5
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRIA Y FORMA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

JORGE L. ENRIQUEZ MEDINA

MEXICO, D.F.

1994

A MIS PADRES

Concepción Medina S. y Miguel Angel Enriquez V.

Mi profundo agradecimiento por su desmedido
apoyo y comprensión, para el cumplimiento
de mis ideales.

<u>A MI ESPOSA Y FUTUROS HIJOS</u>

Silvia Martínez N.

...

A MIS HERMANOS

José Luis Enriquez Medina

Rosa Isela Enriquez Medina

Graciela Enriquez Medina

Miguel Angel Enriquez Medina

Joel Enriquez Medina

A MIS MAESTROS

Rafael Martínez E.

Por su apoyo, comprensión y dirección
en el desarrollo del presente trabajo

. . .

A MIS AMIGOS

Luz del Alba Martinez y Emilio Belmares

. . .

I N D I C E

INTRODUCCION

DE LA GEOMETRIA

La palabra Geometría es de origen griego y significa medición de la tierra. Desarrollada hasta generar conceptos abstractos, también llegó a ser el arte y la ciencia de la descripción y la medida de relaciones espaciales. Existe un pasaje, citado a menudo, en los escritos del historiador griego Herodoto (485-425 a. de J.C.) y que trata de los orígenes de la geometría:

<<También dijeron que este rey [Sesostris] dividió la tierra entre todos los egipcios a fin de dar a cada uno un cuadrángulo de igual tamaño, con la intención de cobrar de cada cual la respectiva renta por medio de un impuesto que habría de ser recaudado anualmente.. Pero cada súbdito cuya porción fuera reducida por el paso del río, tenía que acudir al rey para notificarle lo ocurrido. Entonces éste mandaba a sus inspectores, que debían medir en cuánto se hubiera visto reducido el terreno, para que el propietario pudiera pagar sobre lo que quedara, en proporción al impuesto total. De esta forma, me parece, se originó la geometría.>> [1]

En la Edad Media la geometría fue considerada siempre como una de las siete artes liberales, que son la combinación del **trivium** (la gramática, la retórica y la dialéctica) y del **quadrivium** (la aritmética, la geometría, la astronomía y la música). Existe un libro, escrito por Casiodoro en el siglo VI d.C., que es una especie de enciclopedia de conocimientos profanos destinada a los monjes para mejor entendimiento de la Biblia. Este libro contiene una breve descripcion de las siete artes, y tanto laicos como religiosos se sirvieron extensamente de ella durante la Edad Media. El número **siete** siempre ha tenido asociaciones mágicas, considerándosele como la abstracción de un orden oculto en la naturaleza. Por ello, se decía, había 7 astros (Luna, Mercurio, Venus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno) girando alrededor de la Tierra, y siete orificios en el rostro humano. Casiodoro justifica la elección de sus siete materias esenciales con una cita bíblica: **La sabiduría ha constituido su Morada; la ha edificado sobre siete columnas.** Naturalmente, las diferentes artes no permanecieron estáticas, y el Renacimiento fue testigo de un gran florecimiento y enriquecimiento del quadrivium. La aritmética y la geometría, y más tarde el álgebra, formaron lo que serían con el tiempo las matemáticas, pero puede decirse que hasta hace muy poco no se había considerado a la geometría como integrante esencial de toda educación liberal, es decir, de toda educación que no fuera orientada plenamente hacia una profesión.

La geometría posee un gran interés histórico. Al hombre dedicado a la ciencia aplicada se le podría decir que la geometría es indispensable en el arte, la industria, la topografía, etc. Esto no significa que un mecánico o un topógrafo aplique los teoremas estudiados en Geometría de una manera directa, sino que las reglas y métodos que usa en su trabajo se deducen de las proposiciones geométricas.

Estas características hacen de la Geometría una ciencia y un arte, entendido éste último en su vieja excepción de no solo lo "que se hace, sino lo que se hace bien". Para muchos espíritus soñadores y estos han abundado a lo largo de los siglos que sucedieron a los griegos que no han profundizado en las sutilezas de la lógica matemática del siglo XX, la geometría forma el sistema más perfecto de lógica que se conoce, y para todo espíritu amante de la perfección y la belleza la geometría es objeto de constante atractivo práctico y estético. [2]

B I B L I O G R A F I A.

1 Dan Pedoe. *La Geometría en el Arte* Editorial Alianza, 1984. PP. 9-13.

2 Thompson. *Geometría* Editorial. Uteha, 1967. PP. 19-20.

CAPITULO I

NÚMEROS Y GEOMETRIA

El propósito de este capítulo no es examinar los descubrimientos de Pitágoras en el campo de las matemáticas, sino analizar el simbolismo que aplicó a los números, esto es, en qué forma el cosmos (según la escuela pitagórica) se parece al número, y cómo los números pueden interpretarse simbólicamente como creadores del universo.

El simbolismo está principalmente limitado al **diez**, debido a la peculiar perfección de ese número. La mayor parte de la humanidad contaba en **décadas**, debido no a razones fortuitas ni a que los hombres contaran primero con los dedos, que por casualidad son diez, sino porque consideraban que las leyes físicas de los números así lo exigían. Los pitagóricos estaban obsesionados con lo limitado y lo ilimitado, por lo que siempre llegaban a la conclusión de que los números más cercanos a la unidad y a lo limitado eran los más perfectos; por lo tanto, los números más allá de la línea del diez eran alejados del límite de todas las cosas. Así, se usaron números para denominar a ciertos dioses e ideas abstractas. Al no disponer de medios verbales para enunciar la idea de existencia inmaterial, se empleó el paradigma de los números para expresar la noción de sustancias independientes de los cuerpos. Le asignaron nombres sugerentes a las distintas ramas de las matemáticas y se desarrollaron demostraciones abstractas. Por eso, su estilo matemático les condujo a una concepción de la realidad que para los pitagóricos se convirtió en las "formas" o "ideas", que eran sustancias inmateriales, denominadas también números ideales. Su método matemático, se dice, contribuía a la purificación del alma, puesto que mostraba que el fundamento de la realidad era el número, el cual sería anterior a cualquier cuerpo tridimensional. El alma se purificaba contemplando las verdades matemáticas y dejando atrás los sentidos y el mundo físico, y pasando a la dimensión del pensamiento puro para relacionarse con los dioses. Los dioses se comparaban a los números porque eran puros y estaban libres de cambios materiales; poseían, además, una existencia independiente de la de los cuerpos tridimensionales, a los que se consideraba mortales y perecederos. Cuando la mente medita sobre los números se está comunicando con los dioses, de ahí la famosa doctrina de Pitágoras: parécete a un dios.

El simbolismo pitagórico de los **números** se empleaba tambien para explicar el origen del cosmos. Este simbolismo, en un primer momento, puede parecer absurdo a una mente moderna, pero para ponernos en contexto debe recordarse que gente como Platón lo tomó en serio, a pesar de que otros pensadores griegos lo ridiculizaron y parodiaron. Los pitagóricos creían que los números tenían vida separada y una existencia propia independiente del pensamiento de los hombres. La idea de la existencia independiente de los números- que el pensamiento humano sólo percibe, pero no crea- equivale a considerar que los numeros no son construcciones lógicas de la conciencia humana. Esta defendida postura es por algunos matemáticos modernos, pero cabe la pregunta de si las matemáticas es una forma de lógica humana, no necesariamente válida en todas las partes del universo. A pesar de parecer fantásticas, estas especulaciones dieron lugar a una teoría (*contemplación apasionada*, según su significado etimológico) que enseñaba a los hombres a pensar.

Para el pitagorismo, el cosmos físico, y por consiguiente todos los cuerpos tridimensionales, se formó a partir de los números. El **Uno** es el creador, el que produjo el movimiento original o **díada**, el **Dos**, es el que creó el primer número, el Tres es el símbolo del cosmos. El Tres también simbolizaba lo mismo que tres dimensiones. Los matemáticos pitagóricos no hicieron más especulaciones sobre otras dimensiones porque consideraban a los números divinos y a las matemáticas como un estudio de los dioses. El Uno simboliza también el punto geométrico, de manera que cuando dos puntos se unen, la línea resultante estaba simbolizada por la díada. Así, los números podían crear puntos en el espacio, luego líneas y planos y, finalmente cuerpos tridimensionales.

Hay algo endeble en esta teoría, y existen muchas razones para suponer que Pitágoras no la aceptó del todo. Si los puntos geométricos son unidades uniformes, tenemos dificultad para explicar los llamados números irracionales, mismos que no admiten la descripción en términos de un número determinado de unidades. Las dificultades que se supone encontraron los pitagóricos frente a la teoría de que el universo consistía de puntos geométricos, los presenta Farrington diciendo que:

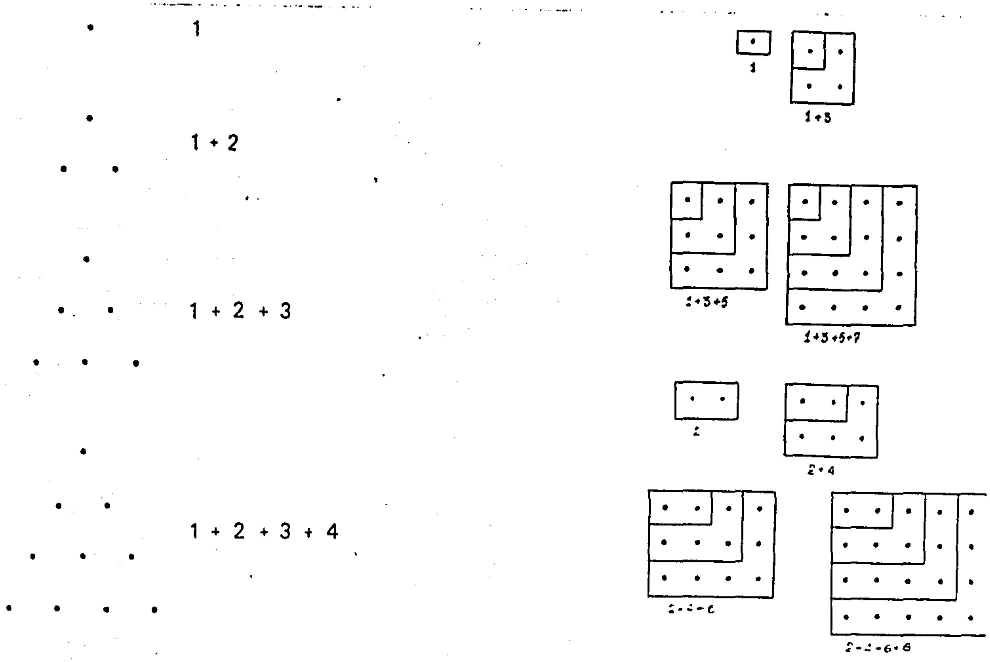
Entonces, debido al progreso de su propia ciencia matemática, la estructura de su universo se vino abajo de repente. Se descubrió que la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables. $\sqrt{2}$ es un número << irracional >>. El término surgió con ellos y muestra su sorpresa cuando ellos, que mantenían que número y razón son la misma cosa, encontraron que no podían expresar $\sqrt{2}$ con ningún número. Su confusión fue grande. Si la diagonal y el lado de un cuadrado eran inconmensurables se sigue que las líneas son infinitamente divisibles. Si las líneas son infinitamente divisibles, los pequeños puntos con que los pitagóricos construían su universo no existen. O, si existen, tienen que ser descritos en otros términos distintos a los puramente matemáticos.[1]

Es difícil creer que Pitagoras, que conocía cosas tales como los números perfectos, no conociera las cualidades "irracionales" del dos. La díada era el símbolo del infinito. Lo que parecería indicar que el cosmos imita hasta cierto punto a los números, pero éstos no llegan a ser el arquitecto.

El otro simbolismo pitagórico del número es menos complicado que estas divagaciones cósmicas. Pitágoras reconocía ciertas propiedades en cada uno de los números de la década, y por ellas cada uno se distinguía del resto. Con este análisis del número, Pitagoras pasa a ser el vínculo místico mediante el cual el hombre llegaba a lo divino. Pitágoras fue el primero en definir a estos como números perfectos, diciendo que son aquellos para los que la suma de los factores de un numero da el mismo número. A continuacion analizaremos las propiedades de estos números: el **uno** (eje central del bien) no se consideraba como un número en absoluto. Según Pitágoras, el uno actuaba en la díada para crear las series numéricas. Esta actuación del uno en la díada se establecía como una relación semejante a la que existe entre la forma y la materia. El uno era el principio formal o masculino. El uno era el origen del límite y de la forma (**forma o eidos**, a la que los griegos consideraban como un principio cósmico, puesto que sin figura y forma el cosmos sería un caos asimétrico de materia o infinito). Para Pitagoras el Uno se identificaba con Apolo; algunas veces se comparaba con Zeus, padre de los dioses, como creador del cosmos; el uno es la entidad suprema, porque es el origen de todos los números. El uno en sí mismo poseía características hemafroditas porque era llamado <<macho-hembra>> o **arseno-thelys**. También era conocido como la causa de la verdad, el amigo y la nave. Al uno se le llamaba <<nave>> porque concebían el cosmos como un barco cuya quilla era el fuego central alrededor del cual giraban los planetas. Los acontecimientos se repiten en el cosmos porque las estrellas y planetas giran en círculos; los períodos cósmicos corresponden a las vueltas que se dan en una pista de carreras, y el poste para dar la vuelta, mariaría el final del período cósmico.

El **uno** se convirtió en el símbolo del origen de la permanencia en el cosmos. Se identificó con el fuego central u hogar del universo alrededor del cual giraban los diez planetas. Del uno procede todo lo que es bueno en el universo, puesto que es el origen de todos los números impares. Dichos números se denominan buenos porque en el sistema de la aritmética pitagórica los lados que rodean los números o **gnomon** siempre forman cuadrados alrededor de los números impares, como se muestra en el ejemplo que a continuacion se menciona. En resumen, podemos considerar que el uno es el agente supremo en el cosmos de los pitagóricos. Sin embargo para poder explicar cómo se creó el cosmos y los otros

EJEMPLO



números necesitaban un contrario para el uno. Para los pitagóricos, el cosmos era también unión de contrarios, una armonía de elementos finitos e infinitos. La tabla 1 muestra la lista de los contrarios, la cual a su vez indica el desarrollo de un pensamiento que se sustenta en categorías lógicas que más tarde serían codificadas por los grandes pensadores de la edad dorada de la filosofía griega.

TABLA 1

Lista pitagórica de contrarios.

Limitado	Ilimitado
Impar	Par
Uno	Múltiple
Derecho	Izquierdo
Masculino	Femenino
Estático	En movimiento
Recto	Torcido
Luz	Oscuridad
Bueno	Malo
Cuadrado	Oblongo

Es interesante observar que hay diez contrarios, puesto que el diez es el número más perfecto; este número representa el límite del cosmos. Diez es el límite de los números importantes, por lo que es justo que haya diez contrarios en la armonía cósmica; y esto es exactamente lo que representan los contrarios.

La **díada** (la representacion del mal) es símbolo de todo aquello que es defectuoso o excesivo en el cosmos. La díada está relacionada con la tabla de contrarios por estar asociada a la oscuridad, al mal, al principio femenino y a la oblongo o rectangular. El dos es origen de todos los números pares cuyos lados son rectangulares. Se dice que Pitágoras, en uno de sus discursos, afirmó que la izquierda es el símbolo de los números pares, y por lo tanto también está relacionada con la díada. A la díada se le llamó **Rhea**, madre de los dioses, porque el nombre de esta diosa es similar al verbo griego **rhein**, que significa **"fluir"** . Dado que la materia estaba en continuo flujo, Rhea y la díada se convirtieron en sus sinónimos. En el pitagorismo tardío también se le llamó Isis a la díada, puesto que el nombre de la diosa es como la igualdad de las unidades simples en el dos. A través de otro juego de palabras, la díada fue conocida por **dye** o **"sufrimiento"**, en alusión al mal que la díada causa en el cosmos. Los pitagóricos estaban muy interesados en los orígenes de las palabras y sus significados, ya que buscaban el lenguaje de los dioses, que era la clave para conocer la realidad última. No hay que olvidar que el griego es una lengua muy peculiar, en el sentido de que sus sustantivos remiten de manera inmediata al objeto o persona que designan. El puente entre significante y significado se reduce al mínimo. Por ello, todas las falsas etimologías de la palabra **dyas**, o "díada", intentaban descubrir el nombre divino para el dos, de forma que los pitagóricos pudieran aumentar su dominio sobre las fuentes del sufrimiento y del mal en el cosmos. Finalmente, la díada era conocida por **tolma**, que significa "audacia", "atrevimiento", en su función evasora de la unidad pura del uno para crear el mal y el sufrimiento. Este acto original para separarse del uno fue un acto de temeridad; de esta forma, la imprudencia de la díada creó el mundo material de tres dimensiones con todas sus aflicciones vinculadas a la vida en semejante lugar.

El **tres** (el mundo de la materia), representa las tres dimensiones, y es una etapa más allá en el tolma original de la díada. Puesto que el tres era el primer número, fue relacionado con la pluralidad y la multitud; ya que el cosmos material tenía un principio, un punto medio y un final, fue a menudo comparado con el alma cósmica que se extendió por el universo para darle vida. El alma se comparó con frecuencia con un triángulo, principalmente con el **<<tríangulo zoogónico>>** que dio vida al cosmos y fue el fundamento de los átomos cósmicos del fuego, del aire y del agua. Puesto que el tríangulo tiene tres lados, fue también el símbolo del tres o tríada. Además, como el tríangulo era la primer figura plana en geometría, los pitagóricos relacionaron el tres con el plano. En el proceso de formación del mundo tridimensional de los objetos sólidos, el tres creó el plano.

