4
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CATEGORIAS CARTESIANAS CERRADAS Y λ-CALCULOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

MARTIN CRUZ CUEVAS

MEXICO, D. F. 1994

CIUDAD UNIVERSITARIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios Profesionales
Exp. Núm. 55

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Universidad Nacional Autónoma de México.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo revisado el trabajo de tesis que realizó el pasante Cruz Cuevas Martín con número de cuenta 8608829-3 con el título: Categorías Cartesianas cerradas y λ-Calculos

Consideramos que reune los méritos necesarios para que pueda continuar el trámite de su Examen Profesional para obtener el título de Matemático.

GRADO NOMBRE Y APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
DR. HUGO ALBERTO RINCON MEJIA Director de Tesis	Hugo A. Rincón M.
DR. JOSE RIOS MONTES	José Ríos M.
M. en C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO	
M. en C. JOSE ALFREDO AMOR MONTAÑO Suplente	
M. en C. VIRGINIA ABRIN BATULE Suplente	Virginia Abrín Batule

Ciudad Universitaria, D.F., a [illegible] de [illegible] de 199

Mi agradecimiento a :

Mi asesor, Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía.

INDICE

INTRODUCCION

El λ-cálculo o lógica combinatoria es un tópico que los lógicos han estudiado desde 1924. Las categorías cartesianas cerradas son mas recientes en sus origenes, fueron inventadas por lawvere en 1964. Ambos son intentos de describir axiomaticamente el proceso de sustitución, en otras palabras, lo que intentamos presentar en esta tesis es que hay una equivalencia de categorías entre las categoría de categorías cartesianas cerradas con objeto de números naturales y la categoría de λ-cálculos tipificados con apareamientos suprayectivos.

Para poder alcanzar tal objetivo iniciamos con un estudio de sistemas deductivos. los sistemas deductivos son gráficas con una estructura adicional o categorías con ecuaciones perdidas o eliminadas, esto ha sido propuesto por un categorista, Fred Szabo hace muchos anos. La elección de axiomas y reglas de inferencia que desarrollamos en este capítulo esta motivado por la teoría de categorías y funtores.

En el capítulo dos vemos el teorema de deducción, el cual nos permitirá entender mas ampliamente el teorema de completez funcional que será visto con todo detalle en el capítulo seis.

En el capítulo tres introduciremos la definición de categoría cartesiana cerrada, que serán presentadas como un sistema deductivo que entre las pruebas satisfacen ciertas ecuaciones. La manera de presentar las categorías cerradas es una manera distinta a la forma en la cual se presenta en la literatura. En este capítulo presentamos una gran gama de resultados que se obtienen de forma clara al presentar a aquellas ecuacionalmente. Una advertencia antes de continuar es que a las categorías cartesianas cerradas, las denotaremos por $\mathbf{C}^3$.

En el capítulo cuatro veremos como poder generar una categoría cartesiana cerrada a partir de una gráfica. Este tema será muy motivante para estudiar como un λ-cálculo tipificado genera una categoría cartesiana cerrada.

La construcción usual del álgebra de polinomios en una indeterminada x encuentra en el capítulo cinco un paralelismo con una categoría polinomial con una flecha indeterminada.

En el capítulo seis, demostraremos el teorema de completez funcional para categorías cartesianas cerradas. De este resultado depende esencialmente la demostración de la equivalencia de categorías entre la categoría de λ-cálculos tipificados y la categoría de categorías cartesianas cerradas.

En el capítulo siete damos otra demostración del teorema de completez funcional, mostrando que las categorías polinomiales pueden ser vistas como categorías de Kleisli de un cierto cotriple. Dentro de este capítulo veremos otras categorías como son la de Eilenberg-Moore del cotriple $(\mathbf{S}_A, \varepsilon_A, \delta_A)$ la cual es isomorfa a la categoría 'slice'.

En el capítulo ocho, hacemos la observación de que uno puede hacer cálculo proposicional en una categoría bicartesiana cerrada. El hecho de que hay, a lo más, una flecha $A \to 0$ en una categoría bicartesiana cerrada y que no hay otras categorías booleanas que las álgebras booleanas.

En el capítulo nueve realizaremos un breve estudio de objeto de números que nos serán de utilidad.

En el capítulo diez, damos la definición de un λ-cálculo tipificado y damos varios ejemplos de ellos. Uno de los ejemplos dados será el lenguaje interno de una categoría cartesiana cerrada.

En el capítulo once, damos la demostración de la equivalencia categórica entre la categoría de λ-cálculos tipificados y la categoría de las categorías cartesianas cerradas con objeto de números naturales.

En el capítulo doce tratamos el problema siguiente: ¿ Cuándo un diagrama en una categoría conmuta, o equivalentemente, cuando dos flechas entre dos objetos son la misma?. Esto lo realizamos en $C(L_0)$, la categoría cartesiana libre con objeto de números naturales generada por el λ-cálculo puro, el cual es un objeto inicial $\mathbf{Cart}_N$.

En el capítulo trece damos una demostración del teorema de Church-Rosser para términos acotados.

El Capítulo catorce tratara la demostración de que todos los términos L_0 (λ-cálculo tipificado puro) son acotados.

En los tres últimos capítulos trataremos el estudio de monoides, categorías cartesianas cerradas y λ-cálculos no tipificados.

Por último, cabe senalar que este trabajo está basado en el texto de Lambek y Scott titulado **Introduction to Higher Order Categorical Logic**.

1. CALCULO PROPOSICIONAL COMO UN SISTEMA DEDUCTIVO

Para los categoristas una gráfica consiste de dos clases y dos mapeos entre ellos:

$$\mathit{Flechas} \underset{codominio}{\overset{dominio}{\rightrightarrows}} \mathit{Objetos}$$

En teoría de gráficas las flechas son usualmente llamadas "aristas orientadas" y los objetos "nodos" o "vértices". En lugar de escribir

$$\mathit{Dominio}(f) = A \qquad , \qquad \mathit{Codominio}(g) = B$$

escribiremos $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$

Veremos a las gráficas con estructura adicional lo cual será de interes en lógica.

definición. Un *sistema deductivo* es una gráfica con flechas específicas

R1a. $A \xrightarrow{\quad 1_A \quad} A$

y una operación binaria sobre flechas

R1b.

$$\frac{A \xrightarrow{f} B \qquad B \xrightarrow{g} C}{A \xrightarrow{gf} C}$$

En el contexto de la lógica podemos pensar a los objetos de un sistema deductivo como fórmulas, y a las flechas como reglas de inferencia.

Definición. Un *cálculo con conjunción* es un sistema deductivo dotado con una fórmula T (T=verdad) y una operación binaria $\wedge$ (= y) para formar la conjunción $A \wedge B$ de dos fórmulas dadas A y B las cuales deben satisfacer las siguiente reglas de inferencia:

R2. $A \xrightarrow{O_A} \mathrm{T}$
R3a. $A \wedge B \xrightarrow{\pi_{A,B}} A$
R3b. $A \wedge B \xrightarrow{\pi'_{A,B}} B$
R3c.

$$\frac{C \xrightarrow{f} A \qquad C \xrightarrow{g} B}{C \xrightarrow{\quad <f,g> \quad} A \wedge B}$$

Aplicando estas reglas podemos demostrar la conmutatividad y la asociatividad para la conjunción.

NOTA: En muchas ocasiones, en las demostraciones, no escribiremos los subíndices cuando apliquemos las reglas de inferencia, debido a que está implícito en el dominio y codominio.

Demostremos la conmutatividad:

$$\frac{A \wedge B \xrightarrow{\pi'} B \qquad A \wedge B \xrightarrow{\pi} A}{A \wedge B \xrightarrow{\quad <\pi',\pi> \quad} B \wedge A}$$

Demostremos la prueba de la ley asociativa
$\alpha_{A,B.C} : (A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C)$

$$\frac{\begin{array}{c}(A \wedge B) \wedge C \xrightarrow{\pi} A \wedge B \xrightarrow{\pi'} B \\ (A \wedge B) \wedge C \xrightarrow{\pi'} C\end{array}}{(A \wedge B) \wedge C \xrightarrow{<\pi'\pi, \pi'>} B \wedge C}$$

$$\frac{\begin{array}{c}(A \wedge B) \wedge C \xrightarrow{\pi} A \wedge B \xrightarrow{\pi} A \\ (A \wedge B) \wedge C \xrightarrow{<\pi'\pi, \pi'>} B \wedge C\end{array}}{(A \wedge B) \wedge C \xrightarrow{<\pi\pi, <\pi'\pi, \pi'>>} A \wedge (B \wedge C)}$$

$$\alpha_{A,B,C} \equiv < \pi\pi, < \pi'\pi, \pi' >>$$

Si componemos operaciones sobre pruebas, obtenemos reglas de infe rencia derivadas. Por ejemplo, consideremos la regla deducida

$$\frac{A \wedge C \xrightarrow{\pi} A \qquad A \xrightarrow{f} B}{A \wedge C \xrightarrow{f\pi} B} \qquad ...(1)$$

$$\frac{A \wedge C \xrightarrow{\pi'} C \qquad C \xrightarrow{g} D}{A \wedge C \xrightarrow{g\pi'} D} \qquad ...(2)$$

De (1) y (2) obtenemos

$$\frac{A \wedge C \xrightarrow{f\pi} B \qquad A \wedge C \xrightarrow{g\pi'} D}{A \wedge C \xrightarrow{<f\pi, g\pi'>} B \wedge D}$$

Esto afirma que de pruebas f y g se puede construir la prueba

$$f \wedge g = < f\pi_{A,C}, g\pi'_{A,C} >$$

Asi podemos escribir simplemente

$$\frac{A \xrightarrow{f} B \qquad C \xrightarrow{g} D}{A \wedge C \xrightarrow{f \wedge g} B \wedge D}$$

■

Definición Un cálculo proposicional intuicionista positivo es un cálculo conjuntista con una operación adicional binaria $\Leftarrow$ (= si). Así, si A y B son fórmulas también lo $\top$, $A \wedge B$ y $A \Leftarrow B$ (mucha gente escribe $B \Rightarrow A$), La $\Leftarrow$ debe cumplir las siguientes reglas de inferencia

R4a $(A \Leftarrow B) \wedge B \xrightarrow{\epsilon_{A,B}} A$

R4b $\dfrac{C \wedge B \xrightarrow{h} A}{C \xrightarrow{h^*} A \Leftarrow B}$

Notemos que con la ayuda de R4b podemos deducir

R'4b $C \xrightarrow{\eta_{C,B}} (C \wedge B) \Leftarrow B$

Demostración

$$\frac{C \wedge B \xrightarrow{1_{C \wedge B}} C \wedge B}{C \xrightarrow{(1_{C \wedge B})^*} (C \wedge B) \Leftarrow B}$$

Asi $\quad \eta_{C,B} = (1_{C \wedge B})^*$

Con R4a y R4b podemos deducir

R'4c

$$\frac{D \xrightarrow{g} A}{(D \Leftarrow B) \xrightarrow{g \Leftarrow 1_B} (A \Leftarrow B)}$$

Demostración

$$\frac{(D \Leftarrow B) \wedge B \xrightarrow{\epsilon_{B,D}} D \xrightarrow{g} A}{(D \Leftarrow B) \xrightarrow{(g\epsilon_{D,B})^*} (A \Leftarrow B)}$$

Asi $\quad (g \Leftarrow 1_B) = (g\varepsilon_{D,B})$

Así también podemos deducir R4b de R'4b y R'4c

$$C \xrightarrow{\eta_{C,B}} ((C \wedge B) \Leftarrow B) \xrightarrow{h \Leftarrow 1_B} A \Leftarrow B$$

Asi

$$h^* = (h \Leftarrow 1_B)\eta_{C,B}$$

Tenemos las siguientes dos reglas de inferencia, que usaremos más adelante

a)

$$\frac{A \xrightarrow{f} B}{\top \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} B \Leftarrow A}$$

Demostración

$$\frac{\top \wedge A \xrightarrow{\pi'} A \xrightarrow{f} B}{\top \xrightarrow{(f\pi'_{1,A})^*} B \Leftarrow A}$$

Asi

$$\ulcorner f \urcorner = (f\pi'_{1,A})^*$$

b)

$$\frac{\top \xrightarrow{g} (B \Leftarrow A)}{A \xrightarrow{g^{\int}} B}$$

Demostración

$$\frac{A \xrightarrow{\bigcirc_A} \top \xrightarrow{g} (B \Leftarrow A) \qquad\qquad A \xrightarrow{1_A} A}{A \xrightarrow{<g\bigcirc_A, 1_A>} (B \Leftarrow A) \wedge A \xrightarrow{\varepsilon_{B,A}} B}$$

Asi $\quad g^{\int} = \varepsilon_{B,A} < g\bigcirc_A, 1_A >$

Definición Un cálculo proposicional intuicionista es más que uno positivo. Este requiere tambien de una fórmula $\perp$ (=falso) y una operación binaria $\vee$ (=o) que actúa sobre fórmulas con las siguientes flechas adicionales

R5 $\perp \xrightarrow{\Diamond_A} A$
R6a $A \xrightarrow{\kappa_{A,B}} A \vee B$
R6b $B \xrightarrow{\kappa'_{A,B}} A \vee B$
R6c $(C \Leftarrow A) \wedge (C \Leftarrow B) \xrightarrow{(\zeta_{A,B})^C} C \Leftarrow (A \vee B)$

Con R6c y tambien con ayuda de algunas inferencias que hemos hecho anteriormente, podemos deducir
R'6c

$$\frac{A \xrightarrow{f} C \qquad B \xrightarrow{g} C}{A \vee B \xrightarrow{[f,g]} C}$$

Demostración

$$\frac{\dfrac{A \xrightarrow{f} C}{\top \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} (C \Leftarrow A)} \qquad \dfrac{B \xrightarrow{g} C}{\top \xrightarrow{\ulcorner g \urcorner} (C \Leftarrow B)}}{\top \xrightarrow{<\ulcorner f \urcorner, \ulcorner g \urcorner>} (C \Leftarrow A) \wedge (C \Leftarrow B)}$$

Aplicando a $(C \Leftarrow A) \wedge (C \Leftarrow B)$ $\quad (\zeta_{A,B})^C$

$(C \Leftarrow A) \wedge (C \Leftarrow B) \xrightarrow{(\zeta_{A,B})^C} C \Leftarrow (A \vee B)$

Inmediatamente se deduce

$$\frac{\top \xrightarrow{<((\zeta_{A,B})^C < \ulcorner f \urcorner, \ulcorner g \urcorner>} C \Leftarrow (A \vee B)}{A \vee B \xrightarrow{(((\zeta_{A,B})^C < \ulcorner f \urcorner, \ulcorner g \urcorner>))^{\int}} C}$$

Para obtener una lógica proposicional clásica requerimos

R7 $\quad \perp \Leftarrow (\perp \leftarrow A) \rightarrow A$
A continuación mostraremos que para sistemas deductivos apropiados, podemos obtener las siguientes pruebas y sus recíprocos que después nos serán de utilidad.

(a)
$A \wedge \top \to A$
Demostración

$$A \wedge \top \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{<1_A, \bigcirc_A>} A \wedge \top$$

■

(b)
$A \Leftarrow \top \to A$
Demostración

$$\frac{A \Leftarrow \top \xrightarrow{1_{A \Leftarrow \top}} (A \Leftarrow \top) \qquad (A \Leftarrow \top) \xrightarrow{\bigcirc_{A \Leftarrow \top}} \top}{A \Leftarrow \top \xrightarrow{<1_{A \Leftarrow \top}, \bigcirc_{A \Leftarrow \top}>} (A \Leftarrow \top) \wedge \top}$$

y

$$(A \Leftarrow \top) \wedge \top \xrightarrow{\varepsilon_{A,\top}} A$$

$$\frac{A \wedge \top \xrightarrow{\pi} A}{A \xrightarrow{(\pi')^*} (A \Leftarrow \top)}$$

■

(c) $\top \Leftarrow A \to \top$
Demostración
$\top \Leftarrow \xrightarrow{\bigcirc_{\top \Leftarrow A}} \top$

$$\frac{A \xrightarrow{\bigcirc_A} \top}{\top \xrightarrow{\bigcirc_A'} \top \Leftarrow A}$$

■

(d) $((A \wedge B) \Leftarrow C)) \to (A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)$
Demostración

$$\frac{\dfrac{A \wedge B \xrightarrow{\pi} A}{((A \wedge B) \Leftarrow C) \xrightarrow{\pi \Leftarrow 1_C} A \Leftarrow C} \qquad \dfrac{A \wedge B \xrightarrow{\pi'} B}{((A \wedge B) \Leftarrow C) \xrightarrow{\pi' \Leftarrow 1_C} B \Leftarrow C}}{((A \wedge B) \Leftarrow C) \xrightarrow{<\pi \Leftarrow 1_C, \pi' \Leftarrow 1_C>} (A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)}$$

$((A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)) \wedge C \xrightarrow{\alpha} (A \Leftarrow C) \wedge ((B \Leftarrow C) \wedge C) \xrightarrow{\pi'} (B \Leftarrow C) \wedge C) \xrightarrow{\epsilon_{B,C}} B$

$$
\begin{tikzcd}
 & ((A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)) \wedge C \arrow[d, "\alpha"] & \\
 & (A \Leftarrow C) \wedge ((B \Leftarrow C) \wedge C) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "<\pi, \pi'<\pi', \pi>>"] \arrow[r, "\pi'"] & (B \Leftarrow C) \wedge C \arrow[d, "<\pi', \pi>"] \\
A \Leftarrow C & (A \Leftarrow C) \wedge (C \wedge (B \Leftarrow C)) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & C \wedge (B \Leftarrow C) \\
 & ((A \Leftarrow C) \wedge C) \wedge (B \Leftarrow C) \arrow[d, "\pi"] & \\
 & (A \Leftarrow C) \wedge C \arrow[d, "\epsilon"] & \\
 & A &
\end{tikzcd}
$$

De lo anterior se sigue

$$
\frac{((A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)) \wedge C \xrightarrow{<\epsilon\pi\alpha'<\pi, \pi'<\pi', \pi>>\alpha, \epsilon\pi'\alpha>} A \wedge B}{((A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C) \xrightarrow{(<\epsilon\pi\alpha'<\pi, \pi'<\pi', \pi>>\alpha, \epsilon\pi'\alpha>)'} (A \wedge B) \Leftarrow C}
$$

■

(e)
$A \wedge \bot \rightarrow \bot$
Demostración

$$A \wedge \bot \xrightarrow{\pi'} \bot \xrightarrow{\diamond_{A \wedge \bot}} A \wedge \bot$$

■

(f)
$(A \Leftarrow \bot) \rightarrow \top$
Demostración

$$(A \Leftarrow \bot) \xrightarrow{O_{A \Leftarrow \bot}} \top$$

$$\frac{\perp \xrightarrow{\Diamond_A} A}{\top \xrightarrow{\ulcorner \Diamond_A \urcorner} (A \Leftarrow \perp)}$$

■

(g)
$A \vee \perp \to A$
Demostración

$$\frac{A \xrightarrow{1_A} A \qquad \perp \xrightarrow{\Diamond_A} A}{A \vee \top \xrightarrow{[1_A, \Diamond_A]} A}$$

$$A \xrightarrow{\kappa_{A,\perp}} A \vee \perp$$

■

(h)
$A \Leftarrow (B \wedge C) \to (A \Leftarrow C) \Leftarrow B$
Demostración

$$\cfrac{\cfrac{((A \Leftarrow (B \wedge C)) \wedge B) \wedge C \xrightarrow{\alpha} (A \Leftarrow (B \wedge C)) \wedge (B \wedge C) \xrightarrow{\varepsilon} A}{(A \Leftarrow (B \wedge C)) \wedge B \xrightarrow{(\varepsilon\alpha)^*} A \Leftarrow C}}{A \Leftarrow (B \wedge C) \xrightarrow{((\varepsilon\alpha)^*)^*} (A \Leftarrow C) \Leftarrow B}$$

$$\begin{tikzcd}
 & ((A \Leftarrow C) \Leftarrow B) \wedge (B \wedge C) \arrow[d, "\alpha"] & \\
 & (((A \Leftarrow C) \Leftarrow B) \wedge B) \wedge C \arrow[dl, bend right, "\pi"'] \arrow[dd, "\langle \varepsilon\pi, \pi' \rangle"] \arrow[ddr, bend left, "\pi'"] & \\
((A \Leftarrow C) \Leftarrow B) \wedge B \arrow[d, "\varepsilon"'] & & \\
A \Leftarrow C & (A \Leftarrow C) \wedge C \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "\pi'"'] \arrow[d, "\varepsilon"] & C \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

De lo anterior se obtiene

$$\frac{((A \Leftarrow C) \Leftarrow B) \wedge (B \wedge C) \xrightarrow{\varepsilon<\varepsilon\pi,\pi'>\alpha'} A}{(A \Leftarrow C) \Leftarrow B \xrightarrow{(\varepsilon<\varepsilon\pi,\pi'>\alpha')^*} A \Leftarrow (B \wedge C)}$$

■

(i)

$$\frac{A \xrightarrow{f} B \qquad C \xrightarrow{g} D}{A \vee C \xrightarrow{f \vee g} B \vee C}$$

Demostración

$$\frac{A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\kappa_{B,D}} B \vee D \qquad C \xrightarrow{g} D \xrightarrow{\kappa'_{B,D}} B \vee D}{A \vee C \xrightarrow{[\kappa_{B,D}f,\kappa'_{B,D}g]} B \vee D}$$

Así $f \vee g = [\kappa_{B,D}f, \kappa'_{B,D}g]$

■

(j)

$(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \to (A \wedge B) \wedge A$

Demostración

$$\frac{A \wedge C \xrightarrow{\pi} A \qquad B \wedge C \xrightarrow{\pi} B}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \xrightarrow{[\kappa\pi,\kappa'\pi]} A \vee B} \quad \ldots(1)$$

$$\frac{A \wedge C \xrightarrow{\pi'} C \qquad B \wedge C \xrightarrow{\pi'} C}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \xrightarrow{[\pi',\pi']} C} \quad \ldots(2)$$

De (1) y (2) obtenemos

$$\frac{\begin{array}{l}(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \xrightarrow{[\kappa\pi,\kappa'\pi]} A \vee B \\ (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \xrightarrow{[\pi',\pi']} C\end{array}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \xrightarrow{<[\kappa\pi,\kappa'\pi],[\pi',\pi']>} (A \vee B) \wedge C}$$

$$A \xrightarrow{\eta_{A,C}} (A \wedge C) \Leftarrow C \qquad \eta_{A,C} = 1^{*}_{A\wedge C}$$
$$B \xrightarrow{\eta_{B,C}} (B \wedge C) \Leftarrow C \qquad \eta_{B,C} = 1^{*}_{B\wedge C}$$

$$A \vee B \xrightarrow{\eta_{A,C} \vee \eta_{B,C}} ((A \wedge C) \Leftarrow C) \vee ((B \wedge C) \Leftarrow C)$$

$$\frac{A \wedge C \xrightarrow{\kappa} (A \wedge C) \vee (B \wedge C)}{(A \wedge C) \Leftarrow C \xrightarrow{\kappa \Leftarrow 1_C} ((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \Leftarrow C} \quad \ldots(3)$$

$$\frac{B \wedge C \xrightarrow{\kappa'} (A \wedge C) \vee (B \wedge C)}{(B \wedge C) \Leftarrow C \xrightarrow{\kappa' \Leftarrow 1_C} ((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \Leftarrow C} \quad \ldots(4)$$

De (3) y (4) obtenemos

$$((A \wedge C) \Leftarrow C) \vee ((B \wedge C) \Leftarrow C) \xrightarrow{(\kappa \Leftarrow 1_C) \vee (\kappa' \Leftarrow 1_C)} ((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \Leftarrow C$$

$$\begin{tikzcd}
 & (A \vee B) \wedge C \arrow[dl, "(\kappa \Leftarrow 1_C)\vee(\kappa' \Leftarrow 1_C)(\eta \vee \eta)\pi"'] \arrow[d, "<(\kappa \Leftarrow 1_C)(\kappa' \Leftarrow 1_C)(\eta\vee\eta)\pi{,}\pi'>"] \arrow[dr, "\pi'"] & \\
((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \Leftarrow C & (((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \Leftarrow C) \wedge C \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\varepsilon"] & C \\
 & (A \wedge C) \vee (B \wedge C) &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto

$$(A \vee B) \wedge C \xrightarrow{\varepsilon<((\kappa \Leftarrow 1)\vee(\kappa' \Leftarrow 1))(\eta \vee \eta)\pi, \pi'>} (A \wedge C)(B \wedge C)$$

■

Deduzcamos la siguiente regla de inferencia, para un sistema deductivo adecuado

$$\frac{A \xrightarrow{f} B \qquad C \xrightarrow{g} D}{A \Leftarrow D \xrightarrow{f \Leftarrow g} B \Leftarrow C}$$

Demostración

$$\begin{tikzcd}
 & (A \Leftarrow D) \wedge C \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "<\pi, g\pi'>"] \arrow[r, "\pi'"] & C \arrow[d, "g"] \\
A \Leftarrow D & (A \Leftarrow D) \wedge D \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\varepsilon"] & D \\
 & A \arrow[d, "f"] & \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

Así

$$\frac{(A \Leftarrow D) \wedge C \xrightarrow{f\varepsilon<\pi, g\pi'>} B}{(A \Leftarrow D) \xrightarrow{(f\varepsilon<\pi, g\pi'>)^*} B \Leftarrow C}$$

por lo tanto
$f \Leftarrow g = (f\varepsilon < \pi, g\pi' >)^*$ ■

Notemos que $\zeta_{A,B}{}^C$ puede ser definido en términos de la regla R6c

$$\frac{((C \Leftarrow A) \wedge (C \Leftarrow B)) \wedge (A \vee B) \xrightarrow{\pi'} (A \vee B) \xrightarrow{[f,g]} C}{((C \Leftarrow A) \wedge (C \Leftarrow B)) \xrightarrow{([f,g]\pi')^*} C \Leftarrow (A \vee C)}$$

■

2. EL TEOREMA DE DEDUCCION

El teorema de deducción usual afirma:

si $A \wedge B \vdash C$ entonces $A \vdash C \Leftarrow B$

Este resultado es incorporado en la regla R4, con el simbolo de deducción $\vdash$ reemplazado por flechas en el sistema deductivo apropiado L

$$\frac{h : A \wedge B \to C}{h^{*} : A \to C \Leftarrow B}$$

Sin embargo, en un nivel superior, las barras horizontales funcionan como un símbolo de deducción. y obtenemos una nueva forma del teorema de deducción. Nosotros formamos un nuevo sistema deductivo $L(x)$ adjuntándole una nueva flecha $x : \top \to A$ y hablamos de las pruebas $\phi(x) : B \to C$ en este nuevo sistema. En palabras más precisas, $L(x)$ tiene las mismas fórmulas de L y sus pruebas (=flechas) $\phi(x)$ son generadas libremente por las flechas de L y la nueva flecha x con las reglas apropiadas de inferencia (=operaciones). Claramente, si L es un cálculo de conjunción intuicionista positivo, también lo es el nuevo sistema deductivo $L(x)$

Proposición *(Teorema de deducción). En un Cálculo con conjunción, positivo, intuicionista o clásico, con cualquier prueba $\phi(x) : B \to C$ y con* *la hipótesis $x : \top \to A$ hay asociada una prueba $f : A \wedge B \to C$ en L que no depende de x.*

Demostración

Daremos la prueba para un cálculo positivo, la misma prueba es válida para un cálculo con conjunción, si $*$ se ignora.

Notemos que toda prueba $\phi(x) : B \to C$ desde la hipótesis $x : \top \to A$ debe tener una de las siguientes formas:

i) $k : B \to C$ una prueba en L;
ii) $x : \top \to A$ con $B = \top$ y $C = A$
iii) $< \psi(x), \chi(x) >$ donde $\psi(x) : B \to C', \chi(x) : B \to C'', C = C' \wedge C''$
iv) $\chi(x)\psi(x)$ donde $\psi(x) : B \to D, \chi(x) : D \to C$
v) $(\psi(x))^*$ donde $\psi(x) : B \wedge C' \to C''$, $C = C'' \Leftarrow C'$

En todos los casos $\psi(x)$ y $\chi(x)$ son pruebas más cortas para $\phi(x)$. Definimos inductivamente

i) $\kappa_{x \in A} k = k\pi'_{A,B}$
ii) $\kappa_{x \in A} x = \pi_{A,\top}$
iii) $\kappa_{x \in A} < \psi(x), \chi(x) > = < \kappa_{x \in A}\psi(x), \kappa_{x \in A}\chi(x) >$
iv) $\kappa_{x \in A}(\chi(x)\psi(x)) = \kappa_{x \in A}\chi(x) < \pi_{A,B}, \kappa_{x \in A}\psi(x) >$
v) $\kappa_{x \in A}((\psi(x))^*) = (\kappa_{x \in A}\psi(x)\alpha_{A,B,C'})^*$
donde $\alpha_{A,B,C'} : (A \wedge B) \wedge C' \to A \wedge (B \wedge C')$
Como se describe en seguida:

i) $\kappa_{x \in A} k = k\pi'_{A,B}$

$$A \wedge B \xrightarrow{\pi'_{A,B}} B \xrightarrow{k} C$$

ii) $\kappa_{x \in A} x = \pi_{A,\top}$

$$A \wedge \top \xrightarrow{\pi_{A,\top}} A \qquad B = \top \qquad C = A$$

iii) $\kappa_{x \in A} < \psi(x), \chi(x) > = < \kappa_{x \in A}\psi(x), \kappa_{x \in A}\chi(x) > =$
$< \psi(x)\pi'_{A,B}, \chi(x)\pi'_{A,B} >$

$$A \wedge B \xrightarrow{\pi'_{A,B}} B \xrightarrow{\psi(x)} C'$$
$$A \wedge B \xrightarrow{\pi'_{A,B}} B \xrightarrow{\psi(x)} C''$$

$$A \wedge B \xrightarrow{<\psi(x)\pi'_{A,B}, \chi(x)\pi'_{A,B}>} C' \wedge C'' = C$$

iv) $\kappa_{x\in A}(\chi(x)\psi(x)) = \kappa_{x\in A}\chi(x) < \pi_{A,B}, \kappa_{x\in A}\psi(x) >=$
$\chi(x)\pi'_{A,D} < \pi_{A,B}, \psi(x)\pi'_{A,D} >$

$$\frac{A \wedge B \xrightarrow{\pi_{A,B}} A \qquad A \wedge B \xrightarrow{\pi'_{A,B}} B \xrightarrow{\psi(x)} D}{(A \wedge B) \xrightarrow{<\pi_{A,B}, \psi(x)\pi'_{A,B}>} A \wedge D}$$

$$A \wedge D \xrightarrow{\pi'_{A,D}} D \xrightarrow{\chi(x)} C$$

v) $\kappa_{x\in A}(\psi(x))^* = (\kappa_{x\in A}\psi(x)\alpha_{A,B,C'})^*$

$$\frac{(A \wedge B) \wedge C' \xrightarrow{\alpha_{A,B,C'}} A \wedge (B \wedge C') \xrightarrow{\pi'_{A,B\wedge C'}} B \wedge C' \xrightarrow{\psi(x)} C''}{A \wedge B \xrightarrow{(\kappa_{x\in A}\psi(x)\alpha_{A,B,C'})^*} (C'' \Leftarrow C') = C}$$

Sobre el argumento dado por inducción sobre la longitud de la prueba $\phi(x)$. Formalmente, ésta puede ser definido como 0 en los casos (i) y (ii), como la suma de las longitudes de $\chi(x)$ y $\psi(x)$ mas 1 en los casos (iii) y (iv) y como la longitud de $\psi(x)$ más 1 en el caso (v).

■

Nota 1.- No distinguimos notacionalmente entre las composiciones de las pruebas gf en L y en $L(x)$. En L, $\kappa_{x\in A}gf = gf\pi'_{A,B}$ y en $L(x)$ esto es $g\pi'_{A,B} < \pi_{A,B}, f\pi'_{A,B} >$

Nota 2.- Los lógicos usualmente hablan de la hipótesis $x : \top \to A$ si hay una prueba conocida $a : \top \to A$ u otra hipótesis $y : \top \to A$, pero desde un punto de vista algebraico, esto no interesa.

Probaremos la siguiente forma general del teorema de deducción para el cálculo proposicional intuicionista positivo.

Proposición *(Forma general del teorema de deducción) Con cualquier prueba $\phi(x) : B \to C$ de la hipótesis $x : D \to A$ hay una prueba asociada $f : (A \Leftarrow D) \wedge B \to C$*

Demostración
Escribamos $f = \rho\phi(x)$ realicemos la prueba por inducción

i) $\rho_x k = k\pi'_{(A\Leftarrow D)\wedge B}$ $\quad k : B \to C$

$$(A \Leftarrow D) \wedge B \xrightarrow{\pi'_{A\Leftarrow D,B}} B \xrightarrow{k} C$$

ii) $\rho_x = \varepsilon_{A,B}$

$$(A \Leftarrow B) \wedge B \xrightarrow{\varepsilon_{A,B}} A \qquad A = C, \qquad B = C$$

iii) $\rho_x < \psi(x), \chi(x) > = < \rho_{(x)}\psi(x), \rho_{(x)}\chi(x) > =$
$< \psi(x)\pi'_{(A\Leftarrow D),B}, \chi(x)\pi'_{(A\Leftarrow D),B} >$

donde $\psi(x) : B \to C'$, $\quad \chi(x) : B \to C''$ $\quad$ y $\quad C = C' \wedge C''$

$$\frac{\begin{array}{c}(A \Leftarrow D) \wedge B \xrightarrow{\pi'} B \xrightarrow{\psi(x)} C' \\ (A \Leftarrow D) \wedge B \xrightarrow{\pi'} B \xrightarrow{\chi(x)} C''\end{array}}{(A \Leftarrow D) \wedge B \xrightarrow{<\psi(x)\pi', \chi(x)\pi'>} (C' \wedge C'') = C}$$

iv) $\rho_x(\chi(x)\psi(x)) = \rho_x\chi(x) < \pi_{A\Leftarrow D,B}, \rho_x\psi(x) > =$
$\chi(x)\pi'_{A\Leftarrow D,B} < \pi_{A\Leftarrow D,B}, \psi(x)\pi'_{A\Leftarrow D,B} >$

$$\frac{(A \Leftarrow D) \wedge B \xrightarrow{\pi} A \Leftarrow D \qquad (A \Leftarrow D) \wedge B \xrightarrow{\pi'} B \xrightarrow{\psi(x)} D}{(A \Leftarrow D) \wedge B \xrightarrow{<\pi, \psi(x)\pi'>} (A \Leftarrow D) \wedge D}$$

$$(A \Leftarrow D) \wedge D \xrightarrow{\pi'} D \xrightarrow{\chi(x)} C$$

v) $\rho_x(\psi(x)^*) = (\rho_x\psi(x)\alpha)^*$
donde $\psi(x) : B' \wedge B'' \to C$, $\quad C = C' \Leftarrow B''$

$$\frac{((A \Leftarrow D) \wedge B') \wedge B'' \xrightarrow{\alpha} (A \Leftarrow D) \wedge (B' \wedge B'') \xrightarrow{\pi'} B' \wedge B'' \xrightarrow{\psi(x)} C'}{(A \Leftarrow D) \wedge B' \xrightarrow{(\psi(x)\pi'\alpha)^*} C' \Leftarrow B''}$$

■

3. C^3 PRESENTADAS ECUACIONALMENTE

Una categoría es un sistema deductivo en el cual se tienen las siguientes ecuaciones entre las pruebas
$E1 f1_A = f \qquad 1_B f = f \qquad (hg)f = h(gf)$
para toda $f : A \to B \qquad g : B \to C \qquad h : C \to D$

Una categoría cartesiana es una categoría y un cálculo con conjunción que satisface las siguientes ecuaciones

$E2 \qquad f = \bigcirc_A$ para toda $f : A \to \top$
Esto quiere decir que $\top$ es un objeto terminal. A $\top$ lo escribiremos como 1, $\top \equiv 1$

$E3a \qquad \pi_{A,B} < f, g >= f$
$E3b \qquad \pi'_{A,B} < f, g >= g$
$E3c \qquad < \pi_{A,B}h, \pi'_{A,B}h >= h$

Para toda $f : C \to A \qquad g : C \to B\ C \to A \wedge B$
Lo que afirma E3 es que $A \wedge B$ es un producto

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "<f{,}g>"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \wedge B \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & B
\end{tikzcd}$$

Demostración

Supongamos que existe h tal que $h : C \to A \wedge B$ y $f = \pi_{A,B}h$ $g = \pi_{A,B}h$

$$< f, g > h =< \pi_{A,B}h, \pi'_{A,B}h >= h$$

Notación: $A \wedge B \equiv A \times B$ ■

Como una consecuencia de E3 tenemos la siguiente regla (ley distributiva).

Proposición 1.0.1 $< f, g > h =< fh, gh >$
para toda $f : C \to A$ $g : C \to B$ $h : D \to C$

Demostración

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "fh"'] \arrow[ddr, bend left, "gh"] & \\
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, "<f,g>"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "\pi'"'] & B
\end{tikzcd}$$

Por demostrar $< f, g > h =< fh, gh >$
$< f, g > h =< \pi(< f, g > h), \pi'(< f, g > h) >=$
$< (\pi < f, g >)h, (\pi' < f, g >)h >=< fh, gh >$

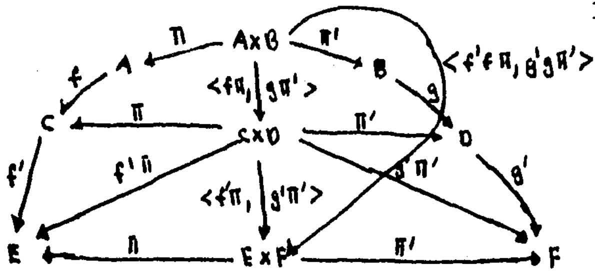
Notación: $f \times g \equiv f \wedge g =< f\pi_{A,C}, g\pi'_{A,C} >$
Para toda $f : A \to B$, $C \to D$

■

Proposición 1.0.2 $\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}$ *es un functor*

$$\begin{tikzcd}
(A,B) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & A \times B \arrow[d, "f \times g"] \\
(C,D) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, shift right, "f'"'] \arrow[d, shift left, "g'"] & C \times D \arrow[d, "f' \times g'"] \\
(E,F) \arrow[r, mapsto] & E \times F
\end{tikzcd}$$

Por demostrar $(f' \times g')(f \times g) = f'f \times g'g$



$(f' \times g')(f \times g) =< f'\pi_{A,B}, g'\pi'_{A,} >< f\pi_{C,D}, g\pi' >=$
$< f'f\pi_{A,B}, g'g\pi'_{A,B} >= f'f \times g'g$

Por demostrar $1_A \times 1_C = 1_{A\times C}$

$1_A \times 1_C =< 1_A\pi_{A.C}, 1_C\pi'_{A,C} >=$
$< \pi_{A,C}, \pi'_{A,C} >=< \pi_{A,C}1_{A\times C}, \pi'_{A,C}1_{A\times C} >=$
$< \pi_{A,C}, \pi'_{A,C} > 1_{A\times C} = 1_{A\times C}$

■

Una *categoría Cartesiana Cerrada* es una categoría cartesiana A con una estructura adicional que satisface las siguientes ecuaciones ecuaciones. A las categorías cartesianas cerradas las denotaremos por $\mathbf{C}^3$

E4a. $\varepsilon_{A,B} < h^*\pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >= h$

E4b. $(\varepsilon_{A,B} < k\pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >)^* = k$

Para toda $\quad h : C \times B \to A\ , \quad k : C \to A \Leftarrow B$

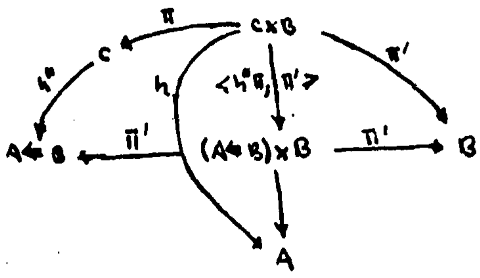


Diagrama de E4a

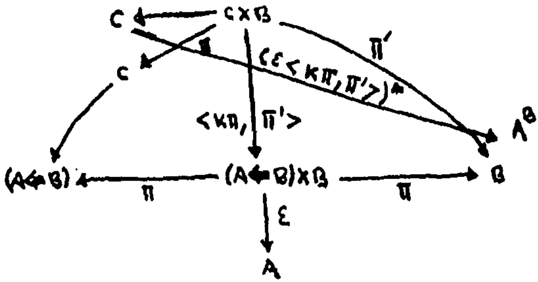


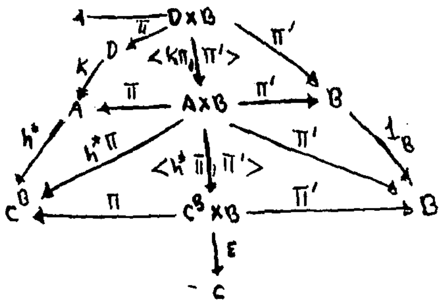
Diagrama de E4b

Notación: $A \Leftarrow B \equiv A^B$

Proposición 1.0.3 $h^* k = (h < k\pi_{D,B}, \pi'_{D,B} >)^*$
donde $h : A \times B \to C \qquad k : D \to A$

Demostración

Escribamos el siguiente diagrama:



Por la ecuación E4b $h^* k = (\varepsilon_{C,B} < h^* k\pi_{A,B}, \pi'_{D,B} >)^*$
y del anterior diagrama obtenemos

$h^* k = (\varepsilon_{C,B} < h^* k\pi_{A,B}, \pi'_{D,B} >)^* =$
$(\varepsilon_{C,B} < h^* \pi_{A,B}, \pi'_{A,B} >< k\pi_{A,B}, \pi'_{D,B} >)^* =$
$(h < k\pi_{A,B}, \pi'_{D,B} >)^*$ ■

Proposición 1.0.4 *$Hom((-)\times(-),(-)) \xrightarrow{\ *\ } Hom((-),(-)^{(-)})$ es un isomorfismo natural*

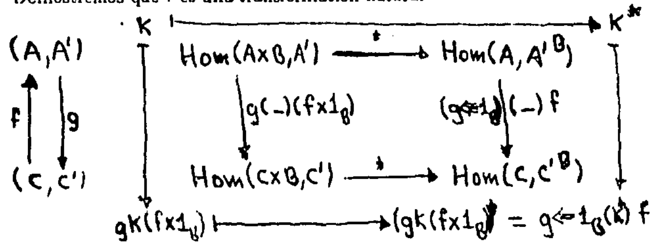
Demostración

Demostremos que $*$ es inyectiva
Sea $f \neq g$ $f : C \times B \to A$ $\quad g : C \times B \to A$ p.d. $f^* \neq g^*$
Supongamos que $f^* = g^*$
la ecuación E4a $f = \varepsilon_{A,B} < f^* \pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >$
como $f^* = g^*$
$\varepsilon_{A,B} < f^* \pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >= \varepsilon_{A,B} < g^* \pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >= g$
lo cual es una contradicción por ende $f^* \neq g^*$

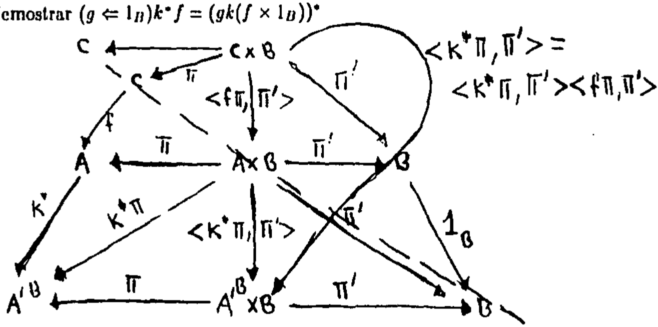
Demostremos que $*$ es suprayectiva

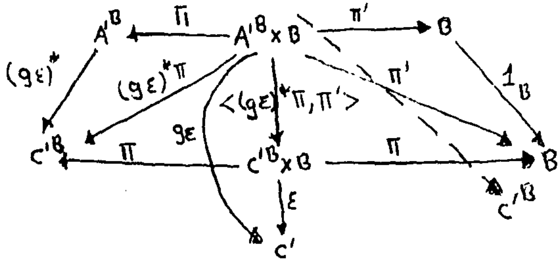
Sea $f \in Hom(C, A^B)$
$f^* = (\varepsilon_{A,B} < f^* \pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >)^* =$ pero $\varepsilon_{A,B} < f^* \pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >= f$
por la ecuación E4a.

