38
2 Gem

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COLORACIONES DE GRAFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

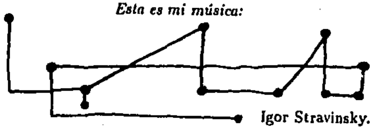
A C T U A R I O

P R E S E N T A

LEONARDO LOPEZ MONROY

MEXICO, D. F. 1994

Esta es mi música:



Igor Stravinsky.

A mi mejor amigo,
quien me ha enseñado a crecer
y porque le debo todo lo que soy
y muchas cosas más...

A mi Papá,
con la más grande admiración.

Agradecimientos

(Amanecer en la Facultad de Ciencias)

Cuando, en 1989 comenzó mi carrera, tuve el presentimiento de que algo espectacular sucedería. Desde luego, ahora que ya ocurrió, no tengo idea de cuando ni como...

No sé si comenzó con la dificultad por levantarse todas las mañanas o cuando empecé a entender en donde estaba metido y de que se trataban todos esos símbolos raros que invadían completamente pizarrones y cuadernos, y que presa de algún encantamiento carecían de sentido al llegar a casa. Afortunadamente, siempre he contado con el apoyo de mi familia que me impulsa para salir adelante, tengo también mucho que agradecerle en este aspecto a mis amigos, muy especialmente a los muchachos de la FEFA que me han comprendido y ayudado casi desde el inicio mismo de mi carrera; al igual que a muchos de mis maestros de los que no he dejado de aprender. No tengo palabras para agradecer al Dr. Abdón Sánchez-Arroyo quien desde que me introdujo en el facinante mundo de las gráficas, ha sido excelente maestro, asesor, compañero y amigo. Quiero agradecer también a las personas que forman la gran familia de Combinatoria y Teoría de las Gráficas por darme su apoyo y la oportunidad de conocer ese mundo tan facinante que es la Combinatoria. Finalmente, agradesco a todas aquellas personas que han influido en menor o mayor medida para la realización de este trabajo...

En fin, Para quienes todavía no han adivinado; este "algo" maravilloso al que siempre llamé el "Amanecer en la Facultad de Ciencias" y del que mucha gente me ha oido hablar e incluso me han preguntado por él, es la magia indescriptible que flota todos los días por los pasillos de la Facultad y hace posible ese milagro que seduce nuestra mente y hace que comprenda el principio de "algo" que nunca terminaremos de entender.

Contenido

Prólogo

Los problemas de coloración de gráficas constituyen una de las áreas más importantes y ampliamente estudiadas dentro de la teoría de las gráficas. Los problemas de coloración de vértices y coloración de aristas, además de tener una larga y complicada historia, tiene una gran cantidad de aplicaciones en la vida real tanto en redes eléctricas como en diseño de experimentos, procesos de pruducción, etc. La coloración total en cambio, es un concepto relativamente nuevo, con un grado de dificultad notoriamente mayor, y sin aplicación práctica por el momento; sin embargo, como derivación de los dos problemas anteriores no tiene menos importancia y posiblemente pronto se le encuentre aplicación.

Este trabajo es un pequeño estudio de los principales resultados que acotan el número de colores utilizados en las coloraciones de gráficas; tanto en coloración de vértices, como en coloración de aristas y especialmente en el problema de coloración total que se desarrolló a partir de una conjetura elaborada por Behzad en 1965.

En el primer capítulo se presenta una breve reseña histórica de la coloración de gráficas, con el propósito de enmarcar los problemas de coloración en el desenvolvimiento de la vida matemática.

El segundo capítulo tiene la función de definir los elementos y la notación de teoría de las gráficas necesarios para la exposición de este trabajo.

Los capítulos tres y cuatro presentan los principales resultados en coloración de vértices y coloración de aristas, respectivamente. Específicamente, el teorema de Brooks para coloración de vértices y los teoremas de Vizing y Shannon para coloración de aristas; además, se estudian los problemas de coloración para el caso particular de gráficas planas y los problemas de clasificación en coloración de aristas.

La parte principal de este trabajo se presenta en el capítulo quinto sobre coloraciones totales. El problema se aborda con más detalle, teniendo como fuente principal artículos publicados últimamente e incluso todavía no impresos. Así por ejemplo, se presenta la cota más ceñida para el número cromático total en términos del número cromático (conocida como el teorema de Hind), cuya demostración se utiliza para demostrar un teorema más general que el de Hind, atribuido a él mismo, a pesar de no estar publicado. El teorema de Hind (5.19) es un corolario inmediato de este resultado.

Además, se agregan las ideas principales utilizadas en los resultados más recientes en coloracion total, así como su demostración.

Finalmente, aquellos teoremas que no fueron considerados como importantes no se demuestran; sin embargo, se presentan referencias donde el lector puede consultar sus demostraciones.

Capítulo 1

Contexto Histórico

In kualli Tlacuilo: mihmati,
Yolteutl,
Tlayoltehuiani,
Moyolnonotzani.

Códice Matritense.

Es innegable la importancia de los Problemas de Coloración dentro del desarrollo de la Teoría de las Gráficas. Sin duda, el problema más estudiado dentro de este campo es la determinación del Número Cromático (coloración de vértices). El motor de este problema fue desde luego la Conjetura de los Cuatro Colores, que después de más de un siglo, en 1977, se convertiría en el Teorema de los Cuatro Colores. Las múltiples versiones de este teorema inundan varias áreas en la coloración de gráficas (véase teorema 3.6). Una mayor referencia sobre la historia de los problema de coloración puede encontrarse en [BLW77, páginas 90 -130].

1.1 Orígenes, el Problema de los Cuatro Colores

El Problema de los Cuatro Colores en un principio se describió de la siguiente forma: *"Cualquier mapa en un plano o en la superficie de una esfera puede ser coloreado usando únicamente cuatro colores de forma tal, que dos regiones adyacentes tengan distinto color. Donde cada región es conexa y regiones adyacentes son las que tienen una línea divisoria (no únicamente un punto) entre ellas."*[May65]. Su gran difusión se debe tal vez por ser un problema de fácil comprensión, aunque nada fácil de resolver.

Aunque su origen es sorprendentemente vago, la primera referencia escrita sobre **El Problema de los Cuatro Colores** es una carta, escrita por Augustus De Morgan, dirigida a Sir William Rowan Hamilton y fechada el 23 de octubre de 1852, en donde, Augustus De Morgan relata como uno de sus estudiantes, Frederick Guthrie, le preguntó acerca del problema. A Hamilton simplemente no le interesó el problema y así se lo expresó a De Morgan.

En 1880, cuando el problema era ya bien conocido en el medio matemático inglés, Frederick Guthrie publicó una nota en la que revela como fue su hermano Francis quien originó la pregunta [Gut80]. En algún momento incluso se señaló a A. F. Mõebius como autor de la conjetura en sus conferencias de 1840, mitificando el origen del problema. Por otra parte, el crédito de difundir el problema de los cuatro colores pertenece indudablemente a Augustus De Morgan, quien, además de referirse a él verbalmente, escribió el primer artículo sobre el mismo en 1860. La conjetura se hizo prominente cuando Arthur Cayley envió un corto escrito sobre la misma a la Sociedad Geográfica Real, en donde trató de explicar en forma simple cuáles son las dificultades que conlleva.

Algunos intentos por demostrar la conjetura de los cuatro colores se hicieron célebres o dieron algún avance en la Teoría de las Gráficas, tal es el caso de la famosa "demostración" hecha por Alfred Bray Kempe en julio de 1879 [Kem79]. El argumento de Kempe fue aceptado como correcto y se consideró válido por más de diez años antes de que el error fuese descubierto.

El entusiasmo sobre la que en ese momento era la demostración del Teorema de los Cuatro Colores, impulsó a varias personas a interesarse y publicar escritos relacionados con el tema. Quizás la más importante de estas aportaciones fue la introducción del concepto de coloración de aristas usado por P. G. Tait como otro enfoque del problema [Tai80].

Durante la década 1880 - 1890, "El Teorema de los Cuatro Colores" era un hecho establecido y de fama ampliamente extendida. La falacia en la supuesta demostración de Kempe fue revelada en 1890 por P. J. Heawood [Hea90], quien, casi dio una disculpa por haber encontrado el error al argumento de Kempe y utilizó el mismo argumento modificado para demostrar que cinco colores son siempre suficientes para colorear un mapa en el plano.

El descubrimiento de Heawood fue presentado a la Sociedad Matemática de Londres por el mismo Kempe, quien, tras admitir su error, aceptó que no podía corregir su "demostración" para incluir el contraejemplo de Heawood. En este momento la historia se dividió en varios caminos; algunos matemáticos se dedicaron al estudio de las gráficas planas, que culminó en lo se puede denominar la edad dorada de las gráficas planas; otros comenzaron a estudiar la dualidad; algunos intentaron las ideas de coloración de aristas y algunos más se enfocaron a generalizaciones del problema en otras superficies. Ejemplos de esto son las caracterizaciones de K. Kuratowski sobre gráficas planas [Kur30], los trabajos de H. Whitney sobre dualidad, gráficas planas y coloraciones [Whi32a, Whi32b, Whi33, Whi35] y las generalizaciones de P. J. Heawood en otras superficies [Hea90]. Particularmente, el trabajo de H. Whitney sobre dualidad en gráficas originó nuevas áreas de interés en matemáticas.

1.2 Coloración de Vértices

Ya en este siglo, en la década de los cuarentas, cambió la forma de enfocar el problema y las coloraciones de regiones en un mapa comenzaron a representarse por coloraciones de vértices en una gráfica. Obsérvese que si se tiene un mapa M y se marca cada región de él con un punto (que puede ser por ejemplo la capital, si nuestras regiones representan estados), uniendo con una línea los puntos de regiones colindantes (que se pueden identificar como vías ferroviarias entre nuestros estados), entonces los puntos son vértices y las líneas son aristas de una gráfica plana G. Obviamente, G tiene una coloración de sus vértices con cuatro colores si y sólo si M tiene una coloración con cuatro colores de sus regiones. Así, nos referimos a G como la "gráfica dual" del mapa. Esta idea fue mencionada por Kempe en 1879, aunque el concepto de dualidad en la Teoría de las Gráficas se originó en el estudio de poliedros. Usando gráficas duales se puede mostrar que el Teorema de los Cuatro Colores es equivalente a la proposición:

Cada gráfica planar sin lazos tiene una coloración de vértices con cuatro colores.

Este nuevo enfoque fructificó en nuevas ideas y simplificó muchas otras.

Fue por esta época, cuando nos encontramos con una pregunta que nos hace cambiar el rumbo hacia las gráficas generales: *¿Cuantos colores se necesitan para colorear los vértices de cualquier gráfica?* Como respuesta a esta nueva pregunta, se cuenta con un teorema demostrado en 1941 por R. L. Brooks, que enuncia que si p es un entero no menor a 3 y si G es una gráfica conexa con valencia no mayor a p, entonces G tiene una coloración con p colores o G es una gráfica completa con $p+1$ vértices. Históricamente, el Teorema de Brooks es el primer resultado que acota el número cromático de las gráficas generales y tal vez sea la mejor cota en el campo.

Regresando a las gráficas duales, uno de los grandes teóricos en gráficas de este siglo llamado W. T. Tutte, seguidor de las ideas de Whitney; extendió a otros problemas de coloración el trabajo de Whitney sobre matroides y trabajó sobre la demostración de su problema favorito (El Problema de los Cuatro Colores). Incluso hizo varias extensiones del problema y estableció nuevas conjeturas en el campo (véase [Tut65, Tut66]). Más tarde, en 1977, cuando el problema fue resuelto escribió un brillante trabajo [Tut77], en el cual, el Problema de los Cuatro Colores es precisamente, un caso muy especial de la gran familia de problemas de coloración, usando sus propias palabras:

> "El Teorema de los Cuatro Colores es tan sólo la punta del iceberg,
> el delgado filo de la cuña y el primer trinar de primavera".

Finalmente, el Problema de los Cuatro Colores fue resuelto por Kenneth Appel, Wolfgang Haken y John Koch, cuya demostración está basada sobre una complicada y larga extensión de las ideas en la demostración del Teorema de los Cinco Colores, desarrolladas en más de 1000 horas de tiempo de computadora, que se extiende por más de cien páginas y unos 10,000 diagramas [AH77, AHK77]. Sin embargo, todavía el Teorema de los Cuatro Colores es la puerta de entrada a los problemas de coloración, que se cruza invariablemente, tras la inevitable seducción de encontrar una demostración corta aceptable.

1.3 Coloración de Aristas

En lo referente a las Coloraciones de Aristas, después de la "demostración" de Kempe, él mismo, junto con Cayley en escritos posteriores, redujeron el problema al caso en el que tres regiones colindantes converjan en un punto -es decir, el caso en el que cada vértice de la gráfica correspondiente tenga grado tres–, bautizando como *trivalentes* a este tipo de gráficas. En 1880, Tait precisó que una coloración con cuatro colores de las regiones de un mapa trivalente es equivalente a asignar tres colores a las líneas divisorias del mapa, de manera que los tres colores incidan a cada vértice, es decir, una coloración propia por aristas de un mapa con tres colores. Por desgracia, este descubrimiento, al que Tait se refería como su "Teorema Elemental" por estar basado en la falsa suposición de que todas las gráficas planas 3-conexas son Hamiltonianas, solamente dio origen a un problema aún más difícil, al que finalmente Tutte en 1946 dio un contraejemplo con 46 vértices [SK77, pág. 112]. Sin embargo, después de la introducción del concepto por P.G. Tait, la coloración de aristas se continuó relacionado únicamente, con el Problema de los Cuatro Colores. No fue hasta 1916, que se estableció el primer resultado concerniente a coloración de aristas como un problema independiente, en un teorema de D. Kõnig, que establece, que las aristas de una gráfica bipartita con grado máximo Δ puede ser coloreado con exactamente Δ colores (véase teorema 4.3. Después del teorema de Kõnig poco se hizo hasta 1949, cuando C. E. Shannon demostró que si G es una gráfica con grado máximo Δ entonces las aristas de G pueden colorearse usando a lo más $\frac{3}{2}\Delta$ colores.

El mejor descubrimiento en esta área ocurrió en 1964, cuando V. G. Vizing demuestra un resultado sorprendentemente fuerte:

> *Si G es una gráfica sin aristas múltiples y con grado máximo Δ, entonces el número de colores necesarios para colorear las aristas de G es Δ ó $\Delta + 1$.*

Pero la Coloración de Aristas no terminó aquí, este teorema, más bien dio un nuevo sentido a la Coloración de Aristas, originando los llamados Problemas de Clasificación, que consisten en determinar cuales gráficas se pueden colorear con Δ colores y cuales necesitan de $\Delta + 1$ colores. Este problema ha sido el centro de las investigaciones en coloración de aristas durante las últimas dos décadas.