El **cuatro** (creador de los sólidos geométricos), o la **tetraktys**, era el segundo en importancia con relación al uno, y poseía más valores simbólicos que cualquiera de los otros números que componían la **década** sagrada. Era el símbolo del demiurgo o creador cósmico, y de su modelo numérico del universo, y completaba el proceso de cambio constante por el cual los objetos físicos eran producidopor puntos, líneas, superficies y sólidos. También era por el sagrado cuatro por el que los pitagóricos hacían el juramento de su sociedad: <<juro por aquel que ha transmitido a nuestra mente el cuatro sagrado, raíz y origen de la naturaleza en continuo fluir>>. Las razones de esta perfección pueden verse en la forma en que los pitagóricos creían que el diez o **década** estaba escondido. La suma de los números que conducían al cuatro (1 + 2 + 3 + 4 = 10) era igual a diez. Así, la tetraktys o cuatro es en realidad la **década** para la suma de las unidades de los cuatro primeros números enteros, que es igual a diez. Estas unidades se ordenaban generalmente para formar un triángulo, con el uno en la parte superior. Además, el cuatro estaba considerado como una de las claves de la naturaleza porque muchos fenómenos naturales llegaban en grupos de cuatro, como mostraremos más adelante.

El significado simbólico del cuatro comenzó con Pitágoras, y se refirió probablemente a los cuatro primeros elementos que según Empédocles, aún discípulo de Pitágoras, componían el cosmos (fuego, aire, agua y tierra). Al cuatro también se le llamó raíz **(rhizomata)** de toda la existencia.

fundamento de los átomos cósmicos del fuego, del aire y del agua. Puesto que el tríangulo tiene tres lados, fue también el símbolo del tres o tríada. Además, como el tríangulo era la primer figura plana en geometría, los pitagóricos relacionaron el tres con el plano. En el proceso de formación del mundo tridimensional de los objetos sólidos, el tres creó el plano.

El **cuatro** (creador de los sólidos geométricos), o la **tetraktys**, era el segundo en importancia con relación al uno, y poseía más valores simbólicos que cualquiera de los otros números que componían la **década** sagrada. Era el símbolo del demiurgo o creador cósmico, y de su modelo numérico del universo, y completaba el proceso de cambio constante por el cual los objetos físicos eran producidopor puntos, líneas, superficies y sólidos. También era por el sagrado cuatro por el que los pitagóricos hacían el juramento de su sociedad: <<juro por aquel que ha transmitido a nuestra mente el cuatro sagrado, raíz y origen de la naturaleza en continuo fluir>>. Las razones de esta perfección pueden verse en la forma en que los pitagóricos creían que el diez o **década** estaba escondido. La suma de los números que conducían al cuatro (1 + 2 + 3 + 4 = 10) era igual a diez. Así, la tetraktys o cuatro es en realidad la **década** para la suma de las unidades de los cuatro primeros números enteros, que es igual a diez. Estas unidades se ordenaban generalmente para formar un triángulo, con el uno en la parte superior. Además, el cuatro estaba considerado como una de las claves de la naturaleza porque muchos fenómenos naturales llegaban en grupos de cuatro, como mostraremos más adelante.

El significado simbólico del cuatro comenzó con Pitágoras, y se refirió probablemente a los cuatro primeros elementos que según Empédocles, aún discípulo de Pitágoras, componían el cosmos (fuego, aire, agua y tierra). Al cuatro también se le llamó raíz **(rhizomata)** de toda la existencia.

La idea pitagórica original del cuatro como raíz de la naturaleza podría haber influido en Empédocles para que éste desarrollara su teoría de los cuatro elementos. Había en la naturaleza muchos grupos de cuatro, por lo que se creía que el cuatro simbolizaba el infinito número de grupos de cuatro que hay en ella. De hecho, los pitagóricos creían que el cuatro abarcaba la totalidad de la naturaleza y era la causa cósmica. Platón estaba de acuerdo con ellos en la existencia de un modelo del cosmos compuesto por cuatro números, origen de las cuatro criaturas vivientes y las tres dimensiones en él existentes.

La tetratkis también se vinculaba con las cuatro facultades del hombre. El uno con la **inteligencia**, el dos con el **conocimiento**, el tres con la **opinion**, y el cuatro con la **sensación**. Este significado parece ser muy antiguo y puede deberse a Pitágoras. Sin duda influyó en Platón, quien lo utilizó en sus teorías psicológicas. Según los pitagóricos las relaciones, que existen entre la serie numérica **1,2,3,4** y las cuatro facultades psíquicas son las siguientes:

<<Nuestra alma está compuesta por el cuatro porque hay cuatro facultades: inteligencia, conocimiento, opinión y sensación. De aquí procede el arte y la ciencia y por esta razón somos nosotros mismos seres racionales; por lo tanto la inteligencia es el Uno, o mónada, puesto que la mente contempla cada cosa a un tiempo. Así como los individuos en una multitud son iguales, incomprensibles y sin forma, la mente sólo puede pensar en un único individuo que es diferente a los otros. De la misma forma, en el caso de un caballo, lo entendemos como una unidad puesto que los caballos individuales son infinitos en número. Del mismo modo todos estos universales y clases existen como unidad. Por este motivo, cuando definimos una de estas existencias decimos que el hombre es un animal racional o el caballo un animal que relincha. Y porque tenemos estas ideas en

nuestra mente, la mente es Uno, o mónada. También la indefinida díada, o dos, es conocimiento. Esto es razonable puesto que cualquier demostración lógica y cualquier creencia cintífica, así como cada silogismo, consiste en sacar una conclusión acerca de algo partiendo de ciertas premisas. Por supuesto, estas conclusiones varían. El conocimiento se denomina dos porque pueden sacarse dos conclusiones diferentes de premisas conocidas. El tres representa la opinión, y con razón, porque la opinión tiene muchos objetos a su alcance.>> [2]

El significado más importante del tetraktys es el de creador. Algunos pitagóricos opinaban que las series númericas divinas del uno al cuatro eran en sí el poder creativo del cosmos. En esta variante del pitagorismo, los números son creativos por sí mismos. Es el viejo punto de vista del propio Pitágoras. Algunos de sus seguidores creían que el dios supremo se identificaba con los números creativos; otros decían que el dios creativo era menos que los números divinos, y usaban a estos como modelo para la creación del cosmos. Sin embargo, otros pitagóricos creyeron que el **uno** era el iniciador de la creación, y que el **dos**, el **tres** y el **cuatro** culminaron el trabajo, ya que dichos números eran divinidades menores. Esta desconcertante variedad en las explicaciones de la actividad creadora de la tetraktys tiene una cosa en común: los números son creadores del cosmos y son, además, dioses. Hierocles, pitagórico del siglo V d.C., representa la opinión de que la tetraktys es el dios supremo:

Pero cómo el cuatro llega a ser <<dios>>? Esto lo aprenderás en el libro sagrado atribuido a Pitágoras, y en el que <<dios>> es celebrado como el número de los números. Puesto que si todas las cosas existen por su eterno decreto, es evidente que en cada especie de cosas el número dependa de la causa que lo produjo. Allí encontramos al número y por consiguiente él nos llega a nosotros. [3]

Por tanto se puede ver que la tetraktys ocupa un lugar central en el pensamiento de los pitagóricos. Para las generaciones posteriores este concepto se convirtió en el símbolo del alma humana, e incluso Pitágoras comparó el alma con un cuadrado. La tetraktys es, como nos dice el juramento pitagórico, el origen de la naturaleza y de las estaciones. Los elementos, las cuatro edades del hombre y las partes de las cosas que crecen, (como sucede con los árboles (nacen, crecen, se reproducen y mueren)) están también simbolizadas por la tetraktys.

El **cinco** (el número central) era un número importante por ser la mitad del diez. Algunas veces se llamaba **matrimonio**, porque contenía un varón, o número impar, y una hembra, o número par (2 + 3 = 5). Como tal, era sagrado para la diosa Afrodita. El número cinco también simbolizaba las cinco formas atómicas que más tarde retomó Platón. Estas formas fueron la pirámide, el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro, que representan, respectivamente, el fuego, la tierra, el aire, el agua, y el éter o sustancia que el demiurgo usa para formar el círculo zodiacal. El cinco también representaba a los cinco planetas entonces conocidos, así como las cinco zonas de la Tierra que se decía habían sido descubiertas por Pitágoras. Fue él, desde luego, el primero en sostener que la Tierra era de forma esférica y que posee antípodas.

El **seis** (el número perfecto) fue un número importante por ser el primer número perfecto, (los factores que lo dividen suman seis) es decir, **1 + 2 + 3 = 6**. También se le llamó matrimonio por la misma razón que al cinco, aunque aquí se involucraba una multiplicación en lugar de una suma, como medio con el anterior número. Tanto el cinco como el seis son números **circulares**, es decir, sus poderes siempre producen productos terminados en cinco o en seis; y de ahí que el cubo de cinco sea 125, y el cubo de seis sea 216, un número muy místico puesto que representa los intervalos de tiempo en cada reencarnación de Pitágoras y de otros mortales. El cinco se diferencia del seis en que el cubo del primero (125) en sus dos últimos guarismos repite su cuadrado (25), mientras que el seis no tiene esta propiedad (seis al cuadrado es 36, y al cubo 216). Para Filolao, uno de los primeros seguidores de Pitágoras, el seis era un número crucial porque representaba los seis niveles de la naturaleza animada, empezando con los espermatozoides y terminando con la vida de los dioses. En la tabla 2 se describen los niveles:

TABLA 2

NIVELES DE LA NATURALEZA

NIVEL	R E P R E S E N T A.
1	El nivel más bajo de la vida, el proceso orgánico y biológico de la germinación de las semillas.
2	La vida de las plantas.
3	La vida irracional de los animales.
4	El ser irracional del hombre.
5	El género de los **daimones**, que son los mediadores entre los hombre y los diose.
6	La vida de los propios dioses.

El **siete** (número principal o la mente) se consideraba como el número que no puede ser generado por ningún otro número de entre los diez, o década. Aquí, Generación es otro término para denominar multiplicacíon, significando con ello que dos números cualesquiera de entre la década, al multiplicarse, den como resultado siete. Asimismo, el siete no puede producir otro número de entre la década número de entre la década, puesto que 7 * 1 = 7 y 7 * 2 = 14, número que está fuera de los límites de la década sagrada. El cinco no es generado por otro número de entre la década, pero puede generar 10 por medio del 2, por lo que no es **virgen** como el siete. Siete es, pues, el número principal para la diosa virgen Atenea. Debido a que Atenea nació de la cabeza de Zeus, el siete también representa la mente. El siete era significativo porque había siete cuerpos celestiales que daban lugar a la música de las esferas. El siete también fue relacionado con los partos sietemesinos y con Hércules, como se encuentra en el **discurso sagrado** de Pitágoras a los latinos. Otra característica del siete es que cuatro sietes son 28 (4 * 7 = 28 ó 7 + 7 + 7 + 7 = 28), el segundo número perfecto en las series numéricas.

El **ocho** (eje de la Armonía) era significativo porque era el primer cubo propiamente dicho. Debido a la armonía entre sus partes (dos al cubo es igual a ocho y 2 + 2 + 2 + 2 = 8) fue llamado <<**Armonía**>>, mujer del legendario Kadmos quien, como Pitágoras, era descendiente de fenicios. Según los órficos y los antiguos egipcios, existen ocho dioses importantes, idea con la cual Pitágoras estaba evidentemente familiarizado. Por su armonía, el ocho también se convirtió en símbolo de la amistad para Filolao. Por consiguiente también fue llamado Eros.

El **nueve** fue denominado alternativamente **okeanos**, dios del gran mar que rodeaba la Tierra, porque nueve es el límite de los números ya que después de él viene el diez; y también fue denominado Prometeo, que era fuente, porque el nueve era suficientemente poderoso como para controlar a los otros números de la década. Al ser el número más grande de la década, y el punto de partida antes de empezar la serie numérica de nuevo (el diez estaba relacionado con la unidad, como también el 100 y el 1000), el nueve era muy importante. Era el símbolo de la justicia porque su raíz cuadrada es tres; y sus factores tres y tres, al ser iguales, son la imagen adecuada de la justicia (o como la llamaban los griegos, **to antipeponthos)**. El **cuatro** era el símbolo de la justicia por una razón similar. Pitágoras llamó al nueve **kouretes,** porque era sagrado para las tres Curetes, divinidades místicas de Creta.

La importancia que los pitagóricos concedían a la década o diez se debía a que estos números eran la unidad básica para contar, la base de su sistema de numeración. Una vez alcanzado el diez, la serie se repetía **ad infinitum.**

B I B L I O G R A F I A.

1 B. Farrington, *Greek Science*, Volumen 1, Harmondsworth, 1949, PP. 48-49.

2 H. Diels, *Dosxographi Graeci*, P. 282.

3 Hierocles, *Commentaries on the Golden Verses of Pythagoras*, Londres, 1895, P. 54.

CAPITULO II

DE ESFERAS SE COMPONE EL COSMOS

No es difícil entender el por qué del primerísimo lugar que ocupan el círculo y la esfera en la historia del pensamiento. Desde el momento en que los seres humanos tomaron conciencia del mundo que los rodeaba y se dieron cuenta de la importancia que tenían los cielos para su supervivencia, éstos fueron objeto de una atención permanente. Es innegable la forma abovedada que presenta el cielo en una noche despejada y en la que se observa un movimiento "circular" de las estrellas alrededor de la Tierra. También el Sol y la Luna describen, en apariencia, círculos alrededor del mundo y es muy clara la forma circular que presentan estos dos astros, así como el contorno que nuestro planeta dibuja sobre ellos durante un eclipse. Estas son, muy probablemente, las razones más importantes por las cuales estaban presentes las figuras **esférica y circular** en las concepciones cosmológicas de las civilizaciones antiguas.

En el siglo VI a.C., el rápsoda Jenófanes de Colofón, harto de los versos homéricos que recitaba de ciudad en ciudad, y que atribuían rasgos antropomóficos a los dioses, propuso a los griegos un solo dios cuya forma fuera una esfera. Es obvio que para entonces ya la esfera aparece como la figura esencial en la construcción de las cosmologías, habiéndose convertido en una necesidad mental que guiará el pensamiento religioso, filosófico y científico de occidente a lo largo de los siglos.

EL CIRCULO Y LA ESFERA

Como ya se dijo, a partir del siglo VI a.C. se propusieron diversas cosmologías elaboradas de acuerdo con mecanismos que intentaban dar cuenta de los movimientos celestes. En ellas la **esfera** y **el círculo** juegan un papel tan relevante que con frecuencia se omite el justificar el presupuesto de la esfera y el círculo como las figuras que rigen trayectorias y formas de los astros.

En la cosmología de Anaximandro (610-547 a.C.), los cielos esféricos encierran la atmósfera de una Tierra cilíndrica, existiendo varias capas de esta envoltura para que ahí se acomoden los otros objetos estelares. El Sol es un hueco lleno de fuego, situado en el borde de un gigantesco anillo que gira alrededor de la Tierra en una trayectoria circular.[1]

Más adelante, Pitágoras (580-500? a.C.) plantea que la Tierra es una esfera alrededor de la cual giran en círculos concentricos el Sol, la Luna y los planetas, fijo cada uno a una esfera. En su veloz revolución, estos cuerpos producen individualmente un susurro en el éter que , en conjunto, conforma una música celestial: la llamada armonía de las esferas.[2]

En el siglo V a.C., Parménides (504-450 a.C.) señala en su "Poema" que el Ser es uno, eterno, indivisible, inmóvil y finito:

<< además, y dado que posee un último límite, el Ser está terminado por todas partes, semejante a la masa de una esfera bien redondeada, igual en todas direcciones a partir del centro>>.[3]

En este mismo siglo los discípulos de Pitágoras sostuvieron, al igual que su maestro, que la Tierra era esférica y que se movía en el espacio. Sin embargo, los pitagóricos mezclaban sus deducciones con el misticismo y la numerología. Tenían evidencia de nueve movimientos circulares en el cielo: el de las estrellas, los de los cinco planetas conocidos y los de la Tierra, la Luna y el Sol. Pero como 9 era un número "imperfecto", agregaron un cuerpo, es decir, un movimiento más, para así tener 10, inventando una anti-Tierra protectora. Así, en la revolucionaria concepción de Filolao (480-400 a.n.e.), la Tierra aparece como una esfera que no ocupa el centro del Universo. En su lugar arde un fuego central que ilumina al Sol. Entre este fuego y la Tierra da vuelta la contra-Tierra protectora, la cual no puede verse desde el hemisferio donde se pensaba que vivía la población terrestre. Los cuerpos celestes, incluidos los otros cinco planetas conocidos, giraban en trayectorias circulares dentro de una envoltura de fuego.[4]

Al comenzar el periodo de la decadencia de la polis griega, Platón (428-347 a.c.) utilizó algunos elementos de los pitagóricos para plantear la importancia de la geometría en el estudio de la realidad en particular, la importancia de la esfera. Así lo señala en su diálogo "Timeo":

<< El mundo es, en efecto, la cosa más bella que se ha producido y su creador la mejor de las causas. El universo así engendrado ha sido, pues, formado según el modelo de la razón, de la sabiduría y de la esencia inmutable... En cuanto a su forma, le dio la más conveniente y más apropiada a su naturaleza... Por esto redondeó al mundo hasta hacer de él una esfera... que es la más perfecta de las figuras y la más semejante a sí misma, porque pensó que lo semejante es infinitamente más bello que lo desigual>>.[5]

En lo que al movimiento se refiere, Platón propone que el Demiurgo

<<... Atribuyó un movimiento apropiado a la forma de su cuerpo, de los siete movimientos, el que se relaciona más estrechamente con la inteligencia y el pensamiento, quiso por consiguiente que el mundo girara sobre sí mismo y alrededor del mismo punto con un movimiento uniforme y

circular.>> [6]

Platón, al mismo tiempo, señala la inutilidad de los sentidos para conocer la realidad profunda de las cosas, a la cual sólo se puede tener acceso mediante la razón. En este sentido aconseja que los astrónomos no deberían intentar explicar la esencia de los fenómenos sino contentarse con describir, **utilizando la geometría**, sus observaciones. De esta posición filosófica proviene el instrumentalismo de los neoplátonicos (Escuela filosófica que florecio en Alejandría en los primeros siglos de la era cristiana, y cuyas doctrinas eran una renovación del platonismo) quienes para explicar el complicado movimiento de los planetas, que a simple vista parecen frenarse y, formando un lazo, retroceden sobre sus mismos pasos, elaboraron sistemas de esferas concéntricas para "salvar los fenómenos". Esta fue la característica griega para la explicación racional de los fenómenos físicos en general, y particularmente de los fenómenos astronómicos. Las esferas concéntricas tienen a la Tierra como su centro común, y giran con velocidades constantes, variando para cada esfera, alrededor de diferentes ejes y en diferentes direcciones.