Demostremos que $*$ es una transformación natural



Por demostrar $(g \Leftarrow 1_B)k^* f = (gk(f \times 1_B))^*$





Observando el diagrama anterior obtenemos

$$
\begin{aligned}
&(g \Leftarrow 1_B)k^* f = (g\varepsilon_{A,B})^* k^* f \\
&= (\varepsilon_{C',B} < (g\varepsilon_{A',B})^* k^* f\pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >)^* \\
&= (\varepsilon_{C',B} < (g\varepsilon_{A,B})^* \pi_{A'^B,B}, \pi'_{A'^B,B} >< k^*\pi_{A,B}, \pi'_{A,B} >< f\pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >^* \\
&= (g\varepsilon_{A,B} < k^*\pi_{A,B}, \pi'_{A,B} >< f\pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >)^* \\
&= (gk < f\pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >)^* = (gk(f \times 1_B))^*
\end{aligned}
$$

por ende $*$ es un isomorfismo natural

■

Proposición *En cualquier categoría cartesiana cerrada*

$$Hom(A, B) \cong Hom(1, B^A)$$

Demostración

Dado $f : A \to B$ asociamos $\ulcorner f \urcorner : 1 \to B^A$

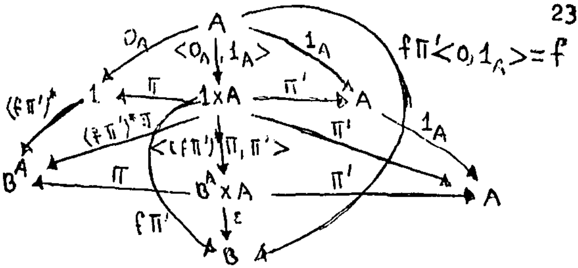
la cual esta definido de la siguiente manera

$\ulcorner f \urcorner \equiv (f\pi'_{1,A})^*$

y con $g : 1 \to B^A$ asociamos $g^{\int}$ (leído como "g de")
la cual esta definido como:

$$g^{\int} \equiv \varepsilon_{B,A} < g\bigcirc_A, 1_A >$$

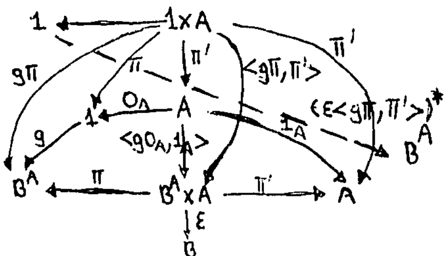
Por demostrar $(\ulcorner f \urcorner)^{\int} = f$ y $\ulcorner (g^{\int}) \urcorner = g$



Por definición de $\int$, $[\quad]$ y del diagrama anterior, en el cual todos los triángulos conmutan.

$$[f]\int = \varepsilon_{B,A} < [f]\bigcirc_A, 1_A >= \varepsilon_{B,A} < (f\pi'_{1,A})^{*}\bigcirc_A, 1_A >=$$
$$\varepsilon_{B,A} < (f\pi')^{*}\pi_{1,A}, \pi'_{1,A} >< \bigcirc_A, 1_A >= f\pi' < \bigcirc_A, 1_A >= f1_A = f$$

Por demostrar $[g\int] = g$



Aplicando la definición de $[\quad]$, $\int$ y con lo obtenido en el diagrama anterior en el cual todos los triángulos conmutan

$$[g\int] = (g\int \pi'_{1,A})^{*} = (\varepsilon_{B,A} < g\bigcirc_A, 1_A > \pi'_{1,A})^{*} =$$
$$= (\varepsilon_{B,A} < g\bigcirc_A \pi'_{1,A})^{*}, \pi'_{1,A} >)^{*} = = (\varepsilon_{B,A} < g\pi_{1,A})^{*}, \pi'_{1,A} >)^{*} = g$$

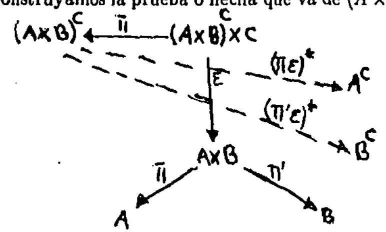
■

Proposición *En cualquier Categoría Cartesiana Cerrada se cumplen los siguientes isomorfimos:*

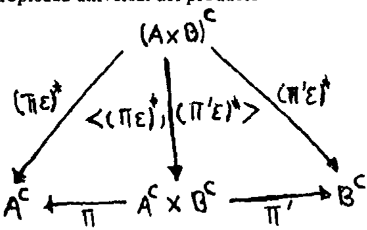
(a) $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$

Demostración

Construyamos la prueba o flecha que va de $(A \times B)^C$ a $(A^C \times B^C)$



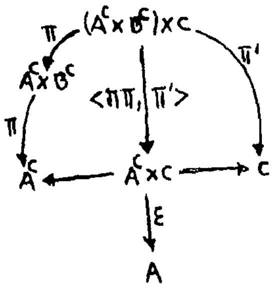
Por la propiedad universal del producto

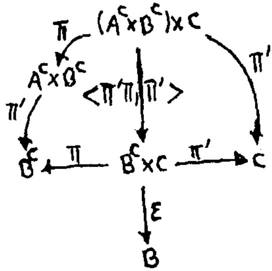


Por lo tanto la flecha o prueba que va de $(A \times B)^C$ a $A^C \times B^C$ es

$< (\pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^*, (\pi'_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^* >$ ....(1)

Construyamos la prueba o flecha de $A^C \times B^C$ a $(A \times B)^C$





Por lo tanto la flecha que va de $(A^C \times B^C)$ a $(A \times B)^C$ es

$(<\varepsilon_{A,C} <\pi_{A^C \times B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>,$
$\varepsilon_{B,C} <\pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>)^{*}$.....(2)

Demostremos que (1) y (2) son inversa una de la otra

Por demostrar

$<(\pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^{*}, (\pi'_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^{*}> (<\varepsilon_{A,C} <\pi_{A^C \times B^C}\, pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>$
$, \varepsilon_{B,C} <\pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>)^{*} = 1_{A^C \times B^C}$

$<(\pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^{*}, (\pi'_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^{*}> (<\varepsilon_{A,C} <\pi_{A^C \times B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>$
$), \varepsilon_{B,C} <\pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>)^{*} =$

Es suficiente demostrar:

$<(\pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^{*} (<\varepsilon_{A,C} <\pi_{A^C \times B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>, \varepsilon_{B,C} <$
$\pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>)^{*} = \pi_{A^C,B^C}$
...(*)

y

$(\pi'_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^{*} (<\varepsilon_{A,C} <\pi_{A^C \times B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>), \varepsilon_{B,C} <$
$\pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>)^{*} >= \pi'_{A^C,B^C}$ ...(**)

Demostremos (*)

$<(\pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^{*} (<\varepsilon_{A,C} <\pi_{A^C \times B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>, \varepsilon_{B,C} <$
$\pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>)^{*} =$

$\pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C} <(<\varepsilon_{A,C} <\pi_{A^C \times B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>, \varepsilon_{B,C} <$
$\pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>)^{*}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C}>)^{*} =$
$\pi_{A,B} <\varepsilon_{A,C} <\pi_{A^C \times B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>>,$
$\varepsilon_{B,C} <\pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>)^{*} =$
$<\varepsilon_{A,C} <\pi_{A^C \times B^C}\pi_{A^C \times B^C,C}, \pi'_{A^C \times B^C,C}>)^{*} = \pi_{A^C,B^C}$

la demostración de (**) es simétrica a la de *

por lo tanto

$$< (\pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^*, (\pi'_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^* >$$
$$(< \varepsilon_{A,C} < \pi_{A^C \times B^C}\ pi_{A^C\times B^C,C}, \pi'_{A^C\times B^C,C} >>,$$
$$\varepsilon_{B,C} < \pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C\times B^C,C}, \pi'_{A^C\times B^C,C} >>)^*$$
$$= 1_{A^C\times B^C}$$

Demostremos a continuación

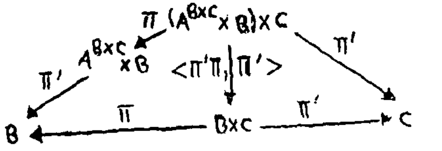
$$(< \varepsilon_{A,C} < \pi_{A^C,B^C}\pi_{A^C\times B^C,C}, \pi'_{A^C\times B^C,C} >,$$
$$< \varepsilon_{B,C} < \pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C\times B^C,C}, \pi'_{A^C\times B^C,C} >>)^*$$
$$< (\pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^*(\pi'_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^* >= 1_{(A\times B)^C}$$

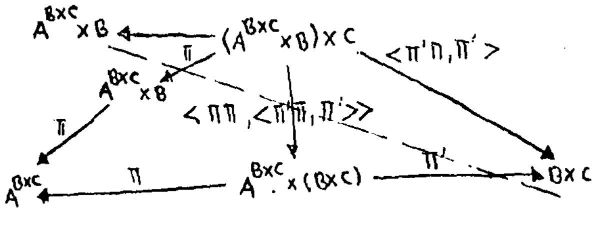
$$(< \varepsilon_{A,C} < \pi_{A^C,B^C}\pi_{A^C\times B^C,C}, \pi'_{A^C\times B^C,C} >,$$
$$< \varepsilon_{B,C} < \pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C\times B^C,C}, \pi'_{A^C\times B^C,C} >>)^*$$
$$< (\pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^*(\pi'_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^* >=$$
$$(< \varepsilon_{A,C} < \pi_{A^C,B^C}\pi_{A^C\times B^C,C}, \pi'_{A^C\times B^C,C} >,$$
$$< \varepsilon_{B,C} < \pi'_{A^C,B^C}\pi_{A^C\times B^C,C}, \pi'_{A^C\times B^C,C} >>$$
$$<< (\pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^*(\pi'_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^* > \pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >)^* =$$
$$(< \varepsilon_{A,C} < (\pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^*\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >,$$
$$\varepsilon_{B,C} < (\pi'_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^*\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >>)^* =$$
$$(< \pi_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C}, \pi'_{A,B}\varepsilon_{A\times B,C})^* =$$
$$(\varepsilon_{A\times B,C})^* = (\varepsilon_{A\times B,C} < 1_{(A\times B)^C}, \pi_{(A\times B)^C,C}, \pi'_{(A\times B)^C,C} >)^* = 1_{(A\times B)^C,C}$$

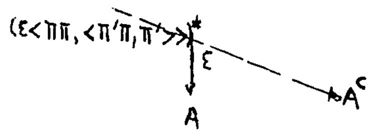
■

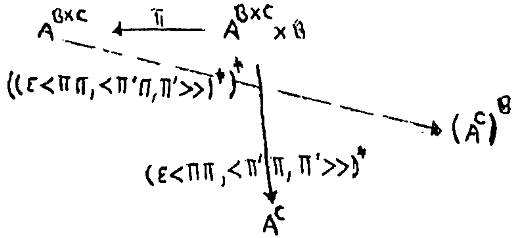
(b) $A^{B\times C} \cong A^{C^B}$

Construyamos la flecha o prueba que va de $A^{B\times C}$ a A^{C^B}





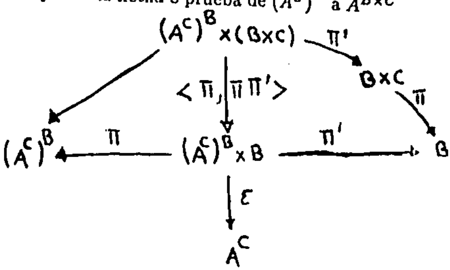


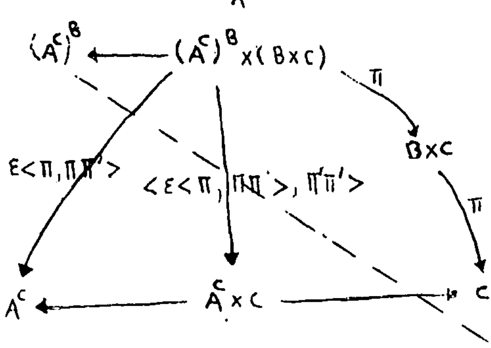


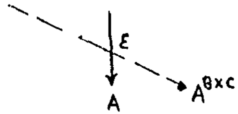
por lo tanto la flecha de $A^{B\times C}$ a $(A^C)^B$ es

$$((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \\ < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{A^{B\times C}}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>)^*)^*$$

Construyamos la flecha o prueba de $(A^C)^B$ a $A^{B\times C}$







Por lo tanto la flecha que va de $(A^C)^B$ a $A^(B \times C)$ es

$(\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{(A^C)^B),B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >)^{*}$

demostremos

$((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{A^{B\times C}\times B},C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$
$)^{*})^{*} (\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{(A^C)^B),B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >$
$)^{*} = 1_{(A^C)^B}$

$((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{A^{B\times C}\times B},C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$
$)^{*} < \varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{(A^C)^B),B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >$
$)^{*}\pi_{(A^C)^B,B}, \pi'_{(A^C)^B,B} >)^{*} =$
$((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{A^{B\times C}\times B},C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$
$<< \varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{(A^C)^B),B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >$
$)^{*}\pi_{(A^C)^B,B}, \pi'_{(A^C)^B,B} > \pi_{(A^C)^B\times B,C}, \pi'_{(A^C)^B\times B,C} >)^{*})^{*} =$
$((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < (\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >, \pi'_{B,C}$
$\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >)^{*} \pi_{(A^C)^B,B}\pi_{(A^C)^B\times B,C}, < \pi'_{(A^C)^B\times B,C}, \pi'_{(A^C)^B\times B,C} >>$
$)^{*})^{*} =$
$((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < (\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >, \pi'_{B,C}$
$\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >)^{*} \pi_{(A^C)^B,B\times C} < \pi_{(A^C)^B,B}\pi_{(A^C)^B\times B,C}, < \pi'_{(A^C)^B,B}\pi_{(A^C)^B\times B,C}, \pi'_{(A^C)^B\times B,C} >>$
$, \pi'_{(A^C)^B,B\times C} < \pi_{(A^C)^B,B}\pi_{(A^C)^B\times B,C}, < \pi'_{(A^C)^B,B}\pi_{(A^C)^B\times B,C}, \pi'_{(A^C)^B\times B,C} >>$
$)^{*})^{*} =$
$((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < (\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >, \pi'_{B,C}$
$\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >)^{*} \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi'_{(A^C)^B,B\times C} >$
$< \pi_{(A^C)^B,B}\pi_{(A^C)^B\times B,C}, < \pi'_{(A^C)^B,B}\pi_{(A^C)^B\times B,C}, \pi'_{(A^C)^B\times B,C} >>)^{*})^{*} =$
$((\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B}\pi_{(A^C)^B\times B,C}, \pi'_{(A^C)^B,B}\pi_{(A^C)^B\times B,C} >, \pi'_{(A^C)^B\times B,C} >$
$)^{*})^{*} =$
$((\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B}, \pi'_{(A^C)^B,B} > \pi_{(A^C)^B\times B,C}, \pi'_{(A^C)^B\times B,C} >$
$)^{*})^{*} =$
$(\varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B}, \pi'_{(A^C)^B,B} >)^{*} = 1_{(A^C)^B}$

Demostremos a continuación

$\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >)^{*}$
$((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$

$$)^*)^* = 1_{A^{B\times C}}$$

$$\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >)^*$$
$$((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$$
$$)^*)^* =$$

$$\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} >$$
$$< ((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$$
$$)^*)^* \; \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi'_{A^{B\times C},B\times C} >)^* =$$
$$\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < \pi_{(A^C)^B,B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{(A^C)^B,B\times C} > < ((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C},$$
$$< \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>)^*)^* \; \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >$$
$$, \pi'_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >)^* =$$
$$\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < ((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$$
$$)^*)^* = \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >)^* =$$
$$\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < ((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$$
$$)^*)^* \; \pi_{A^{B\times C},C} < \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >, \pi'_{A^{B\times C},C} < \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >>$$
$$, \pi'_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >)^* =$$
$$(\varepsilon_{A,C} < \varepsilon_{A^C,B} < ((\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$$
$$)^*)^* =$$
$$\pi_{A^{B\times C},B}, \pi'_{A^{B\times C},B.} > < \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >$$
$$)^* =$$
$$(\varepsilon_{A,C} < (\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$$
$$)^* = < \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >)^* =$$
$$(\varepsilon_{A,C} < (\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$$
$$)^* \; \pi_{A^{B\times C}\times B,C} << \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >$$
$$, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} << \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >$$
$$)^* =$$
$$(\varepsilon_{A,C} < (\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$$
$$)^* \; \pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} > << \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >$$
$$)^* =$$

$$(\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, < \pi'_{A^{B\times C},B}\pi_{A^{B\times C}\times B,C}, \pi'_{A^{B\times C}\times B,C} >>$$
$$<< \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >)^* =$$

$$(\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B\times C}, < \pi_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >, \pi'_{B,C}\pi'_{A^{B\times C},B\times C} >$$
$$)^* = (\varepsilon_{A^{B\times C},B\times C} < \pi_{A^{B\times C},B\times C}, \pi'_{A^{B\times C},B\times C} >)^* = 1_{A^{B\times C}}$$

■

(c) $A^1 \cong A$

Demostración

Construyamos la flecha que va de A^1 a A

$$\begin{tikzcd}
 & A^1 \arrow[dl, bend right] \arrow[d, "{<1_{A^1},0_{A^1}>}"'] \arrow[dr, bend left, "0_{A^1}"] & \\
A^1 & A^1\times 1 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 1 \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Por ende la flecha que va de A^1 a A es

$\varepsilon < 1_{A^1}, \bigcirc_{A^1} >$

Construyamos la flecha de A a A^1

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, "\pi^*"'] & A\times 1 \arrow[l] \arrow[dd, "\pi"'] & \\
 & & A^1 \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Por ende la flecha que va de A a A^1 es $(\pi)^*$
Por demostrar
$(\pi)^*\varepsilon < 1_{A^1}, \bigcirc_{A^1} >= 1_{A^1}$
$(\pi)^*\varepsilon < 1_{A^1}, \bigcirc_{A^1} >= (\pi < \varepsilon < 1_{A^1}, \bigcirc_{A^1} > \pi, \pi' >)^*$
$=< \varepsilon < 1_{A^1}, \bigcirc_{A^1} > \pi)^* = (\varepsilon < \pi, \pi' >^*$
$= (\varepsilon < 1_{A^1}\pi, \pi' >^* = 1_{A^1}$

Demostremos ahora

$\varepsilon < 1_{A^1}, \bigcirc_{A^1} > (\pi')^* = 1_A$
$\varepsilon < 1_{A^1}, \bigcirc_{A^1} > (\pi')^* = \varepsilon < 1_{A^1}(\pi')^*, \bigcirc_{A^1}(\pi')^* >=$
$\varepsilon < (\pi')^* 1_A, \bigcirc_A > \varepsilon < (\pi')^*\pi, \pi' >< 1_A, \bigcirc_A >$
$\pi < 1_A, \bigcirc_A >= 1_A$

■

(d) $1^A \cong 1$

Demostración

construyamos la flecha de $1^A \to 1$ la cual es $\bigcirc_{1^A}$ La flecha que va de $1 \to 1^A$ es $(\pi_{1,A})^*$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[drr, "\pi^*"'] & 1 \times A \arrow[l] \arrow[d, "\pi"] & \\
& 1 & 1^A
\end{tikzcd}$$

Demostración

$\pi^* \bigcirc_{1^A} = 1_A$

Construyamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1^A \times A \arrow[d, "\pi"] \arrow[dd, bend left=60, "\bigcirc_{1^A \times A} = \varepsilon_{1,A}"] \\
1^A \arrow[d, "\bigcirc_{1^A}"] \\
1
\end{tikzcd}$$

$\pi_{1,A}{}^* \bigcirc_{1^A} = (\pi_{1,A} < \bigcirc_{1^A} \pi_{1^A,A}, \pi'_{1^A,A} >)^* = (\pi_{1,A} < \bigcirc_{1^A \times A}, \pi'_{1^A,A} >$
$)^* = (\pi_{1,A} < \varepsilon_{1^A,A}, \pi'_{1^A,A} >)^* =$
$(\varepsilon_{1^A,A})^* = (\varepsilon_{1^A,A} < \pi_{1^A,A}, \pi'_{1^A,A} >)^* = 1_{1^A}$

Demostremos que $\bigcirc_{1^A}(\pi_{1,A})^* = 1_1$

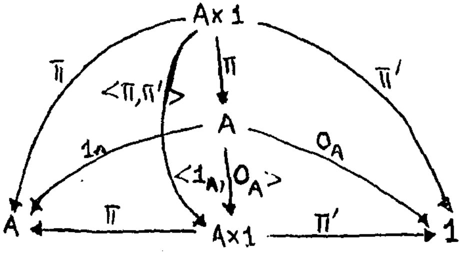
esto es inmediato debido a que 1 es un objeto terminal

■

Proposición 1.0.7 *En cualquier Categoría Cartesiana Cerrada*

(a) $A \times 1 \cong A$

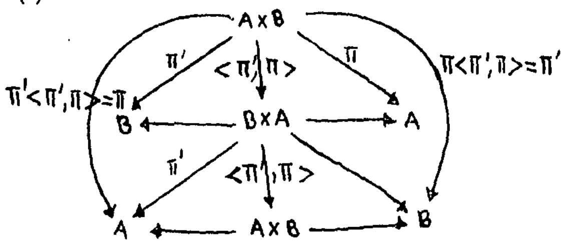
Demostración



$< 1_A, \bigcirc_A > \pi = < \pi, \pi' > = 1_{A\times 1}$
$\pi < 1_A, \bigcirc_A > = 1_A$

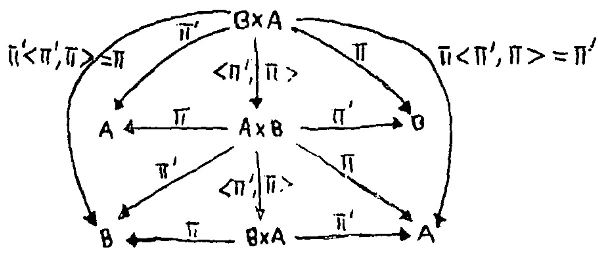
■

(b) $A \times B \cong B \times A$



$< \pi', \pi >< \pi', \pi > = < \pi' < \pi', \pi >, \pi < \pi', \pi >> = < \pi, \pi' > = 1_{A\times B}$

Demostremos ahora $< \pi', \pi >< \pi', \pi > = 1_{B\times A}$

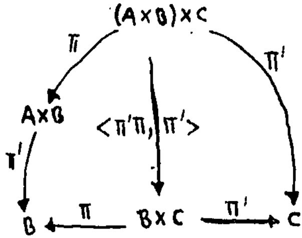


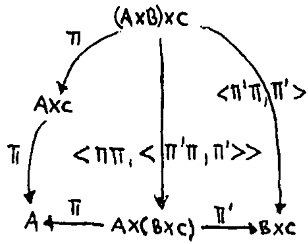
$< \pi', \pi >< \pi', \pi > = < \pi' < \pi', \pi >, \pi < \pi', \pi >> = < \pi, \pi' > = 1_{B\times A}$ ■

(a) $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$

Construyamos la flecha que va de $(A \times B) \times C$ a $A \times (B \times C)$

La flecha que va de $(A \times B) \times C$ a $B \times C$ es



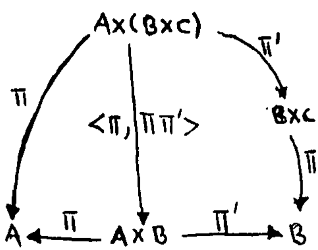


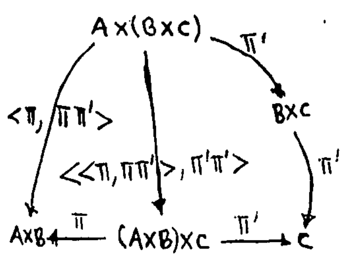
Por lo tanto la flecha que va de $(A \times B) \times C$ a $A \times (B \times C)$ es

$< \pi_{A,B}\pi_{A\times B,C}, < \pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >>$

Construyamos la flecha que va de $A \times (B \times C)$ a $(A \times B) \times C$

La flecha que va de $A \times (B \times C)$ a $A \times B$



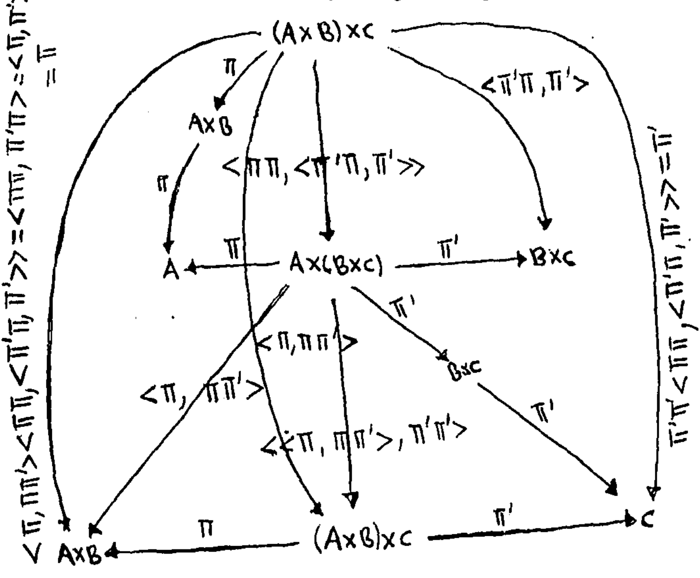


Por lo tanto la flecha que va de $A \times (B \times C)$ a $(A \times B) \times C$ es

$<<\pi_{A,B\times C},\pi_{B,C}\pi'_{A,B\times C}>,\pi'_{B,C}\pi'_{A,B\times C}>$

Por demostrar
$<<\pi_{A,B\times C},\pi_{B,C}\pi'_{A,B\times C}>,\pi'_{B,C}\pi'_{A,B\times C}><\pi_{A,B}\pi_{A\times B,C},<\pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C}>>= 1_{(A\times B)\times C}$

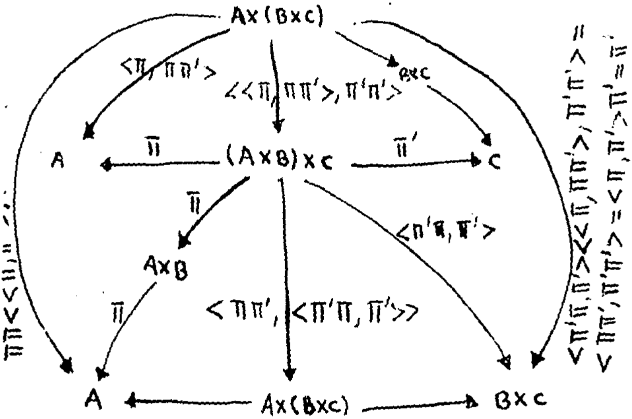
La demostración esta dada por el siguiente diagrama



falta demostrar

$<\pi_{A,B}\pi_{A\times B,C},<\pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C}>><<\pi_{A,B\times C},\pi_{B,C}\pi'_{A,B\times C}>,\pi'_{B,C}\pi'_{A,B\times C}>= 1_{A\times(B\times C)}$

la demostración también esta dada por el siguiente diagrama


A×(B×C)
<π, ππ'>
<<π, ππ'>, π'π'>
B×C
A
π̄
(A×B)×C
π̄'
C
π̄
A×B
<π'π̄, π̄'>
π
<ππ', <π'π, π'>>
A
A×(B×C)
B×C

■

4. C^3 GENERADAS LIBREMENTE POR GRAFICAS

Dado una gráfica X, podemos construir, el cálculo intuicionista positivo $D(X)$ y la categoría cartesiana cerrada $F(X)$ generada libremente por X.

Informalmente hablando, $D(X)$ es el cálculo intuicionista más pequeno, cuyas fórmulas incluyen los vértices de X y cuyas pruebas incluyen las flechas de X. (Los lógicos pueden pensar a esto último como 'postulados', si bien puede haber más de un camino de postular $X \to Y$ en X. Más precisamente, las fórmulas y pruebas de $D(X)$ son definidas inductivamente como sigue: todos los vértices de X son fórmulas, $\top(\equiv 1)$ es una fórmula, si A y B son fórmulas también lo son $A \wedge B(\equiv A \times B)$ y $B \Leftarrow A(\equiv B^A)$; las flechas de X y las flechas $1_A, \bigcirc_A, \pi_{A,B}, \pi'_{A,B}$ y $\varepsilon_{A,B}$ son pruebas para todas las fórmulas A y B. y las pruebas son cerradas bajo las reglas de inferencia-composición $< -,- >$ y $(-)^*$.

Construiremos $F(X)$ de $D(X)$ imponiendo todas las ecuaciones entre las pruebas que son dadas en una categoría cartesiana cerrada. Otro camino de decir esto es que es la elección de la relación de equivalencia más pequena entre las pruebas satisfaciendo las leyes de sustitución apropiada y respetando las ecuaciones de una categoría cartesiana cerrada. Las clases de equivalencia de pruebas son entonces las flechas de $F(X)$, pero como es usual, no distinguiremos notacionalmente entre pruebas y sus clases de equivalencia.

Dado **Grph** la categoría de gráficas, cuyos objetos son gráficas y cuyos morfismos $F : X \to X$ son pares de mapeos $F : Objetos(X) \to Objetos(Y)$ y $F : flechas(X) \to flechas(Y)$ tal que $f : X \to X'$ implica $F(f) : F(X) \to F(X')$.

Dado **Cart** la categoría de categorías cartesianas cerradas, cuyos objetos son categorías cartesianas cerradas y cuyas flechas son funtores $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ que preservan la estructura cartesiana cerrada, esto es,

$\mathbf{F}(1) = 1, \quad \mathbf{F}(A \times B) = \mathbf{F}(A) \times \mathbf{F}(B), \quad \mathbf{F}(A^B) = \mathbf{F}(A)^{\mathbf{F}(B)};$

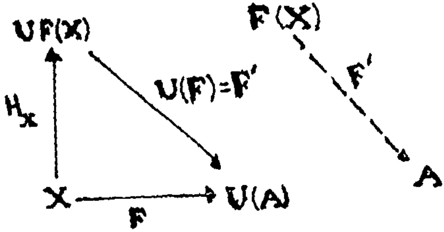
$\mathbf{F}(\bigcirc_A) = \bigcirc_{\mathbf{F}(A)}, \quad \mathbf{F}(\pi_{A,B}) = \pi_{\mathbf{F}(A),\mathbf{F}(B)};$

$\mathbf{F}(\pi'_{A,B}) = \pi'_{\mathbf{F}(A),\mathbf{F}(B)}, \mathbf{F}(\varepsilon_{A,B}) = \varepsilon_{\mathbf{F}(A),\mathbf{F}(B)}, etc.$

$\mathbf{F}(< f, g >) =< \mathbf{F}(f), \mathbf{F}(g) > etc.$

Dado U : **Cart** $\to$ **Grph** el funtor que olvida. Con cualquier gráfica $\mathbf{X}$ asociamos un morfismo de gráficas $\mathbf{H}_X : \mathbf{X} \to UF(X)$ como sigue: $\mathbf{H}_X(X) = X$ y si $f : X \to Y$ en X, entonces $\mathbf{H}_X(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$ (la clase de equivalencia de f considerado como una prueba en $D(X)$). Nosotros entonces tenemos la siguiente propiedad universal:

Proposición *Dado cualquier categoría cartesiana cerrada* $\mathbf{A}$ *y cualquier morfismo* $\mathbf{F} : \mathbf{X} \to \mathrm{U}(\mathbf{A})$ *de gráficas, existe una única flecha* $\mathbf{F}' : \mathrm{F}(\mathbf{X}) \to \mathbf{A}$ *en* **Cart** *tal que* $\mathrm{U}(\mathbf{F}')\mathbf{H}_X = \mathbf{F}$



Demostración

Desde luego, la construcción de $\mathbf{F}'$ esta forzada a ser:

$\mathbf{F}'(X) = \mathbf{F}(X), \quad \mathbf{F}'(\top) = 1, \quad \mathbf{F}'(A \wedge B) = \mathbf{F}'(A) \times \mathbf{F}'(B), etc;$

$\mathbf{F}'(f) = \mathbf{F}(f)$ para toda $f : X \to Y$

$\mathbf{F}'(\bigcirc_A) = \bigcirc_{\mathbf{F}'(A)}$ etc.

$\mathbf{F}'(< f, g >=< \mathbf{F}'(f), \mathbf{F}'(g) >$ etc.

Debemos revisar que $\mathbf{F}'$ esta bien definida, esto es, para toda $f, g : A \to B$ en $F(X), f = g$ implica $\mathbf{F}'(f) = \mathbf{F}'(g)$. Esto fácilmente se sigue porque las ecuaciones no están contenidas en $F(X)$que aquellas qu están dadas.

La propiedad universal significa que $\mathbf{F}$ es un funtor de $bfGrph \to \mathbf{Cart}$ el cual es adjunto a $\mathbf{U}$ con adjunción $\mathbf{H}_{(-)} : \mathbf{id} \to \mathbf{UF}$.

Notemos que los objetos de la categoría **Grph** y **Cart** introducidos aquí son clases. Estos pueden ser introducidos como conjuntos en un universo apropiado.

5. CATEGORIAS POLINOMIALES

Dado los objetos A_0 y A de una *Categoría Cartesiana (o Cartesiana Cerrada* **A**; adjuntamos una flecha indeterminada $x : A_0 \to A$ a **A** de la siguiente manera:

Un método es adjuntar una flecha $x : A_0 \to A$ a la gráfica subyacente de **A** y entonces formar la categoría Cartesiana o Cartesiana Cerrada generada libremente por la nueva gráfica, como fue realizado en la sección anterior para Categorías Cartesianas Cerradas.

Otra forma es primero formar el sistema deductivo (Cálculo con conjunción, Cálculo positivo intuicionista) $\mathbf{A}[x]$ basado en la hipótesis x, como fue realizado en la sección del teorema de deducción, en el caso especial $A_0 = \mathsf{T}$.

las fórmulas de $\mathbf{A}[x]$ son los objetos de **A** y las pruebas de $\mathbf{A}[\mathbf{x}]$ son formadas de las flechas de **A** y la nueva flecha $x : A_0 \to A$ por las apropiadas reglas de inferencia.

Para afirmar que $\mathbf{A}[x]$ se transforma en una categoría y la inclusión de **A** en $\mathbf{A}[x]$ sea un functor, estableceremos las ecuaciones apropiadas entre las pruebas. Si la igualdad de pruebas es denotada por $\underset{x}{=}$, podemos considerar $=$ como la relación de equivalencia mas pequeña $\equiv$ entre las pruebas tal que

$gf = h$ en **A** implica que $gf \equiv h$

$\psi(x) \equiv \psi'(x)$ y $\chi(x) \equiv \chi'(x)$ implica $\chi(x)\psi(x) \equiv (\chi)'(x)(\psi)'(x)$
$\phi(x)1_B \equiv \phi(x) \equiv 1_C\phi(x)$
$(\chi(x)\psi(x))\phi(x) \equiv \chi(x)(\psi(x)\phi(x))$

Para toda $\phi(x) : B \to C$
$\psi(x), (\psi)'(x) : C \to D$
$\chi(x), (\chi)'(x) : D \to E$

notemos que por la ley reflexiva $\equiv$ y $\underset{x}{=}$ extienden la igualdad en **A**. Las flechas en la Categoría $\mathbf{A}[x]$ son pruebas basadas en la hipótesis x módulo $\underset{x}{=}$; ellas pueden ser considerdos como polinomios en x.

La misma construcción se realiza para categorías Cartesianas o Cartesianas Cerradas , solo que $\underset{x}{=}$ debe ser tal que $\mathbf{A}[x]$ se convierta en una Categoría Cartesiana (Cerrada) y que el funtor $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[x]$ preserva la estructura Cartesiana (Cerrada). Esto es que la relación de equivalencia $\equiv$ entre las pruebas debe satisfacer:

si $< f.g >= h$ entonces $< f, g >\equiv h$

si $f^* = h$ entonces $f^* \equiv h$

si $\psi(x) \equiv \psi'(x)$ y $\chi(x) \equiv (\chi)'(x)$
entonces $< \psi(x), \chi(x) >\equiv< \psi'(x), \chi'(x) >$

$\pi_{B,C} < \psi(x), \chi(x) >\equiv \psi(x) \qquad \pi'_{B,C} < \psi(x), \chi(x) >\equiv \chi(x)$

Para toda $\psi(x), \psi' : D \to B$ y $\chi(x), \chi'(x) : D \to C$

Para una categoría cartesiana (cerrada) el funtor debe preservar la estructura cartesiana (cerrada). Dado $\mathbf{H}_x : \mathbf{A} \to \mathbf{A}[x]$ el funtor cartesiano (cerrado) el cual manda $f : B \to C$ sobre el polinomio "constante" con el mismo nombre. Esto da paso para la siguiente propiedad universal:

Proposición *Dado una categoría (cartesiana o cartesiana cerrada)* **A**, *una indeterminada* $x : A_0 \to A$ *sobre* **A**, *cualquier funtor (cartesiano, cerrado)* $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *y cualquier flecha* $b : \mathbf{F}(A_0) \to \mathbf{F}(A)$ *en* **B**, *existe un único funtor (cartesiano o cartesiano cerrado)* $\mathbf{F}' : \mathbf{A}[x] \to B$ *tal que* $\mathbf{F}'(x) = b$ *y* $\mathbf{F}'\mathbf{H}_x = \mathbf{F}$

$$\begin{tikzcd}
A[x] \arrow[dr, dashed, "F'"] & \\
A \arrow[u, "H_x"] \arrow[r, "F"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x : A_0 \arrow[r] \arrow[d, mapsto, "F"] & A \\
b : F(A_0) \arrow[r] & F(A)
\end{tikzcd}$$

Demostración

Toda prueba $\phi(x)$ sobre la hipótesis x tiene una de las siguientes formas:

$k, x, \chi(x)\psi(x), <\psi(x), \chi(x)>, \psi(x)^*$

donde k es una flecha en $\mathbf{A}$, es decir un polinomio constante

El paso crucial esta en definir $\mathbf{F}'(\phi(x))$ Definamos inductivamente

$\mathbf{F}'(k) = \mathbf{F}(k)$,
$\mathbf{F}'(x) = b$
$\mathbf{F}'(\chi(x)\psi(x)) = \mathbf{F}'(\chi(x))\mathbf{F}'(\psi(x))$,
$\mathbf{F}'(<\psi(x), \chi(x)>) = <\mathbf{F}'(\psi(x)), \mathbf{F}'(\chi(x))>$,
$\mathbf{F}'((\psi(x))^*) = (\mathbf{F}'(\psi(x)))^*$

mostremos que $\mathbf{F}$ esta definida sobre polinomios y no sobre pruebas, esto es, que $\psi(x) = (\psi)'(x)$ implica $\mathbf{F}'(\psi(\mathbf{x})) = \mathbf{F}'((\psi)'(\mathbf{x}))$. Escribimos para este último $\psi(x) \equiv (\psi)'(x)$, entonces es suficiente revisar que $\equiv$ tiene la propiedad de sustitución y que respeta todas las ecuaciones de una categoría cartesiana cerrada.

