como sigue:

$$P_m = \frac{R_m}{Re} = \frac{4\pi \sigma \nu L}{c^2} \quad (2.34)$$

analizando por casos tenemos:

a).- Si $Pa \gg 1$ la viscosidad es la que domina sobre la difusividad.

b).- Si $Pa \ll 1$ la difusividad magnética es la que domina sobre el término viscoso.

En el primer caso físicamente tenemos que la viscosidad se va a oponer al movimiento de los portadores de carga en el sistema conductor. Mientras que cuando la difusividad domina la fuerza generada por el término viscoso no es lo suficientemente intensa como para evitar el movimiento de los portadores de carga en el material conductor.

Hay otra definición en términos de la presión de un gas y la presión magnética. Este nuevo parámetro se le llama parámetro β y está dado como sig.:

$$\beta = \frac{n k T 8\pi}{B^2} \quad (2.35)$$

donde por casos tenemos:

a).- Si $\beta \ll 1$ el campo magnético domina sobre la presión térmica del gas.

b).- Si $\beta \gg 1$ la presión térmica del gas es la que domina sobre el campo magnético.

En estos casos podemos ver que cuando el campo magnético domina, caso a), sobre el movimiento del material cargado este queda confinado

dentro de las líneas de campo magnético. Por otro lado si la inercia del material domina sobre el campo magnético entonces este campo magnético es arrastrado por el material cargado llevandolo congelado en el.

En términos de velocidades se define también el número de Mach como:

$$M = \frac{U}{v_s} \quad (2.36)$$

donde:

$$v_s = \left(\gamma \frac{P}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.37)$$

donde como ya se menciona para un gas monoatómico en tres grados de libertad:

$$\gamma = \frac{5}{3} = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.38)$$

v_s se le conoce como la velocidad del sonido para un plasma.

II.9.- Ondas magnetohidrodinámicas.

En un plasma hay cuatro diferentes fuerzas restauradoras:

- a).- Tensión magnética
- b).- Fuerza de coriolis
- c).- Fuerza de presión del gas
- d).- Fuerza de gravedad

Vamos a estudiar las clases de ondas generadas por la presencia

de gradientes de presión y campos magnéticos.

Consideremos un campo B_0 paralelo al eje z , y una densidad ρ_0 constante en el espacio y en el tiempo (x, y, z, t) . Supondremos que la velocidad del medio es cero. Supondremos también que las variaciones de los parámetros del plasma se dan solo a lo largo del eje z , ver Fig. 1.

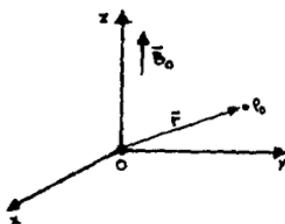


Fig. 1

Los subíndices cero denotan las variables no perturbadas y los subíndices 1 a las perturbaciones. Ante la presencia de una perturbación en el medio las variables de este sistema quedan como sigue:

$$\bar{U} = \bar{U}_1 \quad (2.39)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (2.40)$$

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{b} \quad (2.41)$$

las componentes del campo magnético en el plano (y, z) son $B_{y0} = B_0 \sin\theta$ y $B_{z0} = B_0 \cos\theta$. De las ecuaciones MHD tomemos la ecuación de

continuidad de masa y usando la siguiente identidad tenemos:

$$\operatorname{div} (\bar{U} \rho) = (\operatorname{grad} \rho) \bar{U} + \rho \operatorname{div} \bar{U}.$$

Aplicando (2.39) y (2.40) en (2.17) linealizando y quedandonos sólo con términos de primer orden:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial z} \quad (2.42)$$

Usemos ahora la ecuación de transferencia de momento, las relaciones (2.19), (2.22), la identidad $(d/dt) = \partial/\partial t + U \nabla$ y tomando los primeros términos para linealizar la ecuación, así como la definición de v_* tenemos:

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial t} = -v_{*0}^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \bar{b}) \times \bar{B}_0 \quad (2.43)$$

Supondremos que en la ecuación de inducción el término convectivo domina, lo que es usual en plasmas espaciales, ya que para éstos σ es muy grande. Entonces $R_m \gg 1$. Usando las variables perturbadas y linealizando,

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\bar{U}_1 \times \bar{B}_0) \quad (2.44)$$

Las relaciones (2.42), (2.43) y (2.44) se pueden escribir en términos de sus componentes (x, y, z) respectivamente.

Analizemos primeramente las perturbaciones perpendiculares al plano que contiene al campo \vec{B}_0 , es decir, perturbaciones a lo largo del eje x. Usando las componentes x de las relaciones (2.43) y (2.25) tenemos una ecuación para la componente U_{ix} ,

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(B_0 \cos \theta)^2}{\rho_0 4 \pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} U_{ix} = 0 \quad (2.45)$$

Esta es una ecuación de onda cuya velocidad de propagación se le llama v_A ó velocidad de Alfvén (debido a Alfvén) y está definida como:

$$v_A^2 = \frac{(B_0 \cos \theta)^2}{\rho_0 4 \pi} \quad (2.46)$$

Esta velocidad de Alfvén esta en la dirección de las líneas de campo magnético.

Las componentes para el plano (y,z), el plano que contiene el campo \vec{B}_0 , se obtienen de las relaciones (2.42), (2.43) y (2.44), que se combinan en un determinante. Supondremos que las variaciones de las variables perturbadas son de la forma $[\exp i(\vec{k} \cdot \vec{z} - \omega t)]$, entonces:

by	Uy1	Uz2	ρ1	
-w	-k B ₀ cosθ	k B ₀ cosθ	0	
$\frac{k B_0 \cos\theta}{4 \pi}$	-ρ ₀ w	0	0	=
k B ₀ senθ	0	-ρ ₀ w ²	k v _{so}	
0	0	ρ ₀ k	-w	

$$= \left(\frac{w}{k} \right)^2 - (v_s^2 + v_A^2) \left(\frac{w}{k} \right) + v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (2.47)$$

a esto se le conoce como la relación de dispersión. Ahora bien, (w/k) es la velocidad de propagación la cual llamaremos v_p. Podemos darnos cuenta que esta velocidad de propagación puede darse en cualquier, dirección. Entonces, resolviendo esta ecuación cuadrática para v_p se obtiene:

$$v_p^2 = \frac{1}{2} \left\{ (v_s^2 + v_A^2) \pm [(v_s^2 + v_A^2)^2 - 4 v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \right\} \quad (2.48)$$

Esta velocidad incluye una dirección que está dada por el ángulo θ, además de que depende de las velocidades del sonido y de Alfvén. Esta relación contiene dos soluciones dependiendo de que signo se use. Por lo tanto, analizando (2.48), tenemos:

- a).- El signo (+) corresponde a la llamada onda rápida v_r.
- b).- El signo (-) corresponde a la llamada onda lenta v_l.

Analizando algunos casos en relación con las magnitudes relativas de v_A y v_s de la relación (2.48) se tiene lo siguiente:

a).- Si $v_s \gg v_A$ entonces el campo magnético es muy débil; por lo tanto: la relación (2.48) se va a reducir a lo sig:

$$v_p^2 = \frac{1}{2} \left\{ v_s^2 \pm (v_s^4 - v_A^4)^{1/2} \right\} \quad (2.49)$$

donde la velocidad de propagación dependerán solamente de la presión del material y de su densidad. También de la relación (2.49) podemos decir, dependiendo del signo tomado, como son la velocidad rápida v_R y la velocidad lenta v_L :

i).- Con el signo (+) tenemos $v_R = v_s$

ii).- Con el signo (-) tenemos $v_L = 0$

En la relación (2.49) tenemos una onda de sonido que se propaga en cualquier dirección, pues no hay dependencia en θ .

b).- Si $v_A \gg v_s$ tenemos un campo magnético muy intenso. Entonces v_p queda como sigue:

$$v_p^2 = \frac{1}{2} \left\{ v_A^2 \pm (v_A^4 - v_s^4)^{1/2} \right\} \quad (2.50)$$

En este caso la velocidad de propagación va a depender de la intensidad de campo magnético dado por la velocidad de Alfvén. Haciendo un análisis dependiendo del signo tomado tenemos:

i).- Cuando se toma (+) entonces $v_R = v_A$

11).- Cuando se toma el (-) entonces $v_L = 0$

y de nueva cuenta en la relación (2.50) tenemos una onda que se propaga en cualquier dirección con velocidad de Alfvén.

c).- Si $v_A = v_s = U$ entonces tenemos:

$$v_{\beta}^2 = \frac{1}{2} [2U^2 \pm (4U^4 - 4U^4 \cos^2 \theta)^{1/2}] = U^2 [1 \pm \text{sen} \theta] \quad (2.51)$$

Podemos observar ahora que la onda se propaga solo en ciertas direcciones ya que existe una dependencia en el ángulo θ .

d).- Si $\theta = 0$, entonces tenemos de la relación (2.48):

$$v_{\beta}^2 = \frac{1}{2} [(v_A^2 + v_s^2) \pm \{ (v_A^2 - v_s^2)^2 \}^{1/2}] \quad (2.52)$$

donde el término:

$$\{ (v_A^2 - v_s^2)^2 \}^{1/2}$$

tiene dos soluciones. Por lo tanto, la relación (2.52) queda como sigue:

$$v_{\beta}^2 = \frac{1}{2} [(v_A^2 + v_s^2) \pm (v_A^2 - v_s^2)] \quad (2.53)$$

$$v_{\beta}^2 = \frac{1}{2} [(v_A^2 + v_s^2) \pm (v_s^2 - v_A^2)] \quad (2.54)$$

Analicemos los casos que surgen de estas dos relaciones como sigue:

Caso 1).- $v_A > v_s$. De las relaciones (2.53) y (2.54) tenemos por lo tanto:

Relación 1).- $\bar{+} v_R = v_A$ y $\bar{+} v_L = v_s$

Relación 2).- $\bar{-} v_R = v_A$ y $\bar{-} v_L = v_s$

Caso 2).- $v_s > v_A$. Usando de nuevo las relaciones (2.53) y (2.54) tenemos:

Relación 1).- $\bar{+} v_R = v_s$ y $\bar{+} v_L = v_A$

Relación 2).- $\bar{-} v_R = v_s$ y $\bar{-} v_L = v_A$

Este conjunto de igualdades las podemos reducir a las siguientes condiciones de desigualdades:

Para $v_A > v_s$ tendremos $v_R = v_A$ y $v_L = v_s$

para $v_s > v_A$ tendremos $v_R = v_s$ y $v_L = v_A$

e).- Cuando $\theta = \pi/2$, entonces la relación (2.48) se reduce a:

$$v_P^2 = \frac{1}{2} [(v_s^2 + v_A^2) \bar{+} (v_s^2 + v_A^2)] \quad (2.55)$$

donde la velocidad de propagación va a depender de la presión del material, de la densidad y de la intensidad del campo magnético.

Haciendo de nuevo un análisis de acuerdo a los signos tenemos:

i).- Tomando (+) tenemos $v_R = (v_s^2 + v_A^2)^{1/2}$

ii).- Tomando (-) tenemos $v_L = 0$

Podemos fijarnos que la relación (2.55) no depende del ángulo, por lo que la velocidad de propagación se da en cualquier dirección.

Con estos resultados podemos hacer un diagrama polar correspondiente a las ondas magnetohidrodinámicas como se muestra en la siguiente figura. Este diagrama fué tomado del Solar Magnetoacoustic de Eric Priest ver Fig.2:

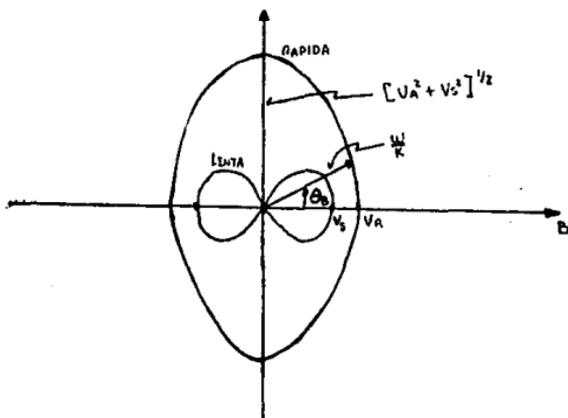


Fig.2. Diagrama polar para ondas magnetoacústicas lentas y rápidas en un ángulo θ_0 para un campo magnético en equilibrio. Dicho diagrama corresponde a una velocidad de fase.

CAPITULO III

INESTABILIDADES RAYLEIGH-TAYLOR Y KELVIN-HELMHOLTZ

III.1.- *Conceptos básicos sobre inestabilidades.*

El estudio de las inestabilidades de plasma se basa, por lo regular, en una teoría de perturbaciones. Si producimos una perturbación inicial en un plasma que se encuentra en un estado estable dicha perturbación va a crecer y el plasma es llamado, por este motivo, inestable. Inevitablemente, si una perturbación crece esta puede alterar las propiedades del plasma como lo son su densidad, temperatura, presión, campo magnético, isotropía, etc. En este capítulo vamos a analizar las perturbaciones empleando el modelo de fluido incompresible.

El estudio de las inestabilidades es importante en una gran variedad de situaciones físicas en las que los plasmas intervienen. Las consecuencias de las inestabilidades en el desarrollo de sistemas astrofísicos aún no son bien conocidas, pero su entendimiento puede ser fundamental para describir el comportamiento del sistema. Sin embargo, salvo unos pocos ejemplos, las evidencias que las observaciones nos han proporcionado no han sido suficientes y de ellas sólo podemos hacer algunas suposiciones sobre sus efectos.

En su mayoría, las inestabilidades involucran a los movimientos colectivos de las partículas del plasma, y pueden describirse por medio del modelo del fluido conductor que se uso en el capítulo II.

En forma intuitiva la manera como se decide la estabilidad de un sistema, es determinar su comportamiento cuando éste es desviado del equilibrio al realizar un desplazamiento arbitrariamente pequeño y después se permite que evolucione solo. En ocasiones, pequeñas perturbaciones en el sistema podrán conducir a una estabilidad, en otras el sistema comenzará a ser cada vez más inestable. Las formas de las inestabilidades pueden ser variadas. En este capítulo nos vamos a referir a inestabilidades de tipo ondulatorio, es decir, perturbaciones que irán incrementándose en forma periódica.

Hay una clasificación de las inestabilidades del plasma de acuerdo al tipo de energía libre disponible. Usualmente se requiere un cierto número de parámetros para especificar el equilibrio de un plasma. Dado un equilibrio, el plasma podrá ser inestable de varias maneras y si es inestable es común hallar varias formas de equilibrarlo. Se pueden clasificar las inestabilidades del plasma dentro de grupos basados en rasgos comunes.

1.- Inestabilidades del espacio de configuraciones (macro inestabilidades). Este término identifica a las inestabilidades asociadas con desviaciones de cantidades macroscópicas del equilibrio termodinámico. Por ejemplo, si un plasma de tamaño finito está en

equilibrio y puede alcanzar un estado de energía de potencial más bajo, ya sea por expansión, translación o distorsión éste podrá ser inestable. Dentro de este tipo se consideran las inestabilidades Rayleigh-Taylor y Kelvin-Helmholtz, donde una fuerza no electromagnética externa se aplica al plasma.

2.- Inestabilidad en el espacio de velocidades (micro inestabilidades)

Este término identifica a las inestabilidades con una desviación de la función de distribución del espacio de velocidades de una distribución Maxwelliana. Habrá entonces una desviación del equilibrio termodinámico y la inestabilidad podrá ser generada por una anisotropía de la distribución de velocidades. Por ejemplo dos grupos de electrones con diferentes velocidades y direcciones en un fondo de iones inmóviles son inestables ante un crecimiento de oscilaciones de Langmuir con un gasto de energía en el movimiento relativo de los dos conjuntos de electrones.