Para Eudoxo (408-355 a.c.), discípulo de Platón, cada planeta se halla situado en la esfera interior de un grupo de dos o más de ellas, interconectadas y concéntricas, cuya rotación simultánea en torno a diferentes ejes reproduce el movimiento observado del planeta. Aristóteles señala en su obra (Metafísica) que:

<<Eudoxo explicaba el movimiento del Sol y la Luna, admitiendo tres esferas para cada uno de estos astros... Colocaba el movimiento de cada uno de los planetas en cuatro esferas. La primera y la segunda eran las mismas del Sol y la Luna, porque la esfera de las estrellas fijas imprime el movimiento a todas las esferas, y la esfera que

está colocada por abajo de ella... es común a todos los astros.>> [7]

La cosmología propuesta por Calipo (370-330 a.C.), discípulo de Eudoxo, también nos es referida por Aristóteles:

<<La posición de las esferas... era en el sistema de Calipo, el mismo que en el de Eudoxo... Pero Calipo creía que era preciso añadir otras dos esferas al Sol y dos a la Luna... y una a cada uno de los planetas...>> [8]

En la gran síntesis y remodelación que Aristóteles (384-322 a.c.) hace del conocimiento de la época, la esfera y el círculo aparecen en un lugar prominente. Los siguientes fragmentos, extraídos de su obra, (Metafísica) señalan la importancia que para él tenían tales figuras:

<<hay algo que se mueve con movimiento continuo, el cual es movimiento circular... todo cuerpo esférico es eterno e incapaz de reposo...

El universo es un todo continuo, una esfera redondeada con tal exactitud que no se le puede comparar ninguna obra del arte humano.>> [9]

Con Aristóteles se cierra un periodo en la historia de la filosofía. La preponderancia intelectual de Atenas se traslada a Alejandría, donde Aristarco de Samos (310-320 a.n.e.), llamado "el Copérnico de la antigüedad", suponía **"que las estrellas fijas y el Sol son inmóviles, pero que la Tierra se mueve alrededor del Sol en un círculo"**. Este sistema, no obstante la fama y eminencia de su proponente, tuvo escasa aceptación, debido principalmente a que se consideraba impío y filosóficamente absurdo, además de que contradecía la experiencia cotidiana.

Hiparco (190-120 a.c.), considerado por muchos como el más importante astrónomo observacional de la antiguedad, fue quien inventó la mayoría de los instrumentos utilizados por los astrónomos hasta el siglo XVII, y además compiló el primer catálogo de estrellas. El sistema propuesto por Hiparco, retomando a Eudoxo, consistía en un pequeño círculo, el "epiciclo", que giraba con un movimiento uniforme alrededor de un punto situado sobre la circunferencia de un segundo círculo en rotación, el "deferente". El planeta estaba situado sobre el epiciclo y el centro del deferente coincide con el centro de la Tierra. Hiparco también introdujo los epiciclos menores y las excéntricas. La excéntrica es un deferente cuyo centro se haya desplazado respecto al de la Tierra. Los epiciclos mayores, de gran tamaño, servían para explicar las grandes variaciones cualitativas de los planetas, mientras que los epiciclos eran círculos complementarios para eliminar pequeños desacuerdos cuantitativos entre teoría y observación.

El sistema de Hiparco fue perfeccionado por Claudio Tolomeo (siglo II d.C.), que en su libro **Sintaxis Matemática,** conocido durante la Edad Media como **Almagesto,** añade el "ecuante" y utiliza la excéntrica para explicar el movimiento del Sol. El ecuante es el punto con respecto al cual el movimiento planetario circular es uniforme. En el **Almagesto** se recopila la parte esencial de la astronomía antigua; representa el primer tratado matemático y sistemático que daba una **explicación completa, detallada y cuantitativa de todos los movimientos celestes.** Sus resultados fueron de tal precisión y los métodos que empleó gozaron de tal poder de resolución, que el problema del movimiento de los planetas tomó un sesgo completamente distinto a partir de Tolomeo. El proyecto de Tolomeo nos lo narra él mismo:

<<... nuestro problema es demostrar, en el caso de los cinco planetas, así como el caso del Sol y la Luna, que todas sus irregularidades aparentes son producidas por medio de movimientos regulares y circulares (ya que estos son los propios a la naturaleza divina de las cosas, las cuales son ajenas a las disparidades y desórdenes.>> [10]

Y al referirse al orden de las esferas de los cinco planetas, señala que "...todas estas esferas están más cercanas a la Tierra que la esfera de las estrellas fijas, y más lejanas de la Tierra que aquella de la Luna".

El problema de los planetas se había convertido en una simple cuestión de disposición de los diversos elementos que entraban en juego y se atacaba básicamente a través de una redistribución de los mismos. La pregunta que ahora se planteaban los astrónomos era: **qué combinación particular de deferentes, excéntricas, ecuantes y epiciclos puede explicar los movimientos planetarios con la mayor simplicidad y precisión?.**

Con el advenimiento en el siglo IV del cristianismo como religión del estado romano, el proceso cognoscitivo sufrió un doloroso retroceso, y nos encontramos con que San Lactancio (260-340), en el tercer volumen de sus **Instituciones divinas**, con el título de "Sobre la falsa sabiduría de los filósofos", ataca, con argumentos bastante ingenuos, la redondez de la Tierra. A partir de entonces se fue gestando a través de la obra de otros autores, tales como Basilio el Grande (329-379) y Severiano (siglo IV), la idea de que el propio firmamento tenía la forma de tabernáculo, pero sin llegar a plantearse una cosmología mínimamente consistente.

El primer sistema cosmológico de la alta Edad Media fue construido en el siglo VI por el monje Cosmas, quien en su **Topographica Christiana** titula el primero de sus doce libros "Contra aquellos que, deseando profesar el cristianismo, piensan e imaginan, como los paganos, que el cielo es esférico". En su obra, Cosmas plantea que la Tierra debe tener la forma del sagrado tabernáculo de Moisés, el cual, según se narra en el Exodo, era dos veces más largo que ancho. En esta concepción, la Tierra está rodeada por el oceano, y éste está rodeado por una segunda Tierra, en la que se encontraba el Paraíso, y a la cual cruzó Noé con su arca.

Esta concepción prevalecerá en el occidente cristiano hasta aproximadamente los siglos XI o XII.

Por el contrario, en oriente, a partir del siglo VII, el mundo musulmán convirtió a Bagdad y Damasco en centros culturales en los que se preservó y desarrolló el saber de la antigüedad clásica.

En lo que a la filosofía se refiere, al Farabi (872-950) establece una línea filosófica que intenta realizar una síntesis aristotélico-plátonica en la cual:

<<...de Dios sólo procede directamente su inteligencia, constituyendo el mundo de las ideas divinas. De éste procede la potencia que constituye la primera esfera. El orden de las cosas se estructura según una jerarquía en la que el Ser Unico o principio Divino es la causa primera. Le siguen las causas segundas o inteligencias de las esferas. Los cuerpos también comprenden seis géneros, siendo el primero de ellos el cuerpo de las esferas celestes.>> [11]

El más famoso astrónomo árabe fue Al-Battani (Albatenius) (siglo XI), quien en su **Opus astronomicum señala:**

<<...he decidido corregir y aclarar todas estas cuestiones, usando los métodos propuestos por Tolomeo en su

libro Almagesto, caminando sobre sus huellas y siguiendo sus preceptos.>> [12]

Cabe mencionar que Ibn al-Haytam (962-1038), matemático y físico, apodado Tolomeo II, introdujo el concepto de esferas celestes en sus investigaciones astronómicas. Por otra parte es de consenso que la sitematización definitiva de la sabiduría del mundo musulmán está representada por Ibn Sina (Avicena) (980-1037), para quien:

<<Los seres vivos proceden del flujo creador en forma jerarquizada, dando nacimiento a las diez esferas con sus diez almas motoras>>[13]. Estas esferas son:

# esfera	c o n c e p t o
1	La extrema
2	La de las estrellas fijas
3	La de Saturno
4	La de Jupiter
5	La de Marte
6	La del Sol
7	La de Venus
8	La de Mercurio
9	La de la Luna
10	El mundo sublunar

Para otro pensador notable, Avicena, el mundo celeste carece de figura y gira en círculo, mientras que el mundo terrestre tiene muchas figuras y cambia. Su materia, en particular, puede recibir formas diferentes.

El punto más alto de la cultura árabe se dio en Córdoba, (la perla de Al-Andalus) con la extraordinaria obra de Ibn Rushd (Averroes) (1126-1198), en cuya cosmología los cuerpos celestes son eternos, incorruptibles y dotados de un movimiento perpetuo continuo y circular que es la perfección misma. Para él cada una de las esferas celestes gira dentro de su órbita específica, y este orden universal es necesario y perfecto. No es un accidente ya que el movimiento circular es parte de la esencia, y su alteración o desaparición resultaría en su propia liquidación.

A partir del siglo XII, con la fundación de diversas universidades, el occidente cristiano recupera el discurso aristotélico, convirtiéndolo en el centro de la cultura. En lo que a cosmología se refiere, el planteamiento tolemaico es asumido plenamente, y esta combinación de Aristóteles y Tolomeo se ve tamizada por la óptica cristiana, como se observa en la obra de Tomás de Aquino (1225-1274), quien en su adecuación con las enseñanzas de la iglesia señala lo siguiente:

<<...de todos los tipos de movimiento a los que podría verse sometido, el suyo es el circular, el que produce un mínimo de alteraciones, ya que la esfera, considerada como un todo, no cambia de lugar.

Y, además, ...no parece posible que Cristo se haya elevado más allá de todos los cielos a menos que las esferas de cristal de estos se hayan dividido, lo cual es imposible.>> [14]

Esta cosmovisión afecta a todas las experiencias de la cultura de la época, y no extraña encontrar que en la obra de Dante (1265-1321), "el gran plan del Universo" está diseñado basándose en la esfera:

<<No obstante, más allá de todas estas [esferas cristianas], los católicos colocan el Empíreo... y admiten que permanece en reposo porque todas y cada una de sus partes tiene consigo lo que pide su materia. Esta es la razón por la que el primum mobile" [o la novena esfera] se mueve con tan gran velocidad, pues el anhelo que sienten todas sus partes por unirse con las del cielo más tranquilo las hace girar con tan gran deseo que su velocidad es casi inconmensurable. Este reposado y pacífico cielo es la sede de la suprema Divinidad, la única que puede contemplarse a sí misma con toda perfección.
La luz y el amor le rodean en un círculo, como él rodea a los restantes cielos, círculo que rige solamente Aquel en quien está comprendido.>> [15]

El sistema tolemaico continuó prevaleciendo durante más de dos siglos, como se observa en la obra del alemán Georg Peuerbach (1423-1461), quien señala:

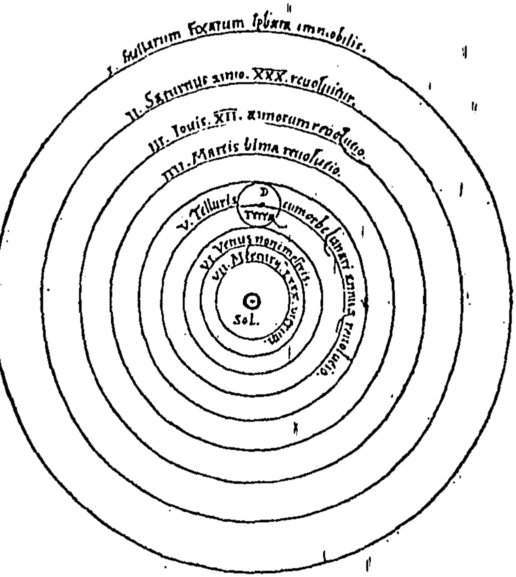
<<El Sol tiene tres órbitas, separadas entre ellas por todas partes y también contiguas unas a las otras. La más alta de ellas es concéntrica con el mundo en su superficie convexa, pero excéntrica en su superficie cóncava. La más baja, por otro lado, es concéntrica en su superficie cóncava, pero excéntrica a su convexa. La tercera, sin embargo, situada entre ellas, es excéntrica al mundo en ambas de sus superficies la convexa y la cóncava. Una órbita cuyo centro es el centro del mundo se dice es concéntrica con el mundo, y una órbita cuyo centro es otro que el centro del mundo es excéntrica... Estas tres órbitas requieren de dos centros. La superficie convexa de la más alta y la cóncava de la más baja tienen el mismo centro, que es el centro del mundo. De este hecho resulta que la esfera total del Sol, al igual que la esfera total de cualquier otro planeta, son concéntricas con el mundo.>> [16]

En 1543, Copérnico (1473-1543) recibió en su lecho de muerte un ejemplar de su obra, **De Revolutionibus Orbium Coelestium**, con la cual se inicia la revolución astronómica de los siglos XVI y XVII.

A pesar del carácter revolucionario del planteamiento heliocéntrico de Copérnico, en su obra siguen presentes las ideas relativas a la perfección del círculo y de la esfera, como se constata en el índice del Libro Primero del **De Revolutionibus Orbium Coelestium:**

Capítulo	D E S C R I P C I O N
I	El Mundo es esférico
II	La Tierra también es esférica
III	De cómo la Tierra junto con el agua forman un globo
IV	El movimiento de los cuerpos celestes es regular y circular, perpetuo o compuesto por movimientos circulares
V	Acerca de si el movimiento de la Tierra es circular y de su posición.

net, in quo terram cum orbe lunari tanquam epicyclo contineri diximus. Quinto loco Venus nono mense reducitur. Sextum denique locum Mercurius tenet, octuaginta dierum spacio circū currens. In medio uero omnium residet Sol. Quis enim in hoc



pulcherimo templo lampadem hanc in alio uel meliori loco poneret, quàm unde totum simul possit illuminare? Siquidem non inepte quidam lucernam mundi, alij mentem, alij rectorem uocant. Trimegistus uisibilem Deum, Sophoclis Electra intuentē omnia. Ita profecto tanquam in solio regali Sol residens circum agentem gubernat Astrorum familiam. Tellus quoque minime fraudatur lunari ministerio, sed ut Aristoteles de animalibus ait, maximā Luna cū terra cognationē habet. Concipit interea à Sole terra, & impregnatur annuo partu. Inuenimus igitur sub hac

Concepción copernicana del sistema solar reproducida de su obra De revolutionibus orbium coelestium. El Sol en el centro; alrededor de él se mueven Mercurio, Venus, la Tierra (Telluris) y la Luna, Marte, Júpiter y Saturno.

Fig. 1: Sistema helioceéntrico.

El sistema **heliocéntrico** (Fig. 1) planteba un problema ideológico fundamental para los astrónomos, el cual fue resuelto por algunos ateniéndose a lo que dictaba el prólogo apócrifo del **De Revolutionibus**, escrito por Andreas Osiander, y en el que se señalaba que la órbita terrestre era una ficción matemática que permitía calcular la posición de los planetas como si la Tierra se desplazara, sin tener que preocuparse ni comprometerse con la realidad física del modelo. Erasmus Reinhold (1511-1553) fue el primer astrónomo que utilizó el modelo copernicano para hacer cálculos y publicar unas tablas astronómicas, las **Tablas Prusianas**, sin declararse a favor del movimiento de la Tierra. En su ejemplar del **De Revolutionibus**, Reinhold escribió en rojo, con una hermosa y cuidada letra:

Axioma astronómico: El movimiento celestial es uniforme y circular o compuesto de movimientos uniformes y circulares.

Así también escribió que:

<<La órbita de Mercurio es una excéntrica en una excéntrica en un círculo excéntrico con un epiciclo.>> [17]

El mayor de los astrónomos de la segunda mitad del siglo XVI, Tycho Brahe (1546-1601), construyó un sistema que combinaba las ventajas astronómicas del discurso copernicano y las ideológicas del Tolemaico, prevaleciendo las órbitas circulares. En el sistema ticónico la Tierra conserva su lugar privilegiado en el centro del universo, pero los cinco planetas giran en torno del Sol y, junto con él, todo el sistema alrededor de la Tierra. Aunque Tycho mantiene las esferas y los círculos, el tesoro de la enorme cantidad de datos de gran precisión que calculó iba a ser fundamental para la obra de Kepler.

Kepler (1571-1631), al estudiar la órbita de Marte, que es la más excéntrica de todas, encuentra que la órbita circular no concuerda con los datos observacionales:

<<la órbita del planeta no forma un círculo... se curva hacia dentro en ambos lados y hacia fuera en los extremos opuestos. Una curva así se llama óvalo.>> [18]

El óvalo que Kepler encontró distorsiona el sueño eterno de la armonía de las esferas. Aunque se hallaba incluido en el inicio de sus propias investigaciones, es tal la entronización de los conceptos de perfección, que Kepler mismo señala que cuando los datos le imponen la forma oval en las órbitas piensa que solamente ha encontrado "una carreta llena de estiércol: el óvalo".

Kepler trabajó desesperadamente por ajustar su óvalo con alguna forma geométrica regular sin darse cuenta de que era una elipse. No fue sino hasta después de enormes esfuerzos que se despejo la incógnita: la trayectoria que Marte seguía era una elipse.

<<Mi fatigoso trabajo llegó a su fin cuando [establecí], por medio de pruebas extremadamente laboriosas y numerosas observaciones, que la trayectoria de un planeta en el cielo no es un círculo, sino que es una trayectoría oval perfectamente elíptica.>> [19]

Con la obra de Kepler la esfera y el círculo pierden su lugar de privilegio como formas fundamentales de la naturaleza. Sin embargo, y a pesar de ser precisamente una época de transición, algunos se resistían a abandonar la obseción por las esferas. Tan arraigado estaba en la mente humana el pensar en círculos y esferas que ni las grandes personalidades de la ciencia aceptaron la propuesta kepleriana. Galileo (1564-1642), para no ir más lejos, en un primer momento ignoró las tres leyes de Kepler, los descubrimientos que éste realizó en óptica y el telescopio kepleriano. En lugar de ello defendió firmemente hasta el fin de su vida los círculos y epiciclos que consideraba como única forma concebible del movimiento en el cielo. Por otro lado, consideraba que **"un movimiento oval parece no solo impensable, sino también nada consonante con las apariencias"**.

