

1A  
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EL TEOREMA DE POINCARÉ PARA  
POLIGONOS FUNDAMENTALES"

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
M A T E M A T I C O  
P R E S E N T A I  
BELEM IZETA GUTIERREZ



MEXICO, D. F.

ABRIL DE 1994

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CIUDAD UNIVERSITARIA



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
División de Estudios  
Profesionales  
Exp. Núm. 55

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE  
Jefe de la División de Estudios Profesionales  
Universidad Nacional Autónoma de México.  
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo  
revisado el trabajo de tesis que realizo o la pasante BELEN IZETA

CUTIERREZ

con número de cuenta 8852923-1 con el título:

" EL TEOREMA DE POINCARÉ PARA POLÍGONOS FUNDAMENTALES "

Consideramos que reúne n los méritos necesarios para que pueda conti-  
nuar el trámite de su Examen Profesional para obtener el título de -  
LIC. EN MATEMÁTICAS .

GRADO NOMBRE Y APELLIDOS COMPLETOS

FIRMA

DOCTOR ANTONIO LASCURAIN ORIVE  
Director de Tesis

*Antonio Lascurain Orive*

MAESTRA PILAR MARTINEZ TELLEZ

*Pilar Martínez Tellez*

MAESTRO FRANCISCO STRUCK CHAVEZ

*Francisco Struck Chavez*

DOCTORA SILVIA DE NEVET URRUTIA  
Suplente

*Silvia de Nevat Urrutia*

DOCTOR CUILLEMO CENEA LOPEZ  
Suplente

*C. Cenea Lopez*



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

México D. F., 25 de Enero de 1994.

A quien corresponda:

Por este conducto le informo, que la Alumna:  
Belem Izeta Gutiérrez, con No. de Cuenta 8852923-1, a  
concluido su tesis profesional con Título:  
" EL TEOREMA DE POINCARÉ PARA POLÍGONOS  
FUNDAMENTALES "  
razón por la cual hago de su conocimiento tal hecho --  
para dar continuidad a los trámites pertinentes.

Sin más por el momento agradezco su atención.

Atentamente

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Antonio Lascorain Orive".

Dr. Antonio Lascorain Orive.

**A mi abuelita.**

**SRA. ANA MARIA MUÑOZ FLORES.**

**Al recuerdo de una persona que supo dejar huella.**

**A mis padres.**

**LIC. BENITO IZETA VILLEGAS.  
PROFA. CELIA GUTIERREZ MUÑOZ.**

**Por que en cada momento fueron mi apoyo y ejemplo para  
continuar con la realización de mis sueños.**

**A mis hermanos.**

**ANA CELIA, ROSA FRANCISCA, IMELDA, BENITO,  
RICARDO Y PATRICIA.**

**Con afecto, por cada momento que hemos vivido.**

**A mis sobrinos.**

**ANA CRISTINA, JESUS JOSE, ANA CELIA MARGARITA Y  
BENITO SANTIAGO.**

**Pequeñas estrellas que iluminan el camino.**

**A LUIS ALFREDO SOLIS HERNANDEZ.**

**Amigo, compañero y apoyo incondicional.**

**A la FACULTAD DE CIENCIA de la Universidad Nacional Autónoma de México.**

**Por haberme proporcionado la oportunidad de conocer una  
parte del infinito campo de las matemáticas.**

**Quiero manifestar todo mi reconocimiento y profundo agradecimiento al DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE por su constante apoyo y brillante dirección que se sirvió brindarme durante mi formación profesional.**

# EL TEOREMA DE POINCARÉ

## INDICE

INTRODUCCION	.1
PRELIMINARES	.2
TEOREMA DE POINCARÉ	.18
EJEMPLOS	.51
BIBLIOGRAFÍA	.59

## INTRODUCCION

El trabajo de esta tesis consiste en exhibir con detalle una demostración del Teorema de Poincaré para polígonos fundamentales. Este Teorema nos dice que dado un polígono hiperbólico en  $\mathbb{H}^2$  e isometrías que aparean sus lados, bajo ciertas condiciones, representa un polígono fundamental del grupo generado por los apareamientos.

El Teorema es de gran utilidad para detectar si un grupo fuchsiano es discreto o no ( ver B. por ejemplo las secciones 10.1, 10.3, 10.4 y 10.6. ) El Teorema es también importante para el estudio de estos grupos.

La demostración original de Poincaré parecer tener algunos huecos, Masckit ( ver M ) exhibió una demostración completa de este Teorema, posteriormente Beardon ( ver B ) dió otra prueba válida, en la cual se basa este trabajo.

El Teorema tiene una generalización a 3-dimensiones es decir a poliedros y grupos klenianos ( ver M1 ), la cual es igual de importante e interesante sin embargo en este trabajo no se discute este caso.

## PRELIMINARES

Trabajaremos con transformaciones de Möbius que preservan el disco unitario  $\Delta$  o aquellas que preservan  $\mathbb{H}^2 = \{ z \mid \text{Im } z > 0 \}$ .

Se denota por  $SL(2, \mathbb{R})$  al conjunto de matrices de la forma  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , donde  $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ . Al grupo de transformaciones de Möbius definidas por éstas matrices se le denota por  $PSL(2, \mathbb{R})$ , éstas transformaciones son las que preservan  $\mathbb{H}^2$  (ver L. pg.8).

$SL(2, \mathbb{R})$  es un subgrupo de  $SL(2, \mathbb{C})$ , que es el conjunto de matrices de la forma  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc = 1$ ; sea  $W \subset SL(2, \mathbb{C})$  el conjunto de matrices de la forma  $\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$ , donde  $\bar{a}$  y  $\bar{b}$  son los conjugados de  $a$  y  $b$ , respectivamente, y  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , si identificamos matrices opuestas en  $W$ , el grupo cociente, que denotamos por  $M(\Delta)$ , consiste de las transformaciones de Möbius que preservan  $\Delta$  (ver L. pg.9).  $M(\Delta)$  y  $PSL(2, \mathbb{R})$  son conjugados en  $PSL(2, \mathbb{C})$  (el grupo de todas las transformaciones de Möbius). Una transformación conjugante es  $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$ .

La Topología con la que se trabajará será la topología relativa, dado un conjunto  $S$ , denotaremos por  $\bar{S}$  la cerradura de  $S$  relativa a  $\Delta$  o  $\mathbb{H}^2$ , según sea el caso; así como por  $\partial\Delta S$  o  $\partial\mathbb{H}^2 S$  la frontera de  $S$  relativa a  $\Delta$  o  $\mathbb{H}^2$ , respectivamente.

**Definición 1.1** Una función  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  diferenciable, es conforme en  $x$ , si  $D_f(x)$  es un múltiplo escalar positivo  $\mu(x)$  de una matriz ortogonal, a  $\mu(x)$  se le llama el factor de conformalidad.

**Proposición. 1.2.** Si  $f : D \rightarrow E$  es una biyección conforme entre los dominios  $D$  y  $E$  de  $\mathbb{R}^n$ , se tiene que  $\mu(x)$ , el factor de conformalidad definido anteriormente, es:

$$\mu(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}$$

**Demostración.**

Como  $f$  es diferenciable, se tiene

$$f(y) - f(x) = D_f(x)(y - x) + |y - x| c(y)$$

donde  $c(y) \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow x$ .

Escribiendo  $A = D_f(x)$ , como  $f$  es conforme se tiene que  $A$  es un múltiplo escalar de una matriz ortogonal y se tiene:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = \left| \frac{A(y - x)}{|y - x|} + c(y) \right| \leq \frac{|A(y - x)|}{|y - x|} + |c(y)|$$

y

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = \left| \frac{A(y - x)}{|y - x|} - (-c(y)) \right| \geq \frac{|A(y - x)|}{|y - x|} - |c(y)|$$

por lo que al tomar el límite de cuando  $y \rightarrow x$ , en ambas desigualdades se obtiene

$$\mu(x) \leq \lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq \mu(x)$$

■

Si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{R}^n$  y  $\lambda$  es una densidad (una función continua y positiva), definimos en  $D$  la siguiente distancia

$$\rho(x, y) = \inf \int \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas lisas  $\gamma$  que unen  $x$  con  $y$  en  $D$ .

Esta distancia  $\rho$  define una métrica, es fácil ver que  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  y que  $\rho(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in D$  (ver B. pg.7). Para probar la desigualdad del triángulo tomaremos  $\gamma_1, \gamma_2$  curvas lisas que unen  $x$  con  $z$  y  $z$  con  $y$ , respectivamente, entonces  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$  es una curva que une  $x$  con  $y$ , y se tiene

$$\rho(x, y) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \quad (1)$$

donde  $l(\gamma_1)$  es la longitud de la curva  $\gamma_1$  con respecto a la densidad  $\lambda$ . Si  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  no se cumpliera se podría encontrar curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tales que (1) no se satisficiera, lo cual contradice la definición de  $\rho(x, y)$ .

Se define la métrica hiperbólica en  $\mathbb{H}^2$  y en  $\Delta$ , mediante las densidades

$$\lambda(z) = \frac{1}{\operatorname{Im} z} \quad \text{y} \quad \sigma(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$$

Ahora la transformación  $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$  es una biyección conforme de  $\mathbb{H}^2$  en  $\Delta$ :

Lema 1.3 Sean  $f$ ,  $\lambda$  y  $\sigma$  como arriba, entonces

$$\sigma(f(z)) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}$$

donde  $\mu(z)$  es el factor de conformalidad de  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ .

**Demostración.**

Obsérvese primero que las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que el  $\det D_f(z) = |f'(z)|^2$ , por lo cual  $\mu(z) = |f'(z)|$ .

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \mu(z)\sigma(f(z)) &= \frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \\ &= \frac{2 \left| \frac{2i}{(z+i)^2} \right|}{1 - \left| \frac{(z-i)}{(z+i)} \right|^2} = \frac{4 \left| \frac{1}{(z+i)^2} \right|}{1 - \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2}} = \frac{4}{\frac{|z+i|^2}{|z+i|^2} - \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2}} \\ &= \frac{4}{(z+i)(\overline{z+i}) - (z-i)(\overline{z-i})} = \frac{4}{|z|^2 + 2\operatorname{Im}z \cdot 1 - |z|^2 - 2\operatorname{Im}z \cdot (-1)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}z} = \lambda(z) \end{aligned}$$

**Teorema 1.4**  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$  es una isometría de  $\mathbb{H}^2$  en  $\Delta$ .

**Demostración.**

Sea  $x, y \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{H}^2$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  lisa que une a  $x$  con  $y$ , primero demostraremos que  $I_\lambda(\gamma) = I_\sigma(f \circ \gamma)$ .

Usando el lema 1.3 se tiene

$$\begin{aligned} I_\sigma(f \circ \gamma) &= \int_a^b \sigma(f(\gamma(t))) | (f \circ \gamma)'(t) | dt \\ &= \int_a^b \frac{\lambda(\gamma(t))}{\mu(\gamma(t))} | D_f(\gamma(t))(\gamma'(t)) | dt \\ &= \int_a^b \frac{\lambda(\gamma(t))}{\mu(\gamma(t))} \mu(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = I_\lambda(\gamma) \end{aligned}$$

Como toda curva  $\phi$  lisa en  $\Delta$  que une  $f(x)$  con  $f(y)$  es de la forma  $f \circ \gamma$ , donde  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  es lisa con  $\gamma(a) = x$  y  $\gamma(b) = y$ , se sigue que  $\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y))$ .

