



00384

5  
2g

# Universidad Nacional Autónoma de México

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Gérmenes de Campos de Vectores  
Holomorfos en  $C^m$  sin Separatriz

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

Jorge Olivares Vázquez

DIRECTOR DE TESIS: DR. XAVIER GOMEZ MONT AVALOS

MEXICO, D. F.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1994



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen de la tesis  
Gérmenes de Campos de Vectores Holomorfos en  $\mathbb{C}^m$  sin separatriz  
M. en C. Jorge Olivares Vázquez

6 de marzo de 1994

Consideremos la ecuación diferencial  $\dot{z} = X(z)$ , donde  $X$  es un germen de campo de vectores holomorfo en  $0 \in \mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 3$ , con una singularidad aislada en 0.

Los problemas centrales de este trabajo son los siguientes: el primero consiste en determinar condiciones en  $X$  bajo las cuales ningún germen en 0 de curva analítica es solución de dicha ecuación diferencial ( $X$  no tiene separatrices por el 0). El segundo consiste en obtener ejemplos de gérmenes que satisfagan dichas condiciones.

En dimensión  $m = 2$ , es bien conocido el resultado de C. Camacho y P. Sad que afirma que todo germen en 0 de campo de vectores holomorfo tiene por lo menos una separatriz. Sin embargo, en dimensión  $m = 3$ , X. Gómez Mont e I. Luengo han construido familias de gérmenes, de multiplicidad algebraica 2, sin separatriz.

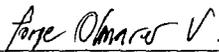
En este trabajo se obtienen condiciones suficientes en los dos primeros jets de un germen de campo de vectores holomorfo en  $\mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 3$ , para que éste no tenga separatrices. En  $\mathbb{C}^3$ , se construyen ejemplos explícitos de gérmenes de multiplicidad algebraica mayor o igual a 2 sin separatriz y por último, se bosqueja la construcción de una familia de tales gérmenes en  $\mathbb{C}^4$ .

La presentación está dividida en cinco capítulos. El primero consta de dos secciones. La primera contiene algunas generalidades sobre foliaciones en variedades complejas y en la segunda bosquejamos el formalismo de Chern-Weyl y su relación con el conjunto singular de una foliación en una variedad compleja. En el segundo capítulo aplicamos lo anterior al estudio de foliaciones en el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^n$ . El tercer capítulo está dividido en dos secciones. En la primera hacemos la construcción de la foliación  $\mathcal{F}_1$  adaptada a la explosión en 0 y a  $X$  y probamos algunas propiedades relevantes de ésta. Para dimensiones superiores a 3, introducimos una generalización natural de la noción de *esquina simple* de F. Cano y, en la segunda sección, demostramos que conserva la propiedad de ser invariante ante explosiones sucesivas. En el cuarto capítulo usamos esta propiedad para demostrar que, si  $X$  es un germen en 0 de campo de vectores holomorfo en  $\mathbb{C}^m$  que satisface las siguientes condiciones

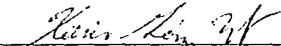
- (a)  $\mathcal{F}_1$  sólo tiene singularidades aisladas y éstas ocurren en  $E$ .
- (b) En los puntos singulares de  $\mathcal{F}_1$ , todos los espacios propios de la parte lineal de  $\mathcal{F}_1$  están contenidos en  $E$ .
- (c) En los puntos singulares de  $\mathcal{F}_1$ , los cocientes de los valores propios de la parte lineal de  $\mathcal{F}_1$  no son números racionales estrictamente positivos.

Entonces todas las separatrices de  $\mathcal{F}_1$  están contenidas en el divisor excepcional  $E$ , lo que permite probar que  $X$  no tiene separatriz alguna por 0.

El quinto capítulo está dividido en dos secciones. En la primera, aplicamos las técnicas anteriores a familias de gérmenes en  $\mathbb{C}^3$ , cuya foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  tiene conjunto singular concentrado en una línea invariante. Obtenemos ecuaciones que garantizan (a) y (b) y, en este caso, obtenemos ejemplos explícitos de gérmenes sin separatrices. Para demostrar que todas las separatrices de  $\mathcal{F}_1$  están contenidas en  $E$ , utilizamos una *forma normal* para campos de vectores con un divisor invariante, desarrollada por F. Sánchez Bringas. En la segunda sección, bosquejamos la construcción de una familia análoga en  $\mathbb{C}^4$ , aunque no producimos ejemplos.



M. en C. Jorge Olivares Vázquez



Vó.Bo. Dr. Xavier Gómez Mont Avalos

Abstract of the thesis  
Germes of Holomorphic Vector Fields in  $\mathbb{C}^m$  without a Separatrix  
(Gérmenes de Campos de Vectores Holomorfos en  $\mathbb{C}^m$  sin separatriz)  
M. en C. Jorge Olivares Vázquez

March 6, 1994

Consider the differential equation  $\dot{z} = X(z)$ , where  $X$  denotes a germ of a holomorphic vector field in  $0 \in \mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 3$ , with an isolated singularity at 0.

The main problems of this work are the following: The first consists on determining conditions on  $X$  such that no germ at 0 of an analytic curve is a solution of that differential equation (that is,  $X$  has no *separatrices* through 0). The second consists on obtaining examples of germs satisfying such conditions.

In complex dimension  $m = 2$ , a well-known result of C. Camacho and P. Sad says that every germ at 0 of a holomorphic vector field has at least one separatrix. However, in complex dimension  $m = 3$ , X. Gómez Mont and I. Luengo have constructed families of germs of algebraic multiplicity 2, without a separatrix.

In this work we obtain sufficient conditions on the first two jets of a germ of a holomorphic vector field in  $\mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 3$  such that it is separatrix-free. In  $\mathbb{C}^3$  we construct explicit examples of germs of algebraic multiplicity greater than or equal to 2 without a separatrix and, finally, we sketch the construction of a family of germs with such properties in  $\mathbb{C}^4$ .

The content is divided into five chapters. The first has two sections. In the first we recall some generalities on foliations in complex manifolds and in the second we recall the Chern-Weyl theory and its relation with the singular set of a holomorphic foliation in a complex manifold. In the second chapter we apply this to the study of foliations in complex projective spaces  $\mathbb{C}P^n$ . The third chapter is divided as well into two sections. In the first, we construct the foliation  $\mathcal{F}_1$  adapted to the blow-up at 0 and  $X$  and we prove some of its relevant properties. For complex dimensions greater than 3 we introduce a natural generalization of the notion of *simple corner* (introduced for complex dimension 3 by F. Cano) and, in the second section, we prove that it keeps the property of being invariant under successive blow-ups. In the fourth chapter we use this property to prove that, if a germ  $X$  at 0 of a holomorphic vector field in  $\mathbb{C}^m$  satisfies the following conditions

- (a)  $\mathcal{F}_1$  has only isolated singularities and they lie in the exceptional divisor  $E$ .
- (b) At the singular points of  $\mathcal{F}_1$ , every eigen-space of the linear part of  $\mathcal{F}_1$  is contained in  $E$ .
- (c) At the singular points of  $\mathcal{F}_1$ , the quotient of the eigen-values of the linear part of  $\mathcal{F}_1$  are not strictly positive rational numbers.

Then every separatrix of  $\mathcal{F}_1$  is contained on the exceptional divisor  $E$  and this allows us to prove that  $X$  has no separatrices through 0.

The fifth chapter is divided as well into two sections. In the first of these we apply this later results to families of germs in  $\mathbb{C}^3$  whose adapted foliation  $\mathcal{F}_1$  has singular set concentrated in an invariant projective line. We obtain equations which guarantee the conditions (a) and (b) above and, in this case, we obtain explicit examples of germs without separatrices. In order to prove that every separatrix of  $\mathcal{F}_1$  is contained in  $E$ , we use a *normal form* for vector fields having an invariant divisor which was developed by F. Sánchez-Bringas. In the second section, we sketch the construction of a family of such germs in  $\mathbb{C}^4$ , but we produce no examples.

  
M. en C. Jorge Olivares Vázquez

  
Vo.Bo. Dr. Xavier Gómez Mont Avilós

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>ii</b>
<b>1 Foliaciones por curvas en variedades complejas</b>	<b>1</b>
1.1 Foliaciones con singularidades. Parte lineal y multiplicidad de una foliación en un punto singular	1
1.2 Curvatura y clases de Chern de un fibrado vectorial complejo	4
<b>2 Foliaciones por curvas en <math>\mathbb{C}P^n</math></b>	<b>7</b>
2.1 La sucesión de Euler torcida	7
2.2 Calculus numerorum	10
<b>3 Esquinas simples y persistencia bajo explosiones</b>	<b>14</b>
3.1 Foliaciones adaptadas y esquinas simples en $\mathbb{C}^m$ , $m \geq 3$	14
3.2 Demostración del teorema de persistencia	18
<b>4 Un teorema de suficiencia de jets</b>	<b>29</b>
<b>5 Teoremas de Existencia</b>	<b>33</b>
5.1 Familias de gérmenes sin separatriz en $\mathbb{C}^3$	33
5.1.1 Condiciones de multiplicidades	37
5.1.2 Condiciones de valores propios repetidos	39
5.1.3 Condiciones de no-semisimplicidad	42
5.1.4 Existencia de gérmenes sin separatriz	44
5.2 Familias en $\mathbb{C}^4$	48
<b>A Apéndice</b>	<b>53</b>

# Introducción

Sea  $X$  un germe de campo de vectores holomorfo, singular en  $0 \in \mathbb{C}^n$ . Una separatriz de  $X$  por el 0 es un germe de curva analítica  $C$  en 0 tal que  $X$  restringido a  $C \setminus \{0\}$  es tangente a  $C$ .

El problema de determinar si un germe  $X$  tiene o no alguna separatriz por el 0 comenzó a estudiarse en 1856 por Briot y Bouquet [4], para campos de vectores en  $\mathbb{C}^2$  y fue hasta 1982 en que Camacho y Sad [5] probaron que todo germe  $X$  en dimensión  $m = 2$  tiene al menos una separatriz.

La primera respuesta en dimensiones superiores a 2 apareció en 1992, cuando Gómez Mont y Luengo [11] exhibieron familias de gérmenes en dimensión  $m = 3$ , de multiplicidad algebraica 2, sin separatriz. Posteriormente, el que esto escribe [16] generalizó estos resultados para gérmenes en  $\mathbb{C}^3$  de multiplicidad algebraica mayor o igual a 2.

En este trabajo obtendremos condiciones suficientes en los dos primeros jets de un germe de campo de vectores holomorfo en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , de multiplicidad algebraica mayor que 1, para que éste no tenga separatrices. En  $\mathbb{C}^3$ , construiremos ejemplos explícitos de gérmenes de multiplicidad algebraica mayor o igual a 2 sin separatriz y por último, bosquejaremos la construcción de una familia de tales gérmenes en  $\mathbb{C}^4$ .