Por sus trayectorias no circulares, Galileo sugería que los cometas no eran cuerpos reales, sino aparentes, como el arco iris y el halo, y los denominaba "planetas-monos de Tycho". Sin embargo, Galileo también contribuyó a desterrar el círculo y la esfera como las figuras preferidas por la naturaleza, ya que, para la física terrestre, planteó que "un proyectil que se desliza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme, y por un movimiento descendente, naturalmente acelerado, describe... una línea semiparabólica".

Otro contemporáneo de Kepler, Francis Bacon (1561-1621), señaló en su obra La Teoría del Cielo, que:

<<...el sgundo error consiste en suponer que el cielo, supuestamente hecho de una quintaesencia y libre por completo de sustancias elementales, no es susceptible de acciones turbulentas como la compresión, la dilatación, la repulsión, y otras similares... Sin embargo, de aquí ha surgido esa caprichosa y artificiosa multiplicación de círculos en movimiento, los unos dentro de los otros con tal suavidad y lubricación que no encuentran resistencia ni obstrucción alguna: todo esto no son más que fantasías y burlas a la naturaleza de las cosas.
...el cuarto error es creer que todos los movimientos celestes se llevan a cabo en círculos perfectos, penoso requisito que ha alumbrado prodigios como las excéntricas y los epiciclos. Si se hubiera consultado a la naturaleza se habría constatado que, mientras que el movimiento

regular y uniforme sigue círculos perfectos, el movimiento regular pero multiforme, que es el que se encuentra en muchos cuerpos celestes, también se lleva a cabo a lo largo de trayectorias diferentes...>> [20]

Es así como en Kepler se resumen la innovación de Copérnico y una nueva actitud epistemológica ante los datos observacionales. Actitud que aprendió de Tycho y que lo obligó a ajustar con todo detalle a la teoría con los hechos. La importancia de la obra de Kepler queda expresada en palabras de A. Koestler de la manera siguiente:

<<...la formulación de las leyes de Kepler es uno de los hitos de la historia. Fueron las primeras "leyes de la naturaleza" en el sentido moderno... Esas leyes divorciaron la astronomía de la teología, y la unieron a la física. Por último, pusieron fin a la pesadilla que había sido la obseción de la cosmología durante los últimos dos milenios: la obseción de las esferas que giran sobre esferas.>> [21]

Y sin embargo ...aún en nuestros días, si observamos las ilustraciones o diagramas del universo que aparecen en revistas, animaciones, material educativo, etc., encontramos que aún se sigue recurriendo a círculos y esfereas. Y muestra del atractivo que aún ejercen estos entes geométricos basta con pedirle a cualquiera que no sea científico que dibuje para nosotros un diagrama del universo y, con una alta probabilidad, ahí estarán: círculos y esferas.

B I B L I O G R A F I A.

1 Cf. A. Koestler, 1981, *Los Sonámbulos*, México, p. 23; T. Kunh, 1978, *La Revolución Copernicana*, Barcelona, p. 54.

2 Cf. A. Koestler, op. Cit., P. 32; F. Copleston, 1974, *Historia de la Filosofía*, vol. 1, 2a. Editorial Ariel, Barcelona, p. 43.

3 Parménides, *"Poema"*, verso 40, en *Parménides, Zenón, Meliso (Escuela de Elea), Fragmentos*, Aguilar Argentina, Buenos Aires, 1975, p. 52.

4 Cf. A. Koestler, op. Cit., P. 43

5 Platón, 1979, *Diálogos* 18a. Editorial Porrúa, México, p. 671.

6 Ibid., P. 674.

7 Aristóteles, 1980, *Metafísica*, 8a. Editorial Porrúa, México, p. 210.

8 Ibid., P. 211.

9 Ibid., P. 208. y Aristóteles, *De Motu*. Citado en I. Düring, 1987, *Aristóteles. Exposición e interpretación de su pensamiento*, UNAM, México, p. 571.

10 Tolomeo, op. Cit., Libro IX, cap. 2, P. 270.

11 I. Antaki, 1989, *La cultura de los árabes*, Siglo XXI Editores, p. 122. Cf.F. Copleston, op. Cit., Vol. 2, P. 193; *Historia de la filosofía*, 1981, vol. 3, 5a. Editorial Siglo XXI Editores, México, p. 313.

12 G. Abetti, 1983, *Historia de la astronomía*, 2a. Ed., FCE, México, p 79.

13 I. Antaki, op. Cit., P. 129.

14 T. Kuhn, op. Cit., P. 155. y Ibid., P. 156.

15 Dante, *"Convivio"*. Citado en T. Kuhn, op. Cit., P. 156.

16 G. Peuerbach, *New theories on the planets*. Citado en E. J. Aiton, 1987, *"Peuerbach's Theoricae Novae Planetarium"*, Osiris, 2nd. serie, 3, n. 5-44, 9.

17 R. S. Westman, "*The Melanchton Circle, Rheticus and the Wittenberg Interpretation of the Copernican Theory*", Isis, 66, n. 232 (Junio, 1975), 176.

18 J. Kepler, 1973, *astronomía nova*. Citado en a. Koyré, *the astronomical revolution*, Cornell University Press, Nueva York, p. 244.

19 Ibid., P. 225.

20 F. Bacon, 1989, *Teoría del cielo*, Technos, Madrid, p. 103 y 105.

21 A. Koestler, op. Cit., P. 307.

CAPITULO III

GEOMETRIA Y ARQUITECTURA

En este capítulo hablaremos de la importancia que la teoría de la proporción tiene en la arquitectura. Se ha llegado incluso a afirmar que todo el problema de la proporción en la arquitectura puede reducirse a la mecánica estructural, a la necesidad implícita de la estructura y, además, que la habilidad mecánica puede producir una solución única, perfecta y automáticamente agradable a la vista para cualquier problema de diseño. En otras palabras, que estructura más utilidad constituyen la **perferección** que desempeñó un papel tan importante en los debates sobre estética y sobre la teoría de la proporción. Críticos y filósofos se esforzaron frecuentemente en reducir la teoría de la proporción a una simple teoría de lo correcto.

Cabe creer que dicha teoría es tan susceptible de manipulación, que dominó la teoría estética hasta principios de este siglo. Si hacemos caso omiso de las teorías, por el momento, queda que costumbre y convención representan un papel enorme en lo que se refiere a nuestra apreciación de los edificios. Si pueden seleccionarse aquellas formas que resultan más agradables a la vista (y aquí es donde radica el problema), la proporción arquitectónica podría llegar a ser simple cuestión de aplicar estas formas lo más a menudo posible.

Durante el Renacimiento se creía en general que los rectángulos más hermosos eran aquellos cuyos lados poseían las relaciones numéricas simples propias de la armonía musical. Estas ideas fueron atribuidas, erróneamente, a Vitruvio. Los griegos, a pesar de ser un pueblo altamente culto, no dejaron documentos perdurables que describiesen el sistema de las proporciones que ellos utilizaron en su arquitectura. Posteriormente las únicas pruebas perdurables aparecen en la obra de Vitruvio. No existen comentarios durante el período medieval, de forma que el estudio sobre Vitruvio tuvo que empezar, completamente de nuevo, durante el Renacimiento. Los humanistas de mediados del siglo XV eran neoplatónicos y consideraban la obra de Platón como la flor de la cultura clásica. Muy pocos entre ellos llegaron a entender los escritos de Vitruvio sobre la proporción en la arquitectura. De hecho, fue el matemático Cardano quien, en el siglo XVI, atribuyó a Vitruvio una teoría de la proporción basada en la música. Aunque no es posible encontrar dicha teoría en los libros de Vitruvio, existe un comentario al respecto en el **Timeo** de Platón. El interés de Vitruvio en la música se limitaba a la entonación (resonancia agradable) correcta de las cuerdas tensadas de las catapultas, y a la construcción de los resonadores en los teatros para facilitar la audición.

Alberti, arquitecto renacentista, escribió en sus **Diez Libros de Arquitectura:**

<<...y de hecho cada día estoy más convencido de la verdad del adagio pitagórico, que dice que la naturaleza nunca dejará de actuar de manera consistente y con una analogía constante en todas sus operaciones, de lo que concluyo que los mismos números por medio de los cuales lo agradable de los sonidos afecta con deleite a nuestros oídos, son exactamente los mismos que agradan a nuestros ojos y a nuestra mente>>. [1]

Alberti **se sirvió de estas proporciones musicales** para relacionar las tres dimensiones (altura, longitud y anchura), pero no para añadir o restar dimensiones. La analogía musical acentuó el placer visual al mantener proporciones que pueden expresarse como **proporciones de enteros**, y pensadores como Cardano insistieron en que tales proporciones eran agradables porque eran inteligibles.

Cuando estos problemas fueron tratados durante el siglo XIX, se señaló que la octava es el más perfecto de todos los acordes musicales, pero que difícilmente la proporción de dos a uno (la de las frecuencias de las notas en cuestión) es una proporcion agradable al aplicarla a un edificio.

Anteriormente,Hogarth, en su **Análisis de la Belleza** (1753), habló de aquellos escritores que no sólo han confundido a la humanidad con multitud de divisiones minúsculas e innecesarias, sino también con un extraño concepto sgún el cual estas divisiones están gobernadas por las leyes de la música. Y Helmholtz, en su libro **Sensaciones de tono**, publicado en 1862, comentó que la consonancia de las notas de un acorde puede explicarse fácilmente por la ausencia de los compases desagradables entre los tonos parciales de las notas reproducidos por ciertas membranas del oído humano. Por lo tanto, se trata fundamentalmente de un fenómeno fisiológico dependiente de la estructura del oído, y no de un fenómeno psicológico dependiente del reconocimiento de proporciones simples por parte de la mente. En otras palabras, !una alteración de las membranas no produciría un cambio en la actitud estética! Desafortunadamente, hoy estamos menos seguros que Helmholtz con respecto a lo que queremos decir cuando hablamos de un **fenómeno puramente psicológico.** No vamos aventurarnos más en estos terrenos tan polémicos, pero queremos tan solo insistir en la importancia de una cierta teoría en el campo del diseño arqutentónico.

Palladio (1518-1580), un siglo después de Alberti, cuando ya se había disipado el primer ímpetu del Renacimiento, se mostró bastante cauto con respecto a cualquier explicación teórica de lo que se realizaba. La Contrareforma insistió en la importancia de la autoridad, y esto significaba la de Vitruvio y de las deducciones sacadas de las medidas arqueológicas de los restos físicos que nos quedan de la antigüedad. Allí donde Palladio se aleja de Vitruvio, confía en la medida de los edificios clásicos, pero evita la analogía musical y las otras ideas de Alberti, con la excepción del uso de **medios aritméticos**, geométricos y armónicos cuando determina la altura de las salas abovedadas.

Vamos a describir brevemente las definiciones de dichos "medios". Se dice de un conjunto de números a_1, a_2, a_3,... que está en **progresión aritmética** si la diferencia entre cualquier número y su sucesor es constante, de forma que:

$$a_2 - a_2 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots$$

Por ejemplo, el conjunto 1, 3, 5, 7, 9, ... está en progresión aritmética. Un conjunto tal que, $a_1 + a_3 = 2a_2$, $a_2 + a_4 = 2a_3$,... etc., donde cada número del conjunto es igual a la mitad de la suma de los números que se encuentran a cada lado tiene una propiedad muy particular y que consiste en que se dice de cualquier número del conjunto es la **media aritmética** de los números que se encuentran a cada lado. Tenemos la norma para formar la media aritmética de dos números dados **a y b**,

$$\textbf{media aritmética} = (a+b)/2.$$

Si un conjunto de números a_1, a_2, a_3, a_4,... es tal que la proporción de cualquier número del conjunto con respecto a su predecesor es constante,

$$a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = \ldots$$

entonces dícese del conjunto que está en **progresión geométrica**. Aquí, $a_1a_3 = (a_2)^2$, $a_2a_4 = (a_3)^2$ ... y por lo tanto cada número del conjunto es igual a la **raíz cuadrada** de los números que se encuentran a cada lado, y la media geométrica de dos números dados **a y b** se da por la formula:

$$(\textbf{media geométrica})^2 = \mathbf{ab}.$$

Finalmente, se dice que un conjunto de números $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_4}$, ... está en progresión armónica si el conjunto de los inversos

$$1/a_1,\ 1/a_2,\ 1/a_3,\ 1/a_4, \ldots$$

está en progresión aritmética. También aquí, cualquier número del conjunto es llamado **media armónica** de los números que se encuentran a cada lado, de forma que para hallar la media armónica de dos números **a y b**, buscamos primero la media aritmética $[(1/a)+(1/b)]/2$ de sus recíprocos, y el recíproco de ésta cifra, de manera que:

$$\textbf{media armónica} = 2ab/(a+b).$$

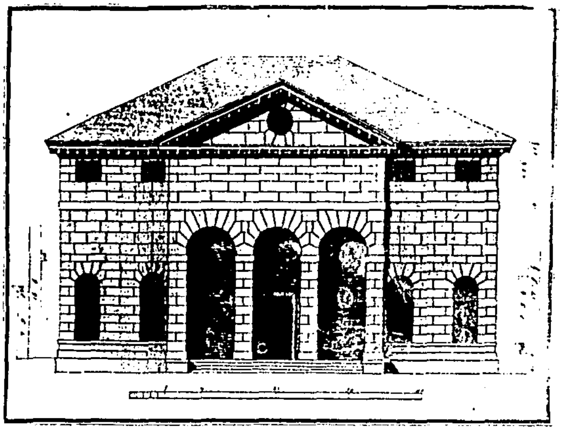
El comentario de que el tono de una cuerda tensa depende del inverso de su longitud se remonta a Platón. Si al pulsar una cuerda tensada se le detiene a medio camino y se le vuelve a pulsar, la nota producida la segunda vez es la octava de la nota sin interrumpir. Si se para la cuerda de manera que sólo una tercera parte de ella vibra, la nota producida tiene una frecuencia igual a tres veces la frecuencia fundamental, y así notas de una escala pueden formarse al parar la cuerda en puntos que sean múltiplos racionales de la longitud original. De aquí la importancia de las series **armónicas**, cuyos inversos están en progresión aritmética. La serie armónica más simple es, naturalmente,

$$1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \ldots$$

Como comentamos anteriormente, Palladio se sirvió de medias **aritméticas, geométricas y armónicas** para determinar la altura de las habitaciones abovedadas. Estas ideas, que fueron idóneas para Italia desde el punto de vista arquitectónico, fueron adaptadas a veces a países más fríos, con unas consecuencias desastrosas en cuanto a comodidad, ya que producían habitaciones de techos muy altos que difícilmente podían calentarse lo suficiente. Palladio se sirvió de una norma más sencilla para las habitaciones de techo plano, e insistió en que deberían ser tan altas como anchas.

El Alto Renacimiento llegó tan tarde a Inglaterra que la teoría musical de la proporción perduró hasta el siglo XVIII sin necesidad de renovarse. Luego fue despreciada en la corte, precisamente cuando en Francia e Italia estaba siendo sometida a una renovación, y, Hogarth coadyuvó a destrozar cualquier ascenso que pudiera haber ganado. Pero no hay duda de que tuvo su época de renombre, e Iñigo Jones (1573-1652) se sirvió de ella en el proyecto de la sala de banquetes del palacio de Whitehall- que es un doble cubo- y en la Casa de la Reina en Greenwich, cuyas habitaciones están construidas usando simples proporciones integrales.

Al juntar dos cuadrados se forma un cuadrado doble, y si juntamos dos cuadrados dobles obtenemos un cuadrado que repite el diseño del cuadrado original. Esta propiedad aditiva simple del cuadrado fue utilizada con eficacia en la arquitectura del Renacimiento como se muestra en la lamina 1.



2. Repetición de figuras geométricas similares y empleo del cuadrado superimpuesto a un cuadrado doble en la arquitectura del Renacimiento (Villa Zeno en Cesalto, diseñada por Palladio)

Lamina 1

Durero probó ambas escalas (la armónica y la aritmética) de proporción; la escala armónica para tomar la mitad, la tercera parte, etc., de una unidad, y la escala aritmética simplemente para añadir unas unidades a otras. Lo interesante de los estudios extensivos de Durero sobre las proporciones humanas consiste en que el **único ejemplo** de la repetición de proporciones que dice haber hallado, fueron las medidas comprendidas entre **cuello y cadera,**

cadera y rodilla, y rodilla y tobillo. Durero creía haber hallado una progresión geométrica entre todas ellas, de manera que para la mayoría de los seres humanos:

(cuello a cadera)(rodilla a tobillo) = (cadera a rodilla)^2

Hubo intentos, después del Renacimiento, para probar que los arquitectos de aquella época gloriosa nunca se habían servido de proporciones inconmensurables, es decir, de proporciones **no** expresables como la proporcion de dos enteros. Pero el propio Vitruvio defiende el uso de rectángulos en los que un lado mide $\sqrt{2}$ veces el otro, y sin duda por esta razón en 1750 Palladio incluye el rectángulo de $\sqrt{2}$ en la lista de las siete formas que recomienda para los planos de habitaciones.

Al parecer no fueron utilizados los pentágonos estrellados extensibles en la arquitectura. La relación del pentagrama con la magia pudo haber influido en este hecho, pero no existe la menor duda acerca de la aplicación de la estrella de ocho puntas. Este diseño de Leonardo no es más que uno de los muchos que pueden encontrarse en sus cuadernos, y casi todos están basados en estrellas extensibles de ocho puntas. La división de un círculo en ocho partes iguales produce un ángulo de 45°, y un triángulo recto isósceles de lados unitarios tiene ángulos de 45° y una hipotenusa igual a $(2)^{1/2}$. Por lo tanto, no cabe duda de que las estrellas de ocho puntas introdujeron los números irracionales.

Los arquitectos del Renacimiento ya conocían la proporción áurea que hemos citado en relación con la construcción euclidiana del pentágono regular, pero no se sirvieron de ella de forma eficaz como instrumento de proporción. Sin embargo, manifestaron gran interés por ella, y Piero della Francesa y Luca Pacioli, en sus estudios sobre los cinco sólidos regulares platónicos, demostraron que habían aprendido todo lo que Euclides podía haberles enseñado. Sabemos que Pacioli se refería a la proporción áurea como la **divina proportione**, y se cree que el término **proporción áurea** se originó en Alemania durante la primera mitad del siglo XIX. Será esta relación $\mu = (1+\sqrt{2})/2$ la que examinaremos a continuación.