■

Usaremos como modelos del plano hiperbólico a  $\mathbb{H}^2$  o  $\Delta$ , y se define la distancia hiperbólica, mediante las densidades  $\lambda$  y  $\sigma$ , definidas anteriormente, dichas distancias la denotaremos por  $\rho$ . Las líneas hiperbólicas en  $\mathbb{H}^2$  son semicírculos o semirectas ortogonales al eje real, análogamente, se definen las líneas hiperbólicas en  $\Delta$  como semicírculos ortogonales a

la  $\partial\Delta$  o diámetros. Ambas definiciones son equivalentes ya que la isometría  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$  es conforme, éstas curvas minimizan la distancia entre dos puntos cualesquiera y se denominan como las geodésicas con respecto al espacio métrico  $\mathbb{H}^2$  o  $\Delta$ , respectivamente (ver L. pg.24 ).

**Proposición. 1.5** Con la métrica hiperbólica  $\Delta$  y  $\mathbb{H}^2$  son espacios métricos completos.

**Demostración.**

Como los círculos hiperbólicos en  $\mathbb{H}^2$  son también euclidianos ( ver L. pg. 27 ), si tomamos una sucesión de Cauchy  $\{ z_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ , dada  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \in \mathbb{N}$   $n, m > N$ , se tiene que  $\rho(z_n, z_m) < \epsilon$ , sea  $V$  el disco hiperbólico con centro  $z_N$  y radio  $\epsilon$ , tenemos que  $\bar{V}$  es compacto con la métrica hiperbólica, puesto que ésta define la misma topología que la métrica euclidiana, de hecho  $\bar{V}$  es un disco euclidiano ( ver L. pg.23 ). Finalmente por el Teorema de Weierstrass existe un punto de acumulación  $\alpha \in \bar{V}$ , lo que implica que existe una subsucesión  $\{ z_k \}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge a  $\alpha$ , donde  $\forall k \in \mathbb{N}$   $z_k = z_{n_k}$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ , por lo cual toda la sucesión  $\{ z_n \}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\alpha$ .

Como  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$  es una isometría y  $\mathbb{H}^2$  es completo concluimos que  $\Delta$  también es completo.

■

Ahora  $\Delta$  o  $\mathbb{H}^2$  son espacios métricos no acotados, para ver esto tomaremos  $z \in \mathbb{H}^2$ , tal que  $z = pi$ , con  $p \in \mathbb{R}$ , entonces  $\rho(z, i) = |\log p|$ , cuando  $p$  tiende a cero o a infinito,  $|\log p|$  tiende a infinito en ambos casos, en el caso de  $\Delta$  obsérvese que  $\rho(i, pi) = \rho(0, f(pi))$ . donde  $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$ .

Sea  $G$  un grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^2$  ( o de  $\Delta$  ), obsérvese que los elementos de  $G$  no necesariamente preservan la orientación. Sea  $z, z' \in \mathbb{H}^2$  ( o  $\Delta$  ), se dice que  $z$  y  $z'$  son  $G$ -equivalentes si existe una  $g \in G$  tal que  $g(z) = z'$ , denominaremos al conjunto de todos los elementos de  $\mathbb{H}^2$  ( o  $\Delta$  ) que son  $G$ -equivalentes como la órbita de  $z$ , denotada por  $G(z)$ .

**Definición. 1.6** Sea  $\alpha \in \bar{\mathbb{H}^2}$  ( o  $\bar{\Delta}$  ) un punto, si existe una sucesión  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $g_n \in G$  distintas y  $x \in \mathbb{H}^2$  tal que  $\{g_n(x)\} \rightarrow \alpha$ , entonces se dice que  $\alpha$  es un punto límite. La cerradura es con respecto a  $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$ , si  $\beta \in \hat{C}$  no es un punto límite se dice que  $\beta$  es un punto ordinario. Se denotará por  $\Lambda$  al conjunto de los puntos límites y por  $\mathcal{O}$  al conjunto de todos los puntos ordinarios.

**Definición. 1.7** Sea  $G < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  ( o  $M(\Delta)$  ) se dice que  $G$  es discontinuo si  $\mathcal{O} \neq \emptyset$ .

Se define una métrica en  $SL(2, \mathbb{C})$  como:

$$|x - y|^2 = (a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 + (c - \gamma)^2 + (d - \delta)^2$$

donde  $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  y  $y = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ,  $x, y \in SL(2, \mathbb{C})$ .

**Definición. 1.8.** Sea  $G < SL(2, \mathbb{R})$  ( ó  $G < W$  ) se dice que  $G$  es discreto, si no contiene alguna sucesión convergente en  $SL(2, \mathbb{C})$  de matrices distintas.

Sea  $G < PSL(2, \mathbb{R})$  ( ó  $G < M(\Delta)$  ), se dice que  $G$  es discreto si  $G$  es la imagen de un subgrupo discreto de matrices en  $SL(2, \mathbb{C})$  bajo la proyección canónica. Resulta que  $G$  es discreto si y sólo si  $G$  es discontinuo ( ver L. pg.13).

**Definición. 1.9** Sea  $G < PSL(2, \mathbb{R})$  ( ó  $G < M(\Delta)$  ),  $G$  discontinuo, se dice que  $D \subset \mathbb{H}^2$  ( ó  $D \subset \Delta$  ) es un dominio fundamental para  $G$  si:

- 1-  $D$  es un dominio, es decir, un conjunto abierto, conexo y no vacío.
- 2- Cualesquiera dos puntos en  $D$  no son  $G$ -equivalentes.
- 3- Dado  $z \in \mathbb{H}^2$  ( ó  $z \in \Delta$  ),  $z$  es  $G$ -equivalente a algún punto de  $\bar{D}$ .

Si la frontera del dominio fundamental  $D$  es lo suficientemente bonita, podemos pegar piezas equivalentes de la frontera, para obtener una representación de  $\Delta/G$ , el espacio de clases de equivalencia módulo  $G$ . En el caso de que  $\partial D$  sea un conjunto de  $H$ -líneas, llamaremos a  $D$  un polígono, a continuación definimos esto formalmente.

Sea  $C$  un  $H$ -segmento de línea. Un conjunto cerrado conexo  $C'$  de  $C$  es degenerado si  $C' = \emptyset$ , o  $C'$  consta de sólo un punto.

Un dominio  $D$  se llama polígono si  $\partial D$  es la unión a lo sumo numerable de lados  $s_i$ , ( es decir cada  $s_i$  es un subconjunto cerrado conexo no degenerado de alguna  $H$ -línea ). Se asume también que  $\forall$  conjunto compacto  $K$ ,  $K$  sólo intersecta un número finito de imágenes de  $D$  bajo  $G$ ; además si  $s_i \cap s_j \neq \emptyset$  y  $i \neq j$  entonces  $s_i \cap s_j$  es un punto  $z$  que llamaremos vértice, y  $z$  es un punto extremo tanto de  $s_i$  como de  $s_j$ . Finalmente, si cualquier lado  $s_i$  tiene un punto extremo finito  $z$ , entonces existe exactamente otro lado  $s_j$ , donde  $z$  es también un punto extremo de  $s_j$ .

Si  $D$  es un dominio fundamental para  $G$ , y  $D$  es también un polígono entonces  $D$  es llamado polígono fundamental de  $G$ .

**Definición. 1.10** Sean  $w_0, w_1 \in H^2$  ( o  $\Delta$  ), definimos el bisector perpendicular a  $w_0$  y  $w_1$  como la geodésica ortogonal al segmento de geodésica  $[w_0, w_1]$  en su punto medio. El bisector perpendicular a  $[w_0, w_1]$  es el

conjunto de puntos equidistantes hiperbólicamente de  $w_0$  y  $w_1$  ( ver L. pg.26 ).

Sea  $\Gamma = \{ \text{Id}, V_1, V_2, \dots \}$  un subgrupo de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  discreto,  $w_0 \in \mathbb{H}^2$  no fijo por  $\Gamma$ -Id y sea  $w_1 = V_1(w_0)$ . Denotaremos por  $\lambda_1$  el bisector perpendicular a  $w_0$  y  $w_1$ . Obsérvese que  $\lambda_1$  divide en dos componentes conexas a  $\mathbb{H}^2$ : una que contienen a  $w_0$  y la otra a  $w_1$ , la primera la denotaremos por  $\mathbb{L}_1$  y la otra por  $\mathbb{L}'_1$ .

**Definición. 1.11** Se define el polígono de Dirichlet para  $\Gamma$  con centro en  $w_0$  como  $N = \bigcap \mathbb{L}_1$ . Este polígono es un dominio fundamental para  $\Gamma$  ( ver L. Pg.29 ) y por lo tanto todo grupo discreto tiene un dominio fundamental.  $\Gamma$  es numerable ( ver L. pg 13 ), obsérvese que  $\forall z \in \mathbb{H}$  la distancia de  $z$  a  $w_0$  es menor o igual a la distancia de  $z$  a  $w_1$ .

También se puede probar que existen transformaciones en  $\mathbb{G}$  que aparean los lados de  $\mathbb{D}$  (ver L. pg.37 ), además estos apareamientos generan  $\mathbb{G}$  ( ver L. pg. 47 ).

**Proposición. 1.12** Sea  $\mathbb{G}$  un grupo,  $\mathbb{G}$  es discontinuo si y sólo si existe un conjunto abierto no vacío  $V$ , tal que  $\forall z, z' \in V, z \neq z'$  no existe  $g \in \mathbb{G}$ -Id tal que  $g(z) = z'$ .

### Demostración.

\*)

Suponemos que  $G$  es discontinuo, por lo que  $G$  es discreto. Sea  $N$  un polígono fundamental de Dirichlet para  $G$ , se sigue por definición que los puntos de  $N$  no son  $G$ -equivalente entre sí.

\*)

Supongamos que  $G$  no es discontinuo es decir  $0 \neq \emptyset$ , lo cual implica que todos los puntos son límite. Ahora sea  $V$  el abierto del enunciado y  $\alpha \in V$ , entonces  $\alpha \in A$  y existe  $z$  tal que  $G(z)$  se acumula en  $\alpha$ , lo cual es una contradicción.

■

Durante el planteamiento y demostración del Teorema de Poincaré se hará mención de algunos conceptos de Topología que desarrollaremos a continuación.

**Definición. 1.13** Sea  $X$  un espacio topológico,  $X$  es conexo si y sólo si no existen  $A$  y  $B \in X$  no vacíos disjuntos y abiertos tales que

- i)  $X = A \cup B$
- ii)  $A \cap B = \emptyset$

**Lema 1.14** Sean  $U$  y  $V$  conexos, si  $A = U \cup V$  y  $U \cap V \neq \emptyset$  entonces  $A$  es conexo .

**Demostración.**

Supongamos que  $A$  no es conexo, entonces existen  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$  tal que  $A_1 \cup A_2 = A$  y  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ .

Sea  $p \in U \cap V$  dado que  $A = U \cup V$ ,  $p \in A$   
 $\rightarrow p \in A_1$  ó  $p \in A_2$

Si  $p \in A_1$  sea  $q \in A_2$ , si  $q \in U$  tenemos una separación no trivial  $(U \cap A_1)$  y  $(U \cap A_2)$  de  $U$ , análogamente si  $q \in V$ , en ambos casos se llega a una contradicción, pues  $U$  y  $V$  son conexos.

$\therefore A$  es conexo.

■

**Definición. 1.15** Sean  $x, y \in X$ ,  $x, y$  están conectados si existe un conexo en  $X$  que los contenga.

**Lema 1.16** Sea  $X$  un espacio topológico, si  $\forall x, y \in X$ ,  $x$  y  $y$  están conectados, entonces  $X$  es conexo.

**Demostración.**

Supongamos que  $X$  no es conexo, entonces existe una separación no trivial  $U, V$  de  $X$ .

Sean  $x \in U$  y  $y \in V$ , como  $X = U \cup V$  tenemos que  $x$  y  $y$  están conectados, es decir que existe un conexo  $C \subset X$  tal que  $x, y \in C$ , entonces  $(U \cap C)$  y  $(V \cap C)$  es una separación no trivial de  $C$ , lo que contradice que  $C$  sea conexo.