Las ideas para probar estos resultados provienen de [11] y en líneas generales, son las siguientes.

Un germe de campo de vectores holomorfo  $X$  en  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ , de multiplicidad algebraica  $d+1$  induce, por la explosión (*blow-up*) en 0, una *foliación adaptada*  $\mathcal{F}_1$  en la variedad explotada  $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ . El divisor excepcional  $E \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  de  $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$  es invariante por esta foliación, así es que  $c_n(L_d \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n})$  puntos singulares aislados de  $\mathcal{F}_1$  (contando multiplicidades) están contenidos en  $E$  (**Proposición 2.2.4**). Su posición y multiplicidad están determinadas por el  $(d+1)$ -jet de  $X$  y el  $(d+2)$ -jet de  $X$  determina la parte lineal de  $\mathcal{F}_1$  en ellos (**Proposición 3.1.3**).

El que un germe  $X$  de multiplicidad algebraica  $d+1$  no tenga separatrices, es una propiedad que depende únicamente de su jet de orden  $d+2$ . Este resultado de suficiencia de jets (**Teorema 3.8**) puede enunciarse del siguiente modo: si  $X$  es un germe en 0 de campo de vectores holomorfo en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , de multiplicidad algebraica  $d+1$  que satisface las siguientes condiciones

- (a) La foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  inducida por  $X$  y la explosión en 0 tiene sólo singularidades aisladas y éstas ocurren en el divisor excepcional  $E$ .
- (b) En los puntos singulares de  $\mathcal{F}_1$ , todos los espacios propios de la parte lineal de  $\mathcal{F}_1$  están contenidos en  $E$ .
- (c) En los puntos singulares de  $\mathcal{F}_1$ , los coeficientes de los valores propios de la parte lineal de  $\mathcal{F}_1$  no son números racionales estrictamente positivos.

Entonces  $X$  no tiene separatriz alguna por 0.

La idea para probar este resultado es la siguiente: por un lado, si  $C$  es una separatriz por el 0 de un germe  $X$ , entonces la curva  $\tilde{C}$ , el transformado estricto de  $C$  por la explosión en 0, es una separatriz de  $\mathcal{F}_1$  por algún punto singular  $p$  de  $\mathcal{F}_1$  en  $E$  que no está contenida en  $E$ . La clave está en probar que las condiciones (b) y (c) implican que

todas las separatrices de  $\mathcal{F}_1$  por los puntos singulares de  $\mathcal{F}_1$  en  $E$  necesariamente están contenidas en  $E$  (**Proposición 4.4**). Esto muestra que un germen  $X$  que satisface las propiedades (a), (b) y (c) anteriores no puede tener separatrices por el 0.

Para demostrar la existencia de gérmenes con estas propiedades, la idea es la siguiente. Sea  $\mathfrak{m}$  el ideal maximal de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}$  y denotemos por  $\mathbf{V}$  al  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial (de dimensión finita)

$$\mathbf{V} = \frac{\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{d+1} \cdot \Theta_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}}{\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{d+3} \cdot \Theta_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}}$$

de campos de vectores polinomiales homogéneos en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , con términos no nulos sólo en grados  $d+1$  y  $d+2$ . Sea  $\mathbb{P}\mathbf{V}$  su espacio proyectivo asociado.

Los coeficientes del elemento general  $V \in \mathbf{V}$  son un espacio natural de parámetros, en términos de los cuales pretendemos expresar las condiciones (a), (b) y (c) como un sistema de ecuaciones. Si uno consigue probar que el sistema así obtenido tiene solución, habrá conseguido probar la existencia de gérmenes de campos de vectores sin separatriz.

Para obtener estas ecuaciones, la idea es escoger convenientemente un conjunto de puntos  $Z \subset E \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  y escribir ecuaciones que garanticen que el conjunto singular de la foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  es  $Z$  y se satisfacen las condiciones (a), (b) y (c). En la introducción del Capítulo 5 explicaremos cómo llevar a cabo este plan.

Esta estrategia es la que produce los ejemplos que presentamos en  $\mathbb{C}^3$  y cuya primera parte exponemos para  $\mathbb{C}^4$ .

La presentación está dividida en cinco capítulos.

El primero no contiene material original y consta de dos secciones. La primera consiste de generalidades sobre foliaciones en variedades complejas y en la segunda se bosqueja el formalismo de Chern-Weil y su relación con el conjunto singular de una foliación en una variedad compleja.

En el segundo capítulo aplicamos lo anterior al estudio de foliaciones en el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . En la primera sección establecemos la correspondencia básica entre foliaciones por curvas en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  y campos de vectores polinomiales homogéneos en  $\mathbb{C}^{n+1}$  de grado  $d+1$ . En la segunda sección, calcularemos la dimensión de los espacios de foliaciones por curvas  $\mathcal{F}\mathcal{O}(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , el número de singularidades aisladas (su multiplicidad) que una de éstas tiene y una propiedad genérica sobre su conjunto singular.

En el tercer capítulo, hacemos la construcción de la foliación adaptada a la explosión en 0 y probamos algunas propiedades relevantes de ella. Para dimensiones superiores a 3, introducimos una generalización natural de la noción de *esquina simple* de Cano [6] y demostramos que conserva la propiedad de ser persistente ante explosiones sucesivas. Este teorema de persistencia es un resultado original y es la clave para probar que las condiciones (b) y (c) bastan para que todas las separatrices de  $\mathcal{F}_1$  estén contenidas en el divisor excepcional  $E$ , hecho que es básico para probar, en el cuarto capítulo, el teorema de suficiencia de jets.

El quinto capítulo consta de material original y está dividido en dos secciones. La primera contiene el material de [16], y es el resultado de aplicar las técnicas anteriores a familias de gérmenes en  $\mathbb{C}^3$ , cuya foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  tiene conjunto singular concentrado en una línea invariante. Probaremos un teorema de suficiencia de jets similar al del capítulo anterior y llevaremos a cabo la construcción detallada de familias no vacías de gérmenes sin separatriz.

Para demostrar que todas las separatrices de  $\mathcal{F}_1$  están contenidas en  $E$ , utilizamos una *forma normal* para campos de vectores con un divisor invariante, desarrollada por Sánchez Bringas en [8].

En la segunda sección, bosquejamos la construcción de una familia de gérmenes en  $\mathbb{C}^4$ , cuya foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  tiene conjunto singular consistente de 5 puntos, todos ellos de multiplicidad al menos 3, y que satisface parcialmente las condiciones ( a ) y ( b ) anteriores (parcialmente, porque no incluye las condiciones abiertas de que la multiplicidad de las singularidades es justamente 3, ni las condiciones abiertas de semisimplicidad que completan la condición ( b ) ).

Aun cuando no hemos podido probar que esta familia es no vacía, la construcción que aquí presentamos es un primer paso en la obtención de familias de gérmenes de campos holomorfos en  $\mathbb{C}^4$  sin separatriz, razón por la cual la hemos incluido en este trabajo.

# 1 Foliaciones por curvas en variedades complejas

Este capítulo está dividido en dos secciones. En la primera se definen los conceptos básicos que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Se define lo que entenderemos por una foliación por curvas con singularidades  $\mathcal{F}$  en una variedad compleja  $M$  y se establece la correspondencia básica entre dichas foliaciones y las secciones globales  $H^0(M, TM \otimes L^*)$  del fibrado vectorial  $TM \otimes L$ , donde  $L$  denota a un fibrado lineal en  $M$ ,  $L^*$  a su dual y  $TM$  al fibrado tangente de  $M$ . La referencia básica para esta sección es el libro [12].

Se define también lo que entenderemos por el conjunto de puntos singulares  $Sing(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{F}$ , la parte lineal de  $\mathcal{F}$  en un punto singular y la multiplicidad  $\mu(\mathcal{F}, p)$  de un punto singular de la foliación.

La segunda parte está dedicada a establecer un teorema del tipo Poincaré-Hopf, debido a Baum y Bott, que relaciona las multiplicidades de los puntos singulares de una foliación  $\mathcal{F}$  con invariantes topológicos del fibrado vectorial  $TM \otimes L^*$ .

## 1.1 Foliaciones con singularidades. Parte lineal y multiplicidad de una foliación en un punto singular

En este capítulo,  $M$  denotará una variedad compleja de dimensión  $n$ .

**Definición 1.1.1** Una foliación holomorfa por curvas no singular  $\mathcal{F}^*$  en  $M$  es una descomposición de  $M$  en subconjuntos conexos disjuntos  $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , denominados *hojas* de la foliación, de modo que todo punto  $p$  de  $M$  tiene asociada una vecindad  $V_p$  y un biholomorfismo  $\phi : V_p \rightarrow W_p \subset \mathbb{C}^n$  que satisface que, para toda hoja  $\mathcal{L}_\alpha$ , las componentes conexas de  $\phi(V_p \cap \mathcal{L}_\alpha)$  quedan descritas por ecuaciones de la forma

$$w_1 = k_1, \dots, w_{n-1} = k_{n-1}$$

en  $W_p$  (donde  $k_1, \dots, k_{n-1}$  son constantes). A las parejas  $(V_p, \phi)$  las denominaremos *cartas coordenadas distinguidas* de la foliación y a la hoja que contiene al punto  $p$  la denotaremos por  $\mathcal{L}_p$ .

**Lema 1.1.2** Sean  $\{U_i\}_{i \in J}$  una cubierta abierta de  $M$  y  $\{\phi_i : U_i \rightarrow W_i \subset \mathbb{C}^n\}$  una familia de biholomorfismos tales que los cambios de coordenadas

$$\phi_{ij} = (\phi^1, \dots, \phi^n) = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j) \quad (1.1.1)$$

satisfacen

$$\frac{\partial \phi^1}{\partial w_n} = \dots = \frac{\partial \phi^n}{\partial w_n} = 0, \quad (1.1.2)$$

entonces existe una foliación por curvas no singular  $\mathcal{F}^*$ , determinada en forma única, tal que las parejas  $(U_i, \phi_i)$  constituyen las cartas distinguidas de  $\mathcal{F}^*$ .

**Definición 1.1.3** Una foliación holomorfa por curvas con singularidades  $\mathcal{F}$  en  $M$  es una foliación holomorfa por curvas no singular en  $M - A$ , donde  $A$  es una subvariedad analítica de  $M$  de codimensión mayor que uno. Un punto  $p$  en  $A$  es una *singularidad removible* de  $\mathcal{F}$  si existe una carta coordenada  $\varphi$  de  $M$ , definida en una vecindad de

$p$ , que es compatible con el atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  que define a  $\mathcal{F}$ , en el siguiente sentido: los cambios de coordenadas  $\phi \circ \phi_i^{-1}$  y  $\phi_i^{-1} \circ \phi$  como en (1.1.1) satisfacen las relaciones (1.1.2). Al conjunto de puntos que son singularidades no removibles de  $\mathcal{F}$  se le denomina el *conjunto singular de la foliación* y se le denota por  $Sing(\mathcal{F})$ .