1.4 Coloración Total

En lo que concierne a las Coloraciones Totales, podemos decir que es un concepto de reciente cuño en la teoría de gráficas. Una coloración total de una gráfica es una coloración sus vértices y sus aristas, de forma que dos elementos incidentes o adyacentes no tengan el mismo color.

Este concepto fue introducido independientemente por V. G. Vizing y por M. Behzad en la década de los sesentas. Quienes también conjeturaron para este campo, el siguiente resultado análogo al Teorema de Vizing:

> *Si G es una gráfica simple con grado máximo Δ, entonces el mínimo número de colores para colorear totalmente a G es $\Delta + 1$ ó $\Delta + 2$.*

Esta conjetura es conocida como la Conjetura de las Coloraciones Totales.

Al final de los sesentas M. Behzad, G. Chartrand y J. K. Cooper determinaron el número cromático total para algunas familias de gráficas [BCC67]. Este escrito es el primero publicado sobre cotas superiores para el número cromático total.

Durante los años setentas se demostró que más familias de gráficas satisfacen la conjetura. En 1977 A. V. Kostochka probó un análogo al Teorema de Shannon para coloraciones totales, previendo que el grado máximo sea mayor o igual a 6 y diferente de 9 ó 16. Diez años después, H. Hind demostró la mejor cota superior conocida hasta el momento en términos del número cromático. Algunas otras cotas han sido demostradas recientemente, tal es el caso, de los estudios sobre el número cromático total en multigráficas con grado n por A. Chetwynd y R. Häggkvist o la cota de el propio Hind para gráficas densas; sin embargo, la demostración o el contraejemplo a la Conjetura de las Coloraciones Totales permanece en el aire para la comunidad investigadora.

Capítulo 2

Definiciones y Conceptos Básicos

Este que ves, engaño colorido,
que, del arte ostentando los primores,
con falsos silogismos de colores
es cauteloso engaño del sentido.
Sor Juana Inés de la Cruz.

El propósito del presente capítulo es presentar los elementos básicos de la Teoría de las Gráficas que se utilizarán más adelante. Estos conceptos por lo general se encuentran en cualquier libro de Teoría de las Gráficas, tales como [BCL69, Ber89, BM76, Char85, CL86, Har77, Wil83, WW90]. La notación utilizada coincide en su mayoría con estos textos y en algunos casos se buscó la más apropiada para nuestros fines.

2.1 Gráficas y Subgráficas

Una **Gráfica** G es una pareja (V_G, A_G), donde V_G es un conjunto finito no vacío de elementos llamados **vértices** de G y A_G es un subconjunto finito de parejas no ordenadas de V_G llamado **aristas** de G. Si u y v son vértices de G, entonces una arista de la forma (u,v) ó (v,u), se dice que une a u y v.

En general, se denota con n al número de vértices de una gráfica G, es decir $| V_G |= n$; por otro lado la **cardinalidad** de G está dada por el número de aristas en A_G, que denotaremos con m.

Una arista a que une un vértice con él mismo, se denomina **lazo** o rizo; dos o más aristas $a_1, a_2, \ldots, a_k$ que unen el mismo par de vértices reciben el nombre de **aristas múltiples**; así, al número de aristas que unen a los vértices u y v, se llama **multiplicidad de** (u,v), denotada por $\mu(u,v)$. Mientras que al máximo de estas multiplicidades en G, se llamará simplemente la **multiplicidad de** G, y se denota por $\mu(G)$. Generalmente, a las gráficas sin lazos se les llama **multigráficas**, y las multigráficas sin aristas múltiples reciben el nombre de **gráficas simples**.

En este trabajo sólo consideraremos multigráficas y gráficas simples.

Sea a una arista (u,v) en A_G. Los vértices u y v son comúnmente llamados vértices **extremos** de a y se dice que son **adyacentes** o **vecinos**. Se dice además, que u y v son **incidentes** con a, o que a incide en u y en v. El número de aristas incidentes en un vértice v se llama el **grado** de v y se denota por $gr(v)$. Al mayor de los grados de los vértices en una gráfica G se le denota como Δ_G y por lo general, se le refiere como el **grado máximo** de la gráfica; análogamente, al menor de los grados se le llama **grado mínimo** y se denota por δ_G. Un vértice de grado uno es llamado **vértice final**. En el caso de que todos los vértices en una gráfica G, tengan el mismo grado k, se dice que G es regular de grado k ó simplemente, que G es **k-regular**.

Decimos que dos gráficas son **isomorfas** si existe una correspondencia uno a uno entre sus conjuntos de vértices que preserva adyacencia.

Una **subgráfica** de G, es una gráfica $H = (V_H, A_H)$ donde $V_H \subseteq V_G$ y $A_H \subseteq A_G$. Se dice que una subgráfica H es **inducida por los vértices de** G en V_H, si H se construye seleccionando un conjunto vértices V_H de G y A_H son todas las aristas en G con extremos en V_H; análogamente, si se selecciona un subconjunto de aristas A_H de G tomando sus vértices extremos como V_H, estaremos hablando de una subgráfica H **inducida por las aristas de** G en A_H.

2.2 Operaciones sobre Gráficas

Denotamos con $G \setminus a$ a la gráfica obtenida de G al eliminar la arista a; generalizando, escribimos $G \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ para representar a la gráfica obtenida de G al **borrar las aristas** $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Similarmente, representamos con $G \setminus v$ a la gráfica obtenida de G al quitar el vértice v y las aristas incidentes a él; en general, $G \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ representa la gráfica que resulta de G al **borrar los vértices** $v_1, v_2, \ldots, v_k$ y todas las aristas incidentes a estos vértices.

Insertar un vértice z en una arista (u, v) de G, significa reemplazar dicha arista por un vértice z y dos nuevas aristas (u, z) y (z, v). También podemos obtener una nueva gráfica de G borrando una arista $a = (v, w)$ e identificando v y w de forma que el vértice resultante sea incidente con todas las aristas (diferentes de a) incidentes a v y a w en G, esta operación es llamada **contracción** de la arista a y la gráfica resultante se denota por G/a. Si la gráfica H puede ser obtenida de G a través de una sucesión de contracciones en aristas, entonces se dice que G es **contraíble** a H.

Por otro lado, dos gráficas que pueden obtenerse de una misma gráfica insertando vértices en sus aristas, se dice que son **homeomorfas**.

Si G y G' son dos gráficas, definimos la **intersección** $G \cap G'$ como la gráfica definida por $(V_G \cap V_{G'}, A_G \cap A_{G'})$; análogamente, la **unión** $G \cup G'$ está definida por la gráfica $(V_G \cup V_{G'}, A_G \cup A_{G'})$. La **suma** $G + G'$ se obtiene de la unión ajena, agregando aristas que unen cada vértice de G con cada uno de G'.

La **Gráfica de Líneas** $L(G)$ de la gráfica G, es una gráfica en la que los vértices de $L(G)$ son las aristas de G, de forma que dos vértices están unidos en $L(G)$ si y sólo si las correspondientes aristas en G son adyacentes.

La **Gráfica Complemento** G^C de una gráfica simple G, está definida con el mismo conjunto de vértices de G, donde dos vértices son adyacentes en G^C si y sólo si dichos vértices no son adyacentes en G.

2.3 Caminos y Ciclos

Una sucesión alternada de vértices y aristas $v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_s, v_s$ en una gráfica G tal que $a_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$ $i = 0, 1, 2, \ldots, s-1$, recibe el nombre de **camino** de v_0 a v_s, donde v_0 es el **vértice inicial** del camino y v_s el **vértice final** o terminal; Al describir un camino en una gráfica simple, muchas veces se omiten las aristas, de hecho, la notación $p = (v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, a_{s-1}, v_s)$ utilizada para gráficas simples resulta redundante, ya que dados dos vértices a lo más existe una única arista que los une, por lo que un camino puede representarse, simplemente como una sucesión de vértices, determinándose sin lugar a dudas, las aristas que pertenecen al camino; llamaremos **paseo** a un camino en el que no se repiten aristas y **trayectoria** a un paseo en el que no se repiten vértices. Si en un camino el vértice inicial v_0 y el vértice final v_s coinciden, es decir, son el mismo, estaremos refiriéndonos a un **camino cerrado**, mientras que si $v_0 \neq v_s$ diremos que es un **camino abierto**; una trayectoria cerrada $C = (v_1, v_2, \ldots, v_s, v_1)$ recibe el nombre de **ciclo**. La **longitud** de un camino esta dado por el número de aristas que lo integran; la longitud de la trayectoria más corta de un vértice v_1 a otro v_s se denomina la **distancia** entre v_1 y v_s y la denotaremos por $d(v_1, v_s)$.

Dos caminos son ajenos en aristas, si no tienen aristas en común, análogamente, se dice que son ajenos en vértices si no se intersectan en algún vértice.

2.4 Conexidad

Una gráfica G es **conexa** si para cada par de vértices existe una trayectoria que los une; una gráfica no conexa también se llama **disconexa**. Fácilmente, se observa que toda gráfica disconexa puede dividirse en un cierto número de subgráficas conexas maximales, las que reciben el nombre de **componentes conexas**. Una arista a en una gráfica conexa G, con la propiedad de que $G \setminus a$ es disconexa, le llamaremos **puente** de G; de forma similar, si G es una gráfica conexa, v un vértice de G y $G \setminus v$ es disconexa, diremos que v es **vértice de corte** de G. Se dice que una gráfica G es **k-conexa** si al borrar cualquier subconjunto con $k-1$ vértices la gráfica no se desconecta. Se define como **bloque**, una gráfica conexa sin vértices de corte; entonces si G es una gráfica conexa, los **bloques de** G son las subgráficas maximales de G que son bloques. Los bloques de G que contienen exactamente un vértice de corte de dicha gráfica, se llaman **bloques finales**.

2.5 Tipos de Gráficas

Una gráfica simple en la cual todo par de vértices son adyacentes es llamada **gráfica completa**; la gráfica completa con n vértices se denota como K_n. Nótese, que la gráfica K_n es regular de grado $n-1$ por lo que tiene $\frac{1}{2}n(n-1)$ aristas.

En cambio, una gráfica nula es una gráfica que no contiene aristas, es decir, el conjunto de aristas es vacío. La gráfica nula con n vértices se denota por N_n. Nótese, que N_n es regular de grado cero, es decir que todos sus vértices son vértices aislados; y es complementaria a la gráfica completa K_n.

La gráfica **ciclo** se define como una gráfica conexa, tal que $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $A_G = \{(v_i, v_{(i+1)\bmod n} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$, es decir que todos sus vértices tienen grado 2; al ciclo con n vértices lo denotaremos C_n, y decimos que C_n es un **ciclo par o impar** dependiendo de la paridad de n. Una gráfica regular de grado 3 es llamada **gráfica cúbica** ó trivalente.

Si el conjunto de vértices de una gráfica G puede dividirse en dos conjuntos ajenos A y B, tal que cada arista de la gráfica tiene un extremo en A y otro en B se dice que G es una **gráfica bipartita**, que denotaremos por $G(A, B)$. Cuando se desee especificar los conjuntos involucrados. Si G es simple y cada vértice de A está unido con cada vértice de B, decimos que G es una **gráfica bipartita completa**. y la designamos por $K_{r,s}$, donde, r y s son las cardinalidades de A y B respectivamente. Puede observarse que $K_{r,s}$ tiene $r+s$ vértices y $r \cdot s$ aristas. Una gráfica bipartita completa de la forma $K_{1,s}$ es llamada **estrella**.

Se denomina **árbol** a una gráfica conexa y sin ciclos. Una gráfica cuyas componentes conexas son árboles recibe el nombre de **bosque**.

2.6 Gráficas Planas

Una gráfica G puede ser **empotrada** en una superficie dada, si es isomorfa a una gráfica dibujada en ese espacio de tal forma que los vértices de G sean representados por puntos, y las aristas por curvas continuas que no se intersectan unas con otras. En esta definición se entiende que existe un **cruce** si las aristas se cortan en un punto que no corresponde a un vértice ó si una arista pasa por un punto que corresponde a un vértice que no es incidente a dicha arista. Una gráfica es **plana** si puede ser empotrada en el plano.

En una gráfica plana, los puntos del plano que no pertenecen a G están particionados en subconjuntos abiertos llamados **caras** o regiones (limitados por ciclos), obsérvese que una de las caras es ilimitada, a esta se le llama **cara al infinito** o cara exterior. El número de caras de una gráfica denotado por c, está dado por el siguiente teorema debido a Leonhard Euler (véase [BCL69, págs. 65-88], [BM76, pág. 143], [Wil83, pág. 91]).

Teorema 2.1 (Fórmula Poliédrica de Euler) *Sea G una gráfica plana y conexa con n vértices, m aristas y c caras, entonces*

$$n - m + c = 2.$$

Demostración: Utilizando inducción sobre el número de aristas m el resultado es natural para $m = 0$, ya que en este caso $n = 1$ y $c = 1$. Supongase el teorema válido para todas las gráficas planas conexas con $m < k$, donde $k \geq 1$.

Sea G una gráfica con k aristas, en el caso de que G sea un árbol tenemos que $n = k + 1$ y $c = 1$, por lo que se cumple el teorema. En el caso contrario existe un ciclo C en G, sea a una arista en C; considérese la gráfica $G \setminus a$; esta gráfica tiene n vértices, $k-1$ aristas y $c-1$ caras. Por hipótesis de inducción:

$$n-(k-1)+(c-1)=2$$

lo que implica $n-m+c=2$.

■

De este teorema se desprenden varios corolarios (véase [CL86, pág. 89]), algunos, que nos serán de utilidad más adelante son los siguientes:

Corolario 2.1 *Toda gráfica plana simple contiene un vértice de grado a lo más 5.*

■

Para observar esto nótese que las caras de una gráfica plana simple están formadas por al menos 3 aristas y cada arista forma a lo más 2 caras,por lo que se cumple que $c \leq \frac{2}{3}m$.

Corolario 2.2 *Las gráficas K_5 y $K_{3,3}$ no son planas.*

■

Para ver esto, basta con usar la misma observación que en el teorema anterior para K_5 y considerar que las gráficas bipartitas no tienen ciclos de cardinalidad inferior a 4 para $K_{3,3}$.

Nótese que K_5 ó $K_{3,3}$ menos una arista son gráficas planas. Naturalmente, K_5 y $K_{3,3}$ juegan un papel muy importante en la caracterización de la planaridad, muestra de ello es el siguiente teorema de gran relevancia conocido como el Teorema de Kuratowski, que nos presenta una condición necesaria y suficiente para que una gráfica sea plana (véase [Har77, págs. 108-113].

Teorema 2.2 (Teorema de Kuratowski) *Una gráfica es plana si y sólo si no tiene subgráficas homeomorfas a K_5 ó $K_{3,3}$.*

■

Una gráfica plana, conexa y sin puentes es llamada **mapa**.