Comprobemos que respeta las ecuaciones de una categoría cartesiana cerrada.

(a) Por demostrar $\psi(x) \equiv \bigcirc_A$ Para toda $\psi(x) : A \to 1$

$\mathbf{F}'(\psi(x)) = \bigcirc_{\mathbf{F}'(A)}$

(b) Por demostrar $\pi_{A,B} < \psi(x), \chi(x) > \equiv \psi(x)$

$\mathbf{F}'(\pi_{A,B} < \psi(x), \chi(x) >) = \mathbf{F}'(\pi_{A,B})\mathbf{F}' < \psi(x), \chi(x) > = \pi_{\mathbf{F}'(A),\mathbf{F}'(B)} <$
$\mathbf{F}'(\psi(x)), \mathbf{F}'(\chi(x) > = \mathbf{F}'(\psi(x))$

El procedimiento es análogo para

$(\pi_{A,B})' < \psi(x), \chi(x) > \equiv \chi(x)$

(c) Por demostrar $< \pi_{C,D}\chi(x), (\pi_{C,D})'\chi(x) > \equiv \chi(x)$
$\mathbf{F}'(< \pi_{C,D}\chi(x), (\pi_{C,D})'\chi(x) >) =$
$< \pi_{\mathbf{F}'(C),\mathbf{F}'(D)}\mathbf{F}'(\chi(x)),$
$\pi'_{\mathbf{F}'(C),\mathbf{F}'(D)}\mathbf{F}'(\chi(x)) > = \mathbf{F}'(\chi(x))$

(d) Por demostrar $\varepsilon_{A,B} < \psi^*(x)\pi_{C,B}, \pi'_{C,B} > \equiv \psi(x)$

$\mathbf{F}'(\varepsilon_{A,B} < \psi^*(x)\pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >) = \mathbf{F}'(\varepsilon_{A,B})\mathbf{F}'(< \psi^*(x)\pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >) =$
$\varepsilon_{\mathbf{F}'(A),\mathbf{F}'(B)} < \mathbf{F}'(\psi(x))^*\pi_{C,B}, \mathbf{F}'(\pi'_{C,B} >$
$\varepsilon_{\mathbf{F}'(A),\mathbf{F}'(B)} < (\mathbf{F}'(\psi(x)))^*\pi_{\mathbf{F}'(C),\mathbf{F}'(B)}, \pi'_{\mathbf{F}'(C),\mathbf{F}'(B)} > = \mathbf{F}'(\psi(x))$

El mismo procedimiento es para

$(\varepsilon_{A,B} < \psi(x)\pi_{C,B}, \pi'_{C,B} >)^* \equiv \psi(x)$

■

Corolario *Dado una categoría cartesiana o cartesiana cerrada* **A**, *una indeterminada* $x : A_0 \to A$ *sobre* **A** *y una flecha* $a : A_0 \to A$ *en* **A**. *Existe un único funtor cartesiano o cartesiano cerrado* $\mathbf{S}^a_x : \mathbf{A}[x] \to \mathbf{A}$ *tal que*

$\mathbf{S}^a_x(x) = a \qquad y \qquad \mathbf{S}^a_x\mathbf{H}_x = 1_{\mathbf{A}}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}[x] \arrow[dr, "\mathbf{S}^a_x"] & \\ \mathbf{A} \arrow[u, "\mathbf{H}_x"] \arrow[r, "1_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{A} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x : A_0 \longrightarrow A \arrow[d] \\ a : A_0 \longrightarrow A \end{tikzcd}$$

Demostración

La demostración es como en la proposición anterior, pero eligiendo $\mathbf{F} = 1_{\mathbf{A}}$

S_x^a puede ser considerado como el proceso de sustituir a por x. Escribiremos usualmente $S_{\mathbf{x}}^{\mathbf{a}}(\phi(\mathbf{x})) = \phi(\mathrm{a})$. ■

Proposición *Adjuntando una flecha indeterminada $x : 1 \to \emptyset$ a la categoría catesiana cerrada* $\mathbf{A}$ *de conjuntos obtenemos la categoria degenerada* $\mathbf{L}[\mathbf{x}]$ *en el cual* $1 \cong \emptyset$

Demostración

$$1 \xrightarrow{x} \emptyset$$

$$\emptyset \xrightarrow{\bigcirc_\emptyset} 1$$

Por demostrar $x\bigcirc_\emptyset = 1_\emptyset$

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r, "\bigcirc_\emptyset"] \arrow[rr, bend right, "1_\phi = \phi = x\bigcirc_\phi"'] & 1 \arrow[r, "x"] & \emptyset
\end{tikzcd}$$

En conjuntos la función vacia es única por ende $1_\emptyset = \emptyset$

Por demostrar $\bigcirc_\emptyset x = 1_1$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "x"] \arrow[rr, bend right, "0_1 = 1_1"'] & \emptyset \arrow[r, "\bigcirc_\emptyset"] & 1
\end{tikzcd}$$

Como el funtor de $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[\mathrm{x}]$ preserva la estructura cartesiana cerrada entonces 1 es objeto inicial en $\mathbf{A}[x]$

Por ende $1 \cong \emptyset$

■

6. COMPLETEZ FUNCIONAL EN C^3

El siguiente resultado, llamado completez funcional, refina el teorema de deducción.

Teorema *Para todo polinomio $\phi(x) : B \to C$ con una indeterminada $x : 1 \to A$ sobre una categoría cartesiana o cartesiana cerrada* $\mathbf{A}$ *existe una única flecha $f : A \times B \to C$ en* $\mathbf{A}$ *tal que*

$$f < xO_B, 1_B > \underset{X}{=} \phi(x)$$

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "x"'] & B \arrow[l, "O_B"'] \arrow[d, "\langle xO_B, 1_B \rangle"] \arrow[dr, "1_B"] \arrow[dd, bend right=60, "\phi(x)"'] & \\
A & & A \times B \arrow[ll] \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\varepsilon"] & B \\
 & & C &
\end{tikzcd}$$

Demostración

Dado $\kappa_{x \in A}\phi(x)$ definída como en la prueba del teorema de deducción: toda prueba $\phi(x) : B \to C$ con la hipótesis $x : 1 \to A$ debe tener una de las siguientes formas:

i) $k : B \to C$ una prueba en $\mathbf{A}$
ii) $x : 1 \to A$ con $B = A$ y $C = A$

iii)$< \psi(x), \chi(x) >$
donde $\psi(x) : B \to C'$ $\chi(x) : B \to C''$, $C = C' \times C''$
iv)$\chi(x)\psi(x)$
donde $\chi(x) : B \to D$ $\psi(x) : D \to C$
v)$\psi^*(x)$
donde $\psi(x) : B \times C' \to C''$, $C = (C'')^{C'}$

En todos los casos $\psi(x)$ y $\chi(x)$ son pruebas más cortas para $\phi(x)$ y definimos inductivamente

i) $\kappa_{x\in A} k = k\pi'_{A,B}$
ii) $\kappa_{x\in A} x = \pi_{A,1}$
iii)$\kappa_{x\in A} < \chi(x), \psi(x) > = < \kappa_{x\in A}\psi(x), \kappa_{x\in A}\chi(x) >$
iv)$\kappa_{x\in A}(\chi(x)\psi(x)) = \kappa_{x\in A}\chi(x) < \pi_{A,B}, \kappa_{x\in A}\psi(x) >$
v)$\kappa_{x\in A}(\psi^*(x)) = (\kappa_{x\in A}(\psi(x)\alpha_{A,B,C'})^*$
donde $\alpha_{A,B,C'} : (A \times B) \times C' \to A \times (B \times C')$

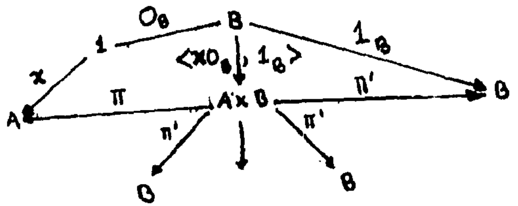
Después de este recordatorio, calculemos por inducción sobre la longitud de la prueba $\phi(x)$

$$\kappa_{x\in A}\phi(x) < x\bigcirc_B, 1_B > = \phi(x)$$

i) $\kappa_{x\in A} k < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{x}{=} k\pi'_{A,B} < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{x}{=} k1_B \underset{x}{=} k$

ii) $\kappa_{x\in A} x < x\bigcirc_1, 1_1 > \underset{x}{=} \pi_{A,1} < x\bigcirc_1, 1_1 > \underset{x}{=} = x \bigcirc 1 \underset{x}{=} x1_1 \underset{x}{=} x$

iii) $\kappa_{x\in A} < \psi(x), \chi(x) > < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{x}{=} < \kappa_{x\in A}\psi(x), \kappa_{x\in A}\chi(x) >$
$< x\bigcirc_B, 1_B > \underset{x}{=}$
$< \psi(x)\pi'_{A,B}, \chi(x)\pi'_{A,B} > < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{x}{=}$
$< \psi(x)\pi'_{A,B} < x\bigcirc_B, 1_B >, \chi(x)\pi'_{A,B} > < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{x}{=}$
$< \psi(x)1_B, \chi(x)1_B > \underset{x}{=} < \psi(x), \chi(x) >$



$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\psi(x)"'] \arrow[d, "<\psi(x)\pi', \chi(x)\pi'>"] \arrow[dr, "\chi(x)"] & \\ C' & C'\times C'' \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & C'' \end{tikzcd}$$

Diagrama de iii

iv) $\kappa_{x\in A}(\chi(x)\psi(x)) < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{X}{=}$
$\kappa_{x\in A}\chi(x) < \pi_{A,B}, \kappa_{x\in A}\psi(x) > < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{X}{=}$
$\chi(x)\pi'_{A,B} < \pi_{A,B}, \psi(x)\pi'_{A,B} > < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{X}{=}$
$\chi(x)\psi(x)\pi'_{A,B} < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{X}{=}$
$\chi(x)\psi(x)1_B \underset{X}{=} \chi(x)\psi(x)$

v) $\kappa_{x\in A}(\psi^*(x)) < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{X}{=} (\kappa_{x\in A}(\psi(x)\alpha_{A,B,C})^* < x\bigcirc_B, 1_B >$

$\alpha_{A,B,C'} : (A\times B)\times C' \to A\times(B\times C')$

$\alpha_{A,B,C'} \equiv < \pi_{A,B}, \pi_{A\times B,C'}, < \pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C'}, \pi'_{A\times B,C'} >>$

$\psi(x) : B\times C' \to C''$

$(\kappa_{x\in A}(\psi(x)\alpha_{A,B,C'})^* < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{X}{=}$
$(\kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi_{A,B}\pi_{A\times B,C'}, < \pi'_{A,B}\,\pi_{A\times B,C'}, \pi'_{A\times B,C'} >>)^* < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{X}{=}$
$(\kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi_{A,B}\pi_{A\times B,C'}, < \pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C'}, \pi'_{A\times B,C'} >> << x\bigcirc_B, 1_B >$
$\pi_{B,C''}, \pi'_{B,C''} >>)^* \underset{X}{=}$
$(\kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi_{A,B}\pi_{A\times B,C'} << x\bigcirc_B, 1_B > \pi_{B,C''}, \pi'_{B,C''} >>,$
$< \pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C'}, \pi'_{A\times B,C'} >$
$<< x\bigcirc_B, 1_B > \pi_{B,C''}, \pi'_{B,C''} >>)^* \underset{X}{=}$
$(\kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi_{A,B} < x\bigcirc_B, 1_B > \pi_{B,C''}, < \pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C'} << x\bigcirc_B, 1_B >$
$\pi_{B,C''}, \pi'_{B,C''} >>, \pi'_{A\times B,C'} << x\bigcirc_B, 1_B > \pi_{B,C''}, \pi'_{B,C''} >>>)^* \underset{X}{=}$
$(\kappa_{x\in A}\psi(x) < x\bigcirc_B \pi_{B,C''}, < \pi'_{A,B} < x\bigcirc_B, 1_B > \pi_{B,C''}, \pi'_{B,C''} >>)^* \underset{X}{=}$
$(\kappa_{x\in A}\psi(x) < x\bigcirc_B \pi_{B,C''}, < \pi'_{A,B} < x\bigcirc_B, 1_B > \pi_{B,C''}, \pi'_{B,C''} >>)^* \underset{X}{=}$
$(\kappa_{x\in A}\psi(x) < x\bigcirc_B \pi_{B,C''}, < 1_B\ \pi_{B,C''}, \pi'_{B,C''} >)^* \underset{X}{=}$
$(\kappa_{x\in A}\psi(x) < x\bigcirc_{B\times C''}, 1_{B\times C''} >)^* \underset{X}{=}$
$(\psi(x)\pi'_{A,B\times C''} < x\bigcirc_{B\times C''}, 1_{B\times C''} >)^* \underset{X}{=} (\psi(x))^*$

Demostremos la unicidad de $f : A\times B \to C$

Supóngase que $f < x\bigcirc_B, 1_B > \underset{X}{=} \psi(x)$, a f la definimos como $\kappa_{x\in A}\phi(x)$

$$\kappa_{x\in A}\phi(x) \underset{x}{=} \kappa_{x\in A}(f<x\bigcirc_B, 1_B>) \underset{x}{=} f\kappa_{x\in A}<x\bigcirc_B, 1_B> \underset{x}{=}$$
$$f<\kappa_{x\in A}(x\bigcirc_B), \kappa_{x\in A}1_B> \underset{x}{=} f<\kappa_{x\in A}(x\bigcirc_B), \pi'_{A,B}> \underset{x}{=}$$
$$f<\kappa_{x\in A}x<\pi_{A,B}, \kappa_{x\in A}\bigcirc_B>, \pi'_{A,B}> \underset{x}{=}$$
$$f<\pi_{A,1}<\pi_{A,B}, \kappa_{x\in A}\bigcirc_B>, \pi'_{A,B}> \underset{x}{=} f<\pi_{A,B}, \pi'_{A,B}> \underset{x}{=} f1_{A\times B} \underset{x}{=} f \blacksquare$$

Si A es un anillo con elemento unidad, entonces cualquier polinomio con una indeterminada x sobre A tiene una única forma:

$$a_o + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

. Para categorías cartesianas cerradas tiene una simple forma normal.

Proposición *Para cualquier polinomio $\phi(x) : 1 \to C$ con una indeterminada $x : 1 \to A$ sobre una categoría cartesiana o cartesiana cerrada* $\mathbf{A}$, *existe una única flecha $g : A \to C$ en* $\mathbf{A}$ *tal que $gx \underset{x}{=} \phi(x)$. Sobre una categoría cartesiana cerrada* $\mathbf{A}$, *existe una única flecha $h : 1 \to C^A$ tal que* $\varepsilon_{C,A} < h, x > \underset{x}{=} \phi(x)$

Demostración
Para deducir esto de la proposición anterior simplemente damos
$g \underset{x}{=} \kappa_{x\in A}\phi(x) < 1_A, \bigcirc_A >$, $h = \lceil_g\rceil$
y demostremos $\kappa_{x\in A}(gx) < 1_A, \bigcirc_A > \underset{x}{=} g$ y $h\int = g$
$\underset{x}{=} \kappa_{x\in A}(gx) < 1_A, \bigcirc_A > \underset{x}{=} \kappa_{x\in A}g < \pi, \kappa_{x\in A}x > < 1_A, \bigcirc_A >$
$\underset{x}{=} \kappa_{x\in A}g < \pi < 1_A, \bigcirc_A >, \kappa_{x\in A}x < 1_A, \bigcirc_A >>$
$\underset{x}{=} \kappa_{x\in A}g < 1_A, \pi < 1_A, \bigcirc_A >> \underset{x}{=} \kappa_{x\in A}g < 1_A, 1_A \underset{x}{=} g\pi' < 1_A, 1_A > \underset{x}{=}$
$g1_A \underset{x}{=} g$

Posteriormente escribiremos $\lambda_{x\in A}\psi(x)$ para h tal que
$h\int x \underset{x}{=} \varepsilon_{C,A} < h, x > \underset{x}{=} \psi(x)$

De hecho sobre una categoría cartesiana cerrada el corolario no es más débil que el teorema debido a que los polinomios $B \to C$ son una correspondencia uno a uno con el polinomio $1 \to B^C$. $Hom(B,C) \cong Hom(1, C^B)$, ya demostrado anteriormente.

Probaremos la siguiente forma general de completez funcional para categorías cartesianas cerradas.

Teorema *Para todo polinomio $\psi(x) : B \to C$ con una flecha indeterminada $x \cdot D \to A$ sobre una categoría cartesiana cerrada* $\mathbf{A}$, *existe una única flecha*

$f : A^D \times B \to C$ *tal que* $f < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >= \psi(x)$

Demostración

Definamos $f = \rho(x)\psi(x)$ y realicemos la prueba por inducción sobre la longitud de $\phi(x)$

i) $\rho_x k = k\pi'_{A^D,B} \qquad k : B \to C$

$$\rho_x k < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >= k\pi'_{A^D,B} < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >= k1_B = k$$

ii) $\rho_x x = \varepsilon_{A,B}$

$$\begin{aligned}
&\rho_x x < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >\underset{X}{=} \varepsilon_{A,B} < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >\underset{X}{=}\\
&\varepsilon_{A,B} < (x\pi'_{B,D})^*\pi_{B,B} < 1_B, 1_B >, \pi'_{B,B} < 1_B, 1_B >>\underset{X}{=}\\
&\varepsilon_{A,B} < (x\pi'_{B,D})^*\pi_{B,B}, \pi'_{B,B} >< 1_B, 1_B >\underset{X}{=}\\
&x\pi'_{B,D} < 1_B, 1_B >\underset{X}{=} x
\end{aligned}$$

iii) $\rho_x\phi(x) \underset{X}{=} \rho_x < \psi(x), \chi(x) >\underset{X}{=}< \rho_x\psi(x), \rho_x\chi(x) >$

$$\begin{aligned}
&\rho_x\phi(x) < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >\underset{X}{=} \rho_x < \psi(x), \chi(x) >< (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >\underset{X}{=}\\
&< \rho_x\psi(x), \rho_x\chi(x) >< (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >\underset{X}{=}\\
&< \rho_x\psi(x) < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >, \rho_x\chi(x) < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >>\underset{X}{=}\\
&< \psi(x)\pi'_{A^D,B} < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >, \chi(x)\pi'_{A^D,B} < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >>\underset{X}{=}\\
&< \psi(x), \chi(x) >
\end{aligned}$$

iv) $\rho_x\phi(x) \underset{X}{=} \rho_x(\chi(x)\psi(x)) \underset{X}{=} \rho_x\chi(x) < \pi_{A^D,B}, \rho_x\psi(x) >\underset{X}{=}$

$$\begin{aligned}
&\rho_x\phi(x) < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >\underset{X}{=} \rho_x(\chi(x)\psi(x)) < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >\underset{X}{=}\\
&\rho_x\chi(x) < \pi_{A^D,B}, \rho_x\psi(x) >< (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >\underset{X}{=}\\
&\rho_x\chi(x) < \pi_{A^D,B} < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >, \rho_x\psi(x) < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >>\underset{X}{=}\\
&\rho_x\chi(x) < (x\pi'_{B,D})^*, \psi(x)\pi'_{A^D,B} < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >>\underset{X}{=}\\
&\rho_x\chi(x) < (x\pi'_{B,D})^*, \psi(x)1_B >\underset{X}{=} \chi(x)\pi' < (x\pi'_{B,D})^*, \psi(x) >\underset{X}{=} \chi(x)\psi(x)
\end{aligned}$$

v) $\rho_x(\psi^*(x)) = (\rho_x\psi(x)\alpha_{A^D,B',B''})^*$

donde $\psi(x) : B' \times B'' \to C$

$$\alpha_{A^D,B',B''} : (A^D \times B') \times B'' \to A^D \times (B' \times B'')$$
$$\alpha_{A^D,B',B''} \equiv< \pi_{A^D,B'}\pi_{A^D\times B',B''}, < \pi'_{A^D,B'}\pi_{A^D\times B',B''}, \pi'_{A^D\times B',B''} >>$$

$\rho(x)(\psi^*(x)) < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \underset{X}{=} (\rho_x \psi(x) \alpha_{A^D, B', B''})^* < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \underset{X}{=}$
$(\rho_x \psi(x) < \pi_{A^D,B'} \pi_{A^D \times B', B''}, < \pi'_{A^D,B'} \pi_{A^D \times B', B''}, \pi'_{A^D \times B', B''} >>)^* <$
$(x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \underset{X}{=}$
$(\rho_x \psi(x) < \pi_{A^D,B'} \pi_{A^D \times B', B''}, < \pi'_{A^D,B'} \pi_{A^D \times B', B''}, \pi'_{A^D \times B', B''} >> <<$
$(x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \pi_{B,B''}, \pi'_{B,B''} >)^* \underset{X}{=}$
$(\rho_x \psi(x) < \pi_{A^D,B'} \pi_{A^D \times B', B''} << (x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \pi_{B,B''}, \pi'_{B,B''} >, <$
$\pi'_{A^D,B'} \pi_{A^D \times B', B''}, \pi'_{A^D \times B', B''} > << (x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \pi_{B,B''}, \pi'_{B,B''} >>$
$)^*$
$(\rho_x \psi(x) < \pi_{A^D,B'} < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \pi_{B,B''}, < \pi'_{A^D,B'} \pi_{A^D \times B', B''} <<$
$(x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \pi_{B,B''}, \pi'_{B,B''} >, \pi'_{A^D \times B', B''} << (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >$
$\pi_{B,B''}, \pi'_{B,B''} >>>)^* \underset{X}{=}$
$(\rho_x \psi(x) < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \pi_{B,B''}, < \pi'_{A^D,B'} < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \pi_{B,B''},$
$\pi'_{B,B''} >, \pi'_{B,B''} >>)^* \underset{X}{=}$
$(\rho_x \psi(x) < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \pi_{B,B''}, < 1_B \pi_{B,B''}, \pi'_{B,B''} >>)^* \underset{X}{=}$
$= (\rho_x \psi(x) < (x\pi'_{B,D})^* \pi_{B,B''}, 1_{B \times B''} >)^* \underset{X}{=} \psi(x)$

Por demostrar la unicidad de $f : A^D \times B \to C$

Supongase que $f < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \underset{X}{=} \phi(x)$

f fue definido como $\rho_{x \in A} \phi(x)$

$\rho_{x\in A} \phi(x) \underset{X}{=} \rho_{x \in A} f < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \underset{X}{=}$
$\rho_{x\in A} f < \pi_{A,B}, \rho_{x \in A} < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B >> \underset{X}{=}$
$f \rho_{x\in A} < (x\pi'_{B,D})^*, 1_B > \underset{X}{=} f < \rho_{x\in A} (x\pi'_{B,D})^*, \rho_{x\in A} 1_B > \underset{X}{=}$
$f < (\rho_{x\in A} (x\pi'_{B,D} \alpha_{A^D,B,D})^*, \rho_{x\in A} 1_B >$
$\underset{X}{=} f < (\rho_{x\in A} (x\pi'_{B,D} < \pi_{A^D,B} \pi_{A^D \times B, D}, < \pi'_{A^D,B} \pi_{A^D \times B, D}, \pi'_{A^D \times B, D} >>$
$)^*, \rho_{x\in A} 1_B > \underset{X}{=}$
$f < ((x\pi'_{B,D}) \pi_{A^D, B\times D} < \pi_{A^D,B} \pi_{A^D \times B, D}, < \pi'_{A^D,B} \pi_{A^D \times B, D}, \pi'_{A^D \times B, D} >>$
$)^*, \rho_{x\in A} 1_B > \underset{X}{=} f < (x\pi'_{B,D}) < \pi'_{A^D,B} \pi_{A^D \times B, D}, \pi'_{A^D \times B, D} >)^*, \rho_{x\in A} 1_B > \underset{X}{=}$
$f < (x\pi'_{A^D \times B, D} >)^*, \rho_{x\in A} 1_B > \underset{X}{=} f < \pi_{A^D,B}, \pi'_{A^D,B} > \underset{X}{=} f 1_{A^D \times B} \underset{X}{=} f$

por ser $*$ único en una categoría cartesiana cerrada.

∎

Proposición *S.* **A** *es una categoría cartesiana cerrada y* $\mathbf{A}[x]$ *es categoría cartesiana formada de* A *pero adjuntando una indeterminada* $x : 1 \to A$. *Muestre que* $\mathbf{A}[x]$ *es también una categoría cartesiana cerrada.*

Demostración

Para esta demostración omitiremos los subíndices.

Por demostrar

$$(a) \qquad \kappa_{x\in A}\varepsilon < \psi^*(x)\pi, \pi' > = \kappa_{x\in A}\psi(x)$$

$$(b) \qquad \kappa_{x\in A}(\varepsilon < \psi(x)\pi, \pi' >)^* = \kappa_{x\in A}\psi(x)$$

Denostremos (a)

$\kappa_{x\in A}\varepsilon < \psi^*(x)\pi, \pi' > \underset{x}{=} \kappa_{x\in A}\varepsilon < \pi, \kappa_{x\in A} < \psi^*(x)\pi, \pi' >> \underset{x}{=}$
$\varepsilon\pi' < \pi, \kappa_{x\in A} < \psi^*(x)\pi, \pi' >> \underset{x}{=} \varepsilon\kappa_{x\in A} < \psi^*(x)\pi, \pi' > \underset{x}{=}$
$\varepsilon\kappa_{x\in A} < \kappa_{x\in A}(\psi^*(x)\pi), \kappa_{x\in A}\pi' > \underset{x}{=}$
$\varepsilon < \kappa_{x\in A}\psi^*(x) < \pi, \kappa_{x\in A}\pi >, \pi'\pi' > \underset{x}{=}$
$\varepsilon < \kappa_{x\in A}\psi^*(x) < \pi, \pi\pi' >, \pi'\pi' > \underset{x}{=}$
$\varepsilon < (\kappa_{x\in A}\psi(x)\alpha)^* < \pi, \pi\pi' >, \pi'\pi' > \underset{x}{=}$
$\varepsilon < (\kappa_{x\in A}\psi(x)\alpha)^*\pi, \pi' >< < \pi, \pi\pi' >, \pi'\pi' > \underset{x}{=}$
$\kappa_{x\in A}\psi(x)\alpha << \pi, \pi\pi' >, \pi'\pi' > \underset{x}{=}$
$\kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi\pi, < \pi'\pi, \pi' >>< < \pi, \pi\pi' >, \pi'\pi' > \underset{x}{=}$
$\kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi\pi << \pi, \pi\pi' >, \pi'\pi' >, < \pi'\pi, \pi' >< < \pi, \pi\pi' >, \pi'\pi' >> \underset{x}{=}$
$= \kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi < \pi, \pi\pi' >, < \pi'\pi << \pi, \pi\pi' >, \pi'\pi' >, \pi' << \pi, \pi\pi' >$
$, \pi'\pi' >> \underset{x}{=}$
$\kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi, < \pi\pi', \pi'\pi' >> \underset{x}{=}$
$\kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi, < \pi, \pi' > \pi' >> \underset{x}{=} \kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi, \pi' > \underset{x}{=} \kappa_{x\in A}\psi(x)$

Demostremos (b)

$\kappa_{x\in A}(\varepsilon < \psi(x)\pi, \pi' >))^* \underset{x}{=} (\kappa_{x\in A}(\varepsilon < \psi(x)\pi, \pi' > \alpha)^* \underset{x}{=}$
$(\varepsilon\kappa_{x\in A} < \psi(x)\pi, \pi' > \alpha)^* \underset{x}{=}$
$(\varepsilon < \kappa_{x\in A}\psi(x)\pi, \kappa_{x\in A}\pi' > \alpha)^* \underset{x}{=}$
$(\varepsilon < \kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi, \kappa_{x\in A}\pi >, \pi'\pi' > \alpha)^* \underset{x}{=}$
$(\varepsilon < \kappa_{x\in A}\psi(x) < \pi, \pi\pi' >, \pi'\pi' > \alpha)^* \underset{x}{=}$
$(\varepsilon < \psi(x)\pi\pi', \pi'\pi' > \alpha)^* \underset{x}{=}$
$(\varepsilon < \psi(x)\pi\pi', \pi'\pi' >< \pi\pi, < \pi'\pi, \pi' >>)^* \underset{x}{=}$
$(\varepsilon < \psi(x)\pi\pi' < \pi\pi, < \pi'\pi, \pi' >>, \pi'\pi' >< \pi\pi, < \pi'\pi, \pi' >>)^* \underset{x}{=}$
$(\varepsilon < \psi(x)\pi < \pi'\pi, \pi' >, \pi', < \pi'\pi, \pi' >>)^* \underset{x}{=}$
$(\varepsilon < \psi(x)\pi'\pi, \pi' >)^* \underset{x}{=} \psi(x)\pi' \underset{x}{=} \kappa_{x\in A}\psi(x)$

Por ende $\mathbf{A}[x]$ es una categoría cartesiana cerrada. ■

7. POLINOMIOS Y CATEGORIAS DE KLEISLI

En esta sección veremos de otra forma a las categorías cartesianas o cartesianas cerradas $\mathbf{A}[x]$, donde x es una flecha indeterminada $x : 1 \to A$. Mostraremos que la construcción de $\mathbf{A}[x]$ puede ser hecha con herramienta de la teoría categórica.

Definición Un cotriple $(\mathbf{S}.\varepsilon, \delta)$ sobre una categoría $\mathbf{A}$ consiste de un funtor $\mathbf{S} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ y dos transformaciones naturales

$$\varepsilon : \mathbf{S} \to 1_{\mathbf{A}}$$

$$\delta : \mathbf{S} \to \mathbf{S}^2$$

tal que para cualquier objeto $B \in \mathbf{A}$

$\varepsilon \mathbf{S}(B)\delta(B) = 1_{\mathbf{A}(B)} = \mathbf{S}\varepsilon(B)\delta(B)$

$$\begin{tikzcd}
S(B) \arrow[r, "\delta(B)"] \arrow[d, "\delta(B)"'] \arrow[dr, "1_{S(B)}"] & S^2(B) \arrow[d, "S\varepsilon(B)"] \\
S^2(B) \arrow[r] & S(B)
\end{tikzcd}$$

$\delta\mathbf{S}(B)\delta(B) = \mathbf{S}\delta(B)\delta(B)$

$$\begin{tikzcd}
S(B) \arrow[r, "\delta(B)"] \arrow[d, "\delta(B)"'] & S^2(B) \arrow[d, "S(\delta(B))"] \\
S^2(B) \arrow[r, "\delta S(B)"'] & S^3(B)
\end{tikzcd}$$

Observación: Un cotriple en $\mathbf{A}$ es un triple en $\mathbf{A}^{op}$ (la categoría opuesta). La *categoría de Kleisli* $\mathbf{A_S}$ del cotriple $(\mathbf{S}, \varepsilon, \delta)$ tiene los mismos objetos que en $\mathbf{A}$. Pero las flechas $(f : B \to C)$ en $\mathbf{A_S}$ son flechas $f : \mathbf{S}(B) \to C$ en $\mathbf{A}$. En particular, la flecha identidad $1_\mathbf{A}$ en A_S es $\varepsilon(B)$ en $\mathbf{A}$. Definamos la composición en $\mathbf{A_S}$:

Si $f : B \to C$ $\quad g : C \to D$ son flechas en $\mathbf{A_S}$ entonces
$f : \mathbf{S}(B) \to C$ $\quad g : \mathbf{S}(C) \to D$ son flechas en $\mathbf{A}$

$g * f = g\mathbf{S}(f)\delta(B)$

$$\begin{tikzcd}
S(B) \arrow[r, "\delta(B)"] \arrow[rrd, "g*f"'] & S^2(B) \arrow[r, "S(f)"] & S(C) \arrow[d, "g"] \\
& & D
\end{tikzcd}$$

Proposición $\quad \mathbf{A_S}$ *es una categoría.*

Demostración

Sea $f : B \to C \quad g : C \to D \quad h : D \to E$ en A_S

$f * \varepsilon(B) = f\mathbf{S}(\varepsilon(B))\delta(B) = f1_{\mathbf{S}(B)} = f$

$\varepsilon(C) * f = \varepsilon(C)\mathbf{S}(f)\delta(B) = f\varepsilon(\mathbf{S}(B))\delta(B) = f1_{\mathbf{S}(B)} = f$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"'] & S^2(B) \arrow[r, "\varepsilon(S(B))"] \arrow[d, "S(f)"'] & S(B) \arrow[d, "f"] \\ C & S(C) \arrow[r, "\varepsilon(C)"] & C \end{tikzcd}$$

Por demostrar $h * (g * f) = (h * g) * f$

$h * (g * f) = h\mathbf{S}(g * f)\delta(B) = h\mathbf{S}(g)\mathbf{S}^2(f)\mathbf{S}(\delta(B))\delta(B)$

por otra parte

$(h * g) * f = h * g\mathbf{S}(f)\delta(B) = h\mathbf{S}(g)\delta(C)\mathbf{S}(f)\delta(B)$

Es suficiente mostrar

$\mathbf{S}^2(f)\mathbf{S}(\delta(B))\delta(B) = \delta(C)\mathbf{S}(f)\delta(B)$

es decir que el siguiente triángulo conmute

$$\begin{tikzcd} S(B) \arrow[d, "f"'] & S^2(B) \arrow[r, "\delta(S(A))"] \arrow[d, "S(f)"'] & S^3(B) \arrow[d, "S^2(f)"] \\ C & S(C) \arrow[r, "\delta(C)"'] & S^2(C) \end{tikzcd}$$

lo cual se cumple porque δ es una transformación natural

Por lo tanto $\mathbf{A}_{\mathbf{S}}$ es una categoría cartesiana cerrada.

■

Con cualquier objeto A de una categoría cartesiana o cartesiana cerrada $\mathbf{A}$ uno puede asociar un cotriple $(\mathbf{S}_A, \varepsilon_A, \delta_A)$ como sigue:

$\mathbf{S}_A = Ax(-) \qquad \varepsilon_A(B) = \pi'_{A,B} \; \delta_A(B) = < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >$

Así $\qquad \mathbf{S}_A(B) = A \times B$ y para $f : B \to C \qquad \mathbf{S}_A(f) = < \pi_{A,B}, f\pi'_{A,B} >$

Proposición $\qquad (\mathbf{S}_A, \varepsilon_A, \delta_A)$ *es un cotriple.*

Demostración

Demostremos que S_A es un funtor

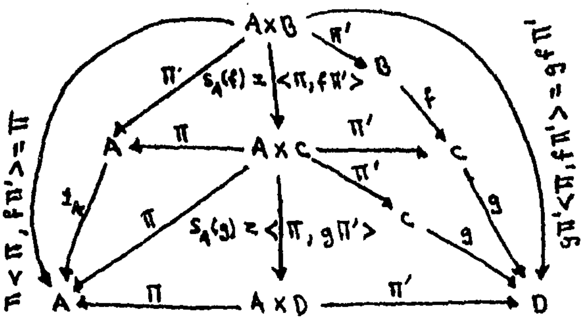
Sea $1_B : B \to B$ por demostrar $S_A(1_B) = 1_{S_A(B)} = 1_{A\times B}$

$S_A(1_B) =< \pi_{A,B}, 1_B\pi'_{A,B} >=< \pi_{A,B}, \pi'_{A,B} >= 1_{A\times B} = 1_{S_A(B)}$

Sea $f : B \to C \qquad g : C \to D$

Por demostrar $S_A(gf) = S_A(g)S_A(f)$

$S_A(gf) =< \pi_{A,B}, gf\pi'_{A,B} >=$
$< \pi_{A,C} < \pi_{A,B}, f\pi'_{A,B} >, g\pi'_{A,C} < \pi_{A,B}, f\pi'_{A,B} >>=$
$< \pi_{A,C}, g\pi'_{A,C} >< \pi_{A,B}, f\pi'_{A,B} >= S_A(g)S_A(f)$



Por demostrar que ε_A y δ_A son transformaciones naturales

Demostremos que ε_A es una transformacón natural

ε_A en la componente B fue definida como $\varepsilon_A(B) = \pi'_{A,B}$
Consideremos el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"] & A\times B = S_A(B) \arrow[r, "\varepsilon_A(B)=\pi'"] \arrow[d, "S_A(f)=<\pi,\, f\pi'>"] & B \arrow[d, "f"] \\ C & A\times C = S_A(C) \arrow[r, "\varepsilon_A(C)=\pi'"'] & C \end{tikzcd}$$

El cual conmuta claramente; por lo tanto ε_A es una transformación natu-
ral.

Demostremos que δ_A es una transformación natural

δ_A fue definida en la componente B como $\delta_A(B) =< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >$

Consideremos el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"] & S_A(B)=A\times B \arrow[r, "\delta_A(B)=<\pi,\, 1_{A\times B}>"] \arrow[d, "S_A(f)=<\pi,\, f\pi'>"] & S_A^2(B)=A\times(A\times B) \arrow[d, "S_A^2(f)=<\pi,\, <\pi,\, f\pi'>\pi'>"] \\ C & S_A(C)=A\times C \arrow[r, "\delta_A(C)=<\pi,\, 1_{A\times C}>"'] & S_A^2(C)=A\times(A\times C) \end{tikzcd}$$

Por demostrar

$< \pi_{A,C}, 1_{A\times C} >< \pi_{A,B}, f\pi'_{A,B} >=$
$< \pi_{A,A\times B}, < \pi_{A\times B}, f\pi'_{A,B} > \pi'_{A,A\times B} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >$

$< \pi_{A,C}, 1_{A\times C} >< \pi_{A,B}, f\pi'_{A,B} >=$
$< \pi_{A,C} < \pi_{A,B}, f\pi'_{A,B} >, 1_{A\times C} < \pi_{A,B}, f\pi'_{A,B} >>=$
$< \pi_{A,B}, < \pi_{A,B}, f\pi'_{A,B} >>$

por otra parte

$< \pi_{A,A\times B}, < \pi_{A\times B}, f\pi'_{A,B} > \pi'_{A,A\times B} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >=$
$< \pi_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >, < \pi_{A\times B}, f\pi'_{A,B} > \pi'_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >>=$
$< \pi_{A,B}, < \pi_{A\times B}, f\pi'_{A,B} >>$

Por lo tanto

$< \pi_{A,C}, 1_{A\times C} >< \pi_{A,B}, f\pi'_{A,B} =$

$< \pi_{A,A\times B}, < \pi_{A\times B}, f\pi'_{A,B} > \pi'_{A,A\times B} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >$

luego δ_A es una transformación natural

Demostremos ahora

$\varepsilon_A \mathrm{S}_A(B) = 1_{\mathrm{S}_A(B)} = \mathrm{S}_A\varepsilon_A(B)\delta_A(B)$ (1)

$\delta_A \mathrm{S}_A(B)\delta_A(B) = \mathrm{S}_A\delta_A(B)$ (2)

Demostremos la ecuación (1)

Lo que debemos demostrar es que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
S_A^1(B) = A\times B \arrow[rr, "\delta_A(B) = <\pi, 1_{A\times B}>"] \arrow[d, "\delta_A(B) = <\pi, 1_{A\times B}>"'] \arrow[drr, "1_{S_A(B)} = 1_{A\times B}"] & & S_A^2(B) = A\times(A\times B) \arrow[d, "\varepsilon_A S_A(B) = \pi'"] \\
S_A^2(B) = A\times(A\times B) \arrow[rr, "S_A\varepsilon_A(B) = <\pi, \pi'\pi'>"'] & & S_A(B) = A\times B
\end{tikzcd}$$

Demostremos que el cuadrado anterior conmuta, es decir

$< \pi_{A,A\times B}, pi'_{A,B}\pi'_{A,A\times B} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >= \pi'_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >$

$< \pi_{A,A\times B}, pi'_{A,B}\pi'_{A,A\times B} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times} >=$

$< \pi_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >, pi'_{A,B}\pi'_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >>=$

$< \pi_{A,B}, \pi'_{A,B} >= 1_{A\times B} = 1_{\mathrm{S}_A}(B)$

Por otro parte

$\pi'_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >= 1_{A\times B} = 1_{\mathrm{S}_A}(B)$

por lo tanto el cuadrado anterior conmuta.