En adelante, al referirnos a una *foliación por curvas en  $M$*  estaremos hablando de una foliación en el sentido de la definición anterior.

A continuación mostraremos que una foliación por curvas define canónicamente un fibrado lineal  $L$  en  $M$  y un morfismo de fibrados  $\alpha : L \rightarrow TM$  del fibrado lineal  $L$  en el fibrado tangente  $TM$  de  $M$ .

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación por curvas no singular en  $M$ , determinada por cartas coordenadas distinguidas como en el **Lema 1.1.2** y consideremos la composición de las matrices jacobianas  $D\phi_{ik} = D\phi_{ij} \circ D\phi_{jk}$  de los cambios de coordenadas (1.1.1). Como consecuencia de (1.1.2) se obtiene que la entrada inferior derecha de  $D\phi_{ik}$  se multiplica como un cociclo

$$\frac{\partial \phi_{ik}^n}{\partial u_n} = \frac{\partial \phi_{ij}^n}{\partial u_n} \frac{\partial \phi_{jk}^n}{\partial u_n}.$$

Este cociclo  $(\frac{\partial \phi_{ij}^n}{\partial u_n})_{i,j \in I}$  define un fibrado lineal en  $M$  al que denotaremos por  $L'$ . Consideremos la familia de aplicaciones  $F_i : U_i \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$  dada por  $F_i(p) = (0, \dots, 1)$ , y definamos una familia de transformaciones  $\tilde{F}_i : U_i \times \mathbb{C} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$  mediante la regla

$$\tilde{F}_i(p, v) = (p, F_i(p)v) = (p, (0, \dots, 0, v)).$$

La familia  $\{\tilde{F}_i\}_{i \in I}$  define un morfismo de fibrados vectoriales  $F : L' \rightarrow TM$ . Para todo  $p \in M$ , la transformación entre las fibras  $F(p, \cdot) : L'_p \rightarrow T_p M$  es inyectiva y su imagen es el espacio tangente a la hoja  $\mathcal{L}_p$  de la foliación  $\mathcal{F}^*$  que contiene a  $p$ .

Para una foliación singular  $\mathcal{F}$ , puede mostrarse que el fibrado lineal  $L'$  (en  $M - A$ ) admite una extensión canónica a un fibrado lineal  $L$  en  $M$  y que el morfismo de fibrados  $F$  (de la construcción anterior) puede extenderse a un morfismo de fibrados  $\alpha : L \rightarrow TM$ , de manera que  $p$  es una singularidad removible de  $\mathcal{F}$  sí y sólo sí  $\alpha(p) : L_p \rightarrow T_p M$  es no nulo. El morfismo  $\alpha$  es único, salvo multiplicación por una función holomorfa nunca nula en  $M$  (para una demostración completa, ver [12], Teorema 1.17).

La construcción de dichas extensiones es posible gracias al Teorema de Hartogs [13] : funciones holomorfas (o meromorfas) definidas en el complemento  $U - V$  de un abierto  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  y un subconjunto analítico  $V$  de codimensión mayor que uno pueden extenderse a funciones holomorfas (o meromorfas) en todo  $U$ .

Esto motiva la siguiente

**Definición 1.1.4** Una foliación por curvas en  $M$  es una pareja  $(L, \alpha)$ , donde  $L$  es un haz lineal en  $M$  y  $\alpha : L \rightarrow TM$  es un morfismo de fibrados que no es idénticamente nulo en ninguna componente conexa de  $M$ .

Dos parejas  $(L, \alpha)$  y  $(\tilde{L}, \tilde{\alpha})$  determinan la misma foliación  $\mathcal{F}$  si y sólo si  $L$  y  $\tilde{L}$  son haces lineales isomorfos y, después de identificar a  $L$  con  $\tilde{L}$ , existe una función holomorfa no nula  $f \in \mathcal{O}^*(M)$  tal que  $\tilde{\alpha} = f \cdot \alpha$ . El conjunto singular de la foliación  $\mathcal{F}$  es la subvariedad analítica  $Sing(\mathcal{F}) = \{p \in M \mid \alpha(p) = 0\}$  y las *hojas* de  $\mathcal{F}$  son las hojas de la foliación no singular inducida por  $\mathcal{F}$  en  $M - Sing(\mathcal{F})$ .

Por un argumento estándar de álgebra lineal, se tiene el siguiente

**Lema 1.1.5** Sean  $E$  y  $F$  fibrados vectoriales complejos en la variedad compleja  $M$  y sea  $E^*$  el dual de  $E$ , entonces los fibrados vectoriales  $\text{Hom}(E, F)$  y  $E^* \otimes F$  son isomorfos.  $\square$

**Observación 1.1.6** Por el Lema anterior, dada una cubierta abierta  $\{U_\alpha\}$  de  $M$ , una foliación por curvas  $\mathcal{F}$  en  $M$  está definida por una familia de campos de vectores holomorfos  $\{X_\alpha\}$  que satisfacen  $X_\alpha = f_{\alpha\beta} X_\beta$  en  $U_\alpha \cap U_\beta$ , donde  $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$  es una función holomorfa no nula en  $U_\alpha \cap U_\beta$ . Se tiene entonces que  $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p \in M \mid X_\alpha(p) = 0\}$

Un generador  $X_\alpha$  de  $\mathcal{F}$  en un punto singular  $p$  induce un endomorfismo lineal en  $T_p M$  que, en coordenadas locales, corresponde a los términos de grado 1 en la expansión en series de  $X_\alpha$ . Se denota a esta aplicación lineal por  $DX_\alpha(p)$  y se le llama *la parte lineal de  $\mathcal{F}$  en el punto singular  $p$* .

La matriz  $A_p$  de  $DX_\alpha(p)$  en la coordenada local  $U_\alpha$  está bien determinada salvo multiplicación por constantes no nulas y conjugación: si  $g$  es una constante no nula y  $J$  denota a la matriz jacobiana de un cambio de coordenadas locales alrededor de  $p$ , entonces  $A_p$  está bien definida, salvo la transformación

$$A_p \longmapsto gJA_p J^{-1}.$$

Esta relación tiene la siguiente consecuencia: los valores propios de  $DX_\alpha(p)$  dependen de la elección de las coordenadas alrededor de  $p$ , pero no así los cocientes entre ellos.

**Definición 1.1.7** Sea  $p$  un punto singular aislado de una foliación por curvas  $\mathcal{F}$ . Sea  $z$  un sistema coordenado en  $p$  tal que  $z(p) = 0$  y  $\mathcal{F}$  está generada por un campo de vectores  $X = \sum_{j=1}^n X_j \partial/\partial x_j$ .

1. La *multiplicidad* o el *índice de la foliación  $\mathcal{F}$  en  $p$* , que denotaremos por  $\mu(\mathcal{F}, p)$ , es la codimensión en el anillo local  $\mathcal{O}_{M,p}$  del ideal generado por  $\{X_j\}_{j=1}^n$ :

$$\mu(\mathcal{F}, p) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{M,p} / (X_1, \dots, X_n).$$

2. El *número de intersección local* en  $p$  de los divisores  $D_j = \{X_j = 0\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , que denotaremos por  $(D_1, \dots, D_n)_0$ , es el valor del *residuo* en 0 asociado a la  $n$ -forma meromorfa  $\omega(z) = \frac{dz_1}{X_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{X_n}(z)$ :

$$(D_1, \dots, D_n)_0 = \text{Res}_{\{0\}} \omega$$

donde

$$\text{Res}_{\{0\}} \omega = \left( \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \right)^n \int_{\Gamma} \omega, \quad \text{y } \Gamma = \{z : \|X_j(z)\| = \epsilon_j\}.$$

3. El grado de  $X$  en  $p$  es el grado topológico de la aplicación

$$\frac{X}{\|X\|} : \mathbb{S}_i^{2n-1} \rightarrow \mathbb{S}_1^{2n-1}$$

definida en una esfera suficientemente pequeña  $\|z\| = \epsilon$  en el dominio, en la esfera unitaria del espacio imagen.

**Proposición 1.1.8** Sea  $X$  un germen en 0 de campo de vectores holomorfo en  $\mathbb{C}^n$ , con una singularidad aislada en 0. La multiplicidad, el número de intersección local y el grado de  $X$  en 0 coinciden.

Una demostración de esta proposición usando la teoría de residuos se encuentra en [9], Capítulo 5, secciones 1 y 2. Para una demostración más elemental, ver [2], Parte I, sección 5.  $\square$

En particular,  $\mu(\mathcal{F}, p) = 1$  si y sólo si las hipersuperficies  $\{X_{\alpha_j} = 0\}_{j=1}^n$  se intersectan transversalmente en  $p$ , es decir, si  $\det(DX_\alpha(p)) \neq 0$ . A una singularidad aislada de  $\mathcal{F}$  con esta propiedad la llamaremos *simple* o *no degenerada*.

Una foliación por curvas  $\mathcal{F}$  en  $M$  cuyo conjunto singular consta solamente de puntos singulares no degenerados se llamará *no degenerada*.

## 1.2 Curvatura y clases de Chern de un fibrado vectorial complejo

Esta sección está dedicada a enunciar un teorema de Baum y Bott que utilizaremos en el Capítulo 2 para calcular el número de singularidades aisladas, salvo multiplicidad, de una foliación por curvas en un espacio proyectivo complejo. Por completitud, expondremos (sin demostraciones) los fundamentos de la teoría de Chern-Weil, siguiendo la exposición de [9], Capítulo 3, sección 3.

Sean  $M$  una variedad compleja de dimensión compleja  $m$ ,  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado vectorial complejo en  $M$  de rango  $n$  y  $\mathcal{A}^p(E)$  el haz de secciones  $C^\infty$  del fibrado vectorial  $\wedge^p T(M) \otimes E$ . Sea  $D : \mathcal{A}^q(E) \rightarrow \mathcal{A}^{q+1}(E)$  una conexión en  $E$  y denotemos por

$$\Theta = D^2 : \mathcal{A}^q(E) \rightarrow \mathcal{A}^{q+2}(E)$$

al operador de curvatura asociado a  $D$ . En términos de una trivialización

$$\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$$

de  $E$  sobre  $U_\alpha \subset M$ ,  $\Theta_\alpha = \Theta(U_\alpha)$  es una matriz  $n \times n$  de 2-formas, llamada la *matriz de curvatura de  $D$*  con respecto a  $\varphi_\alpha$ . Si  $\varphi_\beta$  es otra trivialización y  $\varphi_\alpha = g_{\alpha\beta}\varphi_\beta$ , entonces

$$\Theta_\alpha = g_{\alpha\beta}\Theta_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \quad (1.2.1)$$

donde  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_n$  es la función de transición de  $E$  relativa a las trivializaciones  $\varphi_\alpha$  y  $\varphi_\beta$ :  $g_{\alpha\beta}(x) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{\{x\} \times \mathbb{C}^n}$ .