2.7 Coloración de Vértices

Se define por **coloración de vértices** de una gráfica G, a una función $\phi : V_G \rightarrow C$. donde C es un conjunto de colores $\{1, 2, \ldots, k\}$. es decir que a cada vértice de G se le asigna uno de los k colores de C. Si vértices adyacentes tienen colores distintos se dice que la coloración es **propia**. Asimismo, se dice que G es **k-coloreable** si existe una coloración propia de los vértices de G con k colores. El mínimo número de colores k para el cual, G es k-coloreable lo llamaremos el **número cromático** de G y lo denotaremos por $\chi(G)$. Por lo que si $\chi(G) = k$, entonces diremos que G es **k-cromática**.

Obsérvese, que una k-coloración induce una partición de los vértices de la gráfica, en k conjuntos de vértices con un mismo color j, donde $j = 1, \ldots, k$. Cada uno de los elementos de dicha partición recibe el nombre de **clase cromática** j y se denota por V_j.

2.8 Coloración de Aristas

Similarmente a la sección anterior, la **coloración de aristas** en una gráfica G es la asignación de un color a cada una de las aristas de G, ó más formalmente, una función $\psi : A_G \rightarrow C$ donde C es un conjunto de colores $\{1, 2, \ldots, K\}$. Una coloración de aristas, donde aristas incidentes a un mismo vértice tengan colores diferentes, se denomina una **coloración propia de aristas**. De la misma forma, se dice que G es **k-coloreable por aristas**, si existe una coloración de las aristas de G con k colores. El mínimo número de colores para el que existe una coloración propia de las aristas de G se llama **índice cromático**, o simplemente, número cromático por aristas; y se denota por $\chi_A(G)$. Se dice que G es **k-cromática por aristas** cuando el índice cromático de G es k.

Una k-coloración de aristas induce una partición de las aristas de G en conjuntos de aristas con el mismo color j, donde $j = 1, \ldots, k$; cada uno de estos conjuntos se llama clase cromática j de aristas, o más brevemente (en particular para coloraciones propias), **acoplamiento**, que denotaremos por M_j.

2.9 Coloración Total

Como una extención de la coloración de vértices y la coloración de aristas, se entiende por coloración total a una función $\varphi : V_G \cup A_G \rightarrow C$, donde C es un conjunto de colores. De forma análoga a la coloración de vértices y de aristas, se dice que G es **k-coloreable totalmente** si se pueden asignar k colores a los vértices y las aristas de G, de forma que sea una coloración propia por vértices, por aristas y además, las aristas tengan diferente color al del vértice en el que inciden. Asimismo, se define como **número cromático total** al mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices y las aristas de G en forma tal, que dos elementos adyacentes ó incidentes tengan colores distintos, denotándose por χ_T. Además, se dice que G es **k-crómática total**, si el número cromático total es k.

A cada conjunto j de la partición inducida por una coloración total de G con k colores donde $j = 1, \ldots, k$, recibe el nombre de **clase cromática total** j.

Nótese, que en cada una de las diferentes funciones de coloración propias, los conjuntos con el mismo color ó clases cromáticas están constituídos por vértices o aristas no adyacentes para el caso de coloración de vértices y aristas respectivamente, y por vértices y aristas no adyacentes ni incidentes para el caso de coloración total. A estos conjuntos los denominamos **independientes**.

En lo sucesivo, nos referiremos a una coloración propia de G simplemente como una coloración de G.

Capítulo 3

Coloración de Vértices

Y desde que el orto sus destellos lanza
hasta que en ocaso toda su luz pierde,
quizás como un símbolo, como una esperanza,
¡ iba tras la reina su coronel verde !

Amado Nervo.

Este capítulo tiene la intención de presentar las ideas más importantes concernientes a la coloración de vértices. Se hace especialmente énfasis en el uso del grado máximo Δ_G para la creación de cotas superiores de $\chi(G)$; y se analizan los resultados más importantes en coloración de gráficas planas. Sin embargo, existe un gran número de ideas que también son de grán importancia dentro de la coloración de vértices que no se tratan en este trabajo. Para referencias generales se puede recurrir a [BCL69, págs. 230-238], [Har77, págs. 126-149], [Cur89, págs. 107-137] y [WW90, págs. 235-268].

Inicialmente, los problemas de coloración de gráficas se presentaron al tratar de colorear los vértices de una gráfica, creada a través de una abstracción sobre la coloración de las regiones de un mapa por medio de la gráfica dual, como se mencionó en el primer capítulo. En consecuencia, en Coloración de Vértices es donde se tiene el mayor número de resultados, con relación al resto de los problemas de coloración. Cabe decir, que los problemas de coloración de aristas y coloración total, se pueden caracterizar como problemas de coloración de vértices: el primero por medio de la gráfica de líneas y el segundo a través de la **gráfica total**, la cual se construye duplicando las aristas de la gráfica original e insertando un vértice en cada arista duplicada.

3.1 Número Cromático para ciertas Familias de Gráficas

Los primeros resultados, se refieren a clases particulares de gráficas con mucha estructura; tal es el caso de las gráficas completas y los ciclos (véase [Wil83, pág. 112]).

Teorema 3.1 *El número cromático para las gráficas completas K_n y los ciclos C_n, es:*

$$\chi(K_n) = n$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & si\ n\ es\ par. \\ 3 & si\ n\ es\ impar. \end{cases}$$

■

Otro caso, es el siguiente teorema debido a D. König,

Teorema 3.2 *Sea G una gráfica sin ciclos impares, entonces*

$$\chi(G) = 2.$$

∎

Es notable, que el recíproco sea válido, obteniéndose una caracterización de las gráficas 2-coloreables. Desde luego, es fácil observar que una gráfica 1-cromática no tiene aristas, es decir, es una gráfica nula. Sin embargo, la caracterización de gráficas n-coloreables con $n \geq 3$ es todavía una incógnita.

3.1.1 Gráficas Planas

Las gráficas planas han tenido siempre gran importancia en coloración de vértices, sólo hace falta mencionar la que fué por mucho tiempo la Conjetura de los Cuatro Colores, una representación más general y concretamente de teoría de las gráficas [Char85, pág. 212] se enuncia como sigue:

Teorema 3.3 (Teorema de los Cuatro Colores) *Cualquier gráfica plana es 4-coloreable.*

∎

Cuando Heawood encontró la falla a la famosa"demostración" de Kempe demostró el siguiente teorema, usando la idea original utilizada por Kempe en 1879 [Har77, págs. 130-131] ó [Char85, págs. 213-214].

Teorema 3.4 (Teorema de los Cinco Colores) *Si G es plana, entonces*

$$\chi(G) \leq 5$$

Demostración: Por inducción sobre el número de vértices. El teorema es claro para gráficas planas con menos de 5 vértices, supóngase pues que G es una gráfica plana con n vértices y que todas las gráficas planas con $(n-1)$ vértices son 5-coloreables.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que G es simple. Asimismo, consideremos que se tiene una representación plana de G. Por el teorema de Euler (Corolario 2.1), se sabe que existe un vértice $v \in G$ con grado a lo más cinco. Considérese $H = G \setminus v$, y puesto que H tiene $(n-1)$ vértices, se sigue, por hipótesis de inducción que H es 5-coloreable. Ahora, extendiendo la coloración de H sólo se necesita dar a v uno de los cinco colores para completar la coloración de G.

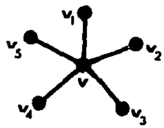


Figura 3.1. Representación de v en G aplanada

Si $gr(v) < 5$, entonces v se puede colorear con un color distinto a sus vecinos, por lo tanto, supongase que el grado de v es 5. Considérese que los vértices adyacentes a v son $v_1, v_2, \ldots, v_5$; y están distribuidos en torno a v en este orden (como se muestra en la figura 3.1). Si al menos un par de estos vértices tiene el mismo color la demostración termina; por tanto, supondremos que todos los vértices v_i adyacentes a v tienen colores distintos; y que el color usado en v_i es i para cada $1 \leq i \leq 5$.

Sea $H_{i,j}$ la subgráfica de G inducida por las clases cromáticas i y j .

Caso 1: Si los vértices v_1 y v_3 no están en la misma componente de $H_{1,3}$, al intercambiar los colores de todos los vértices de $H_{1,3}$, que pertenecen a la misma componente conexa que contiene a v_1, entonces v_1 tendrá el color 3 y podemos colorear v con color 1.

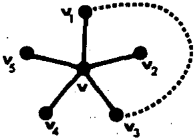


Figura 3.2.

Caso 2: Si los vértices v_1 y v_3 están en la misma componente de $H_{1,3}$, entonces existe un ciclo C de la forma $v, v_1, \ldots, v_3, v$ que contiene a esa componente de $H_{1,3}$. Como v_2 queda "encerrado" dentro de la cara determinada por el ciclo C, y v_4 fuera de este mismo ciclo, (obsérvese la figura 3.2) se sigue, que no hay una trayectoria de v_2 a v_4 en $H_{2,4}$. La existencia de dicha trayectoria contradiría la planaridad de G. Por lo que, se pueden intercambiar colores de todos los vértices de $H_{2,4}$ que pertenecen a la misma componente conexa que contiene a v_2, coloreando con el color 4 a v_2. Finalmente, se colorea v con el color 2.

$\blacksquare$

La supuesta demostración de Kempe al teorema de los cuatro colores [WW90, pág. 258], continúa el argumento inductivo de la demostración anterior; los problemas comienzan cuando v está circundado por cinco vértices (figura 3.1) coloreados con cuatro colores (la coloración al final del teorema de los cinco colores). Sea i el color de v_i con $i = 1, \ldots, 4$ y v_5 coloreado con color 2.

Podemos entonces suponer análogamente al teorema de los cinco colores, que v_1 y v_3 están en la misma componente de $H_{1,3}$, ya que de no ser así al intercambiar los colores de todos los vértices de $H_{1,3}$ que pertenecen a la misma componente conexa que contiene a v_1, podríamos colorear propiamente v con color 1.

Similarmente, suponemos que v_1 y v_4 están en la misma componente conexa de $H_{1,4}$, ya que de no ser así podemos intercambiar colores y colorear propiamente v con color 1. (obsérvese la figura 3.3).

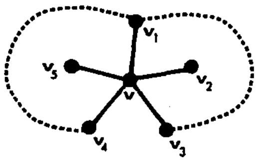


Figura 3.3. Esquema de Kempe para su demostración al teorema de los 4 colores

Entonces, por planaridad de G, se tiene que v_2 y v_4 no están en la misma componente conexa de $H_{2,4}$, por lo que podemos intercambiar colores en la componente conexa que contiene a v_2 sin alterar la coloración de v_4.

Con el mismo argumento v_5 y v_3 no está en la misma componente conexa de $H_{2,4}$, y podemos intercambiar colores en la componente conexa que contiene a v_5 sin alterar la coloración de v_3.

Finalmente, podemos colorear propiamente v con color 2. Con lo que se completaría la demostración.

□

El contraejemplo a esta "demostración", como lo mostró Heawood en 1890 consta de veinticinco vértices [WW90, pág. 255]. No fué hasta 1976 que Kenneth Appel y Wolfgang Haken, encontraron la demostración al teorema de los cuatro colores [AH77, AHK77]. Desde luego, en el tiempo que transcurrió desde el primer intento, hasta su demostración, el problema se caracterizó de muchas formas distintas, desde las cuales se intentó demostrarlo, aunque ninguna llegó tan lejos. Una de estas transformaciones debida a P. G. Tait dió origen al siguiente teorema [FW77, pág. 26-27].

Teorema 3.5 (Teorema de Tait) *El teorema de los cuatro colores es equivalente a que cualquier gráfica plana, cúbica, conexa y sin puentes sea 3-coloreable por aristas.*

■

Dando pauta para el inicio de un nuevo problema de coloración: la coloración en aristas, del que se hablará en el siguiente capítulo. Sólo nos falta mencionar que a partir de la demostración del teorema de los cuatro colores, la conjetura que establece que *el índice cromático de una gráfica plana cúbica sin vértices de corte es exactamente 3*; queda demostrada.

El siguiente teorema nos proporciona algunas equivalencias al teorema de los cuatro colores [Ber89, pág. 263].

Teorema 3.6 *Si G es una múltigráfica plana, cúbica y sin vértices de corte las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Las caras de G pueden ser coloreadas con 4 colores, de forma que caras adyacentes no tengan el mismo color.*

2. *Las aristas de G pueden ser coloradas con 3 colores, de tal manera que aristas adyacentes no tengan el mismo color.*

3. *A cada vértice de G puede asignarse un coeficiente $p(x)$, donde $p(x)$ es +1 ó -1, tal que cada cara c de G satisface*

$$\sum_{x\in c} p(x) \equiv 0 \pmod 3.$$

∎

3.2 Cotas para el Número Cromático

No se conoce aún un algoritmo para determinar el número cromático de cualquier gráfica, sin embargo, se conoce un gran número de cotas para $\chi(G)$ en términos de sus invariantes. Un primer acercamiento al número cromático por vértices es la observación de la subgráfica completa más grande, obteniéndose directamente una cota inferior; en cambio, caracterizar por medio de un invariante una buena cota superior resulta ser un trabajo mucho más difícil; como primera cota superior es natural pensar que el número cromático sea inferior al número de vértices, es decir $\chi(G) \leq n$, lo que, sin embargo, resulta estar en la mayoría de los casos muy por encima del número cromático. Es posible mejorar la cota anterior a partir del grado máximo de G, como se muestra en el siguiente teorema (véase [CL86, pág. 276] y [Wil83, pág. 113]).

Teorema 3.7 *Una gráfica G cuyo grado máximo es Δ_G es $(\Delta_G + 1)$-coloreable.*

Demostración: Por inducción sobre el número de vértices, se observa que el teorema se cumple si la gráfica tiene uno ó dos vértices; y se puede suponer que todas las gráficas con $(n-1)$ vértices y grado máximo Δ son coloreables con $\Delta + 1$ colores.

Considérese una gráfica G con n vértices. Al borrar un vértice v y sus aristas incidentes, se sigue que la gráfica $G' = G \setminus v$ tiene $(n-1)$ vértices con grado a lo más Δ_G. Por la hipótesis de inducción G' es $(\Delta_{G'} + 1)$-coloreable; ahora obsérvese que v es adyacente a lo más a Δ_G vértices en G, y por lo tanto se puede colorear a v con un color diferente a los usados en sus vecinos, lo que concluye la demostración.

■

3.2.1 El Teorema de Brooks

La idea de usar el grado máximo para acotar el número cromático a resultado ser efectiva, este mismo invariante es utilizado en uno de los teoremas más conocidos y utilizados en coloración de vértices: la cota superior desarrollada por L. Brooks en 1941.