$\therefore X$  es conexo

■

Como consecuencia directa de los Lemas 1.14 y 1.16 se tiene la siguiente proposición.

**Proposición. 1.17** Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $X$  es la unión de conexos que comparten un punto fijo en común, entonces  $X$  es conexo.

A continuación mencionamos la definición del número de Lebesgue.

**Definición. 1.18** Supongamos que  $G = \{G_\alpha\}$  es una cubierta abierta de un subconjunto compacto  $K$  de  $\mathbb{R}^p$ . Existe un número  $\lambda$  estrictamente positivo tal que  $\forall x, y \in K$  tal que  $\|x - y\| < \lambda$ , entonces hay un conjunto en  $G$  que contiene tanto a  $x$  como a  $y$ , a  $\lambda$  se le denomina el número de Lebesgue de  $G$ .

Utilizaremos también el Teorema de Monodromía de la topología algebraica.

**Definición. 1.19** Sea  $X$  un espacio topológico y  $\delta, \tau : I \rightarrow X$ , donde  $I = [0, 1]$ , tales que  $\delta(0) = \tau(0) = x_0$  y  $\delta(1) = \tau(1) = x_1$ , se dice que  $\delta$  y  $\tau$  son homotópicos relativos  $\{0, 1\}$ , lo que se denotará por  $\delta \simeq \tau \text{ rel } \{0, 1\}$ , si existe una transformación  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que:

- i)  $F(s, 0) = \delta(s) \quad \forall s \in I$
- ii)  $F(s, 1) = \tau(s) \quad \forall s \in I$
- iii)  $F(0, t) = x_0 \quad \forall t \in I$
- iv)  $F(1, t) = x_1 \quad \forall t \in I$

a  $F$  se le llama la homotopía de  $\delta$  a  $\tau$  relativa a los puntos  $\{0, 1\}$ :

$$F : \delta \approx \tau \text{ rel}(0,1)$$

En particular si  $\delta$  es un lazo con base  $x$  ( es decir  $x_0 = x_1$  ) y  $\tau$  es el lazo constante  $\tau(s) = x_0 \forall s \in I$ , si  $\delta \approx \tau \text{ rel}(0,1)$  diremos que  $\delta$  se contrae a un punto o es homotópicamente trivial.

La relación  $\approx$  es una relación de equivalencia ( ver G. pg. 6 ), la clase de equivalencia de una trayectoria  $\delta$  de  $x_0$  a  $x_1$  se denominará como la clase de homotopía  $[\delta]$  .

Si  $\delta$  es una trayectoria que une  $x_0$  con  $x_1$  y  $\tau$  otra trayectoria que une  $x_1$  con  $x_2$ , definimos la trayectoria  $\delta\tau$  de la siguiente manera:

$$\delta\tau (t) = \begin{cases} \delta(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

de esta forma se puede definir la multiplicación de trayectorias, como se da en la siguiente proposición.

**Proposición 1.20** Si  $\delta \approx \delta' \text{ rel}(0,1)$  y  $\tau \approx \tau' \text{ rel}(0,1)$  entonces  $\sigma\tau \approx \delta'\tau' \text{ rel}(0,1)$ .  
(ver G. pg. 6 ).

**Teorema 1.21** Sea  $\pi_1(X, x_0)$  el conjunto de clases de equivalencia de lazos de  $X$  en  $x_0$ . Si la multiplicación en  $\pi_1(X, x_0)$  es definida como en la Proposición 1.19, entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo, cuyo elemento neutro es la clase del lazo constante  $x_0$  y el inverso de la clase  $[\delta]$  es la clase del lazo  $\delta^{-1}$  definida por

$$\delta^{-1}(t) = \delta(1 - t)$$

(ver G. pg. 7).

El grupo  $\pi_1(X, x_0)$  se llama grupo fundamental de  $X$ , basado en  $x_0$ .

**Definición. 1.22** Sea  $X$  un espacio topológico, si  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo fundamental trivial, es decir si todo lazo en  $X$  con base en  $x_0$  es contraíble al punto  $x_0$ , entonces  $X$  se llama simplemente conexo.

**Definición. 1.23** Sean  $E$  y  $X$  espacios topológicos y  $p$  continua,  $p$  es una proyección cubriente si  $\forall x \in X$  existe  $U$  vecindad de  $x$  tal que:

- i)  $p^{-1}(U) = \cup V_i$  ( $V_i$  son abiertos en  $E$ ).
- ii)  $p|_{V_i} \longrightarrow U$  es un homeomorfismo.

**Definición. 1.24** Sea  $p : E \rightarrow X$  una proyección cubriente y  $f : Y \rightarrow X$  una función, donde  $Y$  es un espacio topológico. Si existe  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  tal que  $p\tilde{f} = f$ , a  $\tilde{f}$  se le llama un levantamiento de  $f$ . Si  $f(y_0) = x_0$  y  $\tilde{f}(y_0) = e_0$  se

dice que el levantamiento está basado en  $e_0$ .

Consideremos  $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$  una proyección cubriente, si  $\tau : [a, b] \rightarrow X$  es una función continua tal que  $\tau(a) = x_0$ , existe y es único  $\bar{\tau}$  el levantamiento de  $\tau$  a  $E$  basado en  $e_0$ , es decir  $\bar{\tau}(a) = e_0$  y  $p\bar{\tau} = \tau$  ( ver G. pg 17, 18 ).

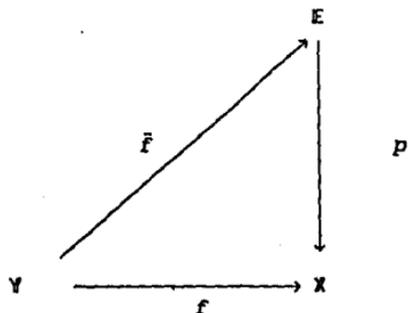


FIGURA 1.1

**Teorema 1.25 ( Teorema de Monodromía )**

Sea  $p : ( E, e_0 ) \rightarrow ( X, x_0 )$  una proyección cubriente y  $\gamma, \tau : I \rightarrow X$  transformaciones donde  $I = [ 0, 1 ]$  intervalo, si  $\gamma \simeq \tau \text{ rel}(0,1)$  entonces  $\bar{\gamma} \simeq \bar{\tau} \text{ rel}(0,1)$ , en particular  $\bar{\gamma}(a) = \bar{\tau}(a)$ .  
( ver G. pg. 18, 19 ).

## TEOREMA DE POINCARÉ

Dado  $G$  un grupo discreto actuando en  $\Delta$  ( o  $H^2$  ) se puede construir un polígono fundamental  $P$  para  $G$ . En esta tesis estudiaremos el proceso inverso, se toma  $P$  un polígono en  $\Delta$  ( o  $H^2$  ), y transformaciones de Möbius que aparean los lados de  $P$ , probaremos que bajo ciertas condiciones si  $G$  es el grupo generado por dichos apareamientos  $G$  es discreto y  $P$  es un dominio fundamental de  $G$ , demostrando así el Teorema de Poincaré.

Primero usaremos una terminología más general ya que el Teorema de Poincaré se aplica en otras geometrías y también en otras dimensiones, sin embargo en esta tesis sólo consideraremos el caso del plano hiperbólico.

**Definición. 2.1** Sean  $X$  un conjunto no vacío y  $P$  un subconjunto no vacío de  $X$ , se dice que  $P$  es un polígono abstracto en  $X$  si se le puede asociar a  $P$  una familia de conjuntos no vacíos llamados los lados de  $P$ , cuya unión se denotará por  $\partial P$  tal que  $P \cap \partial P = \emptyset$  y  $P \cup \partial P = \tilde{P}$ ,  $\tilde{P}$  es la cerradura en  $H^2$  o  $\Delta$ ; en el caso del plano hiperbólico  $H^2$  o  $\Delta$  un polígono es un conjunto de la forma  $P = \bigcap H_i$ , donde los  $H_i$  son semiplanos y  $P \neq \emptyset$ .

**Definición. 2.2** Si  $g: X \rightarrow X$  es una biyección tal que  $g(P) \cap P = \emptyset$  y  $g(s) = s'$ , donde  $s$  y  $s'$  son lados

de  $P$ , a  $g$  se le llama apareamiento.

Lo que se hará ahora es construir un conjunto  $X^*$  partiendo de la acción de  $G$  en  $P$  y finalmente identificar  $X^*$  con el conjunto original  $X$  donde se encuentra  $P$  ( y donde también actúa  $G$  ), para lo cual supondremos los siguientes axiomas:

( A. 1 )  $P$  es un polígono abstracto en  $X$ .

( A. 2 ) Hay una función de  $\Phi$  de  $X \rightarrow X$  que cumple la siguiente condición:

$\forall$   $s$  lado de  $P$  existe un único lado  $s'$  de  $P$  ( posiblemente  $s = s'$  ) y un único apareamiento  $g_s(s) \in \Phi$  tal que  $g_s(s) = s'$ , además el apareamiento asociado a  $s'$  es  $g_s^{-1}$ .

Sea  $G$  el grupo generado por los apareamientos. Usaremos también el conjunto  $G \times \tilde{P}$ , es útil pensar a  $G \times \tilde{P}$  como una colección de copias disjuntas de  $\tilde{P}$  numerada por  $G$ :

$$( g_1, \tilde{P} ) = \{ ( g_1, x ) \mid x \in \tilde{P} \}$$

donde  $g_1 \in G$  ( como piezas de un "romprecabezas" separadas unas de otras ).

El siguiente paso es unir estas copias de  $\tilde{P}$  en  $G \times \tilde{P}$ , para ello definiremos una relación de equivalencia en  $G \times \tilde{P}$ . Primero obsérvese que si  $g_s(s) = s'$ , donde  $s, s'$  son lados de  $\tilde{P}$ , entonces  $( \text{Id}, s' )$  debe identificarse con  $( g_s, s )$

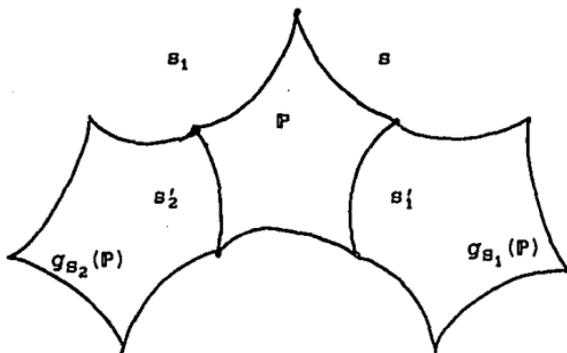


FIGURA 2.1

Si  $s, s'$  son lados de  $\tilde{P}$  y  $h \in G$ , tal que  $g_B(s) = s'$  y  $h(s')$  es también  $h(g_B(s))$ , implica que  $(hg_B, s)$  en  $(hg_B, \tilde{P})$  debe identificarse con  $(h, g_B(s))$  en  $(h, \tilde{P})$ .

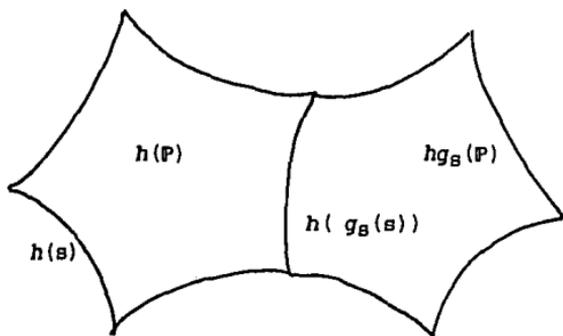


FIGURA 2.2

Esto sugiere la siguiente relación  $\sim$  en  $G \times \mathbb{P}$ :

**Definición 2.3**  $(g, x) \sim (h, y)$  si

- i)  $g \cdot h$  y  $x = y$  o
- ii)  $x \in s$ ,  $y = g_B(x)$  y  $g = hg_B$ .