**Definición 1.2.1** Una función polinomial  $P : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  en el espacio vectorial de matrices complejas  $n \times n$ , homogénea de grado  $k$  en sus entradas, se dice que es *invariante* si  $P(A) = P(gAg^{-1})$  para todo  $A \in M(n, \mathbb{C})$ ,  $g \in GL_n$ .

**Ejemplo** Los polinomios  $P^i$ , definidos por la relación

$$\det(A + t \cdot I) = \sum_{k=0}^n P^{n-k}(A) \cdot t^k, \quad A \in M(n, \mathbb{C}).$$

son invariantes. Se les conoce como los *polinomios invariantes elementales*.

De la **Definición 1.2.1** y de la relación (1.2.1) se sigue que, para cada polinomio invariante  $P$  de grado  $k$ ,  $P(\Theta) = P(\Theta_a)$  define una  $2k$ -forma global en  $M$ . Esta forma es cerrada y su clase de comología no depende de la conexión escogida en  $E$ , como muestra el siguiente

**Lema 1.2.2** Para todo polinomio invariante  $P$  de grado  $k$ .

1  $dP(\Theta_a) = 0$ .

2 La clase de cohomología  $[P(\Theta_a)] \in H_{DR}^{2k}$  es independiente de la conexión escogida en  $E$ .

(Para la demostración, ver [9], 403). □

En otras palabras, si  $\Phi$  denota al álgebra graduada de polinomios invariantes,  $\pi : E \rightarrow M$  es un haz vectorial en  $M$  de rango  $n$  y  $\Theta$  es la matriz de curvatura asociada a alguna conexión en  $E$ , entonces, la aplicación

$$w : \Phi \longrightarrow H_{DR}^{2*} \text{ definida por} \\ w(P) = [P(\Theta)]$$

es un homomorfismo de álgebras graduadas bien definido, llamado el *morfismo de Weil*.

Las clases de Chern  $c_i(E)$  del fibrado vectorial  $E$  se definen por

$$c_i(E) = \left[ P^i \left( \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Theta \right) \right] \in H_{DR}^{2i}(M) \quad (1.2.2)$$

y a la suma  $c(E)$  de las clases de Chern se le llama *la clase de Chern total*

$$c(E) = \sum_{i \geq 0} c_i(E) \in H_{DR}^{2*}(M),$$

donde  $c_0(E) = 1 \in H_{DR}^0(M)$ . Las clases de Chern  $c_i(M)$  de una variedad compleja  $M$  se definen como las clases de Chern de su haz tangente holomorfo.

El conjunto singular de una foliación holomorfo  $(L^*, \alpha)$  y la clase de Chern del fibrado vectorial  $TM \otimes L$  están relacionados por el siguiente teorema, debido a Baum y Bott [3] y enunciado por Chern [7] de la siguiente forma

**Proposición 1.2.3** Sea  $M$  una variedad compleja y compacta de dimensión  $m$ . Sea  $L$  un haz lineal holomorfo en  $M$ . Considere una foliación no degenerada  $\mathcal{F}$  dada por una sección holomorfa  $\alpha \in H^0(M, TM \otimes L)$ . Si  $P$  es un polinomio invariante de grado  $m$ , entonces

$$\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^m \int_M P(\Theta) = \sum_{\alpha(p)=0} \frac{P(A_p)}{\det(A_p)} \quad (1.2.3)$$

donde  $A_p$  es la parte lineal de  $\alpha$  en el punto singular  $p$ .

**Corolario 1.2.4** Sea  $M$  una variedad compleja y compacta de dimensión  $m$  y sea  $\mathcal{F}$  una foliación por curvas no degenerada en  $M$ , entonces  $\mathcal{F}$  tiene  $c_n(TM \otimes L')$  puntos singulares.

*Demostración.* Si en (1.2.3) el polinomio invariante  $P$  es el determinante  $\det$ , el lado derecho de la igualdad que se obtiene es el número de puntos singulares de  $\mathcal{F}$ , mientras que el lado izquierdo es el entero que se obtiene al integrar la  $2m$ -forma  $c_m(E)$  de (1.2.2) a lo largo de  $M$ .  $\square$

## 2 Foliaciones por curvas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

### 2.1 La sucesión de Euler torcida

En esta sección, establecemos la correspondencia básica entre foliaciones holomorfas  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  (secciones globales  $\alpha \in H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, TM \otimes L^*)$ ) y campos de vectores polinomiales homogéneos en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , conocida como la sucesión de Euler torcida.

Para establecerla, primero mostraremos que el conjunto de fibrados lineales  $\{L\}$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  está parametrizado por un invariante discreto  $d \in \mathbb{Z}$  (su clase de Chern) y mostraremos que, para cada  $d \geq 1$ , las secciones del fibrado  $L = L_d$  son los polinomios homogéneos en  $\mathbb{C}^{n+1}$  de grado  $d$ .

A lo largo de este trabajo,  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  denotará al espacio proyectivo complejo de dimensión  $n$  y  $\Pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  a la proyección natural. Sean  $(z_0, \dots, z_n)$  coordenadas afines de  $\mathbb{C}^{n+1}$  y  $[z_0, \dots, z_n] = \Pi(z_0, \dots, z_n)$  coordenadas homogéneas de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Para cada  $i = 0, \dots, n$ , sea  $U_i$  el complemento del hiperplano  $(z_i = 0)$ :  $U_i = \{[z_0, \dots, z_n] : z_i \neq 0\}$ . La estructura compleja de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  está dada por los homeomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{C}^n \text{ definidos por} \\ \varphi_i[z_0, \dots, z_n] &= \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right) = (\omega_0, \dots, \widehat{\omega}_i, \dots, \omega_n) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

con funciones de transición analíticas

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} : (U_i \cap U_j) &\rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \text{ dadas por} \\ \varphi_{ij}(\omega_{j_0}, \dots, \omega_{j_n}) &= \left(\frac{\omega_{j_0}}{\omega_{j_i}}, \dots, \frac{\widehat{\omega}_{j_i}}{\omega_{j_i}}, \dots, \frac{1}{\omega_{j_i}}, \dots, \frac{\omega_{j_n}}{\omega_{j_i}}\right) = (\omega_0, \dots, \widehat{\omega}_i, \dots, \omega_n) \end{aligned}$$

Para cada  $d \in \mathbb{Z}$ , consideremos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \xi_{ij} : (U_i \cap U_j) &\longrightarrow GL(1, \mathbb{C}) \text{ definidas por} \\ \xi_{ij}(\omega_{j_0}, \dots, \omega_{j_n}) &= \omega_{j_i}^{-d} \end{aligned}$$

cuya acción en  $\mathbb{C}$  es multiplicar por  $\omega_{j_i}^{-d}$ . Por la segunda igualdad en (2.1.1), estas aplicaciones satisfacen la condición de cociclo

$$\begin{aligned} \xi_{ij}(\omega_{j_0}, \dots, \omega_{j_n}) \xi_{jk}(\omega_{k_0}, \dots, \omega_{k_n}) &= \omega_{j_i}^{-d} \omega_{k_j}^{-d} = \left(\frac{z_i}{z_k}\right)^{-d} \\ &= \xi_{ik}(\omega_{k_0}, \dots, \omega_{k_n}) \end{aligned}$$

así es que, para cada  $d \in \mathbb{Z}$ , el cociclo  $(\xi_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$  define un fibrado lineal en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , al que denotaremos por  $L_d$ . A  $L_1$  se le llama *el fibrado lineal de hiperplanos*.

**Lema 2.1.1** Todo fibrado lineal en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es una potencia de  $L_1$ , es decir, es de la forma  $L_d$  con  $d \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Sea  $L \in H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^*)$  un fibrado lineal en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . De la sucesión larga de cohomología asociada a la sucesión exponencial

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

$$f \longmapsto \exp^{2\pi i f}$$

y del hecho de que  $H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}) = 0$ ,  $q = 1, 2$ , se sigue que  $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^*) \simeq H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ . Este último grupo es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  y está generado por la clase de Chern  $c_1(H)$  de un hiperplano  $H$ .  $\square$

Nos ocuparemos ahora de caracterizar las secciones globales de estos fibrados.

**Proposición 2.1.2** Las secciones holomorfas globales  $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, L_d)$  de los haces lineales  $L_d$ ,  $d \geq 1$  son los polinomios homogéneos de grado  $d$ .

*Demostración.* Sean  $d = 1$  y  $T: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal.  $T$  induce una sección holomorfa  $\sigma_T \in H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, L_1)$  por restricción a cada línea:

$$\begin{aligned} \sigma_T^i(\omega_0, \dots, \omega_m) &= T\left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, 1, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right) = \frac{1}{z_i} T(z_0, \dots, z_n) \\ &= \frac{z_j}{z_i} \frac{1}{z_j} T(z_0, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) = \frac{1}{w_{ji}} \sigma_T^j(\omega_{j0}, \dots, \omega_{jn}) \end{aligned}$$

como  $\sigma_T \equiv 0 \iff T \equiv 0$ ,  $(\mathbb{C}^{n+1})^*$  se inyecta en  $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, L_1)$ . Por otro lado, sean  $\sigma \in H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, L_1)$  y  $D = (\sigma)$  su divisor de ceros. Como su clase fundamental  $\eta_D$  ([9], p. 61) es igual a  $c_1(H) = \mathbf{h}$ , la clase de Chern de un hiperplano  $H$ , entonces  $D$  es un hiperplano ([9], p. 64). Si  $T' \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$  se anula en  $\Pi^{-1}(D) \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ , entonces  $\sigma/\sigma_T$  es una función holomorfa global en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  así que es una constante  $c$  y  $\sigma = c \cdot \sigma_T$  para alguna  $c \in \mathbb{C}$ .