Teorema 3.8 (Teorema de Brooks) *Sea G es una gráfica conexa, si $G \neq C_{2n+1}$ y $G \neq Kn$, entonces G es Δ_G-coloreable.*

Demostración: Nótese que puede suponerse G simple ya que los arcos múltiples no alteran la coloración por vértices. Sea G una gráfica simple y conexa, si G no es

2-conexa (es 1-conexa), es decir, existe un vértice que al borrarlo la gráfica se vuelve disconexa, entonces la demostración se puede hacer por inducción sobre vértices como sigue:
Si la gráfica tiene menos de cuatro vértices, el teorema se verifica fácilmente; así, se supone que el teorema es cierto para todas las gráficas con $(n-1)$ vértices. Tómese una gráfica G con n vértices, al borrar el vértice de corte v, la gráfica $G' = G \setminus v$ claramente tiene al menos dos componentes conexas C_1 y C_2, con a lo más $(n-2)$ vértices y grado a lo más Δ_G. Si $C_1 \cup \{v\}$ ó $C_2 \cup \{v\}$ son una gráfica completa ó un ciclo impar, el vértice de corte v en $C_1 \cup \{v\}$ ó $C_2 \cup \{v\}$ tiene grado máximo, y por teorema 3.7 G es Δ_G coloreable; por lo que se puede suponer que $C_1 \cup \{v\}$ y $C_2 \cup \{v\}$ no son gráficas completas ni ciclos impares. Así, $C_1 \cup \{v\}$ por hipótesis de inducción es Δ_G coloreable. Análogamente, es posible colorear $C_2 \cup \{v\}$ con Δ_G colores. Sean ϕ_1 y ϕ_2 las coloraciones de $C_1 \cup \{v\}$ y de $C_2 \cup \{v\}$ respectivamente; observese que si $\phi_1(v) = \phi_2(v)$ entonces $\phi_1 \cup \phi_2$ es una coloración propia de G; en caso contrario es posible permutar colores en $C_1 \cup \{v\}$ de manera tal que el color usado en v sea el mismo en ambas componentes obteniéndose una coloración propia de G.

Supongase por tanto que G es al menos 2-conexa, entonces existen dos casos de acuerdo a la conexidad de G:

Caso 1: G es 2-conexa pero no es 3-conexa. Supongase que G contiene vértices con grado distinto de dos ó $(n-1)$, ya que, si G contiene solo vértices de grado 2 (i.e. G es un ciclo par), entonces es dos coloreable, asignando el primer color a los vértices nones y el segundo color a los vértices pares, verificándose el teorema ($\Delta_G = 2$). También se sabe que G no contiene sólo vértices de grado $(n-1)$, ya que no es una gráfica completa. Si G contiene vértices de grado dos y de grado $(n-1)$ (y no otros), entonces G forzosamente debe contener dos vértices de grado $(n-1)$ y $(n-2)$ vértices de grado 2, lo que implica $\chi(G) = 3$, ya que los vértices de grado dos no son adyacentes y pueden colorearse con un mismo color, cumpliéndose el teorema.

Sea u un vértice de G tal que, $2 < gr_G(u) < (n-1)$; y $a, b \in V_G$. Pueden darse dos circunstancias:

- Si $G \setminus u$ sigue siendo 2-conexa; sea $a = u$ y b un vértice a distancia 2 de u (este vértice b existe, ya que u no es adyacente a todos los vértices de $G \setminus u$).

- Si $G \setminus u$ no es 2-conexa, es decir es 1-conexa, consideremos dos bloques finales B_1 y B_2 de $G \setminus u$ y como G es 2-conexa, sea $a \in B_1$ y $b \in B_2$ dos vértices de corte, vecinos a u, no adyacentes entre si.

En las dos situaciones tenemos que:

G tiene dos vértices a y b a distancia 2, tal que $G \setminus \{a, b\}$ es conexa.

Caso 2: G es 3-conexa. Sean a y b vértices a distancia 2 en G i.e. $d(a, b) = 2$; La existencia de estos vértices se sigue del hecho de que G no es completa.

Sea w un vértice vecino a a y b. Como $G \setminus \{a, b\}$ es conexa podemos ordenar los vértices de G en forma sucesiva $[v_1, \ldots, v_n]$, tal que $v_1 = a$, $v_2 = b$ y cada vértice v_i con $i \geq 3$ está ordenado de forma no creciente de acuerdo a su distancia al vértice w, designando al vértice $v_n = w$ y para $1 \leq i \leq n$, v_i es adyacente a algún v_j con $j > i$.

Definamos ahora una Δ_G-coloración como sigue:

A los vértices a y b les asignamos el color 1, que al no ser adyacentes es una coloración propia; y coloreamos $v_3, v_4, \ldots, v_{n-1}$ con uno de los colores $1, \ldots, \Delta_G$, lo que es siempre posible, ya que cada vértice tiene menos de Δ_G vecinos ya coloreados.

Obsérvese finalmente, que w tiene dos vecinos a y b con el mismo color, de tal manera que podemos colorearlo con un color distinto de 1. De forma que se obtiene:

$$\chi(G) \leq \Delta_G.$$

∎

Demostraciones alternativas a este teorema pueden encontrarse en [Ber89, págs. 338-339], [BCL69, págs.233-234].

Desafortunadamente, esta cota no es siempre satisfactoria. En particular, si G contiene pocos vértices de grado máximo, la cota dada por el teorema de Brooks puede resultar pobre. Por ejemplo, si G es la gráfica bipartita $K_{1,h}$ (es decir la estrella) con h suficientemente grande, entonces $\chi(G) = 2$, mientras que por el teorema de Brooks sólo tenemos $\chi(G) \leq h$, i.e difiere del número cromático en $h-2$. Su verdadera fuerza radica en ser muy general, lo que permite usar este resultado en gran cantidad de casos. Una cota mejor en varios casos es la desigualdad observada por R. Halin, en 1967 y por G. Szekeres y H.S.Wilf, en 1968 [Har77, págs. 127-128]. Contrariamente al teorema de Brooks involucra al grado mínimo.

Teorema 3.9 *Sea G una gráfica, entonces*

$$\chi(G) \leq 1 + \max \delta(G')$$

donde el máximo se toma sobre todas las subgráficas inducidas G' de G.

Demostración: Si tenemos una gráfica nula, el teorema es inmediato. Sea G una gráfica k-cromática, con $k \geq 2$. Sea H cualquier subgráfica inducida minimal de G tal que $\chi(H) = k$, es decir, que H tiene la propiedad $\chi(H - v) = k - 1$ para cualquier vértice $v \in H$. Por consiguiente $gr(v) \geq k - 1$ por lo que $\delta(H) \geq k - 1$ y por tanto

$$k - 1 \leq \delta(H) \leq \max \delta(H') \leq \max \delta(G'),$$

donde H' representa a las subgráficas inducidas de H y G' son las subgráficas inducidas de G. Lo que implica:

$$\chi(G) = k \leq 1 + \max \delta(G').$$

∎

Este teorema ciertamente, corrige la cota superior para el número cromático de $K_{1,h}$ dando el número cromático exacto $\chi(K_{1,h}) = 2$; y dado que cualquier gráfica plana tiene grado mínimo a lo más 5 y cualquier subgráfica de una gráfica plana es plana, el teorema 3.9 muestra que el número cromático de las gráficas planas no puede ser mayor a 6. Si G es una gráfica regular de grado k, ambos teoremas dan la cota superior de $k+1$, que para muchas gráficas k-regulares como por ejemplo $K_{k,k}$ resulta ser una cota pobre.

Desde luego existen otras cotas superiores para el número cromático de vértices; el siguiente resultado debido a T. Gallai acota superiormente el número cromático en términos de la longitud de la trayectoria más larga.

Teorema 3.10 *Sea G una gráfica, entonces*

$$\chi(G) \leq 1 + m(G),$$

donde $m(G)$ denota la longitud de la trayectoria más larga en G.

■

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [BCL69, págs. 237-238].

Por otro lado, C. Berge y O. Ore en 1962 y F. Harary y Hedetniemi en 1969, obtuvieron cotas, que involucran el número de independencia α_G, el cual se define como el máximo número de vértices independientes en una gráfica. Estos dos resultados pueden resumirse en el teorema siguiente [Har77, pág. 128].

Teorema 3.11 *Sea G una gráfica, entonces*

$$\frac{n}{\alpha_G} \leq \chi(G) \leq n - \alpha_G + 1.$$

Demostración: Si $\chi(G) = k$, entonces V_G puede particionarse en k clases cromáticas $V_1, V_2, \ldots, V_k$ cada una de las cuales es un conjunto independiente de vértices. Si $\mid V_i \mid = n_i$, entonces cada $n_i \leq \alpha_G$ por lo que al hacer la suma $n = \sum n_i \leq n\alpha_G$.

Por otro lado, sea S un conjunto independiente maximal con α_G vértices. Obsérvese que $\chi(G-S) \geq \chi(G) - 1$, y como $G - S$ tiene $n - \alpha_G$ vértices, $\chi(G-S) \leq n - \alpha_G$. Por lo que,

$$\chi(G) \leq \chi(G-S) + 1 \leq n - \alpha_G + 1.$$

■

Sin embargo, ninguna de las cotas presentadas es particularmente buena, ya que para cada una de ellas y para cada entero positivo k, existe una gráfica G tal que $\chi(G)$ es menor por k colores que dicha cota.

3.3 Otros Enfoques

Analizando el problema de coloración de vértices, se puede llegar a pensar que las gráficas con número cromático muy grande, debieran tener clanes muy grandes y consecuentemente triángulos. Así, en 1953 G. A. Dirac, se pregunta acerca de la existencia de gráficas sin triángulos con número cromático grande. Esto fue respondido afirmativa e independientemente por W. T. Tutte, J. Mycielski y A. A. Zikov; resultados que posteriormente fueron generalizados por J. B. Kelly y L. M. Kelly, de donde nació la conjetura del teorema siguiente que fué demostrado primero por P. Erdös y posteriormente por L. Lovász (véase [BCL69, pág. 242] y [Har77, pág. 129]).

Teorema 3.12 *Para cada dos enteros positivos j y k, existe una gráfica k-cromática tal que todo ciclo impar contenido en la gráfica tiene cardinalidad mayor que j.*

∎

Existen de hecho muchas más ideas para acotar el número cromático, otra de estas es la desarrollada por E. A. Nordhaus y J. W. Gaddum, quienes observaron las relaciones entre el número cromático de una gráfica G y el número cromático de G^C; como se observa a continuación (véase [Har77, pág. 129], [Ber89, págs. 331-334] ó [BCL69, págs. 243-244]).

Teorema 3.13 *Para cualquier gráfica G, se satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(G^C) \leq n + 1,$$

$$n \leq \chi(G)\chi(G^C) \leq (\frac{n+1}{2})^2.$$

■

Otras iniciativas que han dado frutos en el problema de coloraciones son: el considerar gráficas k-cromáticas minimales, a las que se denomina gráficas críticas; sobre este tipo de gráficas se tienen gran cantidad de resultados, lo que muchas veces facilita las demostraciones. La de observar todas las maneras posibles de colorear los vértices de la gráfica, incrementando el número de colores disponibles hasta obtener una coloración propia; definiéndose entonces la función $P_G(k)$ como el número de maneras de colorear propiamente los vértices de G con k colores, y que recibe el nombre de polinomio cromático de G. Asimismo, el estudio de las gráficas que solo tienen una manera de colorearse, a las que se llama únicamente coloreables presenta otra forma de atacar el problema de coloración.

Aunque la importancia de las gráficas críticas y los polinomios cromáticos y las gráficas únicamente coloreables es innegable en el problema de coloración, no se hablará de ellos en este trabajo; ya que nos centraremos en acotar las coloraciones, por medio de él grado máximo de la gráfica (referencias a estos enfoques pueden encontrarse en [Ber89] y [Har77]).

Capítulo 4

Coloración de Aristas

Uno debería ser siempre un poco improbable

Oscar Wilde.

El presente capítulo, intenta presentar los resultados más sobresalientes dentro de la Coloración de Aristas; muy especialmente, el teorema de Vizing que acota el índice cromático haciendo uso del mismo invariante (el grado máximo), utilizado en el capítulo anterior para acotar el número cromático. Finalmente, se presentan algunos resultados acerca de los llamados Problemas de Clasificación, en los que desembocó el problema de coloració de aristas. Referencias sobre este tema pueden encontrarse en [Ber89, 245-268] y muy especialmente en [FW77].

4.1 El Problema General y Ciertas Clases de Gráficas

Una vez introducido el concepto de coloración en aristas por P. G. Tait en el ocaso del siglo pasado, este, comenzó a desarrollarse, pero fue hasta 1916, cuando se estudió como un problema independiente del Problema de los cuatro colores. Desde luego, el hablar de coloración de aristas en una gráfica G tiene sentido únicamente, si G tiene al menos una arista. Si se utiliza el concepto de gráfica de línea, el índice cromático de G resulta ser igual al número cromático de $L(G)$: de donde, algunas veces se usa esta relación entre $\chi_A(G)$ y $\chi(L(G))$ para obtener resultados sobre el índice cromático a partir de resultados conocidos sobre el número cromático. Al igual que en el problema de coloración de vértices, la obtención de una buena cota inferior es directa, al observar el grado máximo de la gráfica Δ_G, para obtener $\chi_A(G) \geq \Delta(G)$ [BCL69, pág. 245], el caso difícil resulta ser la cota superior.

Algunas cotas del índice cromático para ciertas clases de gráficas son las siguientes [WW90, págs. 242-243]:

Teorema 4.1 *Sea C_n un ciclo y K_n una gráfica completa con n vértices, entonces*

$$\chi_A(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$\chi_A(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

■

Otro ejemplo es el índice cromático para gráficas bipartitas completas que se puede verificar fácilmente [FW77, pág. 24].

Teorema 4.2 *El índice cromático de las gráficas bipartitas completas $K_{r,s}$ está determinado por*

$$\chi_A(K_{r,s}) = \max\{r, s\}.$$

■

De hecho el teorema 4.2 es un caso especial de un teorema encontrado por D. Kónig en 1916 ([Wil83, pág. 128] ó [FW77, pág. 25], que acota el índice cromático para gráficas bipartitas generales y que dió inició al estudio de la coloración de aristas como tal.

Teorema 4.3 *Si G es bipartita, entonces las aristas de G pueden colorearse con Δ_G colores.*

Demostración: Por inducción sobre el número de aristas. Sea G una gráfica bipartita, es suficiente probar que si todas las aristas de G excepto una, han sido coloreadas usando a lo más Δ_G colores, entonces existe una Δ_G-coloración de aristas en G.

Supongamos que todas las aristas de G excepto una han sido coloreadas con uno de los Δ_G colores dados. Sea $a = (v, w)$ la arista no coloreada, entonces debe existir al menos un color no asignado a las aristas incidentes al vértice v, y al menos un color no asignado a las incidentes a w. Si el color faltante en las aristas incidentes a los vértices v y w es el mismo, entonces es posible usar este color para colorear a y la demostración termina. En caso contrario, sea α un color no usado en las aristas incidentes a v y sea β ($\neq \alpha$) un color no usado en las aristas incidentes a w; sea H_w la componente conexa de la subgráfica de G, inducida por las aristas coloreadas con color α y β, y que contiene al vértice w. Obsérvese que H_w, no contiene a v; si este fuera el caso, entonces la trayectoria de w a v más la arista (v, w), formaría un ciclo de cardinalidad impar, lo cual contradice el hecho de que G es bipartita. De forma que, podemos intercambiar los colores α y β en H_w sin afectar al resto de la coloración para finalmente asignar el color α a la arista a, completándose así la demostración.