Por i) tenemos que la relación  $\sim$  es reflexiva, también es simétrica:

Si  $(g, x) \sim (h, y)$  y  $x \in s$  tenemos que  $y \in s'$  y  $y = g_B(x)$ , lo que implica que  $x = g_B^{-1}(y) = g_B'(y)$  y como  $g = hg_B$  entonces  $h = gg_B'$ , de donde  $(h, y) \sim (g, g_B'(y))$ , es decir,  $(h, y) \sim (g, x)$ .

Sin embargo  $\sim$  no es transitiva:

Por ejemplo, sea  $g_B$  una rotación de orden 4 en  $\Delta$  y  $\mathbb{P}$  el sector superior derecho de  $\Delta$ ,  $g_B$  fija el 0 y  $g_B(s) = s'$ , donde  $s = \{z \in \Delta \mid \text{Im } z \geq 0, \text{Re } z = 0\}$  y  $s' = [0, 1]$ , se tiene  $(\text{Id}, 0) \sim (\text{Id}, g_B(0)) \sim (g_B, 0)$ .

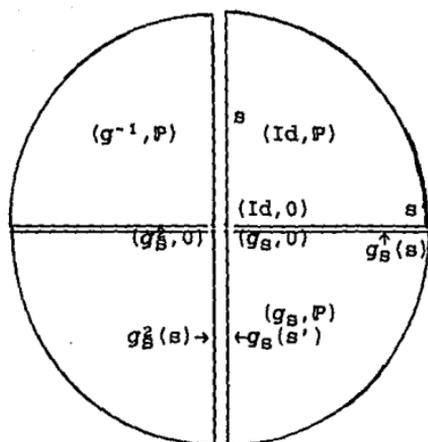


FIGURA 2.3

Aplicando  $g_B$  a  $g_B(P)$  tenemos  $g_B(s') = g_B(g_B(s))$ , donde  $g_B(s') = \{ z \in \Delta \mid \text{Im } z \leq 0, \text{Re } z = 0 \}$ , lo que implica que  $(g_B, 0) = (g_B, g_B(0)) \sim (g_B^2, 0)$ , pero  $(\text{Id}, 0)$  no se relaciona con  $(g_B^2, 0)$ , ya que si  $(\text{Id}, 0) \sim (g_B^2, 0)$  implica que existe  $g_B$  apareamiento tal que  $g_B(0) = 0$  y  $\text{Id} = g_B^2 g_B$ , es decir que  $g_B^2 = (g_B)^{-1}$  lo que es una contradicción, ya que  $g_B^2$  no aparea lados.

El ejemplo anterior nos hace ver que se debe identificar  $(\text{Id}, 0)$  con  $(g_B^2, 0)$ , por lo cual se define la siguiente relación \*.

**Definición 2.4**  $(g, x) \sim (h, y)$  si existe  $(g_1, x_1)$ , donde  $g_1$  es un apareamiento y  $x_1 \in \mathbb{P}$  con  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tal que

$$(g, x) \sim (g_1, x_1) \sim (g_2, x_2) \sim \dots \sim (g_n, x_n) \sim (h, y).$$

Claramente esta relación es de equivalencia. Las clases de equivalencia definidas por la relación  $\sim$  se denotarán por  $\langle g, x \rangle$  y el conjunto de clases de equivalencia por  $X^*$ .

**Proposición 2.5** Si  $\langle g, x \rangle \sim \langle h, y \rangle$  entonces

$$g(x) = h(y) \quad \dots \text{ 2.5.1.}$$

$$\langle fg, x \rangle \sim \langle fh, y \rangle \quad \dots \text{ 2.5.2.}$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{P} \text{ entonces } g \sim h \text{ y } x \sim y. \quad \dots \text{ 2.5.3.}$$

**Demostración.**

i) Basta probar el caso en el que  $(g, x) \sim (h, y)$ , esto es inmediato, ya que entonces

$$g \sim h \text{ y } x \sim y, \quad x \in \mathbb{P},$$

$$\circ g = hg_S, \quad y = g_S(x), \quad x \in S.$$

ii) Como en i) basta probar el caso  $(g, x) \sim (h, y)$ , por el inciso anterior tenemos que  $g(x) = h(y)$ , entonces  $fg(x) = fh(y)$ , si  $g \sim h$  y  $x \sim y$

tenemos que  $fg - fh$  y  $\langle fg, x \rangle - \langle fh, y \rangle$ .

Si  $x \in \mathcal{B}$ ,  $y = g_{\mathcal{B}}(x)$  y  $g = hg_{\mathcal{B}}$  entonces  $fg - fhg_{\mathcal{B}}$  y  $\langle fg, x \rangle - \langle fh, y \rangle$ .

iii) Es inmediato de la definición.

■

Dada  $f$  en  $\mathcal{G}$ ,  $f$  induce una función  $f^*: \mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}^*$  definida por  $f^*\langle g, x \rangle = \langle fg, x \rangle$ , que esta bien definida por 2.6.2. Además  $f^*$  es una biyección, puesto que  $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ .

Denotamos al grupo de estas bivecciones por  $\mathcal{G}^*$ . Obsérvese que  $(fh)^* = f^*h^*$ , por lo cual la asociación  $\Psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^*$  tal que  $\Psi(f) = f^*$  es un homomorfismo de  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{G}^*$ . Mas aun  $\Psi$  es un isomorfismo:

Si  $f^* = h^*$ , tomando  $x \in \mathcal{P}$  obsérvese que

$$\langle f, x \rangle = f^*\langle \text{Id}, x \rangle = h^*\langle \text{Id}, x \rangle = \langle h, x \rangle$$

y como  $x \in \mathcal{P}$  tenemos que  $f = h$  ( por 2.5.3. ), con lo que se concluye que  $\Psi$  es un monomorfismo y por construcción  $\Psi$  es un epimorfismo.

Denotaremos por

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \{ \langle \text{Id}, x \rangle \mid x \in \mathcal{P} \}$$

análogamente

$$\langle \tilde{\mathcal{P}} \rangle = \{ \langle \text{Id}, x \rangle \mid x \in \tilde{\mathcal{P}} \}$$

Obsérvese que la acción de  $G^*$  en  $\langle \tilde{P} \rangle$  tesela  $X^*$  es decir

$$\bigcup_g g^* \langle \tilde{P} \rangle = X^*$$

y si  $g^* \neq h^*$

$$g^* \langle \tilde{P} \rangle \cap h^* \langle \tilde{P} \rangle = \emptyset$$

Consideremos la función  $\alpha : X^* \rightarrow X$ , tal que  $\alpha(\langle g, x \rangle) = g(x)$ , que por 2.5.1 esta bien definida.

### Proposición. 2.6

i) Si  $\alpha$  es sobreyectiva, entonces

$$\bigcup_{g \in G} g(\tilde{P}) = X$$

ii) Si  $\alpha$  es inyectiva, entonces  $\forall g, h \in G$  distintas

$$g(\tilde{P}) \cap h(\tilde{P}) = \emptyset$$

### Demostración.

i) Tenemos  $\bigcup_{g \in G} g(\tilde{P}) \subset X$  por construcción.

Si  $z \in X$  como  $\alpha$  es sobreyectiva existe  $\langle g, t \rangle \in X^*$ , tal que  $\alpha(\langle g, t \rangle) = z$ , lo que implica  $g(t) = z$ , como  $t \in \tilde{P}$ , tenemos que  $z \in g(\tilde{P})$ .

ii) Supongamos  $g(\tilde{P}) \cap h(\tilde{P}) \neq \emptyset$ , entonces existen  $x, y \in \tilde{P}$  tal que  $g(x) = h(y)$

$$\therefore \alpha(\langle g, x \rangle) = \alpha(\langle h, y \rangle)$$

como  $\alpha$  es inyectiva tenemos que  $\langle g, x \rangle = \langle h, y \rangle$ , por 2.5.3 se tiene  $g = h$  y  $x$  puesto que  $x \in \tilde{P}$ .

■

El siguiente paso es dar una estructura topológica a nuestros espacios, para lo cual supondremos que

- i)  $X$  es un espacio métrico con métrica  $d$ . ( A. 3 )
- ii) Los  $g_B$  son isometrías de  $X$  sobre si mismo. ( A. 4 )
- iii)  $P$  es abierto y conexo. ( A. 5 )

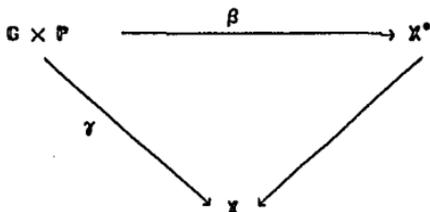
Para analizar la transformación  $\alpha$  y poder usar la proposición 2.6, se definen las siguientes transformaciones naturales:

$$\beta : G \times \tilde{P} \rightarrow X^*, \quad \beta(g, x) = \langle g, x \rangle$$

y

$$\gamma : G \times \tilde{P} \rightarrow X, \quad \gamma(g, x) = g(x)$$

Obsérvese que  $\gamma = \alpha\beta$ , es decir que el siguiente diagrama es conmutativo:



Se define en  $G$  la topología discreta, en  $G \times \tilde{P}$  la topología producto y en  $X^*$  la topología cociente, entonces  $\beta$  es continua.

También  $\gamma$  es continua:

Sea  $A$  abierto en  $X$ , entonces

$$\gamma^{-1}(A) = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times (\sigma^{-1}(A) \cap \tilde{P})$$

es abierto en  $G \times \tilde{P}$ .

Finalmente, como  $\gamma$  es continua, entonces  $\alpha$  también lo es, ya que si  $A$  es abierto en  $X$ ,  $\alpha^{-1}(A)$  es abierto en  $X^*$  si y sólo si  $\beta^{-1}\alpha^{-1}(A) = \gamma^{-1}(A)$  es abierto en  $G \times \tilde{P}$ .

Cada  $f$  en  $G$  induce una transformación

$$\tilde{f} : G \times \tilde{P} \longrightarrow G \times \tilde{P}$$

definida por

$$\tilde{f}(g, x) = (fg, x)$$

claramente  $\tilde{f}$  es homeomorfismo de  $G \times \tilde{P}$  sobre si mismo y el grupo de estas  $\tilde{f}$  es isomorfo a  $G$ .

A continuación se demostrarán dos igualdades que se utilizarán posteriormente:

$$i) \quad \beta\tilde{f} = f^*\beta \quad (I. 1)$$

$$\text{Sea } (g, x) \in G \times \tilde{P},$$

$$\begin{aligned} \beta\tilde{f}(g, x) &= \beta(fg, x) = \langle fg, x \rangle \\ &= f^*\langle g, x \rangle = f^*\beta(g, x) \end{aligned}$$

$$ii) \quad \gamma \tilde{f} = f\gamma \quad (I. 2)$$

Sea  $(g, x) \in G \times \tilde{P}$

$$\gamma \tilde{f}(g, x) = \gamma(fg, x) = fg(x) = f\gamma(g, x)$$

De estas dos igualdades obtenemos que

$$\alpha f^* \beta = \gamma \tilde{f} = f\gamma \quad (I. 3)$$

Sea  $(g, x) \in G \times \tilde{P}$ ,

$$\alpha f^* \beta(g, x) = \alpha \beta \tilde{f}(g, x) = \gamma \tilde{f}(g, x) = f\gamma(g, x)$$

### Proposición. 2.7

Las transformaciones  $f^*$  son homeomorfismos de  $X^*$  sobre sí mismo.