3.- Inestabilidades electrostáticas. A este tipo de inestabilidades se le asocia con una acumulación de cargas. Para estas inestabilidades es posible asegurar que el campo eléctrico es derivable de un potencial escalar.

4.- Inestabilidades electromagnéticas. Están asociadas con la acumulación de densidad de corriente. La energía en la corriente es usada para excitar ondas en el estado no perturbado.

En el presente capítulo, nos ocuparemos únicamente de las inestabilidades del espacio de configuraciones (macro inestabilidades) las cuales pueden surgir por dos diferentes causas:

a).- La primera proviene de una situación de equilibrio estático de un fluido heterogéneo estratificado. Un caso importante en conexión con esto es el de dos fluidos de diferentes densidades superpuestos uno sobre del otro; la inestabilidad ocurre en el plano de la interfase entre los dos fluidos, es decir, si una perturbación pequeña es generada en el plano de la interfase esta crecerá. A esto se le llama inestabilidad de Rayleigh-Taylor (Chandrasekhar, 1961).

b).-El segundo tipo de inestabilidades se origina cuando los diferentes fluidos heterogeneos estratificados están en movimiento horizontal relativo. Un caso especial es cuando dos fluidos superpuestos fluyen uno sobre el otro con una velocidad relativa horizontal. De nueva cuenta si producimos una perturbación muy ligera en el plano de la interfase, esta perturbación crecerá. Cuando esto ocurre en el plano de la interfase de los dos fluidos la inestabilidad que surge se llama de Kelvin-Helmholtz (Chandrasekhar, 1961).

El campo magnético en estos dos casos juega un papel muy importante, dependiendo de la dirección en la que se encuentre con respecto a la interfase entre los dos plasmas previo un sistema de referencia establecido. Este campo hará crecer a la inestabilidad más rápidamente que en el caso de un plasma sin campo o, en su caso, dicho

campo no afectará a la inestabilidad generada.

Situaciones de estabildades e inestabilidades son importantes en muchos fenómenos solares. Algunas veces se va a necesitar explicar cómo una estructura en el Sol puede permanecer estable por períodos de tiempo largos, cuando consideraciones teóricas preliminares sugieren que ésta debería ser inestable. En otras ocasiones, necesitaremos entender por qué algunas estructuras magnéticas en el sol de repente se vuelven inestables y producen eventos de gran magnitud tales como erupciones de protuberancias, o ráfagas solares.

III.2.- *Inestabilidad Rayleigh-Taylor.*

En la hidrodinámica es bien conocido que una configuración de fluido inestable existe cuando un fluido de densidad ρ_2 es soportado por otro de menor densidad ρ_1 en presencia de un campo gravitacional. Supondremos que inicialmente la frontera entre los dos fluidos es un plano horizontal. Entonces, cualquier perturbación que se produzca sobre esta frontera crecerá en amplitud. Esta inestabilidad es producida por la capacidad de flotación de un fluido sobre otro, es decir, ambos fluidos mantienen perfectamente delimitadas sus fronteras no combinándose entre ellos.

Físicamente lo que está pasando en una inestabilidad Rayleigh-Taylor es que al desplazarse el fluido denso superior hacia abajo, su energía potencial decrece; esta disminución no se balancea

por el desplazamiento simultáneo hacia arriba de un volumen igual del fluido menos denso. Ambos fluidos se suponen estacionarios e incompresibles, es decir, $\text{div } \vec{v} = 0$. Esto nos va a conducir a que ρ sea constante en cada uno de los fluidos. Esta deducción se obtiene fácilmente de la ecuación de continuidad. El hecho de que $\text{div } \vec{v} = 0$ nos indica que no hay fuentes ni sumideros de flujo.

Ante esta situación se va a desarrollar una inestabilidad en la región de la interfase entre los dos fluidos con un modo de crecimiento en la amplitud de la perturbación cuyo número de onda $|K|$ crece en un tiempo descrito por: $\exp [(K g)^{1/2} t]$ (ver Fig.1).

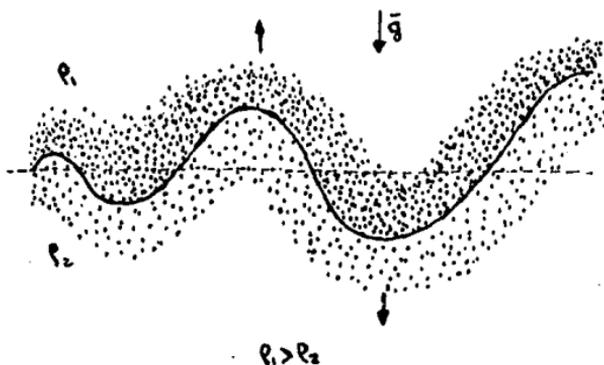


Figura 1

Consideremos un estado estático en el cual un fluido de densidad variable está arreglado en forma estratificada; vamos a suponer que

las variaciones de la presión p y la densidad ρ se dan solo a lo largo del eje \bar{z} . Supongamos ahora que el sistema es ligeramente perturbado de su estado inicial de equilibrio. Dichas perturbaciones se consideran de longitud de onda pequeña. A su vez el sistema se halla bajo la acción de un campo gravitacional \bar{g} que se encuentra dirigido a lo largo del eje \bar{z} . Aquí no tomaremos en cuenta efectos tales como tensión superficial, viscosidad, efectos de rotación del fluido, inhomogeneidades, ó alguna forma funcional de los parámetros. Esto nos va a permitir hacer un desarrollo más fácil de las ecuaciones MHD sin muchas complicaciones. De hecho, al hacer tales suposiciones lo que estamos haciendo es una idealización del problema, aunque para un tratamiento más real se tendrán que considerar tales efectos. Sin estos fenómenos podremos apreciar mejor los efectos de un campo magnético sobre fluidos cargados.

Vamos ahora a analizar tres casos interesantes de inestabilidades Rayleigh-Taylor:

- i).- Inestabilidades de dos fluidos de densidades constantes en presencia de un campo gravitacional.
- ii).- Inestabilidad Rayleigh-Taylor en presencia de un campo magnético paralelo a la interfase entre los dos fluidos.
- iii).- Inestabilidad Rayleigh-Taylor en presencia de un campo magnético perpendicular a la interfase entre los dos fluidos.

En cada uno de estos casos se va a obtener un sistema de ecuaciones a resolver. Estas ecuaciones se pueden obtener a través de dos métodos que son:

- a).- Método de modos normales
- b).- Método de variación de la energía

Cada método tendrá sus ventajas. Con el primer método podremos determinar relaciones de dispersión en donde aparecen parámetros como ω que será la frecuencia angular de excitación de las ondas perturbadas en el plasma y $|K|$, el número de onda de la perturbación.

En el segundo método se toman variaciones de la energía potencial del sistema cuando elementos del plasma en cierta posición r_0 son desplazados desde su posición de equilibrio.

En nuestro caso el análisis de la perturbación lo haremos con el método de modos normales, es decir, propondremos que las perturbaciones de las variables sean periódicas ya que esto va a permitir determinar las condiciones bajo las cuales la perturbación puede surgir y la manera como ésta se disipa.

Con estas consideraciones hechas diremos que en el método de modos normales, dadas las condiciones de frontera y la configuración de equilibrio, se tendrán que determinar las variables perturbadas $(\rho_1, \bar{v}_1, p_1, \bar{J}_1, \bar{B}_1)$ las cuales se van a obtener del conjunto de ecuaciones lineales de la magnetohidrodinámica comentadas en el

capítulo II. Cada una de estas variables, debido a su condición periódica propuesta, puede ser descompuesta en una serie de componentes de Fourier, las cuales deben de comportarse como $\exp(i \vec{k} \cdot \vec{r} - W t)$. Cabe mencionar que si todos los modos normales tienen frecuencia angular real $W^2 > 0$, el sistema es llamado inestable, pues la perturbación correspondiente crecerá exponencialmente. Si $W^2 < 0$ tendremos un número imaginario y el sistema oscilará alrededor de un punto de equilibrio ($W = 0$) el cuál es, además, estable para las variables perturbadas.

En los tres casos que se van analizar se va a suponer un fluido ideal y de conductividad eléctrica infinita. También consideraremos el hecho de que no existe campo eléctrico en los tres casos.

Caso 1).- Ecuación de perturbación para dos fluidos incompresibles estacionarios en presencia de un campo gravitacional.

Consideremos un sistema coordenado (x, y, z) y un campo gravitacional \vec{g} a lo largo del eje \bar{z} , como se muestra en la Fig.2:

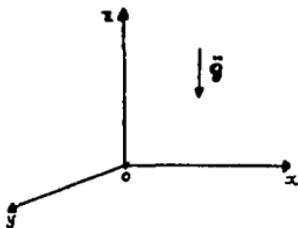


FIG. 2

Ahora bien, la densidad ρ en cualquier punto $(x, y, z;)$ como resultado de un disturbio será $\rho + \rho_1$, donde ρ_1 es el cambio en la densidad. Así mismo llamaremos p_1 el correspondiente cambio en la presión. Finalmente $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ va a corresponder a la velocidad perturbada. Dichas perturbaciones las vamos a suponer que se llevan a cabo a lo largo del eje \bar{z} . Las ecuaciones que gobiernan esta perturbación se van a obtener de las ecuaciones de continuidad y de movimiento, capítulo II. Estas ecuaciones las vamos a linealizar tomando los términos de primer orden y despreciando los términos de orden cero así como los términos de segundo ó mayor orden. Esto lo podremos hacer ya que como el tamaño de la perturbación es muy pequeño, entonces para órdenes mayores o iguales a dos dichos términos van a ser más pequeños y ellos no van a contribuir de manera significativa al proceso de perturbación. Por lo tanto, tendremos:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \text{grad } p_1 - \bar{g} \rho_1 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \text{ grad } \rho = 0 \quad (3.2)$$

$$\text{div } \vec{v}_1 = 0 \quad (3.3)$$

Ahora bien, las ecuaciones (3.1) a (3.3) las podremos expresar por componentes, haciendo esto tenemos:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}_{1x}}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_{1y}}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial y} \quad (3.5)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_{1x}}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial z} - g \rho_1 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_{1z}}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = - \bar{v}_{1z} \frac{d \rho}{d z} \quad (3.8)$$

Para las ecuaciones (3.4) a (3.8), usando el análisis de la perturbación con el método de modos normales, buscaremos soluciones cuya dependencia en (x, y, t) sean de la forma:

$$A(x, y, z, t) = A(z, t) \exp(i K_x x + i K_y y - W t) \quad (3.9)$$

Con ello podremos resolver los valores permitidos para los cuales W cumple con las condiciones de frontera. Aquí K_x , K_y y W son constantes, y $K = [K_x^2 + K_y^2]^{1/2}$, es el número de onda. Entonces tenemos:

$$\rho W \bar{v}_{1x} = - i K_x p_1 \quad (3.10)$$

$$\rho W \bar{v}_{1y} = - i K_y p_1 \quad (3.11)$$

$$\rho W \frac{d \bar{v}_{1z}}{d z} = - \frac{d p_1}{d z} - g \rho_1 \quad (3.12)$$

$$i K_x v_{1x} + i K_y v_{1y} = - \frac{d v_{1z}}{d z} \quad (3.13)$$

$$W p_1 = - v_{1z} \frac{d \rho}{d z} \quad (3.14)$$

Observaremos que tenemos un sistema cerrado: mismo número de variables que de ecuaciones. Podremos entonces reducir el número de ecuaciones de modo que tengamos una sola relación en términos de una sola variable.

Multiplicando a (3.10) y (3.11) por $[-iK_x]$ y $[-iK_y]$ respectivamente tenemos:

$$- i K_x W v_{1x} = - K_x^2 p_1 \quad (3.15)$$

$$- i K_y W v_{1y} = - K_y^2 p_1 \quad (3.16)$$

sumando estas relaciones y usando (3.13) tenemos:

$$\rho W \frac{d v_{1z}}{d z} = K^2 p_1 \quad (3.17)$$

Despejemos ahora p_1 de (3.14) y sustituyámosla en (3.12),

$$\rho W v_{1z} = - \frac{d p_1}{d z} - g \left(- \frac{v_{1z} d \rho}{W d z} \right) \quad (3.18)$$

Despejando p_1 de (3.17) y sustituyéndola en (3.18) tenemos:

$$\frac{d^2}{d z^2} (\rho v_{1z}) = K^2 \left(\rho - \frac{g K}{W^2 \rho} \frac{d \rho}{d z} \right) v_{1z} \quad (3.19)$$

Esta es una ecuación lineal de segundo orden que gobierna a la

inestabilidad. Cabe mencionar que esta ecuación se aplica a cada uno de los fluidos en el sistema.

Para las condiciones de frontera supondremos que el fluido se encuentra contenido entre dos planos. Entonces pediremos que las soluciones de (3.19) satisfagan : $v_{1z} = 0$ en $z=0$ y $z=d$, donde d es la separación entre los planos.

Integrando (3.19) a lo largo de la interfase en $z=0$ tenemos:

$$\Delta_s \left(\rho \frac{d v_{1z}}{d z} \right) = - \frac{g K^2}{W^2} \Delta_s (\rho v_{1z}) \quad (3.20)$$

(3.20) nos está indicando una condición de continuidad en la frontera del fluido, mientras que la ecuación (3.19) es válida en cualquier región del fluido. El símbolo Δ_s nos indica un salto en los parámetros del plasma en el punto $z = 0$, es decir, $[\Delta_s(f) = f_2 - f_1]_{z=0}$.

Por lo tanto para dos fluidos uniformes, estáticos, e incompresibles de densidades ρ_1 y ρ_2 separados por un plano horizontal en $z=0$, fig.3, la ecuación general (3.19) se reduce a:

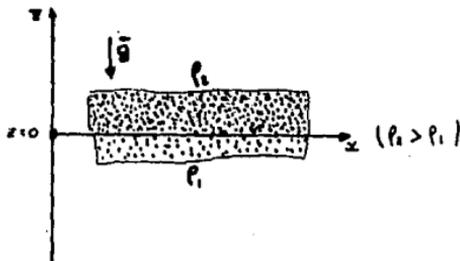


Fig 3

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - K^2 \right) v_{1z} = 0 \quad (3.21)$$

en cuyo caso la solución general de esta relación es una combinación lineal de $\exp [+K z]$ y $\exp [-K z]$, es decir,

$$v_{1z \ 1,2} = A \exp (K z) + B \exp (- K z) \quad (3.22)$$

donde pediremos que las soluciones en cada una de las regiones cumpla con:

$$\begin{aligned} v_{1z1} &= A \exp [+K z], & \text{para } (z < 0) \\ v_{1z2} &= B \exp [-K z], & \text{para } (z > 0) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Los sub índices 1 y 2 nos indican ambas regiones respectivamente.

Con esto vamos a asegurar que la componente en z de la velocidad perturbada no crezca infinitamente en cualquiera de las dos regiones. Se deduce además de la misma condición de continuidad que $A=B$ en ambas regiones para pedir con ello la continuidad de v_{1z} a través de la interfase en $z=0$.

Veamos ahora el comportamiento en la interfase usando las soluciones propuestas (3.23) en la relación (3.20) Para ello se va a obtener la ecuación característica de W en términos de las densidades de los dos fluidos, así como de \bar{K} y \bar{g} ,

$$W^2 = g K \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right) \quad (3.24)$$

Esta relación es un caso hidrodinámico completamente ya que solamente están implicados las densidades de los dos medios. Analicemos entonces (3.24) por casos:

- a).- Si $\rho_2 > \rho_1$, entonces W va a tomar un valor real y de (3.9) se puede ver que se genera una inestabilidad, para todo número de onda K .
- b).- Si $\rho_1 > \rho_2$, entonces W va a ser un número imaginario y de (3.9) observamos que no se genera una inestabilidad, para cualquier número de onda K .