Es verdad que un rectángulo cuyos lados guardan la proporción dada por la proporción áurea es más hermoso que un rectángulo cuyos lados guardan la proporción de **2:1** por ejemplo, o la de **3:2**, o la de **5:7**. Se han llevado a cabo encuestas para decidir cuál es la respuesta, y se ha llegado a unas conclusiones no del todo convincentes, aunque tal vez algo inclinadas en favor de la proporción áurea. Pero, puede un rectángulo, **por sí solo**, ser extraordinariamente hermoso o bien feo en extremo ?

El secreto de las proporciones no parece residir en las formas en sí, sino en la relación que existe entre ellas. Ya hemos insinuado que las teorías de estética, que naturalmente tratan con lo que se ve, provocan fuertes pasiones en personas aparentemente apacibles. En cualquier biblioteca, en las secciones dedicadas a la arquitectura, cabe leer libros en los que se ataca la proporción áurea como instrumento arquitectónico, y algunos de ellos están escritos con razonamientos perfectamente sensatos.

En particular, nos encontramos con el comentario pertinente que dice que todo en arquitectura, al igual que en pintura, depende de la posición del que lo contempla, y que si algunas proporciones parecen corresponder a la proporción áurea desde una posición, aparentarán corresponder a una proporción distinta desde otra posición. Desarrollaremos esta afirmación, sirviéndonos de algunas nociones de geometría.

Supongamos que la parte delantera del edificio sea un rectangulo (fig. 1) dividido por una línea horizontal según la proporción áurea, de modo que si tomamos una sección de plano ortogonal a la fachada, resulta que CB/BA = μ, es decir, la proporción áurea. Supongamos, asimismo, que un ojo se mueve a lo largo de la línea horizontal a través de A, y que el observador siente una emoción de tipo estético cuando llega al punto F, lo que significa que, ya que el tamaño aparente depende del ángulo sostenido por el ojo,

(ángulo CFB)/(ángulo BFA) = μ.

Hagamos ahora que el círculo que pasa por C, F, y B intersecte la línea horizontal que atraviesa A, otra vez en E. Entonces, ángulo CEB = ángulo CFB, ya que estos ángulos están situados dentro del mismo segmento de un círculo. Pero el ángulo BEA, al ser el ángulo exterior del triángulo BFE, es mayor que el ángulo BFA. De aquí que

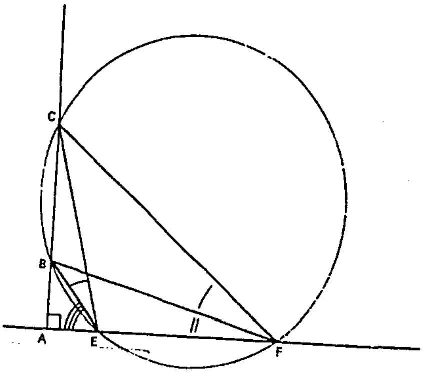


figura 1

(ángulo CEB)/(ángulo bea) < (ángulo CFB/(ángulo BFA), de modo que si la división realizada por una línea horizontal aparenta corresponder a la proporción áurea desde una posición, no lo hará desde otras.

En su libro **Simetría**, al que ya nos hemos referido, Hermann Weyl se limita a mencionar a la sección áurea como aquello, que ha desempeñado un papel tan importante en los esfuerzos para reducir la belleza de la proporcion a una fórmula matemática>>.

Pero algo cabe decir en favor del atractivo estético de determinadas proporciones, entre ellas la proporción áurea, y vamos a examinar lo que dice P. H. Scholfield en su libro **The theory of Proportion in Architecture** (Cambridge University Press, 1958) a este respecto.

En la **figura 2a** vemos un rectángulo dividido en dos rectángulos por una línea paralela a dos de los lados. Comparamos las formas del rectángulo con las formas de los dos rectángulos en los que lo hemos dividido. En general, las tres formas son diferentes, pero existen métodos para eliminar una de ellas. En la **figura 2b** uno de los rectángulos menores es similar, en cuanto a forma, al

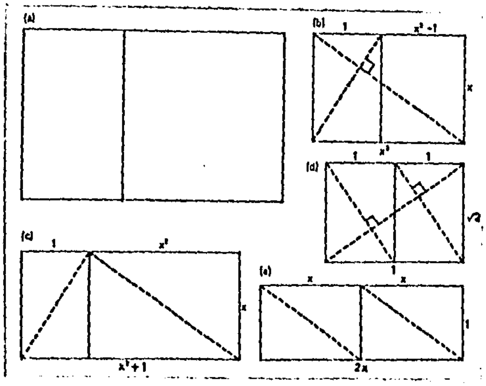


figura 2

rectángulo original. Entre ambos lados del rectángulo son x^2 y x, de modo que la relación es x, y la división realizada en el lado más largo se encuentra a una distancia **1** (la unidad) del borde. La relación para el rectángulo menor es, por lo tanto, también $x:1 = x$, de modo que este rectángulo tiene la misma forma que el rectángulo original, cualquiera que sea el valor de x. Vemos que las dos diagonales trazadas en la figura son perpendiculares.

En la **figura 2c**, el rectángulo original está formado por lados iguales a $x^2 + 1$ y x, y también aquí la división es una unidad a partir de uno de los extremos. Ahora, los dos rectángulos formados por la división son similares entre ellos, con la relación entre los lados $x:1 = x$, pero no son necesariamente similares al rectángulo original.

En la **figura 2e**, los lados del rectángulo son $2x$ y 1, y la división se ha realizado en el punto medio, de modo que los dos rectángulos obtenidos son idénticos.

Podemos eliminar ahora dos de las tres formas presentes en cada figura si el volumen a examinar es la **figura 2b** y escribimos:

$$1/x = (x^2 - 1)/x,$$

lo que nos da la ecuación $x^2 = 2$. Si tomamos ahora $x = \sqrt{2}$, la **figura 2b** se transforma en la **figura 2d**, en la que los tres rectángulos tienen todos la misma forma, y las diagonales trazadas en los rectangulos menores son perpendiculares a la diagonal trazada en el rectángulo original.

Si nos esforzamos en hacer que los tres rectángulos de la **figura 2e** tengan la misma forma, volveremos a obtener la **figura 2d**. Con esto estaremos de acuerdo en que el ojo sí responde a la similitud de las formas en la **figura 2d**.

Proseguimos esta investigación de formas simples y vamos a examinar un rectángulo dividido por líneas paralelas en ambos lados, como en la **figura 3a**. Si los contamos, vemos que hay nueve rectángulos de diferentes formas en esta figura. En la **figura 3b**, una de las divisiones es una división central, lo que reduce el número de formas diferentes de nueve a seis. Si se examina la cuestión de reducir todavía más el número de las distintas formas, existen tres casos en los que el número de formas diferentes se reduce a **tres**. Estos casos pueden verse en las **figuras 3c, 3d y 3e**, donde $\mu = (1 + \sqrt{5})/2$, la proporción áurea. Al comprobar la similitud de las formas, es útil servirse de la propiedad $1 + \mu = \mu^2$, correspondiente a la proporción áurea.

Existe también un caso, que puede verse en la **figura 3f**, donde no existe ningún eje de simetría vertical ni horizontal, sino tan sólo un eje de simetría diagonal. La forma original es un cuadrado. Hay tres cuadrados en la figura, y seis rectángulos, dos de los cuales tienen la relación μ.

No cabe duda de que la proporción áurea parece tener algunas propiedades atractivas, y vamos por ello a continuar la presentación de algunas de sus propiedades matemáticas.

Si consideramos la progresión geométrica

$$1,\ \mu,\ \mu^2,\ \mu^3,\ \mu^4, \ldots,\ \mu^n, \ldots$$

tenemos que

$$\mu^3 = \mu + \mu^2 = \mu + (1+\mu) = 2\mu + 1,$$

$$\mu^4 = 2\mu^2 + \mu = 3\mu + 2,$$

$$\mu^5 = 3\mu^2 + 2\mu = 5\mu + 3,$$

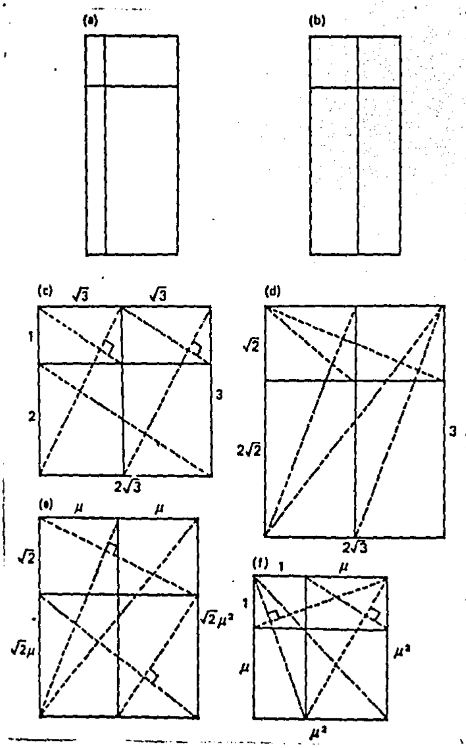


figura 3

y que:

$$\mu^n = \mu^{n-1} + \mu^{n-2},$$

con lo que los **coeficientes** de μ que obtenemos cuando expresamos potencias de μ en términos de μ son una serie de números enteros **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...** en los que, si u_n es el término **n (ésimo)** de la serie, entonces

$$u_n = u'_{n-1} + u'_{n-2}.$$

Así, empezando por el tercer término, **2 = 1+1,** y luego **3 = 2+1, 5 = 3+2, 8 = 5+3, 13 = 8+5,** y el próximo término de la serie es **21 = 13+8,** etc.

Este conjunto de números tiene un largo historial y es conocido como **serie de Fibonacci.** Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, tropezó con ella en el **año 1202,** en relación, nada menos, que con la cría de conejos. Fibonacci **partio de la suposición** de que los conejos viven sempiternamente, y de que cada mes cada pareja concibe una nueva pareja, que a su vez es productiva a la edad de dos meses. En el primer mes, el experimento se inicia con una pareja recién nacida de conejos, por lo que apuntamos el número **1.** En el segundo mes hay todavía una sola pareja, por lo que apuntamos **1** de nuevo. En el tercer mes, nace una pareja, por lo que apuntamos el número **2.** En el cuarto mes tenemos **3** parejas, en el quinto mes **5** parejas, y así sucesivamente, y es fácil ver cómo surge la siguiente relación:

$$u^n = u^{n-1} + u^{n-2}.$$

Es curioso que esta relación no fuese formulada concretamente por Leonardo de Pisa, sino señalada por Kepler cuatro siglos más tarde.

La serie de Fibonacci representa también un papel en todo lo relacionado con los pentágonos regulares o los pentágonos estrellados. En la figura 4 mostramos algunas de las diferentes proporciones en las que la proporción áurea está implicada, y que tanto intrigaron a Pacioli y a numerosos artistas desde entonces.

Las propiedades aditivas de la proporción áurea las que tienen tanta importancia en el diseño. Cada vez que una nueva longitud u^n del diseño se traza igual a μu^{n-1}, donde la longitud u'^{n-1} ya esta trazada, existe la satisfacción de saber que $u^n = u^{n-1} + u^{n-2}$, de modo que cabe adaptar unas a otras las partes del diseño.

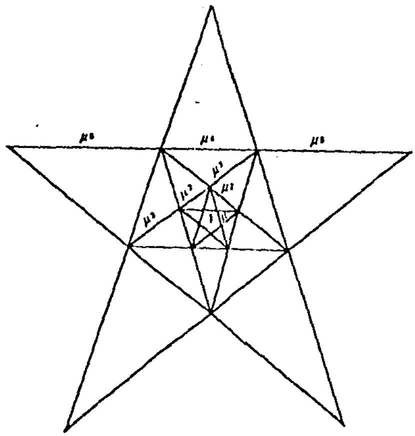
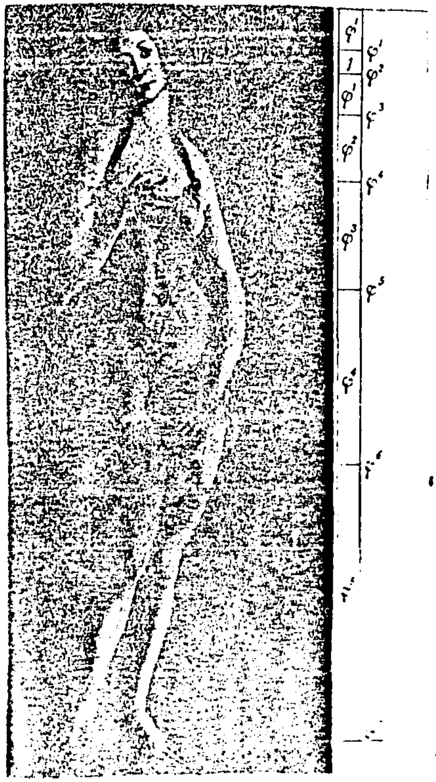


figura 4

El entusiasmo que demostraron los entusiastas de la proporción áurea queda ilustrado en la lamina 2, tomada de



Lamina 2

The Curves of Life de Sir Theodore Cook, libro publicado en Londres en **1914**. La púdica dama es, naturalmente, una Venus de Botticelli, y sir Theodore ha elegido ciertos puntos para demostrar que las distancias entre ellos corresponden a la proporción áurea. Cabría discutir con Sir Theodore acerca de su preferencia en la elección de ciertos puntos más que de otros. Vitruvio,

eligió el ombligo como un punto clave, y hasta aquí sir Theodore sigue su ejemplo. Como muchos otros, se sirve de un símbolo diferente a nuestro μ para representar la proporción áurea.

Sir Theodore examina también un paisaje de Turner y da una **escala universal de proporción áurea** que, con toda razón, P. H. Scholfield califica como precursora del Modulor, la escala empleada por Le Corbusier. Es cuestión aquí de un poco de geometría elemental, que se puede explicar como sigue:

En la **figura 5**, sean **A, A', A'',...** puntos sobre la línea, y supongamos que las líneas **AB, A'B', A'', B'',...** son todas ellas perpendiculares a la línea **AA'**, donde las líneas **BB'B'', EE'E'', FF'F'',...**atraviezan todas el mismo punto **V** sobre la línea **AA'**. Luego, es un teorema de triángulos similares el que las relaciones **AB:AE:AF:,...,** **A'B': A'E':A'F':..., A''B'':A''E'':A''F'':...** sean todas iguales.

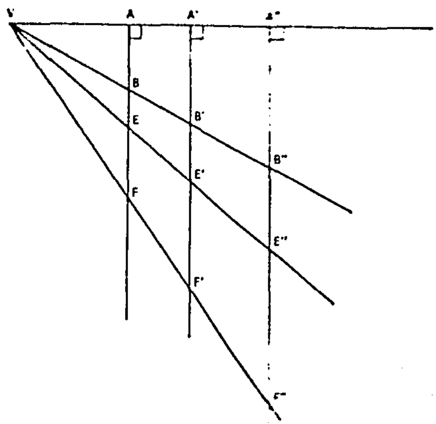


figura 5

También es un caso especial de este teorema el que, puesto que las líneas **AB, A'B', A''B'',...** son todas paralelas, las relaciones **AA':AA''...**, **BB':BB''...**, **EE':EE'':...** sean todas iguales. Por lo tanto, tenemos un método para construir cualquier cantidad de escalas que corresponderían a la proporción áurea, con una unidad de longitud apropiada a la construcción o verificación que estamos realizando.

En la **figura 6**, puede verse un rectángulo que corresponde a la proporción áurea con el cuadrado **ABCD** recortado, lo que deja un rectángulo **BEFC** cuyos lados también corresponden a la proporción áurea. Si ahora tomamos este rectángulo **BEFC**, y demarcaremos el cuadrado **BEGH** contenido en él, el rectángulo restante **FGHC** tambien tiene los lados correspondientes a la proporción áurea, y podemos seguir demarcando un cuadrado del rectángulo **FGHC**, y luego otro cuadrado del rectángulo que queda, y así sucesivamente.

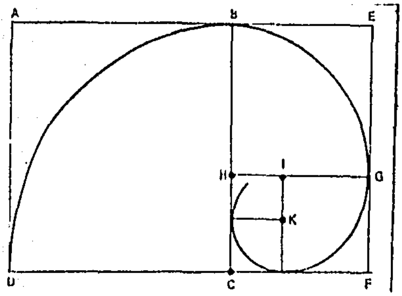


figura 6

Si nos servimos de estos cuadrados para trazar los cuadrantes de unos círculos, como se hace al describir la construcción aproximada de una espiral de Durero (figura 6), obtenemos una curva muy atractiva. Los centros sucesivos de los cuadrantes son **C, H, I, K,...** consideraremos una verdadera espiral, **la espiral equiangular,** que está relacionada con la proporción áurea.

Ya que hemos mostrado cierto entusiasmo por la proporción áurea, debemos subrayar aquí que por cada entusiasta ha habido también un crítico severo. Ruskin, en su libro **Modern Painters,** dijo: <<...la determinación de lo que son las proporciones correctas o incorrectas es tanto cuestión de sentimiento y experiencia como lo es la apreciación de una buena composición musical>>. Tres años más tarde, en **1849,** en **The Seven Lamps of Architecture,**[14] Ruskin menosprecia el empleo de las proporciones de la arquitectura, comparándolo con la <<disposición de los platos en la mesa, de los adornos de un vestido>>. Ruskin fue un crítico de mucha influencia, y el hundimiento de la teoría arquitectónica del Renacimiento, con las diferentes teorías de la proporción que formaron parte de ella, dejó a los arquitectos de la inglaterra del **XIX** con el programa de edificación más grande que el mundo había visto jamás y sin principios coherentes para guiarles.

La restauración de lo gótico fue una evolución natural. Basta señalar la Cámara de los Comunes en Westminster como ejemplo de una evolución cuando se le compara con los diseños basados en los edificios de la Grecia antigua, columnas dóricas, jónicas y corintias. Pero un regreso a lo gótico difícilmente ofrecía un conjunto de normas para la edificación, ya que se sabía muy poco acerca de las teorías medievales de las proporciones.