Demostremos la ecuación (2)

$$\begin{tikzcd}
S_A(B) = A\times B \arrow[rrr, "\delta_A(B) = <\pi,\, 1_{A\times B}>"] \arrow[d, "\delta_A(B) = <\pi,\, 1_{A\times B}>"'] & & & S_A^2(B) = A\times(A\times B) \arrow[d, "\delta_A S_A(B) = <\pi,\, 1_{A\times(A\times B)}>"] \\
S_A^2(B) = A\times(A\times B) \arrow[rrr, "S_A\delta_A(B) = <\pi,\, <\pi,\, 1_{A\times B}>\pi'>"] & & & S_A^3(B) = A\times(A\times(A\times B))
\end{tikzcd}$$

Por demostrar que el cuadrado anterior conmuta, es decir
$< \pi_{A,A\times B}, < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} > \pi'_{A,A\times B} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >=$
$< \pi_{A,A\times B}, 1_{A\times(A\times B)} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >$

$< \pi_{A,A\times B}, < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} > \pi'_{A,A\times B} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >=$
$< \pi_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >, < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} > \pi'_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >>=$
$< \pi_{A,B}, < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >>=$

Por otra parte

$< \pi_{A,A\times B}, 1_{A\times(A\times B)} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >=$
$< \pi_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >, 1_{A\times(A\times B)} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >=$
$< \pi_{A,B}, < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >$

Por lo tanto queda demostrado que el cuadrado anterior conmuta y $(\mathbf{S}_A, \varepsilon_A, \delta_A)$ es un cotriple sobre la categoría cartesiana cerrada $\mathbf{A}$

■

La completez funcional de una categoría cartesiana o cartesiana cerrada puede ser interpretada como sigue

Proposición *La categoría $\mathbf{A}[x]$ de todos los polinomios con la indeterminada $x : 1 \to A$ sobre la categoría cartesiana o cartesiana cerrada es isomórfica a la categoría de Kleisli $\mathbf{A}_A = \mathbf{A}_{\mathbf{S}_A}$ del cotriple $(\mathbf{S}_A, \varepsilon_A, \delta_A)$*

Veremos dos demostraciones de esta proposición

Primera demostración

Sea $\mathbf{P} : \mathbf{A}_A \to \mathbf{A}[x]$

a los objetos B de la categoría $\mathbf{A}_A$ el funtor $\mathbf{P}$ les asigna el mismo objeto, es decir, $\mathbf{P}(B) = B$

A las flechas $f : C \to B$ en $\mathbf{A}_A$, esto es, $f : A \times C \to B$ en $\mathbf{A}$
$\mathbf{P}(f) = f < x\bigcirc_C, 1_C >$

$$\begin{pmatrix}\begin{tikzcd} A\times C \arrow[d, "f"] \\ B \end{tikzcd}\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "x"'] & C \arrow[l, "0_C"'] \arrow[d, "<x0_C{,}1_C>"] \arrow[dr, bend left, "1_C"] & \\ A & & A\times C \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "f"] & C \\ & & B & \end{tikzcd}\end{pmatrix}$$

Por demostrar que $\mathbf{P}$ es un funtor

$$\mathbf{P}(\varepsilon_A(B)) = \mathbf{P}(\pi'_{A,B}) = \pi'_{A,B} < x\bigcirc_B, 1_B >= 1_B$$

sea $f : B \to C \qquad g : C \to D$ en $\mathbf{A}_A$, esto es,
$f : A \times B \to C \qquad g : A \times C \to D$ en $\mathbf{A}$

$$g * f = g\mathbf{S}_A(f)\delta_A(B) = g < \pi_{A,A\times B}, f\pi'_{A,A\times B} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >=$$
$$g < \pi_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >, f\pi'_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >>= g < \pi_{A,B}, f >$$

$$\mathbf{P}(g * f) = \mathbf{P}(g < \pi_{A,B}, f >) = g < \pi_{A,B}, f >< x\bigcirc_B, 1_B >=$$
$$g < \pi_{A,B} < x\bigcirc_B, 1_B >, f < x\bigcirc_B, 1_B >>= g < x\bigcirc_B, f < x\bigcirc_B, 1_B >>=$$
$$g < x\bigcirc_C f < x\bigcirc_C, 1_B >, 1_C f < x\bigcirc_C, 1_B >>=$$
$$g < x\bigcirc_C, 1_C > f < x\bigcirc_B, 1_B >= \mathbf{P}(g)\mathbf{P}(f)$$

$$x\bigcirc_B = x\bigcirc_C f < x\bigcirc_B, 1_B > \text{ porque } x\bigcirc_C f = \pi_{A,B}$$

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0_{A\times B}"'] & C \arrow[d, "0_C"] \\ & 1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "0_{A\times B}"] \arrow[dr, "\pi_{A,B}"'] & 1 \arrow[d, "x"] \\ & A \end{tikzcd}$$

La proposición 6.1 nos habla acerca de que P tiene una inversa $\mathbf{K}$ donde $\mathbf{K}(B) = B$ y $\mathbf{K}(f(x)) = \kappa_{x\in A} f(x)$

Demostremos que $\mathbf{K}$ es un funtor

$$\mathbf{K}(1_B) = \kappa_{x\in A} 1_B = 1_B \pi'_{A,B} = \pi'_{A,B} = \varepsilon_A(B)$$

sean $f(x) : B \to C \qquad g(x) : C \to D$ en $\mathbf{A}[x]$

Por demostrar $\mathbf{K}(g(x)f(x)) = \mathbf{K}(g(x)) * \mathbf{K}(f(x))$

$$\mathbf{K}(g(x)f(x)) = \kappa_{x\in A}(g(x)f(x)) = \kappa_{x\in A} g < \pi_{A,B}, \kappa_{x\in A} f >=$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
&\mathbf{K}(g(x)) * \mathbf{K}(f(x)) = \mathbf{K}(g(x))\mathbf{S}_A(\mathbf{K}(f(x))\delta(B) = \\
&\kappa_{x\in A} g < \pi_{A,A\times B}, \mathbf{K}(f)\pi'_{A,A\times B} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >= \\
&\kappa_{x\in A} g < \pi_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >, \mathbf{K}(f)\pi'_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >>= \\
&\kappa_{x\in A} g < \pi_{A,B}, \mathbf{K}(f)1_{A\times B} >= \\
&\kappa_{x\in A} g < \pi_{A,B}, \mathbf{K}(f) >= \kappa_{x\in A} g < \pi_{A,B}, \kappa_{x\in A}(f) >
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{K}(g(x)f(x)) = \mathbf{K}(g(x)) * \mathbf{K}(f(x))$

Demostremos que $\mathbf{PK} = 1_{\mathbf{A}[x]}$ y $\mathbf{KP} = 1_{\mathbf{A}_S}$

sea $f(x) : C \to B$ en $\mathbf{A}[x]$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\mathbf{K}(f(x))) = \mathbf{P}(\kappa_{x\in A}(f(x))) = \kappa_{x\in A} f(x) < x\bigcirc_C, 1_C >= \\
&f(x)\pi'_{A,C} < x\bigcirc_C, 1_C >= f(x)1_C = f(x)
\end{aligned}$$

sea $g : C \to B$ en $\mathbf{A}_S$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{K}(\mathbf{P}(g)) = \mathbf{K}(g < x\bigcirc_C, 1_C >) = \kappa_{x\in A} g < x\bigcirc_C, 1_C >= \\
&g\pi'_{A,C} < x\bigcirc_C, 1_C >= g
\end{aligned}$$

■

Podría ser de interés puntualizar que la curiosa definición de $\kappa_{x\in A}(\chi(x)\psi(x))$ dada en la proposición del teorema de deducción esta relacionada con la curiosa definición de composición en una categoría de Kleisli.

Mientras los lógicos pueden estar de acuerdo con la demostración anterior, los categoristas indudablemente prefieren otra demostración la cual establece directamente que la categoría de Kleisli $\mathbf{A}_A$ tiene la propiedad universal de las categorías polinomiales y la cual les permite evitar del todo las construcciones de la sección 5 y 6.

Segunda Demostración

Supongase que $\mathbf{A}$ es una categoría cartesiana cerrada
Demostremos que $\mathbf{A}_A$ es una categoría cartesiana cerrada definiendo

$\bigcirc_C^A : C \to 1 \qquad \pi_{B,C}^A : B \times C \to B$

$\pi'^A_{B,C} : B \times C \to C \qquad \varepsilon^A_{B,C} : B^C \times C \to B$

$(-)^{*A} : B \to D^C$

De la siguiente forma:

$\bigcirc_C{}^A = \bigcirc_{A \times C} \qquad \pi_{B,C}{}^A = \pi_{B,C}\pi'_{A,B\times C}$

$\pi'_{B,C}{}^A = \pi'_{B\times C}\pi'_{A,B\times C}$
$\varepsilon_{B,C}{}^A = \varepsilon_{B,C}\pi'_{A,B^C\times C}$

$(-)^{*A} = ((-)\alpha_{A,B,C})^*$

donde $\alpha_{A,B,C} \equiv < \pi_{A,B}\pi_{A\times B,C}, < \pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >>$

y siendo $< -,- >$ como en $\mathbf{A}$

Comprobemos que las ecuaciones de una categoría cartesiana cerrada son satisfechas.

sea $f : B \to C \qquad g : B \to D \qquad h : C \to B \times D$ en $\mathbf{A}_A$

$\pi^A_{C,D} * < f, g >= \pi^A_{C,D}\mathrm{S}_A(< f, g >)(\delta(B)) =$
$\pi_{C,D}\pi'_{A,C\times D} < \pi_{A,B}, < f, g > \pi'_{A,B} >< \pi_{A,B}, 1_B >=$
$\pi_{C,D} < f, g > \pi'_{A,B} < \pi_{A,B}, 1_B >=$
$\pi_{C,D} < f, g > 1_B = \pi_{C,D} < f, g >= f$

$\pi'^A_{C,D} * < f, g >= \pi'^A_{C,D}\mathrm{S}(< f, g >)(\delta(B)) =$
$\pi'_{C,D}\pi'_{A,C\times D} < \pi_{A,B}, < f, g > \pi'_{A,B} >< \pi_{A,B}, 1_B >=$
$\pi'_{C,D} < f, g > \pi'_{A,B} >< \pi_{A,B}, 1_B >$
$\pi'_{C,D} < f, g > 1_B >= \pi'_{C,D} < f, g >= g$

$< \pi^A_{B,D} * h, \pi'^A_{B,D} * h >= < \pi^A_{B,D}\mathrm{S}(h)\delta(C), \pi'^A_{B,D}\mathrm{S}(h)\delta(C) >=$
$< \pi^A_{B,D} < \pi_{A,C}, h\pi'_{A,C} >< \pi_{A,C}, 1_C >, \pi'^A_{B,D} < \pi_{A,C}, h\pi'_{A,C} >< \pi_{A,C}, 1_C >>=$
$< \pi_{B,D}\pi'_{A,B\times D} < \pi_{A,C}, h\pi'_{A,C} >< \pi_{A,C}, 1_C >, \pi'_{B,D}\pi'_{A,B\times D} < \pi_{A,C}, h\pi'_{A,C} >$
$< \pi_{A,C}, 1_C >= < \pi_{B,D}h\pi'_{A,C} < \pi_{A,C}, 1_C >, \pi'_{B,D}h\pi'_{A,C} >< \pi_{A,C}, 1_C >=$
$< \pi_{B,D}h, \pi'_{B,D}h >= h$

Sea $\varepsilon_{B,C} : B^C \times C \to B$ una flecha en $\mathbf{A}_A$ entonces

$\varepsilon_{B,C}\pi'_{A,B^C\times C} : A\times(B^C\times C)\to B$ es una flecha en A

$$\left(\begin{tikzcd} B \arrow[rrd, "f^*"] & B\times C \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dd, "f"] & \\ & & D^C \\ & D & \end{tikzcd}\right) \text{ en } \mathbf{A}_A \qquad \begin{tikzcd} A\times B \arrow[rrdd, dashed, "(f\alpha_{A,B,C})^*"'] & (A\times B)\times C \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "\alpha_{A,B,C}"] & \\ & A\times(B\times C) \arrow[d, "f"'] & \\ & D & D^C \end{tikzcd} \text{ en } \mathbf{A}$$

Antes de demostrar
$\varepsilon^A_{D,C} * < (f\alpha_{A,B,C})^* * \pi^A_{B,C}, \pi'^A_{B,C} >= f$

demostremos lo siguiente

Si $\alpha_{A,B,C} : (A\times B)\times C \to A\times(B\times C)$ *entonces*

$$\alpha_{A,B,C} << f,g>,h>=<f,<g,h>>$$

$\alpha_{A,B,C} << f,g>,h>=$
$<\pi_{A,B}\pi_{A\times B,C}, <\pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C}>><<f,g>,h>=$
$<\pi_{A,B}\pi_{A\times B,C} <<f,g>,h>, <\pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C}><<f,g>$
$,h>>=$
$<\pi_{A,B} <f,g>, <\pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C} <<f,g>,h>, \pi'_{A\times B,C} <<f,g>$
$,h>>=$
$<f, <\pi'_{A,B} <f,g>,h>>=<f,<g,h>>$

Ahora si demostremos
$\varepsilon^A_{D,C} * < (f\alpha_{A,B,C})^* * \pi^A_{B,C}, \pi'^A_{B,C} >= f$

$\varepsilon^A_{D,C} * < (f\alpha_{A,B,C})^* * \pi^A_{B,C}, \pi'^A_{B,C} >=$
$\varepsilon^A_{D,C} \mathrm{S}_A(< (f\alpha_{A,B,C})^* * \pi^A_{B,C}, \pi'^A_{B,C} >)\delta_A(B\times C) =$
$\varepsilon^A_{D,C} < \pi_{A,A\times(B\times C)}, < (f\alpha_{A,B,C})^* * \pi^A_{B,C}, \pi'^A_{B,C} > \pi_{A,A\times(B\times C)} >$
$< \pi_{A,B\times C}, 1_{A\times(B\times C)} >=$
$\varepsilon^A_{D,C} < \pi_{A,A\times(B\times C)} < \pi_{A,B\times C}, 1_{A\times(B\times C)} >,$
$< (f\alpha_{A,B,C})^* * \pi^A_{B,C}, \pi'^A_{B,C} > \pi'_{A,A\times(B\times C)} < \pi_{A,B\times C}, 1_{A\times(B\times C)} >>=$
$\varepsilon^A_{D,C} < \pi_{A,B\times C}, < (f\alpha_{A,B,C})^* * \pi^A_{B,C}, \pi'^A_{B,C} >>=$
$\varepsilon_{D,C}\pi'_{A,D^C\times C} < \pi_{A,B\times C}, < (f\alpha_{A,B,C})^* * \pi^A_{B,C}, \pi'^A_{B,C} >>=$

$\varepsilon_{D,C} < (f\alpha_{A,B,C})^* * \pi^A_{B,C}, \pi'^A_{B,C} >>=$
$\varepsilon_{D,C} < (f\alpha_{A,B,C})^* \mathrm{S}_A(\pi^A_{B,C})\delta_A(B \times C), \pi'^A_{B,C} >=$
$\varepsilon_{D,C} < (f\alpha_{A,B,C})^* < \pi_{A,A\times(B\times C)}, \pi^A_{B,C}\pi'_{A,A\times(B\times C)} >< \pi_{A,B\times C}, 1_{A\times(B\times C)} >$
$, \pi'^A_{B,C} >=$
$\varepsilon_{D,C} < (f\alpha_{A,B,C})^* < \pi_{A,A\times(B\times C)} < \pi_{A,B\times C}, 1_{A\times(B\times C)} >, \pi^A_{B,C}\pi'_{A,A\times(B\times C)} <$
$\pi_{A,B\times C}, 1_{A\times(B\times C)} >, \pi'^A_{B,C} >=$
$\varepsilon_{D,C} < (f\alpha_{A,B,C})^* < \pi_{A,B\times C}, \pi^A_{B,C} >, \pi'^A_{B,C} >=$
$\varepsilon_{D,C} < (f\alpha_{A,B,C})^*\pi_{A\times B,C} << \pi_{A,B\times C}, \pi^A_{B\times C} >, \pi'^A_{B\times C} >, \pi'_{A\times B,C} <<$
$\pi_{A,B\times C}, \pi'^A_{B,C} >, \pi'^A_{B,C} >>=$
$\varepsilon_{D,C} < (f\alpha_{A,B,C})^*\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} > << \pi_{A,B\times C}, \pi^A_{B\times C} >, \pi'^A_{B\times C} >=$
$f\alpha_{A,B,C} << \pi_{A,B\times C}, \pi^A_{B\times C} >, \pi'^A_{B\times C} >=$
$f < \pi_{A,B\times C}, < \pi^A_{B,C}, \pi'^A_{B,C} >>=$
$f < \pi_{A,B\times C}, < \pi_{B,C}\pi'_{A,B\times C}, \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\times C} >>=$
$f < \pi_{A,B\times C}, < \pi_{B,C}, \pi'_{B,C} > \pi'_{A,B\times C} >=$
$f < \pi_{A,B\times C}, \pi'_{A,B\times C} >= f$

Sea $k : B \to C^D$ *en* $\mathbf{A}_A$

Por demostrar

$(\varepsilon^A_{C,D} * < k * \pi^A_{B,D}, \pi'^A_{B,D} > \alpha_{A,B,C})^* = k$

$(\varepsilon^A_{C,D} * < k * \pi^A_{B,D}, \pi'^A_{B,D} > \alpha_{A,B,C})^* = (\varepsilon^A_{C,D}\mathrm{S}_A(< k * \pi^A_{B,D}, \pi'^A_{B,D} >$
$)\delta_A(BxD)\alpha_{A,B,C})^* =$
$(\varepsilon^A_{C,D} < \pi_{A,A\times(B\times D)}, < k*\pi^A_{B,D}, \pi'^A_{B,D} > \pi'_{A,A\times(B\times D)} > < \pi_{A\times(B\times D)}, 1_{A\times(B\times D)} >$
$\alpha_{A,B,C})^* =$
$(\varepsilon_{C,D}\pi'_{A,C^D\times D} < \pi_{A,A\times(B\times D)}, < k * \pi^A_{B,D}, \pi'^A_{B,D} > \pi'_{A,A\times(B\times D)} > <$
$\pi_{A\times(B\times D)}, 1_{A\times(B\times D)} > \alpha_{A,B,C})^* =$
$(\varepsilon_{C,D} < k * \pi^A_{B,D}, \pi'^A_{B,D} > \alpha_{A,B,C})^* =$
$(\varepsilon_{C,D} < k\mathrm{S}_A(\pi^A_{B,D})\delta_A(B \times D), \pi'^A_{B,D} > \alpha_{A,B,C})^* =$
$(\varepsilon_{C,D} < k < \pi_{A,A\times(B\times D)}, \pi^A_{B,D}\pi'_{A,A\times(B\times D)} >< \pi_{A,B\times D}, 1_{A\times(B\times D)} >,$
$\pi'^A_{B,D} > \alpha_{A,B,C})^* =$
$(\varepsilon_{C,D} < k < \pi_{A,A\times(B\times D)} < \pi_{A,B\times D}, 1_{A\times(B\times D)} >, \pi^A_{B,D}\pi'_{A,A\times(B\times D)} <$
$\pi_{A,B\times D}, 1_{A\times(B\times D)} >>, \pi'^A_{B,D} > \alpha_{A,B,C})^* =$
$(\varepsilon_{C,D} < k < \pi_{A,B\times D}, \pi^{A\times D}_{B,D} >, \pi'^A_{B,D} > \alpha_{A,B,C})^* =$
$(\varepsilon_{C,D} < k < \pi_{A,B\times D}, \pi^{A\times D}_{B,D} >, \pi'^A_{B,D} >$
$< \pi_{A,B}\pi_{A\times B,C}, < \pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >>)^* =$

$(\varepsilon_{C,D} < k < \pi_{A,B\times D}, \pi^A_{B,D} >, \pi'^A_{B,D} >< \pi_{A,B}\pi_{A\times B,C}, < \pi'\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >>$
$, \pi'^A_{B,D} < \pi_{A,B}\pi_{A\times B,C}, < \pi'\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >>>)^* =$
$(\varepsilon_{C,D} < k < \pi_{A,B}\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C} >, \pi'_{A\times B,C} >)^* =$
$(\varepsilon_{C,D} < k < \pi_{A,B}, \pi'_{A,B} > \pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >)^* =$
$(\varepsilon_{C,D} < k\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >)^* = k$

Por lo tanto las ecuaciones de una categoría cartesiana son satisfechas.

Definamos ahora $\mathbf{H}_A : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_A$ *para objetos* B *y flechas* $f : C \to B$

$\mathbf{H}_A(B) = B$

$\mathbf{H}_A(f) = f\pi'_{A,C}$

Demostremos que $\mathbf{H}_A$ *es un funtor y después que preserva la esrtructura cartesiana cerrada.*

Pretendemos que $\mathbf{H}_A$ *tenga la propiedad universal como* $\mathbf{H}_x$ *De la proposición de categorías polinomiales, con* $\pi_{A,1}$ *sirviendo como indeterminada.*

$\mathbf{H}_A(1_B) = 1_B\pi'_{A,B} = \varepsilon_A(B)$

Sea $f : C \to B$ *y* $g : B \to D$ *en* $\mathbf{A}$

Por demostrar $\mathbf{H}_A(gf) = \mathbf{H}_A(g) * \mathbf{H}_A(f)$

$\mathbf{H}_A(g) * \mathbf{H}_A(f) = \mathbf{H}_A(g)\mathbf{S}_A(\mathbf{H}_A(f))\delta_A(C) =$
$\mathbf{H}_A(g) < \pi_{A,A\times C}, \mathbf{H}_A(f)\pi'_{A,A\times C} >< \pi_{A,C}, 1_{A\times C} >=$
$g\pi'_{A,B} < \pi_{A,A\times C}, \mathbf{H}_A(f)\pi'_{A,A\times C} >< \pi_{A,C}, 1_{A\times C} >=$
$g\mathbf{H}_A(f)\pi'_{A,A\times C} < \pi_{A,C}, 1_{A\times C} >=$
$g\mathbf{H}_A(f) = gf\pi'_{A,C} = \mathbf{H}_A(gf)$

Por lo tanto $\mathbf{H}_A$ *es un funtor.*

Demostremos que $\mathbf{H}_A$ *preserva la estructura cartesiana cerrada.*

$\mathbf{H}_A(\bigcirc_B) = \bigcirc_B\pi'_{A,B} = \bigcirc_{A\times C} = \bigcirc^A_C$

$\mathbf{H}_A(\pi_{B,C}) = \pi_{B,C}\pi'_{A,B\times C} = \pi'^A_{B,C}$

sea $f : C \to B \qquad g : B \to D$

$\mathbf{H}_A(< f, g >) =< f, g > \pi'_{A,C} =< f\pi'_{A,C}, g\pi'_{A,C} >= < \mathbf{H}_A(f), \mathbf{H}_A(g) >$

$\mathbf{H}_A(\varepsilon_{B,C}) = \varepsilon_{B,C}\pi'_{A,B^C \times C} = \varepsilon_{B,C}{}^A$

Sea $f : B \times C \to D$ *en* $\mathbf{A}$ $f^* : B \to D^C$ *en* $\mathbf{A}$
Por demostrar $\mathbf{H}_A(f^*) = (\mathbf{H}_A(f)\alpha_{A,B,C})^*$

$\mathbf{H}_A(f^*) = f^* \pi'_{A,B} = (f < \pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >)^*$

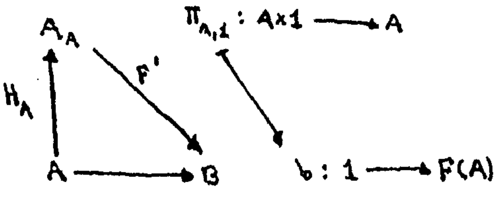
Por otra parte

$(\mathbf{H}_A(f)\alpha)^* = (f\pi'_{A,B\times C} < \pi_{A,B}\pi_{A\times B,C}, < \pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >>$
$)^* =$
$(f < \pi'_{A,B}\pi_{A\times B,C}, \pi'_{A\times B,C} >)^*$

Por lo tanto $\mathbf{H}_A$ *es un funtor cartesiano cerrado*

Dado $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un funtor cartesiano cerrado y* $b : 1 \to \mathbf{F}(A)$ *una flecha en* $\mathbf{B}$ *mostraremos que existe un único funtor cartesiano cerrado* $\mathbf{F}' : \mathbf{A}_A \to \mathbf{B}$ *tal que*

$\mathbf{F}'\mathbf{H}_A = \mathbf{F} \qquad \mathbf{F}'(\pi_{A,1}) = b$



Definamos $\mathbf{F}'$ *sobre objetos* B *y flechas* $f : B \to C$ *en* $\mathbf{A}_A$

$\mathbf{F}'(B) = B$

$\mathbf{F}'(f) = \mathbf{F}(f) < b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >$

Mostremos que $\mathbf{F}'$ *es un funtor cartesiano cerrado*

$\mathbf{F}'(\varepsilon_A(B)) = \mathbf{F}'(\pi'_{B,C}) =$
$\mathbf{F}(\pi'_{B,C}) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B\times C)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >=$
$\pi'_{\mathbf{F}(B),\mathbf{F}(C)} < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B\times C)}, 1_{\mathbf{F}(B\times C)} >= 1_{\mathbf{F}(B\times C)}$

Sea $f : B \to C \qquad g : C \to D$ *en* $\mathbf{A}_A$

$\mathbf{F}'(g * f) = \mathbf{F}(g * f) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >=$
$\mathbf{F}(g < \pi_{A,A\times B}, f\pi'_{A,A\times B} >< \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >=$
$\mathbf{F}(g < \pi_{A,B}, f >) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >=$
$\mathbf{F}(g)\mathbf{F}(< \pi_{A,B}, f >) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >=$
$\mathbf{F}(g) < \pi_{\mathbf{F}(A),\mathbf{F}(B)}, \mathbf{F}(f) >< {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >=$
$\mathbf{F}(g) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, \mathbf{F}(f) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >>=$
$\mathbf{F}(g) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(C)} \mathbf{F}(f) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >, \mathbf{F}(f) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >>=$
$\mathbf{F}(g) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(C)}, 1_{\mathbf{F}(C)} > \mathbf{F}(f) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >=$
$= \mathbf{F}'(g)\mathbf{F}'(f)$

Por lo tanto $\mathbf{F}'$ *es un funtor, demostremos a continuación que es cartesiano cerrado.*

$\mathbf{F}(\pi'^A_{B,C}) = \mathbf{F}'(\pi'_{B,C}\pi'_{A,B\times C}) =$
$\mathbf{F}(\pi'_{B,C}\pi'_{A,B\times C}) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(A\times(B\times C))}, 1_{\mathbf{F}(A\times(B\times C))} >=$
$\pi'_{\mathbf{F}(B),\mathbf{F}(C)}\pi'_{\mathbf{F}(A),\mathbf{F}(B)\times\mathbf{F}(C)} < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(A)\times\mathbf{F}(B\times C)}, 1_{\mathbf{F}(A)\times\mathbf{F}(B\times C)} >=$
$\pi'_{\mathbf{F}(B),\mathbf{F}(C)}$

el procedimiento es análogo para $\mathbf{F}'(\pi^A_{B,C}) = \pi_{\mathbf{F}(B),\mathbf{F}(C)}$

Sea $f : B \to C \qquad g : B \to D$

$\mathbf{F}'(< f, g >) = \mathbf{F}(< f, g >) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >=$
$< \mathbf{F}(f) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >, \mathbf{F}(g) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >>=$
$< \mathbf{F}'(f), \mathbf{F}'(g) >$

$\mathbf{F}'(\varepsilon^A_{B,C}) = \mathbf{F}(\varepsilon_{B,C}\pi'_{A,B^C\times C}) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)^{\mathbf{F}(C)}\times\mathbf{F}(C)}, 1_{\mathbf{F}(B)^{\mathbf{F}(C)}\times\mathbf{F}(C)} >=$
$\varepsilon_{\mathbf{F}(B),\mathbf{F}(C)}\pi'_{\mathbf{F}(A),\mathbf{F}(B)^{\mathbf{F}(C)}\times\mathbf{F}(C)} < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)^{\mathbf{F}(C)}\times\mathbf{F}(C)}, 1_{\mathbf{F}(B)^{\mathbf{F}(C)}\times\mathbf{F}(C)} >=$
$\varepsilon_{\mathbf{F}(B),\mathbf{F}(C)} = \varepsilon_{\mathbf{F}'(B),\mathbf{F}'(C)}$

Por demostrar $\mathbf{F}'((f\alpha_{A,B,C})^*) = (\mathbf{F}'(f))^*$

$\mathbf{F}'((f\alpha_{A,B,C})^*) = \mathbf{F}((f\alpha_{A,B,C})^*) < {}^b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >=$

$(\mathbf{F}(f)\mathbf{F}(\alpha_{A,B,C}) << b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} > \pi_{\mathbf{F}(B)\times\mathbf{F}(C)}, \pi'_{\mathbf{F}(B)\times\mathbf{F}(C)} >)^{*} =$
$(\mathbf{F}(f)(\alpha_{\mathbf{F}(A),\mathbf{F}(B),\mathbf{F}(C)})$
$<< b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)\times\mathbf{F}(C)}, \pi_{\mathbf{F}(B)x\mathbf{F}(C)} >, \pi'_{\mathbf{F}(B)\times\mathbf{F}(C)} >)^{*} =$
$(\mathbf{F}(f) < b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)\times\mathbf{F}(C)}, < \pi_{\mathbf{F}(B)\times\mathbf{F}(C)}, \pi'_{\mathbf{F}(B)\times\mathbf{F}(C)} >>)^{*} =$
$(\mathbf{F}(f) < b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)\times\mathbf{F}(C)}, 1_{\mathbf{F}(B)\times\mathbf{F}(C)} >)^{*} = (\mathbf{F}'(f))^{*}$

Mas aún $\mathbf{F}'$ *tiene las propiedades deseadas*

$\mathbf{F}'(\mathbf{H}_A(B)) = \mathbf{F}'(B) = \mathbf{F}(B)$
$\mathbf{F}'(\mathbf{H}_A(f)) = \mathbf{F}'(f\pi'_{A,B}) = \mathbf{F}(f\pi'_{A,B}) < b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >=$
$\mathbf{F}(f)\mathbf{F}\pi'_{\mathbf{F}(B),\mathbf{F}(C)} < b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)}, 1_{\mathbf{F}(B)} >=$
$\mathbf{F}(f)\ \mathbf{F}'(\pi_{A,1}) = \mathbf{F}(\pi_{A,1}) < b\bigcirc_{\mathbf{F}(1)}, 1_{\mathbf{F}(1)} >=$
$\pi_{\mathbf{F}(A),\mathbf{F}(1)} < b\bigcirc_{\mathbf{F}(1)}, 1_{\mathbf{F}(1)} >= b\bigcirc_{\mathbf{F}(1)} = b1_{\mathbf{F}(1)} = b$

Demostremos que $\mathbf{F}'$ *es único*

Supongamos que $\mathbf{F}'$ *tiene las propiedades anteriores*

$\mathbf{F}'(f) = \mathbf{F}'(f\pi'_{A,A\times B} < \pi_{A,B}, 1_{A\times B} >) =$
$\mathbf{F}'((f\pi'_{A,A\times B} * 1_B) = \mathbf{F}'(f\pi'_{A,A\times B}\mathbf{F}'(1_B) =$
$\mathbf{F}'\mathbf{H}_A(f)\mathbf{F}'(1_B) = \mathbf{F}'(\mathbf{H}_A(f))\mathbf{F}'(< \pi_{A,B}, \pi'_{A,B} >) =$
$\mathbf{F}(f)\mathbf{F}'(< \pi_{A,1} < \pi_{A,B}, \bigcirc_{A\times B} >, \pi_{A,B} >) =$
$\mathbf{F}\mathbf{F}'(< (\pi_{A,1} * \bigcirc_{A\times B}), \pi'_{A,B} >) = \mathbf{F}(f) < \mathbf{F}'(\pi_{A,1})\mathbf{F}'(\bigcirc_{A\times B}), \mathbf{F}'(\pi'_{A,B} >=$
$\mathbf{F}(f) < b \bigcirc_{\mathbf{F}} (B), 1_{\mathbf{F}(B)} >$

Esto completa la prueba

■

Proposición *Dada una flecha indeterminada* $x : 1 \to A$ *sobre una categoría cartesiana cerrada* $\mathbf{A}$; $\mathbf{A}[x] \cong \mathbf{A}_A$ *(categoría de Kleisli) del triple* $(\mathbf{T}_A, \eta_A, \mu_A)$

donde

$\mathrm{T}_A = (-)^A, \qquad \eta_A(B) = \pi^{*}{}_{B,A}$
$\mu_A(B) = (\varepsilon_{B,A} < \varepsilon_{B^A,A}, \pi'_{B^{A^A},A} >)^{*}$

Recordemos lo que es un triple sobre una categoría $\mathbf{A}$

Un triple $(\mathbf{T}_A, \eta_A, \mu_A)$ *consiste de un funtor* $\mathbf{T}_A : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ *y dos transformaciones naturales*

$$\eta_A : 1_A \to \mathbf{T} \qquad \mu_A : \mathbf{T}^2 \to bfT$$

satisfaciendo las siguientes ecuaciones

$$\mu_A \circ \mathbf{T}_A \eta_A = 1_{\mathbf{T}_A} = \mu_A \circ \eta_A \mathbf{T}_A$$

$$\begin{tikzcd}
T_A \arrow[r, "T_A\eta_A"] \arrow[d, "\eta_A T_A"'] \arrow[dr, "1_{T_A}"] & T_A^2 \arrow[d, "\mu_A"] \\
T_A \arrow[r, "\mu_A"'] & T_A
\end{tikzcd}$$

y

$$\mu_A \circ \mu_A \mathbf{T}_A = \mu \circ \mathbf{T}_A$$

$$\begin{tikzcd}
T_A^3 \arrow[r, "\mu_A T_A"] \arrow[d, "T_A\mu_A"'] & T_A^2 \arrow[d, "\mu_A"] \\
T_A^2 \arrow[r, "\mu_A"'] & T_A
\end{tikzcd}$$

La categoría de Kleisli $\mathbf{A}_A$ *del triple* $(\mathbf{T}_A, \eta_A, \mu_A)$ *esta definido como sigue: los objetos de* $\mathbf{A}_A$ *son los mismos que los objetos de* $\mathbf{A}$.

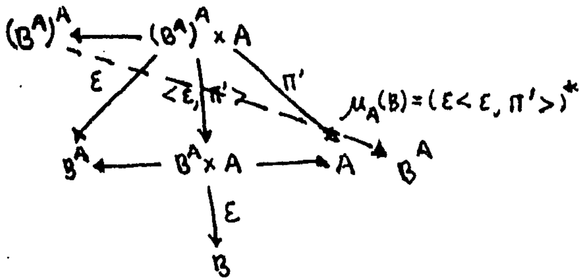
Si $f : B \to C$ *es una flecha en* $\mathbf{A}_A$ *entonces*
$f : B \to \mathbf{T}_A(C)$ *es una flecha en* $\mathbf{A}$

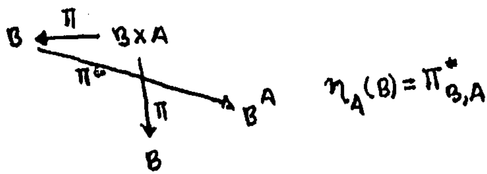
la composición esta definida de la siguiente forma:

Sean $f : B \to C \qquad g : C \to D$ *en* $\mathbf{A}_A$

$g * f = \mu_A(D)\mathbf{T}_A(g)f$

Observemos como estan orientadcas las flechas de $\mu_A(D), \eta_A(B)$ *con las definiciones dadas.*





Como $g * f = \mu_A(D)\mathbf{T}_A(g)f$

$\mathbf{T}_A$ *debe estar definida para las flechas* $g : C \to D$ *de* $\mathbf{A}$ *como* $\mathbf{T}_A(g) = (g\varepsilon_{C,A})^*$

Demostremos que $\eta_A(B)$ *es la identidad en* $\mathbf{A}_A$

Sea $f : B \to C$ *en* $\mathbf{A}_A$

$f * \eta_A(B) = \mu_A\mathbf{T}_A(f)\eta_A(B) = \mu_A(C)\eta_A\mathbf{T}_A(C)f = 1_{\mathbf{T}(A)}f = f$

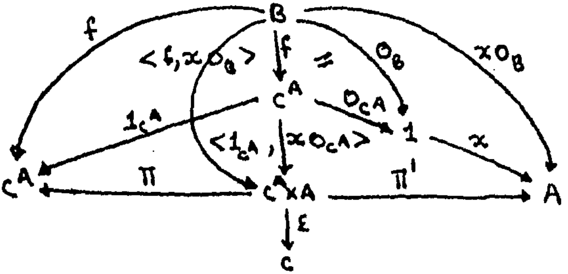
$\eta_A(C) * f = \mu_A(C)\mathbf{T}_A\eta_A(C)f = 1_{\mathbf{T}_A}f = f$

Por lo tanto $\eta_A(B)$ *es la identidad en* $\mathbf{A}_S$
Sea $\mathbf{P} : \mathbf{A}_A \to \mathbf{A}[x]$ $\mathbf{P}$ *lo definimos*

$\mathbf{P}(B) = B$ *B pertenece a los objetos de* $\mathbf{A}_A$ *que son los objetos de* $\mathbf{A}$

Sea $f : B \to C$ *en* $\mathbf{A}_A$, *es decir* $f : B \to C^A$ *en* $\mathbf{A}$

$\mathbf{P}(f) = \varepsilon_{C,A} < f, x\bigcirc_B >$



Demostremos que $\mathbf{P}$ *es un funtor*

$\mathbf{P}(\eta_A(B)) = \mathbf{P}(\pi^*{}_{B,A}) = \varepsilon_{B,A} < \pi^*{}_{B,A}, x\bigcirc_B >=$
$\varepsilon_{B,A} < \pi^*{}_{B,A}\pi_{B,A} < 1_B, x\bigcirc_B >, \pi'{}_{B,A} < 1_B, x\bigcirc_B >>=$
$\varepsilon_{B,A} < \pi^*{}_{B,A}\pi_{B,A}, \pi'{}_{B,A} >< 1_B, x\bigcirc_B >=$
$pi_{B,A} < 1_B, x\bigcirc_B >= 1_B$

Sea $f : B \to C$ $\quad g : C \to D$ $\quad$ en $\mathbf{A}_A$, es decir,
$f : B \to C^A$ $\quad g : C \to D^A$ en $\mathbf{A}$

$g * f = \mu_A(D)\mathrm{T}_A(g)f =$
$(\varepsilon_{D,A} < \varepsilon_{D^A,D}, \pi'{}_{(A^D)^D,D} >)^*(g\varepsilon_{C,A})^* f =$
$(\varepsilon_{D,A} < \varepsilon_{D^A,D}, \pi'{}_{(A^D)^D,D} >< (g\varepsilon_{C,A})^*\pi_{C^A,A}, \pi'{}_{C^A,A} >)^* f =$
$(\varepsilon_{D,A} < \varepsilon_{D^A,D} < (g\varepsilon_{C,A})^*\pi_{C^A,A}, \pi'{}_{C^A,A} >, \pi'{}_{(A^D)^D,D} < (g\varepsilon_{C,A})^*\pi_{C^A,A}, \pi'{}_{C^A,A} >>$
$)^* f =$
$(\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A}, \pi'{}_{C^A,A} >)^* f =$
$(\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A}, \pi'{}_{C^A,A} >< fg\pi_{B,A}, \pi'{}_{B,A} >)^* =$

Por demostrar

$\mathbf{P}(g * f) = \mathbf{P}(g)\mathbf{P}(f)$

$\mathbf{P}(g * f) = \mathbf{P}((\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A}, \pi'{}_{C^A,A} >< f\pi_{B,A}, \pi'{}_{B,A} >)^*) =$
$\varepsilon_{D,A} < (\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A}, \pi'{}_{C^A,A} < f\pi_{B,A}, \pi'{}_{B,A} >)^*, x\bigcirc_B >=$

$\varepsilon_{D,A} < (\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A}, \pi'_{C^A,A} >< f\pi_{B,A}, \pi'_{B,A} >)^* \pi_{B,A} < 1_B, x\bigcirc_B >,$
$\pi'_{B,A} < 1_B, x\bigcirc_B >>=$
$\varepsilon_{D,A} < (\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A}, \pi'_{C^A,A} >< f\pi_{B,A}, \pi'_{B,A} >)^* \pi_{B,A},$
$\pi'_{B,A} >< 1_B, x\bigcirc_B >=$
$\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A}, \pi'_{C^A,A} >< f\pi_{B,A}, \pi'_{B,A} >< 1_B, x\bigcirc_B >=$
$\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A}, \pi'_{C^A,A} >< f\pi_{B,A} < 1_B, x\bigcirc_B >, \pi'_{B,A} < 1_B, x\bigcirc_B >>=$
$\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A}, \pi'_{C^A,A} >< f, x\bigcirc_B >=$
$\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A} < f, x\bigcirc_B >, \pi'_{C^A,A} < f, x\bigcirc_B >>=$
$\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A} < f, x\bigcirc_B >, x\bigcirc_B >=$
$\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A} < f, x\bigcirc_B >, x\bigcirc_C \varepsilon_{C,A} < f, x\bigcirc_B >>=$
$\varepsilon_{D,A} < g\varepsilon_{C,A}, x\bigcirc_C > \varepsilon_{C,A} < f, x\bigcirc_B >=$
$\mathbf{P}(g)\mathbf{P}(f)$

Por lo tanto $\mathbf{P}$ *es un funtor*

Definamos ahora $\mathbf{K} : \mathbf{A}[x] \to \mathbf{A}_A$

$\mathbf{K}(B) = B$ *donde* B *es un objeto de* $\mathbf{A}[x]$, *que son objetos de* $\mathbf{A}$