Conclusión:

Podremos argumentar, entonces, que la inestabilidad se va a producir siempre y cuando un fluido de mayor densidad esté siendo soportado por otro de menor densidad en presencia de un campo gravitacional, es decir, si se produce una pequeña perturbación en la frontera entre ambos fluidos ésta va a crecer exponencialmente con una frecuencia angular W dada por (3.24).

Caso II).- Ecuación de perturbación para la inestabilidad Rayleigh-Taylor en presencia de un campo magnético perpendicular a la interfase o paralelo al campo gravitacional \vec{g} .

Consideremos ahora el efecto de un campo magnético en la

dirección de g sobre un fluido heterogéneo en equilibrio. De las ecuaciones del capítulo II podemos deducir las ecuaciones MHD que gobiernan la perturbación. Del mismo modo que en el caso anterior, la ecuación resultante va a poder ser aplicada para el caso de dos fluidos diferentes estratificados, así como también las condiciones a la frontera expuestas anteriormente para la velocidad perturbada v_{1z} .

Sea $\rho + \rho_1$ la densidad en un punto $\vec{r} = (x, y, z)$ como consecuencia de un disturbio. Denotaremos por $\vec{B}_1 = (B_{1x}, B_{1y}, B_{1z})$ a la perturbación del campo magnético \vec{B} correspondiente. Entonces, desarrollando por componentes las ecuaciones magnetohidrodinámicas, tomando a primer orden los términos perturbados y sustituyendo unas en otras como se hizo en el caso 1), obtendremos una sólo relación en términos de una sólo variable:

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{dv_{1z}}{dz} \right) - \frac{B^2}{W^2} \frac{d^2}{dz^2} - K^2 \frac{d^2 v_{1z}}{dz^2} = K^2 \rho v_{1z} \frac{g K^2}{W^2} \frac{d\rho}{dz} \quad (3.25)$$

donde \vec{B} denota el campo magnético en la dirección $\hat{k}(z)$. Podemos darnos cuenta aquí que el campo ya aparece explícitamente como factor fundamental de la inestabilidad aunque no es todavía concluyente su efecto.

Para las condiciones de frontera supondremos que el fluido se encuentra confinado entre dos planos rígidos separados una distancia d . Pediremos entonces que:

$$v_{1z}=0 \text{ y } Dv_{1z} = 0 \text{ ó } D^2 v_{1z} = 0 \quad (1)$$

en la frontera. Aquí D y D^2 indican primera y segunda derivadas con respecto a la coordenada z , respectivamente.

Si existe una discontinuidad en ρ , por estar el fluido estratificado, entonces la condición en la interfase es sobre \bar{v}_{1z} y \bar{B}_1 , cuya componente normal a la interfase se pide sea continua. El campo \bar{B} inicial no posee componente tangencial y por la $\text{div } \bar{B} = 0$ se concluye que para que se mantenga el flujo de campo magnético, entonces, su componente normal se va a mantener. Normalmente en un fluido de conductividad eléctrica infinita se impone la condición de que la componente normal \bar{B}_{1z} y las componentes tangenciales \bar{B}_{1x} y \bar{B}_{1y} sean continuas, cuando la componente tangencial exista. De esta manera la continuidad de \bar{B}_{1z} va a requerir que $(d v_{1z}/d z)$ sea continua y la continuidad de \bar{B}_{1x} y \bar{B}_{1y} va a requerir que $(d^2 v_{1z}/d z^2)$ sea continua y todo esto se debe de cumplir en la interfase entre los dos fluidos. Integrando (3.25) a través de la interfase de los dos medios tenemos:

$$\Delta s \left(\rho \frac{d v_{1z}}{d z} - \frac{B^2}{W^2} \left(\frac{d^2}{d z^2} - K^2 \right) \frac{d^2 v_{1z}}{d z^2} \right) = - \frac{g K^2}{W^2} \Delta s (\rho) v_{1z} \quad (3.26)$$

Consideremos dos fluidos de densidades constantes ρ_1 y ρ_2 separados en $z = 0$, en presencia de un campo magnético \bar{B} perpendicular a la interfase Fig.4.

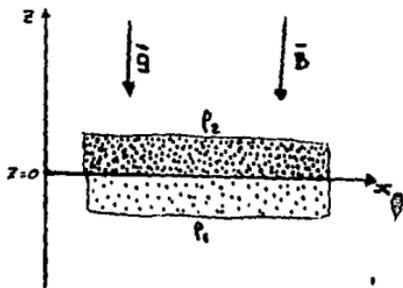


Fig. 4.

En cada una de las dos regiones, como lo muestra la fig. 4, la relación (3.25) se puede aplicar y ésta se reduce a:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - K^2 \right) v_{1z} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{d^2}{dz^2} - K^2 \right) \frac{d^2 v_{1z}}{dz^2} = 0 \quad (3.27)$$

la solución general de esta relación es:

$$v_{1z} = A \exp(\pm K z) + B \exp(\pm q z) \quad (3.28)$$

donde,

$$q^2 = \frac{\rho_2 W^2}{B^2} \quad (3.29)$$

Un resultado que se deriva de esto es que W^2 debe ser necesariamente real, es decir, si W^2 toma ambos valores positivo y negativo esto significa que (3.29) podrá ser real o un número imaginario por lo que no podrá ser fácil escoger un signo para q de tal manera que (3.28) no crezca en más y menos infinito. Pero de (3.9) podremos decir que habrá una inestabilidad cuando ($W^2 > 0$) y una estabilidad cuando ($W^2 < 0$) por lo que tomaremos la segunda

suposición ($W^2 < 0$) y haremos con ella el análisis correspondiente.

Con esta suposición hecha podemos escribir la relación (3.28) como sigue:

$$\begin{aligned} v_{1z1} &= A_1 \text{Exp} (K z) + B_1 \text{Exp} (q z) \quad (z < 0) \\ v_{1z2} &= A_2 \text{Exp} (-K z) + B_2 \text{Exp} (-q z) \quad (z > 0) \end{aligned} \quad (3.30)$$

A_1, A_2, B_1 y B_2 son constantes de integración. Para ambas regiones tenemos:

$$q_1 = W \left(\frac{\rho_1}{B^2} \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad q_2 = W \left(\frac{\rho_2}{B^2} \right)^{1/2} \quad (3.31)$$

Usando las condiciones de continuidad dadas en ($z=0$) en la relación (3.30) tenemos:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (3.32)$$

$$K A_1 + q_1 B_1 = -K A_2 - q_2 B_2 \quad (3.33)$$

$$K^2 A_1 + q_1^2 B_1 = K^2 A_2 + q_2^2 B_2 \quad (3.34)$$

y usando ahora (3.30) en (3.26) nos queda:

$$\begin{aligned} -\rho_2 \left(A_2 K + \frac{K^2}{q_2} B_2 \right) - \rho_1 \left(A_1 K + \frac{K^2}{q_1} B_1 \right) = \\ - \frac{g K^2}{2 W^2} (\rho_2 - \rho_1) (A_1 + A_2 + B_1 + B_2) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Con este sistema de ecuaciones, (3.32), (3.33), (3.34) y (3.35), podemos deducir entonces la ecuación característica de dispersión que es la siguiente:

$$W^3 + 2K \{(\alpha_2)^{1/2} + (\alpha_1)^{1/2}\}W^2 + K (2K + \alpha_1 - \alpha_2)W - 2K^2 \{(\alpha_2)^{1/2} - (\alpha_1)^{1/2}\} = 0 \quad (3.36)$$

donde α_1 y α_2 se han definido como

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (3.37)$$

Ahora, independientemente de cuales sean las raíces de (3.36) podemos darnos cuenta que esta relación es una aproximación a la relación hidrodinámica (3.24) la cuál no depende del campo magnético, es decir, las raíces características de W sólo van a depender de las densidades de los dos medios así como del número de onda K .

Conclusión

Podemos entonces concluir que la inestabilidad entre los dos fluidos, para cualquier longitud de onda pequeña, es decir, comparada con las dimensiones del sistema, no es afectada por la presencia de un campo magnético perpendicular a la interfase. Por lo que cualquier perturbación generada en la interfase crecerá como en el caso hidrodinámico.

Caso III).- Ecuaciones de perturbación para la inestabilidad

Rayleigh-Taylor en presencia de un campo magnético horizontal a la interfase.

Consideremos el efecto de un campo magnético perpendicular a \vec{g} sobre un fluido heterogéneo. Supondremos que el campo magnético se encuentra a lo largo del eje \vec{x} . De hecho se puede tomar el campo en un plano del espacio con dos componentes pero por simplicidad se supone en una sola componente. Vamos a usar ahora, de nueva cuenta, las ecuaciones MHD para determinar la relación de dispersión que gobierna a la perturbación.

Si desarrollamos por componentes las ecuaciones obtenidas, tomando a primer orden los términos perturbados, como en los casos anteriores, vamos a obtener relaciones linealizadas. Posteriormente, mediante un proceso algebraico, sustituyendo unas en otras las ecuaciones resultantes se va a obtener una sola relación en términos de una sola variable. Este resultado se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{dv_{1z}}{dz} \right) + \frac{B^2 K_x^2}{W^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} - K^2 \right) v_{1z} - K^2 \rho v_{1z} = - \frac{g K^2}{W^2} \left(\frac{d\rho}{dz} \right) v_{1z} \quad (3.38)$$

acordando que la continuidad de v_{1z} asegura la continuidad de B_{1z} en $z=0$. Observemos que cuando $K_x=0$ la relación (3.38) se reduce al caso hidrodinámico, además de que esta relación se cumple en cualquier región del fluido.

Integrando ahora sobre la interfase en $z=0$ la relación (3.38) obtendremos la condición de salto que debe satisfacerse en la frontera entre los dos fluidos,

$$\Delta s \left(\rho \frac{d v_{1x}}{d z} \right) + \frac{B^2 K_x^2}{W^2} \Delta s \left(\frac{d v_{1x}}{d z} \right) = - \frac{g K^2}{W^2} \Delta s (\rho v_{1x}) \quad (3.39)$$

Veamos el caso de dos fluidos de densidades constantes ρ_1 y ρ_2 separados por una frontera horizontal en $z=0$ Fig.5:

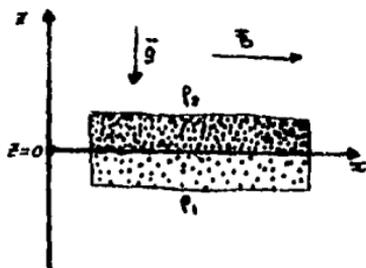


Fig.5

En este caso la relación (3.38) se reduce para ambas partes del fluido, a :

$$\frac{d}{d z} \left(\rho \frac{d v_{1x}}{d z} \right) + \frac{B^2 K_x^2}{W^2} \left(\frac{d^2}{d z^2} - K^2 \right) v_{1x} - K^2 \rho v_{1x} \quad (3.40)$$

cuyas soluciones son las mismas que (3.22) dadas en el caso (1). Por lo tanto, aplicando estas soluciones a la relación (3.39) tenemos la ecuación característica, cuyas raíces son:

$$W^2 = g K \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{B^2 K_x^2}{(\rho_1 + \rho_2)gK} \right) \quad (3.41)$$

Podemos observar en esta relación que ahora el campo magnético va a jugar un papel importante en la forma de la inestabilidad y, adelantándonos un poco, podemos asegurar que el campo de una u otra forma va a disminuir la inestabilidad, es decir, va a tender a equilibrar al sistema ante la presencia de una perturbación en la frontera entre los dos fluidos.

Analizando (3.41) por casos tenemos:

a).- Si $K_x = 0$, entonces nos reducimos al caso hidrodinámico.

b).- Si el radicando es negativo, es decir,

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{B^2 K_x^2}{(\rho_1 + \rho_2)gK} < 0 \quad (3.42)$$

entonces W va a ser un número imaginario, por lo que de la relación (3.9) obtenemos una perturbación periódica que es estable alrededor de $W = 0$. La inestabilidad que inicialmente se genere en la frontera va a tender a oscilar alrededor de un punto de equilibrio sin que ésta crezca. Por lo tanto, el campo aquí actúa de una manera que evita la propagación de la inestabilidad.

c).- Si el radicando es positivo,

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{B^2 K_x^2}{(\rho_1 + \rho_2)gK} > 0 \quad (3.43)$$

entonces W va a ser real y la relación (3.9) nos indica una perturbación en el plano (x,y) que crecerá con el tiempo de manera exponencial. En (3.43) observamos que la perturbación se va a llevar a cabo y existirá para todo número de onda K que cumpla con :

$$\frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{B^2 \cos^2 \theta} > K \quad (3.44)$$

donde θ es el ángulo entre el campo magnético y el vector de propagación \vec{K} . Hay de hecho un número de onda mínimo para el cual hay propagación de la perturbación, es cuando \vec{K} es paralelo al campo magnético ($\theta=0$). Entonces tenemos:

$$\frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{B^2} > K_{\min.} \quad (3.45)$$

De la relación (3.44) también se concluye que :

$$\rho_2 > \rho_1 + \frac{B^2 \cos^2 \theta}{g} \quad (3.46)$$

Esto nos está indicando que para que la inestabilidad se lleve a cabo el fluido más denso debe de ser soportado por el de menor densidad en donde el campo entra como un factor extra en el término de densidades. Si $\vec{B} = 0$ en (3.46) nos reducimos al primer caso (i) ya analizado. Podemos decir, entonces, que la presencia de un campo magnético juega

un papel importante en la forma de la perturbación que se genere en la frontera entre los dos fluidos. Si comparamos la frecuencia angular en el caso hidrodinámico, llamemosla W_1 , con la frecuencia angular generada en el caso magnetohidrodinámico del caso (iii), llamemosla W_2 , podemos darnos cuenta que dichas frecuencias son completamente diferentes ($W_2 > W_1$) y esto es debido al factor del campo magnético incluido en el último caso con la dirección ya especificada para el mismo. Si dicho campo magnético no existe, entonces, como ya lo hemos asegurado, nos reduce al primer caso analizado.

Conclusion

Podemos concluir que un campo magnético paralelo a la interfase si afecta a la inestabilidad en el plano (x,y). Este campo de hecho va a impedir que la inestabilidad se propague más rápido que en el caso hidrodinámico, es decir, dicho campo magnético está inhibiendo a la inestabilidad tratando de llevar al sistema en desequilibrio a un estado estable.

III.3. INESTABILIDAD KELVIN-HELMHOLTZ.

La inestabilidad Kelvin-Helmholtz surge cuando el estado de equilibrio de un fluido se ve afectado por su movimiento relativo a otro fluido estando ambos en contacto. Dicha velocidad es tomada como referencia desde un sistema inercial fijo en el laboratorio.

En el estado estacionario inicial examinaremos una perturbación en un fluido en el cual hay una velocidad horizontal \bar{v}_0 inicial. Supondremos también que este fluido se encuentra bajo la acción de un campo gravitacional g , que además es no viscoso y conductor. La suposición de que el fluido es no viscoso nos va a permitir considerar a v_0 como una función arbitraria de la altura z .

Consideraremos tres casos interesantes en los que se van a analizar las condiciones en las que se puedan dar este tipo de inestabilidad :

- i).- Inestabilidad Kelvin-Helmholtz de dos fluidos de densidades constantes en movimiento relativo sin campo magnético.
- ii).- Inestabilidad Kelvin-Helmholtz en presencia de un campo magnético paralelo a la interfase entre dos fluidos.
- iii).- Inestabilidad Kelvin-Helmholtz en presencia de un campo magnético perpendicular a la interfase entre los dos fluidos.

De igual forma que en el caso de la Inestabilidad Rayleigh-Taylor, se va a obtener un conjunto de ecuaciones para cada uno de los casos usando las ecuaciones MHD y el método de modos normales.