Es evidente que desde que se dispuso de traducciones de Euclides al árabe (a partir del siglo XII) se utilizaron construcciones geométricas, pero existe muy poca información acerca de cómo fueron utilizadas. Una de las pocas pruebas al respecto es una descripción de una disputa sobre el diseño de la catedral de Milán en 1392. cuando una mayoría de los arquitectos eran partidarios de un trazado triangular en vez de uno cuadrado.

La aplicación de los métodos góticos en el diseño de las iglesias, se basan en tres normas. La primera norma fijaba la longitud y anchura generales de la iglesia por medio de la construcción dada en la Proposición 1 de Euclides, es decir, la erección de un triángulo equilátero sobre una base dada (figura 7).

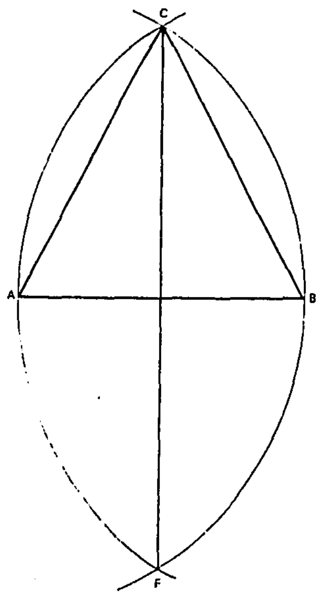


figura 7

La longitud queda representada por **CF** y la anchura por **AB**, y había frecuentes referencias a la forma del area limitada por los dos círculos como **vesica piscis** (vejiga de pez). Pero esta construcción, que también proporciona un método para la construcción de una línea dada, pudo haber sido utilizado para establecer los ejes principales de la iglesia, ya que no todas las iglesias góticas tienen las dimensiones relativas de la **vesica piscis.** La segunda norma gótica que ha sobrevivido trataba de la subdivisión del plano de la iglesia en intercolumnios (espacio que hay entre dos columnas) iguales, y la tercera determinó la altura de las diferentes partes por medio de la construcción de triángulos equiláteros.

Naturalmente, la construcción de los rosetones, como en Chartres, implicaba la geometría de polígonos regulares y estrellados y quedan algunos cuadernos de bocetos para aclarar el tema. Pero si bien no puede negarse el interés que suscitaba la geometría, existen pocas pruebas en cuanto a su aplicación. La investigación sobre la dimensiones de las ruinas antiguas generalmente ha producido la clase de resultados que el investigador esperaba obtener, y, asimismo, gran parte de la investigación de la arquitectura gótica, con la conjunción de círculos y triángulos para probar un punto de vista, era polémica. Y naturalmente, incluso Vitruvio había recomendado algunas sutiles correcciones ópticas, de modo que los arquitectos góticos iban alterando sus diseños a medida que avanzaba la construcción.

Como ilustración de la dificultad que existe en descubrir una teoría de la forma en la arquitectura, tenemos el historial de la construcción de la catedral de San Pablo en Londres, edificada después del Gran Fuego, cuando ya no fue posible restaurar la estructura gótica original. El arquitecto, Christoper Wren, era profesor de astronomía en Oxford en 1657, y aunque permaneció cierto tiempo en París, vio construir partes del Louvre y conoció al gran Bernini, quien estaba encargado de la edificación. Wren comenta que lo único que le enseñó Bernini con respecto al plano del Louvre fue un conjunto de cinco pequeños diseños sobre papel, acerca de los cuales dijo Wren habría dado mucho por poderlos copiar.

Fueron rechazados los proyectos originales de Wren para la catedral, y no existen diseños de la estructura actual. Parece ser que la primera intención de Wren era realizar un plano según el modelo de la cruz griega, pero los comisionados consideraron que <<un largo cuerpo central con naves laterales>> parecería <<una impertinencia, ya que nuestra religión no se sirve de procesiones>>. Además de pedir también <<una cúpula que resaltara por encima de las casas>>, los comisionados no deseaban un plano que <<se desviara tanto de la antigua forma gótica de las iglesias católicas que ellos (el pueblo) están acostumbrados a contemplar y admirar en este país>>.

El estilo de la cúpula de Wren es claramente italiano, pero la construcción difiere completamente de la de San Pedro, en Roma. Ya que Wren reconstruyó muchas iglesias en la ciudad de Londres, tuvo amplia oportunidad para, si hubiera querido hacerlo, desarrollar una teoría de la forma en la arquitectura. Pero como aprendió arquitectura mientras trabajaba en el andamiaje con los albañiles, es muy posible que estuviera demasiado ocupado para desarrollar una teoría.

Si nos centramos en el período victoriano la situación en Inglaterra durante la segunda mitad del siglo XIX era la siguiente: los arquitectos se sentían desilusionados con la aritmética y desconfiaban de la geometría, y en consecuencia algunos rompieron con la tradición y crearon sus propios estilos. Todavía se admira la arquitectura victoriana en estos momentos en Inglaterra, pero lo cierto es que ya no quedan muchos ejemplos de ella que podamos admirar.

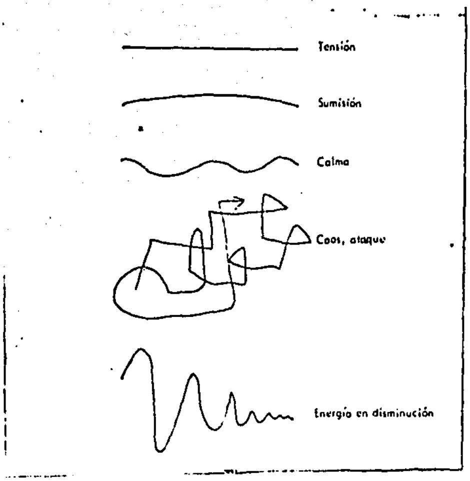


figura 8

Cualquiera que fuera el principio, será criticado, pero han habido quienes han abogado por **la repetición** de figuras similares. Ya hemos mencionado los que están dispuestos a atacar el servirse de la proporción áurea como principio estático. Algunos señalan que nuestra percepción de un edificio es un proceso dinámico y que el factor más importante es cierto **ritmo** arquitectónico. Ofrecemos una ilustriación del efecto producido en los observadores por medio de una serie de dibujos lineales simples **(figura 8)**. Posiblemente no todo el mundo interpretará estos dibujos de la misma manera, pero es seguro que un factor común de muchos de los edificios considerados en general como hermosos, es la repetición de figuras geométricas similares.

Concluiremos este capítulo con un comentario bastante breve sobre Le Corbusier, cuyo sistema se amolda a un método definido por muchos arquitectos, ya que se sirve de una escala, el Modulor, inventada por el propio Le Corbusier y que asegura la repetición de formas similares. El Modulor no es solamente un instrumento de proporción arquitectónica, sino también un medio de asegurar la repetición de formas similares, como vimos en nuestro comentario sobre las diferentes formas que pueden hallarse en un rectángulo gracias a unas lineas transversales horizontales y verticales.

La unidad de longitud de cualquier escala tiene su importancia, y vimos que el Modulor se basa en el cuerpo humano. Otro módulo usado por Le Corbusier es el de un hombre con el brazo levantado por encima de la cabeza. Estos módulos se usaron con bastante éxito en el diseño de muebles, además del de los edificios, y siempre debe recomendarse la aplicación de medidas antropométricas en el diseño de aquellas.

Le Corbusier tuvo mucho éxito y colaboró en el proyecto del edificio de las Naciones Unidas en Nueva York. Uno se pregunta si alguna vez leyó las obras de Vitruvio. Los proyectistas del gigantesco edificio de Manhattan hicieron caso omiso del hecho que el sol de la tarde, al entrar por las infinitas ventanas de las oficinas, calentaría de manera insoportable los interiores. Vitruvio, que se preocupaba mucho del bienestar humano, nunca habría cometido tal error.

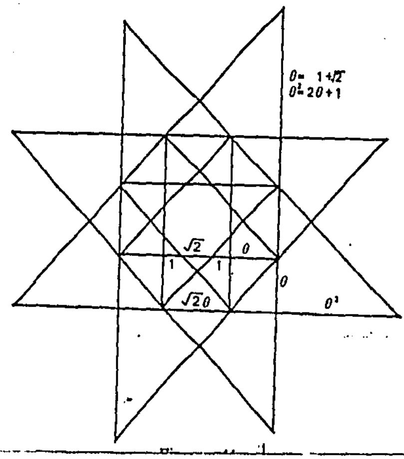


figura 9

Nuestro último dibujo del presente capítulo es la **figura 9, en la que se muestra otro Modulor** posible, con una relación de $\Theta = 1 + \sqrt{2}$, tal como queda ilustrado en el octágono en forma de estrella ideado por da Vinci. A partir de la relación Θ, tenemos $\Theta^2 = 2\Theta + 1$, y si

$$u_n = \Theta u_{n-1} = \Theta^2 u_{n-2}$$

obtenemos la relación

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$$

que se compara desfavorablemente con la relación

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

entre los términos sucesivos que forman parte de la proporción áurea.

B I B L I O G R A F I A.

1 Versión castellana: *Los Diez libros de Arquitectura, facsímil*, Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos de Austrias, Oviedo, 1975.

2 Dan Pedoe. *La geometría en el arte*. Editorial Alianza, 1984. Pp. 89-108.

CAPITULO IV

GEOMETRIA Y FORMA

La idea de un renacimiento en las artes y de la literatura y el conocimiento se remonta al siglo XIV, siendo la fuente de inspiración de la primera generación de humanistas y artistas que dieron sentido a la noción de un retorno a la edad de oro de los antiguos. Nuestra propia visión de la época está fuertemente matizada por las declaraciones de quienes la vivieron y los cambios que de manera evidente tuvieron lugar en el ámbito de las técnicas pictóricas y arquitectónicas.

Queda fuera de toda discusión el que los pintores medievales consideraban a las pinturas como representaciones dispuestas sobre una superficie que era, por así decirlo, opaca ante el paso de la luz. En términos visuales, la pintura medieval se disponía sobre la superficie de un sustracto, y este efecto seguía conservándose aun cuando el sustracto fuera transparente, como es el caso de los ventanales decorados. Con Giotto y otros grandes maestros de la pintura que le sucedieron se inicia el dominio gradual de las técnicas de representación del espacio, transformándose la superficie de la pintura en un plano a través del cuál el observador contempla el objeto ocupando tres dimensiones. Para cuando inicia el siglo XVI la **teoría** de la **perspectiva** había alcanzado su madurez, tanto filosófica como matemáticamente, dando por concluida la gran revolución que permitió al ojo educado interpretar de manera más adecuada la representación del mundo visualizado. Esta revolución no puede ser entendida exclusivamente en términos de cambios en las técnicas, debiéndose tomar en cuenta que fue una revolución de la **percepción** asociada a métodos racionales de representación de la realidad.

No podemos, sin embargo, relegar a los artistas medievales al nicho de quienes erraron al describir adecuadamente la realidad inmediata. El arte medieval contó con realistas consumados. Pero este realismo no se ocupaba todavía de la pintura como tal, se dirigía hacia la escultura, la arquitectura y la ilustración de manuscritos. El artesano medieval se inclinada por representar al individuo, "con todo y verrugas", poniendo poca atención a lo que lo rodeaba, preocupándose exclusivamente por el tema central de la obra. Por el contrario, los artistas italianos del Renacimiento buscaron transmitir las proporciones matemáticas generales y la estructura ideal que pensaban brillaba a través de lo particular. Adoptando una concepción cíclica de la historia, se veían a sí mismos embarcados en una recuperación de los logros artísticos e intelectuales de los tiempos clásicos.

Esta situación no se aleja mucho de la verdad, pues si bien es imposible afirmar que hubo un rompimiento en todo aquéllo que define un estilo de vida, lo cual permitía hablar del paso de una época a otra, si es cierto que en distintos campos del saber surgieron nuevas ideas y modos de pensar que apuntaban a una nueva visión del hombre (al menos del europeo occidental) y de su relacion con la naturaleza. El hombre del Renacimiento no sólo sabía más que el medieval, los productos de su intelecto apuntan a nuevos intereses y se ven marcados tanto por un sincretismo como por intentos de sintetizar o relacionar temas y disciplinas consideradas ajenas entre sí. El intelectual medieval era el heredero de la epistemología aristotélica, y por ello en su pensamiento proliferaban clasificaciones y separaciones, fuera entre razón y fe o entre una y otra rama del conocimiento. Cada disciplina se distinguía por el método propio de la búsqueda que le caracterizaba, cada campo del saber gozaba de su muy especial tipo de resultados y grados de exactitud. Todo ser pensante en el Medievo tenía una noción de orden y la realidad entera (social, política, religiosa, cognoscitiva) era, en principio, un sistema jerárquico de subordinaciones o superordinaciones claramente definido. En este sistema de enlaces a las siete artes liberales les correspondían siete planetas, siete metales y siete virtudes, todas ordenadas en orden ascendente de valía y dignidad.

Por otra parte, para un renacentista como Ficino[1] se confunden la filosofía y la teología, la fe con el conocimiento, el pensamiento pagano con el cristiano, todo con el afán de lograr la unidad. Una unidad, por cierto, con ataduras por demás difusas, y que con frecuencia se origina en ingenios analógicos y metafóricos, dejando de lado el rigor lógico. La mezcla de ideas provenientes de Platón y Aristóteles, aunadas a los escritos de los antiguos magos y astrólogos y de los exponentes de la patrística (Ciencia que estudia la doctrina, las obras y vidas de los padres de la iglesia) y la teología medieval, encuentran un sitio en este complicado sistema. Tan intrincada resulta la madeja que penetrar en ella resulta equiparable a pasear por un mundo de penumbras iluminado en ocasiones por deslumbrantes destellos luminosos.

Sin embargo, también es cierto que la confluencia de disciplinas tan variadas, de la confusión intelectual, de síntesis prematuras y callejones sin salida, dio causes a nuevas versiones del mundo y a un nuevo concepto del hombre: el héroe intelectual. Este sería el hombre universal, usualmente un artista, pero en ocasiones, siguendo otra tradición del universalismo, el mago o hacedor de milagros. El caso que nos interesa es el del pintor, del que se esperaba tuviera conocimientos de matemáticas (sin lo cual no podría manejar la perspectiva) y fuera un atento observador de la naturaleza, en especial del cuerpo humano. Como ejemplo basta citar al prototipo (cosas de la publicidad) del *uomo universale*, Leonardo, quien no se consideraba otra cosa que artista[2]. tanto para él como para sus contemporáneos, ser artista implicaba por necesidad saber anatomía, ser a la vez físico y matemático. Esta extensión del concepto de artista derribaba las barreras que separaban a las artes liberales de las mecánicas, unía al artista y al artesano calificado con el filósofo y el hombre de letras, reclamando la dignidad e importancia alcanzada por éstos últimos y preparando el camino para la unión de ciencia y tecnología, la observación prolongada de los fenómenos naturales y la innovadora actitud de llevar a cabo experimentos que informaran acerca de los cauces que sigue la naturaleza[3].

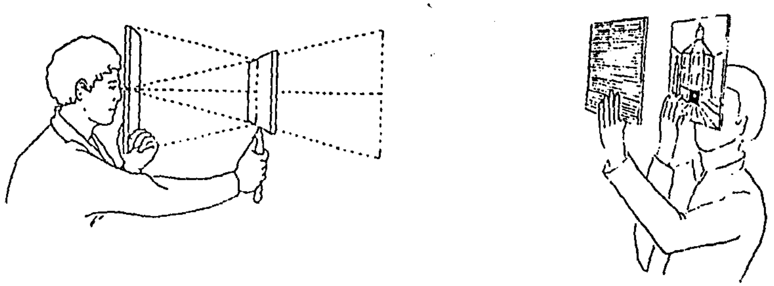
El nuevo sueño, el de dominar a la naturaleza, se concretó en el terreno de la pintura en un afán de recrear el mundo, de desbordar los límites impuestos por la mera transposición de lo observado sobre un muro o una tela. Se buscó, con éxito, plasmar correctamente en una superficie tanto escenas reales como las nacidas de la mente del autor, con personajes del pasado o inventados, situados en paisajes naturales o conjuntos arquitectónicos imaginarios, en ocasiones llevando a cabo tareas jamás vistas. Sin un modelo real que copiar, dicha tarea solo sería realizable si se contaba con reglas claras para los tamaños y la colocación de los elementos que constituirían la obra del artista. Sólo así la imaginación encontraría la vía de su representación. Frente a esta necesidad (un reclamo de la época) es que surge la *perspectiva artificial o lineal o costruzione legittima*, y que hoy simplemente se conoce como perspectiva. [4]

LA PERSPECTIVA

El problema que resolvieron las técnicas de representación en perspectiva fue el de dotar de *profundidad* a los frescos y bajorrelieves, tan populares durante toda la Edad Media y los inicios del Renacimiento. Como lo señala Panofsky[5,6] en su clásico estudio sobre perspectiva, las obras medievales típicas proponen un *espacio agregado*, un espacio en que los objetos se *yuxtaponen* sin que se tengan en cuenta adecuadamente sus relaciones espaciales. en florencia, entre 1420 y 1425, se desarrolló lo que Panofsky llama *espacio sistema*, una forma de representación en la cuál los objetos ocupan situaciones precisas -en oposición a arbitrarias- unos con respecto a otros y se organizan de un modo adecuado y unitario. En términos más sencillos lo anterior se puede parafrasear diciendo que lo que se logró fue crear la ilusión de reducir a dos dimensiones escenas que tienen lugar en el espacio tridimensional. Así, para un espectador que contempla la obra correctamente realizada, le parecería -dadas ciertas condiciones- estar contemplando un "congelamiento" temporal de la realidad, una ilusión espacial[5,6].

Que esto fuera posible queda demostrado por una anécdota que nos ha llegado gracias a Antonio de Tuccio Maneti, quien en su *Vida de Brunelleschi (1840)* atribuye la invención de la perspectiva (c. 1402) al famoso arquitecto florentino. Tal honor proviene de un experimento óptico ya legendario mediante el cual Brunelleschi logró la apariencia de profundidad construyendo dos paneles que representaban dos lugares por demás conocidos para los florentinos: el Baptisterio y la Plaza de la Señoría. Ambos trabajos, si existieron, están perdidos. Sin embargo, y gracias a Menetti, podemos reconstruir los rasgos esenciales y apreciar su significado.