### Demostración.

Sea  $A$  un subconjunto abierto de  $X^*$  entonces, usando (I. 1),  $\beta^{-1}(f^*)^{-1}(A) = (\tilde{f})^{-1}\beta^{-1}(A)$ , lo cual es abierto en  $G \times \tilde{P}$ . Se deduce que  $(f^*)^{-1}(A)$  es abierto en  $X^*$  y  $f^*$  es continua.

Como  $(f^*)^{-1} \cdot (f^{-1})^*$  se sigue el resultado.

■

El presente trabajo se concreta al caso del plano hiperbólico ( $\mathbb{H}^2$  ó  $\Delta$ ), se necesita una condición referente a los polígonos alrededor de los vértices, estableceremos una condición más general que implicará que las imágenes de  $P$  alrededor de un vértice no se traslapan.

Para expresar dicha condición en forma concreta, supóngase que

$$\langle \text{Id}, x \rangle = \{ (g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n) \}$$

Entonces alguna  $(g_1, x_1) = (\text{Id}, x)$  y

$$g_1(x_1) = g_2(x_2) = \dots = g_n(x_n) = \text{Id}(x) = x$$

Si  $N_j^c = \{ y \in \mathbb{P} \mid d(y, x_j) < \epsilon \}$  y como las  $g_j$  son isometrías se tiene

$$g_j(N_j^c) \subset \{ y \in X \mid d(y, x) < \epsilon \} = B(x, \epsilon)$$



FIGURA 2.4

Para toda  $\epsilon$  suficientemente pequeña se quiere que el conjunto de las  $g_j(N_j^\epsilon)$  tesela  $B(x, \epsilon)$ , es decir que las  $g_i(N_i^\epsilon)$  no se traslapan en sus interiores y  $\cup g_i(N_i^\epsilon)$  cubre  $B(x, \epsilon)$ . Esto nos permite establecer nuestra siguiente hipótesis:

( A. 6 ) Cada  $x$  en  $\tilde{P}$  tiene una clase de equivalencia finita

$\langle \text{Id}, x \rangle = \{ (g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n) \}$   
 y para toda  $\epsilon$  suficientemente pequeña

$$\bigcup_{i=1}^n g_i(N_i^\epsilon) = B(x, \epsilon)$$

Y además para cada  $w$  en  $B(x, \epsilon)$ , el conjunto de puntos de  $\cup(g_j, N_j^\epsilon)$  que son transformados por  $\gamma$  en  $w$  es una clase de equivalencia.

Obsérvese que el resultado que estamos buscando se puede expresar diciendo que el conjunto de puntos en  $G \times \tilde{P}$  que se transforman bajo  $\gamma$  en cualquier  $w$  en  $X$  es una clase de equivalencia ( por lo cual  $\alpha$  es una biyección ). Así ( A. 6 ) aparece como una versión local natural del resultado global deseado. Obsérvese que como  $\langle f, x \rangle$  es la imagen de  $\langle \text{Id}, x \rangle$  bajo  $f^*$ , cada clase de equivalencia es finita.

Denotaremos

$$W_x^c = \bigcup_j (g_j, W_j^c), \quad V_x^c = \beta(W_x^c)$$

La condición (A. 6) implica que  $\gamma(W_x^c) = B(x, \epsilon)$  y también que  $W_x^c$  es una unión de clases de equivalencia, dado que

$$\beta^{-1}(V_x^c) = \beta^{-1}(\beta(W_x^c)) = W_x^c$$

se deduce que  $W_x^c$  es abierto en  $X^*$ , ya que  $W_x^c$  es abierto.

Para completar los detalles de la prueba del Teorema de Poincaré necesitamos el siguiente resultado.

**Proposición. 2.8**

Los conjuntos  $f^*(W_x^c)$  son una base para la topología de  $X^*$ .

**Demostración.**

Obsérvese primero que los conjuntos  $f^*(W_x^c)$  son abiertos. Supongamos que  $A$  es un conjunto abierto de  $X^*$  y que  $\langle f, x \rangle \in A$ . Escribiendo  $\langle \text{Id}, x \rangle$  como en (A. 6) se tiene

$$\langle f, x \rangle = \{ (fg_1, x_1), \dots, (fg_n, x_n) \}$$

y dado que  $\beta$  es continua

$$\beta^{-1}(A) = \bigcup_{h \in G} (h, A_h)$$

donde cada  $A_h$  es abierto en  $\bar{P}$ . Puesto que

$(fg_j, x_j) \in \beta^{-1}(A) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se tiene que  $x_j \in A_{fg_j}$ , por lo que  $A_{fg_j} \neq \emptyset$ . Se puede tomar  $\varepsilon$  suficientemente pequeña, que satisfaga (A. 6) para  $x$ , de tal manera que  $W_j^c \subset A_{fg_j}$  (esto es posible ya que  $j$  toma sólo un número finito de valores y los  $A_{fg_j}$  son abiertos y no vacíos en  $\tilde{P}$ ).

Como  $W_x^c = \bigcup_{j=1}^n (g_j, W_j^c)$ , se tiene

$$\tilde{f}(W_x^c) = \bigcup_j (fg_j, W_j^c) \subset \beta^{-1}(A)$$

por lo tanto  $f^*(W_x^c) = f^*\beta(W_x^c) = \beta\tilde{f}(W_x^c) \subset A$ .

Finalmente como  $(Id, x) \in W_x^c$ , se tiene que

$$\langle f, x \rangle = \beta\tilde{f}(Id, x) \in \beta\tilde{f}(W_x^c) = f^*(W_x^c)$$

### Afirmación 2.9

$$\alpha|_{f^*(W_x^c)} \rightarrow B(f(x), \varepsilon)$$

es un homeomorfismo. En particular  $\alpha$  es abierta.

### Demostración.

$$\begin{aligned} \alpha f^*(W_x^c) &= \alpha f^*\beta(W_x^c) = \alpha\beta\tilde{f}(W_x^c) = \gamma\tilde{f}(W_x^c) \\ &= f\gamma(W_x^c) = B(f(x), \varepsilon) \end{aligned}$$

lo que implica  $\alpha|_{f^*(V_x^c)} \rightarrow B(f(x), \epsilon)$  es una función abierta y suprayectiva, por lo que basta probar la inyectividad:

Sean  $u, v \in f^*(V_x^c)$  tales que  $\alpha(u) = \alpha(v)$ .

Sean  $t, s \in W_x^c$  tales que

$$f^*\beta(t) = u \quad \text{y} \quad f^*\beta(s) = v$$

Si denotamos  $\tilde{f}(t) = u'$  y  $\tilde{f}(s) = v'$  se tiene

$$\beta(u') = u \quad \text{y} \quad \beta(v') = v$$

$$\begin{array}{ccc}
 t, s \in W_x^c & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & V_x^c \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 u', v' \in \tilde{f}(W_x^c) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & u, v \in f^*(V_x^c)
 \end{array}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \gamma(u') &= \alpha\beta(u') = \alpha(u) = \alpha(v) = \alpha\beta(v') = \gamma(v') \\
 &+ \gamma(u') = \gamma(v') \\
 \gamma\tilde{f}(t) &= \gamma\tilde{f}(s) \quad + \quad f\gamma(t) = f\gamma(s) \\
 &\therefore \gamma(t) = \gamma(s)
 \end{aligned}$$

lo que implica que  $t$  y  $s$  están en la misma clase de equivalencia

$\rightarrow \tilde{f}(t) = u'$  y  $\tilde{f}(s) = v'$  están en la misma clase de equivalencia

$$\rightarrow \beta(u') = \beta(v')$$

$$\therefore u = v$$

**Afirmación 2.10**

$X^*$  es Hausdorff.

**Demostración.**

Sean  $\langle f, x \rangle, \langle g, y \rangle \in X^*$  tal que  
 $\langle f, x \rangle \neq \langle g, y \rangle$

entonces

$$\begin{aligned} \langle f, x \rangle &= \{ (f_1, x_1), \dots, (f_n, x_n) \} \\ \langle g, y \rangle &= \{ (g_1, y_1), \dots, (g_n, y_n) \} \end{aligned}$$

son subconjuntos disjuntos en  $G \times \mathbb{F}$ .

Ahora se elige  $N_i^c$  correspondiente a  $\langle f_i, x_i \rangle$  como en (A. 6) y  $M_j^c$  el correspondiente a  $\langle g_j, y_j \rangle$ .

Se pueden tomar  $N_i^c$  y  $M_j^c$  de tal manera que los conjuntos

$$\bigcup_i (f_i, N_i^c) \quad \text{y} \quad \bigcup_j (g_j, M_j^c)$$

sean disjuntos en  $G \times \mathbb{F}$  :

Si  $f_i \neq g_j$ , entonces  $(f_i, N_i^c)$  y  $(g_j, M_j^c)$  son disjuntos.

Si  $f_i = g_j$ , entonces como  $x_i \neq y_j$ , tomando una  $\epsilon$  menor si es necesario ( $\mathbb{F}$  es Hausdorff), se tiene

$$(f_i, N_i^c) \cap (g_j, M_j^c) = \emptyset$$

**Afirmación 2.11**

$X^*$  es conexo.

**Demostración.**

$\tilde{\mathcal{P}}$  es conexo, también lo es  $(g, \tilde{\mathcal{P}})$  y su  $\beta$ -imagen  $\langle g, \tilde{\mathcal{P}} \rangle$ .

Obsérvese que si  $x \in s'$ , entonces

$$\begin{aligned} & \langle g, x \rangle = \langle gg_B, g_B^{-1}(x) \rangle \\ \rightarrow & \langle g, \tilde{\mathcal{P}} \rangle \cap \langle gg_B, \tilde{\mathcal{P}} \rangle \neq \emptyset \\ \rightarrow & \langle g, \tilde{\mathcal{P}} \rangle \cup \langle gg_B, \tilde{\mathcal{P}} \rangle \text{ es conexo.} \end{aligned}$$

Dado que  $g$  es un producto de las  $g_{B_1}g_{B_2}\dots g_{B_n}$  entonces

$\langle g, \tilde{\mathcal{P}} \rangle \cup \langle gg_{B_n}^{-1}, \tilde{\mathcal{P}} \rangle = \langle g, \tilde{\mathcal{P}} \rangle \cup \langle g_{B_1}g_{B_2}\dots g_{B_{n-1}}, \tilde{\mathcal{P}} \rangle$  es conexo.

Como la unión de dos conexos es conexa (Lema 1.14) tenemos que

$\langle g, \tilde{\mathcal{P}} \rangle \cup \langle g_{B_1}\dots g_{B_{n-1}}, \tilde{\mathcal{P}} \rangle \cup \langle g_{B_1}\dots g_{B_{n-1}}(g_{B_{n-1}})^{-1}, \tilde{\mathcal{P}} \rangle$  es conexo.

$\rightarrow$  existen conexos que contienen a  $\langle g, \tilde{\mathcal{P}} \rangle$  y a  $\langle \text{Id}, \tilde{\mathcal{P}} \rangle$ .

Por el Lema 1.17 tenemos que la unión de conexos que comparten un punto fijo en común es conexo, por lo tanto  $X^*$  es conexo.

Integrando estas afirmaciones a los resultados obtenidos anteriormente se ha demostrado la siguiente proposición.

**Proposición. 2.12**

$X^*$  es Hausdorff y conexo. Además, toda  $x^*$  en  $X^*$  tiene una vecindad abierta  $N^*$  tal que la restricción de  $\alpha$  en  $N^*$  es un homeomorfismo local de  $N^*$  sobre un subconjunto abierto.

Se probará más adelante que  $\alpha : X^* \rightarrow X^*$  es una proyección cubriente.

Ahora consideraremos el caso que más nos interesa.