Sea $f : B \to C$ *en* $\mathbf{A}[x]$

$\mathbf{K}(f) = \pi^*_{C,A} f$

$$\begin{pmatrix} B \\ \downarrow f \\ C \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} B \\ \downarrow f \\ C \\ \downarrow \pi^* \\ C^A \end{pmatrix}$$

Por demostrar que $\mathbf{K}$ *es un funtor*

$\mathbf{K}(1_B) = \pi^*_{B,A} 1_B = \pi^*_A(B)$

Sea $f : B \to C \qquad g : B \to C$ *en* $\mathbf{A}[x]$

Por demostrar $\mathbf{K}(gf) = \mathbf{K}(g) * \mathbf{K}(f)$

$\mathbf{K}(g) * \mathbf{K}(f) = \mu_A(D)\mathbf{T}_A(\mathbf{K}(g))\mathbf{K}(f) =$
$(\varepsilon_{D,A} < \varepsilon_{(D^A)^A,A}, \pi'_{(D^A)^A,A} >)^* \, (\pi^*_{D,A} g\varepsilon_{C,A})^* \pi^*_{C,A} f =$
$(\varepsilon_{D,A} < \varepsilon_{(D^A)^A,A}, \pi'_{(D^A)^A,A} >< (\pi^*_{D,A} g\varepsilon_{C,A})^* \pi_{C^A,A}, \pi'_{C^A,A} >)^* \pi^*_{C,A} f =$

$(\varepsilon_{D,A} < \pi^*_{D,A} g\varepsilon_{C,A}, \pi'_{C^A,A} >)^* \pi^*_{C,A} f =$
$(\varepsilon_{D,A} < \pi^*_{D,A} g\varepsilon_{C,A}, \pi'_{C^A,A} > < \pi^*_{C,A}\pi_{C,A}, \pi'_{C,A} >)^* f =$
$(\varepsilon_{D,A} < \pi^*_{D,A} g\pi_{C,A}, \pi'_{C,A} >)^* f =$
$\pi^*_{D,A} gf = (\pi_{D,A} < gf\pi_{B,A}, \pi'_{B,A} >)^* =$
$(gf\pi_{B,A})^*$

Por otra parte

$$\mathbf{K}(gf) = \pi^*_{D,A} gf = (\pi_{D,A} < gf\pi_{B,A}, \pi'_{B,A} >)^* = (gf\pi_{B,A})^*$$

Por lo tanto $\mathbf{K}(gf) = \mathbf{K}(g) * \mathbf{K}(f)$

Por demostrar $\mathbf{PK} = 1_{\mathbf{A}[x]}$ *y* $\mathbf{KP} = 1_{\mathbf{A}_S}$

Sea $f : B \to C$ *en* $\mathbf{A}[x]$

$\mathbf{PK}(f) = \mathbf{P}(\pi^*_{C,A} f) = \varepsilon_{C,A} < \pi^*_{C,A} f, x\bigcirc_B >=$
$\varepsilon_{C,A} < \pi^*_{C,A}\pi_{C,A} < f, x\bigcirc_B >, \pi'_{C,A} < f, x\bigcirc_B >>=$
$\varepsilon_{C,A} < \pi^*_{C,A}\pi_{C,A}, \pi'_{C,A} >< f, x\bigcirc_B >=$
$\pi_{C,A} < f, x\bigcirc_B >= f$

Sea $g : B \to C$ *en* $\mathbf{A}_S$

$\mathbf{KP}(f) = \mathbf{K}(\varepsilon_{C,A} < f, x\bigcirc_B >) = \pi^*_{C,A}\varepsilon_{C,A} < f, x\bigcirc_B >=$
$(\pi_{C,A} < \varepsilon_{C,A}\pi_{C^A x A,A}, \pi'_{C^A x A,A} >)^* < f, x\bigcirc_B >=$
$(\varepsilon_{C,A}\pi_{C^A x A,A})^* < f, x\bigcirc_B >=$
$(\varepsilon_{C,A}\pi_{C^A x A,A} << f, x\bigcirc_B > \pi_{B,A}, \pi'_{B,A} >)^* =$
$(\varepsilon_{C,A} < f, x\bigcirc_B > \pi_{B,A})^* =$
$(\varepsilon_{C,A} < f\pi_{B,A}, x\bigcirc_B \pi_{B,A} >)^* =$
$(\varepsilon_{C,A} < f\pi_{B,A}, \pi'_{B,A} >)^* = f$

■

Proposición *La categoría de Eilenberg-Moore del cotriple* $(\mathbf{S}_A, \varepsilon_A, \delta_A)$ *es isomorfa a la categoría 'slice'* $\mathbf{A}/A$, *cuyos objetos son flechas* $f : B \to A$ *en* $\mathbf{A}$ *y las flechas de* $\mathbf{A}/A$ *son triángulos conmutativos.*

Demostración

Demostremos que $\mathbf{A}/A$ *es una categoría.*

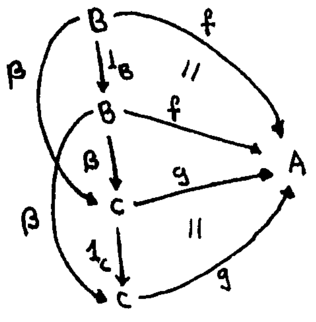
$$Obj(A/A) = \{ B \xrightarrow{f} A \mid f \in Hom(A) \}$$

$$Hom(A/A) = \left\{ \begin{array}{c} (B,f) \\ \downarrow \beta \\ (C,g) \end{array} \;\middle|\; \begin{tikzcd} B \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "f"] & \\ C \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd} \right\}$$

Sea $\beta : (B,f) \to (C,g)$ $\quad 1_{(C,g)} : (C,g) \to (C,g)$
$1_{(B,f)} : (B,f) \to (B,f)$

Por demostrar $1_{C,g}\beta = \beta$ *y* $\beta 1_{B,f} = \beta$

Consideremos el siguiente diagrama



Claramente se tiene que $1_{C,g}\beta = \beta$ *y* $\beta 1_{B,f} = \beta$

Sea $\gamma : (C,g) \to (D,h)$ $\quad \nu : (D,h) \to (E,k)$

Por demostrar $\nu(\gamma\beta) = (\nu\gamma)\beta$

Es asociativa porque todos los triángulos posibles que se forman en el siguiente diagrama son conmutativos.

$$\begin{tikzcd} & & A & \\ B \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[r, "v"'] & C \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\gamma"'] & D \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\beta"'] & E \arrow[ul, "K"'] \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\mathbf{A}/A$ *es una categoría.*

Veamos quien es la categoría de Eilenberg-Moore del cotriple $(\mathbf{S}_A, \varepsilon_A, \delta_A)$

Dado el cotriple $(\mathbf{S}_A, \varepsilon_A, \delta_A)$ *sobre la categoría* $\mathbf{A}$, *la categoría de Eilenber-Moore* $\mathbf{A}^{\mathbf{S}_A}$ *del cotriple anterior esta definido de la siguiente forma.*

$$Obj(A^{S_A}) = \left\{ (B,f) \mid f : B \longrightarrow S_A(B) \ , \ f \in Hom(A) \right\}$$

que satisfacen las siguiente ecuaciones

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varepsilon_A(B)"] \arrow[dr, "1_B"'] & S_A(B) \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & S_A(B) \arrow[d, "S_A(f)"] \\ S_A(B) \arrow[r, "\delta_A(B)"'] & S_A^2(B) \end{tikzcd}$$

$$Hom(A^{S_A}) = \left\{ (B,f) \xrightarrow{\beta} (C,g). \ \middle| \ \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ S_A(B) \arrow[r] & S_A(C) \end{tikzcd} \right\}$$

Demostremos que $\mathbf{A}/A \cong \mathbf{A}^{\mathbf{S}_A}$

Construyamos $\mathbf{P} : \mathbf{A}^{\mathbf{S}_A} \to \mathbf{A}/A$

$$
\begin{tikzcd}
(B, f) \arrow[r, mapsto] & (B, \pi f)
\end{tikzcd}
$$

$$
\left(\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"] \\ A \times B \end{tikzcd}\right)
\longmapsto
\left(\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"] \\ A \times B \arrow[d, "\pi"] \\ A \end{tikzcd}\right)
$$

$$
\begin{tikzcd}
(B, f) \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, "\beta"'] & & (B, \pi f) \arrow[d, "\beta"] \\
(C, g) \arrow[rr, mapsto] & & (C, \pi g)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "\pi f"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "="] & \\
C \arrow[r, "\pi g"'] & A
\end{tikzcd}
$$

Por demostrar que el triángulo conmuta, es decir $\pi_{A,C}g\beta = \pi_{A,B}f$

$\pi_{A,C}g\beta = \pi_{A,C}(g\beta) = \pi_{A,C}(\mathrm{S}_A(\beta)f) =$
$\pi_{A,C} < \pi_{A,B}, \beta\pi'_{A,B} > f = \pi_{A,B}f$

Por lo tanto el triángulo conmuta

Demostremos que $\mathbf{P}$ *es un funtor.*

Sea $1_{(B,f)} : (B,f) \to (B,f)$
$\beta : (B,f) \to (C,g)$
$\gamma : (C,g) \to (D,h)$

Por demostrar $\mathrm{P}(1_{(B,f)}) = 1_B$

Considerando el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(B,f) \arrow[d, "1_{(B,f)}"'] \\
(B,f)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[rd, "\pi f"] \arrow[d, "1_B"'] & \\
B \arrow[r, "\pi f"'] & A
\end{tikzcd}
$$

claramente que $\mathbf{P}(1_{(B,f)}) = 1_B$
Por demostrar $\mathbf{P}(\gamma\beta) = \mathbf{P}(\gamma)\mathbf{P}(\beta)$

$$\mathbf{P}(\gamma\beta) = \gamma\beta = \mathbf{P}(\gamma)\mathbf{P}(\beta)$$

$$
\begin{tikzcd}
(B,f) \arrow[d, "\beta"'] \\
(C,g) \arrow[d, "\gamma"'] \\
(D,h)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "\beta"'] \arrow[rd, "\pi f"] & \\
C \arrow[r, "\pi g"] \arrow[d, "\delta"'] & A \\
D \arrow[ru, "\pi h"'] &
\end{tikzcd}
$$

Construyamos $\mathbf{K} : \mathbf{A}/A \to \mathbf{A}^{S_A}$

$$(B,f) \longmapsto \langle f, 1_B \rangle$$

$$
\left(
\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "f"] \\
A
\end{tikzcd}
\right)
\longmapsto
\left(
\begin{tikzcd}
& B \arrow[ld, "f"'] \arrow[d, "{\langle f, 1_B \rangle}"] \arrow[rd, "1_B"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & B
\end{tikzcd}
\right).
$$

Demostremos que esta correspondencia satisface las condiciones que se le piden a los objetos de una categoría de Eilenberg-Moore

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "{\langle f, 1_B \rangle}"] \arrow[rd, "1_B"'] & S_A(B) = A \times B \arrow[d, "\varepsilon_A(B) = \pi'_{A,B}"] \\
& B
\end{tikzcd}
\qquad
\pi'_{A,B}\langle f, 1_B \rangle = 1_B
$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "{<f,1_B>}"] \arrow[d, "{<f,1_B>}"'] & S_A(B) = A\times B \arrow[d, "{S_A(f) = <\pi, <f,1_B>\pi'>}"] \\
A\times B = S_A(B) \arrow[r, "{\delta_A(B) = <\pi, 1_{A\times B}>}"'] & S_A^2(B) = A\times(A\times B)
\end{tikzcd}$$

Por demostrar

$< \pi_{A,B}, 1_{AxB} >< f, 1_B >=< \pi_{A,B}, < f, 1_B > \pi'_{A,B} < f, 1_B >$

$< \pi_{A,B}, 1_{AxB} >< f, 1_B >=< \pi_{A,B} < f, 1_B >, 1_{AxB} < f, 1_B >>=$
$< f, < f, 1_B >$

Por otra parte

$< \pi_{A,B}, < f, 1_B > \pi'_{A,B} < f, 1_B >=< f, 1_B >$

por lo tanto el cuadrado conmuta

Veamos como mandamos los morfismos de A/A *a* $\mathrm{A}^{\mathrm{S}_A}$ *a traves de* K

$\mathrm{K}(\beta) = \beta$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C \arrow[dl, "g"] & \longmapsto & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "{<f,1_B>}"'] & C \arrow[d, "{<g,1_C>}"] \\
A & & & A\times B \arrow[r, "S_A(\beta)"'] & A\times C
\end{tikzcd}$$

Comprobemos que esta correspondencia satisface la condición que se le pide a un morfismo en una categoría de Eilenberg-Moore

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "{<f,1_B>}"'] & C \arrow[d, "{<g,1_C>}"] \\
S_A(B)=(A\times B) \arrow[r, "{S_A(\beta)=<\pi,\beta\pi'>}"] & S_A(C)=A\times C
\end{tikzcd}$$

Por demostrar $<\pi_{A,B},\beta\pi'_{A,B}><f,1_B>=<g,1_C>\beta$

$<\pi_{A,B},\beta\pi'_{A,B}><f,1_B>=<\pi_{A,B}<f,1_B>,\beta\pi'_{A,B}<f,1_B>>=$
$<f,\beta>=<g\beta,\beta>=<g,1_C>\beta$

Demostremos que $\mathbf{K}$ *es un funtor*

Sea $1_{(B,f)}:(B,f)\to(B,f)$

Por demostrar $\mathbf{K}(1_{(B,f)})=1_B$

$$\left(\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "1_B"'] & \\
 & A \\
B \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}\right) \longmapsto
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "1_B"] \arrow[d, "{<f,1_B>}"'] & B \arrow[d, "{<f,1_B>}"] \\
A\times B \arrow[r, "{S_A(1_B)=<\pi,\pi'>=1_{A\times B}}"'] & A\times B
\end{tikzcd}$$

Sea $\beta:(B,f)\to(C,g)$ $\qquad\gamma:(C,g)\to(A,h)$

Por demostrar $\mathbf{K}(\gamma\beta)=\gamma\beta=\mathbf{K}(\gamma)\mathbf{K}(\beta)$

$$\left(\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend left, "\gamma\beta"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "g"] & D \arrow[dl, "h"] \\
 & A &
\end{tikzcd}\right) \longmapsto
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "{<f,1_B>}"'] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "{<g,1_C>}"] & D \arrow[d, "{<h,1_D>}"] \\
A\times B \arrow[r, "{<\pi,f\pi'>}"'] & A\times C \arrow[r, "{<\pi,g\pi'>}"'] & A\times D
\end{tikzcd}$$

Demostremos que $\mathbf{PK} = 1_{\mathbf{A}/A}$ *y* $\mathbf{KP} = 1_{\mathbf{A}^{\mathbf{S}_A}}$

Sea f *un objeto de* $\mathbf{A}/A$

$\mathbf{PK}(f) = \mathbf{P}(< f, 1_B >) = \pi_{A,B} < f, 1_B >= f$

Sea β *una flecha de* $\mathbf{A}/A$

$\mathbf{PK}(\beta) = \mathbf{P}(\beta) = \beta$

Sea (B, f) *un objeto de* $\mathbf{A}^{\mathbf{S}_A}$

$\mathbf{KP}(f) = \mathbf{K}(< \pi_{A,B}f, 1_B >) =< \pi_{A,B}f, \pi'_{A,B}f >= f$

Sea β *una flecha de* $\mathbf{A}^{\mathbf{S}_A}$

$\mathbf{KP}(\beta) = \mathbf{K}(\beta) = \beta$
Por lo tanto $\mathbf{A}/A \cong \mathbf{A}^{\mathbf{S}_A}$

■

8. C^3 CON COPRODUCTOS

Las categorías cartesianas cerradas fueron definidas como un cálculo proposicional intuicionista positivo satisfaciendo ciertas ecuaciones entre las pruebas. Para completar el cuadro, definiremos una categoría bicartesiana cerrada como un cálculo proposicional intuicionista satisfaciendo las siguientes ecuaciones

E5. $f = \Diamond_A$ Para toda $f : \bot \to A$

E6a. $[f, g]\kappa_{A,B} = f$

E6b. $[f, g]\kappa'_{A,B} = g$

E6c. $[h\kappa_{A,B}, h\kappa'_{A,B}] = h$

Para toda $f : A \to C$ $g : B \to C$ $h : A \times B \to C$

Recordemos que la operación $[-, -]$ fue definida en términos de la flecha

$$\zeta^C{}_{A,B} : C^A \times C^B \to C^{A \vee B}$$

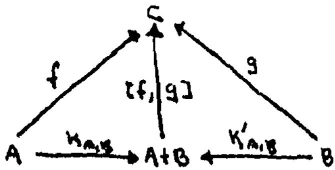
Asi

$$[f, g] \equiv (\zeta^C{}_{A,B} < \ulcorner f \urcorner, \ulcorner g \urcorner >)^{\int}$$

Es costumbre escribir 0 por $\perp$ y $A+B$ por $A \vee B$

E5 afirma que 0 es un objeto inicial, lo cual es claro. Y E6 afirma que $A+B$ es un coproducto de A y B con inyecciones $\kappa_{A,B}$ y $\kappa'_{A,B}$

Demostremos que $A+B$ es un coproducto



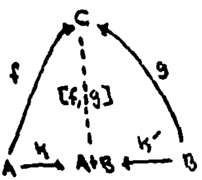
Supongase que existe $h : A+B \to C$ luego
$[f,g] = [h\kappa_{A,B}, h\kappa'_{A,B}] = h$

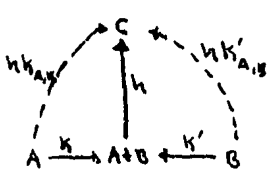
Asi $Hom(0,A)$ tiene un solo elemento y

$Hom(A,C) \times Hom(B,C) \cong Hom(A+B,C)$

Demostración

Dado $(A \xrightarrow{f} C, B \xrightarrow{g} C)$ asociamos la flecha $A+B \xrightarrow{[f,g]} C$
y dado
$A+B \xrightarrow{h} C$ asociamos $(A \xrightarrow{h\kappa_{A,B}} C, B \xrightarrow{h\kappa'_{A,B}} C)$





Demostremos que una es inversa de la otra.

$$(A \xrightarrow{f} C, B \xrightarrow{g} C) \xrightarrow{[-,-]} (A+B \xrightarrow{[f,g]} C)$$
$$\longrightarrow (A \xrightarrow{[f,g]\kappa_{A,B}=f} C, B \xrightarrow{[f,g]\kappa'_{A,B}=g} C)$$

$$(A+B \xrightarrow{h} C) \longrightarrow (A \xrightarrow{h\kappa_{A,B}} C, B \xrightarrow{h\kappa'_{A,B}} C)$$

$$\xrightarrow{[-,-]}(A+B \xrightarrow{[h\kappa_{A,B},h\kappa'_{A,B}]=h} C)$$

Por lo tanto $Hom(A,C)\times Hom(B,C)\cong Hom(A+B,C)$

■

Proposición *En cualquier categoría bicartesiana cerrada se tienen los siguientes isomorfismos.*

(a) $A+0\cong A$

Demostración

$$A\xrightarrow{\kappa_{A,0}}A+0$$

luego

$$\frac{A\xrightarrow{1_A}A \qquad 0\xrightarrow{\Diamond_A}A}{A+0\xrightarrow{[1_A,\Diamond_A]}A}$$

Por demostrar

$[1_A,\Diamond_A]\kappa_{A,B}=1_A$

$\kappa_{A,B}[1_A,\Diamond_A]=[\kappa_{A,B},\kappa_{A,B}\Diamond_A]=[\kappa_{A,0},\kappa'_{A,0}]=1_{A+0}$

■

(b) $A\times 0\cong 0$

Demostración

$$A\times 0\xrightarrow{\pi'_{A,B}}0$$

$$\frac{0\xrightarrow{\Diamond_A}A \qquad 0\xrightarrow{1_0}0}{0\xrightarrow{<\Diamond_A,1_0>}A\times 0}$$

$\pi'_{A,0}<\Diamond_A,1_0>=1_0$

$<\Diamond_A,1_0>\pi'_{A,0}=<\Diamond_A\pi'_{A,0},\pi'_{A,0}>=\pi_{A,0},\pi'_{A,0}>=1_{A\times 0}$

■

(c) $A^0 \cong 1$

Demostración

$$A^0 \xrightarrow{\bigcirc_{A^0}} 1$$

$$\begin{tikzcd}
1 & 1 \times 0 \arrow[l, "\pi_{1,0}"'] \arrow[d, "\pi'_{1,0}"] & \\
 & 0 \arrow[d, "\Diamond_A"] & A^0 \\
 & A &
\arrow[from=1-1, to=2-3, "(\Diamond_A \pi'_{1,0})^*"']
\end{tikzcd}$$

$\bigcirc_{A^0}(\Diamond_A \pi'_{1,0})^* = 1_1$ pues

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "(\Diamond_A \pi'_{1,0})^*"] \arrow[rr, bend right, "1_1 = \bigcirc_1"'] & A^0 \arrow[r, "\bigcirc_{A^0}"] & 1
\end{tikzcd}$$

$(\Diamond_A \pi'_{1,0})^* \bigcirc_{A^0} = (\Diamond_A \pi'_{1,0} < \bigcirc_{A^0} \pi_{A^0,0}, \pi'_{A^0,0} >)^* =$
$(\Diamond_A \pi'_{A^0,0})^* = (\varepsilon_{A,0})^* = 1_{A^0}$

(d) $A + B \cong B + A$

Demostración

$$\frac{A \xrightarrow{\kappa'_{A,B}} B + A \qquad B \xrightarrow{\kappa_{A,B}} B + A}{A + B \xrightarrow{[\kappa'_{A,B}, \kappa_{A,B}]} B + A}$$

$$\frac{B \xrightarrow{\kappa'_{A,B}} A + B \qquad A \xrightarrow{\kappa_{A,B}} A + B}{B + A \xrightarrow{[\kappa'_{A,B}, \kappa_{A,B}]} A + B}$$

$[\kappa'_{A,B}, \kappa_{A,B}][\kappa'_{A,B}, \kappa_{A,B}] = [\kappa'_{A,B}, \kappa_{A,B}]\kappa'_{A,B}, [\kappa'_{A,B}, \kappa_{A,B}]\kappa_{A,B}] =$
$[\kappa_{A,B}, \kappa'_{A,B}] = 1_{B+A}$

La demostracion es análoga para demostrar 1_{A+B}

■

(d) $(A+B)+C \cong A+(B+C)$

Demostración

$$\dfrac{\begin{array}{l} \quad A \xrightarrow{\kappa_{A,B+C}} A+(B+C) \\ B \xrightarrow{\kappa_{B,C}} B+C \xrightarrow{\kappa'_{A,B+C}} A+(B+C) \end{array}}{A+B \xrightarrow{[\kappa_{A,B+C}, \kappa'_{A,B+C}\kappa_{B,C}]} A+(B+C)} \qquad .....(1)$$

de (1) y $\quad C \xrightarrow{\kappa'_{B,C}} B+C \xrightarrow{\kappa'_{A,B+C}} A+(B+C)$
se sigue

$$(A+B)+C \xrightarrow{[[\kappa_{A,B+C}, \kappa'_{A,B+C}\kappa_{B,C}], \kappa'_{A,B+C}\kappa'_{B,C}]} A+(B+C)$$

Construyamos la flecha $\quad A+(B+C)$ a $(A+B)+C$

$$A \xrightarrow{\kappa_{A+B}} A+B \xrightarrow{\kappa_{(A+B)+C}} (A+B)+C \qquad ...(2)$$

$$\dfrac{\begin{array}{l} \quad B \xrightarrow{\kappa'_{A,B}} A+B \xrightarrow{\kappa_{A+B,C}} (A+B)+C \\ C \xrightarrow{\kappa'_{A+B,C}} (A+B)+C \end{array}}{B+C \xrightarrow{[\kappa_{A+B,C}\kappa'_{A,B}, \kappa'_{A+B,C}]} (A+B)+C} \ ...(3)$$

de (2) y (3) deducimos

$$A+(B+C) \xrightarrow{[\kappa_{A+B,C}\kappa_{A,B}, [\kappa_{A+B,C}\kappa'_{A,B}, \kappa'_{A+B,C}]]} (A+B)+C$$

Demostremos que son inversas una de la otra.

$[[\kappa_{A,B+C}, \kappa'_{A,B+C}\kappa_{B,C}], \kappa'_{A,B+C}\kappa'_{B,C}]$
$[\kappa_{A+B,C}\kappa_{A,B}, [\kappa_{A+B,C}\kappa'_{A,B}, \kappa'_{A+B,C}]] =$
$[[[\kappa_{A,B+C}, \kappa'_{A,B+C}\kappa_{B,C}], \kappa'_{A,B+C}\kappa'_{B,C}]\kappa_{A+B,C}\kappa_{A,B},$
$[[\kappa_{A,B+C}, \kappa'_{A,B+C}\kappa_{B,C}], \kappa'_{A,B+C}\kappa'_{B,C}][\kappa_{A+B,C}\kappa'_{A,B}, \kappa'_{A+B,C}]] =$

$[\kappa_{A,B+C}, [\kappa'_{A,B+C}\kappa_{B,C}, \kappa'_{A,B+C}\kappa'_{B,C}]] =$
$[\kappa_{A,B+C}, \kappa'_{A,B+C}[\kappa_{B,C}, \kappa'_{B,C}]] =$
$[\kappa_{A,B+C}, \kappa'_{A,B+C}] = 1_{A+(B+C)}$

La demostración es análoga para demostrar $1_{(A+B)+C}$

■

(e) $(A+B) \times C \cong (A \times C) + (B \times C)$

Demostración

En la sección llamada 'cálculo proposicional como un sistema deductivo definimos las flecha que va $(A+B) \times C$ a $(A \times C) + (B \times C)$ y viceversa, las cuales fueron

$$(A \times C) + (B \times C) \xrightarrow{<[\kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \kappa'_{A,B}\pi_{B,C}], [\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}]>} (A+B) \times C$$

y

$$(A+B) \times C \xrightarrow{\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} <[\kappa^*_{A\times C,B\times C}, \kappa'^*_{A\times C,B\times C}]\pi_{A+B,C}, \pi'_{A+B,C}>} (A \times C) + (B \times C)$$

Por demostrar

$\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < [\kappa^*_{A\times C,B\times C}, \kappa'^*_{A\times C,B\times C}]\pi_{A+B,C}, \pi'_{A+B,C} >$
$< [\kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \kappa'_{A,B}\pi_{B,C}], [\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}] >= 1_{(A\times C)+(B\times C)}$

$\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < [\kappa^*_{A\times C,B\times C}, \kappa'^*_{A\times C,B\times C}]\pi_{A+B,C}, \pi'_{A+B,C} >$
$< [\kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \kappa'_{A,B}\pi_{B,C}], [\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}] >=$
$\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < [\kappa^*_{A\times C,B\times C}, \kappa'^*_{A\times C,B\times C}][\kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \kappa'_{A,B}\pi_{B,C}],$
$[\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}] >=$
$\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < [\kappa^*_{A\times C,B\times C}\pi_{A,C}, \kappa'^*_{A\times C,B\times C}\pi_{B,C}],$
$[\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}] >=$

$$(A \times C) + (B \times C) \xrightarrow{[\kappa^*_{A\times C,B\times C}\pi_{A,C}, \kappa'^*_{A\times C,B\times C}\pi_{B,C}]} ((A \times C) + (B \times C))^C$$

pero también lo hace la flecha

$$\begin{tikzcd}
(A\times C)+(B\times C) & ((A\times C)+(B\times C))\times C \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "\pi_{(A\times C)+(B\times C),C}"] & \\
 & (A\times C)+(B\times C) & ((A\times C)+(B\times C))^{C}
\arrow[from=1-1, to=2-3, "\pi^{*}_{(A\times C)+(B\times C),C}"']
\end{tikzcd}$$

$$\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < \pi^{*}_{(A\times C)+(B\times C),C}, [\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}] >=$$
$$\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < \pi^{*}_{(A\times C)+(B\times C),C}\pi_{((A\times C)+(B\times C))\times C,A+B} < 1_{((A\times C)+(B\times C))}, [\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}] >$$
$$,$$
$$\pi'_{((A\times C)+(B\times C))\times C,A+B} < 1_{((A\times C)+(B\times C))}, [\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}] >>=$$
$$\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < \pi^{*}_{(A\times C)+(B\times C),C}\pi_{((A\times C)+(B\times C))\times C,A+B},$$
$$\pi'_{((A\times C)+(B\times C))\times C,A+B} >< 1_{((A\times C)+(B\times C))}, [\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}] >=$$
$$\pi_{(A\times C)+(B\times C),C} < 1_{((A\times C)+(B\times C))}, [\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}] >=$$
$$1_{((A\times C)+(B\times C))}$$

Demostremos a continuación

$$< [\kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \kappa'_{A,B}\pi_{B,C}], [\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}] >$$
$$\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < [\kappa^{*}_{A\times C,B\times C}, \kappa'^{*}_{A\times C,B\times C}]\pi_{A+B,C}, \pi'_{A+B,C} >= 1_{(A+B)\times C}$$

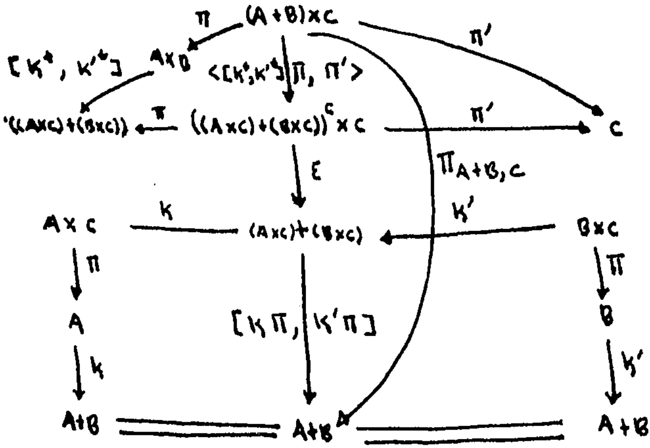
Basta demostrar que

(1)
$$[\kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \kappa'_{A,B}\pi_{B,C}]\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < [\kappa^{*}_{A\times C,B\times C}, \kappa'^{*}_{A\times C,B\times C}]\pi_{A+B,C},$$
$$\pi'_{A+B,C} >= \pi_{A+B,C}$$

y

(2)
$$[\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}]\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < [\kappa^{*}_{A\times C,B\times C}, \kappa'^{*}_{A\times C,B\times C}]\pi_{A+B,C}, \pi'_{A+B,C} >$$
$$= \pi'_{A+B,C}$$

Demostremos la ecuación (1)



Como $[\kappa\pi, \kappa'\pi]\varepsilon < [\kappa^*, \kappa'^*]\pi, \pi' >: (A+B)xC \to A+B$

por E4a

$[\kappa\pi, \kappa'\pi]\varepsilon < [\kappa^*, \kappa'^*]\pi, \pi' >=$
$\varepsilon < ([\kappa\pi, \kappa'\pi]\varepsilon < [\kappa^*, \kappa'^*]\pi, \pi' >)^*\pi, \pi' >$

siendo $*$ único se tiene

$[\kappa\pi, \kappa'\pi]\varepsilon < [\kappa^*, \kappa'^*]\pi, \pi' >= \pi_{A+B,C}$

El mismo argumento se utiliza para demostrar
$[\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}]\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < [\kappa^*_{A\times C,B\times C}\kappa'^*_{A\times C,B\times C}]\pi_{A+B,C}, \pi'_{A+B,C} >=$
$\pi'_{A+B,C}$

Por lo tanto

$\varepsilon_{(A\times C)+(B\times C),C} < [\kappa^*_{A\times C,B\times C}, \kappa'^*_{A\times C,B\times C}]\pi_{A+B,C}, \pi'_{A+B,C} >$
$< [\kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \kappa'_{A,B}\pi_{B,C}], [\pi'_{A,C}, \pi'_{B,C}] >= 1_{(A\times C)+(B\times C)}$

■

(f) $A^{B+C} \cong A^B \times A^C$

Demostración

Construyamos la flecha de A^{B+C} a $A^B \times A^C$

$$
\begin{tikzcd}
A^{B+C} & A^{B+C} \times B \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'_{A^{B+C},B}"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "<\pi,\kappa\pi'>"] & B \arrow[d, "\kappa_{B,C}"] \\
A^{B+C} & A^{B+C} \times (B+C) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\varepsilon"] & B+C \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto

$A^{B+C} \xrightarrow{(\varepsilon_{A,B+C}<\pi_{A^{B+C},B},\kappa_{B,C}\pi'_{A^{B+C},B}>)^*} A^B$ ...(1)

$$
\begin{tikzcd}
A^{B+C} \arrow[drrr, "(\varepsilon<\pi,\kappa'\pi'>)^*"] & A^{B+C} \times C \arrow[l] \arrow[r, "\pi'"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "<\pi,\kappa'\pi'>"] & C \arrow[dd, "\kappa'"] & \\
& & & A^C \\
A^{B+C} & A^{B+C} \times (B+C) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\varepsilon"] & B+C & \\
& A & &
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto

$A^{B+C} \xrightarrow{(\varepsilon_{A,B+C}<\pi_{A^{B+C},C},\kappa'_{B,C}\pi'_{A^{B+C},C}>)^*} A^C$ ...(2)

Luego la flecha que va de A^{BxC} a $A^B x A^C$ es

$$< (\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},B}, \kappa_{B,C}\pi'_{A^{B+C},B} >)^*, (\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},C}, \kappa'_{B,C}\pi'_{A^{B+C},C})^* >$$

La flecha $A^B \times A^C$ a A^{B+C} esta dada por $\zeta^A{}_{B,C}$

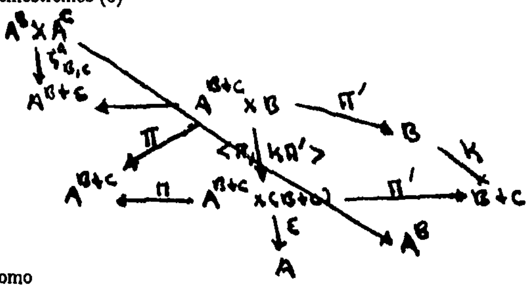
Por demostrar

$< (\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},B}, \kappa_{B,C}\pi'_{A^{B+C},B} >)^*, ((\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},C}, \kappa'_{B,C}\pi'_{A^{B+C},C})^* >$
$\zeta^A{}_{B,C} = 1_{A^B \times A^C}$

Es suficiente demostrar

$(\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},B}, \kappa_{B,C}\pi'_{A^{B+C},B} >)^*\zeta^A{}_{B,C} = \pi_{A^B,A^C}$ ...(3)
$(\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},C}, \kappa'_{B,C}\pi'_{A^{B+C},C} >)^*\zeta^A{}_{B,C} = \pi'_{A^B,A^C}$ ...(4)

Demostremos (3)



Como
$(\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},B}, \kappa_{B,C}\pi'_{A^{B+C},B} >)^*\zeta^A{}_{B,C} : A^B \times A^C \to A^B$

$(\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},B}, \kappa_{B,C}\pi'_{A^{B+C},B} >)^*\zeta^A{}_{B,C} =$
$((\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},B}, \kappa_{B,C}\pi'_{A^{B+C},B} >< \zeta^A{}_{B,C}\pi_{A^B \times A^C,B}, \pi'_{A^B \times A^C,B} >$
$)^* =$

luego $*$ es único y $\pi_{A^B,A^C} : A^B \times A^C \to A^B$

Por lo tanto
$(\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},B}, \kappa_{B,C}\pi'_{A^{B+C},B} >)^*\zeta^A{}_{B,C} = \pi_{A^B,A^C}$

La demostración de (2) es análoga

$< (\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},B}, \kappa_{B,C}\pi'_{A^{B+C},B} >)^*, ((\varepsilon_{A,B+C} < \pi_{A^{B+C},C}, \kappa'_{B,C}\pi'_{A^{B+C},C})^* >$
$\zeta^A{}_{B,C} = 1_{A^B \times A^C}$

■

A continuación daremos una interpretación de completez funcional para categorías bicartesianas cerradas.

Proposición *Si* $\mathbf{A}$ *es una categoría bicartesiana cerrada y* $\mathbf{A}[x]$ *es la categoría cartesiana cerrada de polinomios con la flecha indeterminada* $x : 1 \to A$ *sobre* $\mathbf{A}$ *entonces* $\mathbf{A}[x]$ *es también una categoría bicartesiana cerrada.*

Demostración

Consideremos la correspondencia uno a uno entre flechas $B \times C \to C$ en $\mathbf{A}[x]$ y flechas $A \times B \to C$ en $\mathbf{A}$

Demostremos que 0 es un objeto inicial en $\mathbf{A}[x]$

$Hom(A \times 0, B) \cong Hom(0 \times A, B) \cong Hom(0, B^A)$
el cual tiene un solo elemento, pues 0 es un objeto inicial en $\mathbf{A}$

Demostremos $B + C$ es un coproducto de B y C en $\mathbf{A}[x]$

$Hom(A \times B, D) \times Hom(A \times C, D) \cong Hom((A \times B) + (A \times C), D) \cong$
$Hom(A \times (B + C), D)$

Usamos el hecho de que $(A \times B) + (A \times C)$ es un coproducto en $\mathbf{A}$ y la ley distributiva que demostramos anteriormente.

Una consecuencia interesante de la proposición anterior es que las identidades E5 y E6 pueden ser dadas como ecuaciones entre las constantes, esto es, sin cuantificar sobre flechas f, g, h En E6a y E6b podemos reemplazar f por $(\pi w)^{\int}$ y g por $\pi' w : 1 \to C^A \times C^B$

$$\frac{1 \xrightarrow{w} C^A \times C^B \xrightarrow{\pi_{C^A,C^B}} C^A}{A \xrightarrow{(\pi_{C^A,C^B} w)^{\int}} C}$$

$$\frac{1 \xrightarrow{w} C^A \times C^B \xrightarrow{\pi'_{C^A,C^B}} C^B}{B \xrightarrow{(\pi'_{C^A,C^B} w)^{\int}} C}$$

Ahora considerando w como una flecha indeterminada, tenemos

$$[(\pi w)^{\int}, (\pi' w)^{\int}]\kappa = (\pi w)^{\int}$$
$$[(\pi w)^{\int}, (\pi' w)^{\int}]\kappa' = (\pi' w)^{\int}$$

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r] & A+B \arrow[u, "{[f,g] = [(\pi w)^{\int}, (\pi' w)^{\int}]}"] & B \arrow[l] \arrow[ul, bend right, "g"']
\end{tikzcd}$$

Para E6c $[h\kappa_{A,B}, h\kappa'_{A,B}] = h$ $\qquad h : A + B \to C$

h la podemos reemplazar por $(\zeta^C{}_{A,B} w)^{\int}$ donde

$$\frac{1 \xrightarrow{w} C^A x C^B \xrightarrow{\zeta^C{}_{A,B}} C^{A+B}}{A + B \xrightarrow{(w\zeta^C{}_{A,B})^{\int}} C}$$

y E5 $f = \Diamond_C$ $\qquad$ Para toda $f : 0 \to C$

Considerando $w : 1 \to C^0 x C^B$ con $A = 0$

$$\frac{1 \xrightarrow{w} C^0 x C^B \xrightarrow{\pi_{C^0,C^B}} C^0}{0 \xrightarrow{\pi w^{\int}} C}$$

Por completez funcional, w puede ser eliminada de las ecuaciones

■

Escribiendo $2 = 1 + 1$ podemos pensar en flechas $p : 1 \to 2$ como proposiciones o valores de verdad, en particular, introduciremos

$\kappa_{1,1} \equiv \top \qquad \kappa'_{1,1} \equiv \bot$

También introduciremos los conectivos proposicionales clásicos

$\neg : 2 \to 2 \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \Rightarrow \qquad \Leftrightarrow : 2x2 \to 2$

(Las flechas $\bot$ y $p \wedge q$ no deben ser confundidas con los objetos $\bot$ y $A \wedge B = AxB$) Por ejemplo aprovecharemos el teorema de completez funcional Para obtener la definición de $p \wedge q$

necesitamos que $p \wedge \top = p \qquad p \wedge \bot = \bot$

Por completez funcional tenemos

$p \wedge x = fx$

para una cierta flecha $f : 2 \to 2$ donde $x : 1 \to 2$ es una proposición indeterminada, entonces

Definamos $\neg : 2 \to 2$

necesitamos que $\neg\top = \bot \qquad \neg\bot = \top$

por completez funcional $\neg x = fx$ para alguna $f : 2 \to 2$

$f = [f\kappa, f\kappa'] = [\neg\kappa, \neg\kappa'] = [\neg\top, \neg\bot] = m\bot.\top]$

Por lo tanto $\neg p = fp = [\bot, \top]p$

por lo tanto $\neg = [\bot, \top]$

Definamos $p \vee q$

necesitamos que $p \wedge \bot = p \qquad p \vee \top = top$

por completez funcional $p \vee x = fx$

$f = [f\kappa, f\kappa'] = [p \vee \top, p \vee \bot] = [\top, p]$

De la misma forma podemos definir $p \Rightarrow q = [\top, \neg p]$
$p \Leftrightarrow q = [p, \neg p]q$

Esto nos conduce a la siguiente definición

Definición. Si p y q son flechas $1 \to 2$ en una categoría bicartesiana cerrada y $\top = \kappa_{1,1}$, $\quad \perp = \kappa'_{1,1}$,

$\neg = [\perp, \top]$
$p \wedge q = [p, \perp]q$
$p \Rightarrow q = [\top, \neg p]q$
$p \Leftrightarrow q = [p, \neg p]q$

noindent Algo que es sorprendente a primera vista es la siguiente obser-
vacón
acerca de categorías bicartesianas cerradas.