∎

4.2 Acotando el Indice Cromático

el primer resultado que acota el indice cromático de una gráfica general se debió a C. E. Shannon, quien en 1949, lo demostró inicialmente en el contexto de redes eléctricas.

Teorema 4.4 (Teorema de Shannon) *Si G es una multigráfica, entonces*

$$\chi_A(G) \leq \frac{3}{2}\Delta_G.$$

La demostración del teorema 4.4 puede encontrarse en [FW77, págs. 33-34], y se puede deducir del teorema 4.6.

Para ciertas gráficas con aristas múltiples el teorema 4.4 proporciona la mejor cota superior; sin embargo, si se restringe a gráficas simples, se pueden obtener cotas considerablemente más ceñidas para el índice cromático, la más importante de ellas es el llamado Teorema de Vizing, demostrado en 1964 por V. G. Vizing e independientemente en 1967 por R. P. Gupta [FW77, págs. 30-32]; en el que se determina el índice cromático a través del grado máximo de la gráfica.

Teorema 4.5 (Teorema de Vizing) *Si G es una gráfica simple, entonces*

$$\Delta_G \leq \chi_A(G) \leq \Delta_G + 1.$$

Demostración: Obsérvese que se necesitan al menos Δ_G colores para colorear las aristas incidentes a un vértice de grado máximo. Para demostrar que $\chi_A(G) \leq \Delta_G+1$ se usará inducción sobre el número de aristas de G; más precisamente, se demostrará que si todas las aristas de G menos una están coloreadas con Δ_G+1 colores, entonces existe una $(\Delta_G + 1)$-coloración de las aristas de G.

Sea $H_{i,j}$ la subgráfica de G inducida por las aristas coloreadas con los colores i y j. Supóngase que toda arista de G ha sido coloreada con uno de los $\Delta_G + 1$ colores dados, con excepción de la arista $a_1 = (v, w_1)$. Entonces debe existir al menos un color α no usado en las aristas incidentes al vértice v, e igualmente, debe existir al menos un color β_1 no utilizado en las aristas incidentes a w_1. Si el color α es el mismo que el color β_1, entonces se puede tomar este color α para colorear a_1, completandose la demostración.

Si en cambio, los colores α y β_1 son distintos, sea $a_2 = (v, w_2)$ una arista incidente a v coloreada con el color β_1; esta arista existe, ya que de otra forma el color β_1 no se utilizaría en v y w_1, contrariamente a lo supuesto. Ahora, asígnese a a_1 el color β_1 y decolórese la arista a_2. Podemos entonces asumir que los vértices v, w_1 y w_2 pertenecen a la misma componente en H_{α,β_1}, ya que de no ser así, se puede intercambiar los colores en las aristas de la componente que contiene a w_2 sin alterar el color de a_1; esto significaría que es posible asignar el color α a la arista a_2, completando así la coloración de las aristas de G.

Ahora, sea β_2 el color no usado en w_2. Se puede suponer que β_2 ya ha sido usado en v, ya que en caso contrario es posible tomar β_2 para colorear a_2, concluyéndose la demostración. Sea $a_3 = (v, w_3)$ la arista incidente a v, coloreada con color β_2. Es posible quitar el color de la arista a_3 y asignarle este color β_2 a la arista a_2. Siguiendo el mismo argumento que en el paso anterior, se puede asumir que los vértices v, w_2 y w_3 pertenecen a la misma componente conexa en H_{α,β_2}.

Si se repite el procedimiento anterior, eventualmente encontraremos un vértice w_k adyacente a v, tal que la arista $a_k = (v, w_k)$ no esté coloreada y el color β_i con $i \leq k-1$ no se haya utilizado en el vértice w_k. Como hicimos anteriormente, ya que los vértices v, w_i y w_{i+1} pertenecen a la misma componente conexa C de H_{α,β_i}, tal que α no ha sido usado en v, ni β_i en w_{i+1},de donde se deduce que C debe ser una cadena de v a w_{i+1} que pasa a través de w_i, y que contiene únicamente aristas con los colores α y β_i alternadamente (figura 4.1). Es claro que, esta cadena no

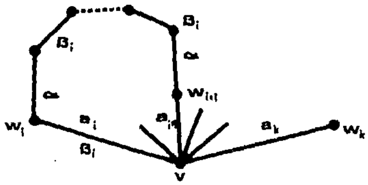


Figura 4.1. Representación de C.

contiene a w_k, ya que β_i no se ha utilizado en w_k. De donde, se sigue que si $\hat{C}$ es una componente conexa de H_{α,β_t} que contiene al vértice w_k, entonces C y $\hat{C}$ son ajenas. Por lo que, es posible intercambiar los colores de las aristas en $\hat{C}$, coloreando la arista a_k con el color α, completandose así la demostración.

■

Vizing también obtuvo una cota superior para el índice cromático de multigráficas, la cual es algunas veces mejor que la cota dada por C. E. Shannon inicialmente. La versión del teorema de Vizing para multigráficas involucra la multiplicidad μ de la multigráfica, estableciéndose como sigue:

Teorema 4.6 *Si M es una multigráfica con grado máximo Δ_M y multiplicidad μ, entonces*

$$\Delta_M \leq \chi_A(M) \leq \Delta_M + \mu(M).$$

■

Este teorema, que también obtuvo independientemente R. P. Gupta, es claramente mejor que el teorema 4.4 cuando M es una multigráfica con $\mu \leq \Delta_M$.

Para finalizar esta sección demostraremos el teorema 4.4 usando el teorema 4.6.

Demostración (del teorema 4.4): Sea M una multigráfica tal que $\chi_A(M) = k$. Se puede suponer que $\chi_A(M - a) = k - 1$, para cada arista $a \in M$, borrando suficientes aristas de M (si es necesario). A partir del teorema 4.6 se sigue que $k \leq \Delta_M + \mu$, por lo que deben existir dos vértices u y v para los cuales $\mu(u, v) \geq k - \Delta_M$.

Colorear ahora todas las aristas de M excepto una arista a de las que unen u con v; dicha coloración puede hacerse con $k - 1$ colores, ya que $\chi_A(M - a) = k - 1$.

Ahora el número de colores no adyacentes a u ó a v (ó a ambos) no puede ser mayor que $(k-1)-(\mu-1)$, lo que a su vez es menor que Δ_M, ya que $k \leq \Delta_M + \mu$. Pero, el número de colores no adyacentes a u es al menos $(k-1)-(\Delta_M - 1) = k - \Delta_M$, y similarmente, el número de colores no adyacentes a v es al menos $k - \Delta_M$. De donde se sigue, considerando que que el número de colores no adyacentes a ambos u y v es al menos $2(k-\Delta_M) - \Delta_M$ (recordando que el número de colores no adyacentes a ambos es menor que Δ_M), que como $k > \frac{3}{2}\Delta_M$, entonces $2(k-\Delta_M) - \Delta_M$ es un número mayor que cero. Si asignamos uno de estos colores no adyacentes a u y v a la arista no coloreada que une u y v, tendremos coloreadas todas las aristas de M usando solamente $k-1$ colores, lo que contradice el hecho de que $\chi_A(M) = k$, verificandose el teorema.

■

4.3 El Problema de Clasificación y las Gráficas Planas

Regresando a las gráficas simples y al resultado más importante en coloración de aristas, es decir, al teorema de Vizing (teorema 4.5), tenemos que el índice cromático de cualquier gráfica G con grado máximo Δ_G nos proporciona inmediatamente una forma simple de clasificar las gráficas en dos clases de la siguiente manera: sea G cualquier gráfica simple; si $\chi_A(G) = \Delta_G$, se dice que la gráfica G es de **Clase 1.** Mientras que si $\chi_A(G) = \Delta_G + 1$, se dice que la gráfica G es de **Clase 2.** El **Problema de Clasificación** es entonces el problema de decidir, que gráficas son de clase 1 y cuales son de clase 2.

Ejemplos del problema de clasificación resultan inmediatos de la definición de los índices cromáticos de las gráficas completas y los ciclos, que son de clase 1 si su número de vértices n es par y pertenecen a la clase 2, cuando n es impar. Otro ejemplo es el teorema de König (teorema 4.3), que establece que las gráficas bipartitas son de clase 1.

La importancia y dificultad de este problema comienza al parecer cuando su solución implica el teorema de los cuatro colores; al deducirse de los resultados de P. G. Tait (teorema 3.5), que el teorema de los cuatro colores es equivalente a establecer que cada mapa cúbico es de clase 1.

A través del problema general de decidir cuales gráficas pertenecen a la clase 1 y cuales a la clase 2 que todavía no está resuelto, se observa que las gráficas de clase 2, son relativamente escasas. Un resultado de este tipo se debe a P. Erdős y R. J. Wilson, quienes probaron que la probabilidad $P(n)$ de que una gráfica aleatoria con n vértices sea de clase 1, tiende a ser 1 cuando n tiende a infinito; con lo que podemos decir que la mayoría de las gráficas son de clase 1. Sin embargo, el problema de decidir cual clase contiene más gráficas dado el grado máximo Δ_G, es más difícil y no se tienen progresos sobre él, ignorándose incluso para el caso en que $\Delta_G = 3$.

Es natural pensar que entre más aristas tenga una gráfica, es más probable que sea de clase 2. Esta idea, se expresa precisamente en el resultado siguiente, lo que nos da una condición suficiente para que una gráfica sea de clase 2 [FW77, pág. 37].

Teorema 4.7 *Si G es una gráfica tal que $m > \Delta_G[\frac{1}{2}n]$, entonces G es de clase 2.*

Demostración: Si G es de clase 1, entonces cada Δ_G-coloración de sus aristas particiona el conjunto A_G en a lo más Δ_G clases cromáticas. Pero el número de aristas en cada clase cromática no puede ser mayor a $\frac{1}{2}n$, ya que de otra forma, dos aristas en una misma clase cromática serían adyacentes, de donde se sigue que $m \leq \Delta_G[\frac{1}{2}n]$.

■

Si nos restringimos a gráficas planas, encontramos que es nuevamente V. G. Vizing quien aporta el teorema más importante. Antes de esto el propio Vizing, usando el hecho de que cualquier gráfica plana contiene un vértice cuyo grado es a lo más 5 (teorema 2.1) probó en 1965 el siguiente teorema [FW77, pág. 106]:

Teorema 4.8 *Si G es una gráfica plana con grado máximo $\Delta_G \geq 10$, entonces G es de clase 1.*

■

En el mismo año, V. G. Vizing demostró el siguiente teorema que supera al anterior.

Teorema 4.9 *Si G es una gráfica plana con grado máximo $\Delta_G \geq 8$, entonces G es de clase 1.*

■

Como referencia, la demostración de este teorema se encuentra en [FW77, págs. 106-107].

El teorema 4.9 es el más importante hasta el momento dentro del problema de clasificación para gráficas planas. Una consecuencia de este teorema surge al preguntarse que sucede si el grado máximo de la gráfica es menor que 8. No es muy difícil observar que si el grado máximo de G es 2,3,4 ó 5, entonces G puede ser de clase 1 ó de clase 2. Ejemplos de gráficas planas de clase 2 son las gráficas obtenidas al insertar un vértice en cada arista de el tetraedro ($\Delta_G = 3$), el octaedro ($\Delta_G = 4$), el icosaedro ($\Delta_G = 5$), y los ciclos impares ($\Delta_G = 2$). Sin embargo, el problema de determinar lo que sucede en gráficas con grado máximo 6 ó 7 está todavía abierto. Aunque al respecto V. G. Vizing presentó la siguiente conjetura, que es conocida como La Conjetura de las Gráficas Planas.

Conjetura 4.1 (Conjetura de las Gráficas Planas) *Si G es una gráfica plana con grado máximo $\Delta_G \geq 6$, entonces G es de clase 1.*

Desde luego, si esta conjetura es cierta, entonces las gráficas planas con $\Delta_G \geq 7$ son de clase uno. Suponiendo que no es fácil demostrar La Conjetura de las Gráfica Planas, se ha seguido la idea de resolver parcialmente el problema en clases específicas de gráficas. Intentando acotar el número de vértices de cierto grado en una gráfica S. Fiorini demostró en 1974 que si G es una gráfica plana de clase dos con $\Delta_G = 7$, entonces G debe tener al menos 6 vértices de grado 7. Esto hace suponer que el restringir el número de vértices de grado máximo, puede llevar a obtener buenos resultados [FW77].

Capítulo 5

Coloración Total

Un uno sólo es un uno,
pero uno y una son tres.
Si no fueras tú como eres,
tan cristalina como es
el agua no fuera el agua
ni fueran dos y una tres.

Renato Leduc.

Aquí se presentan los resultados principales que acotan el número cromático total. Como se ha hecho anteriormente nos centraremos en las cotas superiores, para finálmente demostrar los teoremas más recientes haciendo uso del grádo máximo de la gráfica a través de la idea de extender coloraciones de vértices. Particularmente para esta parte, se utilizaron las siguientes referencias [San91] [BCC67], [Che90] y [Hin90].

5.1 Primeros Resultados

En lo referente a coloraciones totales, es fácil observar que un vértice de grado máximo es incidente a Δ_G aristas, por lo que son necesarios al menos Δ_G colores para colorear las aristas y un color más para colorear el vértice en el que inciden, lo que implica directamente una cota inferior para el número cromático total; sin embargo, la obtención de una buena cota superior para este número, no resulta tan directa, la cota perfecta se establece en la siguiente conjetura:

Conjetura 5.1 *Si G es una gráfica simple, entonces $\chi_T(G) \leq \Delta_G + 2$*

La demostración a la conjetura 5.1 elaborada por M. Behzad en 1965, e independientemente V.G. Vizing en 1968, llamada la CONJETURA DE LAS COLORACIONES TOTALES sigue siendo la inquietante meta para los que trabajan en esta área de la teoría de las gráficas. Así mismo M. Behzad y V.G. Vizing extendieron su conjetura a multigráficas con multiplicidad $\mu(G)$, de la siguiente forma:

Conjetura 5.2 *Si G es una multigráfica con multiplicidad $\mu(G)$, entonces*

$$\chi_T(G) \leq \Delta_G + \mu(G) + 1$$

M. Behzad, G. Chartrand y J.K. Cooper en 1967 determinaron el número cromático total de algunas gráficas: las gráficas completas y las bipartitas completas; lo que constituye el siguiente teorema [BCC67].

Teorema 5.1 *El número cromático total para las gráficas completas K_n y las gráficas bipartitas completas $K_{n,m}$ esta determinado por:*

$$\chi_T(K_n) = \begin{cases} \Delta_{K_n} + 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \Delta_{K_n} + 2 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

$$\chi_T(K_{n,m}) = \begin{cases} \Delta_{K_{n,m}} + 1 & si\ n \neq m, \\ \Delta_{K_{n,m}} + 2 & si\ n = m. \end{cases}$$

■

Posteriormente, se da el siguiente teorema para ciclos por Vijayaditya [Vij71], completado por M. Behzad en 1971 [Beh71].