Supondremos que:

- i)  $(X, d)$  es el plano hiperbólico ( $H^2$  o  $\Delta$ ) con la métrica hiperbólica.
- ii)  $P$  es un polígono hiperbólico, es decir  $P$  es un subconjunto de  $H^2$  (o  $\Delta$ ) no vacío de la forma  $\bigcap_{i \in N} H_i$ , donde  $H_i$  son semiplanos. Supondremos también que  $\forall K$  compacto,  $K \cap H_i \neq \emptyset$ , solamente para un número finito de  $i$ 's. Esta condición nos asegura que los lados de  $P$  ( $H$ -segmentos en  $\partial P$ ) no se acumulan en  $H^2$ .

- iii) Los apareamientos de lados son isometrías hiperbólicas, supondremos que si  $g_s$  aparee el lado  $s$  de  $P$  con el lado  $s'$  de  $P$ , entonces  $P$  y  $g_s(P)$  están en distintas componentes de  $M^2 - \tilde{s}'$  (donde  $\tilde{s}'$  es la geodésica que contiene a  $s'$ ).

Sea  $G$  el grupo generado por los apareamientos.

Obsérvese que (A. 1) a (A. 5) se satisfacen:

- (A. 1)  $P$  es un polígono abstracto.
- (A. 2) Existe una familia  $G$  de apareamientos de  $P$ .
- (A. 3)  $X$  es un espacio métrico con métrica  $d$ .
- (A. 4)  $g_s \in G$  son isometrías.
- (A. 5)  $P$  es una región.

La condición (A. 6) no se aplica a vértices reales (estos no están en  $X$ ) por lo que no es necesario checkarla para estos puntos.

La condición (A. 6) se va a reformular en una forma simple, ésta se cumplirá siempre si  $x \in P$  o si  $x \in \text{Int}S$ ,  $s$  lado de  $P$ :

- i) Si  $x \in P$ , tomando  $\epsilon$  tal que

$$B(x, \epsilon) \subset P, \quad \langle \text{Id}, x \rangle = \{ (\text{Id}, x) \}$$

(A. 6) es inmediato,  $W_x^c = (\text{Id}, N_x^c)$  está formado por clases de equivalencia, ya que  $\forall y \in B(x, \epsilon)$  tenemos que  $y \in P$ , lo que implica que

$$\langle \text{Id}, y \rangle = \{ (\text{Id}, y) \}.$$

ii) Si  $x \in \text{Int}S$ , a lado de  $P$  entonces

$$\langle \text{Id}, x \rangle = \{ (\text{Id}, x), (g_B^{-1}, g_B(x)) \} :$$

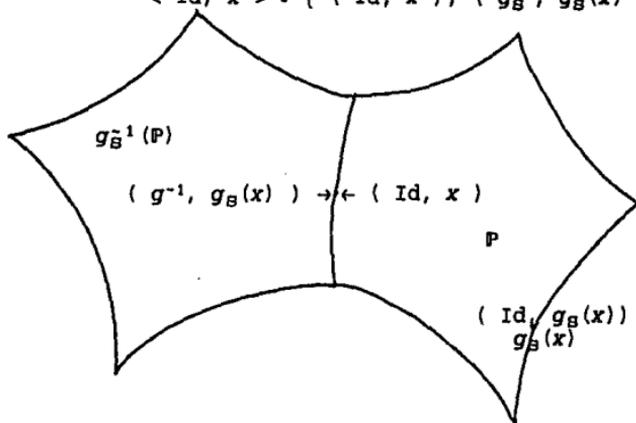


FIGURA 2.5

Por las condiciones de la relación  $\sim$  se tiene que

i) Si  $(\text{Id}, x) \sim (h, y)$

como  $x \in S$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & \text{Id} \cdot hg_B(x) \quad \text{y} \quad y \cdot g_B(x) \\ \therefore \quad & (\text{Id}, x) \sim (g_B^{-1}, g_B(x)) \end{aligned}$$

ii) Si  $(g_B^{-1}, g_B(x)) \sim (h, y)$

dado que  $g_B(x) \in S$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & g_B^{-1} \cdot hg_B^{-1} \quad \text{y} \quad y \cdot g_B^{-1}g_B(x) \\ \therefore \quad & (g_B^{-1}, g_B(x)) \sim (\text{Id}, x) \end{aligned}$$

con lo que se concluye que

$$\langle \text{Id}, x \rangle = \{ (\text{Id}, x), (g_B^{-1}, g_B(x)) \}$$

Escribimos

$$\langle \text{Id}, x \rangle = (g_1, x_1) \quad \text{y} \quad (g_B^{-1}, g_B(x)) = (g_2, x_2)$$

Sea  $\varepsilon$  tal que  $B(x, \varepsilon) \cap \partial \tilde{P} \subset S$  y sean

$$N_1^\varepsilon = \{ y \in \tilde{P} \mid d(y, x_1) < \varepsilon \}$$

$$N_2^\varepsilon = \{ y \in \tilde{P} \mid d(y, x_2) < \varepsilon \}$$

y

$$W_x^\varepsilon = (g_1, N_1^\varepsilon) \cup (g_2, N_2^\varepsilon)$$

entonces

$$B(x, \varepsilon) = g_1(N_1^\varepsilon) \cup g_2(N_2^\varepsilon).$$

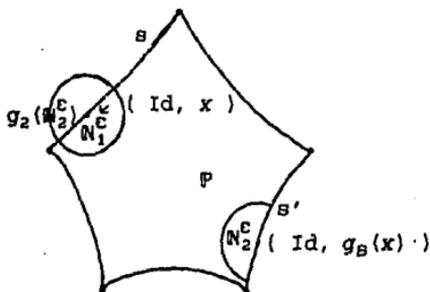


FIGURA 2.8

Claramente  $W_x^\varepsilon$  es unión de clases de equivalencia y (A. 6) se cumple.

Por lo tanto podemos reescribir la condición ( A. 6 ) sólo en términos de los vértices de  $\mathbb{P}$ . Es conveniente reescribir esta condición de la siguiente manera:

( A. 6 )' Para cada vértice  $x$  de  $\mathbb{P}$  existen vértices  $x_0(-x)$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $\mathbb{P}$  y elementos  $f_0(-\text{Id})$ ,  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de  $\mathbb{G}$  tal que los conjuntos  $f_j(N_j^c)$  no se traslapan en sus interiores y

$$\bigcup f_j(N_j^c) = B(x, \varepsilon)$$

donde  $f_{j+1}$  es de la forma  $f_j g_B$  para alguna  $s$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $f_{n+1} = \text{Id}$ ).

### Proposición 2.13

( A. 6 ) es equivalente a ( A. 6 )'.

#### Demostración.

Primero probaremos que si  $x$  es un vértice de  $\mathbb{P}$ , la clase de equivalencia  $\langle \text{Id}, x \rangle$  tiene un número finito de elementos ( en  $\mathbb{G} \times \mathbb{P}$  ).

Por ( A. 6 )' tenemos que

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \text{Id} \\
 f_1 &= g_{S_1} \\
 f_2 &= g_{S_1} g_{S_2} \\
 &\vdots \\
 f_n &= g_{S_1} g_{S_2} \dots g_{S_n} \\
 f_{n+1} &= g_{S_1} g_{S_2} \dots g_{S_n} g_{S_{n+1}}^{-1} \text{Id}
 \end{aligned}$$

lo que implica que  $g_{S_{n+1}}^{-1} = (g_{S_{n+1}})^{-1} \cdot g_{S_1} g_{S_2} \dots g_{S_n}$ .

( A. 6 )' señala que existen lados

$$s_1, \dots, s_{n+1}, s'_1, \dots, s'_{n+1}$$

y vértices  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tales que

$$x_0 \in s'_1 \cap s_{n+1}, x_1 \in s'_2 \cap s_1, \dots, x_n \in s'_{n+1} \cap s_n$$

así como que las únicas transformaciones que aparean estos lados son  $g_{S_1}, \dots, g_{S_n}$  y sus inversas.

Ahora si  $( f, z ) \sim ( \text{Id}, x )$  se tiene

$$( \text{Id}, x ) \sim ( g_{S_1}^{-1}, g_{t_1}(x) ) \sim \dots \sim ( g_{S_1}^{-1} \dots g_{S_k}^{-1}, g_{t_k} \dots g_{t_1}(x) )$$

donde  $( g_{S_1}^{-1} \dots g_{S_k}^{-1}, g_{t_k} \dots g_{t_1}(x) ) \sim ( f, z )$ , puesto que todo vértice de  $\mathbb{P}$  pertenece a exactamente 2 lados,  $x$  está en  $s_{n+1}$  y  $s'_1$  solamente, entonces sólo hay dos formas de obtener apareamientos de lados que contengan a  $x$ .

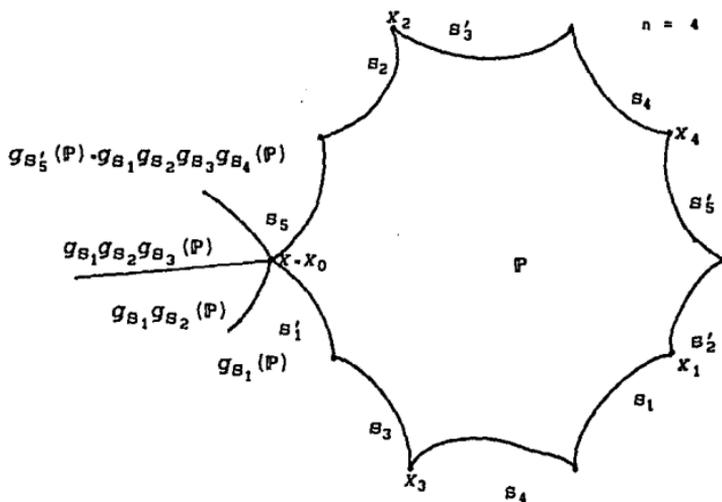


FIGURA 2.7

$$\therefore g_{t_1}(x_0) = \begin{cases} x_1 \\ x_n \end{cases} \quad \text{y} \quad g_{t_1} = \begin{cases} g_{s'_1} \\ g_{s_n} \end{cases}$$

En el primer caso, cuando  $g_{t_1}(x) = x_1$  consideramos el único apareamiento que manda  $x_1$  en un vértice de  $P$  (excluyendo  $g_{s_1}$ ), es decir  $g_{s'_1}^{-1}$

$$\rightarrow g_{t_2}(x_1) = x_2 \quad \therefore g_{t_2} = g_{s'_2}^{-1}$$

etc...

En el otro caso obtenemos los inversos:

Si  $g_{t_1}(x_0) = x_n$  entonces  $g_{t_1}^{-1} = g_{t_{n+1}}$

y el otro apareamiento que manda a  $x_n$  en un vértice de  $P$  es  $g_{B_n}$

$\rightarrow g_{t_2}(x_n) = x_{n-1} \quad \therefore g_{t_2}^{-1} = g_{B_n}$

etc..

$\therefore (f, z) = (f_j, x_j)$  para alguna  $j$ .

Es fácil checar que  $W_x^C = \bigcup_{j=0}^n (f_j, N_j^C)$  esta formado por clases de equivalencia, trasladando a  $\mathbb{P}$ .

■

Obsérvese que en el caso elíptico se repiten los vértices y los apareamientos tantas veces como el orden de los vértices, para entender esto consideremos un ejemplo:

Sea  $G$  el grupo modular

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

La región

$$R = \{ z \in \mathbb{H}^2 \mid |\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}, \quad |z| > 1 \}$$

es una región fundamental para el grupo modular ( ver L. pg.59 ).