III 3.1. Ecuaciones de perturbación.

Caso 1).- Ecuaciones de perturbación para dos fluidos incompresibles con velocidad relativa \bar{v}_0 .

Consideremos un sistema coordenado $(x, y, z,)$ en donde supondremos que el flujo tiene lugar en la dirección del eje x con velocidad \bar{v}_0 , el campo gravitacional \bar{g} se halla a lo largo del eje z y el sistema tiene una densidad ρ heterogénea, ver Fig.6,

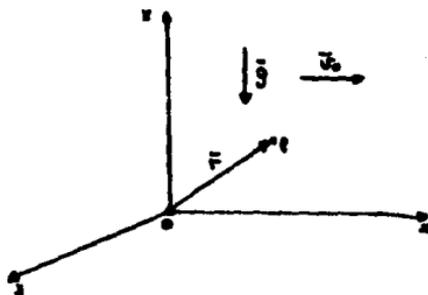


Fig. (6)

Supongamos que hay una densidad ρ_0 inicial en el punto (x_0, y_0, z_0) y que como resultado de una perturbación la densidad cambia como sigue $\rho = \rho_0 + \rho_1$, y el correspondiente cambio en la presión

es p_1 . Finalmente consideremos que las componentes de la velocidad en el estado perturbado son : $v_0 + (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$. Las ecuaciones que gobiernan esta perturbación se obtienen a partir de las ecuaciones hidrodinámicas. Por componentes y tomando a primer orden los términos perturbados, despreciando los términos de orden cero y los términos de orden mayor o igual que dos, tendremos de las ecuaciones de continuidad, de momento, de energía, así como $\text{div } \vec{v} = 0$:

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}_{1x}}{\partial t} + \rho_0 \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{v}_{1x}}{\partial x} + \rho_0 \bar{v}_{1z} \frac{d \bar{v}_0}{dz} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (3.47)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}_{1y}}{\partial t} + \rho_0 \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{v}_{1y}}{\partial x} = - \frac{\partial p_1}{\partial y} \quad (3.48)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}_{1z}}{\partial t} + \rho_0 \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{v}_{1z}}{\partial x} = - \frac{\partial p_1}{\partial z} - \bar{g} \rho_1 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \bar{v}_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = - \bar{v}_{1z} \frac{d \rho_0}{dz} \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_{1z}}{\partial z} = 0 \quad (3.51)$$

Analizando la perturbación con el método de modos normales, buscaremos soluciones cuya dependencia en (x, y, t) sean de la forma $\exp(K_x x + K_y y - W t)$, entonces:

$$A(x, y, z, t) = A(z, t) \exp i(K_x x + K_y y - W t) \quad (3.52)$$

donde:
$$K = (K_x^2 + K_y^2)^{1/2} \quad (3.53)$$

La relación (3.52) nos indica una perturbación que se desplaza sobre el plano (x,y) en la interfase de los fluidos con una frecuencia W, es decir, es una onda plana. Este parámetro W juega un papel muy importante, ya que nos da la información sobre las condiciones en las que la inestabilidad se produce. Usando la relación (3.52) en las ecuaciones (3.47) a (3.51) y arreglando por componentes vamos a obtener el siguiente conjunto de ecuaciones a resolver:

$$i \rho_0 (W + K_x v_0) v_{ix} + \rho_0 v_{iz} \frac{d v_0}{d z} = - i K_x p_1 \quad (3.54)$$

$$i \rho_0 (W + K_x v_0) v_{iy} = - i K_y p_1 \quad (3.55)$$

$$i \rho_0 (W + K_x v_0) v_{iz} = - \frac{d p_1}{d z} - g p_1 \quad (3.56)$$

$$i p_1 (W + K_x v_0) = - v_{ix} \frac{d \rho_0}{d z} \quad (3.57)$$

$$i K_x v_{ix} + i K_y v_{iy} = - \frac{d v_{iz}}{d z} \quad (3.58)$$

las cuales forman un sistema cerrado: mismo número de variables que de ecuaciones. Este sistema de ecuaciones se puede reducir a un número menor de relaciones para un manejo más fácil. Multipliquemos a (3.54) y (3.55) por $[-i K_x]$ y $[-i K_y]$ respectivamente. Sumémoslas, y usando las relaciones (3.58) y (3.53) tenemos:

$$1 \rho_0 (W + Kxv_0) \frac{d v_{1z}}{d z} - 1 \rho_0 Kx v_{1z} \frac{d v_0}{d z} = - K^2 p_1 \quad (3.59)$$

mientras que despejando p_1 de (3.57) y sustituyéndola en (3.56) tenemos:

$$1 \rho_0 (W + Kxv_0) v_{1z} = - 1 \frac{d p_1}{d z} - 1 \frac{g v_{1z}}{W + Kxv_0} \frac{d \rho_0}{d z} \quad (3.60)$$

Ahora despejemos p_1 de (3.59) y sustituyamos en (3.60). Tenemos:

$$\frac{d}{d z} \{ \rho_0 (W + Kxv_0) \frac{d v_{1z}}{d z} - \rho_0 Kx v_{1z} \frac{d v_0}{d z} \} - K^2 \rho_0 (W + Kxv_0) v_{1z} = \dots$$

$$g K^2 \frac{v_{1z}}{W + Kxv_0} \frac{d \rho_0}{d z} \quad (3.61)$$

que, como podemos observar, es una ecuación en términos de una sola variable v_{1z} .

Para las condiciones de frontera supondremos que el fluido está confinado entre dos planos rígidos en $z = 0$ y $z = d$, donde d es la separación entre los planos. Pediremos que las soluciones de (3.61) satisfagan las condiciones de frontera: $v_{1z} = 0$ en $z = 0$ y $z = d$.

Integrando (3.61) sobre la interfase en $z=0$ tenemos:

$$\Delta s \{ \rho_0 (W + Kx v_0) \frac{d v_{1z}}{d z} - \rho_0 Kx v_{1z} \frac{d v_0}{d z} \} = g K^2 \Delta s (\rho_0) \frac{v_{1z}}{W + Kx v_0} \quad (3.62)$$

(3.62) nos indica una condición de continuidad la cuál debe satisfacerse sobre la superficie de discontinuidad en $z=0$, mientras que la ecuación (3.61) es válida en cualquier región del fluido.

Consideremos ahora dos fluidos uniformes de densidades ρ_1 y ρ_2 , (ρ_2 menor que ρ_1), separados en $z = 0$, Fig. 7.

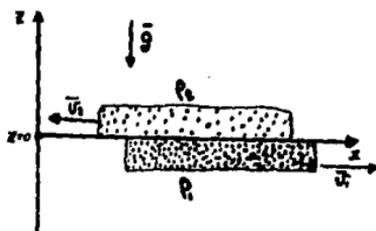


Fig. 7

Supondremos, además, que ambos fluidos se mueven con velocidades ctes. \bar{v}_1 y \bar{v}_2 , como se muestra en la figura y además el fluido de densidad ρ_2 por arriba es menor que el fluido de densidad ρ_1 por abajo. En cada una de las dos regiones la densidad ρ y la velocidad v son constantes; por lo tanto, la relación (3.61) se reduce a:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - K^2 \right) v_{12} = 0 \quad (3.63)$$

La solución general de esta ecuación se propone que sea una combinación lineal de $\{ \exp \{ +K z \} \}$ y $\{ \exp \{ -K z \} \}$, ya que de esta manera v_{12} no puede incrementarse al infinito sobre cualquiera de los dos lados de la interfase en $z = 0$. Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} v_{1z1} &= A (W + K_x v_0) \exp (K z) ; \quad (z < 0) \\ v_{1z2} &= A (W + K_x v_0) \exp (- K z) ; \quad (z > 0) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Estas son las soluciones para cada una de las dos regiones. Aplicando ahora la condición (3.62) y usando las soluciones propuestas (3.64) obtenemos la ecuación característica siguiente:

$$W^2(\rho_1 + \rho_2) + 2K_x(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2)W + K_x(\rho_1 v_1^2 + \rho_2 v_2^2) - g K^2(\rho_1 - \rho_2) \quad (3.65)$$

Esta relación (3.65) se puede reescribir de otra manera haciendo algunos procedimientos algebraicos. Si dividimos (3.65) por $(\rho_1 + \rho_2)$ llamando a α_1 y α_2 como en la relación (3.37) entonces la relación de dispersión de (3.65) es la siguiente:

$$W = - K_x(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \pm [gK(\alpha_1 - \alpha_2) - K_x^2 \alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2]^{1/2} \quad (3.66)$$

Podemos observar de esta relación que ahora los términos de velocidad de cada fluido van a tener un rol importante en la generación de la inestabilidad en la frontera entre los dos fluidos. Si no existen estas velocidades en los fluidos, es decir, $v_1 = v_2 = 0$, desde nuestro sistema de referencia en el laboratorio, la relación (3.66) se reduce al caso de inestabilidad Rayleigh-Taylor ya vista. Es claro que si montamos nuestro sistema de referencia en el movimiento del fluido de nueva cuenta tendremos una inestabilidad Rayleigh-Taylor.

Ahora bien, analizando (3.66) por casos tenemos lo siguiente:

Caso 1).- Cuando $K_x = 0$ entonces $W = \pm [gK(\alpha_1 - \alpha_2)]^{1/2}$, que es el caso Rayleigh-Taylor de la sección anterior o caso hidrodinámico. Además como K tiene la forma de (3.53) y $K_x = 0$, entonces, $\bar{K} = \bar{K}_y$ de donde el vector de propagación es transversal a la dirección del flujo \bar{v} . Esta perturbación transversal a la dirección de flujo no se ve afectada por el movimiento del sistema.

Caso 2).- Cuando $K_x \neq 0$ la inestabilidad se da siempre y cuando el radicando sea negativo, es decir, de (3.66), cuando:

$$K_x^2 \alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2 > gK(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (3.67)$$

Entonces tenemos un número complejo y la forma de la perturbación, por (3.52), va a crecer en forma exponencial generándose la inestabilidad, es decir, dada una diferencia de velocidades $(v_1 - v_2)$ y una dirección del vector de propagación \bar{K} en el plano (x, y) , la inestabilidad ocurre para todo número de onda que cumpla lo siguiente:

$$|K| > \frac{g(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2 \cos^2 \theta} \quad (3.68)$$

donde θ es el ángulo entre \bar{v} y \bar{K} . Si \bar{K} es paralela a la dirección de \bar{v} entonces hay un número de onda mínimo para el cual la inestabilidad ocurre:

$$K_{\min.} = \frac{g(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2} \quad (3.69)$$

Entonces podemos pensar que la inestabilidad se va a llevar a cabo

para:

$$\bar{K} \approx \bar{K}_{\text{lin}}. \quad (3.70)$$

El caso de \bar{K} perpendicular a \bar{v} no se toma en cuenta por haber una indeterminación ahí, lo cual implica que físicamente no significa nada.

Conclusión

Concluiremos diciendo que un aspecto importante, predicho por las relaciones (3.68) y (3.69), es que no importa cuán pequeña pueda ser la diferencia entre las velocidades, la inestabilidad se produce. Si ambas velocidades \bar{v}_1 y \bar{v}_2 son iguales, en la relación (3.69) va a haber una indeterminación, lo cual implica que físicamente no significa nada.

Caso ii).- Ecuaciones de perturbación con campo magnético paralelo a la interfase en la Inestabilidad Kelvin-Helmholtz.

Vamos a considerar ahora el efecto del campo magnético \bar{B} perpendicular a \bar{g} sobre el desarrollo de la inestabilidad Kelvin-Helmholtz.

La dirección del campo magnético sobre el plano (x,y) puede ser arbitraria con respecto a la dirección del flujo. Para nuestro análisis basta con tomar una sola dirección del campo \bar{B} . En este caso supondremos que el campo magnético apunta en la dirección del flujo. Supondremos también que la perturbación correspondiente al

campo magnético es $\vec{B}_1=(B_{1x}, B_{1y}, B_{1z})$ y p_1, p_1 son las correspondientes perturbaciones en la densidad y presión del fluido.

Las ecuaciones relevantes que gobiernan esta perturbación se deducen de las ecuaciones MHD como se hizo en la sección (III.3.1). Desarrollando por componentes las ecuaciones perturbadas, tomando los términos a primer orden y sustituyéndolas unas en otras para reducir el número de relaciones se obtiene una sola relación en términos de una sola variable:

$$\frac{d}{dz} \left\{ \rho_0 (W + K_x v_0) \frac{d v_{1z}}{dz} - \rho_0 K_x \left(\frac{d v_0}{dz} \right) v_{1z} \right\} = K^2 \rho_0 (W + K_x v_0) v_{1z} +$$

$$K_x B_0 \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{[d v_{1z}/dz]}{W + K_x v_0} \right) - \frac{K^2 v_{1z}}{W + K_x v_0} \right\} - K_x B_0 \frac{d}{dz} \left\{ \frac{[d v_0/dz]}{(W + K_x v_0)^2} v_{1z} \right\}$$

$$+ g K^2 \frac{[d \rho/dz]}{W + K_x v_0} v_{1z} \quad (3.71)$$

Para el caso de dos fluidos uniformes de densidades ρ_1 y ρ_2 que se hallan separados por una frontera en $z=0$, ver Fig.8.

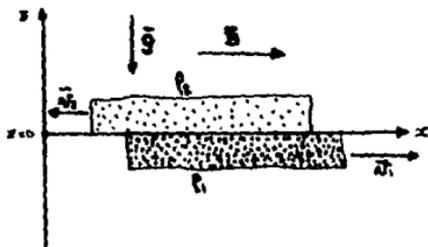


Fig.8

y cuyas velocidades de flujo son \bar{v}_1 y \bar{v}_2 respectivamente, la relación (3.71), para ambas regiones de ρ y \bar{v} constantes, es la siguiente:

$$\left\{ \rho_0 (W + K_x v_0) - \frac{K_x^2 B_0^2}{W + K_x v_0} \right\} \left(\frac{d^2}{dz^2} - K^2 \right) v_{1z} = 0 \quad (3.72)$$

Las soluciones en ambas regiones, usando el método de modos normales en la relación (3.72), son como sigue:

$$\begin{aligned} v_{1z1} &= (W + K_x v_1) \exp(Kz) ; \quad (z < 0) \\ v_{1z2} &= (W + K_x v_2) \exp(-Kz) ; \quad (z > 0) \end{aligned} \quad (3.73)$$

La obtención de estas soluciones requiere que $v_{1z} / W + K_x v_1$ sea continua al pasar de un medio a otro. Esto va a permitir, entonces, que la relación (3.71) sea integrada a través de la interfase en $z = 0$. Por lo tanto, integrando la relación (3.71) sobre la superficie en $z = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta_s \left\{ \rho_0 (W + K_x v_0) \frac{d v_{1z}}{dz} \right\} &= K_x B_0^2 \Delta_s \left(\frac{[d v_{1z}/dz]}{W + K_x v_0} \right) \\ &+ g K^2 \Delta_s(\rho_0) \left(\frac{v_{1z}}{W + K_x v_0} \right) \end{aligned} \quad (3.74)$$

donde de nueva cuenta Δ_s nos indica un salto en los parámetros del fluido en el punto $z = 0$. Aplicando la condición (3.74) para las soluciones de la relación (3.73) obtenemos la ecuación característica siguiente:

$$\rho_2 (W + K_x v_2)^2 + \rho_1 (W + K_x v_1)^2 = g K (\rho_1 - \rho_2) + K_x \frac{B_0^2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (3.75)$$

cuya relación de dispersión es:

$$W = - K_x (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \pm \left[gK (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{K_x B_0^2}{(\rho_1 + \rho_2)} - K_x \alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2 \right]^{1/2} \quad (3.76)$$

Observamos en esta relación (3.76) que el campo magnético aparece implícitamente como un factor importante en la relación de dispersión y juega un papel interesante en el desarrollo de la inestabilidad.