Proposición *En una categoría bicartesiana cerrada hay a lo mas una flecha $A \to 0$, esto es, en un cálculo proposicional intuicionista hay a lo más una prueba $A \to \top$ salvo equivalencia de pruebas.*

Demostración

En una categoría bicartesiana cerrada $Hom(A\times 0, C) \cong Hom(0\times A, C) \cong Hom(0, C^A)$ esto es, un conjunto con un elemento , en particular, la flecha composición

$$A\times 0 \xrightarrow{\pi'_{A,0}} 0 \xrightarrow{\Diamond_{A\times 0}} A\ 0$$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "\Diamond_A"'] \arrow[d, "<\Diamond_A, 1_0>"] \arrow[dr, "1_0"] & \\ A & A\times 0 \arrow[l] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Demostremos $\Diamond_{A\times 0}\pi'_{A,0} = 1_{A\times 0}$

$\Diamond_{A\times 0}\pi'_{A,0} =< \Diamond_A, 1_0 > \pi'_{A,0} = < \Diamond_A\pi'_{A,0}, \pi'_{A,0} >=< \pi_{A,0}, \pi'_{A,0} >= 1_{A\times 0}$

Ahora supongase que hay una flecha $f : A \to 0$ entonces la flecha superior de

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\langle 1_A, f\rangle"'] & 0 \arrow[r, "\Diamond_A"] \arrow[d, equal] & A \\
A \times 0 \arrow[r, "\pi'_{A,0}"'] & 0 \arrow[r, "\Diamond_{A\times 0}"'] & A \times 0 \arrow[u, "\pi_{A,0}"']
\end{tikzcd}$$

es la misma

$$A \xrightarrow{\langle 1_A, f\rangle} A \times 0 \xrightarrow{\pi_{A,0}} A$$

tenemos $0 \xrightarrow{\Diamond_A} A \xrightarrow{f} 0$
es 1_0 se sigue $A \cong 0$

Hemos mostrado que $Hom(A,0) = \emptyset$ o en caso contrario $A \cong 0$, en tal caso $Hom(A,0) \cong Hom(0,0)$ consiste de un solo elemento.

La proposición anterior nos dice, en particular que es inutil tratar de definir categorías 'booleanas', esto es, categorías cerradas bicartesianas en las cuales la flecha obvia $A \to (\perp \Leftarrow (\perp \Leftarrow A))$ es un isomorfismo. Salvo equivalencia de categorías, no existen otras categorías cartesianas mas que las álgebras booleanas.

■

9. OBJETOS DE NUMEROS NATURALES EN C^3

Un objeto de números naturales en una categoría cartesiana cerrada **A**, según la definición de Lawvere, consiste de un objeto inicial

$$1 \xrightarrow{\;0\;} N \xrightarrow{\;S\;} N$$

en la categoría de todos los diagramas $1 \xrightarrow{\;a\;} A \xrightarrow{\;f\;} A$ en **A**. Esto significa que para todo diagrama hay una única flecha $h : N \to A$ tal que

$h0 = a$ y $hS = fh$

Esto es ilustrado por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "="] & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, phantom, "="] & N \arrow[d, dashed, "h"] \\
1 \arrow[r, "a"'] & A \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

Algunas veces hablamos de la existencia de h, pero sin que sea única, en este caso hablamos de *objeto de números naturales débil*. Las categorías cartesianas cerradas con un objeto de números naturales débil han sido llamadas 'categorías precursivas' por Marie-France Thibault.

Un ejemplo de objeto de números naturales es en la categoría **Sets**, el conjunto $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$ de números naturales junto con la función sucesor $S(n) = n + 1$ forman un objeto de números naturales.

Demostracion

Sea $1 \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} A$

Dado las funciones x y f podemos usar f y el elemento $x(0)$ de A para generar una sucesión

$x(0), f(x(0)), f(f(x(0))), f(f(f(x(0)))), \ldots$
aplicando repetidamente f. Esta sucesión puede asi misma ser descrita como una función $h : N \to A$, mostrada como

$h(0), h(1), h(2), \ldots$
h esta definida inductivamente o recursivamente en dos partes:

1) definimos $h(0) = x(0)$

2) teniendo definido el n-término $h(n)$, aplicando f a este obtenemos el término $h(n+1)$ es decir

$h(n+1) = f(h(n))$ donde $n + 1 = S(n+1)$
1) y 2) significan que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & N \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "x"'] \arrow[r, phantom, "="] & {} & \\
 & A \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Si $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{S} N$ es un objeto de números naturales débil, escribiremos $h \equiv J_A(a, f)$ asi

$$J_A : Hom(1, A) \times Hom(A, A) \longrightarrow Hom(N, A)$$

satisface las ecuaciones

$$J_A(a, f)0 = a \text{ y } J_A(a, f)S = fJ_A(a, f)$$

Proposición *Si la categoría cartesiana cerrada* $\mathbf{A}$ *tiene un objeto de números naturales (objeto de números naturales débil) y si* $x : 1 \to A$ *es un flecha indeterminada sobre* $\mathbf{A}$*, entonces la categoría cartesiana cerrada* $\mathbf{A}[x]$ *tiene el mismos objeto de números naturales (objeto de números naturales débil).*

Demostración

Primero supongamos la existencia de un objeto de números naturales débil en $\mathbf{A}$, Dado $\beta(x) : 1 \to B$ y $\phi(x) : B \to B$ polinomios en $\mathbf{A}[x]$. Buscaremos un polinomio $\chi(x) : N \to B$ tal que

$$\chi(x)0 = \beta(x), \qquad \chi(x)S = \phi(x)\chi(x)$$

En vista de la completez funcional, estas ecuaciones que involucran a x son equivalentes a las siguientes ecuaciones que no involucran a x:

$$\kappa_{x\in A}(\chi(x)0) = \kappa_{x\in A}\beta(x), \ \kappa_{x\in A}(\chi(x)S) = \kappa_{x\in A}(\phi(x)\chi(x))$$

Escribiendo

$$\kappa_{x\in A}\beta(x) = b : Ax1 \to B, \qquad \kappa_{x\in A}\phi(x) = f : AxB \to B$$

nosotros buscamos

$$\kappa_{x\in A}\chi(x) = h : A \times N \to B$$

tal que

$$h < \pi, 0\pi' >= b, \qquad h < \pi, S\pi' >= f < \pi, h >$$

Con b y f podemos asociar $b' : 1 \to B^A$ y $f' : B^A \to B^A$ dado por $b' = (b < \pi', \pi >)^*, \qquad f' = (f < \pi', \pi >)^*$

Entonces nosotros podemos encontrar $h' : N \to B$ tal que

$$h'0 = b', \qquad h'S = f'h'$$

Como es ilustrado en el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, "h'"] & N \arrow[d, "h'"] \\
1 \arrow[r, "b'"'] & B^A \arrow[r, "f'"'] & B^A
\end{tikzcd}$$

Escribiendo $h = \varepsilon_{B,A} < h'\pi'_{A,N}, \pi_{A,N} >$ mostremos que

$$h < \pi_{A,1}, \bigcirc_{A\times 1} >= b, \qquad h < \pi_{A,N}, S\pi'_{A,N} >= f < \pi_{A,N}, h >$$

Antes de demostrarlo, calculemos h' en términos de h :

$$(h < \pi'_{N,A}, \pi_{N,A} >)^* = (\varepsilon_{B,A} < h'\pi'_{A,N}, \pi_{A,N} >< \pi'_{N,A}, \pi_{N,A} >)^* =$$
$$(\varepsilon_{B,A} < h'\pi_{N,A}, \pi_{A,N} >)^* = h'$$

Demostremos las ecuaciones anteriores

$$h < \pi_{A,1}, 0\pi'_{A,1} >= \varepsilon_{B,A} < h'\pi'_{A,N}, \pi_{A,N} >< \pi_{A,1}, 0\pi'_{A,1} >=$$

$$\varepsilon_{B,A} < h'0\pi'_{A,1}, \pi_{A,1} >=$$
$$\varepsilon_{B,A} < b'\pi'_{A,1}, \pi_{A,1} >=$$
$$\varepsilon_{B,A} < (b < \pi'_{1,A}, \pi_{1,A} >)^*\pi'_{A,1}, \pi_{A,1} >=$$
$$\varepsilon_{B,A} < (b < \pi'_{1,A}, \pi_{1,A} >)^*\pi_{1,A}, \pi'_{1,A} >< \pi'_{A,1}, \pi_{A,1} >=$$
$$b < \pi'_{1,A}, \pi_{1,A} >)\pi_{1,A}, \pi'_{1,A} >< \pi'_{A,1}, \pi_{A,1} >=$$
$$b < \pi_{A,1}, \pi'_{A,1} >= b$$

$$h < \pi_{A,N}, S\pi'_{A,N} >= \varepsilon_{B,A} < h'\pi'_{A,N}, \pi_{A,N} >< \pi_{A,N}, S\pi'_{A,N} >=$$

$$\varepsilon_{B,A} < h'S\pi'_{A,N}, \pi_{A,N} >=$$
$$\varepsilon_{B,A} < f'h'\pi'_{A,N}, \pi_{A,N} >=$$

$$\varepsilon_{B,A} < (f < \pi'_{B^A,A}, \varepsilon_{B,A} >)^* h'\pi'_{A,N}, \pi_{A,N} >=$$

$$\varepsilon_{B,A} < (f < \pi'_{B^A,A}, \varepsilon_{B,A} >)^* \pi_{B^A,A}, \pi'_{B^A,A} >< h'\pi'_{A,N}, \pi_{A,N} >=$$

FALTA PAGINA

No. 99

Demostracón

Usando la proposición anterior con $A = B \times B^B$ adjuntandole una simple indeterminada $x : 1 \to A$ que es equivalente a adjuntar dos indeterminadas $y : 1 \to B$ y $v : 1 \to B^B$

■

El corolario anterior puede también ser establecido en términos de un flecha

$N \longrightarrow (B^{B^{(B^B)}})$ en lugar de I_B

Proposición *Si una categoría cartesiana cerrada tiene objeto de números naturales este es único, salvo isomorfismo.*

Demostración

Sean N con $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{S} N$ y N' con $1 \xrightarrow{0'} N' \xrightarrow{S'} N'$ objetos de números naturales. Como N con $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{S} N$ es un objeto de números naturales entonces existe $h : N \to N'$ tal que hace que conmute el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[r, "0'"] & N' \arrow[r, "S'"] & N
\end{tikzcd}$$

Como también N' con $1 \xrightarrow{0'} N' \xrightarrow{S'} N'$ es un objeto de números naturales, por lo tanto exista $h' : N' \to N$, tal que

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0'"] \arrow[d, equal] & N' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & N' \arrow[d, "h'"] \\
1 \arrow[r, "0"] & N' \arrow[r, "S"] & N'
\end{tikzcd}$$

pero la $1_N : N \to N$ es la única flecha que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "1_N"'] & N \arrow[d, "1_N"] \\ 1 \arrow[r, "0"] & N \arrow[r, "s"] & N \end{tikzcd}$$

análogamente $1_{N'} : N' \to N'$ es la única flecha que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0'"] \arrow[d, equal] & N' \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "1_{N'}"'] & N' \arrow[d, "1_{N'}"] \\ 1 \arrow[r, "0'"] & N' \arrow[r, "s'"] & N' \end{tikzcd}$$

de lo anterior se deduce N con $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$ y N' con $1 \xrightarrow{0} N' \xrightarrow{s} N'$ son isomorfos ■

Proposición *Un objeto de números naturales en una categoría cartesiana cerrada es equivalente a la siguiente condición: para cada $g : A \to B$ y $f : B \to B$ existe un única $k : N \times A \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle 0 0_A, 1_A \rangle"] \arrow[d, equal] & N \times A \arrow[r, "s \times 1_A"] \arrow[d, dashed] & N \times A \arrow[d, dashed, "k"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Demostación

$\to$)

$$\frac{A \xrightarrow{g} B}{1 \xrightarrow{\ulcorner g \urcorner} B^A}$$ donde $\ulcorner g \urcorner = (g\pi'_{1,A})^*$

$$\frac{B^A \times A \xrightarrow{\epsilon_{B,A}} B \xrightarrow{f} B}{B^A \xrightarrow{(f\epsilon_{B,A})^*} B^A}$$

Por hipótesis N con $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{S} N$ es un objeto de números naturales, por lo tanto existe h tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "S"] \arrow[d] & B^A \arrow[d] \\
1 \arrow[r, "(g\pi')^*"'] & B^A \arrow[r, "(f\varepsilon)^*"'] & B^A
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir $h0 = (g\pi'_{1,A})^*$ y $(hS = (f\varepsilon_{B,A})^* h$

luego, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1\times A \arrow[r, "<0\pi, \pi'>"] \arrow[d, equal] & N\times A \arrow[r, "<S\pi, \pi'>"] \arrow[d, "<h\pi, \pi'>"'] & N\times A \arrow[d, "<h\pi, \pi'>"'] \\
1\times A \arrow[r, "<(g\pi')^*\pi, \pi'>"'] & B^A\times A \arrow[r, "<(f\varepsilon)^*\pi, \pi'>"'] & B^A\times A
\end{tikzcd}$$

también conmuta pues

$< h\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >< 0\pi_{1,A}, \pi'_{1,A} >=< h0\pi_{1,A}, \pi'_{1,A} >=$
$< (g\pi'_{1,A})^*\pi_{1,A}, \pi'_{1,A} >$

$< h\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >< S\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >=< hS\pi_{N.A}, \pi'_{N,A} >=$
$< (f\varepsilon_{B,A})^*\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "<0_A, 1_A>"] \arrow[d, equal] & 1\times A \arrow[r, "<0\pi, \pi'>"] \arrow[d, equal] & N\times A \arrow[r, "<S\pi, \pi'>"] \arrow[d, "<h\pi, \pi'>"'] & N\times A \arrow[d, "<h\pi, \pi'>"'] \\
A \arrow[r, "<0_A, 1_A>"'] \arrow[d, equal] & 1\times A \arrow[r, "<(g\pi')^*\pi, \pi'>"'] & B^A\times A \arrow[r, "<(f\varepsilon)^*\pi, \pi'>"'] \arrow[d] & B^A\times A \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A \arrow[rr, "g"'] & & B \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

a k lo definimos como $k = \varepsilon_{B,A} < h\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >$ lo cual hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "<0\bigcirc_A,1_A>"] \arrow[d, equal] & N\times A \arrow[r, "<S\pi,\pi'>"] \arrow[d, "\varepsilon<h\pi,\pi'>"'] & N\times A \arrow[d, "\varepsilon<h\pi,\pi'>"'] \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

pues

$\varepsilon_{B,A} < h\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >< 0\bigcirc_A, 1_A >= \varepsilon_{B,A} < h0\bigcirc_A, 1_A >=$
$\varepsilon_{B,A} < (g\pi'_{1,A})^*\bigcirc_A, 1_A >= \varepsilon_{B,A} < (g\pi'_{1,A})^*\pi_{1,A}, \pi'_{1,A} >< \bigcirc_A, 1_A >=$
$g\pi'_{1,A} < \bigcirc_A, 1_A >= g$

$\varepsilon_{B,A} < h\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >< S\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >= \varepsilon_{B,A} < hS\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >=$
$\varepsilon_{B,A} < (f\varepsilon_{B,A})^* h\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >= \varepsilon_{B,A} < (f\varepsilon_{B,A})^*\pi_{B^A,A}, \pi'_{B^A,A} >< h\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >=$
$f\varepsilon_{B,A} < h\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >$

$\leftarrow$) Por hipótesis el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "<0\bigcirc_A,1_A>"] \arrow[d, equal] & N\times A \arrow[r, "<S\pi,\pi'>"] \arrow[d, "k"] & N\times A \arrow[d, "k"] \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

definiendo h como $h = k^*$ obtenemos que el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "<0\bigcirc_A, 1_A>"] \arrow[d, equal] & N \times A \arrow[r, "<S\pi, \pi'>"] \arrow[d] & N \times A \arrow[d, "k"] \\
A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

conmuta, pues

$k^*0 = (k < 0\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >)^* = (k < 0 \bigcirc_A \pi'_{1,A}, \pi'_{1,A} >)^* =$
$(k < 0\bigcirc_A, 1_A > \pi'_{1,A})^* = (g\pi'_{1,A})^*$

$k^*S = (k < S\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >)^* = (fk)^*$
por otra parte
$(f\varepsilon_{B,A})^* k^* = (\varepsilon_{B,A} < k^*\pi_{N,A}, \pi'_{N,A} >)^* = (fk)^*$

h es única debido a que k es única y al aplicarle $*$ también es única. ∎

Proposición *Si una categoría cartesiana cerrada tiene objetos de números naturales (débil) entonces también lo tiene* $\mathbf{A}/A$ *para cada objeto* A *de* $\mathbf{A}$.

Demostración

Considerese el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "a"'] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[dl, "a'"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

en la categoría $\mathbf{A}/A$

Por hipótesis N y $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{S} N$ es un objeto de números naturales en $\mathbf{A}$ entonces existe h tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[r, "b"] & B \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

pero también el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d] \\
1 \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[dl, bend left, "a'"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\mathbf{A}/A$ tiene objeto de números naturales ■

ERROR DE No. ____ DE PAGINA

10. λ-CALCULOS TIPIFICADOS

El propósito de este seccón es asociar un lenguaje con una categoría cartesiana cerrada con objeto de números naturales débil, lo cual debe ser llamado "lenguaje interno". La clase de lenguaje que hemos pensado será llamado "λ-cálculo tipificado, por corto, si bien en la literatura se conozca como "$\lambda\eta$-cálculo tipificado con tipos de productos e iteradores". Esta asociación la turnaremos a una equivalencia entre categorías apropiadas.

Un *λ-cálculo tipificado* es una teoría formal definida como sigue: consiste de clases de "tipos" , "términos" de cada tipo, y "ecuaciones" entre los términos, todos sujetos a ciertas condiciones de cerradura. Escribiremos $a \in A$ para decir que a es un término y es de tipo A, el simbolo $\in$ pertenece al metalenguaje.

(a) *Tipos.* La clase de tipos contiene dos tipos básicos y es cerrado bajo dos operaciones como sigue:

(a1) 1 y N son tipos (Estos son los tipos "básicos")

(a2) Si A y B son tipos, también lo son $A \times B$ y B^A.
Puede haber otros tipos no indicados por (a1) y (a2) e otro tipo de identificaciones inesperadas entre los tipos. .

(b) *Términos.* La clase de términos es generada libremente de variables y ciertas constantes básicas para ciertos términos formando operaciones como sigue (pueden haber otras constantes y términos formando mas operaciones que las especificadas:

(b1) Para cada tipo A hay un número de variables numerables de tipo A $x_i{}^A \in A$ $(i = 0, 1, 2, ...)$. Dificilmente tendremos ocasión de referirnos a la variable específica, en lugar de eso, usaremos la frase "dado x una variable de tipo A", abreviado como "$x \in A$"

(b2) $* \in 1$

(b3) Si $a \in A$, $b \in B$ y $c \in A \times B$, entonces $< a, b > \in A \times B$, $\pi_{A,B}(c) \in A$ y $\pi'_{A,B}(C) \in B$

(b5) Si $f \in B^A$ y $a \in A$ entonces $\varepsilon_{B,A}(f, a) \in B$

(b6) Si $x \in A$ y $\phi(x) \in B$ entonces $\lambda_{x \in A}\phi(x) \in B^A$.

(b6) $0 \in A$; si $n \in N$, entonces $S(n) \in N$

(b7) Si $a \in A$, $h \in A^A$ y $n \in N$, entonces $I_A(a, h, n) \in A$

Abreviaremos $\varepsilon_{(f,a)}$ como $f^{\int}$ (leído como "f de a") cuando el tipo subscrito sea claro en el contexto. Puede haber otros términos no indicados por (b7) a (b7). Intuitivamente, $\varepsilon_{B,A}$ significa evaluación, $< -, - >$ significa pareado y $\lambda_{x \in A}\phi(x)$ denota la función $x \to \phi(x)$, $\lambda_{x \in A}$ actua como un cuantificador, asi la variable x en $\lambda_{x \in A}\phi(x)$ es acotada como en $\forall_{x \in A}\phi(x)$ o $\int_b^a f(x)dx$. Haremos la convención para variables libres y acotadas y cuando es permitido sustituir un término por una va-
riable. El término a es sustituible por x en $\phi(x)$ si no hay ocurrencias libres de una variable en a transformada en acotada a. Un término es "cerrado" si no contiene variables libres.
Usualmente omitiremos la subscripción en $\pi_{A,B}(-), I_A(-, -, -)$ etc.

(c) Ecuaciones

(c1) Las ecuaciones tienen la forma $a = a'$, donde X es un conjunto finito de variables, a y a' tienen el mismo tipo A , y todas las variables que ocurren libremente en a o a' son elementos de X

(c2) La relación binaria entre términos a, a', la cual decimos que $a = a'$ es reflexiva, simétrica y transitiva; esta satisface la regla: cuando $X \subseteq Y$ entonces si $a = b$ es dada uno puede inferir que $a = b$ el cual será abreviado

$$\frac{a \underset{\mathbf{X}}{=} b}{a \underset{\mathbf{X}}{=} b}$$

Esto satisface también la regla de sustitución usual para todos los términos formando operaciones, en particular las siguientes

$$\frac{a \underset{\mathbf{X}}{=} b}{f\int a \underset{\mathbf{X}}{=} f\int b}$$

$$\frac{\phi(x) \underset{\mathbf{X}\cup\{x\}}{=} \phi'(x)}{\lambda_{x\in A}\phi(x) \underset{\mathbf{X}}{=} \lambda_{x\in A}\phi'(x)}$$

$$\frac{n \underset{\mathbf{X}}{=} n'}{S(n) \underset{\mathbf{X}}{=} S(n')}$$

Todas estas son sustituciones obvias excepto por el hecho de la regla que involucra λ, la cual decrece el número de variables libres.

(c3) Lo siguiente especifica las ecuaciones.

$a \underset{\mathbf{X}}{=} *$ para toda $a \in 1$

$\pi(< a, b >) \underset{\mathbf{X}}{=} a$ para toda $a \in A, b \in B$

$\pi'(< a, b >) \underset{\mathbf{X}}{=} b$ para toda $a \in A, b \in B$

$< \pi(c), \pi' > \underset{\mathbf{X}}{=} c$ para toda $c \in A \times B$

$\lambda_{x\in A}\phi(x)\int a \underset{\mathbf{X}}{=} \phi(a)$
para toda a, la cual es sustituible por x

$\lambda_{x\in A}(f\int)x \underset{\mathbf{X}}{=} f$ para toda $f \in B^A$
(por lo tanto x no ocurre libremente en f)

$I(a, h, 0) \underset{\mathbf{X}}{=} a$ para toda $a \in A, h \in A^A$

$I(a,h,S(x)) \underset{X\cup\{x\}}{=} h \int I(a,h,x)$ dado que x no esta en X (no ocurre libremente en a o h)

$\lambda_{x\in A}\phi(x) \underset{X}{=} \lambda_{x'\in A}\phi(x')$, si x' es sustituible por x en $\phi(x)$ y x' no es libre en $\phi(x)$.

Puede haber otras ecuaciones no indicadas por (c1) a (c)

La última ecuación listada en (c3) puede ser omitida si identificamos los términos en los cuales solo difieren en la elección de variables acotadas

Con las ecuaciones de (c3) podemos inferir de $a \underset{X}{=} b$ a $a \underset{X\cup\{x\}}{=} b$ si $x \notin X$. Bajo ciertas condiciones podemos ir en la dirección opuesta, es decir si $a \underset{X}{=} b$ entonces $a \underset{X\cup\{x\}}{=} b$, como veremos.

Proposición 1.0.1 *En cualquier λ -cálculo tipificado, uno puede inferir de $\phi(x) \underset{X\cup\{x\}}{=} \psi(x)$ que $\phi(a) \underset{X}{=} \psi(a)$ para toda $a \in A$, dado que x no esta en X y todas las variables que ocurren libremente en a son elementos de X*

Demostración

$$\frac{\phi(x) \underset{X\cup\{x\}}{=} \psi(x)}{\lambda_{x\in A}\phi(x) \underset{X}{=} \lambda_{x\in A}\psi(x)} \quad \text{por (c2)}$$

como $a \underset{X}{=} a'$ (por ser $\underset{X}{=}$ una relación de equivalencia) aplicando una de las ecuaciones de (c3) inferimos

$\lambda_{x\in A}\phi(x) \int a \underset{X}{=} \lambda_{x\in a}\psi(x) \int a$

$\phi(a) \underset{X}{=} \psi(a)$ ■

Corolario 1.0.1 *Si f y g no contienen ocurrencias libres de la variable x de tipo A, entonces de $f \underset{X}{=} g$ inferimos $f \underset{X\cup\{x\}}{=} g$, siempre que exista un término a de tipo A tal que todas las variables que ocurran libremente en a son elementos de X*

Demostración

Si x no esta en X, inmediatamente de la proposición anterior se sigue. ■

Puede suceder que A es vacio, esto es, no existan términos cerrados. Para esto veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Supóngase que no hay tipos, términos y ecuaciones mas que las que estan indicadas por las reglas de cerradura (y tambien identificaciones no triviales entre tipos, entonces obtenemos λ-cálculo tipificado puro con objeto de números naturales débil llamado L_0.

Ejemplo 2. Dado una gráfica G, el $\Lambda(G)$ generado por G esta definido como sigue. Sus tipos son generados inductivamente por las operaciones formando $(-)x(-)$ y $(-)^{(-)}$ de los tipos básicos 1 y n y los vértices de G (que ahora cuentan como tipos básicos). Sus términos son generados inductivamente de los términos básicos $x_i^A, 0$ y $*$ por los términos anteriores formando operaciones $< -, - >, \pi(-), \pi'(-), \varepsilon(-,-), \lambda_{x\in A}(-)$, $S(-)$ e $I(-,-,)$ junto con los nuevos términos formando operaciones: si $a \in A$ entonces $f(a) \in B$, para cada flecha $f : A \to B$ en G. Finalmente sus ecuaciones son aquellas las cuales se siguen de $(c1)a(c3)$ y no otras. Notemos que hay suficientes tipos vacíos, por ejemplo, todos los vértices de G. Claramente, este ejemplo incluye al ejemplo 1 si G es la gráfica vacía.

A continuación veremos el ejemplo principal de esta sección

Ejemplo 3 El lenguaje interno $L\mathbf{A}$ de una categoría cartesiana cerrada $\mathbf{A}$ con objeto de números naturales, esta definido como sigue: sus tipos son los objetos de $\mathbf{A}$, con $1, N, A\times B$ y B^A teniendo los obvios significados. Los términos de A son aquellas expresiones polinomiales $\phi(x_1, ..., x_n) : 1 \to A$ en las indeterminadas $x_i : 1 \to A_i$ las cuales son obtenidas de variables, a saber indeterminadas, y constantes básicas, a saber flechas $1 \to A$ en $\mathbf{A}$, para los términos formando operaciones:

$$\frac{a : 1 \to A \qquad b : 1 \to B}{< a, b >: 1 \to A \times B}$$

$$\frac{a : 1 \to A}{f(a) : 1 \to B}$$

donde $f : A \to B$

$$\frac{\phi(x) : 1 \to B}{\lambda_{x\in A}\phi(x) : 1 \to B^A}$$

donde $\lambda_{x\in A}\psi(x) \equiv {}^{\lceil}\kappa_{x\in A}\phi(x) < 1_A, \bigcirc_A >^{\rceil}$
como en la prueba del corolario de completez funcional. Además escribimos

$*$ por $\bigcirc_1, \pi_{A,B}(c)$ por $\pi_{A,B}c, \varepsilon_{B,A}(f,a)$ por $\varepsilon_{B,A} < f,a >$. Si a y b son expresiones polinomiales cuyas variables libres estan en X. $a = b$ en $L\mathbf{A}$ si $a = b$ como polinomios en $\mathbf{A}[X]$,

Proposición *$L\mathbf{A}$ es un λ-cálculo tipificado.*

Demostración

Los tipos básicos de $L\mathbf{A}$ son los objetos de $\mathbf{A}$

(a) $1, N \in Obj(\mathbf{A})$ los pensamos como tipos en $L\mathbf{A}$, lo mismo A, B, AxB, B^A teniendo los significados que tenían en una categoría cartesiana cerrada con objeto de números naturales.

(b) Los términos de tipo A son aquellas expresiones polinomiales $\phi(x_1, ..., x_n) : 1 \to A$ en las indeterminadas $x_i : 1 \to A_i$ las cuales son obtenidas de variables, a saber indeterminadas, y constantes básicas, a saber flechas $1 \to A$ en $\mathbf{A}$, para los términos formando operaciones:

$$\frac{a : 1 \to A \qquad b : 1 \to B}{< a,b >: 1 \to A \times B}$$

$$\frac{a : 1 \to A}{f(a) : 1 \to B}$$

donde $f : A \to B$

$$\frac{\phi(x) : 1 \to B}{\lambda_{x \in A}\phi(x) : 1 \to B^A}$$

donde $\lambda_{x \in A}\psi(x) \equiv {}^{\ulcorner}\kappa_{x \in A}\phi(x) < 1_A, \bigcirc_A >^{\urcorner}$

$*$ lo escribiremos como $\bigcirc_1(\bigcirc_1 : 1 \to 1)$

$\pi_{A,B}(c) \equiv \pi_{A,B}c$

$\varepsilon_{B,A}(f,a) \equiv \varepsilon_{B,A} < f,a >$

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[d, "\langle f, a \rangle"] \arrow[dr, bend left, "a"] & \\
B^A & B^A \times A \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\varepsilon_{B,A}"] & A \\
& B &
\end{tikzcd}$$

$\lambda_{x\in A}\phi(x)\int a \equiv \phi(a)$ para toda $a \in A$ el cual es sustituible por x

$\lambda_{x\in A}\phi(x)\int a$ lo podemos ver como $S_x^a(\phi(x))$ donde
$S_x^a : \mathbf{A}[x] \rightarrow A$ tal y como fue visto en el capítulo de Categorías polinomiales

$\lambda_{x\in A}(f\int x) = f$
Para toda $f \in B^A$, dado que x no esta en X
(Por lo tanto no ocurre libremente en f)

Por el corolario 6.2: Para todo polinomio $\phi(x) : 1 \rightarrow C$ con una indeterminada $x : 1 \rightarrow A$ sobre una categoría cartesiana cerrada $\mathbf{A}$, existe una única flecha $h : 1 \rightarrow C^A$ tal que

$$\varepsilon_{C,A} < h, x >= \phi(x)$$

Escribimo a h por $\lambda_{x\in A}\phi(x)$ tal que

$$h\int x = \varepsilon_{C,A} < h, x >= \phi(x)$$

aplicando $\lambda_{x\in A}$ a esta última ecuación obtenemos

$\lambda_{x\in A}(h\int x) = \lambda_{x\in A}(\varepsilon_{C,A} < h, x >) = \lambda_{x\in A}(\phi(x)) = h$
$I(a, h, 0) = a$ Para toda $a \in A, h \in A^A$

$I(a, h, S(x)) = h\int I(a, h, x)$

Deben ser vistas como las ecuaciones que debe cumplir un objeto de números naturales en una categoría cartesiana cerrada con objeto de números naturales.

Por ende $L\mathbf{A}$ es un λ-cálculo tipificado.

■

Introduciremos ahora morfismos $\Phi : L \to L'$ de λ -cálculo tipificado, a ser llamados traslaciones

(d1) Φ manda tipos de L a tipos de L' y términos de L a términos de L', así, si $a \in A$ entonces $\Phi(a) \in \Phi(A)$, pero también queremos que si a es cerrado, asi lo sea $\Phi(a)$ y que Φ manda la i variable de tipo A a la i variable de tipo $\Phi(A)$

(d2) Φ preserva las operaciones específicas de los tipos. Por ejemplo:
$\Phi(1) = 1, \qquad \Phi(A \times B) = \Phi(A) \times \Phi(B)....;$
y los términos específicos formando operaciones
por ejemplo: las siguientes ecuaciones dada en L':
$\Phi(\pi_{A,B}(c)) = \pi_{\Phi(A),\Phi(B)}(\Phi(c));$
$\Phi(\lambda_{x \in A}\phi(x)) = \lambda_{\Phi(x) \in \Phi(A)}\Phi(\phi(x)).$

(d3) también Φ preserva ecuaciones
si $a =_X b$ en L' entonces $\Phi(a) =_{\Phi(X)} \Phi(b)$ en L'

En vista de (d3),Φ realmente actúa sobre clases de equivalencia de términos (módulo la relación de equivalencia descrita en (c2)). Diremos que dos traslaciones son iguales si ellos tienen el mismo efecto sobre las clases de equivalencia. Asi $\Phi = \Psi$ siempre que $\Phi(a) =_{\Phi(X)} \Psi(a')$ para cualquier $a =_X a'$ dadas.

Así hemos obtenido una categoría $\lambda -$ **Calc** cuyos objetos son λ-cálculos tipificados y cuyas flechas son traslaciones.

Dado $\mathbf{Cart}_N$ la categoría de categorías cartesianas con objeto de números naturales débil y funtores cartesianos cerrados preservando objeto de números naturales débil.

Proposición *Dado $L(\mathbf{A})$ el lenguaje interno de $\mathbf{A}$ y para cualquier morfismo $\mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$, dado $L\mathbf{F}$ definida por $L\mathbf{F}(A) = (\mathbf{F})(A)$*
$L\mathbf{F}(x_i) = x_i'$
$L\mathbf{F}(\phi(x)) = \mathbf{F}_x(\phi(x))$

donde x'_i es la i-esima variable de tipo $\mathbf{F}(A)$ y $\mathbf{F}_x$ es la única flecha en $\mathbf{Cart}_{\mathbf{N}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} A[x] \arrow[r, dashed, "F_x"] & A'[x'] \\ A \arrow[u] \arrow[r, "F"] & A' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

entonces L es un funtor de $\mathbf{Cart_N}$ *a* $\lambda-$**Calc**

Demostración

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "1_A"'] & L(A) \arrow[d, "L(1_A)=1_{L(A)}"] \\ A \arrow[r, mapsto] & L(A) \end{tikzcd}$$

$L1_{\mathbf{A}} = 1_{L(\mathbf{A})}$ por la forma en el cual fue definido un morfismo en $\lambda-$**Calc**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "F"] & L(A) \arrow[d, "L(F)"] \\ A' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "G"] & L(A') \arrow[d, "L(G)"] \\ A'' \arrow[r, mapsto] & L(A'') \end{tikzcd}$$

$L(\mathbf{GF})(\mathbf{A}) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{A})) = L(\mathbf{G})(\mathbf{F}(\mathbf{A})) = L\mathbf{G}L(\mathbf{F})(\mathbf{A})$

$$\begin{tikzcd} A[x] \arrow[r, dashed, "F_x"] & A'[x] \arrow[r, dashed, "F_{x'}"] & A''[x''] \\ A \arrow[u] \arrow[r, "F"] & A' \arrow[u] \arrow[r, "F'"] & A'' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Al componer $\mathbf{F}$ con $\mathbf{F}'$ y aplicarle L' obtenemos

$L(\mathbf{F}'\mathbf{F})_x$ como la flecha que va de

$$\mathbf{A}[x] \rightarrow \mathbf{A}''[x'']$$

es única por lo tanto $(\mathbf{F}'\mathbf{F})_x = \mathbf{F}'_{x'}\mathbf{F}_x$

por lo tánto L es un funtor

■

L_0 es un objeto inicial en $\lambda-$**Calc** esto es, para cualquier λ-cálculo tipificado L existe una única traslación $L_0 \rightarrow L$. En particular, para cualquier $\mathbf{A}$ en $\mathbf{Cart}_N$ hay un único morfismo $L_0 \rightarrow L(\mathbf{A})$. Esto pude ser llamado la interpretación de L_0 en $\mathbf{A}$

Notemos que el lenguaje discutido en esta sección pueden ser clases propias en el sentido de Godel-Bernays, si es necesario, uno puede trabajar en teoría de conjuntos con universos, en el cual las 'clases' son reemplazados por 'conjuntos' en un universo lo suficientemente grande.

11. C^3 GENERADAS POR UN λ-CALCULO TIPIFICADO

En esta sección demostraremos que el funtor **L** de la sección anterior es una equivalencia de categorías, nosotros obtendremos un funtor **C** en la dirección opuesta.

Dado un λ-cálculo tipificado L, construiremos una categoría cartesiana cerrada $\mathbf{C}(L)$ con objeto de números naturales débil como sigue:

Los objetos de $\mathbf{C}(L)$ son los tipos de L
Las flechas $A \to B$ de $\mathbf{C}(L)$ son (clases de equivalencia de) pares $(x \in A, \phi(x))$ con x una variable de tipo A y $\phi(x)$ un término de tipo B que no tiene variables libres más que x (pensando en la función $x \mapsto \phi(x)$).

La igualdad de flechas esta definida por $x \in A, \phi(x)) = x' \in A, \psi(x')$ si y solo si $\phi(x) = \psi(x')$ donde $=$ abrevia $=$.

La flecha identidad $A \to A$ es el par $(x \in A, x)$.

La composición de $(x \in A, \phi(x)) : A \to B$ y $(y \in B, \psi(y) : B \to C)$ esta dado por $(x \in A, \psi(\phi(x))) : A \to C$, $\phi(x)$ ha sido sustituído por y en $\psi(y)$.

La estructura cartesiana cerrada de $\mathbf{C}(L)$ es obtenida como sigue:

$\bigcirc_A \equiv (x \in A, *)$,

$\pi_{A,B} \equiv (z \in A \times B, \pi(z))$,

$\pi'_{A,B} \equiv (z \in A \times B, \pi'(z))$,

$< (z \in C, \phi(z)), (z \in C, \psi(z)) > \equiv (z \in C, < \phi(z), \psi(z) >)$,

$(z \in AxB, \chi(z))^* \equiv (x \in A, \lambda_{y \in B}\chi(< x, y >))$,

$\varepsilon_{C,A} \equiv (y \in C^A x A, \varepsilon_{C,A}(\pi(y), \pi'(y)))$.

C(L) tiene objetos de números naturales.

$0 \equiv (x \in 1, 0)$

$S \equiv (x \in N, S(x))$,

$I_B \equiv (w \in (B \times B^B) \times N, I(\pi(\pi(w)), \pi'(w)))$.

Es fácil hacer **C** un funtor λ – **Calc** $\rightarrow$ **Cart**$_N$. Supongamos que $\Phi : L \rightarrow L'$ es una traslación, definimos $\mathbf{C}(\Phi) : \mathbf{C}(L) \rightarrow \mathbf{C}(L')$ como sigue

Si A es un objeto de $\mathbf{C}(L)$, esto es, un tipo de L , $\mathbf{C}(\Phi)(A) = \Phi(A)$ es el correspondiente tipo de L' , luego un objeto de $\mathbf{C}(L')$.

Si $f = (x \in A, \phi(x))$ es una flecha $A \rightarrow B$ en $\mathbf{C}(L)$, esto es, $\phi(x)$ es un término de tipo B en L, $\mathbf{C}(\Phi)(f) = (\Phi(x) \in \Phi(A), \Phi(\phi(x)))$ es la correspondiente flecha $\Phi(A) \rightarrow \Phi(B)$ en $\mathbf{C}(L')$.
En suma tenemos que

Proposición **C** *es un funtor de* λ – **Calc** *a* **Cart**$_N$

En lugar de adjuntar una flecha indeterminada $x : 1 \rightarrow A$ a la categoría cartesiana cerrada $\mathbf{C}(L)$ uno puede adjuntar un 'parametro' x de tipo A a el lenguaje L. Para precisar, si L es un λ-cálculo tipificado y x es una variable de tipo A, uno puede formar el lenguaje $L(x)$ adjuntando el parametro x como sigue:

$L(x)$ tiene exactamente los mismos tipos como L y además los mismos términos, excepto que x no es mas largo contado como una variable. En otras palabras, los términos cerrados de $L(x)$ y términos $\phi(x)$ en L la cual no contiene mas variables libres que x. Con el mismo espíritu, $=$ en $L(x)$ significa $=$ en L; x no está en X.