Si ahora  $d \geq 1$ , una forma  $d$ -lineal  $F: (\mathbb{C}^{n+1})^d \rightarrow \mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$  induce, de modo similar al caso  $d = 1$ , una sección holomorfa  $\sigma_F \in H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, L_d)$  por restricción a cada línea: si  $p = [\omega_0, \dots, \omega_m] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , entonces

$$\begin{aligned} \sigma_F^i(\omega_0, \dots, \omega_m) &= F\left(\left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, 1, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right), \dots, \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, 1, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right)\right) \\ &= \frac{z_j^d}{z_i^d} \frac{1}{z_j^d} F\left((z_0, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n), \dots, (z_0, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n)\right) \\ &= \frac{1}{w_{ji}^d} \sigma_F^j(\omega_{j0}, \dots, \omega_{jn}) \end{aligned}$$

La prueba de que  $\sigma_F$  es polinomial homogénea y de grado  $d$  se encuentra en [9], p.165.  $\square$

Sea  $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_n)$  una sección del fibrado vectorial  $\bigoplus_{n+1} L_1 = L_1 \oplus \dots \oplus L_1$  y sea  $T\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  el fibrado tangente holomorfo a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . La aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: \bigoplus_{n+1} L_1 &\longrightarrow T\mathbb{C}\mathbb{P}^n \text{ definida por} \\ \mathcal{E}(\sigma) &= \Pi_*(\sum \sigma_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}) \end{aligned}$$

define un morfismo suprayectivo de fibrados, cuyo núcleo es el fibrado lineal trivial, generado por el campo de vectores radial

$$\tau = (z_0, \dots, z_n)$$

Se tiene entonces una sucesión exacta de fibrados vectoriales en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \bigoplus_{n+1} L_1 \xrightarrow{\mathcal{E}} T\mathbb{C}\mathbb{P}^n \longrightarrow 0 \tag{2.1.2}$$

que se conoce como la sucesión de Euler ([9] p.409). El producto tensorial de (2.1.2) con el fibrado lineal  $L_d$  produce la siguiente sucesión exacta, a la que nos referiremos como la sucesión de Euler torcida

$$0 \longrightarrow L_d \longrightarrow \bigoplus_{n+1} L_{d+1} \xrightarrow{1_d \otimes f} L_d \otimes T\mathbb{C}P^n \longrightarrow 0, \quad (2.1.3)$$

donde  $1_d: L_d \longrightarrow L_d$  es la identidad.

La sucesión de Euler torcida tiene la siguiente importante interpretación

**Observación 2.1.3** Un campo de vectores polinomial homogéneo  $X^{d+1}$  de grado  $d+1$ , en  $\mathbb{C}^{n+1}$  define una sección holomorfa global del fibrado  $L_d \otimes T\mathbb{C}P^n$  (es decir, una foliación por curvas en  $\mathbb{C}P^n$  por la Observación 1.1.6). Dos de tales campos definen la misma foliación  $\mathcal{F}_1$  si y sólo si su diferencia es de la forma  $g \cdot \tau$ , donde  $g$  es un polinomio homogéneo de grado  $d$  y  $\tau$  es el campo de vectores radial.

Si  $X^{d+1}(z) = \sum_{j=0}^n X_j(z)$ , entonces la foliación  $\mathcal{F}_1$  en  $\mathbb{C}P^n$  inducida por la sucesión de Euler torcida está generada, en el abierto

$$U_k = \{[\zeta] = [\zeta_0, \dots, \hat{1}, \dots, \zeta_n]\} \subset \mathbb{C}P^n,$$

por el campo de vectores

$$Y_k(\zeta_0, \dots, \hat{1}, \dots, \zeta_n) = \begin{pmatrix} (X_0 - \zeta_0 X_k)(\zeta_0, \dots, \hat{1}, \dots, \zeta_n) \\ \vdots \\ (X_j - \zeta_j X_k)(\zeta_0, \dots, \hat{1}, \dots, \zeta_n) \\ \vdots \\ (X_n - \zeta_n X_k)(\zeta_0, \dots, \hat{1}, \dots, \zeta_n) \end{pmatrix}$$

de modo que las singularidades de  $\mathcal{F}_1$  son aquellos puntos  $[\zeta] \in U_k$  en los que el campo

$$(X_0(\zeta_0, \dots, \hat{1}, \dots, \zeta_n), \dots, \widehat{X_k}, \dots, X_n(\zeta_0, \dots, \hat{1}, \dots, \zeta_n))$$

es proporcional a la dirección  $(\zeta_0, \dots, \hat{1}, \dots, \zeta_n)$  de  $[\zeta]$ .

**Observación 2.1.4** Una foliación por curvas en  $\mathbb{C}P^n$  puede pensarse como un campo de vectores meromorfo en  $\mathbb{C}P^n$  pues, al escribir un generador en un abierto coordenado afín, éste tiene un polo de orden  $d$  en el hiperplano al infinito. El efecto de multiplicar por el haz lineal  $L_d$  es el de cancelar este polo (para más detalles, ver [12], p.35).

Denotemos por  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^n}(d)$  al haz de secciones del fibrado vectorial  $L_d \otimes T\mathbb{C}P^n \simeq \text{Hom}(L_{-d}, T\mathbb{C}P^n)$  y por  $E(d)$  al  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $H^0(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^n}(d))$  de sus secciones globales. Por la Definición 1.1.4, dos secciones  $\alpha$  y  $\alpha'$  definen la misma foliación  $\mathcal{F}$  si y sólo si  $\alpha = f \alpha'$  para alguna  $f \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{C}^*$ . Por la Observación 2.1.3  $E(d)$  es de dimensión finita, así es que el espacio de foliaciones por curvas con fibrado lineal asociado  $L_d$  al que denotaremos por  $\mathcal{F}^d(d, \mathbb{C}P^n)$  es el espacio proyectivo  $\mathbb{P}E(d)$  sobre  $E(d)$ .

## 2.2 Calculus numerorum

En esta sección calcularemos la dimensión del espacio de foliaciones por curvas  $\mathcal{F}ol(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  y el número de singularidades aisladas (salvo multiplicidad) que una de éstas tiene. Probaremos también que el conjunto singular  $\text{Sing}(\alpha)$  del elemento genérico  $\alpha$  en  $\mathcal{F}ol(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  consta de singularidades aisladas de multiplicidad 1.

**Lema 2.2.1** Sean  $d \leq 1$  y  $e = -d$ , entonces  $\mathcal{F}ol(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \mathbb{P}^N$  con

$$N = \binom{e+n}{e+1} (e+n+2) - 1$$

*Demostración.* Es consecuencia de la sucesión de Euler torcida (2.1.3): el número  $N+1$  es la dimensión del espacio vectorial de campos de vectores polinomiales homogéneos de grado  $d+1$ , menos la dimensión del subespacio formado por aquellos que son un múltiplo polinomial homogéneo de grado  $d$  del campo de vectores radial. Para más detalles, ver [12], p.37.  $\square$

**Proposición 2.2.2** El número de singularidades aisladas de una foliación por curvas no degenerada  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{F}ol(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  es  $\frac{(d+1)^{n+1} - 1}{d}$ , si  $d \geq 1$  y es  $n+1$ , si  $d = 0$ .

*Demostración.* Por el **Corolario 1.2.4**, basta calcular  $c_n(\Theta_{\mathbb{P}^n}(d))$ .

De la descomposición  $\mathcal{C}^\infty$

$$\bigoplus_{n+1} L_{d+1} = L_d \oplus \Theta_{\mathbb{P}^n}(d)$$

y la fórmula de Whitney del producto ([9], p.408) se obtiene

$$\begin{aligned} c(\Theta_{\mathbb{P}^n}(d)) &= c\left(\bigoplus_{n+1} L_{d+1}\right) c(L_d)^{-1} \\ &= (1 + (d+1)\mathbf{h})^{n+1} \left(1 + \sum_{j=1}^n (-d)^j \mathbf{h}^j\right) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

donde  $\mathbf{h} \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$  es la clase de un hiperplano. La  $n$ -ésima clase de Chern  $c_n(\Theta_{\mathbb{P}^n}(d))$  es el coeficiente de  $\mathbf{h}^n$  en (2.2.1) y su expresión es

$$c_n(\Theta_{\mathbb{P}^n}(d)) = \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} d^{n-j} = \frac{(d+1)^{n+1} - 1}{d}, \quad (2.2.2)$$

lo que concluye la prueba.  $\square$

Consideremos ahora la variedad de incidencias

$$\mathcal{Z} = \{([w], \alpha) : \alpha([w]) = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathcal{F}ol(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) \quad (2.2.3)$$

Si  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  denotan respectivamente a las proyecciones sobre el primero y segundo factores, entonces la restricción  $\Pi_1|_{\mathcal{Z}}$  tiene por fibra sobre  $[w] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , al conjunto de foliaciones  $\mathcal{Z}_{[w]}$  que se anulan en  $[w]$  y la fibra de  $\Pi_2|_{\mathcal{Z}}$  sobre  $\alpha \in \mathbb{P}^N = \mathcal{F}ol(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  es el conjunto singular  $\text{Sing}(\alpha)$ :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Sing}(\alpha) \\ & & \downarrow \\ \mathcal{Z}_{[w]} & \longrightarrow & \mathcal{Z} \xrightarrow{n_1} \mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ & & \downarrow n_2 \\ & & \mathcal{F}ol(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) \end{array}$$

**Proposición 2.2.3**  $\mathcal{Z}$  es una subvariedad lisa e irreducible de codimensión  $n$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathcal{F}\mathcal{O}(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  y el conjunto de foliaciones no degeneradas  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{F}\mathcal{O}(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  es un abierto denso de Zariski en  $\mathcal{F}\mathcal{O}(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ .

*Demostración.* En un abierto coordenado afín alrededor de un punto  $[w]$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ,  $\alpha$  está representado por un campo de vectores polinomial de la forma  $X(z) = \sum_{j=1}^n X_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$ , de modo que  $\alpha \in \mathcal{Z}_{[w]}$  si y sólo si se satisfacen las  $n$  condiciones lineales independientes  $\{X_j(w) = 0\}$ . Esto muestra que, para todo  $[w]$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ,  $\mathcal{Z}_{[w]}$  es un subespacio lineal de codimensión  $n$  en  $\mathcal{F}\mathcal{O}(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ .

El grupo de transformaciones proyectivas  $PGL_n$  actúa en  $\mathcal{F}\mathcal{O}(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$

$$PGL_n \times \mathcal{F}\mathcal{O}(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{O}(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) \quad \text{por} \quad (g, \alpha) \longmapsto (Dg \cdot \alpha) \circ g^{-1} \quad (2.2.4)$$

Una forma de entender esta acción, es usando la representación (2.1.3) de  $\alpha$  como un campo  $(d+1)$ -homogéneo en  $\mathbb{C}^{n+1}$  y de  $g$  como elemento del grupo lineal  $GL_{n+1}$ .