Analizando por casos la relación (3.76) tenemos:

Caso 1).- Si $K_x = 0$, entonces, $W = \pm [gK(\alpha_1 - \alpha_2)]^{1/2}$ y reducimos la relación (3.76) al caso de inestabilidad Rayleigh-Taylor, sección III.2, caso (1).

Caso 2).- En este caso, si, $g = 0$, (caso ideal) y $K_x \neq 0$, la relación (3.76) se reduce

a:

$$W = - K_x (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \pm \left[\frac{K_x^2 B_0^2}{\rho_1 + \rho_2} - K_x^2 \alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2 \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (3.77)$$

Entonces, para que se de la inestabilidad, el radicando de (3.77) tiene que ser negativo, es decir,

$$\frac{B_0^2}{(\rho_1 + \rho_2)} < \alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2 \quad (3.78)$$

por lo que W toma una forma compleja y la perturbación, por (3.52), va a crecer de manera inestable para todo número de onda \bar{k} propagándose esta perturbación en el plano (x, y) , para todo tiempo t . Se pide además, en este caso, que la velocidad relativa entre los medios no sea menor a la raíz de la velocidad de Alfvén, pues el lado izquierdo de la relación (3.78) es la velocidad de Alfvén. Por lo tanto, para que se lleve a cabo la inestabilidad, la diferencia de velocidades de los medios tiene que ser mayor a la velocidad Alfvénica; de otra manera no va existir la inestabilidad. Además si la diferencia de velocidades es igual a la velocidad de Alfvén, entonces, de la relación (3.77) W se vuelve real, luego entonces, de la relación (3.52) tenemos una estabilidad para el sistema cuya perturbación oscila alrededor de un punto donde $W = 0$.

Caso 3). - Si $\bar{B} = 0$ entonces tendremos el caso de la sección (III.3.1),

Caso 2.

Conclusión

Diremos que un campo magnético paralelo a la frontera entre dos fluidos afecta a la inestabilidad Kelvin-Helmholtz. La manera como afecta el campo magnético a la inestabilidad es que, de (3.77), al irse incrementando el campo magnético la inestabilidad va

disminuyendo, ya que el radicando va a tender a ser positivo. Físicamente, lo que está pasando es que, como el material es un conductor y puede ser afectado, en este caso, por un campo magnético, dicho campo actúa como un medio que opone resistencia a desequilibrios en el sistema y esto es por el efecto de congelamiento de un plasma en un campo magnético o viceversa. Podemos pensar, entonces, que dicho campo magnético tiende a inhibir a la inestabilidad tratando de llevar al sistema perturbado a un estado de equilibrio.

Caso iii).- Ecuaciones de perturbación con campo magnético perpendicular a la interfase en la inestabilidad Kelvin-Helmholtz.

Analizemos ahora el caso en que la dirección del campo magnético es transversal al movimiento relativo de los fluidos, ver Fig.9.

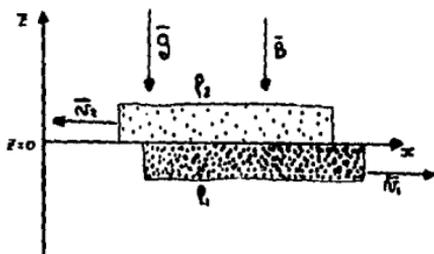


Fig.9

Las ecuaciones que describen la perturbación se obtienen, de nueva cuenta, de las ecuaciones MHD y del método de modos normales. Haciendo un tratamiento por componentes a primer orden y

sustituyendo las relaciones obtenidas unas en otras para reducir el número de ecuaciones y obtener una sola relación en términos de una sola variable, como ya se ha hecho anteriormente, obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{d}{dz} \left(\rho_0 (W + K_x v_0) \frac{dv_x}{dz} - \rho_0 K_x \left(\frac{dv_0}{dz} \right) v_x \right) = K^2 \rho_0 (W + K_x v_0) v_x$$

$$+ K_y B_0 \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{dv_x/dz}{W + K_x v_0} \right) - \frac{K^2 v_x}{W + K_x v_0} \right\} - K_x K_y B_0 \frac{d}{dz} \left\{ \frac{dv_0/dz}{(W + K_x v_0)^2} v_x \right\}$$

$$+ \frac{g K^2 [d \rho_0 / dz]}{W + K_x v_0} v_x \quad (3.79)$$

Podemos observar que esta relación (3.79) se reduce a la relación (3.61) de la sección III.3.1 cuando $\bar{K}_y = 0$, es decir, se reduce al caso hidrodinámico. Esto puede ser ya que podemos escoger de manera arbitraria la dirección del vector de propagación.

Conclusión

Podemos entonces concluir que, en este caso, el desarrollo de la inestabilidad Kelvin-Helmholtz no se va a ver afectado por la presencia de un campo magnético perpendicular a la interfase.

Las inestabilidades que se acaban de analizar en este capítulo, en particular la inestabilidad Kelvin-Helmholtz, nos va a permitir

más adelante en el trabajo de esta tesis, usarla como base para un análisis en una región del Sol llamada casco coronal. El motivo por el cual se abordó primeramente la inestabilidad Rayleigh-Taylor fué para tener una idea del aspecto de una inestabilidad en un sistema quieto y a partir de ella conciderar el efecto que tendría este mismo sistema con una cierta velocidad relativa. Podemos pensar que en la atmósfera del Sol se pueden llevar a cabo dichas inestabilidades por tratarse de un plasma sumergido en el campo magnético solar y que la dinámica que se desarrolla nos puede permitir hacer un análisis de tal naturaleza. De hecho se va a partir de un trabajo realizado previamente por G. Pneuman y R. Kopp en la estructura de casco coronal en el que consideran un movimiento relativo de plasma y con base en ese resultado obtenido regresaremos a este capítulo III para citar la inestabilidad Kelvin-Helmholtz y aplicar este criterio a dicha estructura coronal.

Sólo mencionaré que se pueden hallar otras formas de inestabilidades más complejas que las anteriores ya que en ellas se toman en cuenta factores muy importantes como tensiones superficiales, viscosidad, efectos de rotación etc. que a final de cuentas son de suma importancia para un mejor entendimiento de la inestabilidad. Pero las ecuaciones obtenidas son más complejas de resolver de manera analítica por lo que se tendrá que recurrir a métodos numéricos.

CAPITULO IV

APLICACIONES DE LA INESTABILIDAD KELVIN-HELMHOLTZ AL PUNTO NEUTRO DE UNA CONDENSACION DE CASCO

IV.1.- Características del Sol.

En este último capítulo hacemos una aplicación de la Inestabilidad Kelvin-Helmholtz a una situación física en el contexto de la Corona Solar. En particular la aplicamos a las llamadas Condensaciones de Casco que son regiones de líneas de campo magnético abierto y cerrado. La estructura de líneas de campo magnético en esta región está compuesta por líneas de campo cerradas, por debajo de la estructura de casco coronal, y por encima se las líneas de campo magnético que se habren extensamente hacia el medio interplanetario reconvirtiéndose en algún otro lugar más alejado ver (Fig.6).

La aplicación de la Inestabilidad Kelvin-Helmholtz a estas estructuras se lleva a cabo en una región específica de la condensación de casco llamada punto neutro. Este punto neutro se encuentra en una hoja de corriente que divide a las regiones de campo magnético abierto y a las regiones de campo cerrado. El análisis del punto neutro se lleva a cabo para determinar bajo qué condiciones físicas del medio se

puede dar la inestabilidad antes mencionada.

El Sol es un cuerpo compuesto de plasma y campos magnéticos; tiene un interés muy especial para nosotros ya que constituye, en muchas maneras, el mejor laboratorio natural cercano que tenemos para estudiar al plasma. Sobre esta estrella podemos observar detalles de su atmósfera así como fenómenos electromagnéticos que constituyen en general la actividad solar (manchas, protuberancias, erupciones de protuberancias, ráfagas, eyecciones de masa coronal, etc.). Por ello, su estudio nos proporciona una herramienta muy útil para el estudio astrofísico en general.

Además representa el centro de numerosas interacciones con los planetas del sistema solar y constituye la fuente principal de luz y calor para la Tierra. Se define, además, el radio solar como R_{\odot} .

En la siguiente tabla I (Priest, 1981) se indican algunas de las características del Sol:

TABLA I Características Solares

Distancia media Sol-Tierra: 150×10^9 m (1 Unidad Astronómica)
Radio Solar: $R_0 = 6.96 \times 10^8$ m
Masa Solar: $M_0 = 2 \times 10^{33}$ g
Densidad media: 1.4 gr.cm^{-3} . Sus elementos principales son: Hidrógeno 92 % , 7.9 % de Helio y 0.1 % de otros elementos que se pueden considerar como impurezas.
Edad aproximada: 4.5×10^9 años
Gravedad: $g_0 = 274 \text{ m s}^{-2}$
Luminosidad: $L_0 = 3.86 \times 10^{33} \text{ ergs s}^{-1}$
Período promedio de Rotación: 27.4 días
Inclinación del plano ecuatorial del Sol con respecto a la eclíptica $7^\circ 25'$
Momento angular: $1.7 \times 10^{41} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$
Temperatura superficial (fotosfera): 5785 K

IV.2.- *Origen del Sol.*

Una de las teorías que más se aceptan sobre el origen del Sol es la que sugiere su formación por contracción gravitacional hace aproximadamente 5×10^9 años, a partir de una inmensa nube de polvo y gas hallada en el espacio interestelar. Posiblemente este material fué empujado por ondas de choque producidas por la explosión de alguna estrella cercana o quizá por mareas generadas por el paso de la nube a través de uno de los brazos espirales de nuestra galaxia.

Este proceso de contracción duró cientos de millones de años hasta que las grandes presiones producidas por todo el material sobre el interior de la nube generaron la cantidad de calor necesaria para que empezaran las primeras reacciones nucleares. La fuerza de presión equilibró entonces a la fuerza de atracción gravitacional y, en ese momento, nuestro Sol comenzó a nacer como estrella, consumiendo su propio material y generando su propia energía.

Nuestro Sol se encuentra formado por una serie de capas concéntricas con propiedades y características diferentes unas de otras. Comenzaremos por dar un esquema muy general de su interior el cual se encuentra diferenciado en tres zonas: núcleo, zona radiativa y zona convectiva. En su parte exterior encontramos cuatro capas también diferenciadas que son: fotosfera, cromósfera, región de transición y corona.

IV.3.- Interior Solar.

Núcleo. La energía, así como algunas partículas subatómicas, se generan en el interior del Sol. Cuando protones y neutrones, en el núcleo, son fusionados, se genera una gran cantidad de energía. Cada liberación de energía estará acompañada por un correspondiente decremento en la masa total del sistema. La equivalencia entre masa y energía se puede expresar por la relación: $E = M C^2$. El Sol genera su energía en el interior al fusionar núcleos de hidrógeno (protones) en núcleos de helio (dos protones y dos neutrones) mediante el siguiente proceso :



Esta reacción nos está indicando que cuatro núcleos de hidrógeno, al fusionarse, forman un núcleo de helio más la liberación de dos positrones y dos rayos gama. Las altas temperaturas que se generan en el núcleo, aproximadamente quince millones de grados centígrados, hacen posible la fusión, generando en cada reacción radiación electromagnética principalmente en forma de rayos gama energéticos y rayos X.

Esta radiación al difundirse a regiones externas más frías va degradándose en radiación de más baja energía que corresponde, ya en la superficie solar, al visible. La dimensión aproximada de este núcleo es de dos décimas del radio solar ver (Fig.1).

Zona radiativa. Se extiende desde dos décimas a aproximadamente seis u ocho décimas del radio solar. En esta capa los rayos gama provenientes del nucleo sufren absorciones y reemisiones en todas direcciones por el material, degradándose en rayos X. Debido a la gran densidad en esta región la radiación viaja pequeños intervalos de distancia antes de ser nuevamente absorbida. Es por esto que la energía se va difundiendo hacia afuera muy lentamente.

Zona Convectiva. Se extiende en las dos décimas del Ro restante. El gradiente de temperatura es tal en esta región que el transporte de energía se efectúa por una convección turbulenta del material del interior al exterior depositando su energía en la siguiente capa externa más fría. Las presiones y temperaturas son más bajas en esta región; de hecho, decaen suavemente hacia afuera.

La radiación, por lo tanto, en su sinuoso camino hacia la superficie, tarda aproximadamente diez millones de años en salir. En esta región el plasma es el que domina (con un parámetro beta mucho mayor que uno). Por lo tanto, en su movimiento hacia el exterior el plasma arrastra consigo a las líneas de campo magnético concentrándolas en la superficie.

Las figuras 1 y 2, muestran el interior del Sol con sus radios, temperaturas, presiones y luminosidad promedio respectivamente:

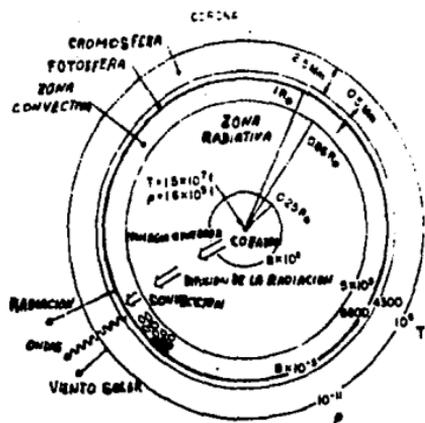


Fig.1 Estructura del Sol indicando los radios de las diferentes regiones así como sus densidades (en Kg. m^{-3}).

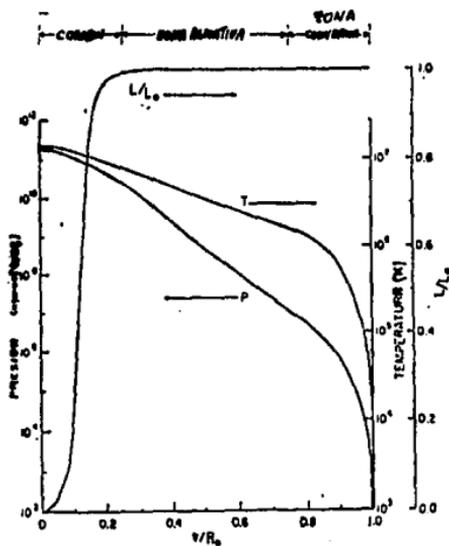


Fig.2. Las variaciones de la luminosidad, temperatura y presión en el interior del Sol.

IV.3. - Capas Externas.

Fotósfera. Es la capa más profunda de la atmósfera solar. Su densidad promedio es de aproximadamente un diezmillésimo de la del aire al nivel del mar y su presión es un décimo de la terrestre al nivel del mar. Es la capa que emite principalmente en luz visible, aunque emite también en otras longitudes de onda como son radio, ultra violeta y rayos X. Su luz tarda aproximadamente ocho minutos en llegar a la Tierra y su espectro continuo tiene la forma aproximada de un cuerpo negro a $5,900\text{ K}^\circ$. En la siguiente figura, fig.3, podemos comparar la radiación de un cuerpo negro a diferentes temperaturas con la radiación emitida por el Sol.

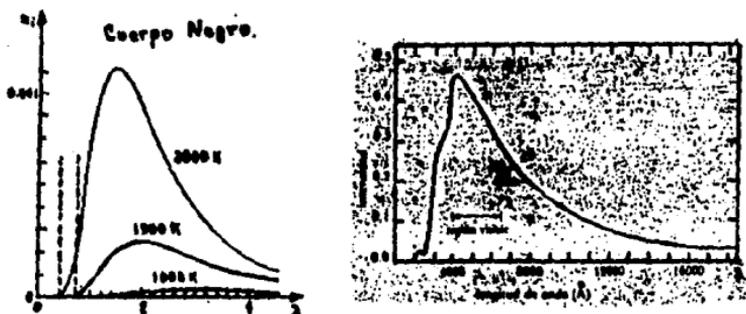


Fig.3. Variación de la densidad espectral de un cuerpo negro a diferentes temperaturas con relación al espectro de emisión del Sol.