Proposición $\quad C(L)[x] \cong C(L(x))$

Demostración

Mostraremos que $\mathbf{C}(L(x))$ tiene la propiedad universal de $\mathbf{C}(L)[x]$

$$\begin{tikzcd}
C(L(x)) \arrow[dr] & & x : 1 \arrow[r] \arrow[d] & A \\
C(L) \arrow[u, "H_x"] \arrow[r] & A & b : 1 \arrow[r] & F(A)
\end{tikzcd}$$

La indeterminada $x : 1 \to A$ esta definida por $(y \in 1, x)$. $\quad \mathbf{H}_x$ es $\mathbf{C}$ de la inclusión de L en $L(x)$, la cual puede necesitar algunas reetiquetaciones de variables. Supongamos que $\mathbf{F} : \mathbf{C}(C) \to \mathbf{A}$ es cualquier funtor cartesiano cerrado preservando objeto de números naturales débil, y dado cualquier flecha $b : 1 \to \mathbf{F}(A)$ en $\mathbf{A}$. Nosotros pretendemos que existe un único funtor $\mathbf{F}' : \mathbf{C}(L(x)) \to \mathbf{A}$ tal que $\mathbf{F}'\mathbf{H}_x = F$ y $\mathbf{F}'(x) = b$

Obviamente, definimos $\mathbf{F}'(B) = \mathbf{F}(B)$ para cada objeto B de $\mathbf{C}(L)$, esto es, un tipo en L. Supongase que $f = (y \in B, \phi(x, y))$ es cualquier flecha $B \to C$ en $\mathbf{C}(L(x))$, esto es, $\phi(x, y)$ es cualquier término de tipo $\mathbf{C}$ en L con variables libres $x \in A$ y $y \in B$. Definimos $\mathbf{F}'(f) : \mathbf{F}(B) \to \mathbf{F}(C)$ en $\mathbf{A}$ como sigue:

Primero notemos que $\phi(x, y) = \psi(y)^{\int} x$, donde $\psi(y)$ es $\lambda_{x \in A}\phi(x, y)$. Así $f = \varepsilon_{C,A} < g, x\bigcirc_B >$, donde $g = (y \in B, \psi(y)) : B \to C^A$ en $\mathbf{C}(L)$. Ahora definimos
$\mathbf{F}'(f) = \varepsilon_{\mathbf{F}(C),\mathbf{F}(A)} < \mathbf{F}(g), b\bigcirc_{\mathbf{F}(B)} >$

Esta definición, claramente tiene la propiedad deseada. También, esto hace que $\mathbf{F}'(g) = \mathbf{F}(g)$ y $\mathbf{F}'(x) = b$

■

A continuación establecemos el principal resultado de esta sección

Teorema *Las categorías* λ − **Calc** *y* $\mathbf{Cart}_N$ *son equivalentes, de hecho* $\mathbf{CL} \cong \mathbf{id}$ $\mathbf{LC} \cong \mathbf{id}$

Demostración

i) Consideremos la transformación natural $\varepsilon : \mathbf{CL} \to id$ definida para cada $\mathbf{A}$ en $\mathbf{Cart}_N$ por $\varepsilon(\mathbf{A}) : \mathbf{CL}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}$ como sigue:

Un objeto de $\mathbf{CL}(\mathbf{A})$ es un tipo de $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, esto es, un objeto $\mathbf{A}$, dado $\varepsilon(\mathbf{A})(A) = A$.
Una flecha $B \to C$ en $\mathbf{CL}(\mathbf{A})$ tiene la forma $f = (y \in B, \phi(y))$, donde $\phi(y) \in \mathrm{C}$ en $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, dado $\varepsilon(\mathbf{A})(f) =$ la única flecha $g : B \to C$ tal que $gx = \phi(y)$ usando completez funcional.
Claramente $\varepsilon(\mathbf{A})$ es una flecha en $\mathbf{Cart}_N$.. También en vista de la completez funcional se establece una correspondencia uno a uno entre $Hom_{\mathbf{CL}(\mathbf{A})}(B,C)$ y $Hom_{\mathbf{A}}(B,C)$, Así $\varepsilon(\mathbf{A})$ es un isomorfismo.

ii) Consideremos la transformación natural η: $id \to \mathbf{LC}$ definida para cada L en λ − **Calc** por $\eta(L) : L \to \mathbf{LC}(L)$ como sigue

$\eta(L)(A) \equiv A$;

$\eta(L)(\phi(x_1, ..., x_n))$ en $\mathrm{C}(L(x_1, ..., x_n))$
observemos que hemos identificado $\mathrm{C}(L)[x_1, ..., x_n]$ con $\mathrm{C}(L(x_1, ..., x_n))$ como fue justificado en la proposición anterior. Para ver que $\eta(L)$ es un isomorfismo, construyamos su inversa, la cual manda $(z \in 1, \phi(z))$ sobre $\phi(*)$

■

Corolario 1.0.1 $\mathrm{C}(L_0)$, *la categoría cartesiana cerrada con objetos de números naturales débil generado por el λ−cálculo tipificado es un objeto inicial en* $\mathbf{Cart}_N$

Finalizaremos éste capítulo con la observación concerniente al problema de como interpretar lenguajes en categorías, en el presente contexto esto es explicado de la siguiente forma: una interpretación de un λ−cálculo tipificado L en una categoría cartesiana cerrada $\mathbf{A}$ con objetos de números naturales débil es justamente una traslación $L \to \mathbf{L}(\mathbf{A})$. Por el teorema anterior, esto es esencialmente lo mismo que un funtor cartesiano cerrado

$\mathbf{C}(L) \to \mathbf{A}$. Como fue observado en éste capítulo. L_0 tiene una única interpretación en cualquier categoría cartesiana cerrada con objetos de números naturales débil.

12. EL PROBLEMA DE DECISION PARA IGUALDAD

Para el objeto inicial $\mathbf{C}(L_0)$ en $\mathbf{Cart}_N$ lo escribiremos C_0. C_0 es de interes para los lógicos , como este da una versión de las funcioales recursivas primitivas de Godel's de tipo finito, y a los categoristas a la solución del 'problema de coherencia' para $\mathbf{Cart}_N$. Este problema pregunta cuando un diagrama en una categoría conmuta, o equivalentemente,cuando dos flechas entre dos objetos. Si uno quisiera calcular el $Hom(A, B)$ en C_0, dos problemas surgen

I) Encontrar un algoritmo para obtener todas las flechas $A \to B$ en C_0 (esto es, todas las pruebas $A \to B$ en el correspondiente sistema deductivo).

II) Encontrar un algoritmo para decidir cuando dos flechas $A \to B$ son la misma.
Enfocaremos nuestra atención al segundo problema, observando la prueba de la ley distributiva

$$< f, g > h =< fh, gh >$$

para una categoría cartesiana cerrada (este demostración fue dada en el capítulo 3, C^3 presentadas ecuacionalmente)

Dos flechas $f, g : A \to B$ en C_0 esta dada por dos términos $\phi(x)$ y $\psi(x)$ de tipo B en L_0 con una variable libre x de tipo A. Queremos decidir cuando $\phi(x) = \psi(x)$ o equivalentemente $\lambda_{x\in A}\phi(x) = \lambda_{x\in A}\psi(x)$ dados en L_0. Llamamos dos términos a y b de L_0 cuyas variables libres estan contenidas en X *convertibles* si la ecuación $a = b$ en L_0. Los términos de L_0 son definidos inductivamente. Asi el problema II se ha reducido a decidir cuando dos términos cerrados de tipo B en $L_0(x)$ o L_0 son convertibles. En vistade que hay términos cerrados de cada tipo en L_0 son convertibles. No necesitamos distinguir entre $=$ y $=$ como fue observado en el capítulo 10, λ-cálculos tipificados.

Resolveremos el problema de decisión por convertibilidad no en L_0 sino en L'_0, el cual es como L_0 pero sin el tipo 1, en otras palabras, L'_0 es una variante del λ-cálculo tipificado puro en el cual el tipo básico único es N. Esto no pierde generalidad por la siguiente razón: Un término cerrado de tipo B en L_0 o $L_0(x)$ corresponde a una flecha $1 \to B$ en C_0 o $C_0[x]$ donde el objeto B es canónicamente isomorfo a 1 (en cuyo caso es poco interesante) o a un objeto cuya construccón inductiva no contiene a 1. Esto es asi en vista de los isomorfismos canónicos $C \times 1 \cong C \cong 1 \times C$, $C^1 \cong C$ y $1^C \cong 1$. El último isomorfismo mencionado presupone que $Hom(1, C)$ no es vacio, que es el caso en C_0, que hay términos cerrados de cada tipo en L_0.

Para resolver el problema de decisión por convertibilidad de términos, reemplazaremos convertibilidad por otra relación, que es el de reducibilidad. Sin embargo, se convierte tedioso el distinguir entre términos, los cuales difieren solo en la elección de variables acotadas. Diremos que dos términos a y a' son congruentes y escribiremos $a \equiv a'$.

Primero definiremos una relación $a > a'$ entre términos de tipo A en L_0 o L'_0 (realmente clases, de congruencia) y decimos " a básicamente se reduce a a'". Hay ocho reducciones básicas; las ecuaciones básicas de un λ-cálculo tipificado básicamente se reducen a:

	ecuaciones basicas		reducciones basicas	
$B1$	a	$>$	$*$	$(a \in 1, a \not\equiv *)$;
	(no utilizado en		L_0)	
$B2$	$\pi(< a.b >)$	$>$	a	$(a \in A, b \in B)$;
$B3$	$\pi'(< a, b >)$	$>$	b	$(a \in A, b \in B)$;
$B4$	$< \pi(c), \pi'(c) >$	$>$	c	$(c \in A \times B)$;
$B5$	$\lambda_{x \in A}\phi(x)\int a$	$>$	$\phi(a)$	$(a \in A)$;
$B6$	$\lambda_{x \in A}(f \int x)$	$>$	f	$(f \in B^A$, x no es libre en f)
$B7$	$I(a, h, 0)$	$>$	a	$(a \in A, h \in A^A)$;
$B8$	$I(a, h, S(n))$	$>$	$h\int I(a, h, n)$	$(a \in A, h \in A^A, n \in N)$

Diremos que b se reduce a b' en un paso y escribimos $b > b'$ dado que b' es obtenido de b reemplazando una ocurrencia simple de un subtérmino a en b por a', donde $a > a'$. Por ejemplo:

$$\lambda_{x \in A} < \pi(< x, y >), y >> \lambda_{x \in A} < x, y >$$

porque $\pi(< x, y >) > x$

Diremos que b se reduce a b' en n pasos y escribimos $b > b'$, dado que

$$b \equiv b_0 >_1 b_1 > b_2 > \ldots > B_n \equiv b'$$

En particular $b > b'$ significa $b \equiv b'$. Diremos que b se reduce a b' y escribiremos $b \geq b'$, dado que hay un número natural n tal que $b >_n b'$

Proposición *(Teorema de Church-Roser)*
En L'_0 Si $b \geq c$ y $b \geq d$ entonces existe un término e tal que $c \geq e$ $\quad d \geq e$

La demostración del teorema de Church Roser lo posponemos para el capítulo siguienten. En este capítulo solo notaremos sus consecuencias.

Definición. Llamamos un término b irreducible, o en forma normal, si no existen términos b' tal que $b \geq_1 b'$, es decir. Si para subtérminos a de b no existe a' con $a > a'$. Otra forma de decir esto es que $b \geq b'$ implica $b \equiv b'$

Definimos en L_0 los términos cerrados irreducibles $K(A)$ de cada tipo A inductivamente como sigue:

$K(1) \equiv *$, $\quad K(N) \equiv 0$, $\quad K(AxB) \equiv < K(A), K(B) >$, $\quad K(B^A) \equiv \lambda_{x \in A} K(B)$

Claramente una condición suficiente para $b = b'$ dada en L_0 o L'_0 en el cual b y b' se reduzcan a términos congruentes irreducibles (o formas normales congruentes).

Definición. b es normalizable si existe un término irreducible b^* tal que $b \geq b^*$

Corolario 1.0.1 ***En L'_0 si b es normalizable, entonces su forma normal es única salvo congruencia. Dos términos normalizables son convertibles si y solo si ellos tienen forma normal congruente.***

Demostración

Uno podría pensar que esta dado un procedimiento de decisión para convertibilidad de términos normalizables: reduciendo cada término a su forma normal y ver si estos términos irreducibles son congruentes. Sin embargo hay un problema de como reducir un término dado a su forma normal. Mientras una secuencia de reducciones puede finalizar con un término irreducible después de un número finito de pasos. Pero puede haber otra secuencia de reducciones que nunca terminara, por lo tanto no podemos intentar por este camino si antes no tenemos un camino seguro.

Para demostrar el corolario definamos lo siguiente:

Definición . Un término es acotado (algunos autores dicen 'fuertemente normalizable' si existe un número n tal que ninguna sucesión de reducciones de un paso tenga mas de n pasos. La acotación de t, escrita por $bd(t)$ es la mas pequena n. Por ejemplo, la acotación de un término irreducible es 0. Claramente, si un término es acotado, toda sucesión de un paso debe terminar después de un número finito de pasos (el recíproco de esta afirmación es también verdadera, en vista del lema de Konig's, pero no necesitamos de éste). En particular, todo término acotado es normalizable. Notemos que si $t >_1 t'$ entonces $bd(t) > bd(t')$.

Así tenemos un algoritmo para decidir convertibilidad de dos términos acotados en L'_0; reducimos ambos al azar hasta términos irreducibles y los comparamos para ver si ellos son congruentes.

Probaremos en el siguiente capítulo el teorema de Church-Rosser dado para términos acotados y depués demostraremos que todos los términos son acotados en L'_0. Asi obtendremos un algoritmo para decidir convertibilidad de términos en L'_0 y por lo tanto decidir igualdad de flechas en $C_0 = C(L_0)$

Por el momento haremos una observación que será de utilidad.

Lema *Supóngase que $\phi(x)$ es un término en L_0 con variables no libres mas que x de tipo A y a es un término cerrado de tipo A tal que $\phi(a)$ es acotado, entonces $\phi(x)$ es acotado.*

Demostración

Si $\phi(x) >_1 \psi(x)$ En virtud de $B2$ a $B8$ entonces tenemos $\phi(a) >_1 \psi(a)$. Sin embargo, cuando la reducción básica $x >_1 *$ es usado entonces $\phi(*) \equiv \psi(*)$ son los mismos términos. Esta desafortunada excepción complica la demostración algo. Aún, si $\phi(x) \geq \psi(x)$ entonces $\phi(a) \geq \psi(a)$.

Sea $\Gamma = \{\psi(x)/\phi(x) \geq \psi(x)\}$

$\Gamma \neq \emptyset$ pues $\phi(x) \geq \phi(x)$ para cualquier $\phi(x)$ en Γ asi se sigue $\phi(a) \geq$ *psi*(a). Como $\phi(a)$ es acotada formemos el siguiente conjunto:

$\Delta = \{b/\phi(a) \geq b \quad es \quad finita\}$

(Recordemos que no distinguimos entre términos congruentes, esto es términos que difieren solo en la elección de la variables acotadas.) Más aún para cada b en Δ, $\Gamma_b = \{\psi(x)/\psi(a)\}$ es finito. De aquí $\Gamma \subseteq \bigcup_{b \in \Delta} \Gamma_b$ es también finito y por lo tanto $\psi(x)$ es acotado.

■

13. EL TEOREMA DE CHURCH-ROSSER PARA TERMINOS ACOTADOS

En este capítulo probaremos el Teorema de Church-Rosser *para el caso especial cuando b es un término acotado de L_0' o, más generalmente de L_0, sin subtérminos de tipo 1 mas que $*$. En la sección siguiente probaremos que todo término es acotado.*

Proposición *Si b es acotado y $b > c$ y $b > d$ entonces hay un término e tal que $c \geq e$ y $d \geq e$.*

Demostración

Realizaremos la demostración por inducción sobre el término acotado b y reducimos el problema al caso $m \leq 1$, $n \leq 1$ El caso $m = 1$, $n = 1$ es resuelto por el lema que se demostrará después.

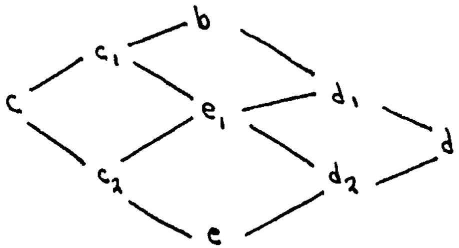
Si $m = 0$ o $n = 0$ no hay nada que probar debido a que

si	$b > c$	entonces	$b \equiv c$			
si	$b > d$	entonces	$b \equiv d$	*y*	b	es acotado.

Supóngase que $m > 1$ *o* $n > 1$ *entonces tenemos*

$$b > c_1 > c \qquad b > d_1 > d$$

donde $m - 1 > 0$ *o* $n - 1 > 0$. *Por el lema que se demostrará después existe* e_1 *tal que* $c_1 \geq e_1$ *y* $d_1 \geq e_1$. *Ahora* c_1 *y* d_1 *tienen un número de reducciones menor que* b, *así por hipótesis de inducción , podemos encontrar* c_2 *y* d_2 *tal que* $c \geq c_2$, $e_1 \geq c_2$, $e_1 \geq d_2$, *otra vez,* e_1 *tiene un menor número de reducciones que* b, *asi podemos encontrar* e *tal que* $c_2 \geq e$ *y* $d_2 \geq e$, *por transitividad,* $c \geq e$ *y* $d \geq e$. *Esta prueba es ilustrada por el siguiente diagrama*



Lo que resta probar es el siguiente lema

Lema *Si* $b > c$ *y* $b > d$ *entonces existe un término* e *tal que* $c \geq e$ *y* $d \geq c$.

Demostración
La reducción de b *a* c *depende sobre la reducción básica de un subtérmino* a *de* b *a* a', *y la reducción de* b *a* d *depende sobre la reducción básica de un subtermino* f *de* b *a* f'. *Si* a *y* f *no cubren parcialmente tenemos*

$b \equiv ...a...f...$

$c \equiv ...a'...f...$

$d \equiv ...a...f'...$

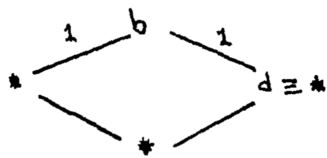
Si tomamos $e \equiv ...a'...f'...$ *entonces claramente obtenemos* $c \geq e$ *y* $d \geq e$

Si los subtérminos a y f de b se cubren, uno de estos debe tener un subtérmino digamos f Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a \equiv b$. Así b se reduce a dos caminos: una reducción 'exterior' sobre el término completo b y una reducción 'interior' sobre el subtérmino f. Asi hemos realizado una reducción de el problema al siguiente caso especial:

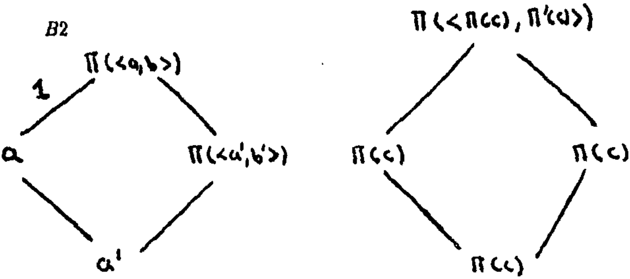
Si $b > c$ (reducción 'exterior') y $b > d$ (reducción 'interior') entonces existe un término e tal que $c \geq e$ y $d \geq e$ (recordemos que $b > c$ significa que hay una reducción básica de b ac).

Hay ahora ocho casos para $b > c$ de acuerdo a las ocho reducciones básicas vistas en la sección anterior. Los siguientes diagramas ilustran que hacemos en estos ocho casos. Escribiremos la reducción exterior a la izquierda y la reducción interior a la derecha.

*B*1

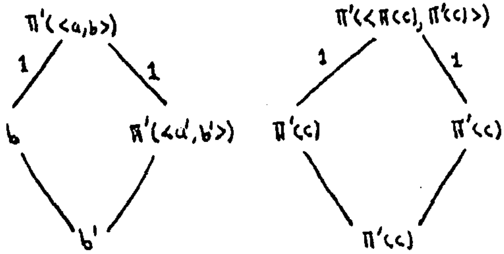


*B*2

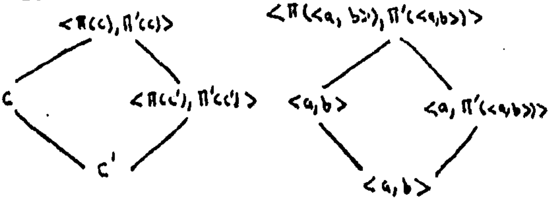


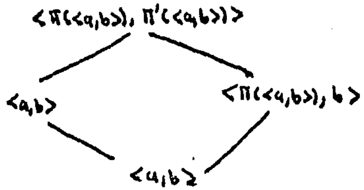
En el primer subcaso de B2, la reducción interior toma a a a' (donde $b \equiv b'$) o b a b' (donde $a \equiv a'$). En el segundo subcaso de B2, la reducción interior toma $< a, b >$ a c, dado que $a \equiv \pi(c)$ y $b \equiv \pi'(c)$.

*B*3

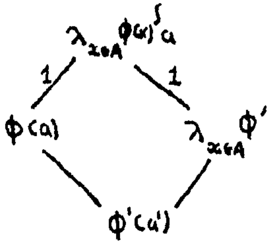


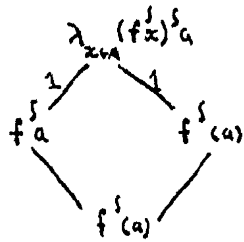
El razonamiento es análogo a B2
B4





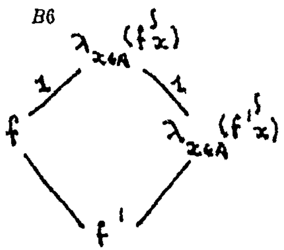
En el primer subcaso de B4, la reducción interior toma c a c'. En el segundo subcaso de B4, la reducción interior toma $\pi'(c)$ a b.
b5

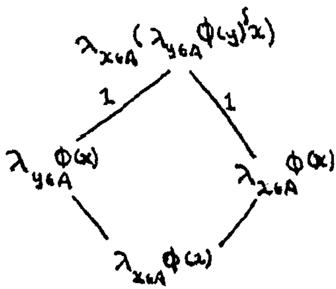




En el primer subcaso de B5, la reducción interior toma $\phi(x)$ a $\phi'(x)$ (de donde $a \equiv a'$) o a a a' (de donde $\phi(x) \equiv \phi'(x)$. Observemos que si $\phi(x) \geq \phi'(x)$ entonces $\phi(a) \geq \phi'(a)$. En el segundo subcaso de B5, la reducción interior $\lambda_{x \in A}\phi(x)$ a f, dado que que $\phi(x) \equiv f^{\int} x$ y x no es libre en f.

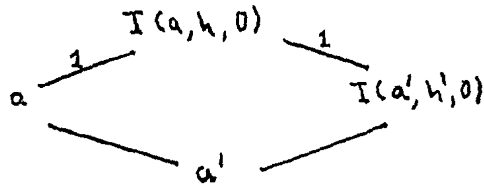
B6





En el primer subcaso de B6, la reducción interior toma f a f'. En el segundo subcaso de B6, la reducción interior toma $f^{\int} x$ a $\phi(x)$ dado que $f \equiv \lambda_{y \in A}\phi(y)$.

B7



Aqui la reducción interior toma a a a' (de donde $h \equiv h$ o h a h' (de donde $a' \equiv a$).

$$\begin{tikzcd}
& I(a,h,S(n)) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
h^S I(a,h,n) \arrow[dr, dash] & & I(a',h',S(n')) \arrow[dl, dash] \\
& h'^S I(a',h',n') &
\end{tikzcd}$$

Aqui la reducción interior toma a a a' (de donde $h \equiv h', S(n) \equiv S(n')$) o h a h' (de donde $a \equiv a', S(n) \equiv S(n')$) o $S(n)$ a $S(n')$ (de donde $a \equiv a'$ y $h' \equiv h$)

Por lo tanto el lema queda demostrado y también la prueba de la proposición de esta sección.

■

Observaciones al lema anterior

En el caso B4, si $\pi(c)$ o $\pi'(c)$ es de tipo 1 entonces el argumento utilizado no funciona,

$$\begin{tikzcd}
& <\pi(c), \pi'(c)> \arrow[dl, dash, "1"'] \arrow[dr, dash, "1"] & \\
c \arrow[dr, dash] & & <\pi(c'), \pi'(c')> \arrow[dl, dash] \\
& c' &
\end{tikzcd}$$

Supongase que $\pi(c)$ es de tipo 1 entonces la reducción básica de $\pi(c)$ es $*$, $\pi(c) > *$ por ende $c \equiv *$, se sigue que $c' \equiv *$ y por lo tanto no existe una reducción básica de $< \pi(c), \pi'(c) >$ a $< \pi(c'), \pi'(c') >$,

El mismo razonamiento se utiliza para $\pi'(c)$ de tipo 1

2) Por la misma razón que en 1, el argumento utilizado en B6 no funciona.

14.TODOS LOS TERMINOS SON ACOTADOS

Nosotros quisieramos probar que todos los términos de L_0 son acotados. Claramente todos los términos irreducibles son acotados, en particular las variables 0 y $*$. Listaremos los siguientes resultados parciales.

Lema *a)* $< a, b >$ *es acotado si* a *y* b *lo son.*
b) $\pi(c)$ *y* $\pi'(c)$ *son acotados si* c *lo es.*
c) $\lambda_{x \in A}\phi(x)$ *es acotado si* $\phi(x)$ *lo es.*
d) $S(n)$ *es acotado si* n *lo es.*

Demostración

Demostraremos a) los otros se siguen de igual manera. Nosotros argumentamos por inducción sobre $bd(a) + bd(b)$. Es suficiente mostrar que c es acotado siempre que $< a, b >>_1 c$. Si $c \equiv < a', b >$ con $a >_1 a'$ o $c \equiv < a, b' >$ con $b >_1 b'$, c es acotado por hipótesis de inducción. El otro caso es si $a \equiv \pi(c), b \equiv \pi'(c)$, pero entonces c es acotado pues es un subtérmino de a.

■

Desafortunadamente esta clase de argumentos no se extiende a términos de la forma $b^{\int}$ y $I(a, h, S(n))$. Notemos que aún las reducciones básicas

$$\lambda_{x\in A}\phi(x)\int a > \phi(a), \qquad I(a,h,S(n)) > h\int I(a,h,n)$$

el lado derecho puede ser mas complicado que el lado izquierdo.

Nosotros quisieremos reemplazar acotabilidad por una noción aparentemente mas fuerte, este es, el de computabilidad, que está definida por inducción sobre tipos. Primero limitaremos nuestra atención a términos cerrados.

Definición *Un término cerrado es computable con tal que se cumpla uno de los siguiente casos.*

(1) $c \in 1$ *o* $c \in A$ *y* c *es acotado.*
(2) $c \in A \times B$ *y* $\pi(c)$ *y* $\pi'(c)$ *son computables;*
(3) $c \in B^A$, *c es acotado y* $c\int a$ *es computable para todos los computables cerrados* $a \in A$

De la definición se desprenden dos consecuencias inmediatas

Lema *Suponga que* c *y* c' *son términos cerrados*
(1) Si c *es computable, entonces* c *es acotado.*
(2) Si c *es computable y* $c \geq c'$, *entonces* c' *es computable.*

Demostración

(1) Nosotros solo necesitamos ver el caso $c \in A \times B$, *donde* c *es computable, así lo es, también* $\pi(c)$, *por definición. Por hipótesis de inducción el resultado se da para* A, *luego* $\pi(c)$ *es acotado, por lo tanto* c, *la existencia de un subtérmino de* $\pi(c)$ *es también acotado.*

■

Lema *(I) Un término cerrado c es computable si uno de los tres casos siguientes se da:*

(1) $c \equiv < a, b >$ *y* a *y* b *son computables.*

(2) $c \equiv \lambda_{x\in a}\phi(x)$ *y* $\phi(a)$ *es computable para todos los computables cerrados* $a \in A$.

(3) c no es ninguno de los anteriores, y para todos los cerrados c', *si* $c >_1 c'$ *entonces* c' *es computable.*

*(**II**) Para todos los tipos C, $K(C)$ es computable.*

Demostración

Para el propósito de esta demostración, haremos dos definiciones.

*Llamamos un término cerrado pre-computable si este satisface (1), (2), (3). Llamamos un tipo C agradable si todos los pre-computables $c \in C$ son computables. Asi, podemos cambiar (**I**) como :*

*(**I'**) Todos los tipos son agradables.*

Ante de demostrar esto, hagamos una observación.

*(**III**) Si C y todos los subtipos de C son agradables entonces $K(C)$ es computable.*

'Siendo un subtipo' es desde luego la relación transitiva generada por : A y B son subtipos de $A \times B$ y B^A.

*Claro , (**III**) es fácilmente mostrado por inducción sobre el tipo C. Por definición , $K(1) \equiv *$ y $K(N) \equiv 0$ son claramente computables, porque ellos son acotados. Mas aún $K(A \times B) \equiv < K(A), K(B) >$ es computable por (1) si $K(A)$ y $K(B)$ lo son , y $K(B^A) = \lambda_{x \in A} K(B)$ es computable por (2) si $K(B)$ lo es, de esta manera se aplica la hipótesis de inducción.*

*De este modo nosotros planeamos demostrar (**I'**), (**II'**) seguido inmediatamente de (**III**). Queda probar (**I**) que haremos por inducción sobre los tipos. Para este propósito nosotros adoptamos la hipótesis siguiente*

*(**A**) Todos los subtipos propios de C son agradables y los términos cerrados $c \in C$ son precomputables*

nosotros estableceremos la siguiente conclusión :
*(**C**) c es computable.*

Veremos los casos $C = 1, N, A \times B$ y B^A separadamente, pero primero notemos las conclusiones preliminares

*(**P**) c es acotado*

Obviamente, por hipótesis (**A**) , c *satisface* (*1*), (*2*) *o* (*3*). *En el caso* (*1*), c *es acotado por el primer y tercer lema de este sección, porque* a *y* b *son acotados. En el caso* (*2*) *se sigue del primer lema que* c *es acotado si nosotros mostramos que* $\phi(x)$ *es acotado. Ahora* $K(A)$ *es computable por la hipótesis* (**A**) *y* (**III**). *P or lo tanto,* $\phi(K(A))$ *es acotado por* (*2*) *y el lema 3 de esta sección, luego* $\phi(x)$ *es acotado por el lema de la sección 12. En el caso* (*3*), c *es evidentemente acotado, porque , siempre que* $c >_1 c'$, *entonces* c' *es acotada por el lema* (*3*) *de esta sección.*

Nosotros ahora estamos listos para demostrar la conclusión (**C**). *Cuando* $C = 1$ *o* $C = N$, *computable significa acotado., y asi nosotros nos referiremos a la conclusión preliminar* (**P**) .

Supóngase $C = A \times B$ *de acuerdo a la definición de computabilidad, debemos mostrar que* $\pi(c) \in A$ *y* $\pi'(c) \in B$ *son computables, procederemos por inducción sobre* $bd(c)$, *por hipótesis* (**A**), A *es agradable, así solamente necesitamos demostrar que* $\pi(c)$ *es pre-computable. Entonces* $\pi(c)$ *no es ni un par o un* λ-*término, nosotros solo tenemos que comprobar* (*3*).

Así, supongamos $\pi(c) >_1 a'$, *debemos mostrar que* a' *es computable. Existen dos casos: Si* $a' \equiv \pi(c')$ *y* $c >_1 c'$ a' *es computable por hipótesis de inducción, entonces* $bd(c') < bd(c)$. *Si* $a' \equiv a$ *y* $c \equiv a$ *y* $c \equiv < a, b >$, a' *es computable por* (*1*).

Supongamos ahora que $C = B^A$, *debemos demostrar que* $C \int a \in A$ *es computable para toda computable cerrado* $a \in A$, *como* c *es acotado por* (**P**), *procederemos por inducción sobre* $bd(c) + bd(a)$, *por hipótesis* B *es agradable, asi solamente necesitamos mostrar* $c \int a$ *es pre-computable. Entonces* $c \int a$ *no es ni una pareja ni un* λ-*término, solo comprobaremos* (*3*).

Asi supongamos $c \int a >_1 b'$ *mostraremos que* b' *es computable. Existen dos casos. Si* $b' \equiv c' \int a$ *con* $c >_1 c'$ *o* $b' \equiv c \int a'$ *con* $a >_1 a'$, b' *es computable por hipótesis de inducción, entonces* $bd(a') < bd(a)$ *y* $bf(c') < bf(c)$, *si* $b' \equiv \phi(a)$ *y* $c \equiv \lambda_{x \in A}\phi(x)$, b' *es computable por* (*2*).

Tenemos asi establecida la conclusión (**C**) *y la demostración del lema esta completa.*

■

Lema *Si $a \in A$, $h \in A^A$, y $n \in N$ son términos cerrados computables, entonces $I(a,h,n)$ es computable.*

Demostración

Procedemos por inducción sobre $bd(a)+bd(h)+bd(n)+bd(\sigma(n))$, donde $\sigma(n)$ es el número de ocurrencias del símbolo S en la forma mormal de n. (Recordemos que n computable implica n es acotado.) Entonces $I(a,h,n)$ no es ni una pareja ni un λ-término, necesitamos solo demostrar el caso (3) del lema anterior.

Así, supongamos $I(a,h,n) >_1 d$, necesitamos demostrar que d es computable Existen tres casos. Si $d \equiv I(a',h,n)$ con $a >_1 a'$ o $d \equiv I(a,h',n)$ con $h >_1 h'$ o $d \equiv I(a,h,n')$ con $n >_1 n'$, d es computable por hipótesis de inducción, entonces $bd(a') < bd(a)$, $bd(h') < bd(h)$ y $bd(n') > bd(n)$ pero $\sigma(n') = \sigma(n)$. Si $d \equiv a$ con $n \equiv 0$, d debe ser computable. Finalmente, si $d \equiv h^{\int} I(a,h,m)$ con $n \equiv S(m)$, nosotros tenemos $\sigma(m) < \sigma(n)$ y $bd(m) = bd(n)$, asi $I(a,h,m)$ es computable por hipótesis de inducción. Entonces h esta dado a ser computable, d es computable por definición de computabilidad.

■

Ahora extenderemos la noción de computabilidad a términos abiertos.

Definición. Un término $t \equiv \phi(x_1,...,x_n)$ con no más variables libres que $x_1,...,x_n$, es computable, con tal que, para todos los términos cerrados computables $a_1,...,a_n$ de tipos apropiados, el término cerrado $t = \phi(a_1,...,a_n)$ es computable.

Teorema *Todos los términos de L_0 son computables, por lo tanto acotados.*

Demostración

Procederemos por inducción sobre la longitud de términos. Para la constante $*$ y 0 y para todas las variables el resultado es trivial. Queda por demostrar las siguientes seis afirmaciones.

(1) Si a y b son computables, asi lo es $< a,b >$.
desde luego, dado a y b computables, entonces asi lo es $< a,b >$ por el

último lema de esta sección.

(2) Si c es computable, entonces lo es $\pi(c)$ y $\pi'(c)$.
dado c computable, entonces lo son $\pi(c)$ y $\pi'(c)$ por definición de computabilidad.

(3) Si $f \in B^A$ y $a \in A$ son computables, entonces lo es $f \int a$
dado f y a computables, entonces lo es $f \int a$ por definicion de computabilidad y el lema 3 de esta sección.

(4) Si $\phi(x, x_1, ..., x_n)$ es computable, entonces lo es $\lambda_{x \in A}\phi(x, x_1, ..., x_n)$.
dado $\phi(x) \equiv \phi(x, a_1, ..., a_n)$ para términos computables cerrados $a_1, ..., a_n$ y asumamos que $\phi(a) \in B$ es computable para todos los términos cerrados computables $a \in A$. Entonces $\lambda_{x \in A}\phi(x)$ es computable, por el lema 4 de esta sección.

(5) Si $n \in N$ es computable, entonces lo es $S(n)$.
dado n computable, este es acotado, entonces lo es $S(n)$.

(6) Si $a \in A$, $h \in A^A$ y $n \in N$ son computables, entonces lo es $I(a, h, n)$.
dado a, h, n computables entonces lo es $I(a, h, n)$ por el lema 5.

Esto completa la demostración.

■

15. C-MONOIDES

Un categoría pequena con un objeto es un monoide, esto es, un semigrupo con elemento identidad. Si una categoría cartesiana cerrada pequena tiene un solo objeto, éste es un monoide poco interesante, porque si 1 es el objeto terminal, $Hom(1,1)$ tiene un solo elemento. Sin embargo si eliminamos el objeto terminal obtenemos una interesante clase de monoides.

Un *C-monoide* (*C* por Curry, Church, Combinatoria o Cartesiana) es un monoide Ω con una estructura extra $(\pi, \pi', \varepsilon, *, <,>)$ donde π, π' y ε son elementos de Ω (operaciones nulas). $(-)^*$ es una operación unaria y $<,>$ es una operación binaría satisfaciendo las siguientes identidades:

$C1 \qquad \pi < a, b >= a$

$C2 \qquad \pi' < a, b >= b$

$C3 \qquad < \pi c, \pi' c >= c$

$C4 \qquad \varepsilon < h^* \pi, \pi' >= h$

$C5 \qquad (\varepsilon < k\pi, \pi' >)^* = k$

Para toda a, b, c, h, y k. Estos son los axiomas de una categoría cartesiana cerrada sin objeto terminal.

A continuación listamos una serie de consecuencias de las definiciones anteriores.

$C3a$	$<a,b>c=<ac,bc>$
$C3b$	$<\pi,\pi'>=1$
$C4a$	$\varepsilon<h^*a,b>=h<a,b>$
$C5a$	$h^*k=(h<kh,\pi'>)^*$
$C5b$	$\varepsilon^*=1$

Para toda a,b,c,h y k

Demostración

$C3a$) $\quad <a,b>c=<\pi<a,b>,\pi'<a,b>>$ $\quad$ por $C3$
$=<ac,bc>$ $\quad$ por $C3$

$C3b$) $\quad <\pi,\pi'>=<\pi 1,\pi' 1>=1$ $\quad$ por $C3$

$C4a$) $\quad \varepsilon<h^*a,b>=\varepsilon<h^*\pi<a,b>,\pi'<a,b>>$ por $C1$ y $C2$
$=\varepsilon<h^*\pi,\pi'><a,b>$ por $C3a$
$=h<a,b>$

$C5a$) $\quad h^*k=(\varepsilon<h^*k\pi,\pi'>^*$ por $C5$
$=(\varepsilon<h^*\pi<k\pi,\pi'>,\pi'<k\pi,\pi'>>)^*$ por $C1$ y $C2$
$=(\varepsilon<h^*\pi,\pi'><k\pi,\pi'>>)^*$ por $C3a$
$=(h<k\pi,\pi'>)^*$ por $C4$

■

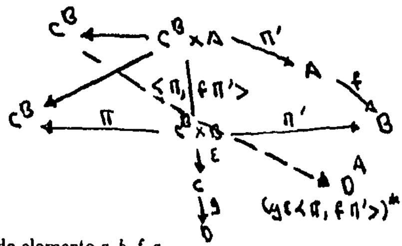
Definición

En cualquier *C-monoide* escribimos:

1) $\quad a\times b=<a\pi,b\pi'>$

$$\begin{tikzcd}
 & 1\times 1 \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "<a\pi,b\pi'>"] \arrow[dr, "\pi'"] & \\
1 \arrow[d, "a"'] & & 1 \arrow[d, "b"] \\
A & A\times B \arrow[l] \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

2) $\quad g^f=(g\varepsilon<\pi,f\pi'>)^*$



para todo elemento a, b, f, g

Esta definición es motivada por las ecuaciones correpondientes en una categoría cartesiana cerrada.

Verifiquemos las siguientes consecuencias de esta definición

$C6 \qquad (a \times b)(c \times d) = ac \times bd$

$C7 \qquad g^f h = (g\varepsilon < h\pi, f\pi' >)^*$

$C8 \qquad g^f k^h = (gk)^{(hf)}$

Demostración

$C6$

$a \times b =< a\pi, b\pi' > \qquad c \times d =< c\pi, d\pi' >$

$(a \times b)(c \times d) =< a\pi, b\pi' >< c\pi, d\pi' >$

$=< a\pi < c\pi, d\pi' >, b\pi' < c\pi, d\pi' >$

$=< ac\pi, bd\pi' >= ac \times bd$

$C7$

$g^f h = (g\varepsilon < \pi, f\pi' >)^* h$

$= (g\varepsilon < \pi, f\pi' >< h\pi, \pi' >)^*$

$= (g\varepsilon < \pi < h\pi, \pi' >, f\pi' < h\pi, \pi' >>)^*$

$= (g\varepsilon < h\pi, f\pi' >)^*$

$C8$

$g^f k^h = (g\varepsilon < \pi, f\pi' >)^*(k\varepsilon < \pi, h\pi' >)^*$

$$= (g\varepsilon < \pi, f\pi' >< < (k\varepsilon < \pi, h\pi' >)^{*}\pi, \pi' >)^{*}$$

$$= (g\varepsilon < (k\varepsilon < \pi, h\pi' >)^{*}\pi, f\pi' >)^{*}$$

$$= (g\varepsilon < (k\varepsilon < \pi, h\pi' >)^{*}\pi, \pi' >< \pi, f\pi' >)^{*}$$

$$= (gk\varepsilon < \pi, h\pi' >< \pi, f\pi' >)^{*}$$

$$= (gk\varepsilon < \pi, hf\pi' >)* = (gf)^{(hf)}$$

■

Los *C-monoides* son los objetos de una categoría cuyas flechas son *C-homomorfismos*, esto es, mapeos que preservan las operaciones $\pi, \pi', \varepsilon, *$, y $<, >$.

Dado un *C-monoide* $\mathbf{A}$, podemos formar el *C-monoide* polinomial $\mathbf{A}[x]$ por la usual constucción de álgebra universal: los elementos de $\mathbf{A}[x]$ son polinomios, esto es, palabras construidas de x y los elementos de $\mathbf{A}$ usando las operaciones del *C-monoide* módulo la relación de congruencia mas paquena que satisface $C1 - C5$ y el mapeo $h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}[x]$ que manda todo elemento de $\mathbf{A}$ sobre el polinomio constante correspondiente es un *C-homomorfismo*. En particular, si $< a, b >= c$ en $\mathbf{A}$ entonces $< a, b >= c$ en $\mathbf{A}[x]$.