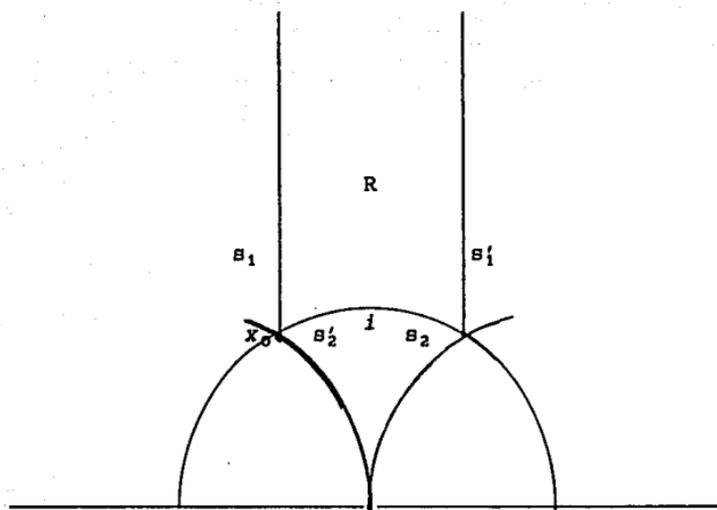


FIGURA 2.8

Los apareamientos son

$$g_{S_1}(z) = z + 1 \quad \text{y} \quad g_{S_2}(z) = \frac{-1}{z}$$

En nuestro contexto el vértice elíptico de orden 3 es  $x_0 = e^{(2/3)\pi i}$ , localmente esta cubierto por las siguientes imágenes de R ( FIG. 2.9 ).

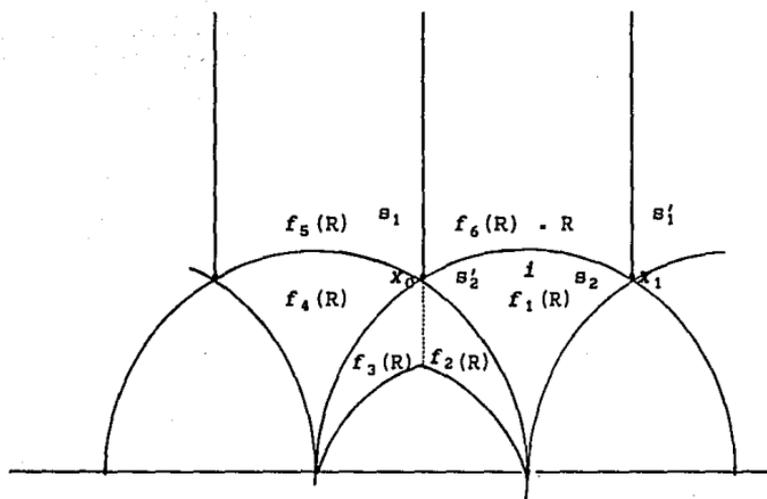


FIGURA 2.9

Tenemos

$$f_1 \cdot g_{B_2}$$

$$f_2 \cdot g_{B_2} g_{B_1}$$

$$f_3 \cdot g_{B_2} g_{B_1} g_{B_2}$$

$$f_4 \cdot g_{B_2} g_{B_1} g_{B_2} g_{B_1}$$

$$f_5 \cdot g_{B_2} g_{B_1} g_{B_2} g_{B_1} g_{B_2}$$

$$f_6 \cdot g_{B_2} g_{B_1} g_{B_2} g_{B_1} g_{B_2} g_{B_1} - (g_{B_2} g_{B_1})^3 \cdot \text{Id.}$$

Por último supondremos la siguiente hipótesis :

( A. 7 ) Existe  $\epsilon > 0$  tal que para toda  $x \in \tilde{P}$  existe una rama monovaluada de  $\alpha^{-1}$  en  $B(x, \epsilon)$ .

Esta condición nos permite establecer:

**Afirmación. 2.16**

$\alpha$  es una proyección cubriente.

**Demostración.**

Sean  $z_1, z_2 \in X$ , consideremos  $\varphi$  una curva en  $X$  que une  $z_1$  con  $z_2$ ,  $\varphi$  se puede extender a una curva  $\psi : I \rightarrow X$ ,  $I$  un intervalo, tal que  $\psi$  consta de  $\varphi$  y una curva suave que une  $z \in \tilde{P}$  con  $z_1$ .

Denotaremos por  $r_0 \cdot z$ , sea  $B(r_0, \frac{\epsilon}{2})$ , donde  $\epsilon$  satisface ( A. 6 )' y ( A. 7 ) y  $r_1 \in \partial B(r_0, \frac{\epsilon}{2}) \cap \psi(I)$ , el primer punto de  $\psi$  que sale de  $B(r_0, \frac{\epsilon}{2})$  en dirección de  $z_2$ , y dado que  $\alpha^{-1}(B(r_0, \frac{\epsilon}{2}))$  tiene una rama monovaluada existe un abierto  $M_0$  en  $X^*$  tal que  $\alpha(M_0) = B(r_0, \frac{\epsilon}{2})$ , lo que implica que el segmento de  $\psi$  que une  $r_0$  con  $r_1$  se puede levantar a una curva en  $X^*$  que une  $\langle Id, r_0 \rangle$  con  $\langle g_1, r_1 \rangle$ , donde

$g_1(t_1) = r_1$ , con  $t_1 \in \mathbb{P}$ .

Sea  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ , consideremos  $B(t_1, \varepsilon')$ ,  $\alpha^{-1}(B(t_1, \varepsilon'))$  tiene una rama monovaluada por lo cual existe un abierto  $M_1$  en  $X^*$  tal que  $\alpha(M_1) = B(t_1, \varepsilon')$ , pero dado que  $X^*$  tiene la topología cociente se tiene que existe un abierto  $U_1$  en  $G \times \mathbb{P}$ , tal que  $\beta(U_1) = M_1$ , de esta forma se tiene que

$$\alpha(g_1^*(M_1)) = B(g_1(t_1), \varepsilon')$$

ya que

$$\begin{aligned}\alpha(g_1^*(M_1)) &= \alpha(g_1^*(\beta(U_1))) = \alpha(\beta(\tilde{g}_1(U_1))) \\ &= \gamma(\tilde{g}_1(U_1)) = g_1(\gamma(U_1)) \\ &= g_1(\alpha(\beta(U_1))) = g_1(\alpha(M_1)) \\ &= g_1(B(t_1, \varepsilon')) = B(g_1(t_1), \varepsilon').\end{aligned}$$

lo que implica que  $\alpha^{-1}(B(g_1(t_1), \varepsilon'))$  tiene una rama monovaluada en  $X^*$ .

Obsérvese que  $g_1\alpha(M_1) = \alpha g_1^*(M_1)$ , ya que  
 $g_1\alpha(M_1) = g_1\alpha\beta(U_1) = g_1\gamma(U_1)$



en  $X^*$  tal que  $\alpha(\psi) = \bar{\psi}$ , en particular existe  $\langle g_n, t_n \rangle$  en  $X^*$  tal que

$$\alpha(\langle g_n, t_n \rangle) = g_n(t_n) = r_n = z_2$$

\*  $\alpha$  es sobre

$\therefore \alpha$  es una proyección cubriente.

■

### Afirmación. 2.15

$\alpha$  es un homeomorfismo.

### Demostración.

Se ha demostrado que  $\alpha$  es una proyección cubriente, por lo que basta demostrar que  $\alpha$  es inyectiva.

Sean  $x_1, x_2 \in X^*$  tal que  $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$  en  $X$ ; consideremos la curva  $\varphi$  que une  $x_1$  con  $x_2$  entonces  $\alpha(\varphi)$  es una curva cerrada en  $\alpha(x_1)$ , sea  $\tau$  la curva constante  $\alpha(x_1)$ .

Como  $X$  es simplemente conexo  $\tau \cong \alpha\varphi_{r \in I(0,1)}$ , por el Teorema 1.25 se tiene que  $\bar{\tau}_{x_1} \cong \overline{(\alpha\varphi)}_{x_1, r \in I(0,1)}$ , donde  $\bar{\tau}_{x_1}$  es el levantamiento de  $\tau$  basado en  $x_1$  (es decir es un lazo constante) y  $\overline{(\alpha\varphi)}_{x_1}$  es el levantamiento de  $\alpha\varphi$  basado en  $x_1$ , en particular  $x_1 = x_2$

$\therefore \alpha$  es inyectiva.

■

Por la Proposición 2.6 se tiene que  $\tilde{P}$  es un polígono fundamental para  $G$  y  $G$  actúa discontinuamente en  $\bigcup_{g \in G} g(P)$ , por lo que se ha demostrado el Teorema de Poincaré:

**Teorema 2.16** ( Teorema de Poincaré ).

Sea  $P$  un polígono hiperbólico con una familia  $\Phi$  de apareamientos que satisfaga ( A. 6 )' y ( A. 7 ), se concluye que el grupo  $G$  generado por  $\Phi$  es discreto y  $P$  es un polígono fundamental de  $G$ .

## EJEMPLOS

### Ejemplo 3.1

Sea  $P$  un polígono con  $r$  lados y ángulos  $\frac{\pi}{n_j}$  en los vértices  $v_j$  en  $X$   $j = 1, 2, \dots, r$ .

Y  $s_j$  lado de  $P$ , sea  $g_j$  la reflexión sobre  $s_j$ , se denotarán estas transformaciones por  $g_1, g_2, \dots, g_r$ .

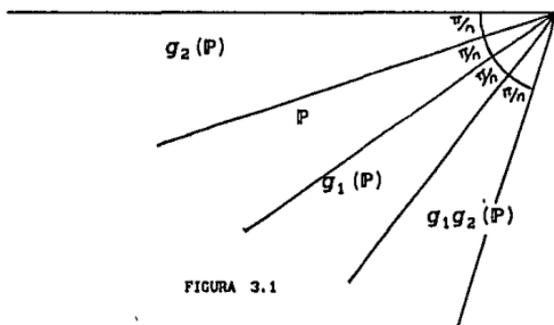


FIGURA 3.1

( A. 6 )' se cumple, puesto que  $g_1g_2(P)$  es una rotación  $\frac{2\pi}{n}$   $\therefore (g_1g_2)^n(P) = P$ , es decir  $(g_1g_2)^n = \text{Id}$ .

Para checar ( A. 7 ) obsérvese que la  $\epsilon$  universal que se requiere no debe cumplir exactamente la hipótesis de

( A. 6 ), por ejemplo en un punto de un lado muy cercano a un vértice, su clase de equivalencia es de la forma

$$\langle \text{Id}, x \rangle = \{ (g_1, x_1), (g_2, x_2) \}$$

pero para la  $\epsilon$  universal nunca se tiene  $\cup g_1(N_1^c) = B(x, \epsilon)$

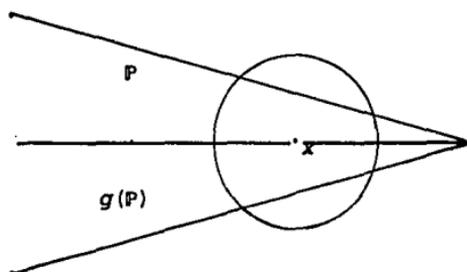


FIGURA 3.2

Para obtener ( A. 7 ) es decir que  $\forall x \in \tilde{P}, B(x, \epsilon)$  sea la imagen homeomorfa de un abierto en  $X^*$ , lo haremos de la siguiente forma:

Ciertamente  $\forall x \in \tilde{P}$  se puede encontrar  $\epsilon_x$  tal que  $\alpha^{-1}(B(x, \epsilon_x))$  tenga una rama monovaluada en  $X^*$  ( puesto que ( A. 6 )' se cumple), por compacidad y para los puntos en  $\tilde{P}$  o en los interiores de los lados de  $\tilde{P}$  se obtiene fácilmente una cubierta tal que

$$B(x_1, \epsilon_{x_1}) \cup B(x_2, \epsilon_{x_2}) \cup \dots \cup B(x_n, \epsilon_{x_n}) \supset \tilde{P}$$

tomando el número de Lebesgue con respecto a esta cubierta y  $\epsilon$  menor que este número se obtiene lo requerido.