En la emisión de la fotosfera se notan líneas oscuras llamadas de Fraunhofer, las cuales sirven para identificar algunos de sus elementos constitutivos como hidrógeno, sodio, fierro y calcio. Su temperatura disminuye de 8,500 °K en su base a 4,500 °K en la parte superior. Observando por telescopio, la superficie presenta pequeñas regiones brillante llamadas " gránulos "; éstos poseen diámetros de 700 a 1,500 Km., con tiempos de vida de 10 minutos. Existen también gránulos de mayor tamaño (super gránulos) alcanzando diámetros de 30,000 Km. y tiempos de vida de 24 hrs. Estas estructuras son las partes superiores de las celdas de la zona convectiva. Quizá la característica más notable de la fotosfera sean las llamadas " manchas " con temperaturas promedio de 4,000°K. Son enormes regiones oscuras que tienen una variación en su número cada 11 años. Aparecen en latitudes de \pm 30 grados. Estas manchas solares no son más que regiones de intenso campo magnético, de miles de Gauss, que inhibe la temperatura del medio. Los campos magnéticos del Sol que se extienden hacia el espacio nacen precisamente en esta capa sobre regiones de campo magnético bipolar. Aquí el parámetro beta, que relaciona gas y campo magnético, es mayor que uno lo que significa un dominio del gas sobre el campo magnético.

Cromósfera. Puede ser observada durante un eclipse de Sol o artificialmente, por un espectroheliógrafo, como un anillo emitiendo en una coloración rojiza. En ella se pueden notar grandes

protuberancias como flamas disparadas desde su superficie y brillantes jets de plasma llamados espículas. Posee un grosor de 1000 a 8000 Km. En su parte inferior la temperatura es de unos 4,000°K y en los primeros 3000 Km. dicha temperatura comienza a subir rápidamente hasta alcanzar un valor de 8,500 °K alrededor de los 1500 Km. (ver fig.5). Emite sobre todo en longitud de onda $\lambda = 6563 \text{ \AA}$ de la línea H α del H. Su característica importante es que su parámetro beta es aproximadamente uno, es decir, en esta región ni el gas ni el campo magnético dominan.

Region de Transición. Esta región es la más pequeña en dimensión de la atmosfera solar. Se halla sobre la cromósfera y es más caliente que ésta. Se observa en el ultravioleta. Posiblemente esta región constituye el punto donde la corona comienza a calentarse.

Corona. Esta capa es la más externa y extensa de todas. Mediante coronógrafos, cohetes y satélites espaciales se ha llegado a detectar hasta una extensión de 11 a 13 radios solares aproximadamente. Su densidad baja a 10^8 partículas por centímetro cúbico a unos 2000 km. de altura sobre la fotosfera, lo cuál es un cienmillonésimo de la densidad atmosférica terrestre. Su tenue brillo aperlado se debe a la dispersión de la luz por los electrones en ella. En esta capa se da un efecto muy interesante para todos los astrofísicos, ya que su temperatura aumenta considerablemente hasta cerca de $2 \times 10^6 \text{ K}^\circ$, respecto a la fotosfera. El mecanismo por el cual esta región se

callenta no ha sido bien comprendido, lo que motiva que se elaboren modelos que puedan explicar un modo disipativo de energía. En esta capa pueden observarse estructuras muy interesantes, tales como las condensaciones de casco: regiones de campo magnético cerrado y abierto. Estas configuraciones dan a la corona la apariencia de pétalos de dalia. Asimismo se pueden observar configuraciones de campo magnético cerrado en arcos o en forma de rizo que alcanzan alturas considerables y mantienen al plasma confinado. Se observan también estructuras tales como los hoyos coronales que permiten al plasma escapar por sus líneas de campo abiertas. En la corona las fuerzas de presión dominan sobre la gravedad produciendo con ello que el material escape hacia el espacio exterior dando origen al llamado viento solar. El parámetro beta es menor que uno para la parte de la corona que está cercana a la región de transición. En las figuras 4 y 5 se muestran las capas de la atmósfera del Sol así como la variación de la temperatura con respecto a la altura respectivamente.

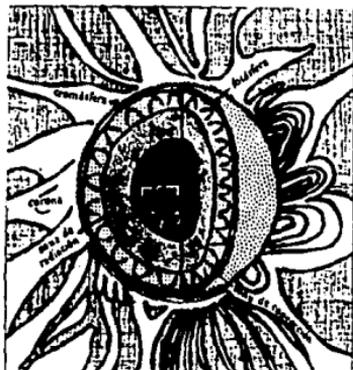


Fig. 4. Las capas del Sol son estructuras no homogéneas sobrepuestas.

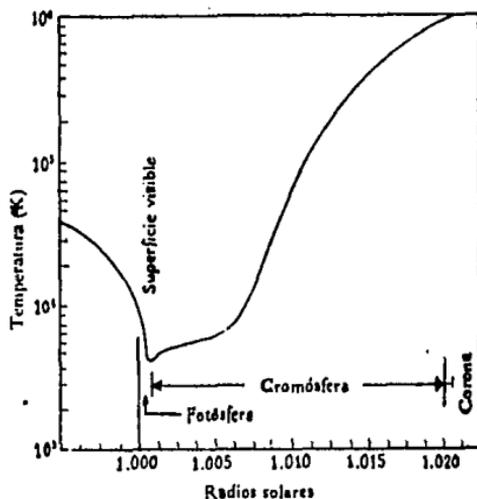


Fig.5. La temperatura del Sol disminuye hacia la superficie y ahí vuelve a aumentar considerablemente.

IV.4.- El punto neutro en la Condensación de Casco.

Los efectos de la actividad solar viajan a través del medio interplanetario y llegan a nuestro planeta produciendo lo que se denomina actividad geomagnética.

Hoy en día se considera que la causa solar primaria de estas perturbaciones geomagnéticas son las llamadas Eyecciones Coronales de Masa (Harrison , 1990). Recientemente se ha visto que dichas eyecciones se generan principalmente en las condensaciones de casco que se forman en el ecuador magnético solar (Mendoza y Perez Enrriquez, 1993). Es por

esto que es actualmente de gran interés estudiar estas estructuras solares.

En las estructuras de casco coronal es evidente, de las fotografías durante los eclipses ver (Fig.6), y



Fig.6. Fotografía de un eclipse en Junio de 1993.

de los datos obtenidos por satélites, que las interacciones del campo magnético con el gas son muy importantes para determinar la estructura y propiedades dinámicas de la corona solar y del medio interplanetario. Cerca del Sol, en regiones de campo intenso, el gas coronal puede ser

contenido dentro de estructuras de arcos cerrados. Conforme el campo decrece hacia afuera rápidamente, la presión y las fuerzas inerciales del viento solar eventualmente dominan y extienden el campo hacia el espacio interplanetario. La geometría y el estado dinámico son determinados por una interacción compleja de fuerzas gravitacionales, magnéticas y presiones inerciales. Al tipo de configuración llamado condensación de casco, el cual yace encima de grandes regiones magnéticas bipolares sobre el Sol, se le asocia un punto neutral y una hoja de corriente. La física relevante puede ser entendida con la ayuda de geometrías simples. La fig.7 muestra un diagrama esquemático de una estructura de casco coronal:

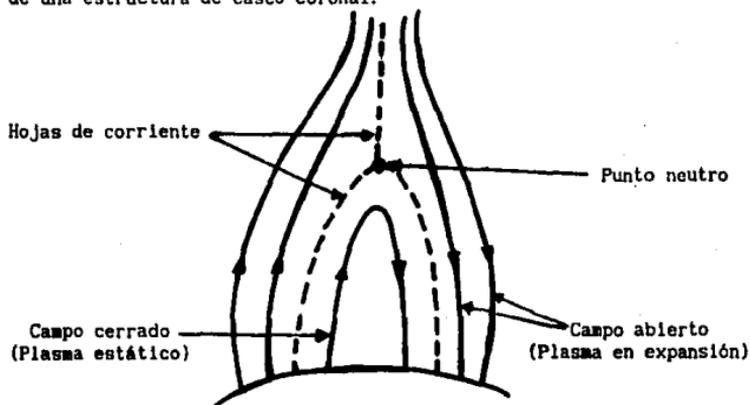


Fig.7 Esquema de una estructura de casco coronal.

Nuestro principal interés en estas estructuras es el punto neutral, el cual ocurre en la intersección de la cima del campo

magnético cerrado con las hojas de corriente, que se encuentra debajo y encima respectivamente del punto neutral. Para ello recurriremos a trabajos previamente elaborados sobre estructuras de campo magnético asociadas con flujos coronales (Sturrock y Smith, 1968) y a interacciones del campo magnético con el gas en la corona solar (Pneuman y Kopp, 1971). En ambos trabajos se discuten las configuraciones de campo magnético en la vecindad del punto neutro que son teóricamente de tres tipos las cuales se van a mencionar y analizar más adelante en este capítulo. Cabe mencionar que el trabajo desarrollado por Pneuman y Kopp se concretó al cálculo de la velocidad en la región del punto neutro lo cual va a servir de base para la aplicación del criterio de inestabilidad Kelvin-Helmholtz. Por tanto, el trabajo esencial de esta tesis es el de estudiar si esta región del punto neutro es una región de inestabilidad para el plasma, partiendo de un conocimiento de la velocidad en el punto neutro.

Discutiremos primeramente las propiedades de las regiones abiertas y cerradas.

a). - *Región cerrada.*

Bajo condiciones coronales, el campo magnético está efectivamente congelado en el material. Supondremos que, en la región de líneas de campo cerrado, la expansión coronal no tiene lugar, y que el gas está en equilibrio con el campo magnetostático, estando dada la presión del

gas por la ecuación de equilibrio hidrostático aplicada a lo largo de las líneas de campo magnético.

b).-Región abierta.

En las regiones de líneas de campo magnético abiertas, tienen lugar la expansión y conducción de calor hacia el exterior. Esto origina una pérdida de energía y causa que la temperatura decline hacia el exterior. Existe una hoja de corriente entre las regiones de polaridad magnética opuesta sobre el punto neutral. Similarmente son necesarias corrientes superficiales entre las regiones abiertas y cerradas debajo del punto neutral. La existencia de esta hoja de corriente se debe a la discontinuidad de la presión magnética debida a su vez a la diferencia de presiones del gas entre la región cerrada y la abierta. La presión total, presión del gas más la presión magnética es:

$$p = p_m + p_g = 2n_e k T + \frac{B^2}{8\pi} \quad (4.1)$$

donde la presión p debe ser continua entre las dos regiones, así que se requiere un salto en la intensidad del campo magnético para balancear la diferencia de presiones del gas. Este salto en la intensidad del campo está asociado, en el límite de la conductividad eléctrica infinita, con una hoja de corriente. La densidad de esta hoja puede depender no solamente de la conductividad eléctrica, debido a la discontinuidad en la intensidad del campo magnético, sino también de la viscosidad, ya

que la velocidad presenta gradientes.

IV.4.1.- Configuraciones de campo magnético en la región del punto neutro.

Teóricamente la configuración del campo, puede ser de tres tipos: " Y ", " T " y de " cúspide " (Sturrock y Smith, 1968).

Llamemos P_g a la presión del gas y P_m a la presión del campo magnético. Los subíndices (a y c) nos van a indicar las regiones abiertas y cerradas, respectivamente. El tipo de configuración depende de la razón de presiones del gas entre las regiones abierta y cerrada. Por lo tanto, analicemos las condiciones que sobre esta razón imponen cada una de las configuraciones del campo magnético.

a).- Configuración del campo tipo Y. Si $p_{gc} = p_{ga}$, la presión del gas no tendrá ningún efecto sobre la configuración del campo magnético. En este caso, el campo magnético desaparece cuando se aproxima al punto neutro en todas las direcciones y el salto de la presión entre las regiones abiertas y cerradas no podrá ser balanceado. Dicha configuración del campo magnético se muestra en la fig.8.

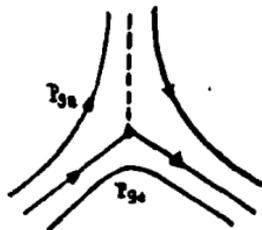


Fig.8 Configuración tipo Y

sin embargo $p_{gc} = p_{ga}$ no es consistente con las observaciones que se obtienen para la condensación de casco.

b).- Configuración del campo tipo T invertida. Si $p_{gc} < p_{ga}$, la presión del campo magnético en la región cerrada debe de ser más grande que en las abiertas. Entonces P_{mc} , que es la presión magnética en la región cerrada, deberá ser finita donde sea, lo que indica que la curvatura del campo debe ser finita. La configuración resultante se ve en la Fig.9.

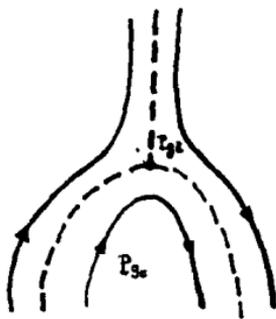


Fig.9 configuración tipo T

En el punto neutral del tipo T invertida, el campo desaparece en la región abierta pero no en la región cerrada y el salto en el campo magnético es de signo opuesto. Este tipo de configuración no es consistente con las observaciones de la razón de las presiones del gas en las regiones cerrada y abierta de una condensación de casco coronal.

c).- Configuración del campo tipo cúspide. Si $p_{gc} > p_{ga}$, entonces la presión magnética de las líneas de campo abiertas debe exceder a la

presión magnética de las líneas de campo cerradas. En esta estructura, el campo magnético se va aproximando a cero hacia el punto neutral por dentro, pero éste no desaparece en la región de campo abierto. Dicha configuración se ve en la fig.10.

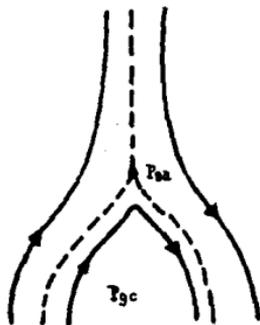


Fig.10 Configuración de cúspide.

Este último caso sí es consistente con las observaciones realizadas para el casco coronal por lo que tomaremos este tipo de punto neutro para llevar a cabo nuestro estudio.