Teorema 5.2 *Sea C_n un ciclo, entonces*

$$\chi_T(C_n) = \begin{cases} 3 & si\ n \equiv 0 \pmod 3, \\ 4 & si\ n \not\equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

■

Una generalización de este resultado para ciclos fué dada por J. C. Meyer en 1976 [Mey76]. J.C. Meyer considera el producto cartesiano de un ciclo con r vértices y una gráfica nula de n vértices, que denotaremos por $C_r \otimes N_n$. La gráfica $C_r \otimes N_n$ se obtiene remplazando cada vértice v_i del ciclo por un conjunto independiente de n vértices S_i (la gráfica nula), uniendo posteriormente, cada pareja de vértices que pertenecen a conjuntos consecutivos S_i y S_{i+1}. Obsérvese que estas gráficas son $2n$-regulares y en particular cuando $n = 1$, la gráfica es el ciclo ordinario, clasificado anteriormente por M. Behzad.

Teorema 5.3

$$\chi_T(C_r \otimes N_n) = \begin{cases} 2n+2 & si\ n \geq 2\ y\ r = 4, \\ 2n+1 & si\ n \geq 2,\ r \neq 4\ y\ (r,n) \neq (7,2), \\ 6 & si\ n = 2\ y\ r = 7. \end{cases}$$

■

Antes que esto, en 1971, M. Rosenfeld considerando varias clases de gráficas, probó que las gráficas *k-partitas balanceadas completas*, satisfacen la conjetura del número cromático total [Ros71]. Estas gráficas se definen como gráficas k-partitas en las cuales cada uno de los k conjuntos de la partición tiene n vértices, cada vértice conectado a todos los vértices que están en diferente conjunto. En este mismo artículo M. Rosenfeld demostró que las gráficas *3-partitas completas* (donde los conjuntos de la partición pueden tener distintos tamaños) y las gráficas con $\Delta_G = 3$ también satisfacen la conjetura del número cromático total.

Teorema 5.4 *Si G es una gráfica k-partita balanceada completa, una gráfica 3-partita completa o una gráfica con grado máximo 3, entonces $\chi_T(G) \leq \Delta_G + 2$.*

∎

En el mismo año N. Vijayaditya independientemente demostró la misma cota para gráficas de grado máximo 3 [Vij71]. En 1977, A.V. Kostochka probó la conjetura para multigráficas con grado máximo 4 [Kos77], y M. Behzad extendió a multigráficas el caso de las gráficas con grado máximo 3 [Beh71].

En 1972, R. Lasker y W. Hare elaboraron una generalización del resultado para gráficas k-partitas balanceadas completas [LH72]. Conjetura que fué probada con una ligera modificación por J.C.Bermond en 1974 [Berm74].

Teorema 5.5

$$\chi_T(K_{n\times m}) = \begin{cases} \Delta_{K_{n\times m}} + 1 & \textit{si } n \textit{ es impar o si } n \textit{ y } m \textit{ son pares con } n \neq 2, \\ \Delta_{K_{n\times m}} + 2 & \textit{si } n = 2, \textit{ o si } n \textit{ es par y } m \textit{ es impar.} \end{cases}$$

■

H.P. Yap, en 1989 extendió el resultado de M. Rosenfeld sobre las gráficas 3-partitas completas con el siguiente teorema [San91, págs. 28-29]:

Teorema 5.6 *Sea G una gráfica k-partita completa, entonces $\chi_T(G) \leq \Delta_G + 2$.*

Demostración: Sea G una gráfica k-partita completa con partición $G = \{O_1, O_2, \ldots, O_k\}$ donde $| O_i | \leq | O_{i+1} |$ para $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Se tiene que $\Delta_G = n - | O_1 |$. Tómese $S = V_{O_k}$. Entonces $| S | = | O_k | \geq n - \Delta_G - 1$ de donde se sigue el resultado a partir del siguiente lema [YWZ89]:

Lema 5.1 *Si una gráfica G contiene un conjunto independiente de vértices S tal que $| S | \geq n - \Delta_G - 1$, entonces*

$$\chi_T(G) \leq \Delta_G + 2.$$

Demostración: Sea M un acoplamiento maximal en $G \setminus S$ y sea G' la gráfica obtenida al agregar un nuevo vértice $w \notin V_G$ a $G \setminus M$ y las aristas que unen w con cada vértice en $G' \setminus S$. Por esta construcción se tiene que $\Delta_G + 1 \geq \Delta_{G'} \geq \Delta_G$. Entonces si $\Delta_{G'} = \Delta_G$, por el teorema de Vizing para multigráficas (4.6) $\chi_A(G') \leq \Delta_G + 1$ Por otra parte, si $\Delta_{G'} = \Delta_G + 1$, entonces G' es un bosque y por lo tanto

$\chi_A(G) = \Delta_G + 1$. Consecuentemente, se puede extender una coloración de las aristas de G', asignando el color de las aristas (w, v) a los vértices $v \in V_{G\setminus S}$ y un nuevo color α para los vértices en S y las aristas de M.

■

Como se observa, el teorema 5.5 es un caso particular del teorema 5.6.

Continuando con las gráficas k-partitas en 1992 K. H. Chew y H. P. Yap demostraron el siguiente teorema [CY92]

Teorema 5.7 *Si G es una gráfica k-partita completa tal que $| V_G |= 2r-1$, entonces*

$$\chi_T(G) = \Delta_G + 1.$$

■

A.G. Chetwynd y A.J.W. Hilton extendiendo resultados de coloración de aristas, encontraron nuevas clases de gráficas que satisfacen la conjetura de las coloraciones totales [CH88] como la siguiente:

Teorema 5.8 *Sea G una gráfica regular. Si G tiene orden impar y $\Delta_G \geq \frac{6}{7} \mid V_G \mid$ o si tiene orden par y $\Delta_G \geq \frac{3}{4} \mid V_G \mid$, entonces*

$$\chi_T(G) \leq \Delta_G + 2.$$

■

Otra clase de gráficas en las cuales la conjetura 5.1 ha sido casi resuelta, son las gráficas planas, para las cuales O.V. Borodin obtuvo el siguiente resultado [Bor89].

Teorema 5.9 *Sea G una gráfica plana simple, entonces*

$$\chi_T(G) \leq \begin{cases} \Delta_G + 2 & si\ \Delta_G \notin \{6,7,8\}, \\ \Delta_G + 3 & si\ \Delta_G \in \{6,7,8\}. \end{cases}$$

■

En el mismo artículo O.V. Borodin muestra, que si G es plana simple con $\Delta_G \geq 14$, entonces $\chi_T(G) = \Delta_G + 1$. En [San91] A. Sánchez-Arroyo actualizó el teorema 5.9 al caso en que $\Delta_G \neq 6$ y 7.

Concluiremos esta sección con el siguiente teorema de A.G. Chetwynd y R. Häggkvist [CH88] para gráficas sin triángulos (que no contienen ciclos de cardinalidad 3). Que tiene origen en la coloración de listas.

Teorema 5.10 *Si G es una gráfica sin triángulos, entonces*

$$\chi_T(G) \leq \frac{9}{5}\Delta_G + 2.$$

■

5.2 Las Cotas Superiores

El primer resultado publicado sobre las cotas superiores se debe a M. Behzad, G. Chartrand y J.K. Cooper en 1967 [BCC67] en el que mostraron:

Teorema 5.11 *Para cualquier gráfica G*

$$\chi_T(G) \leq \chi(G) + \chi_A(G)$$

con igualdad sólo si G es bipartita.

Demostración: Supóngase que G no es una gráfica bipartita y $\chi_T(G) = \chi(G) + \chi_A(G)$. Considérese una coloración ϕ de los vértices de G con clases cromáticas $V_1, V_2, \ldots, V_{\chi(G)}$; y una coloración ψ de las aristas de G con clases cromáticas $E_1, E_2, \ldots, E_{\chi_A(G)}$; donde $V_i \neq E_j$. Entonces "$\phi + \psi$" es una coloración total de G.

Ahora, como $\chi(G) \geq 3$ tenemos que para cada $a \in E_1$ existe algún V_r cuyos vértices no son incidentes con a. Si cada arista de E_1 se colorea con dicho color V_r, entonces la coloración resultante forma de nuevo una coloración total propia. De forma tal que el color de E_1 podría borrarse de la coloración total, por lo que $\chi_T(G) < \chi(G) + \chi_A(G)$.

■

Usando el teorema 4.2 de Kõnig para gráficas bipartitas B, se deduce que $\chi_T(B) \leq \Delta_B + 2$, obteniéndose la conjetura 5.1 para gráficas bipartitas. Por otro lado, este teorema es una cota directa para el número cromático total, que junto con el teorema de Brooks para coloración de vértices, y el teorema de Vizing para coloración en aristas hace posible que se pueda deducir la cota $\chi_T(G) \leq 2\Delta_G$ cuando G es una gráfica no completa con $\Delta_G \geq 2$. Más aún, del argumento de extender una coloración de vértices dada a una coloración total, Sanchez-Arroyo obtuvo el siguiente resultado [San91, pág. 43]:

Teorema 5.12 *Para cualquier gráfica G*

$$\chi_T(G) \leq \chi_A(G) + \left[\frac{1}{2}\chi(G)\right] + 1$$

Demostración: Supóngase que $\chi(G) = 2k + 1$; a continuación se mostrará como recolorear las primeras k clases cromáticas en la coloración ψ por aristas, usando inducción sobre k.

Si $k = 1$ úsese la demostración del teorema 5.11 para $\chi(G) = 3$. Ahora, por la hipótesis de inducción solo nos resta recolorear E_k. Obsérvese, que el mismo argumento funciona, es decir que para cada arista $a = (u, v) \in E_k$ existe una clase cromática V_r tal que ninguno de sus elementos es incidente ni adyacente a a. Para

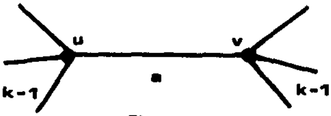


Figura 5.1.

ver esto obsérvese que hay a lo más $k - 1$ aristas coloreadas incidentes a u y v, tomándose en cuenta los colores $\phi(u)$ y $\phi(v)$, se tiene que a es adyacente con a lo más $2k$ colores. De tal forma, que podemos recolorear a con algún color digamos r. Si cada arista de E_k se recolorea con dicho color, entonces los conjuntos resultantes forman una coloración total propia. Esto se debe a que E_k es una clase cromática.

Consecuentemente, el color de E_k también puede ser eliminado de la coloración total, cumpliéndose:

$$\begin{aligned}
\chi_T(G) &\leq \chi(G) + \chi_A(G) - k \\
&\leq 2k + 1 + \chi_A(G) - k \\
&\leq \chi_A(G) + \left[\frac{1}{2}\chi(G)\right] + 1.
\end{aligned}$$

Si $\chi(G) = 2k$ los mismos argumentos muestran que se pueden recolorear $k-1$ clases cromáticas de ψ, obteniéndose el teorema.

$\blacksquare$

A.V. Kostochka, en 1977 mostró para varias multigráficas con grado máximo al menos 6 [Che90], un teorema sobre el número cromático total, análogo al teorema de Shannon de coloración de aristas [Kos77a].

Teorema 5.13 *Sea G una multigráfica con $\Delta_G \geq 6$ y $\Delta_G \neq 9$, $\Delta_G \neq 16$, entonces*

$$\chi_T(G) \leq \frac{3}{2}\Delta_G.$$

$\blacksquare$

Un resultado parecido a éste es un corolario de los teoremas 5.1 y 5.12, referido en [Che90].

Teorema 5.14 *Si G es cualquier gráfica, entonces*

$$\chi_T(G) \leq \frac{3}{2}\Delta_G + 2.$$

Demostración: A partir de los teoremas 3.8 y 5.12 se obtiene que si G no es completa

$$\begin{aligned} \chi_T(G) &\leq \chi_A(G) + \left[\frac{1}{2}\chi(G)\right] + 1 \\ &\leq \Delta_G + 1 + \frac{1}{2}\Delta_G + 1 = \frac{3}{2}\Delta_G + 2 \end{aligned}$$

■

Este teorema fue probado por primera vez por H. R. Hind en 1988. Utilizando el argumento que usó en su demostración, obtuvo la mejor cota superior conocida hasta la fecha, que se describe en el siguiente teorema.

Teorema 5.15 *Si G es una gráfica simple, entonces*

$$\chi_T(G) \leq \chi_A(G) + 2\left\lceil \sqrt{\Delta_G} \right\rceil.$$

La demostración de este teorema será el objeto del siguiente apartado.

Para gráficas simples regulares, A.G. Chetwynd y A.J.W. Hilton demostraron el siguiente resultado para gráficas con grado máximo grande [CH88].

Teorema 5.16 *Si G es una gráfica regular con $\Delta_G \geq \frac{3}{4} \mid V_G \mid$, entonces*

$$\chi_T(G) \leq \Delta_G + 3.$$

■

Chetwynd y Häggkvist, en 1992, probaron que el número cromático total para una multigráfica excede al índice cromático en la mínima t entera tal que $t! > n$ [CH92].

Teorema 5.17 *Sea G una multigráfica y sea t el mínimo número entero para el cual $t! > n$, entonces*

$$\chi_T(G) \leq \chi_A(G) + t.$$

■

En el mismo año, Hind demostró el siguiente resultado que es la mejor cota superior cuando $| V_G |$ es bastante grande y Δ_G es grande con respecto a V_G, es decir para las llamadas gráficas densas [Hin92].

Teorema 5.18 *Sea G culaquier gráfica, entonces*

$$\chi_T(G) \leq \Delta_G + 2\left\lceil \frac{| V_G |}{\Delta_G} \right\rceil + 1.$$

■

5.2.1 El Teorema de Hind

Este apartado esta dedicado a la demostración del teorema que constituye la mejor cota superior en términos de $\chi(G)$ para el número cromático total conocida. Se denota por $\xi |_R$ a la coloración ξ restringida al conjunto R. Para la demostración de este teorema se utiliza el siguiente lema.