Una vez pintado el Baptisterio sobre un papel, Brunelleschi pedía al espectador que mirara por detrás a través de un pequeño agujero que se había perforado, de tal manera que la pintura fuera observable como una imagen reflejada sobre un espejo que sostenía frente a él. El agujero estaba situado en la parte de la iglesia de San Juan (como también se conocía al Baptisterio) donde decía el ojo de quien la observa si se situaba directamente enfrente de la puerta central de Santa Maria del Fiore. El cielo no se coloreaba en la pintura, dejando sólo una capa plateada que reflejaría "el aire y los cielos... y por lo tanto también las nubes, los cuales se moverían confrome soplara el viento". Este efecto contribuiría a darle mayor realismo a la escena que el espectador contemplaría a través del agujero. El uso del espejo plateado permite lanzar la hipótesis de que la imagen en el panel se logró pintando sobre el reflejo obtenido en el espejo. Sin embargo, esta hipótesis, si bien factible, no explica el supuesto avance teórico que implicaría el asentamiento de un conjunto de reglas geométricas que permitieran lograr el mismo efecto de objetos que disminuyen adecuadamente en tamaño conforme aumenta su distancia del primer plano pictórico, es decir, conforme se alejan del observador. Sea como fuere, Menetti declara que con dichos paneles "parecía como si se observara la realidad: lo tuve en mis manos y pude dar testimonio"[6,7]. Como se muestra en la figura siguiente:



Brunelleschi hizo un agujero en la tabla donde se había hecho la pintura... y colocó el ojo en la parte posterior, mirando hacia un espejo de manera tal que la pintura se reflejara en él,..., y era como observar el objeto real.

Con esto ilustramos algo de la pintura y de que el arquitecto necesita conocer la perspectiva, para que rrecurriendo a ella pueda mejorar, imaginar, etc., a todo el edificio. Ahora pasaremos a geometría y forma.

LOS CLAUSTROS DE HAUTERIVE

La tracería de ventanas en los claustros de Hauterive, que se muestran a continuación son completamente diferentes de las tracerías de la geometría en la arquitectura Gótica. No están construidos únicamente mediante métodos geométricos, pero en realidad muestran el juego de la geometría.

El monasterio Cisterciense de Hauterive está situado en las orillas del río Saane (Saarine), a unos 10 kilómetros al sur de Friburgo en Suiza. Todavía habitado por monjes del Císter, la historia de estas construcciones y/o edificios es presentada en detalle por Catherine Waeber Antiglio[8]. Los claustros y los coros de las iglesias fueron constituidos en los años 1320-1328. Algunas reconstrucciones tomaron lugar alrededor de 1910, pero lo que se ve en Hauterive son ventanas originales de lo medieval. Al oeste, norte y este partes de los claustros se conservan originales. Al sur las partes fueron quitadas en el siglo XVIII y dos de estas ventanas han sido ubicadas al oeste y este (números I y XIX) tal y como se muestran en la **figura 1**

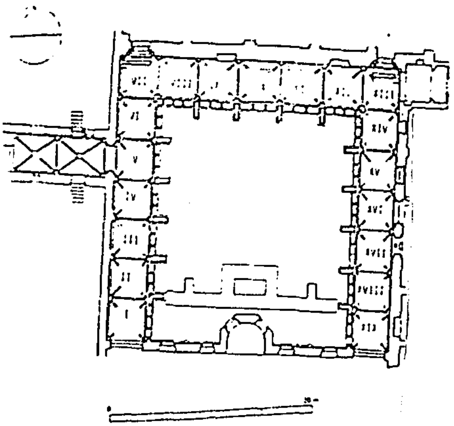


Fig. 1:Plano de claustros de Hauterive

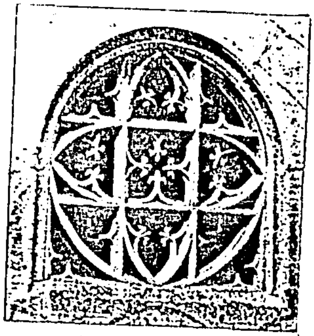
donde puede verse la fundación del ala sur anterior.

En cada bahía de los claustros encontramos la misma composición de ventanas: tres pequeñas, separadas por columnas dobles y arcos redondos, una apariencia casi románica.

En el ala norte vemos arcos redondos; al este y oeste las alas tienen puntas y arcos redondos alternados. Como se muestran en las ventanas I y XIX. [9]

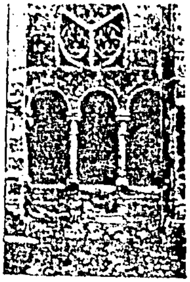

I


XIX

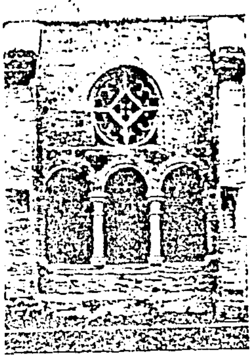

XIX

La ventana grande dentro del coro de la iglesia fue construida en el mismo periodo y claramente muestra el mismo estilo que los claustros. Waeber Antiglio[10] analiza con detalle el estilo arquitectónico y presenta un análisis histórico de los claustros y los coros de Hauterive; los ubica firmemente en el contexto con sus vecinos en el espacio y tiempo y en especial con el marco de la tradición arquitectónica de los edificios de la orden del Císter.

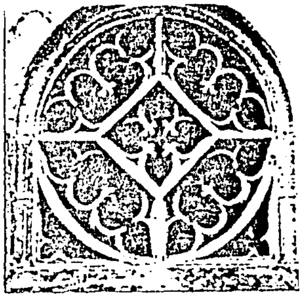
Ninguno de los dos Waeber-Antiglio o Sparh[11] mencionan el significado matemático de los diseños de las ventanas, que discutiremos. Sin embargo podemos observar el interés del arquitecto en el círculo como medio para obtener arcos redondos. Esto se desprende si nos damos cuenta que construye su figura dividiendo simetricamente el círculo en **tres (ventana II)**, cuatro **(ventana IX)**, cinco **(ventana VI)**, seis **(ventana XI)** en partes iguales. Con poco



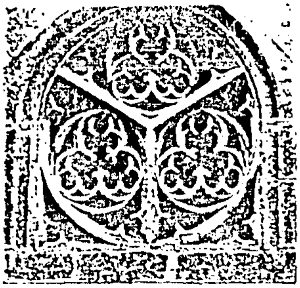
II



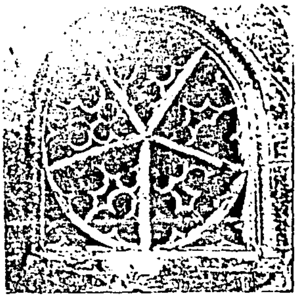
IX



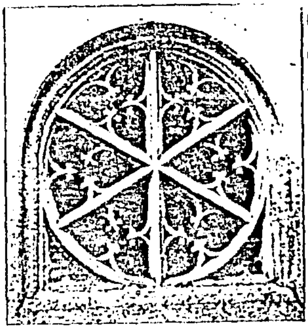
IX



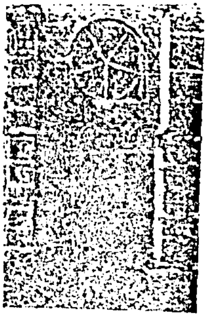
II



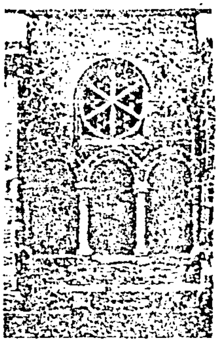
VI –



XI



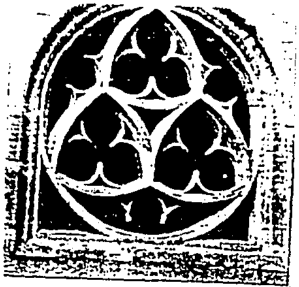
VI



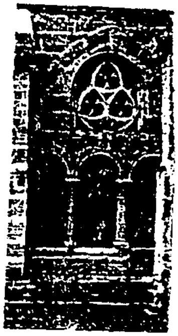
XI

adorno en los subdiseños el arquitecto realizó pruebas para salvar los diagramas geométricos, algunas veces satisfactoriamente, como en la IX, algunas veces menos convincente como en la XI. Cinco dobladuras simétricas son repetida por el pentagrama en la VI y otra vez en la hermosa e ingeniosa rosa construida en la **IV**.

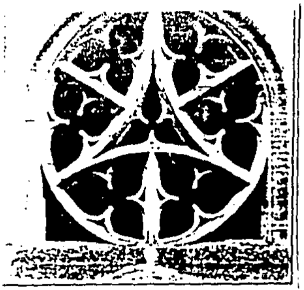
El tema de los triángulos aparece en la **ventana XII.**



XII



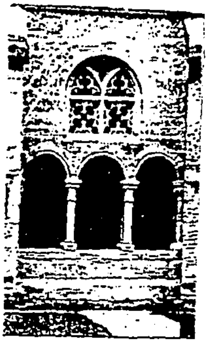
XII



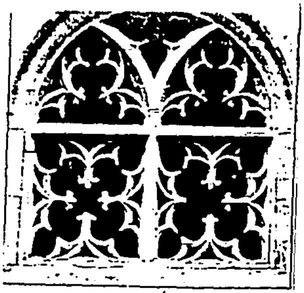
XVI

XVI

Tres y seis dobladuras simétricas están combinadas en la **ventana XVI**, que fue una construcción muy simple una vez que se considera al círculo como el rodeo de un triángulo equilátero. Cuatro y ocho están combinadas en **XIV**.



X



X

La **ventana X** probó tener esta forma suplantando el arco redondo; no vemos un círculo pero sí dos arcos cuadrados con la punta convencional en la parte superior. Una segunda vista revela el papel de esta ventana: dicha simetría bilateral hace incapie en el centro de los claustros derechos enfrente de la fuente al frente de la capilla.

LA DESIGNACION DE LOS ARCOS PUNTEAGUDOS

Durante los siglos XII y XIII, los constructores ensayaron un sinnúmero de posibilidades y aprovecharon las ventajas ofrecidas para generalizar la utilización de los arcos punteagudos. Algunos constructores romanescos utilizaron y clasificaron los diferentes tipos de arcos punteagudos. Un arco semi-circular (que uno puede considerar como una forma especial de arco punteagudo, en el que los dos centros están unidos en uno) siempre tiene la misma proporción: su altura (el radio) es una mitad de su base (el diámetro); pero las proporciones que pueden darse para los arcos punteagudos son innumerables.

Villard de Honnecourt famoso arquitecto por haber sido uno de los pocos de quien se conservan diagramas, vivió durante este periodo. en sus notas que nos han legado Villard menciona (f^0 20, v., pl. 40) dos tipos de arcos punteagudos: los "quint-point" y los "tiirc", un nombre referido en otros textos como "punto-triple", tal como se muestra en la **figura 2.**

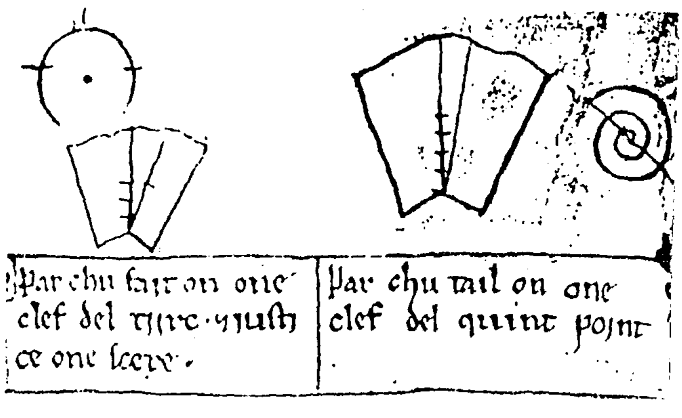


Fig. 2: Folio 20v.(pl.40) foto sobre una luz ordinaria.

Con tales arcos y con únicamente una medida (por ejemplo la longitud de la base o la altura requerida del arco o ambas), los albañiles señalaban los tamaños de las cortaduras de las piedras adecuadas en la construción.

Esto permitía al arquitecto una fácil elección de modelo, para ser utilizado en una constrcción de un edificio. Otros factores también eran tomados en cuenta, tales como considerar la ventilación en sitios como los talleres.

Esto a los constructores les fascinó pues les permitió estandarizar las curvas (esta posibilidad fue una de las ventajas de los arcos punteagudos). La estandarización de las curvas hizo posible, a su vez, contar con un número finito de modelos para el corte de las piedras, así como con el centrado de los arcos[12].

Uno de los textos de Villard, el cual ha sido frecuentemente publicada, muestra el uso del mismo radio para diferentes arcos, tal como se ilustra la **figura 3**.

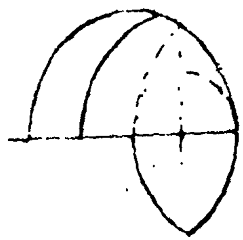


Fig. 3: Dibujo del manuscrito de Villard (Folio 21, pl. 41). Tres arcos dibujados con el mismo radio.

La frase "sans mole", repetida varias veces en los manuscritos, enfatizó la importancia para los constructores de modelos ahorrativos. Por lo tanto, el talento para trazar un arco y para el corte de las piedras sin alguna otra información más que el nombre del tipo de arco y la medida específica para seguirla (altura o longitud), fue muy apreciado.

Sin el uso de medidas de ángulos, la proporción de un arco punteagudo, independientemente de su tamaño, estaba estrictamente definida por los radios de la curva y por la distancia sobre la base entre los ejes y los dos centros simétricos. Estos dos segmentos de los dos lados de un triángulo rectángulo, del cual la hipotenusa es el radio del arco, fueron llamados "triángulo de referencia", y lucía tal y como se muestra en la figura 4:

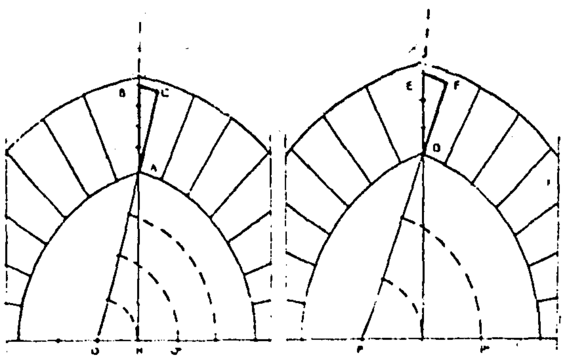


Fig 4: Para los dos arcos punteagudos diferentes, el "Triangulo de referencia" ABC y DEF, dibujados sobre la piedra clave o "de guía", son, respectivamente, semejantes a los triangulos AHO y DIP (centros de los arcos: O y O', P y P'). AB/BC = 4/1. DE/EF = 3/1.

Por lo tanto, un triángulo dibujado en cualquier escala da la proporción, es decir, el tipo del arco punteagudo correspondiente. El tercer lado del triángulo es vertical y mide la altura del arco entre su base y las "piedras de guía", y si los otros dos lados son medidos con números enteros, la altura del arco resulta corresponder a números irracionales, los cuales eran desconocidos para los constructores góticos. Por lo tanto la altura debió haberse obtenido geométricamente a partir de conocer el tipo del arco elegido o seleccionado y la longitud de su base.

B I B L I O G R A F I A.

1 Allen, J. B. Michael. *The Platonism of Marsilio Ficino*, University of California Press, Calif., 1984.

2 Reti, Ladislao ed. *The Unkonown Leonardo*, Editorial McGraw-Hill, Co. England, 1974.

3 Cianchi, Marco. *Les Machines de Léonard de Vinci*, Editorial Beccoci. Florence, 1984.

4 Panofsky, Erwin. *La Perspectiva como Forma Simbólica*. Tusquets Editores, España, 1985.

5 Thuillier, P. Espacio y perspectiva en el Quattrocento, *Mundo Cinetífico* No. 43, 1985.

6 Duberry F. y Willats, J. *Perspective and other drawing systems*. Van Nostrand Reinhold Co., N. y., 1983

7 Kubovy, M. *The Psycology of Perpective and Renaissance* Art. Cambridge University Press, England, 1986.

8 y 9 y 10 Catherine Waeber-Antaglio, *Hauterive, la construction de une abbaye cistercienne au moyen age*, Fribourg: Editorial Universitaires (1976). [Everthying about the buildings and sculptures of Hauterive].

11 Columban Spahr, o. Cist., Hauterive, munchen und zurich: Schnell & Steiner (1984).

12 R. Bechmann, *Les racines des Cathedrales*, Paris, 1981, pp. 149-151.

CAPITULO V

LA GEOMETRIA SE CONVIERTE EN MUSICA

Al considerar la división de la unidad tanto a través del concepto de la función de la raíz (la raíz generativa de dos y la raíz generativa de 5) así como también a través del concepto de las proporciones de tres y cuatro términos que resultan de éstas. En este capítulo, al mismo tiempo aportaremos los conceptos de proporción y raíces de modo que su relación se pueda entender completamente y a la vez mostraremos cómo esta geometría resultante se convierte en la base de la armonía musical. Con optimismo esto ilustrará la aseveración de Goethe: "La geometría es la música congelada".

La mejor aproximación de alcanzar estos objetivos es por medio de lo que se considera el fundamento de las antiguas matemáticas filósoficas, la **ciencia de la mediación**, que es una simple observación de las funciones de los términos medios.

Platón dice que las comparaciones que se basan en cuatro elementos, es decir proporciones discontinuas de cuatro términos, son de la naturaleza de lo que él denomina como "conocimiento particular", que es de caracter vulnerable, abierto a la disputa y a la arbitrariedad. Lo contrario a esto es lo que él denomina como "conocimiento esencial", que no significa la simple acumulación de datos basados en hechos o incluso conceptos relacionados con objetos o fenómenos, sino que más bien consiste en una conciencia de lo metafísico que se construye a través de lo que la mente es capaz para lograr su comprensión. Las leyes que rigen la creación de las cosas son las mismas leyes. Platón afirma que se puede obtener dicho conocimiento a través del estudio de la mediación, que es la unión de dos extremos mediante un solo término medio.