$\therefore P$  es un polígono fundamental para  $G$ , y  $G$  es discreto.

■

**Definición. 3.2** Un horodisco es un disco en  $H^2$  que es tangente a  $\hat{R}$ . Si el punto de tangencia es  $p$  se dice que el horodisco esta basado en  $p$ .

**Definición. 3.3** La región de un horodisco  $D$  delimitada por dos geodésicas que se intersectan en el punto en que  $D$  es tangente a  $\hat{R}$  se denomina cúspide.

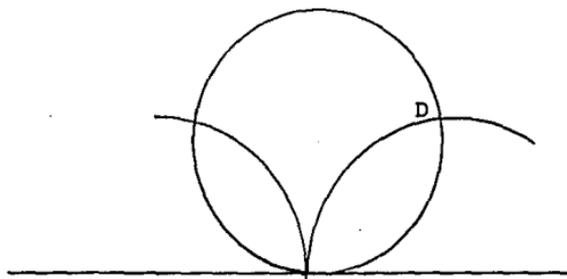


FIGURA 3.3

**Lema 3.4**

Sean  $D, D'$  horodiscos basados en  $p$ ,  $D < D'$ , y  $I_1, I_2$  dos geodésicas que se intersectan en  $p$ . Sea  $M$  la región comprendida entre  $I_1, I_2$  y  $\partial D$ , entonces existe  $\epsilon > 0$

tal que  $\forall x \in M$  se tiene  $B_h(x, \epsilon) \subset D'$  ( donde  $B_h(x, \epsilon)$  es la bola hiperbólica con centro en  $x$  y radio  $\epsilon$  ).

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad supondremos que  $p = \infty$ , además podemos suponer que  $l_1, l_2$  son rectas equidistantes del eje imaginario, ahora sean  $L = \partial D'$  y  $L' = \partial D$ , entonces se puede cubrir el segmento que une  $l_1$  con  $l_2$  a lo largo de  $L'$  ( el cual denominaremos  $W$  ) con discos hiperbólicos de radio  $\epsilon$  contenidos en  $D$ , es claro que mediante homotecias de la forma  $h(x) = Kx$ ,  $K > 1$ , estos discos van a discos de radio hiperbólico  $\epsilon$  contenidos en  $D$  y viceversa cualquier disco de radio hiperbólico  $\epsilon$  con centro en algún punto en la cúspide determinada por  $l_1, l_2$  y  $L'$  viene de algun disco con centro en algun punto del segmento  $W$ .

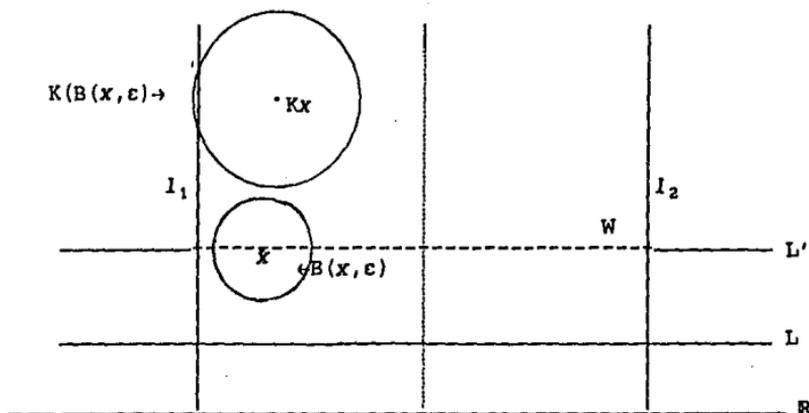


FIGURA 3.4

### Ejemplo. 3.5

La aplicación en el Ejemplo 3.1 sigue valiendo si algunas de las  $v_j$  están en la recta del infinito, al componer  $g_{B_1}$  y  $g_{B_2}$  se obtiene una parábola, obsérvese que ahora éstos  $v_j$  son puntos parabólicos: Sean  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dichos puntos. El correspondiente  $v_j$  queda fijo y los horodiscos también son invariantes bajo la parábola  $g_{B_1}g_{B_2}$ , las reflexiones preservan el haz de geodésicas por un punto y también el haz de horodiscos basados en  $v_j$ .

Para cada  $v_j$  sea  $D_j$  un horodisco basado en  $v_j$  tal que sólo intersecta a  $\mathbb{P}$  en una cúspide. El carácter de las parábolas ( rotación horocíclica ) implica que cada  $D_j$  suficientemente pequeño se puede teselar adecuadamente ( como en la FIGURA 3.5 ) es decir formadas por dos geodésicas y un segmento del horodisco  $D_j$ :

$$\mathbb{P} \cap D, g_{B_1}(\mathbb{P}) \cap D, g_{B_1}g_{B_2}(\mathbb{P}) \cap D, \dots$$

$$\mathbb{P} \cap D, g_{B_2}(\mathbb{P}) \cap D, g_{B_1}g_{B_2}(\mathbb{P}) \cap D, \dots$$

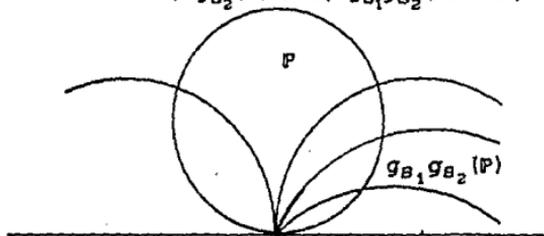


FIGURA 3.5

Esto es evidente puesto que si  $f$  es parabólica con punto fijo  $v$ ,  $f$  preserva todo horodisco basado en  $v$ , es decir  $f$  rota dicho horodisco.

Esta condición permite aplicar ( A. 7 ):

Primero se puede dividir  $\mathbb{P}$  en un número finito de cúspides correspondientes a las  $D_j$  y un subconjunto compacto, en esta parte compacta se puede tomar  $\epsilon$  como en el Ejemplo 3.1. Ahora sea  $N_j$  la cúspide de  $\mathbb{P}$  correspondiente a  $D_j$ .

Para cada  $j$  sea  $D'_j$  un horodisco basado en  $v_j$  tal que  $D'_j \subset D_j$ , ahora aplicando el Lema 3.4 existe  $\epsilon_j$  tal que  $\forall x \in D'_j \ B_h(x, \epsilon_j) \subset D_j$ , es fácil ver que estos discos hiperbólicos tesela bien a  $D'_j$  en el sentido que se puede levantar a  $K^*$ .

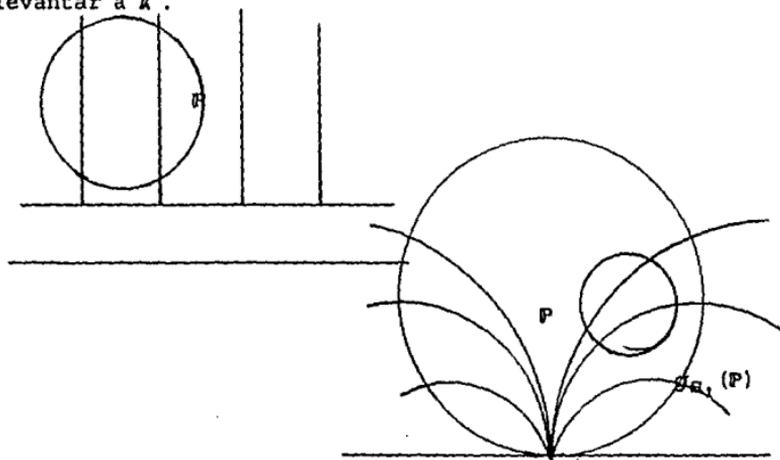


FIGURA 3.6

Ahora al considerar el complemento en  $\mathbb{P}$  de las  $D'_j$  se obtiene un conjunto compacto para el cual se puede encontrar una  $\epsilon$  que cumple ( A. 7 ) como en el Ejemplo 3.1 tomando  $\epsilon = \min \{ \epsilon, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \}$  se obtiene  $\epsilon$  que satisface ( A. 7 ).

■

Obsérvese que el Teorema de Poincaré se aplica a polígonos con un número finito de lados, donde los vértices finitos cumplen ( A. 6 )' y los vértices infinitos son puntos fijos parabólicos, esto se sigue de la discusión en el Ejemplo 3.5.

### Ejemplo. 3.7

Sean  $s_1, s'_1, s_2, s'_2$  4 geodésicas tangentes como se muestra en la FIGURA 3.7

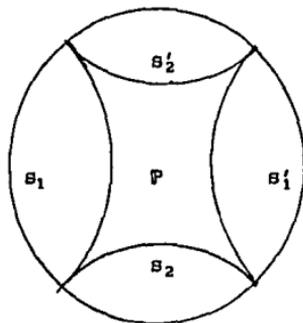


FIGURA 3.7

entonces la región  $\mathbb{P}$  comprendida entre ellas es un polígono fundamental para  $\mathbb{G} = \langle g, f \rangle$ , donde  $g, f$  son transformaciones hiperbólicas tal que  $g(s_1) = s'_1$ ,  $f(s_2) = s'_2$ . Esta afirmación se sigue de la observación anterior ya que se puede probar que los vértices son puntos fijos parabólicos, por ejemplo  $v$  es punto fijo de  $f^{-1}g^{-1}fg$ .

En  $\mathbb{H}^2$  tenemos el siguiente modelo:

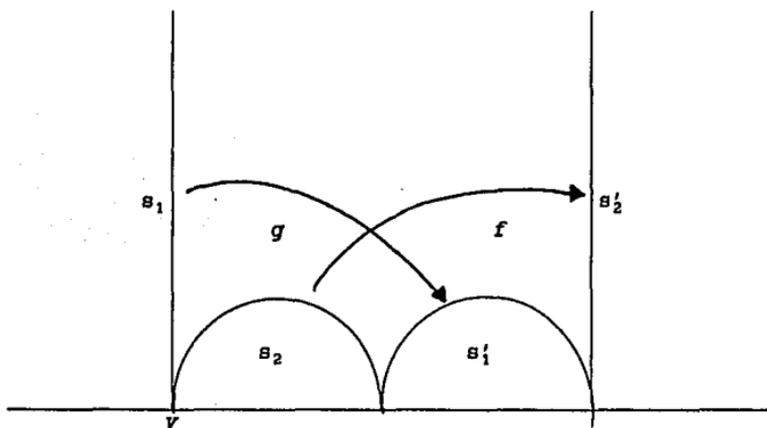


FIGURA 3.8

## BIBLIOGRAFIA

- ( B ) BEARDON, ALAN F.  
THE GEOMETRY OF DISCRETE GROUPS.  
NEW YORK: SPRING-VERLAG  
1983.
- ( G ) GREENBERG, MARVIN J.  
ALGEBRAIC TOPOLOGY: A FIRST COURSE.  
REDWOOD CITY, CALIFORNIA: ADDISON-WESLEY  
1981.
- ( L ) LEHNER, JOSEPH.  
DISCONTINUOUS GROUPS AND AUTOMORPHIC FUNCTIONS.  
PROVIDENCE: AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY  
1964.
- ( M ) MASKIT, BERNARD.  
ON POINCARÉ THEOREM FOR FUNDAMENTAL POLYGONS  
ADV. IN MATHEMATICS  
1971

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

( M1 ) MASKIT, BERNARD.

KLEINIAN GROUPS

A SERIES OF COMPREHENSIVE STUDIES IN MATHEMATICS

( # 287 )

SPRING-VERLAG.

1988

( MA ) MASSEY, WILLIAM SCHMACHER

A BASIC COURSE IN ALGEBRAIC TOPOLOGY.

NEW YORK: SPRINGER.

1991