El *C-homomorfismo* canónico $h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}[x]$ tiene la propiedad universal usual: para todo *C-homomorfismo* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y todo elemento $b \in \mathbf{A}$ existe un único *C-homomorfismo* $f_b : \mathbf{A}[x] \to \mathbf{B}$ tal que $f_b h = f$

$$\begin{tikzcd}
A[x] \arrow[ddr, dashed, "f_b"] & & x \arrow[dr] & \\
 & & & b \\
A \arrow[uu, "h"] \arrow[r] & B & &
\end{tikzcd}$$

En particular cuando $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ y $f = 1_{\mathbf{A}}$ y $f_b(\phi(x)) = \phi(b)$

Los *C-monoides* tienen la importante propiedad de completez funcional.

Teorema *Si $\phi(x)$ es un polinomio en la indeterminada x sobre un C-monoide $\mathbf{A}$, existe una única constante f en $\mathbf{A}$ tal que*

$$f < (x\pi)^{*}, 1 >= \phi(x)$$

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "(x\pi'_{s,0})^{*}"'] \arrow[d, "<(x\pi'_{s,0})^{*}\text{,} 1_B>"] \arrow[dr, "1_B"] \arrow[dd, bend right=60, "\phi(x)"'] & \\
A^0 & A^0 \times B \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "f"] & B \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

Demostración

Definimos $\rho_x\phi(x)$ por inducción sobre la longitud de la palabra $\phi(x)$

i) $\rho_x k \equiv k\pi'$ si $k \in \mathbf{A}$

ii) $\rho_x x \equiv \varepsilon$

iii) $\rho_x < \psi(x), \chi(x) > \equiv < \rho_x\psi(x), \rho_x\chi(x) >$

iv) $\rho_x(\chi(x)\psi(x)) \equiv \rho_x\chi(x) < \pi, \rho(x)\psi(x) >$

v) $\rho(x)(\psi(x)^{*}) \equiv (\rho_x\psi(x)\alpha)^{*}$

donde $\alpha \equiv << \pi\pi, < \pi'\pi, \pi' >>$ (escribimos $\equiv$ para identidad de palabras, mientras $=$ es reservada para igualdad de polinomios, esto es, clases equivalentes de palabras).

Mostraremos que ρ_x se áplica realmente a polinomios, es decir

si $\phi(x) = \psi(x)$ entonces $\rho_x\phi(x) = \rho_x\psi(x)$

Ahora $=$ es la relación de congruencia mas pequena entre palabras en x satisfaciendo $C1 - C5$ y la condición de que h es un homomorfismo, por lo tanto es suficiente mostrar

$C1'$ $\rho(x)(\pi < a,b >) = \rho_x a$

$C2'$ $\rho(x)(\pi' < a,b >) = \rho_x b$

$C3'$ $\rho(x)(< \pi c, \pi' c) = \rho_x c$

$C4'$ $\rho_x(\varepsilon < h^* \pi, \pi' >)^* = \rho(x) h$

$C5'$ $\rho_x(\varepsilon < k\pi, \pi' >)^* = \rho_x k$

demostración

$C1'$)
$\rho(x)(\pi < a,b >) = \rho(x)\pi < \pi, \rho_x < a,b >>=$
$\rho(x)\pi < \pi, < \rho_x a, \rho_x b >>= \pi\pi' < \pi, < a\pi', b\pi' >>=$
$\pi < a\pi', b\pi' >= a\pi' = \rho_x a$

$C2'$)
Los mismos cálculos se realizan para $\rho(x)(\pi' < a,b >) = \rho_x b$
$C3'$
$\rho(x)(< \pi c, \pi' c) =< \rho_x(\pi c), \rho_x(\pi' c) >=$
$< \rho_x \pi < \pi, \rho_x c >, \rho_x \pi' < \pi, \rho_x c >> -$

$< \pi\pi' < \pi, \rho_x c >, \pi'\pi' < \pi, \rho_x c >>=$
$< \pi \rho_x c, \pi' \rho_x c >= \rho_x c$

$C4'$)
$\rho_x(\varepsilon < h^* \pi, \pi' >)^* = \rho_x \varepsilon < \pi, \rho_x < h^* \pi, \pi' >>=$
$\rho_x(\varepsilon < h^* \pi, \pi' >) = \rho_x \varepsilon < \pi, < \rho_x(h^* \pi), \rho_x \pi' >>=$
$\rho_x \varepsilon < \pi, < \rho_x h^* < \pi, \rho_x \pi >, \rho_x \pi' >>=$
$\varepsilon < (\rho_x h\alpha)^* < \pi, \rho_x \pi >, \rho_x \pi' >=$
$\varepsilon < (\rho_x h\alpha)^* \pi, \pi' ><< \pi, \rho_x \pi >, \rho_x \pi' >=$
$\rho_x h\alpha << \pi, \rho_x \pi >, \rho_x \pi' >=$
$\rho_x h < \pi, < \rho_x \pi, \rho_x \pi' >=$
$\rho_x h < \pi, < \pi, \pi' > \pi' >=$
$\rho_x h < \pi, \pi' >= \rho_x h$

$C5'$)

$\rho_x(\varepsilon < k\pi, \pi' >)^* = (\rho_x(\varepsilon < k\pi, \pi' > \alpha)^* =$
$(\rho_x \varepsilon < \pi, \rho_x < k\pi, \pi' > \alpha)^* =$
$(\varepsilon \rho_x < k\pi, \pi' > \alpha)^* =$

$$(\varepsilon < \rho_x(k\pi), \rho_x\pi' > \alpha)^* =$$
$$(\varepsilon < \rho_x k < \pi, \rho_x\pi >, \rho_x\pi' > \alpha)^* =$$
$$(\varepsilon < k\rho_x\pi, \pi'\pi' > \alpha)^* =$$
$$(\varepsilon < k\pi\pi', \pi'\pi' >< \pi\pi < \pi'\pi, \pi' >>)^* =$$
$$(\varepsilon < k\pi'\pi, \pi'\pi' >)^* = k\pi' = \rho_x k$$

Notemos además que, si $< a, b >= c$ en $\mathbf{A}$, entonces $\rho_x < a, b >= \rho_x c$
Mostremos la existencia de F

i)
$$\rho_x\phi(x) < (x\pi')^*, 1 >= \rho_x k < (x\pi')^*, 1 >=$$
$$k\pi' < (x\pi')^*, 1 >= k$$

ii)
$$\rho_x\phi(x) < (x\pi')^*, 1 >= \rho_x x < (x\pi')^*, 1 >=$$
$$\varepsilon < (x\pi')^*, 1 >= x\pi' < 1, 1 >= x$$

iii)
$$\rho_x(< \psi(x), \chi(x) >) < (x\pi')^*, 1 >=$$
$$< \rho_x\psi(x), \rho_x\chi(x) >< (x\pi')^*, 1 >=$$
$$< \psi(x)\pi', \chi(x)\pi' >< (x\pi')^*, 1 >=$$
$$< \psi(x), \chi(x) >$$

iv)
$$\rho_x(\chi(x)\psi(x)) < (x\pi')^*, 1 >= \rho_x\chi(x) < \pi, \rho_x\psi(x) >< (x\pi')^*, 1 >=$$
$$\chi(x)\rho_x\psi(x) < (x\pi')^*, 1 >= \chi(x)\psi(x)$$

v)

$$\rho_x(\psi(x))^* < (x\pi')^*, 1 >= (\rho_x\psi(x)\alpha)^* < (x\pi'^*, 1 >=$$

$$(\rho_x\psi(x)\alpha << (x\pi')^*, 1 > \pi, \pi' >)^* =$$

$$(\rho_x\psi(x) < \pi\pi, < \pi'\pi, \pi' >><< (x\pi')^*, 1 > \pi, \pi' >)^* =$$

$$(\rho_x\psi(x) < (x\pi')^*\pi, < \pi, \pi' >>)^* =$$
$$(\rho_x\psi(x) < (x\pi')^*\pi, 1 >)^* =$$
$$(\psi(x)\pi' < (x\pi')^*\pi, 1 >)^* = (\psi(x))^*$$

por lo tanto la parte de existencia ha sido establecida.

Finalmente mostremos la unicidad de f en el teorema, supongamos que $f < (x\pi')^*, 1 >= \phi(x)$ deseamos mostrar que $\rho_x\phi(x) = f$

$\rho_x(f < (x\pi'^*, 1 >) = \rho_x f < \pi, \rho_x < (x\pi')^*, 1 >>=$
$f\rho_x < (x\pi')^*, 1 >= f < \rho_x(x\pi')^*, \rho_x 1 >=$
$f < (\rho_x(x\pi')\alpha)^*, \pi' >=$
$f < (\rho_x(x\pi')\alpha)^*, \pi' >=$
$f < (\rho_x x. < \pi, \rho_x\pi' > \alpha)^*, \pi' >=$
$f < (\varepsilon < \pi, \rho_x\pi' >< \pi\pi, < \pi'\pi, \pi' >>)^*, \pi' >=$
$f < (\varepsilon < \pi\pi, \pi' >)^*, \pi' >= f < \pi, \pi' >= f$

Esto completa la prueba del teorema.

■

Si definimos $g\int a \equiv \varepsilon < g(a\pi')^*, 1 >$ tenemos la siguiente consecuencia inmediata:

Corolario *Si $\phi(x)$ es un polinomio con la indeterminada x sobre un C-monoide Ω, entonces existe una única $g \in \Omega$ tal que*
$g\int x = \phi(x)$

Demostración

tomemos $g = f^* = (\rho_x\phi(x))^*$ y usando $C4a$

$\varepsilon < f^*(a\pi')^*, 1 >= f < (a\pi')^*, 1 >$

Es sugerente escribir $\lambda_x\phi(x) \equiv (\rho_x\phi(x))^*$
entonces el corolario puede ser expresado por las ecuaciones

$\lambda_x\phi(x)\int x = \phi(x) \qquad \lambda_x(g\int x) = g$

de hecho de la propiedad universal de $\Omega[x]$ obtenemos que para $a \in \Omega$

$$\lambda_x\phi(x)\int a = \phi(a)$$

Mencionaremos el 'teorema del punto fijo' para *C-monoides*

Proposición *Para todo polinomio $\phi(x)$ en $\Omega[x]$ existe un elemento $a \in \Omega$ tal que $\phi(a) = a$*

Demostración

Dado $b \equiv \lambda_x \phi(x \int x)$ y $a \equiv b \int b$, entonces
$\phi(a) \equiv \phi(b \int b) = b \int b \equiv a$

Este resultado explica porque los *C-monoides* no pueden ser incorporados a la lógica proposicional, porque si tenemos una operación $\neg$ de negación se seguiría que $\neg p = p$ para alguna p

A continuación listaremos algunas identidades de los *C-monoides*

$C9 \quad (a\pi')^* k = (a\pi')^*$

$C10 \quad (fg) \int a = f \int (g \int a)$

$C11 \quad \lambda_x (f \int a) = f \lambda_x a$ si x no esta libre en $f \int a$

$C12 \quad 1 \int a = a$

$C13 \quad (\lambda_x a) k = \lambda_x a$ si x no esta libre en a

Demostración

$C9)$
$(a\pi')^* k = (a\pi' < k\pi, \pi' >)^* = (a\pi')^*$
$C10$
$(fg) \int a = \varepsilon < fg(a\pi')^*, 1 >=$
$\varepsilon < f(\varepsilon < g(a\pi')^* \pi, \pi' >)^*, 1 >=$
$\varepsilon < f(\varepsilon < g(a\pi')^* \pi', \pi' >)^*, 1 >=$
$\varepsilon < f(\varepsilon < g(a\pi')^*, 1 > \pi')^*, 1 >=$
$\varepsilon < f((g \int a)\pi')^*, 1 >= f \int (g \int a)$

$C11)$
$(lambda_x (f \int a)) \int x = f \int a = f \int ((\lambda_x a) \int x) = (f \lambda_x a) \int x$

$C12)$
$1 \int a = \varepsilon < (a\pi')^*, 1 >= \varepsilon < (a\pi')^* \pi, \pi' >< 1, 1 >=$
$a\pi' < 1, 1 >= a$

$C13)$

$$((\lambda_x a)k)^{\int} x = (\lambda_x a)^{\int}(k^{\int} x) = a = (\lambda_x a)^{\int} x$$

■

Definición Un *C-monoide débil* es un C-monoide con la siguiente estructura

$C1 \qquad \pi < a, b >= a$

$C2 \qquad \pi' < a, b >= b$

$C3a \qquad < a, b > c =< ac, bc >$

$C4a \qquad \varepsilon < h^* a, b >= h < a, b >$

$C5a \qquad h^* k = (h < k\pi, \pi' >)^*$

Verifiquemos que $C6, C7$ y $C5$ siguen valiendo en un $C-monoide$ débil

$C6)$

$$(a \times b)(c \times d) = ac \times bd$$

$$(a \times b)(c \times d) =< a\pi, b\pi' >< c\pi, d\pi' >>=< ac\pi, bd\pi' = ac \times bd$$

$C7$

$$g^f h = (g\varepsilon < \pi, f\pi' >)^* h$$
$$= (g\varepsilon < \pi, f\pi' >< h\pi, \pi' >)^*$$

$$= (g\varepsilon < \pi < h\pi, \pi' >, f\pi' < h\pi, \pi' >>)^*$$

$$= (g\varepsilon < h\pi, f\pi' >)^*$$

$C8$

$$g^f k^h = (g\varepsilon < \pi, f\pi' >)^* (k\varepsilon < \pi, h\pi' >)^*$$

$$= (g\varepsilon < \pi, f\pi' ><< (k\varepsilon < \pi, h\pi' >)^* \pi, \pi' >)^*$$

$$= (g\varepsilon < (k\varepsilon < \pi, h\pi' >)^* \pi, f\pi' >)^*$$

$$= (gk\varepsilon < (k\varepsilon < \pi, h\pi' >)^* \pi, \pi' >< \pi, f\pi' >)^*$$

$$= (gk\varepsilon < \pi, h\pi' >< \pi, f\pi' >)^*$$

$$= (gk\varepsilon < \pi, hf\pi' >)* = (gf)^{(hf)}$$

■

16. C-MONOIDES Y C^3

Como habíamos mencionado anteriormente, un *C-monoide* es una categoría cartesiana cerrada, excepto que le falta objeto términal.

Un elemento A de un monoide es llamado idempotente si $AA = A$, denotemos a los elementos idempotentes, con letras mayúsculas.

Proposición *Si A y B son elementos idempotentes de un C-monoide, así lo son $A \times B$ y B^A*

Demostración

$$(A \times B)(A \times B) = AA \times BB = A \times B$$

$$B^A B^A = (BB)^{AA} = B^A$$

■

Notemos que los elementos π'^* y 1 son idempotentes

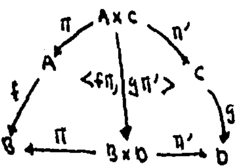
$$\pi'^* \pi'^* = (\pi' < \pi'^* \pi, \pi')^* = \pi'^*$$

$$11 = \varepsilon^* \varepsilon^* = (\varepsilon < \varepsilon^* \pi, \pi' >)^* = (\varepsilon)^* = 1$$

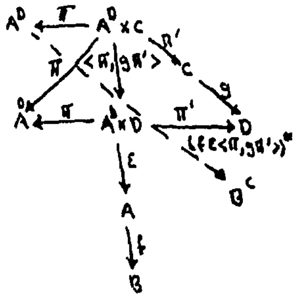
Siguiendo a Danna Scott, escribiremos $f : A \to B$ por $BfA = f$, o equivalentemente $Bf = f$ y $fA = f$; notemos el siguiente punto.

*C*14 si $f : A \to B$ y $g : C \to D$ entonces $f \times g : A \times C \to B \times D$ y $f^g : A^D \to B^C$

$f \times g \stackrel{def}{=} \langle f\pi, g\pi' \rangle$



$f^g \stackrel{def}{=} (f\varepsilon\langle \pi, g\pi' \rangle)^*$



Teorema *(Danna Scott) Los elementos idempotentes de un C-monoide Ω son los objetos de una categoría cartesiana cerrada $K(\Omega)$ con flechas $f : A \to B$ dadas por elementos f de Ω tal que $BfA = f$.*

Demostración

Denotamos una flecha $A \to B$ por un triple (A, f, B), entonces fácilmente se ve que $K(\Omega)$ es una categoría con identidad (A, A, A) y composicion $(B, g, C)(A, f, B) = (A, gf, C)$

Para obtener una estructura cartesiana cerrada para $K(\Omega)$ definimos

$\bigcirc_A : A \to \pi'^*, \qquad \pi_{A,B} : A \times B \to A,$

$\pi'_{A,B} : A \times B \to B, \qquad \varepsilon_{B,A} : B^A \times A \to B$

$\bigcirc_A = (A, \pi'^*, \pi'^*)$

$\pi_{A,B} = (A \times B, A\pi(A \times B), A)$

$\pi'_{A,B} = (A \times B, B\pi'(A \times B), B)$

$\varepsilon = (B^A \times A, B\varepsilon(B^A \times A), B)$

y verifiquemos que

$$\frac{f : C \to A \qquad g : C \to B}{< f, g >: C \to A \times B}$$

$$\frac{h : A \times B \to C}{h^* : A \to C^B}$$

$$f : C \to A \qquad f = (C, f, A)$$
$$g : C \to B \qquad g = (C, g, B)$$

$$< f, g >=< (C, f, A), (C, g, B) >: C \to A \times B)$$

$$< (C, f, A), (C, g, B) >= (C, < f, g >, A \times B)$$

$$h = (A \times B, h, C)$$
$$h^* = (A, h^*, C^B)$$

Claramente con estas definiciones se cumplen las ecuaciones de una categoría cartesiana cerrada (E2, E3a, E3b, E3c), E4a, E4b).

Notemos que el objeto términal de $K(\Omega)$ es π'^*, no 1, Para evitar confusión escribiremos T y U en lugar de π'^* y 1 respectivamente cuando ellos son considerados como objetos.

■

Corolario *La subcategoría plena $K_0(\Omega)$ de $K(\Omega)$ consiste de todos los objetos isomorfos a T o U es una categoría cartesiana cerrada.*

Demostración
Notemos que cualquier subcategoría de una categoría cartesiana cerrada conteniendo a T y cerrada bajo producto y exponenciación, es tambien una categoría cartesiana cerrada. En la presente situación revisemos que

$$UxU = U, \qquad U^U = U$$

$$U = 1 = (\epsilon)^*$$
$$1x1 =< \pi.\pi' >=< \pi, \pi' > 1 = 1$$

$$U^U = 1^1 = (\varepsilon < \pi.\pi' >)^* = \varepsilon^* = 1$$

Recordemos que $A \times T \cong A \cong T \times A, \qquad A^T \cong A, \qquad T^A \cong T$
para cualquier objeto A en una categoría cartesiana cerrada, en particular

cuando $A \cong T$ o $A \cong U$
Observemos que $K(\Omega)$ tiene a lo mas dos objetos no isomorfos (U, T).

■

Proposición . *Dado* **A** *una categoría cartesiana cerrada localmente pequena con un objeto U tal que $UxU \cong U$ y $U^U \cong U$ entonces $End(U)$ es C-monoide. En caso de que* **A** *es $K(\Omega)$ o $K_0(\Omega)$, $End(U) \cong \Omega$*

Demostración

Dado $\sigma : UxU \to U$ y $\tau : U^U \to U$ isomorfismos; queremos dotar a $End(U)$ con la estructura de un *C-monoide* $(\pi, \pi', \varepsilon, \mp, \{\})$, definimos:

$\pi = \pi_{U,U}\sigma^{-1}$
$\pi' = \pi'_{U,U}\sigma^{-1}$
$\varepsilon = \varepsilon_{U,U}(\tau^{-1} \times 1_U)\sigma^{-1})$
$\{a, b\} = \sigma < a, b >$
$h\mp = \tau(h\sigma)^*$

Verifiquemos que las ecuaciones de un *C-monoide* son satisfechas.

$C1$
$\pi\{a, b\} = \pi_{U,U}\sigma^{-1}\sigma < a, b >= \pi < a, b >= a$

$C2$
$\pi'\{a, b\} = \pi'_{U,U}\sigma^{-1}\sigma < a, b >= \pi' < a, b >= b$

$C3$
$\{\pi c, \pi' c\} = \sigma < \pi c \pi' c >=$
$\sigma < \pi_{U,U}\sigma^{-1}c, \pi'_{U,U}\sigma^{-1}c >= \sigma\sigma^{-1}c = c$

$C4$
$\varepsilon\{h \mp \pi. \pi'\} = \varepsilon_{U,U}(\tau^{-1} \times 1_U)\sigma^{-1}\sigma$
$< \tau(h\sigma)^* \pi_{U.U}\sigma - 1, \pi'_{U,U}\sigma^{-1} >=$

$\varepsilon_{U,U}(\tau^{-1} x 1_U) < \tau(h\sigma)^* \pi_{U.U}\sigma^{-1}, \pi'_{U,U}\sigma^{-1} >=$

$\varepsilon_{U,U} < \tau^{-1}\pi_{U,U}, \pi'_{U,U} >< \tau(h\sigma)^* \pi_{U.U}, \pi'_{U,U} > \sigma^{-1} =$

$\varepsilon_{U,U} < \tau^{-1}\tau(h\sigma)^* \pi_{U.U}, \pi'_{U,U} > \sigma^{-1} =$

$\varepsilon_{U,U} < (h\sigma)^{*}\pi_{U.U}, \pi'_{U,U} > \sigma^{-1} =$

$h\sigma\sigma^{-1} = h$

$C5$
$(\varepsilon\{k\pi, \pi'\})\mp = \tau(\varepsilon\{k\pi, \pi'\}\sigma)^{*} =$
$\tau(\varepsilon_{U,U}(\tau^{-1}x1_U)\sigma^{-1}\sigma < k\pi, \pi' > \sigma)^{*} =$

$\tau(\varepsilon_{U,U}(\tau^{-1}\pi_{U,U}, \pi'_{U,U}) < k\pi_{U.U}\sigma^{-1}, \pi'_{U.U}\sigma^{-1} > \sigma)^{*} =$

$\tau(\varepsilon_{U,U} < \tau^{-1}k\pi_{U,U}\sigma^{-1}\sigma, \pi'_{U,U}\sigma^{-1}\sigma >)^{*} =$

$\tau(\varepsilon_{U,U} < \tau^{-1}k\pi_{U,U}, \pi'_{U,U} >)^{*} =$

$\tau\tau^{-1}k = k$

Ahora supongamos que $\mathbf{A} = K(\Omega)$ o $\mathbf{A} = K_0(\Omega)$ entonces $U = 1$, $UxU = U$ y $U^U = U$ de este modo $\sigma = 1_U = (U, U, U)$ y $\tau = 1_U$ del mismo modo. El isomorfismo $\Omega \longrightarrow End(U)$ el cual está dado claramente por $f \longrightarrow (U, f, U)$. El elemento π de $End(U)$ esta definido como:

$\pi_{U,U}\sigma^{-1} = (UxU, U\pi(UxU), U)(U, U, U)^{-1} = (U, \pi, U)$

el cual es la imagen del elemento π de Ω en $End(\Omega)$
π' esta definido:

$\pi'_{U,U}\sigma^{-1} = (UxU, U\pi'(UxU), U)(U, U, U)^{-1} = (U, \pi;, U)$

De forma análoga definimos $\varepsilon, \{a, b\}, h\mp$

La proposición anterior es útil en dar ejemplos de *C-monoides*. Mientras el teorema habla acerca de que todos los *C-monoides* deben ser de esta forma.

■

17. C-MONOIDES Y λ-CALCULOS NO TIPIFICADOS

El λ-cálculo no tipificado que estudiaremos aquí es una extensión del λ η -cálculo (no tipificado) de la literatura. La ausencia de tipos asegura que la aplicación es sin restricción.

Definición. Un λ−cálculo extendido está dado por un conjunto de términos y ecuaciones, las cuales se consideran 'dadas'. El conjunto de términos es generado libremente a partir de un número contable de variables y un conjunto posiblemente vacío de constantes en la cual las operaciones forman términos incluyendo las siguientes. Si c es un término así lo es $\pi(c)$ y $\pi'(c)$. Si a y b son términos, así lo son $b\int a$ y (a,b); si $\phi(x)$ es un término, posiblemente conteniendo la variable libre x, entonces $\lambda_x\phi(x)$ es un término en el cual todas las ocurrencias de x son acotadas. La relación binaria entre términos a y b $a = b$ es una relación de equivalencia que satisface las reglas usuales (como es usual, las reglas son interpretadas diciendo: si la hipótesis entonces la conclusión) permitiendo sustitución de igualdad por igualdad, incluyendo

$$\frac{\phi(x) = \psi(x)}{\lambda_x\phi(x) = \lambda_x\psi(x)}\ ,\qquad \frac{a = b}{f\int a = f\int b}$$

de la cual las otras reglas de sustitución se siguen, y la siguiente regla permitiendo sustitución de términos por variables libres.

$$L0 \qquad \frac{\phi(x) = \psi(x)}{\phi(a) = \psi(a)}$$

Dado que las ocurrencias no libres de una variable en a se transforma en acotada en $\phi(a)$ o $\psi(a)$. Finalmente las siguientes ecuaciones específicas son postulados, para a, b, c, f y $\phi(x)$:

L1. $\lambda_x \phi(x) \int x = \phi(x)$;

L2. $\lambda_x (f \int x) = f$, si x no esta libre en f;

L3. $\pi((a, b)) = a$;

L4. $\pi'((a, b)) = b$;

L5. $(\pi(c), \pi'(c)) = c$.

Notemos que dec L1 y L0 obtenemos

$\lambda_x \phi(x) \int a = \phi(a)$;

dado que las ocurrencias no libres de una variable en a se transforman en acotadas en $\phi(a)$.

Un $\lambda\eta-$cálculo es definido similarmente, pero sin las operaciones $\pi(-), \pi'(-)$ y $(-,-)$ formando términos, por lo tanto sin L3, L4, y L5. Algunos autores ademas suprimen L2, llamando el sistema resultante $\lambda-$cálculo.

El $\lambda-$cálculo puro extendido ($\lambda\eta-$cálculo, $\lambda-$cálculo) es un sistema en el cual no hay más términos que los que están definidos inductivamente y en el cual la relación de igualdad que mencionamos es la relación de equivalencia más pequena teniendo todas las propiedades requeridas.

Observación. Es conocido que en cualquier $\lambda-$cálculo uno puede definir operaciones formando operaciones $\pi(-), \pi'(-)$ y $(-,-)$ satisfaciendo

L3, L4 pero no L5.

Por ejemplo, uno puede definir

$$\pi(c) = c\int i, \text{ donde } i = \lambda_x\lambda_y x,$$

$$\pi'(c) = c\int j, \text{ donde } j = \lambda_x\lambda_y y,$$

$$(a,b) = \lambda_z((z\int a^{\int} b)).$$

claramente, podemos calcular

$$\pi((a,b)) = (a,b)\int i = (i\int a)\int b = a,$$

$$\pi'((a,b)) = (a,b)\int j = (j\int a)\int b = b.$$

Desafortunadamente no se sigue de esta definición que $(\pi(c), \pi'(c)) = c$ De hecho no existe tal definición (ver el libro de Barendregt).

Proposición *Todo C-monoide Ω puede ser llevado a un λ−cálculo extendido $\mathbf{L}(\Omega)$: los términos de $\mathbf{L}(\Omega)$ en las variables libres $x_1, ..., x_n$ son palabras construidas de elementos Ω y las indeterminadas $x_1, ..., x_n$ por las siguientes operaciones:*

$$\pi(c) \equiv \pi c, \qquad \pi'(c) \equiv \pi' c,$$

$$(a,b) \equiv < a, b >,$$

$$f\int a \equiv \varepsilon < f(a\pi')^*, 1 >,$$

$$\lambda_x \phi(x) \equiv (\rho_x \phi(x))^*.$$

Finalmente, $a = b$ dados en $\mathbf{L}(\Omega)$ si $a = b$ en el C-monoide polinomial $\omega[X]$, donde X contiene todas las variables ocurriendo libremente en a y b.

Compárese esto con el ejemplo 1 del capítulo 10. Para las dos últimas definiciones veáse el capítulo 15. Notemos que la relación de igualdad en $\Omega[x_1, ..., x_{n+1}]$ es una extensión fiel y plena de $\Omega[x_1, ..., x_n]$. Claramente si suponemos que $f = g$ en $\Omega[X][y]$ y sustituimos 1 por y obtenemos $f = g$ en

$\Omega[X]$.

L1 y L2 fueron establecidas en el corolario del capítulo 15. L3 a L5 son fácilmente mostradas:

$$\pi((a,b)) = \pi < a,b >= a,\ (\pi(c),\pi'(c)) =< \pi(c),\pi'(c) >= c.$$

Proposición *Todo λ−cálculo extendido L puede ser llevado a un C-monoide* M(L) *cuyos elementos son (clases de equivalencia de) términos cerrados L y donde*

$$1 \equiv \lambda_x x,$$

$$gf \equiv \lambda_x(g^{\int}(f^{\int}x)),$$

$$\pi \equiv \lambda_x \pi(x),$$

$$\pi' \equiv \lambda_x \pi'(x),$$

$$< f.g >\equiv \lambda_x(f^{\int}x, g^{\int}x),$$

$$\varepsilon \equiv \lambda_z(\pi(z)^{\int}\pi'(z)),$$

$$h^* \equiv \lambda_x\lambda_y(h^{\int}(x,y)).$$

Mas aún , $a = b$ en M(L) *si $a = b$ en L*

Demostración

Las ecuaciones de un C-monoides son fácilmente revisadas. Por ejemplo:

$$(\varepsilon < h^*\pi, \pi' >)^{\int} x = \varepsilon^{\int}(< h^*\pi, \pi' >^{\int} x)$$
$$= \varepsilon^{\int}((h^*\pi)^{\int} x, \pi'(x))$$
$$= ((h^*\pi)^{\int} x)^{\int}(\pi'^{\int} x)$$
$$= (h^{*\int}\pi(x))^{\int}(\pi'(x))$$
$$= h^{\int}(\pi(x), \pi'(x))$$
$$= h^{\int} x$$

por lo tanto $\varepsilon < h^* \pi, \pi' >= h$. Las otras ecuaciones que debe satisfacer un C-monoide se realiza de la misma manera.

Las correspondencias $\Omega \to \mathbf{L}(\Omega)$ y $L \to \mathrm{M}(L)$ discutido en las proposiciones anteriores puede ser extendido a funtores entre categorías apropiadas. Desafortunadamente, no es obvio que esto de una de equivalencia de categorías. La razón para esto es que en la segunda proposición de esta sección las definiciones de $\pi(-), \pi'(-)$ y $(-,-)$ no fueron elegidos de manera adecuada.

Cambiaremos las operaciones $\pi(-), \pi'(-)$ y $(-,-)$ formando términos en la proposicion 2 como sigue

$$\pi(c) \equiv \pi^{\int} c$$

$$\pi'(c) \equiv \pi'^{\int} c$$

$$(a, b) \equiv < \lambda_x a, \lambda_x b >^{\int} 1$$

donde se supone que x no esta libre en a o b. Ahora calculemos.

$$\pi((a,b)) = \pi^{\int}(< \lambda_x a, \lambda_x b >^{\int} 1)$$

$$= (\pi < \lambda_x a, \lambda_x b >)^{\int} 1 \qquad porC10$$

$$= (\lambda_x a)^{\int} 1 \qquad porC1$$

$$= a$$

$$(\pi(c), \pi'(c)) = < \lambda_x(\pi^{\int} c), \lambda_x(\pi'^{\int} c) > 1,$$
$$= < \pi\lambda_x c, \pi'\lambda_x c >^{\int} 1 \qquad porC11$$

$$= (\lambda_x c)^{\int} 1 = c$$

En lo siguiente **M** es tomado como en la segunda proposición y **L** en la forma en la cual fue corregido en la proposición uno. También haremos la convención de que términos a y b de L son identicos si $a = b$ son dados en L.

Teorema **M** *y* **L** *establecen una correspondencia uno a uno entre* *los C-monoides Ω y el λ-cálculo extendido L:*

$$\mathbf{ML}(\Omega) = \Omega, \qquad \mathbf{LM}(L) = L$$

Demostración

(a) Los elementos de $\mathbf{ML}(\Omega)$ son (clases de equivalencia de) términos cerrados de $\mathbf{L}(\Omega)$, por lo tanto los mismos elementos de Ω. Provisionalmente distinguiremos operaciones de $\mathbf{ML}(\Omega)$ de Ω subscribiendo $\#$. Entonces

$1_\# = \lambda_x x = 1$ por C12 y el corolario de la sección 15

$(fg)_\# = \lambda_x(f^\int(g^\int x))$

$= \lambda_x((fg)^\int x)$ *porC10*

$= fg$

$\pi_\# = \lambda_x \pi(x) = \lambda_x(\pi^\int x) = \pi$

Similarmente $\pi'_\# = \pi'$. De la misma manera se demuestra que $<$
$a, b >_\# =$
$< a, b >$ por cálculos directos,algo inmediato también es que c es única tal que $\pi^\int c = a$ y $\pi'^\int c = b$

Antes de mostrar $\varepsilon_\# = \varepsilon$ notemos que en $\mathbf{L}(\Omega)$
$C15 \quad \varepsilon^\int(a, b) = a^\int b$

$\varepsilon^\int(a, b) = \varepsilon^\int < \lambda_x a, \lambda_x b >^\int 1)$
$= (\varepsilon < \lambda_x a, \lambda_x b >)^\int 1)$ por C10

$= (\varepsilon < \lambda_x a, 1 > \lambda_x b)^\int 1$ *porC13*

$= (\varepsilon < (a\pi')^\bullet, 1 > \lambda_x b)^\int 1$ como $(a\pi'^\bullet{}^\int x = a$ por C4a

$= (\varepsilon < (a\pi')^\bullet, 1 >)^\int((\lambda_x b)^\int 1)$ por C10

$= (1^\int a)^\int b$

$= a\int b$ por C12

Por consiguiente

$\varepsilon_{\#} = \lambda_z(\pi(z)\int \pi'(z))$

$= \lambda_z(\varepsilon\int (\pi(z), \pi'(z)))$

$= \lambda_z(\varepsilon\int z)$

$= \varepsilon$

Así $\varepsilon_{\#} = \varepsilon$, como también $h^*_{\#}$ y h^*, ambos son la única k tal que $\varepsilon < k\pi, \pi' >= h$ de aquí $h^*_{\#} = h^*$

Así $\mathbf{ML}(\Omega)$ y Ω no solo tienen los mismos elementos sino también las mismas operaciones, por lo tanto ellos son el mismo C-monoide.

(b) Los términos del lenguaje $\mathbf{LM}(L)$ con variables libres $x_1, ..., x_n$, son, por definición de $\mathbf{L}$ polinomios en $\mathbf{M}(L)[x_1, ..., x_n]$ afirmamos, sin justificación por el momento, que hay una igualdad

$$(*) \qquad \mathbf{M}(L)[x_1, ..., x_n] = \mathbf{M}(L(x_1, ..., x_n))$$

Aquí $(L(x_1, ..., x_n))$ es el lenguaje obtenido de L adjuntando parámetros $x_1, ..., x_n$. Esto es decir, los términos cerrados de $(L(x_1, ..., x_n))$ son términos abiertos de L en las variables libres $x_1, ..., x_n$. Justificaremos la afirmación $(*)$ mas adelante.

Asi $\mathbf{LM}(L)$ tiene los mismos términos como L. Compararemos ahora sus términos formando operaciones. Temporalmente distinguiremos estos subscribiendo # de los de $\mathbf{LM}(L)$.

Primero,

$(f\int a)_{\#} = \varepsilon < f(a\pi')^*, 1 >$

$= \lambda_x(\varepsilon\int (< f(a\pi'^*, 1 >\int x))$

$= \lambda_x(\varepsilon\int ((f(a\pi')^*)\int x, 1\int x))$

Ahora

$$(f(a\pi')^{*})^{\int} x = f^{\int}((a\pi')^{*\int} x)$$
$$= f^{\int} \lambda_y((a\pi')^{\int}(x,y))$$
$$= f^{\int} \lambda_y(a^{\int}(\pi^{\int}(x,y)))$$
$$= f^{\int} \lambda_y(a^{\int} y)$$
$$= f^{\int} a$$

por lo tanto

$$(f^{\int} a)_{\#} = \lambda_x(\varepsilon^{\int}(f^{\int} a, x))$$
$$= \lambda_x((f^{\int} a)^{\int} x) \qquad porC15$$

De la misma forma se demuestra

$$(\lambda_x \phi(x))_{\#} = \lambda_x \phi(x)$$

donde ambos son la única f tal que $f^{\int} x = \phi(x)$. También,

$$\pi_{\#}(c) = (\pi^{\int} c)_{\#} = \pi^{\int} c = \pi(c)$$

Similarmente para $\pi'_{\#}$. Finalmente

$$(a,b)_{\#} = <\lambda_x a, \lambda_x b>^{\int} 1$$
$$= (\lambda_y((\lambda_x a)^{\int} y, (\lambda_x b)^{\int} y))^{\int} 1$$
$$= ((\lambda_x a)^{\int} 1, (\lambda_x b)^{\int} 1)$$
$$= (a,b)$$

Queda por justificar la afirmación $*$. Para argumentarla, tomemos $n = 1$. Es claro que nosotros tenemos un isomorfismo

$$(**) \qquad \mathbf{M}(L)[x] \cong \mathbf{M}(L(x))$$

Fácilmente se verifica que $\mathbf{M}(L(x))$ tiene la propiedad universal requerida: para cualquier C-homomorfismo $f : \mathbf{M}(L) \to \Omega$ y cualquier elemento $a \in \Omega$, hay un único C-homomorfismo $f^{+} : \mathbf{M}(L)(x)) \to \Omega$ tal que la restricción a $\mathbf{M}(L)$ es f y $f^{+}(x) = a$, desde luego, necesitamos solo tomar

$$F^{+}(\phi(x)) = f(\lambda_x \phi(x)) \int a$$

Porqué podemos reemplazar el isomorfismo en (**) por igualdad? Esto depende sobre como estan definidas las indeterminadas. Mientras la construcción estándar de $\Omega[x]$ ha sido descrito en el capítulo 15, construcciones alternativas pueden ser posibles. Así en el caso especial $\Omega = \mathbf{M}(L)$ nosotros podemos definir

$$(***) \qquad \mathbf{M}(L)[x] = \mathbf{M}(L(x))$$

En vista de la propiedad universal discutida anteriormente. Esto establece $*$ y por lo tanto el teorema.

■

Corolario *La categoría de C-monoides es isomorfa a la categoría de λ-cálculos extendidos.*

Demostración

Extendemos $\mathbf{L}$ y $\mathbf{M}$ a funtores inversos uno del otro.

Si $f : \Omega \to \Omega'$ es un C-homomorfismo, la traslación $\mathbf{L}(f) : \mathbf{L}(\Omega) \to \mathbf{L}(\Omega')$ esta definido como sigue: Para cualquier polinomio $\phi(X)$ donde $X = \{x_1, ..., x_n\}$,nosotros damos $bfL(f)(\phi(X)) = f_X(\phi(X))$, donde $F_X : \Omega[X] \to \Omega'[X]$ es el único C-homomorfismo f extendido tal que $f_X(x_i) = x_i$ para $i = 1, ..., n$.

Si $t : L \to L'$ es una traslación, el C-homomorfismo $\mathbf{M}(t) : \mathbf{M}(L) \to \mathbf{M}(L')$ esta definida asi para cualquier $a \in \mathbf{M}(L)$, $\mathbf{M}(t)(a) \equiv t(a)$.

En particular nosotros tenemos (tomando $n = 1$)

$$(\mathbf{ML})(f)(a) = \mathbf{M}(\mathbf{L}(f))(a) = \mathbf{L}(f)(a) = f(a),$$

$$(\mathbf{LM})(t)(\phi(x)) = \mathbf{L}(\mathbf{M}(t))(\phi(x)) = \mathbf{M}(t)_x(\phi(x)) = t(\phi(x))$$

La última ecuación requiere alguna explicación. Fácilmente se ve que $\mathbf{M}(t)_x = \mathbf{M}(t_x)$, donde t_x es la restrcción de t a $L(x)$ (considerando $L(x)$ como un subconjunto de L, por lo tanto,

$$\mathbf{M}(t)_x)(\phi(x)) = \mathbf{M}(t_x)(\phi(x)) = t_x(\phi(x))$$

Asi **ML** y **LM** son ambos funtores identidad y no justamente isomorfos a los funtores identidad. Esto muestra justamente que las dos categorías son isomorfas pero no equivalentes.

■

BIBLIOGRAFIA

(1)*Lambek, J., Scott P.J.*, **Introduction to higher order categorical logic**, Cambridge University Press, Great Britain, 1986, pp. 293.

(2) *Goldblatt, R.* **Topoi, the categorial analysis of logic**, North-Holland Publishing company, v. 98, Netherlands, 1979, pp. 486.

(3) *Saunders Maclane*, **Categories for the Working Mathematician**, Springer-Verlag New York, Unites States, 1971, pp. 262.

(4) *J. Freyd, P., Scedrov A.*, **Categories, Alegories**, North-Holland mathematical library, v. 39, Netherlands,1989, pp. 296.