Una proporción de mediación se puede definir como "Un grupo de tres números desiguales tal que dos de sus diferencias correspondan una con la otra en la misma relación como uno de estos números es para sí o para uno de los otros dos números". Este extraño matemático contiene la formula para los tres principales valores medios: el Aritmética, el Geometrico y el armónico.

Vamos a repazar paso por paso esta definición de los tres valores medios. Una proporción media está formada por cualquier grupo de tres números (**a,b y c**) siendo **a > b** y **b > c** (**a > b > c**), tal que "...dos de sus diferencias", es decir :

a - b (ésta es una diferencia) y
b - c (ésta es la segunda diferencia)

"... son una igual que la otra",

a - b : b - c

"de la misma manera que uno de estos números es el mismo caso":

caso 1 **a-b:b-c:: a:a, b:b, c:c**

"o que uno de estos números es para uno de los otros números":

caso 2 **a-b:b-c::a:b** ó

caso 3 **a-b:b-c::a:c.**

En el **caso 1** la expresión cuando se resuelve el término medio **b**, se convierte en

$$b = (a+c) / 2$$

que es la fórmula general para una proporción aritmética. 3, 5, 7 es una progresión aritmética con el término medio aritmético: **b = 5**.

En el **caso 2** la expresión, cuando se resuelve el término medio **b**, se convierte en

$$b^2 = a * c \quad ó \quad b = (a * c)^{1/2}$$

que es la fórmula general para la proporción geométrica. Los números 4, 8, 16 forman una progresión geométrica con el término medio geométrico **b = 8**.

En el **caso 3** el término medio **b** es :

$$b = 2ac \;/\; (a+c)$$

que es la fórmula general para la proporción armónica. Si se toman 2, 3, 6 se tiene una progresión armónica con el término medio armónico: **b = 3**.

Por lo tanto esta relación de mediación nos proporciona la fórmula general para todas nuestras operaciones matemáticas básicas. La proporción aritmética contiene la regla para la **suma** y su inverso, la resta, y describe la relación que facilita la serie natural de los números cardinales, **1,2,3,4,5,6,...,** etc. La proporción geométrica contiene la regla para la **multiplicación** y su inverso, la división, y describe la relación que facilita cualquier serie de progresiones geométricas. Como ya mencionamos, la suma y la multiplicación son los símbolos matemáticos de las normas de crecimiento. El término medio armónico se deriva de una combinación de los primeros; está formado por una multiplicación de cualquiera de los dos extremos **(a,c)** seguida de una división de este producto entre su promedio o término medio aritmético

$(a+c)/2$

Por ejemplo, se dan dos extremos, **6 y 12**, el **producto** de 6 y 12 es igual a **72**, el término **medio aritmético** entre 6 y 12 es **9**, y

$$72/9 = 9$$

de este modo **6,8,12** es una proporción armónica.

Aritmética: $b = a+c / 2$

Geométrica: $b^2 = ac$

Armónica: $b = 2ac / a+c$

Cada proporción tiene un número de características que son peculiares a ésta. Por ejemplo, la proporción aritmética muestra una igualdad de diferencia, pero una desigualdad de proporción. Así, en la proporción aritmética:

7-5 = 5-3 pero **7/5** no es igual a **5/3**.

Por otra parte, una proporción geométrica se caracteriza por una igualdad de proporción pero una desigualdad de diferencia. Por lo tanto, en la proporción geométrica

2,4,8 resulta que

4/2 = 8/4 pero **4-2 = 2** no es igual a **8-4 = 4**.

El caracter más importante e inescrutable de la proporción armónica es el hecho de que el inverso de cada progresión armónica es una progresión aritmética. De este modo **2,3,4,5** es una progresión aritmética ascendente mientras que la serie inversa **1/2, 1/3, 1/3, 1/4, 1/5** es una progresión armónica descendente. **En la música es la inserción de los medios armónico y aritmético** entre los dos extremos en proporciones dobles, que representan la octava doble, lo que nos da la progresión que se conoce como la proporción "musical", es decir **1, 4/3, 3/2, 2**. En otras palabras, los medios aritmético y armónico entre las proporciones geométricas dobles son las proporciones numéricas que corresponden a los intervalos tonales de la cuarta nota perfecta y la quinta nota perfecta, las consonancias básicas en casi todas las escalas musicales.

La estructura básica proporcional que contiene los axiomas para nuestras operaciones matemáticas fundamentales es también la estructura básica proporcional para las leyes de la música. Entonces vamos a investigar más adelante el papel de estas tres proporciones como las formas pensadas prototípicas para todo el universo de la música.

La progresión **1, 4/3, 3/2, 2** representa las frecuencias de una cuarta, quinta y octava nota fundamental. Después encontramos las proporciones aritmética y armónica entre las longitudes de las **cuerdas 1 y 1/2** que representan la división de la cuerda vibrante a la mitad que produce el aumento de frecuencia de la octava. Esto proporciona la progresión **1, 3/4, 2/3, 1/2,** ya que la media armónica entre **1** y **1/2** es **2/3**, la **quinta** nota músical, y la **media aritmética** entre **1** y **1/2** es **3/4**, la **cuarta** nota musical. Al comparar estas dos progresiones observamos una inversión de proporciones y una intersección de posiciones funcionales entre la media armónica y la aritmética.

El misterio de la armonía musical que se desarrolla de entre una inversión simultánea también contiene una simultaneidad de suma y multiplicación. La octava nota de un tono fundamental se logra mediante la suma de los intervalos: en las longitudes de lás cuerdas, la quinta más la cuarta equivale a la octava, y también la multiplicación de las frecuencias vibratorias de la cuarta y la quinta equivale a la octava (4/3 * 3/2 = 2). El efecto combinado de suma y multiplicación produce el logaritmo en matemáticas y, como ya hemos visto, la **Proporción de Oro** es el prototipo de esta forma de desarrollo.

La tabla que se indica a continuación expresa el

VIBRATION	NOTE	H M (FOURTH	A M (FIFTH)	OCTAVE
	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2
	6	8	9	12
STRING LEGNTH	12	9	8	6
	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	1/[illegible]
	NOTE	A M (FOURTH	H M (FIFTH)	OCTAVE

tab. muestra la inversión e intersección simultánea de los términos medios aritmético y armónico en la proporción musical, ya que se considera desde el punto de vista de la vibración y la longitud de la cuerda.

"misterio" explícito de la ley del sonido, lo cual significa que esos números considerados como proporciones de frecuencia en una escala ascendente equivalen a las longitudes de las cuerdas para la escala descendente. La ley de la armonía musical, cuando se contempla desde el concepto de la proporción de mediación, ha dado lugar a doctrinas que la consideran un símbolo de la ley del orden natural, en donde los movimientos de oposición, incluso simultáneos, interactúan para crear tanto el sonido como la forma. Dejando esto de lado, podemos ahora empezar a visualizar este principio numérico y armónico como geometría. La media geométrica se encuentra mediante la fórmula:

$$b^2 = ac.$$

La media armónica responde a la fórmula **b(a+c) = 2ac** y señala qu el producto de la suma de los extremos, multiplicado por la media es igual a dos veces el producto de los extremos, o

$$b = 2ac / a+c$$

A la proporción geométrica se le conoce como la proporción **perfecta** ya que es una relación directa **proporcional**, una igualdad de proporción unida por un término medio. Los valores medios aritmético y armónico desarrolan esta perfección a través de un intercambio de diferencias en un juego de alternación e inversión.

La octava musical se basa en un tono cuya frecuencia vibratoria es una proporción exacta de **2:1** con otro tono. Por ejemplo, en la guitarra si tocamos la primera cuerda, **EX**, se escuchará un tono fundamental que se conoce en la notación musical como **E**. Para un fácil cálculo le daremos a este sonido el valor de **6**, designando sus vibraciones por segundo. Entonces si mantenemos nuestro dedo en el traste marcado **E'** y después tocamos la longitud de la cuerda **E'X**, la cual es exactamente la mitad de la longitud **EX**, su frecuencia de vibración será el doble que la de **EX**. De este modo se proporciona el valor numérico de **12**, formando la proporción de **2:1** con **6**. El tono **E'X = 12** se **llama la octava de E**. Un sonido de octava tiene la peculiar característica que es del mismo timbre que el tono fundamental, tanto que parece armonizarse con él, sin embargo es definitivamente de diapasón alto. La experiencia de escuchar la octava contiene el "misterio" de una igualdad y diferencias simultáneas. Esta cualidad de percibir tanto la igualdad como la diferencia es parte del equilibrio de la mente que la geomtría sagrada pretende cultivar: alguien que perciba en forma precisa e incluso integre en forma armoniosa.

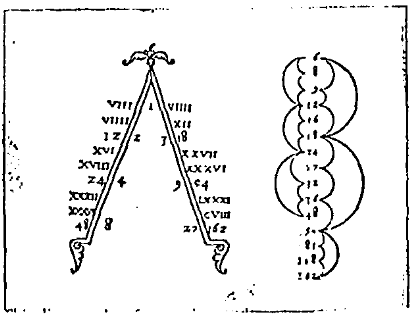
De igual manera, si colocamos nuestro dedo en el traste marcado **B** y hacemos que suene la longitud de la cuerda **BX** el tono estará en relación con el tono fundamental **EX** como **3:2**, o como ya se mostró, **9:6**. Este tono **B** es un sonido hermosamente consonante y se le conoce como la **quinta nota** porque es el quinto tono en una serie natural de divisiones de la cuerda **EX**, la escala principal diatónica, con **E** como **Do** y **B** como **Sol**. Existe una escala de ocho tales divisiones tonales desde **E** hasta **E'**, de aquí el nombre de **"octava"**. Si colocamos nuestro dedo en el traste marcado **A** y hacemos que suene la cuerda **AX** se escuchará otra nota consonante conocida como la **cuarta nota**, y su frecuencia se relacionará con el tono fundamental como **4:3**, o como se indica aquí, **8:16**.

Ahora vamos a tratar de encontrar verificaciones en un número de progresiones para lo que acabamos de redactar. En primer lugar tomaremos la serie geométrica, alineamos dos series geométricas (de proporción 2), una que empiece con el primer número impar (masculino) después de la unidad, 3, y la otra que empiece con el primer número par (femenino),

2.1:2 en forma numérica simboliza la octava, el medio especial en el cual la primera división consonante entre 3 (al dar la quinta 2/3) simboliza la siembra, la función de dar forma que incluye y especifica las divisiones proporcionales fijas dentro del océano principal del sonido no diferenciado, la octava.

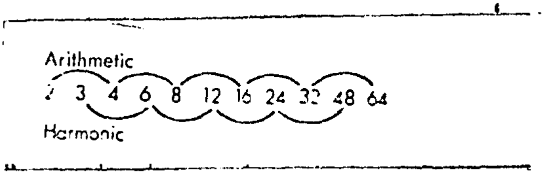
3	6	12	24	48
2	4	8	16	32

En el **Timeo**, Platón de muestra que la **multiplicación** de **2** y **3** nos da todos los números para el sistema pitagórico de tonos a través de la multiplicación sucesiva por quintas (3:2). Y como platonistas recordemos que **2** (dos) simboliza el poder de multiplicidad, la octava, lo femenino, receptáculo mutable, mientras que tres simboliza lo masculino, donador de ejemplos inmutable, fijo, especificador cuya tabla de multiplicación proporciona la totalidad de la música. Esta era la "música de las esferas", las armonías universales tocadas entre estos dos símbolos principales asociados a lo masculino y a lo femenino.



El diagrama conocido como de Giorgi indica las dos proporciones de 2 y 3, como lo presenta Platón en el Timeo, colocadas en asisiación con la proporción musical de 6,8,9,12. Utiliza la proporción musical como una base para generar un número para una sucesión de octavas, cuartas y quintas musicales; de este modo se crea un sistema armónico que se podría utilizar como un modelo para la arquitectura, la pintura y otras artes.

Ahora vamos a interpretar estas dos series geométricas de modo que las progresiones geométricas actúen como un tipo de capulación:



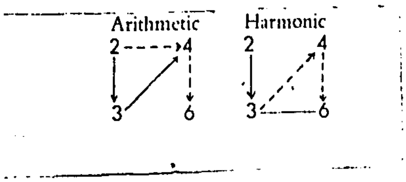
Aquí podemos observar que cada grupo superpuesto de tres números nos proporciona en forma alterna una proporción aritmética y una armónica: 2,3,4,... y 3,4,6,... respectivamente. Así, la combinación del número masculino, geométricamente generado, con el número femenino, también geométricamente generado, nos proporciona con esto dos números proporcionales posibles alternos.

Ahora vamos a tomar lo mismo que hemos visto en una estructura lineal y lo consideraremos como una estructura formal, a través de la tabla siguiente:

1	2	3	8	16	32	64
	3	6	12	24	48	96
		9	18	36	72	144
			27	54	108	216
				81	162	324
					243	486
						729

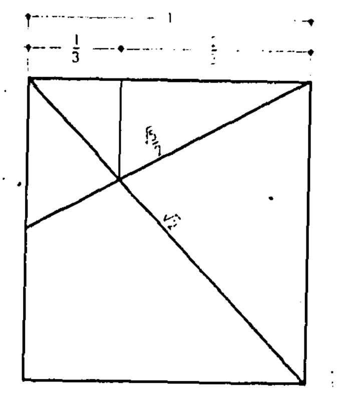
Esto es una ordenacón triangular que intersecta la progresión geométrica por 2 (horizontal) con la progresión por 3 (diagonal). Todos los números sucesivos verticales son unos a otro en la proporción 2:3, que es igual a multiplicar un término por 3/2 a fin de obtener el término de abajo. Esta multiplicación sucesiva por 3/2, la quinta nota musical, es el método empleado por los pitagóricos para generar la escala musical.

Al examinar la tabla anterior podemos observar que cada **cuadro de cuatro números**, por ejemplo 2,4,6,3, contiene dentro de él dos progresiones aritméticas (es decir 2,3,4 y 2,4,6) que nos dan tres lados formando la parte superior de un cuadrado y una diagonal. Vemos en la misma figura las progresiones armónicas 2,3,6 y 3,4,6:

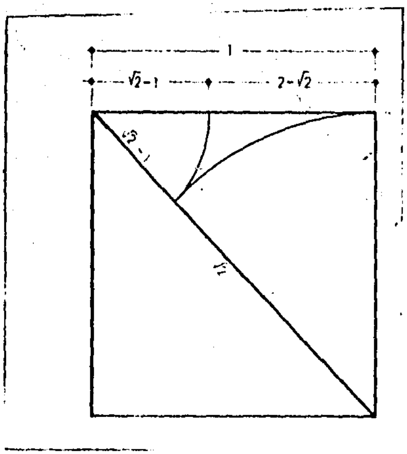


que dan los tres lados de un cuadrado, dos de los cuales se superponen en la primera proporción; el otro nos da el cuarto lado del cuadrado y la otra diagonal. De este modo tenemos en esta tabla, que nos ha sido transmitida por Nicomachus de Gerasa, una intercopulación de estas dos proporciones que producen el **cuadrado**, que corresponden a los números y proporciones musicales de los cuales se formó el Alma del Mundo, según lo afirmó Platón.

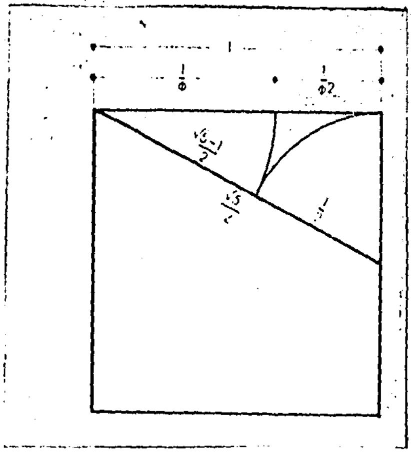
Otro ejercicio geométrico que mostramos más adelante ilustra la relación que existe entre las funciones de la raíz y los principios de medición que crean el mundo de la armonía en la música.



cuadro 1 Al utilizar el cuadrado como unidad tanto con su lado como su área igual a 1 vemos mediante evidencias geométricas o mediante trigonometría que al intersectar la $\sqrt{2}$ con la $(2/5)^{1/2}$ y simplemente dirigir una perpendicular desde el punto de intersección hasta el lado 1 (uno), dividimos la unidad en 1/3 y 2/3, y al emplear la unidad como el término más grande, tenemos una proporción aritmética de tres términos: 1/3, 2/3, 1. Esto corresponde a una proporción aritmética.



cuadro 2 Al utilizar nuevamente el cuadrado por unidad y por medio de un arco desde el extremo inferior izquierdo, resulta la longitud del lado 1 (uno) hacia la intersección con la diagonal de la √2. Después se dirige un arco desde el extremo superior derecho de la parte de atrás hasta el lado superior del cuadrado. Otra vez tenemos un punto en el lado superior en el cual se divide el cuadrado, pero esta división crea una proporción armónica de tres términos, (√2-1), (2-√2), 1.



cuadro 3 La última división del lado del cuadrado 1 se efectúa con la $\sqrt{5}/2$. Esto se lleva a cabo al dirigir un arco desde el punto de intersección a la mitad del lado con la semidiagonal y el arco con el radio igual a la mitad del lado en el extremo superior del cuadrado. Esto divide a nuestra unidad en una proporción geométrica: $1/\Phi^2:1/\Phi:1$.

Es quizás gracias a la conceptualización de las leyes de la mediación que podemos vislumbrar la relación fundamental entre la Música y la Geometría y la que Platón, en su **Séptima carta**, afirma que es más respetado que cualquier otro estudio del conocimiento. Y tal vez por la misma razón los egipcios construyeron dos grandes pirámides en Giza, una de las cuales se basa en $\mathbf{1, \sqrt{\phi}, \phi}$, el único triángulo cuyos lados se encuentran en la progresión aritmética, y el otro cuyos lados están en la progresión aritmética **3,4,5**.

B I B L I O G R A F I A.

1 Daniélou, Alain, *Traité de Musicologie Comparée*, Editorial Thames, Paris 1959.

2 Cahrpentier, Louis, *The mysteries of chartres*, Editorial Thames 1972.

3 Robert Lawlor. *Sacred Geometry*, Editorial Thames and Hudson, New York 1990.