La condición que debe cumplirse en el punto de tipo cúspide (Pneuman y Kopp, 1971), matemáticamente, es:

$$p_{0c} = p_{0a} + \frac{B_a^2}{8\pi} \quad (4.2)$$

Se derivará, además, otra propiedad interesante del punto neutro. Se usarán las expresiones ya conocidas de conservación de masa y de momento a lo largo de la línea de campo en la siguiente forma:

$$\frac{\partial (nvS)}{\partial l} = 0 \quad (4.3)$$

$$m n v \frac{\partial v}{\partial l} = - \frac{\partial p}{\partial l} - \frac{G M_0 m}{r^2} n \cos \alpha \quad (4.4)$$

En la ecuación (4.3) la parte temporal no aparece ya que estamos considerando un sistema estacionario. S es la sección transversal de un tubo de flujo, l es la longitud del arco a lo largo de la línea de campo, n la densidad de partículas, \bar{v} la velocidad de expansión, p la presión del gas, G la constante gravitacional, M_0 la masa solar, m la masa promedio de la partícula, \bar{r} la distancia radial del centro del sol a algún punto sobre la corona y α es el ángulo entre las líneas de flujo y el radio vector. El término $\bar{J} \times \bar{B}$ que es perpendicular a B, el campo magnético, no aparece explícitamente en la ecuación (4.4) ya que precisamente en el punto neutro el campo magnético es cero. Hasta ahora tenemos un sistema de ecuaciones no cerrado: 3 ecuaciones y 4 incógnitas. Por lo tanto usaremos otra relación que es la de presión térmica dada por:

$$p = n k T \quad (4.5)$$

donde T es la temperatura y k la constante de Boltzmann. Con esta relación tenemos un sistema de ecuaciones cerrado que ya podemos resolver. Despejando n de (4.5) y sustituyendo en (4.3) y (4.4) tenemos:

$$\frac{\partial (p v S / k T)}{\partial l} = 0 \quad (4.6)$$

$$m \frac{p v}{k T} \frac{\partial v}{\partial l} = - \frac{\partial p}{\partial l} - \frac{G M_0 m}{r^2} \left(\frac{p}{k T} \right) \cos \alpha \quad (4.7)$$

Tomando a T como constante e integrando las expresiones (4.6) y (4.7) a lo largo de las líneas de campo desde un nivel de referencia \bar{r}_0 tenemos:

$$\int_{r_0}^r \frac{\partial (p v S / k T)}{\partial l} dl = 0 \quad (4.8)$$

$$\int_{r_0}^r v \partial v = - \frac{k T}{m} \int_{r_0}^r \frac{\partial p}{p} - G M_0 \int_{r_0}^r \frac{\cos \alpha}{r^2} dl \quad (4.9)$$

donde, aplicando el teorema fundamental del cálculo y tomando en cuenta que $\cos \alpha \partial l = dr$ tenemos:

$$p v S = p_0 v_0 S_0 \quad (4.10)$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} + \frac{k T}{m} \left[\ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \right] + \frac{G M_0}{r_0} \left[1 - \frac{r_0}{r} \right] = 0 \quad (4.11)$$

p_0, v_0, S_0 , denotan la presión, velocidad y sección transversal, respectivamente, en el nivel de referencia \bar{r}_0 . La relación (4.10) se

mantiene siempre constante para cualquier combinación de valores de p, v, S .

Consideremos además, para el análisis del punto neutro, los intervalos de valores promedio observados de \bar{B} , \bar{v} , y ρ para la condensación de casco (Priest, 1981) en las regiones abierta y cerrada que se muestran en la siguiente tabla II:

Tabla II

	REGION CERRADA	REGION ABIERTA
B (Gauss)	50	1
n (# parti. / cm ³)	10 ⁹	10 ⁸
v (Km / seg.)	< 10	50

Tomemos ahora la relación (4.11) y hagamos una evaluación de la presión en el punto neutro para ambas regiones (cerrada y abierta):

a).- Región cerrada. En este caso podemos suponer que se trata de un sistema estático, $\bar{v} = 0$. Entonces despejando p_{gc} , la relación (4.11), queda:

$$p_{gc}(r) = p_0 \exp \left[- \frac{m M_0 G}{r_0 k T} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \right] \quad (4.12)$$

Haciendo la evaluación en la distancia radial al punto neutro, denotado como \bar{r}_n , (4.12) queda como sigue:

$$p_{gc}(r_n) = p_0 \exp \left[- \frac{m M_0 G}{r_0 k T} \left(1 - \frac{r_0}{r_n} \right) \right] \quad (4.13)$$

b).- Región abierta. Aquí vamos a considerar que el material se mueve aproximadamente paralelo a las líneas de campo magnético, por lo que $\bar{v} \neq 0$. Entonces la relación (4.11) queda, despejando p_{ga} y evaluándola a la distancia radial $\bar{r} = \bar{r}_n$, como sigue:

$$p_{ga}(r_n) = p_0 \exp \left[- \frac{G M_0 m}{r_0 k T} \left(1 - \frac{r_0}{r_n} \right) + \frac{m (v_0^2 - v_n^2)}{2 k T} \right] \quad (4.14)$$

donde \bar{v}_n es la velocidad en el punto neutro. Tomando la relación (4.2) y usando (4.13) y (4.14) tenemos una única ecuación siguiente:

$$p_{gc} - p_{ga} = p_{ga} \left[\exp \left(\frac{(v_n^2 - v_0^2)}{v_s^2} \right) - 1 \right] = \frac{B_a^2}{8 \pi} \quad (4.15)$$

Tomemos ahora la relación (4.15) para la región abierta, y hagamos un análisis por casos de la siguiente manera. Definimos a $[m/2 kT]^{1/2} = (v_s^2)^{-1}$ como el inverso de la velocidad del sonido. Por lo tanto:

Caso 1) $v_n \ll v_a$. El punto neutro tipo cúspide está a cierta distancia sobre la superficie del Sol, pero por abajo del punto donde el material adquiere la velocidad del sonido, además suponemos que \bar{v}_0 es muy pequeña en relación a \bar{v}_n , pues es la velocidad del viento solar en la base de la corona, entonces:

$$v_0^2 \ll v_n^2 \ll 2 k T / m_p \quad (4.16)$$

Haciendo una expansión de la exponencial y despreciando los términos de segundo orden por ser estos muy pequeños y no tener una contribución apreciable comparados con la razón de velocidades, la relación (4.15) se reduce a:

$$\frac{B_n^2}{8 \pi} = p_{gs} \left(\frac{m v_n^2}{2 k T} \right) \quad (4.17)$$

Despejando ahora \bar{v}_n tomando en cuenta que $p_{gs} = n_a k T$, obtenemos:

$$v_n^2 = \frac{B_n^2}{4 \pi m n_a} = v_a^2 \quad (4.18)$$

donde n_a es la densidad en la región abierta del flujo y v_a es la velocidad local de Alfvén en el punto neutro. Esto es, para la expansión justamente fuera de la región cerrada, la transformación de una velocidad subalfvénica a una superalfvénica ocurre en el punto neutral.

Sabemos que la velocidad en el punto neutro es la velocidad de Alfvén. Este es el resultado al que llegaron Pneuman y Kopp.

La contribución que se hace en esta tesis al trabajo desarrollado previamente es el de analizar si la región del punto neutro es una región de inestabilidad aplicando el criterio de Kelvin-Helmholtz, relación (3.78) de la sección III.3.1 capítulo III. En la siguiente sección se lleva a cabo el análisis correspondiente.

IV.4.2.- Inestabilidad Kelvin-Helmholtz en la región del punto neutro.

Supongamos que el plasma en la región de campo magnético cerrado en la estructura de casco coronal es un sistema estático ($\bar{v}_c = 0$) y que el plasma en la región de líneas de campo magnético abierta es un sistema dinámico ($\bar{v}_a \neq 0$). Podemos suponer, entonces, que se trata de dos plasmas en movimiento relativo uno respecto del otro, con una dirección de campo magnético paralela al flujo. Entonces, aplicando el criterio de inestabilidad Kelvin-Helmholtz (K-H) para un campo paralelo al flujo, podemos saber si esta región puede ser considerada como una región de inestabilidad. Usando la relación (3.78) tenemos lo siguiente:

$$\frac{B^2}{4\pi} < (v_1 - v_2)^2 \alpha_1 \alpha_2 (\rho_1 + \rho_2) \quad (4.19)$$

Indicaremos con los subíndices 1 y 2 a las regiones abierta y cerrada respectivamente, y supondremos que el campo magnético de la relación (4.19) es el correspondiente a la región abierta. Esto es válido por la suposición que se hizo al hacer el análisis para la estructura de tipo cúspide, donde el campo magnético en el exterior no se anula. Por lo tanto, la relación (4.19) puede ser expresada como sigue:

$$\frac{B_0^2}{4\pi} < (v_a - v_c)^2 \frac{\rho_a \rho_c}{(\rho_a + \rho_c)^2} (\rho_a + \rho_c) \quad (4.20)$$

Rearreglando tenemos:

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi \mu m_p n_a} < \frac{(v_a - v_c)^2}{1 + b} \quad (4.21)$$

donde ρ_a la expresamos como $\mu m_p n_a$, con μ el peso molecular medio = 0.61. El término b representa la razón de densidades (n_a/n_c) y m_p es la masa del protón.

Como $n_a < n_c$, de la tabla II vemos que el valor de b está en el siguiente intervalo:

$$0.1 < b < 1 \quad (4.22)$$

Entonces, usando la relación (4.21) y suponiendo \bar{v}_c despreciable tenemos:

$$v_A^2 < \frac{v_A^2}{1 + b} \quad (4.23)$$

Ahora bien, el valor de la velocidad \bar{v}_a en el punto neutro es \bar{v}_n ($\bar{v}_a = \bar{v}_n$). Por lo tanto, como $v_n = v_a$, por (4.18), entonces de la relación (4.22) podemos ver que:

$$v_A^2 < \frac{v_A^2}{1 + b} \quad (4.24)$$

eliminando v_a tenemos lo siguiente:

$$1 < \frac{1}{1 + b} \quad (4.25)$$

Pero, según esto, $b < 0$, lo cual por (4.22) no puede ser. Por lo tanto, no se cumple el criterio de inestabilidad Kelvin-Helmholtz en este caso.

Conclusión

Podemos decir que para $v_n = v_a \ll v_e$ no hay inestabilidad en la región del punto neutro.

Caso 2). - $v_n = v_a$. Si el punto tipo cúspide está en el punto donde el material adquiere la velocidad del sonido entonces tenemos, de la relación (4.15), lo siguiente:

$$\frac{B_a^2}{8 \pi} = p_{ga} \left[\exp \left(\frac{v_n^2}{v_a^2} \right) - 1 \right] \quad (4.26)$$

Aquí el término $\frac{v_n^2}{v_a^2} = 1$ y, por lo tanto, la $\exp(1) = 2.71$. Entonces:

$$\frac{B_a^2}{8 \pi} = p_{ga} [2.71 - 1] = p_{ga} [1.71] \quad (4.27)$$

Sabiendo ahora que $p_{ga} = n_a k T$ sustituyamos en (4.27) y, haciendo algunos arreglos, tenemos:

$$\frac{B_a^2}{4 \pi} = 2 n_a k T [1.71] \quad (4.28)$$

Si dividimos y multiplicamos por ρ_a a la relación (4.28) obtenemos:

$$\frac{B_a^2}{4 \pi \rho_a} = \frac{2 n_a k T}{\rho_a} [1.71] \quad (4.29)$$

en donde por definición sabemos que:

$$v_A^2 = \frac{B_a^2}{4 \pi \rho_a} \quad \text{y} \quad v_s^2 = \frac{2 k T}{m_p} = \frac{2 n_a k T}{\rho_a} \quad (4.30)$$

Por lo tanto:

$$v_A^2 = 2 v_s^2 [1.71] \quad (4.31)$$

Podemos observar en la relación (4.31) que la velocidad del sonido es muy cercana a la velocidad de Alfvén.

Ahora, usando la relación (4.21), para v_c despreciable, tenemos:

$$v_A^2 < \frac{v_s^2}{1 + b} \quad (4.32)$$

para v_s muy próxima a v_n ($v_s = v_n$). Entonces:

$$v_A^2 < \frac{v_n^2}{1 + b} \quad (4.33)$$

Pero como $v_n = v_s$ entonces, despejando v_s de (4.30) y sustituyendo en (4.32), tenemos:

$$v_A^2 < \frac{v_A^2}{2[1.71]} \frac{1}{(1 + b)} \quad (4.34)$$

eliminado v_s en la desigualdad nos queda:

$$1 < \frac{1}{2[1.71]} \frac{1}{(1 + b)} \quad (4.35)$$

De aquí podemos observar que los valores de b van a ser negativos, lo cual no puede ser posible por (4.22)

Conclusión

Para el caso de $v_n = v_s = v_A$ tampoco hay inestabilidad en la región del punto neutro.

Caso 3).- $v_n \gg v_s$. Si el punto tipo cúspide está sobre el punto donde el material adquiere velocidad supersónica entonces, de (4.15) tenemos:

$$\frac{B_n^2}{8 \pi} = p_{gs} \left[\exp \left(\frac{v_n^2}{v_s^2} \right) \right] \quad (4.36)$$

En este caso la exponencial tiene una forma creciente por lo que no podremos hacer una expansión de ella. Entoces, despejando v_n^2 de (4.36) y usando el logaritmo natural (ln), obtenemos:

$$v_n^2 = v_s^2 \ln \left[\frac{B_n^2}{8 \pi p_{gs}} \right] \quad (4.37)$$

donde, por definición:

$$p_{ms} = \frac{B_n^2}{8 \pi} \quad (4.38)$$

que es la presión magnética en la región abierta. Entonces, tenemos:

$$v_n^2 = v_s^2 \ln \left[\frac{p_{ms}}{p_{gs}} \right] \quad (4.39)$$

Usando la relación (4.39) en (4.21), que es el criterio de inestabilidad, tenemos, para $v_s = v_n$ y $v_c \approx 0$:

$$v_A^2 < \frac{\mu}{1 + b} v_s^2 \ln \left[\frac{p_{ms}}{p_{gs}} \right] \quad (4.40)$$

Ahora bien, a la relación (4.40) la vamos a escribir como sigue:

$$\frac{v_A^2}{v_s^2} < \frac{\mu}{1+b} \ln \left[\frac{\gamma B_0^2}{2 \rho_a v_s^2 4\pi} \right] \quad (4.41)$$

Hagamos el siguiente cambio de variable. Sea:

$$x = \frac{\gamma v_A^2}{2 v_s^2} \quad (4.42)$$

Esto implica que:

$$\frac{v_A^2}{v_s^2} = \frac{2x}{\gamma} \quad (4.43)$$

Si sustituimos (4.42) y (4.43) en (4.41) tenemos lo siguiente:

$$\frac{x}{\ln x} < \frac{\mu \gamma}{2(1+b)} \quad (4.44)$$

Ahora bien, la razón entre la variable x y su logaritmo es siempre mayor que uno, para cualquier valor de x . La razón del lado derecho de (4.44), cuando $\gamma = 5/3$ (caso adiabático con tres grados de libertad), $\mu = 0.60$ y $0.1 < b < 1$, es siempre menor que uno, lo cual implica una contradicción con la relación (4.44). De hecho, de la relación (4.44) se deduce que b tiene que tomar valores negativos, lo que físicamente no es posible.

Conclusión

Podemos entonces decir que para el caso $v_n \gg v_s$ tampoco va a existir la inestabilidad en la región del punto neutro.

IV.5.-Resultados

Al hacer el análisis de la inestabilidad Kelvin-Helmholtz en la región de punto neutro en la estructura de casco coronal se obtuvieron los resultados siguientes, analizando varios casos:

En el caso 1) $v_n \ll v_s$, se llegó a deducir que la velocidad en el punto neutro tiene la velocidad de Alfvén ($v_n = v_A$). Esto llevó a sugerir que para que exista una inestabilidad en la región del punto neutro, según la relación (3.77), la velocidad relativa en dicho punto tiene que ser mayor que la velocidad de Alfvén. De dicho análisis se obtuvo también que el parámetro b , que es la razón de densidades entre dos medios diferentes, es menor que cero ($b < 0$) lo cual es falso ya que los valores de la tabla II muestran que $b > 0$. Todo esto nos llevó a concluir que no hay inestabilidad en este caso para la región del punto neutro.

En el caso 2) $v_n = v_s$, se obtuvo que la velocidad en el punto neutro, que es la velocidad del sonido, es menor que la velocidad de Alfvén, lo que implica que, por la relación (3.77), el criterio de inestabilidad de Kelvin-Helmholtz no se cumple, ya que la velocidad

del plasma no es mayor que la de Alfvén. Por lo tanto, tampoco existe inestabilidad en este caso. Matemáticamente se observa que los valores de b son negativos y ello nos conduce a la inestabilidad, pero físicamente b no puede ser menor que cero puesto que no hay densidades negativas.