Lema 5.2 *Sea $H = (V_H, A_H)$ una gráfica de clase uno. Si W es un conjunto independiente de vértices de H, y $\phi : W \to \{1, 2, \ldots, \Delta_H\}$ es una coloración, entonces existe una coloración propia de $W \cup A_H$ que usa a lo más $\Delta_H + 1$ colores, $\varphi : W \cup A_H \to \{1, 2, \ldots, \Delta_H\} \cup \{\alpha\}$ tal que:*

1. $\varphi |_W = \phi$.
2. *Si $a = (u, v) \in A_H$ y $\varphi(a) = \alpha$, entonces $u \in W$ ó $v \in W$.*

Demostración: Por inducción sobre Δ_H. Sea H una gráfica de clase uno; nótese que si $\Delta_H = 1$, las aristas de H forman un acoplamiento M y el lema se cumple al asignar a M el color α, dejando el color 1 libre para colorear los vértices de W. Supóngase entonces, que el lema es cierto para todas las gráficas de clase uno, con $\Delta < k$ y sea $\Delta_H = k$. Como H es de clase uno, entonces existe una coloración por aristas:

$$C'(H) = (E_1, E_2, \ldots, E_k).$$

Considere la gráfica H' formada por los primeros $k-1$ acoplamientos,

$$H' = H \setminus E_k = \left(V_H, \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \right),$$

y sea W' el subconjunto de vértices de W coloreados con los colores del 1 al $k-1$, es decir

$$W' = \{w \in W : \phi(w) \in \{1, 2, \ldots, k-1\}\}.$$

Como H' es nuevamente una gráfica de clase uno, por hipótesis de inducción, podemos extender $\phi\mid_{W'}$ a una coloración propia:

$$\varphi' : W' \cup A_{H'} \to \{1, 2, \ldots, k-1\} \cup \{\alpha\},$$

donde $\varphi'(a) = \alpha$ solo si a es incidente a un vértice en W' (figura 5.2).

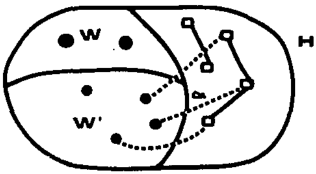


Figura 5.2. Coloración de φ'.

Podemos entonces definir la coloración φ_1 de $W \cup A_{H}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi_1 |_W &= \varphi, \\ \varphi_1 |_{A_{H'}} &= \varphi', \\ \varphi_1(a) &= k \quad \text{para } a \in E_k. \end{aligned}$$

Si φ_1 es una coloración propia, la demostración termina, de otra forma φ_1 no es una coloración propia, por lo tanto existe una arista (v_0, v_1) incidente a un vértice v_0 tal que $\varphi_1(v_0) = k$ y $\varphi_1(v_0, v_1) = k$. Consideremos el (único) (k, α)-camino que contiene a v_0

$$P_1 = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_r).$$

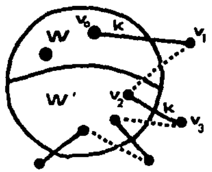


Figura 5.3. (k, α)-camino que contiene a v_0.

Usando ahora la condición (2) aplicada a H', se puede concluir que $v_0 \in W \setminus W'$, ya que v_0 tiene color k, $v_1 \notin W$ pues $v_0 \in W$ y W es un conjunto independiente, $v_2 \in W'$, ya que (v_1, v_2) tiene color α y $v_1 \notin W'$. Si seguimos este razonamiento se concluye que $v_{2i} \in W'$ y $\varphi_1(v_{2i-1}, v_{2i}) = \alpha$ para toda i tal que $1 \leq i \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$.

Procédamos a intercambiar los colores k y α asignados a las aristas en P_1, evitando así que $\varphi_1(v_0) = k$ y $\varphi_1(v_0, v_1) = k$.

Este intercambio no genera que otro vértice y otra arista incidentes tengan el mismo color k, ya que solo sería posible si $\varphi_1(v_i) = k$ y $\varphi_1(v_{i-1}, v_i) = \alpha$, lo que significaría que una arista con color α no es incidente a W'.

Si r es par, entonces $v_{r-1} \notin W'$ y $v_r \in W'$ por lo que $\varphi_1(v_{r-2}, v_{r-1}) = k$ y $\varphi_1(v_{r-1}, v_r) = \alpha$; y si r es impar, entonces $v_{r-1} \in W'$ y $v_r \notin W'$, por lo que $\varphi_1(v_{r-2}, v_{r-1}) = \alpha$ y $\varphi_1(v_{r-1}, v_r) = k$, entonces para toda $0 \leq i \leq r-1$ definimos:

$$\varphi_2(v_i, v_{i+1}) = \begin{cases} \alpha & \text{si } i \text{ es par,} \\ k & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 \quad \text{en otro caso.}$$

Claramente φ_2 satisface (1) y (2), ya que $v_0 \in W$ y W es un conjunto independiente de donde se sigue que no hay una arista incidente a v_0 con color α en φ_1, por lo que no existen aristas incidentes a v_0 con color k en φ_2.

Del hecho de que P_1 es un camino maximal se sigue que no tenemos aristas incidentes a v_r además de (v_{r-1}, v_r), que estén coloreadas con color k ó α. Por lo que φ_2 tiene menos aristas y vértices incidentes con color k, que φ_1.

Como nuestras gráficas son finitas, si repetimos este argumento para φ_j que contenga un vértice y una aristas incidentes con el mismo color k este proceso termina en un número finito de pasos con:

$$\varphi = \varphi_l : W \cup A_H \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\} \cup \{\alpha\}$$

una coloración propia que satisface las condiciones (1) y (2).

■

Pasaremos ahora directamente al teorema de Hind, la demostración que aquí se presenta sigue la misma idea publicada por Hind en 1990 [Hin90], aunque en una forma más general. Para ver esto escribiremos primeramente el teorema publicado por Hind.

Teorema 5.19 (Teorema de Hind) *Para cualquier gráfica* G,

$$\chi_T(G) \leq \chi_A(G) + 2\left\lceil\sqrt{\chi(G)}\right\rceil.$$

A diferencia de dicho artículo, en el que Hind divide esta cota en dos teoremas, lo escribiremos de la siguiente forma:

Teorema 5.20 *Sea* $\phi : V_G \to \{1,2,\ldots,p\}$ *una coloración propia de* V_G *con* $p \geq \chi(G)$*, entonces* ϕ *puede extenderse a una coloración* $\varphi : V_G \cup A_G \to \{1,2,\ldots,\chi_A(G) + 2\lceil\sqrt{p}\rceil\}$.

O, escrito de otra forma,

Teorema 5.21 *Toda coloración de vértices de una gŕafica con* p *colores puede extenderse a una coloración total que usa a lo más* $\chi_A(G) + 2\lceil\sqrt{p}\rceil$ *colores.*

Es preciso notar que la demostración del teorema 5.19 se extiende de manera natural para demostrar nuestro teorema. La única aportación de nuestra parte es la formulación a un contexto más general del mismo (extendiendo coloraciones de vértices) y de su demostración.

Demostración: Sea G una gráfica de clase uno, con grado máximo Δ_G.

Considerese una coloración propia de vértices

$$\phi : V_G \to \{1,2,\ldots,p\},$$

con clases cromáticas $V_1, V_2, \ldots, V_p$.

Similarmente, sea

$$\psi : A_G \to \{1, 2, \ldots, q\},$$

una coloración propia de aristas con clases cromáticas $E_1, E_2, \ldots, E_q$.

Para $1 \leq k \leq p$, sea $m = \lceil \frac{p}{k} \rceil$. Si k divide a p tenemos una partición de $\{1, 2, \ldots, p\}$ en k subconjuntos de tamaño m, digamos $I_1, I_2, \ldots, I_k$. Si k no divide a p tendremos $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}$ subconjuntos de tamaño m y un conjunto I_k de tamaño $p - (k-1)\lfloor \frac{p}{k} \rfloor < m$.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ contrúyase las subgráficas

$$G_i = \left(V_G, \bigcup_{j \in I_i} E_i \right).$$

Obsérvese que por definición, G_i es una subgráfica de G de clase uno con grado máximo a lo más m. Definamos subconjuntos de vértices W_i, donde un vértice v está en W_i si $\phi(v) \in I_i$.

Sea

$$F(G_i) = \{(u, v) \in A_{G_i} | u \in W_i, v \in W_i\},$$

es decir que $F(G_i)$ es el conjunto de aristas en A_{G_i} con vértices extremos con color en I_i, y sea

$$G_i' = (V_G, F(G_i)),$$

entonces cada G_i' es una gráfica con grado máximo menor o igual que m, y por ser de clase 1 tiene una coloración propia por aristas ψ_i con m colores, digamos $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$.

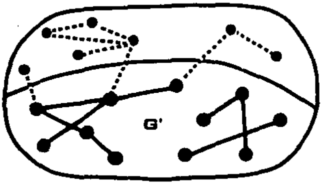


Figura 5.4. Representación de G_i y G_i'.

Ahora extendiendo ψ_i a una coloración total φ_i de G_i. La gráfica

$$G_i'' = (V_{G}, A_{G_i} \setminus F(G_i))$$

satisface la condición del lema 5.2, por lo que $\phi\mid_{W_i}$ puede extenderse a una coloración

$$\phi_i : W_i \cup (A_{G_i} \setminus F(G_i)) \to I_i \cup \{\alpha_i\}.$$

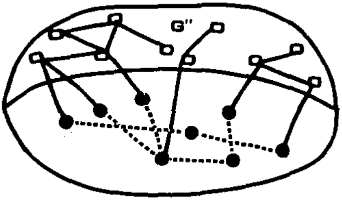


Figura 5.5. Representación de G_i''.

Combinemos ahora las coloraciones ψ_i y ϕ_i sobre $W_i \cup (A_{G_i} \setminus F(G_i))$ para obtener una coloración total propia φ_i de G_i que satisface

$$\varphi_i \mid_{W_i} = \phi \mid_{W_i},$$

$$\varphi_i : W_i \cup A_{G_i} \to I_i \cup \{\alpha_i\} \cup \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}.$$

Nótese que para cualquier i, j $(i \neq j)$: $\varphi_i(a) \in \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ si el color de ambos vértices extremos de a pertenece a I_i y $\varphi_j(a') \in \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ si el color de los vértices extremos de a' pertenece a I_j. Claramente a y a' no pueden ser adyacentes, ya que $I_i \cap I_j = \emptyset$; por lo que podemos decir que todas estas coloraciones son ajenas y $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ se usan en cada una de ellas.

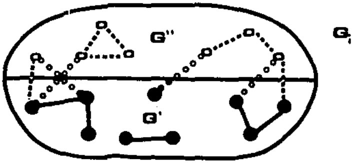


Figura 5.6. Coloración φ_i.

Si unimos ahora las coloraciones φ_i (que tienen la coloración de vértices ϕ en común). Podemos definir la siguiente coloración total propia:

$$\varphi\,|_{V_G} = \phi\,|_{V_G},$$

$$\varphi\,|_{A_{G_i}} = \varphi_i\,|_{A_{G_i}},$$

$$\varphi : V_G \cup A_G \to \{1, 2, \ldots, p\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \cup \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}.$$

Por lo que el número de colores usados está acotado como sigue:

$$\chi_T(G) \leq p + \left\lceil \frac{p}{k} \right\rceil + k + (q - p),$$

es decir

$$\chi_T(G) \leq q + \left\lceil \frac{p}{k} \right\rceil + k,$$

En este momento la demostración está terminada, al considerar $k = \lceil\sqrt{p}\rceil$. entonces

$$\left\lceil \frac{p}{\sqrt{p}} \right\rceil + \lceil\sqrt{p}\rceil = 2\lceil\sqrt{p}\rceil,$$

por lo que

$$\chi_T(G) \leq \chi_A(G) + 2\lceil\sqrt{p}\rceil.$$

■

5.2.2 Despliegue de Colores

El objetivo esencial de este apartado es la demostración de un teorema debido a Sánchez-Arroyo, que aporta una cota superior para la coloración total de gráficas generales con la idea de extender una coloración de vértices, a una coloración total. Dicho teorema puede encontrarse en [San91]. Sea $R \subseteq V_G$, se considera como $a \subseteq R$ a una arista $a \in A_G$ cuyos vértices extremos pertenecen a R.

Los siguientes lemas son la parte básica de la demostración de dicho teorema, siendo el segundo la generalización del primero.

Lema 5.3 *Sea $G = (V_G, A_G)$ una multigráfica con $\Delta_G \leq 2$, sea $W \subseteq V_G$, y $\phi : W \to \{1,2,3,4\}$ una coloración parcial de vértices de G. Entonces existe una coloración de aristas $\psi : A_G \to \{1,2,3,4\}$ tal que $\phi \cup \psi$ es una coloración propia de $W \cup A_G$ y si $\psi(a) = 1$, entonces $a \subseteq W$.*

Demostración: Sea G una multigráfica tal que $\Delta_G \leq 2$, entonces G está formada por una familia de caminos y ciclos, por lo que es suficiente suponer el caso en que

G es un ciclo. Definimos $\phi_1 : V \to \{1,2,3,4\}$ como

$$\phi_1(v) = \begin{cases} \phi(v) & \text{si } v \in W, \text{ y} \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Consideremos entonces dos posibilidades:

1. Supóngase que existen los vértices u, v y w consecutivos en el ciclo de forma que $\phi_1(u) \neq \phi_1(w)$ y $\phi_1(w) \neq 1$. Ahora, asignemos el color $\phi_1(w)$ a la arista (u, v); posteriormente, asignémosle color a las aristas (x, y) siguientes en el ciclo en dirección de w, respetando los colores $\phi_1(x)$ y $\phi_1(y)$. Obsérvese que cada arista, incluyendo la última (v, w), tiene tres colores prohibidos, por lo que podemos construir ψ usando solamente los colores 1,2,3 y 4.

2. Supóngase que el caso (1) no sucede. Si G es un ciclo impar, ϕ_1 solo usa el color 1; y fácilmente se puede construir ψ usando los colores 2,3 y 4. En cambio si G es un ciclo par, entonces ϕ usa a lo más dos colores y podemos construir ψ con los dos colores restantes.

■

El lema que sigue simplemente constituye la aplicación del anterior a gráficas con mayor número de acoplamientos.

Lema 5.4 *Sea $G = (V_G, A_G)$ una multigráfica,sea $W \subseteq V_G$ y $\phi : W \to \{1,2,3,4\}$ una coloración parcial de vértices de G. Supóngase que existen k acoplamientos en G tal que la subgráfica H al borrarlos tiene $\Delta_H \leq 2$, entonces existe una coloración de aristas $\psi : A_G \to \{1,\ldots,k+4\}$ tal que $\phi \cup \psi$ es una coloración propia de $W \cup A_G$ y si $\psi(a) = 1$, entonces $a \subseteq W$.*

Demostración: Si $\Delta_G \leq 2$, el resultado es inmediato del lema 5.3, así que supóngase $\Delta_G \geq 3$. Sean $E_5, E_6, \ldots, E_{k+4}$, k acoplamientos tal que la gráfica H, obtenida al borrarlos tiene $\Delta_H \leq 2$. Apliquémosle entonces el lema 5.3 a H.

∎

La demostración del siguiente teorema aparece en [MS93] y es esencialmente la misma que para el teorema 5.23 que se demuestra en la sección siguiente por lo que solo será enunciado.