Como  $PGL_n$  actúa transitivamente en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , en particular, si  $[u_0] = [1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , entonces, para cada  $[w] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  existe  $g \in PGL_n$  tal que  $g \cdot [u_0] = [w]$  y  $g$  es único, módulo el subgrupo formado por las transformaciones proyectivas que fijan a  $[u_0]$  (el estabilizador  $\mathbf{S}$  de  $[u_0]$  en  $PGL_n$ ). La observación anterior establece una correspondencia

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathbb{P}^n &\longrightarrow PGL_n/\mathbf{S} \\ [w] &\longmapsto g\mathbf{S} \end{aligned}$$

que induce en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \simeq PGL_n/\mathbf{S}$  una estructura natural de espacio homogéneo bajo la acción de  $PGL_n$

$$\begin{aligned} PGL_n \times PGL_n/\mathbf{S} &\longrightarrow PGL_n/\mathbf{S} \\ (f, g\mathbf{S}) &\longmapsto (fg)\mathbf{S} \end{aligned}$$

Observemos ahora que si  $\alpha$  está en la fibra  $\mathcal{Z}_{[w]}$  sobre  $[w]$  y  $g \cdot [u_0] = [w]$ , entonces la foliación  $(Dg^{-1} \cdot \alpha) \circ g$  (obtenida por la acción (2.2.4)) se anula en el punto  $[u_0]$  (es decir, está en la fibra  $\mathcal{Z}_{[u_0]}$  sobre  $[u_0]$ ). Por un lado, esto muestra que  $\Pi_2|_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z}) = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  y, por otro lado, que la acción (2.2.4) se levanta a  $\mathcal{Z}$  por  $\Pi_2|_{\mathcal{Z}}$

$$\begin{aligned} PGL_n \times \mathcal{Z} &\longrightarrow \mathcal{Z} \\ &\quad \downarrow \pi_2 \\ PGL_n \times PGL_n/\mathbf{S} &\longrightarrow PGL_n/\mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

y por lo tanto  $\Pi_1|_{\mathcal{Z}}: \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es un fibrado proyectivo  $PGL_n$ -homogéneo, que es un subfibrado de  $\Pi_2$ . En consecuencia,  $\mathcal{Z}$  tiene estructura de producto local y por lo tanto es una subvariedad lisa en  $\mathbb{P}^N \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Como todas las fibras  $\mathcal{Z}_{[w]}$  de la primera proyección son subespacios lineales de codimensión  $n$ , son entonces irreducibles y de la misma dimensión. Esto implica ([17], Teorema 8, p.61) que  $\mathcal{Z}$  también es irreducible y de codimensión  $n$  en  $\mathbb{P}^N \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .

En consecuencia ([17], Teorema 7, p.60), las fibras de la segunda proyección

$$\text{Sing}(\alpha) \longleftarrow \mathcal{Z} \xrightarrow{\Pi_2|_{\mathcal{Z}}} \mathcal{F}\mathcal{O}(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$$

son de dimensión cero en un abierto de Zariski no vacío. Denotemos por  $\mathcal{F}\mathcal{O}'(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  a este abierto.

Para probar que las singularidades son genéricamente de multiplicidad uno, consideremos la aplicación

$$\nu : \mathcal{F}d'(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathbb{Z}^-$$

$$\nu(\alpha) = \max_{p \in \text{Sing}(\alpha)} \{ \mu(\alpha, p) \}$$

que asigna, a cada  $\alpha \in \mathcal{F}d'(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ , la máxima multiplicidad de sus puntos singulares. Es sencillo probar que  $\nu$  es semicontinua superiormente y que su mínimo es 1 (de hecho, la foliación  $\mathcal{F}'$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  inducida por

$$X'(z) = \sum_{j=0}^n z_j^{d+1} \frac{\partial}{\partial z_j} \quad (2.2.6)$$

tiene ceros aislados simples y puede verse que son precisamente  $c_n(\Theta_{\mathbb{P}^n}(d))$ , lo que da otra prueba de la **Proposición 2.2.2** ).

Como el conjunto  $\{ \alpha \in \mathcal{F}d'(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) : \nu(\alpha) \geq 2 \}$  es cerrado (ver la Observación 12.7.1 en [15] p.288 ), entonces el conjunto de foliaciones no degeneradas es un abierto denso de  $\mathcal{F}d'(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

**Corolario 2.2.3** Sean  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  foliaciones en  $\mathcal{F}d(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  inducidas respectivamente por los campos polinomiales  $X$  y  $X'$  y sea  $\{ \mathcal{F}_t \}$  la familia inducida por

$$X_t = (1-t)X + tX', \quad t \in \mathbb{C}. \quad (2.2.7)$$

Si  $\mathcal{F}'$  es no degenerada, entonces existe una vecindad (posiblemente perforada)  $D_t \subset \mathbb{C}$  de  $t=0$ , tal que  $\{ \mathcal{F}_t \}_{t \in D_t}$  es no degenerada.

*Demostración.* Sea  $U \subset \mathcal{F}d(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  el abierto de las foliaciones no degeneradas. Como  $\{ \mathcal{F}_t \} \simeq \mathbb{P}^1$ ,  $\{ \mathcal{F}_t \} \cap U$  consiste en un número finito de puntos porque es un abierto de Zariski no vacío de  $\mathbb{P}^1$ . La vecindad  $D_t$  no es perforada si y sólo si  $\mathcal{F}$  es no degenerada.  $\square$ .

**Proposición 2.2.4** Sea  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}d(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  una foliación por curvas tal que  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  consta solamente de singularidades aisladas, entonces la suma de las multiplicidades de  $\mathcal{F}$  en sus puntos singulares es la enésima clase de Chern del haz  $\Theta_{\mathbb{P}^n}(d)$ , o sea:

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu(\mathcal{F}, p) = c_n(\Theta_{\mathbb{P}^n}(d))$$

*Demostración.* Aunque este resultado es consecuencia de un resultado más general (ver el Teorema 1 de [3]), en nuestro contexto puede probarse de la siguiente manera: sea  $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{ p_1, \dots, p_M \} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  y para cada  $j \in \{1, \dots, M\}$ , sea  $U_j$  una bola que contiene a  $p_j$  con  $U_i \cap U_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Sean  $X$  un campo  $(d+1)$ -homogeneo que induce a  $\mathcal{F}$ ,  $X'$  el campo (2.2.6) y  $\{ \mathcal{F}_t \}$  la familia de foliaciones inducida por la correspondiente familia de campos (2.2.7).

Sea  $D'_t$  una vecindad perforada en 0 suficientemente pequeña tal que  $\mathcal{F}_\tau$  es no degenerada y  $\text{Sing}(\mathcal{F}_\tau) \cap \partial U_j = \emptyset$ , para toda  $\tau \in D'_t$ . Entonces  $\text{Sing}(\mathcal{F}_\tau) \cap U_j = \{ q_{1j}, \dots, q_{\nu_j} \}$ .

donde  $\mu_j = \mu(\mathcal{F}, p_j)$  y en consecuencia

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu(\mathcal{F}, p) = \| \{ \text{Sing}(\mathcal{F}_\tau) \} \| = c_n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)),$$

donde  $\| \{ \text{Sing}(\mathcal{F}_\tau) \} \|$  denota al número de puntos singulares de la foliación  $\mathcal{F}_\tau$  y la última igualdad es consecuencia del **Corolario 1.2.4** y de la **Proposición 2.2.2**.  $\square$

**Proposición 2.2.5** Sea  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}\mathcal{O}(d, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  y denotemos por  $\text{Sing}_0(\mathcal{F}) \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$  al conjunto de singularidades aisladas de  $\mathcal{F}$ . Si

$$\sum_{p \in \text{Sing}_0(\mathcal{F})} \mu(\mathcal{F}, p) = c_n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)),$$

entonces  $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}_0(\mathcal{F})$ .

*Demostración.* Sea  $X$  un campo  $(d+1)$ -homogéneo en  $\mathbb{C}^{n+1}$  que induce a  $\mathcal{F}$  y supongamos, en busca de una contradicción, que existe  $V \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$  tal que  $\dim(V) > 0$ . Sea  $p \in V$ . Usando la acción de  $GL_{n+1}$  en  $E(d)$ , podemos construir un campo  $(d+1)$ -homogéneo  $Y$ , cuya foliación inducida  $\mathcal{F}'$  es no degenerada (su conjunto singular  $\text{Sing}(\mathcal{F}')$  consta de puntos aislados de multiplicidad uno) y  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}')$  (ver la observación precedente a la expresión (2.2.5)).

Consideremos la correspondiente familia  $\{\mathcal{F}_t\}$  como en el **Corolario 2.2.3**. Por un lado,  $\mathcal{F}_t$  tiene sólo singularidades simples si  $0 < \|t\| < \epsilon$  y son tantas como  $c_n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ . Por otro lado,  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}_t)$  para todo  $t \in \bar{\mathbb{C}}$  así es que, si  $t$  es suficientemente pequeña,  $\mathcal{F}_t$  tiene solamente singularidades simples pero son al menos  $c_n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) + 1$ , lo que contradice a la **Proposición 2.2.4**.  $\square$

Decimos que un conjunto finito de puntos genera a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  si el conjunto no está contenido en un hiperplano. Se dice que  $n+2$  puntos en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  están en posición general si cualesquiera  $n+1$  de ellos generan a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .

Si dos conjuntos de  $n+2$  puntos  $\{p_0, \dots, p_{n+1}\}$  y  $\{q_0, \dots, q_{n+1}\}$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  están en posición general entonces existe una única  $g \in PGL_n$  tal que  $g(p_j) = q_j$  para  $j = 0, \dots, n+1$ .

Si se tiene una foliación con  $n+2$  puntos singulares conocidos en posición general, uno puede usar el resultado anterior y la acción (2.2.5) para construir nuevas foliaciones con  $n+2$  puntos singulares escogidos. Sin embargo, si una foliación es no-degenerada, entonces su conjunto singular debe generar a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  y de hecho la determina, como muestra el siguiente resultado (ver [10], Proposición 2.1 y Teorema 2.6.)

**Proposición 2.2.6** Sean  $d > 0$  y  $\alpha \in E(d)$  una foliación por curvas no degenerada, entonces  $\text{Sing}(\alpha)$  genera a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Más aún, si  $\alpha' \in E(d)$  es otra foliación por curvas que se anula en  $\text{Sing}(\alpha)$  entonces  $\alpha' = k\alpha$  para algún  $k \in \mathbb{C}$ .  $\square$

En nuestro contexto, este resultado es importante en la construcción de familias de foliaciones en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  con conjunto singular pre-establecido. Ver la introducción del Capítulo 5 de este trabajo.