En el caso 3), donde $v_n \gg v_A$, se llegó a la conclusión de que tampoco se pudo dar la inestabilidad. Aquí la velocidad en el punto neutro no se pudo obtener de manera sencilla, pero el análisis hecho con el cambio de variable que se efectuó nos llevó a concluir que no se genera la inestabilidad por hallarse una contradicción con respecto a la relación (4.44).

IV.6.- Conclusiones.

Aplicamos el criterio de inestabilidad (K-H) para el caso de las estructuras de casco coronal, específicamente en la región del punto neutro. Para el caso 1) no encontramos la generación de la inestabilidad porque en esa región la velocidad del plasma es la velocidad de Alfvén. En el caso 2) se llegó a concluir que la velocidad en el punto neutro es menor que la velocidad de Alfvén por tanto tampoco se genera la inestabilidad. En el caso 3) se obtuvo una contradicción por hallarse valores negativos para b , siendo $b > 0$. Pero esa contradicción nos llevó a pensar que la relación (4.44) nos indicaba que la velocidad de Alfvén seguía siendo mayor que la

velocidad del punto neutro v_n cuando $v_n \gg v_s$, ya que de otra forma se hubiera llegado a una condición de la velocidad v_n en el punto neutro para la cual la inestabilidad se podría haber llevado a cabo.

Por lo tanto si dos plasmas en movimiento relativo tienen una velocidad igual o menor que la de Alfvén el criterio de Inestabilidad Kelvin-Helmholtz ya no es aplicable y en su caso tenemos un estabilidad. Esto mismo se pudo haber deducido directamente del criterio de inestabilidad (K-H) en el capítulo III, pero el análisis de un fenómeno físico real como lo son las estructuras de casco coronal nos llevó a la conclusión de que en la región del punto neutro no existe inestabilidad de plasma.

Sin embargo, existe un gradiente de velocidades perpendicular a a la hoja de neutra a partir del punto neutro. Si la velocidad en dicho punto es v_A , entonces en regiones aledañas al punto neutro la velocidad será mayor que v_A . Esto indica que habrá una región donde la velocidad cumpla con el criterio de inestabilidad K-H, siendo esta región todavía cercana a la hoja de corriente. La investigación de esta situación será objeto de un estudio completo posteriormente.

APENDICE A

RELACION DE BOLTZMANN PARA ELECTRONES

Usaremos la siguiente relación:

$$\frac{\nabla p}{p} = \gamma \frac{\nabla n}{n} \quad (1.1)$$

esta es una razón entre presiones y densidades, el término γ es la razón de calores específicos.

Usaremos la ecuación de transporte de momento con la componente de la velocidad y el campo eléctrico en la dirección de \bar{z} , y también supongamos variaciones de la presión a lo largo del mismo eje, entonces tendremos:

$$mn \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z \right] = q m E_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.2)$$

El término convectivo podrá ser despreciado por ser mucho más pequeño que el término $(\partial v_z / \partial t)$ por lo tanto la relación (1.2) quedará como sigue:

$$mn \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} \right] = q m E_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.3)$$

Supondremos, además, que v_z es espacialmente uniforme y usaremos la siguiente relación:

$$p = n K_B t \quad (1.4)$$

Usando la relación (1.1) y (1.4) en (1.3) tenemos:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = E \frac{q}{m} - \frac{\gamma K_B T}{m n} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (1.5)$$

Si tomamos el límite $m \rightarrow 0$ de la relación (1.5), tomando además $q = -e$ y $E = -\nabla \phi$, tenemos:

$$0 = e \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\gamma K_B T}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (1.6)$$

Asumiremos que tenemos electrones isotermales, por lo que $\gamma = 1$, entonces integrando (1.6) tenemos:

$$e \phi = K_B T_e \ln n + C \quad (1.7)$$

Tomando la exponencial en ambos lados de la relación (1.7) nos queda:

$$n = n_0 \exp \left[e \phi / K_B T_e \right] \quad (1.8)$$

Esto significa físicamente que los electrones, por ser muy ligeros, podrán ser acelerados a altas energías muy rápidamente si existe una fuerza neta sobre de ellos. Los electrones no podrán abandonar la región muy fácilmente dejando atrás a los iones sin que con ello se generen fuerzas electrostáticas y fuerzas debidas a los gradientes de presión sobre los electrones tratándolos, de llevar de nueva cuenta, a un estado de equilibrio. En la siguiente figura 1 se muestra la razón física de la relación de Boltzmann entre la densidad y el potencial en una densidad

local de plasma.

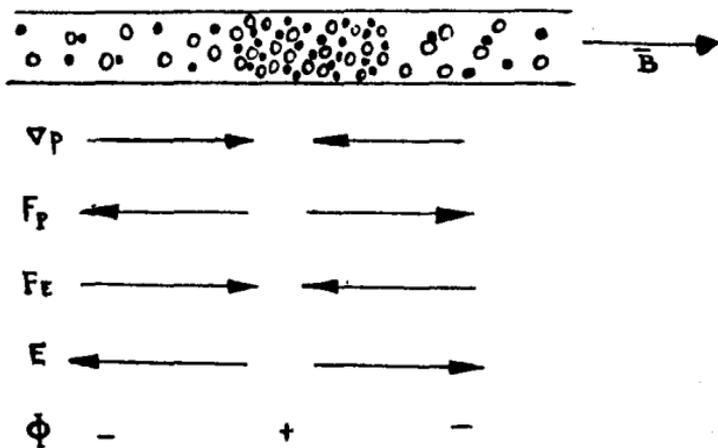


Fig. 1

APENDICE B

EXPRESION PARA LA LEY DE OHM

Partamos de la relación (2.33) que es la ecuación de transferencia de momento y apliquemosla por separado a cada una de las partículas (iones y electrones). Restándolas tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_i n_i U) + n_i m_i U \operatorname{div} U + \nabla P - n_i e [E + \frac{U \times B}{c}] = R \quad (2.1)$$

Usando ahora lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \nabla \quad (2.2)$$

y multiplicando por (q_i/m_i) y (q_e/m_e) por separado teniendo en cuenta que $(q_i = -q_e)$ en (2.1), tendremos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{q_i m_i n_i U_i}{m_i} + \frac{q_e m_e n_e U_e}{m_e} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[-P_i + P_e \right] - \frac{q_i n_i}{m_i} \left[E + \frac{U_i \times B}{c} \right] - \frac{q_e m_e}{m_e} \left[E + \frac{U_e \times B}{c} \right] = R \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_e} \right) q \quad (2.3)$$

Usando ahora las definiciones de la sección II.7 (2.36), (2.37) y (2.39) y tomando en cuenta que :

$$P_i \approx P_e \approx (P/2) \quad (2.4)$$

$$m_i \gg m_e \quad (2.5)$$

$$n_i \approx n_e \approx (N/2) \quad (2.6)$$

$$\bar{U}_i \approx \bar{U}_e \approx \bar{U} \quad (2.7)$$

tenemos:

$$\frac{d\bar{J}}{dt} - \frac{q}{2m_i} \nabla P - \frac{q\bar{E}\rho}{m_i m_e} - \left[\frac{q}{c} \left(\frac{n_i \bar{U}_i}{m_i} + \frac{n_e \bar{U}_e}{m_e} \right) \times \bar{B} \right] = \bar{R} \frac{q}{m_e} \quad (2.8)$$

Sumemos y restemos ahora $(n_e \bar{U}_e q / m_e c)$ al cuarto término del lado izquierdo de (2.8), entonces:

$$\frac{d\bar{J}}{dt} - \frac{q}{2m_i} \nabla P - \frac{q\bar{E}\rho}{m_i m_e} - \left\{ \frac{q}{c} \left(\frac{n_i m_e \bar{U}_i + n_e m_i \bar{U}_e}{m_i m_e} \right) + \left(\frac{n_e \bar{U}_e q}{c m_e} - \frac{n_e \bar{U}_e q}{c m_e} \right) \right\} \times \bar{B} =$$

$$\bar{R} \frac{q}{m_e} \quad (2.9)$$

reareglando la relación (2.9) tenemos:

$$\frac{d\bar{J}}{dt} - \nabla P \frac{q}{2m_e} - \frac{q\bar{E}\rho}{m_i m_e} - \frac{q\rho}{c m_i m_e} \bar{U} \times \bar{B} - \frac{q}{c m_e} \bar{J} \times \bar{B} = \bar{R} \frac{q}{m_e} \quad (2.10)$$

El siguiente paso que necesitamos para tener una ecuación consistente es escribir el término \bar{R} (transferencia de momento por colisiones) en términos de las variables del fluido. Como este término está relacionado con las velocidades azarosas de las partículas, entonces se postulará que este cambio de momento entre protones y electrones sea proporcional a sus velocidades medias relativas, es

veamos quién es σ , por lo tanto: $\{\partial J/\partial t\}$, ∇P y B son cero, entonces la relación (2.10) queda como sigue:

$$-\frac{q E}{m_e} = R \frac{q}{\sigma m_i} \quad (2.18)$$

sustituyendo (2.17) en (2.18) tenemos:

$$-\frac{q E}{m_i m_e} = -\frac{\rho q J}{\sigma m_i m_e} \quad (2.19)$$

entonces de (2.19) podemos darnos cuenta que:

$$\sigma = \frac{J}{E} \quad (2.20)$$

que será la conductividad eléctrica de la ley de Ohm, donde:

$$\sigma = \frac{n q}{m_e \nu_c} \quad (2.21)$$

entonces tenemos que (2.10) se reducirá a :

$$\frac{m_i m_e d J}{\rho q d t} = E + \frac{U \times B}{c} - \frac{m_i}{\rho q c} (J \times B) + \frac{m_i}{2 \rho q} \nabla P - \frac{J}{\sigma} \quad (2.22)$$

que es la ley de Ohm generalizada.

Si comparamos ahora las magnitudes de todos los términos de la relación (2.22) en el orden en que aparecen tendremos:

$$\left(\frac{w}{w_p}\right)^2 (c/U)^2 : 1 : 1 : \left(\frac{w}{w_p}\right) (R_e/w_p) (c/U)^2 : \left(\frac{w}{R_i}\right) (c_e/U)^2 :$$

veamos quién es σ , por lo tanto: $(\partial J/\partial t)$, ∇P y B son cero, entonces la relación (2.10) queda como sigue:

$$-\frac{q E}{m_e} = R \frac{q}{\sigma m_i} \quad (2.18)$$

sustituyendo (2.17) en (2.18) tenemos:

$$-\frac{q E}{m_i m_e} = -\frac{\rho q J}{\sigma m_i m_e} \quad (2.19)$$

entonces de (2.19) podemos darnos cuenta que:

$$\sigma = \frac{J}{E} \quad (2.20)$$

que será la conductividad eléctrica de la ley de Ohm, donde:

$$\sigma = \frac{n q}{m_e \nu_c} \quad (2.21)$$

entonces tenemos que (2.10) se reducir  a :

$$\frac{m_i m_e d J}{\rho q d t} = E + \frac{U \times B}{c} - \frac{m_i}{\rho q c} (J \times B) + \frac{m_i}{2 \rho q} \nabla P - \frac{J}{\sigma} \quad (2.22)$$

que es la ley de Ohm generalizada.

Si comparamos ahora las magnitudes de todos los términos de la relación (2.22) en el orden en que aparecen tendremos:

$$(w/w_p)^2 (c/U)^2 : 1 : 1 : (w/w_p) (\Omega_e/w_p) (c/U)^2 : (w/\Omega_i) (c_s/U)^2 :$$

$$: (w/w_p) (v_c/w_p) (c/U)^2 \quad (2.23)$$

donde:

$$\Omega_e = \frac{q_e B}{m_e c} \quad ; \quad \Omega_i = \frac{q_i B}{m_i c} \quad (2.24)$$

serán las frecuencias del ciclotrón,

$c_s \approx (P/\rho)^{1/2}$ será la velocidad del sonido

$\omega_p \approx \frac{4\pi n q^2}{m_e}$ será la frecuencia del plasma

$\nu_c \approx$ será la frecuencia de colisiones entre p y e

por lo tanto los términos en (2.22) podrán ser despreciados si w es tal que:

$$w/w_p \ll (U/c_s)^2 \quad (2.25)$$

El término de presión podrá ser despreciado si:

$$(w/\Omega_i) \ll (U/c_s)^2 \quad (2.26)$$

Si estas condiciones son satisfechas, entonces de la ley de ohm generalizada tendremos:

$$0 = E + \frac{U \times B}{c} - \frac{J}{\sigma} \quad (2.27)$$

que es la ley de Ohm en presencia de campos eléctricos y magnéticos.

P. Q. D.

APENDICE C

ANÁLISIS DIMENCIONAL DE LA LEY DE AMPERE

Partamos de la relación (2.55) que es la ley de Ampere:

$$\text{rot } B = \frac{4 \pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (3.1)$$

el segundo término del lado derecho lo podemos despreciar haciendo un análisis dimencional como sigue:

Sabemos que:

$$\text{rot } E = - \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \text{ haciendo el análisis dimencional}$$

respectivo tendremos:

$$\frac{E}{1} = \frac{B}{c t} \quad (3.2)$$

ahora : $\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E}{c t}$, entonces, $\frac{E}{c t} = \frac{B}{c^2 t^2} = \frac{B v^2}{c^2 l}$

por lo tanto:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{v^2}{c^2} \text{rot } B \quad (3.3)$$

si v es mucho menor que c ($v \ll c$) entonces ($v^2/c^2 \ll 1$), por lo tanto tendremos que la relación (3.3) será menor que 1, es decir,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \ll 1$$

por lo que no se tomará en cuenta este término.

P.Q.D.

REFERENCIAS

- Alfvén H. and Arrhenius G., Structure and Evolutionary History of the Solar System, United States of America, 1975, Publishing Company.
- Arfken G., Mathematical Methods for Physicists, United States of America, 1985. Academic Press.
- Bittencourt J.A., Fundamentals of Plasma Physics, Brazil, 1971, Institute for Space Research (INPE).
- Boley Forest I., Plasmas en el laboratorio y el Cosmos, México, 1968, Revertè, (Van Nostrand Momentum Books).
- Boyd T.J.M., Sanderson J.J., Plasma Dynamics, E.E.U.U., 1969, Thomas Nelson and Sons.
- Bravo S., Encuentro con una Estrella, México, 1987, La ciencia desde México.
- Burkepile J.T., A revised and Expanded Catalogue of Mass Ejections Observed by the Solar Maximum Mission Coronagraph, 1993, E.E.U.U.
- Chandrasekhar S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, E.E.U.U., 1981.
- Chen Francis F., Plasma Physics and Controlled Fusion, United States of America, 1984, Plenum Press, (vol. I).
- Dwight R. Nicholson, Introduction to plasma Theory, United States of America, 1983, Wiley.
- Krall Nicholas A. and Trivelpice Alvin W., Principles of Plasma Physics, Tokyo Japan, 1973, Mc. Graw Hill.
- Leontovich M.A., Reviews of Plasma Physics, E.E.U.U., 1967, Consultant Bureau.
- Linhart J.G., Plasma Physics, Amsterdam, 1960, North Holland.

Priest R. Eric, Geophysics and Astrophysics Monographs, 1981, London: Inghland, Vol. 21, An International Series of Fundamental Textbooks.

Reitz, Milford, Christy, Fundamentos de la Teoría Electromagnética, México, 1984, Fondo educativo Interamericano.

Rodolf K.M. Landshoff, The Plasma in a Magnetic Field, California States, 1958, Stanford University Press.

Smith M. Sheldon and Sturrock P.A., Physics of the Sun, E.E.U.U., 1968, vol.II.

Sheeley Jr. N.R. and Wang Y.M., Astrophysics, E.E.U.U., 1990.

Thompson, W.B., An Introduction to Plasma Physics, Massachusetts, 1964, Wesley.