Teorema 5.22 *Para cualquier gráfica G, cualquier coloración de vértices con p colores puede extenderse a una coloración total con número de colores menor o igual a*

$$\max(p, \chi_A(G)) + \frac{2}{5}\min(p, \chi_A(G)) + \frac{8}{5}.$$

∎

5.2.3 Otra Cota

Recientemente se ha obtenido una cota que mejora el teorema 5.22. Esta se origina de generalizar el lema 5.3 de la siguiente forma:

Lema 5.5 *Sea $G = (V_G, A_G)$ una multigráfica con $A_G = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, donde M_i es un acoplamiento para cada $i = \{1,2,3\}$, sea $W \subseteq V_G$ y $\phi : W \to \{1,2,3\}$ una coloración parcial de vértices de G. Entonces existe una coloración*

$$\varphi : (W \cup A_G) \to \{1,2,3\} \cup \{\alpha, \beta\}$$

tal que:

1. $\varphi\mid_W = \phi$, *y*

2. Si $\varphi(a) = \alpha$, *entonces* $a \subseteq W$.

Demostración: La idea consiste en extender la coloración ϕ a las aristas de G; como A_G es la unión de tres acoplamientos, se puede colorear $M_1 \cup M_2$ con los colores $\{1,2,3\} \cup \{\alpha\}$. De la siguiente manera:
Obsérvese que $M_1 \cup M_2$ es una familia de caminos y ciclos de longitud par; ahora considere un ciclo de $M_1 \cup M_2$. Defínase $\phi_1 : V_G \to \{1,2,3\} \cup \{\alpha\}$ tal que $\phi_1(v) = \phi(v)$ si $v \in W$, y $\phi_1(v) = \alpha$ en otro caso. Obsérvese que los caminos pueden colorearse de forma que ϕ_1 sobre los vértices no ha sido alterada. Esto se sigue del hecho de que hay a lo más dos colores prohibidos al iniciar la coloración del camino.

Suponga que existen tres vértices u, v, w con colores consecutivos en el ciclo, sean $a_1 = \{u,v\}, a_2, \ldots, a_k = \{v,w\}$ las aristas del ciclo; asígnese entonces el color $\phi_1(w)$ a la arista $a_1 = \{u,v\}$. En seguida se colorean las aristas $a_i = \{x,y\}$ para $i = 2, \ldots, k$ una por una en forma consecutiva, a lo largo del ciclo, obsérvese que hay a lo más tres colores prohibidos al colorear a a_i; estos colores son $\phi_1(a_i - 1)$, $\phi_1(x)$ y $\phi_1(y)$. Esto también se cumple para la última arista $a_k = \{v,w\}$ donde los colores no disponibles, son $\{\phi_1(a_{k-1}), \phi_1(w), \phi_1(v)\}$.

En caso de que no se tengan tres vértices consecutivos con las propiedades indicadas en el párrafo anterior, entonces ϕ_1 usa a lo más dos colores en el ciclo y es posible construir una coloración total propia de $M_1 \cup M_2$ usando los dos colores libres en ϕ_1.

Finalmente, hace falta colorear M_3 al que se le asigna el color β sin ningún problema, ya que no se ha utilizado anteriormente.

∎

Teorema 5.23 *Si G es una multigráfica*

$$\chi_T(G) \leq \chi_A(G) + \left\lceil \frac{\chi(G)}{3} \right\rceil + 1$$

Demostración: Sea G una multigráfica, $\phi : V_G \to \{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ una coloración de los vértices de G tal que $\chi(G) = p$, y $\psi : A_G \to \{E_1, E_2, \ldots, E_q\}$ una coloración de las aristas de G tal que $\chi_A(G) = q$. Por el teorema de Brooks (3.8) y el de Vizing (4.5), podemos suponer que $p \leq q$; Obsérvese los siguientes tres casos dependiendo del residuo de la división $\frac{p}{3}$.

Caso 1 Si $p = 3k$, para cada $j = 1, 2, \ldots, k$ definamos el subconjunto $W_j \subseteq V_G$ con tres clases cromáticas de ϕ; es decir,

$$W_j = \bigcup_{i=3j-2}^{3j} V_i.$$

Análogamente, se defínen los subconjuntos $A_j \subseteq A_G$ con tres acoplamientos de $\{E_1, E_2, \ldots, E_p\}$; es decir

$$A_j = \bigcup_{i=3j-2}^{3j} E_i \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Constrúyanse ahora las gráficas

$$G_j = (V_G, A_j),$$

donde para cada G_j se tiene que $\chi_A(G_j) = 3$ y cada $W_j \subseteq V_G$ está coloreado con los colores $\{3j-2, 3j-1, 3j\}$. Por el lema 2 cada G_j tiene una coloración

$$\varphi_j : W_j \cup A_j \to \{3j-2, 3j-1, 3j\} \cup \{\alpha, \beta_j\},$$

con las siguientes propiedades

(i) $\varphi_j \mid_{W_j} = \phi$,

(ii) Si $\varphi_j(a) = \alpha$, entonces $a \subseteq W_j$.

Obsérvese que el único color común en estas coloraciones φ_j es α. Por la propiedad (ii), E_α forma un acoplamiento en G, de donde se sigue que

$$\varphi = \begin{cases} \psi \mid_{\bigcup_{i=p+1}^{q} E_i} & \text{para } E_i \text{ con } i > p, \\ \varphi_j & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es una coloración total propia de G que usa los colores

$$\{1, 2, \ldots, q\} \cup \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\} \cup \{\alpha\},$$

es decir $q + \frac{p}{3} + 1$ colores. Por lo que se cumple que

$$\chi_T(G) \leq \chi_A(G) + \frac{\chi(G)}{3} + 1.$$

Caso 2 Si $p = 3k + 1$, aplíquese el Caso (1), tomando $p - 1$ clases cromáticas en V_G, para recolorear $p - 1$ acoplamientos y recoloreando V_p con el color α (que no se ha usado en los vértices, ni es incidente con V_p).

Entonces tenemos una coloración total propia de G con $q + \frac{p-1}{3} + 1$ colores, i.e.

$$
\begin{aligned}
\chi_T(G) &\leq \chi_A(G) + \frac{\chi(G) - 1}{3} + 1, \\
&\leq \chi_A(G) + \left\lfloor \frac{\chi(G)}{3} \right\rfloor + 1.
\end{aligned}
$$

Caso 3 Si $p = 3k + 2$, aplíquese el Caso (1), tomando $p - 2$ clases cromáticas de vértices y $p - 2$ acoplamientos. Restando por recolorear V_{p-1}, V_p a los que asignamos los colores α y β_{k+1}.

Entonces tenemos una coloración con $q + \frac{p-2}{3} + 2$, por lo tanto

$$\chi_T(G) \leq \chi_A(G) + \left\lceil \frac{\chi(G)}{3} \right\rceil + 1$$

■

Conclusiones

Para crear, primero hay que creer
y para creer, primero hay que sentir,
para sentir, primero hay que crecer
y para crecer, se tiene que vivir.
Margarita Monroy.

A través de la observación de los últimos resultados en Coloraciones Totales se puede notar que la idea que ha dando mejores resultados consiste en aglutinar una coloración de aristas con una coloración de vértices con los mismos colores, para obtener una coloración total propia con menos colores que la suma de ambos, concentrando el problema en cómo extender la coloración de vértices para recolorear las aristas de color impropio, agregando el menor número de colores posible.

El método complementario de intentar extender una coloración de aristas a una coloración de vértices no ha sido tan exitoso; sólo hace falta observar que para extender una coloración en aristas a los vértices de una gráfica completa se necesita un color más por cada vértice, obteniéndose una coloración con $\chi_A(G) + \chi(G)$, lo cual es muy superior a $\chi_T(G)$.

La idea de extender coloraciones tiene mucho por explorarse y creo que puede dar lugar a nuevos resultados.

Por otro lado, es notable que una gran parte de la investigación en coloraciones totales se inclina hacia la búsqueda de cotas superiores para gráficas densas.

En cuanto a Coloraciones en Aristas cabe decir que la investigación está enfocada hacia los Problemas de Clasificación, siendo cada vez mayor el número de familias de gráficas clasificadas.

Referencias

[AH77] K. APPEL & W. HAKEN. Every planar graphs is four colourable. part I: Discharguing. *Illinois J. of Math., 21 (3), 429-490 (1977)*

[AHK77] K. APPEL, W. HAKEN & J. KOCH. Every planar graphs is four colourable. part II: Reducibility. *Illinois J. of Math., 21 (3), 491-567 (1977)*

[BCC67] M. BEHZAD, G. CHARTRAND & J. K. COOPER. The colour numbers of the complete graphs. *J. London Math. Soc. 42, 226-228 (1967)*

[BCL69] M. BEHZAD, G. CHARTRAND & L. LESNIAK-FOSTER. Graphs & Digraphs. *Prindle, Weber & Schmidt Int. Series.*, Massachusetts, 1979

[Beh71] M. BEHZAD. The total chromatic number of a graph: a survey. De D. J. A. WELSH(editor), Combinatorial Mathematics and its Applications. *Academic Press.*, 1-10, London, 1971

[Ber89] C. BERGE. Graphs. *North-Holland Mathematical library, (second revised ed.)*,Amsterdam, 1989

[Berm74] J. C. BERMOND. Nombre chromatique total du graphe r-part complet. *J. London. Math. Soc. 2 (9), 279-285 (1974)*

[BLW77] N. L. BIGGS, E. K. LLOYD & R. J. WILSON. Graph Theory 1736-1936 *Clarendon Press*, Oxford, 1977

[BM76] A. J. BONDY & U. S. R. MURTY. Graph Theory whith applications. *North-Holland.*, New York, 1976

[Bor89] O. V. BORODIN. On the total colouring of planar graphs. *J. Reine Angew. Math. 394, 180-185 (1989)*

[CH88] A. CHETWYND & A. J. W. HILTON. The total chromatic number of regular graphs of high degree. *Submitted, (1988)*

[CH88] A. CHETWYND & R. HÄGGKVIST. A note on list-colorings. *J. Graph Theory 13 (1), 87-95 (1989)*

[CH92] A. CHETWYND & R. HÄGGKVIST. Some upper bounds on the total and list chromatic numbers of multigraphs. *J. Graph Theory 16 (5), 503-516 (1992)*

[Char85] G. CHARTRAND. Introductory Graph Theory. *Dover Publications.*, New York, 1985

[Che90] A. G. CHETWYND. Total Colourings of Graphs. De R. NELSON & R. J. WILSON (editors), Graphs colourings,*Pitman Reserch Notes in Mathematics* 218, 65-77, Londres, 1990.

[CL86] G. CHARTRAND, L. LESNIAK-FOSTER. Graphs & Digraphs (second edition). *Wadsworth & Brooks. Mathematics Series.*, California, 1986

[Cur89] C. CURCÓ Una introducción a la teoría de las gráficas.(notas de clase) *Tesis Licenciatura, Fac. de Ciencias U.N.A.M.*, México, 1989

[CY92] K. H. CHEW, H. P. YAP. Total chromatic number of complete r-partite graphs. *J. of Graph Theory 16-6, 629-634 (1992)*

[FW77] S. FIORINI & R. J. WILSON. Edge-colourings of Graphs. *Pitman Reserch Notes in Mathematics* 16, Londres, 1977

[Gut80] F. GUTHRIE. Note on the colouring of maps. *Proc. Roy. Soc. Edimburg 10, 727-728 (1880)*

[Har77] F. HARARY. Graph Theory. *Addison–Wesley.*, Massachusetts, 1972

[Hea90] P. J. HEAWOOD. Map colour theorems. *Quarterly Journal of Pure & Applied Math. 24, 332-338 (1890)*

[Hin90] H. R. HIND. An Upper Bound for the Total Chromatic Number. *Graphs and Combinatorics 6, 153-159 (1990)*

[Hin92] H. R. HIND. An Upper Bound for the Total Chromatic Number of Dense Graphs. *J. of Graphs Theory 16-3, 197-203 (1992)*

[Kem79] A. B. KEMPE. On the geographical problem of four colors. *Amer. J. Math. 2, 193-204 (1879)*

[Kos77a] A. V. KOSTOCHKA. An Analogue of Shannon's estimate for complete colourings. (En Ruso) *Diskret. Analiz 30, 13-22 (1977)*

[Kos77] A. V. KOSTOCHKA. The total colouring of a multigraph with maximal degree 4. *Discrete Math. 17, 161-163 (1977)*

[Kur30] K. KURATOWSKI. Sur le problème de corbes gauches en topologie. *Fundamentae Mathematicae 15, 271-283 (1930)*

[LH72] R. LASKER & W. HARE. Chromatic number of certain graphs. *J. London Math. Soc. 2 (4), 489-492 (1972)*

[May65] K. O. MAY. The origin of the four-color conjeture. *Isis 56, 346-348 (1965)*

[Mey76] J. C. MEYER. Nombre chromatique total de joint d'un ensemble stable per un cycle. *Discrete Math. 15 (1), 41-54 (1976)*

[MS93] C. J. H. MCDIARMID & A. SANCHEZ-ARROYO An upper bound for total colouring of graphs. *Discrete Math. 111, 389-392 (1993)*

[Ros71] M. ROSENFELD. On the total colouring of certain graphs. *Israel J. Math. 9, 396-402 (1971)*

[SK77] T. L. SAATY & P. C. KAINEN. The four-color problem: assaults and conquest. *McGraw-Hill.*, Londres, 1977.

[San91] A. SANCHEZ-ARROYO. Colourings, complexity, and some related topics. *Tesis Doctoral, University of Oxford.*, Oxford, 1991

[Tai80] P.G. TAIT. Remarks on the colouring of maps. *Proc. Roy. Soc. Edimburgh. 10, 729 (1880)*

[Tut65] W. T. TUTTE. Lectures on matroids. *J. Res. Nat. Bur. Stand. 69 B, 1-58 (1965)*

[Tut66] W. T. TUTTE. On the algebraic theory of graphs colourings. *J. Combin. Theory 1, 15-50 (1966)*

[Tut77] W. T. TUTTE. Colourings problems. *Mathematical inteligencer 1, 72-75 (1977)*

[Vij71] N. VIJAYADITYA. On the colouring number of a graph. *J. London Math. Soc. 2 (3), 405-408 (1971)*

[Whi32a] H. WHITNEY. The colouring of graphs. *Ann. Math. 33 (2), 688-718 (1932)*

[Whi32b] H. WHITNEY. Non-separable and planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc. 34, 339-362 (1932)*

[Whi33] H. WHITNEY. Planar graphs. *Fundamentae Mathematicae 21, 73-84 (1933)*

[Whi35] H. WHITNEY. On the abstract properties of linear dependence. *Amer. J. Mathematics 57, 509-533 (1935)*

[Wil83] R. J. WILSON. Introducción a la teoría de grafos. *Alianza Universal.*, Madrid, 1983

[WW90] R. J. Wilson, J. J. Watkins. Graphs: an introductory approach. *John Wiley & Sons.*, New York, 1990

[YWZ89] H. P. Yap, Wang Jian-Fang & Zhang Zhongfu. Total chromatic number of graphs of high degree. *J. Austral. Math. Soc. 47(Ser. A), 445-452 (1989)*