### 3 Esquinas simples y persistencia bajo explosiones

Sea  $X$  un germen en 0 de campo de vectores holomorfo en  $\mathbb{C}^m$  y sea  $\mathcal{F}$  la foliación inducida por  $X$  en una vecindad de 0. En la primera sección de este capítulo se define la foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  inducida por  $\mathcal{F}$  y la explosión en 0. Llamaremos *esquina simple* a un tipo especial de singularidades de  $\mathcal{F}_1$  y mostraremos, en la segunda sección, que es *persistente bajo explosiones*. Vagamente hablando, esto último significa lo siguiente: si  $p$  es una esquina simple de una foliación  $\mathcal{F}'$  y  $\mathcal{F}'_1$  es la foliación adaptada inducida por  $\mathcal{F}'$  y la explosión con centro en  $p$ , entonces las singularidades de  $\mathcal{F}'_1$  en el divisor *excepcional* también son esquinas simples.

Los conceptos y resultados de este capítulo, aunque técnicos por naturaleza, son fundamentales para probar el teorema de suficiencia de jets del capítulo siguiente y los teoremas de existencia posteriores.

#### 3.1 Foliaciones adaptadas y esquinas simples en $\mathbb{C}^m$ , $m \geq 3$

Sea  $\Delta \subset \mathbb{C}^m$  un polidisco centrado en  $0 \in \mathbb{C}^m$  y sea

$$\tilde{\Delta} = \{(z, [\zeta]) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{P}^{m-1} : z_j \zeta_j = z_j \zeta_i \forall i, j\} \subset \Delta \times \mathbb{P}^{m-1}.$$

Sean  $\pi_1 : \mathbb{C}^m \times \mathbb{P}^{m-1} \rightarrow \mathbb{C}^m$  y  $\pi_2 : \mathbb{C}^m \times \mathbb{P}^{m-1} \rightarrow \mathbb{P}^{m-1}$  las proyecciones en el primero y segundo factores. La *explosión (transformación cuadrática o blow-up)*  $\sigma : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$  con centro en 0 del polidisco  $\Delta$  se define como

$$\sigma = \pi_1 |_{\tilde{\Delta}} : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta \quad (3.1.1)$$

Observe que  $\sigma^{-1}(0) = \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$ .

Así definida,  $\tilde{\Delta}$  tiene una estructura natural de variedad compleja de dimensión  $m$ : si  $U_k = \{[\zeta_1, \dots, \overset{-}{1}, \dots, \zeta_m] \subset \mathbb{P}^{m-1}$  es un abierto afin como se definió en (2.1.1) y  $(z, [\zeta]) \in \mathbb{C}^m \cap (\mathbb{C}^m \times U_k)$ , entonces  $z_j = z_k \zeta_j$  y la aplicación  $\sigma$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} \sigma(z_k, (\zeta_1, \dots, \overset{-}{1}, \dots, \zeta_m)) &= (z_k \zeta_1, \dots, z_k \zeta_{k-1}, z_k, z_k \zeta_{k+1}, \dots, z_k \zeta_m) \\ &= (z_1, \dots, z_k, \dots, z_m), \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

de modo que, en estas coordenadas,  $(z_k = 0)$  es una ecuación que define a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$ . Por esta razón y por el hecho de que  $\sigma |_{\mathbb{C}^m \setminus \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}} : \mathbb{C}^m \setminus \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1} \rightarrow \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$  es un biholomorfismo, se le llama el *divisor excepcional* y suele denotársele por  $E$ .

Por razones mnemotécnicas, denotaremos por  $\sigma_k$  a la expresión local (3.1.2) de la explosión (3.1.1):

$$\begin{aligned} \sigma_k(\zeta) &= (\sigma_{k,1}(\zeta), \dots, \sigma_{k,m}(\zeta)) = (z_1, \dots, z_m) \\ &\quad \text{donde} \\ \sigma_{k,j}(\zeta) &= \begin{cases} \zeta_k \zeta_j & \text{si } j \neq k \\ \zeta_k & \text{si } j = k \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$ , el divisor excepcional  $E_1 \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$  está definido por la ecuación  $(\zeta_k = 0)$  o bien, en términos de  $\sigma_k$ , por  $\sigma_k^{-1}(0)$ .

En particular, el punto

$$q_k = [0, \dots, 1, \dots, 0] \in \sigma_k^{-1}(0) = \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1} \quad (3.1.4)$$

cuya única coordenada no nula ocurre en la  $k$ -ésima posición, satisface  $\zeta(q_k) = 0$ , en cada sistema coordenado  $\zeta$  definido por (3.1.3).

Si  $M$  es una variedad compleja y  $p$  es un punto en  $M$ , la explosión  $\tilde{M}$  en  $p$  se construye tomando una vecindad  $U$  de  $p$  isomorfa a un polidisco  $\Delta$  y definiendo

$$\tilde{M} = (M - \{p\}) \bigcup_{\Delta'} \tilde{\Delta}$$

donde  $\Delta'$  es el polidisco perforado  $\Delta \setminus \{0\}$ , que es isomorfo a su imagen inversa en  $\tilde{\Delta}$  (ver [14], p.83 ó, para más detalles, [9], p.182).

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación por curvas en una variedad compleja  $M$  y  $p$  un punto singular de  $\mathcal{F}$ . Sea  $X$  un germen de campo de vectores holomorfo en  $p$  que define a  $\mathcal{F}$ .

**Definición 3.1.1** La *multiplicidad algebraica* de  $\mathcal{F}$  en  $p$  es el grado del menor coeficiente no nulo en la expansión en serie de Taylor de  $X$  alrededor de  $p$ . Si los términos de grado menor de  $X$  no son un múltiplo del campo vectorial radial, se dirá que  $\mathcal{F}$  es *no-dicrítica* en  $p$ . Cuando  $\mathcal{F}$  es no-dicrítica en  $p$ , también se dirá que el divisor excepcional es no-dicrítico.

**Definición 3.1.2** La *foliación adaptada*  $\mathcal{F}_1$  inducida por  $\mathcal{F}$  y la explosión  $\sigma$  con centro en  $p$ , se define como sigue: sea  $z$  un sistema coordenado en  $M$  alrededor de  $p$  tal que  $z(p) = 0$  y  $\mathcal{F}$  está generada por un campo de vectores holomorfo  $X$ . Si la explosión  $\sigma$  está dada por

$$\sigma(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = (\zeta_1, \zeta_1 \zeta_2, \dots, \zeta_1 \zeta_m) = (z_1, \dots, z_m)$$

entonces  $\mathcal{F}_1$  está generada por un campo de vectores  $Y(\zeta) = Y_1^*(\zeta)$  dado por

$$Y = \zeta_1^{-n} (D\sigma)^{-1} (X \circ \sigma) \quad (3.1.5)$$

donde  $(D\sigma)^{-1} : \sigma^* TM \rightarrow T\tilde{M}$  es el morfismo de fibrados racional sobre  $\tilde{M}$  con un polo de orden 1 en el divisor excepcional  $E = \sigma^{-1}(0)$  y  $n$  es el mayor entero tal que  $Y$  es holomorfa y tangente a  $E$ . Esto es, si  $\zeta_1^{-1} Y$  es holomorfa pero no es tangente a  $E$ , entonces  $Y$  es idénticamente cero en  $E$ .

Las propiedades relevantes de la foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  están contenidas en la siguiente

**Proposición 3.1.3** Sea  $\mathcal{F}_1$  la foliación adaptada a  $\mathcal{F}$ , inducida por la explosión  $\sigma : \tilde{M} \rightarrow M$  con centro en  $p \in M$ . Sea  $z$  un sistema coordenado en  $M$  alrededor de  $p$  tal que  $z(p) = 0$  y  $\mathcal{F}$  está generada por un campo de vectores holomorfo  $X$ . Entonces

1 Si  $X$  es de multiplicidad algebraica  $d + 1$  en  $p$ , entonces  $\mathcal{F}_1$  está generada por

$$Y = \zeta_1^{-d} (D\sigma)^{-1} (X \circ \sigma). \quad (3.1.6)$$

2 Si  $X$  es de multiplicidad algebraica  $d + 1$  en  $p$ , entonces la foliación adaptada  $\mathcal{F}_1|_E$  restringida al divisor excepcional  $E \simeq \mathbb{C}P^{m-1}$  es isomorfa a la inducida a través de la

sucesión de Euler torcida por los términos  $X^{d+1}$  de grado  $d+1$  de  $X$  y el  $(d+2)$ -jet de  $X$  determina a la parte lineal de  $\mathcal{F}_1$  en las singularidades en  $E$ . En particular, el conjunto singular  $\text{Sing}(\mathcal{F}_1|_E)$  está determinado por  $X^{d+1}$ .

3  $Y$  no es idénticamente cero en  $E$  si y sólo si  $\mathcal{F}$  es no-dicrítica en  $p$ .

**Demostración.** Sea  $z$  un sistema coordenado de  $M$  alrededor de  $p$  tal que  $z(p) = 0$  y sean  $X(z) = \sum_{j=1}^m X_j(z) \frac{\partial}{\partial x_j}$  y  $\sigma$  como en la **Definición 3.1.2**. En estas coordenadas  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$  de  $\mathbb{C}^m$ , el divisor excepcional  $E$  está definido por la ecuación  $(\zeta_1 = 0)$ .

Si  $X$  es de multiplicidad algebraica  $d+1$  en  $0$  y escribimos a  $X = X^{d+1} + X^{d+2} + \dots$  como suma de campos de vectores polinomiales homogéneos, entonces

$$(D\sigma)^{-1}(X \circ \sigma(\zeta)) = \zeta_1^{-1} \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\zeta_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ -\zeta_m & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1^{d+1} (X_1^{d+1}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \zeta_1 [X_1^{d+2}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \dots]) \\ \zeta_1^{d+1} (X_2^{d+1}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \zeta_1 [X_2^{d+2}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \dots]) \\ \vdots \\ \zeta_1^{d+1} (X_m^{d+1}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \zeta_1 [X_m^{d+2}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \dots]) \end{pmatrix}.$$

De donde el campo  $Y$  definido por (3.1.6) es

$$Y(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\zeta_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ -\zeta_m & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 (X_1^{d+1}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \zeta_1 [X_1^{d+2}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \dots]) \\ (X_2^{d+1}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \zeta_1 [X_2^{d+2}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \dots]) \\ \vdots \\ (X_m^{d+1}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \zeta_1 [X_m^{d+2}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) + \dots]) \end{pmatrix}. \quad (3.1.7)$$

De esta expresión se sigue que  $n = d$  es el entero de la **Definición 3.1.2**, lo que prueba el inciso 1.

En estas coordenadas, la foliación  $\mathcal{F}_1|_E$  está generada por  $Y(0, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$  y se sigue también de (3.1.7) que sólo depende de los términos  $X^{d+1}$  de orden  $d+1$  de  $X$ . Por otro lado, la proyección natural

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{C}^m - \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}P^{m-1} \\ \Pi(z_1, \dots, z_m) &= [z_1, \dots, z_m] \end{aligned}$$

en las coordenadas  $\varphi_1 : \{z_1 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}P^{m-1}$  definidas en (2.1.1), está dada por

$$\Pi(z_1, \dots, z_m) = \left( \frac{\bar{z}_1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_m}{z_1} \right) = (\zeta_2, \dots, \zeta_m).$$

En estas coordenadas, la foliación en  $\mathbb{C}P^{m-1}$  inducida por  $X^{d+1}$  a través de la sucesión de Euler torcida está generada por el campo de vectores

$$(D\Pi \cdot X^{d+1}) \circ \Pi^{-1}(1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$$

y éste coincide con  $Y(0, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$  (omitendo la primera componente), como uno puede fácilmente comprobar. Esto prueba el inciso 2, que a su vez implica inmediatamente el inciso 3, por la sucesión de Euler torcida.

Si uno calcula la parte lineal de (3.1.7) en el divisor excepcional, es decir, en los puntos de la forma  $(0, \zeta_2^0, \dots, \zeta_m^0) = (0, \zeta^0)$ , la expresión que se obtiene

$$DY(0, \zeta^0) = \begin{pmatrix} X_1^{d+1}(1, \zeta^0) & 0 & \dots & 0 \\ X_2^{d+2}(1, \zeta^0) - \zeta_2^0 \cdot X_1^{d+1}(1, \zeta^0) & & & \\ \vdots & & & \frac{\partial X_1^{d+1}}{\partial \zeta_k}(1, \zeta^0) \\ X_m^{d+2}(1, \zeta^0) - \zeta_m^0 \cdot X_1^{d+1}(1, \zeta^0) & & & \end{pmatrix}$$

concluye la prueba del inciso 2 y de la **Proposición 3.1.3**.

Es sencillo comprobar que, en las coordenadas (3.1.3), la foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  en  $\bar{\mathbb{C}}^m$  inducida por  $X$  y  $\sigma_k$  está generada por el campo de vectores

$$Y_k(\zeta) = \sum_{j=1}^m Y_{k,j}(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \quad \text{donde} \quad Y_{k,j}(\zeta) = \begin{cases} Y_k(\sigma_k(\zeta)) & \text{si } j = k \\ \zeta_k^{-1} [Y_j(\sigma_k(\zeta)) - \zeta_j Y_{k,k}(\zeta)] & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (3.1.8)$$

**Definición 3.1.4** Un sistema de foliaciones adaptadas  $\{(\mathcal{F}_j, p_j)_{j=0, \dots, r}\}$  es una sucesión de foliaciones definida por la siguiente construcción:  $\mathcal{F}_0$  es la foliación holomorfa definida por un campo de vectores holomorfo  $Y$ , en una vecindad del 0 en  $\mathbb{C}^m$ . Para  $j = 1, \dots, r$ , sea  $\sigma_j: \bar{\mathbb{C}}_j^m \rightarrow \bar{\mathbb{C}}_{j-1}^m$  una sucesión de transformaciones cuadráticas centradas, respectivamente, en  $p_{j-1}$ ,  $p_j = 0$ . La foliación  $\mathcal{F}_j$  es la foliación adaptada inducida por  $\mathcal{F}_{j-1}$  y  $\sigma_j$ .

Sean  $E_0$  un hiperplano por 0,  $E_j = \sigma_j^{-1}(p_{j-1})$ ,  $p_j \in E_j$ . Para  $k > j$  sea  $E_j^k$  el transformado estricto de  $E_j$  bajo  $\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_{j+1}$ , con  $E_k^k = E_k$ .

**Definición 3.1.5** Sean  $m \geq 3$  y  $\{(\mathcal{F}_j, p_j)_{j=0, \dots, r}\}$  un sistema de foliaciones adaptadas. Un punto singular  $p$  de la foliación  $\mathcal{F}_j$  se llamará una *esquina simple* si existe una carta coordenada  $z = (z_1, \dots, z_m)$  alrededor de  $p$  con  $z(p) = 0$ , que satisface las siguientes condiciones:

(1)  $p \in E_{j_0}^j \cap E_{j_1}^j$ , con  $j_0 < j_1 \leq j$  y  $z_1 z_2 = 0$  es una ecuación local para  $E_{j_0}^j \cup E_{j_1}^j$  en  $p$ .

(2) La foliación  $\mathcal{F}_j$  está generada en una vecindad de  $p$  por un campo de vectores de la forma

$$Y = z_1(1 + g_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2(\beta + g_2) \frac{\partial}{\partial z_2} + \sum_{j=3}^m G_j \frac{\partial}{\partial z_j} \quad (3.1.9)$$

donde  $\beta$  es un número complejo que no es un racional estrictamente positivo, las funciones  $g_i$  y  $G_k$  son analíticas y satisfacen que  $g_i(p) = 0$  para  $i = 1, 2$  y  $G_k(p) = 0$  para  $k = 3, \dots, m$ .

### Observación 3.1.6

- 1 Se observa en la expresión (3.1.9) que  $g_1$  puede tomarse como 0, dividiendo  $Y$  por  $(1 + g_1)$  y que  $\beta$  también puede ser 0.
- 2 Como  $\beta \neq 1$ , la foliación  $\mathcal{F}_j$  generada por  $Y$  es no-dicrítica en 0 (**Definición 3.1.1**).
- 3 Observe además que la definición *no* supone que  $p$  es una singularidad aislada de  $\mathcal{F}_j$ .

Una esquina simple en  $\mathbb{C}^3$  es una forma final para gérmenes de campos de vectores en una vecindad de una singularidad, en el siguiente sentido: las singularidades en forma de esquina simple generan, ante sucesivas explosiones, singularidades también en forma

de esquina simple (ver [6]). El siguiente teorema muestra que las esquinas simples de la **Definición 3.1.5** conservan esta propiedad.

**Teorema 3.1.7 (Teorema de persistencia).** Sea  $\{(\mathcal{F}_j, p_j)_{j=0, \dots, r}\}$  un sistema de foliaciones adaptadas. Si  $p_j$  es una esquina simple de  $\mathcal{F}_j$ , entonces el divisor excepcional  $E_{j+1}$  es no-dicrítico para  $\mathcal{F}_{j+1}$  y todas las singularidades de  $\mathcal{F}_{j+1}$  en  $E_{j+1}$  son esquinas simples.

Como la demostración del **Teorema 3.1.7** es técnica y muy larga, hemos preferido colocarla en una sección aparte.

### 3.2 Demostración del teorema de persistencia

Sea  $Y$  el campo de vectores (3.1.9) con una esquina simple en 0. Sea  $\mathcal{F}_1$  la foliación adaptada inducida por  $Y$  y la explosión en 0 y sea  $E_1 \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$  el divisor excepcional invariante.

Para demostrar el **Teorema 3.1.7**, vamos a calcular las singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $E_1$  y a exhibir sistemas de coordenadas en los que los generadores de  $\mathcal{F}_1$  verifican las condiciones de la **Definición 3.1.5**.

Este cálculo se simplificará considerablemente si seguimos las siguientes observaciones: como  $Y$  es de multiplicidad algebraica 1, por la **Proposición 3.1.3** la foliación  $\mathcal{F}_1|_{E_1}$  restringida al divisor excepcional es isomorfa a la foliación  $\mathcal{F}$  que la parte lineal  $A$  de  $Y$  induce en  $E_1$ . En particular, las singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $E_1$  están determinadas por  $A$  y probaremos que son, siguiendo la **Observación 2.1.3**, los espacios propios de  $A$  (identificando al divisor excepcional  $E_1$  con  $\mathbb{P}(T_0 \mathbb{C}^m)$ , la proyectivización del espacio tangente en 0 a  $\mathbb{C}^m$ ).

Por lo anterior, si  $A$  está descompuesta en bloques de Jordan, entonces uno tiene control sobre la posición de las singularidades de la foliación restringida  $\mathcal{F}_1|_{E_1}$  y puede calcular las expresiones (3.1.8) de sus generadores alrededor de ellas. Esta sección comenzará entonces por obtener la expresión (3.2.2) del campo de vectores  $Y$ , cuando su parte lineal  $A$  está descompuesta en bloques de Jordan, lo que de paso servirá para fijar la notación que utilizaremos.

Como la **Definición 3.1.5** distingue tres valores propios, el cálculo se dividirá en tres casos: singularidades asociadas con 1, con  $\beta$  y con cualquier otro valor propio.

Sea  $m \geq 3$  en (3.1.9) y denotemos sus componentes por

$$Y = \sum_{j=1}^m Y_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$$

Por la **Observación 3.1.6**, podemos suponer en adelante que  $g_1 \equiv 0$ .

Después de un cambio de coordenadas, podemos suponer también que la parte lineal  $A$  de  $Y$  está descompuesta en  $r$  bloques de Jordan  $A_k^{m_k}$  de tamaño  $m_k \times m_k$

$$A = \begin{pmatrix} A_1^{m_1} & & & \\ & A_2^{m_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & A_r^{m_r} \end{pmatrix}; \quad A_k^{m_k} = \begin{pmatrix} c_k & & & \\ 1 & \dots & & \\ & \dots & & \\ & & & 1 & c_k \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

con ceros en las entradas vacías. Los valores propios  $c_1$  y  $c_2$  son respectivamente 1 y  $\beta \notin \mathbb{Q}^+$ .

Para cada  $k \in \{1, \dots, r\}$ , sea  $s_k = m_1 + \dots + m_k$  y sea  $s_0 = 0$ , así es que  $s_r = m$  y  $s_1 = m_1$ . Con estas convenciones, podemos escribir (3.1.9) como

$$\begin{aligned}
 Y(z) = & z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \\
 & \sum_{j=2}^{s_1-1} (z_{j-1} + z_j + g_j(z)) \frac{\partial}{\partial z_j} + (z_{s_1-1} + z_{s_1} + g_{s_1}(z)) \frac{\partial}{\partial z_{s_1}} + \\
 & z_{s_1+1} (\beta + g_{s_1+1}(z)) \frac{\partial}{\partial z_{s_1+1}} + \\
 & \sum_{j=2}^{s_2-1} (z_{j-1} + \beta z_j + g_j(z)) \frac{\partial}{\partial z_j} + (z_{s_2-1} + \beta z_{s_2} + g_{s_2}(z)) \frac{\partial}{\partial z_{s_2}} + \\
 & \sum_{k=3}^r \{ (c_k z_{s_{k-1}+1} + g_{s_{k-1}+1}(z)) \frac{\partial}{\partial z_{s_{k-1}+1}} + \\
 & \sum_{j=2}^{s_k-1} (z_{j-1} + c_k z_j + g_j(z)) \frac{\partial}{\partial z_j} + (z_{s_k-1} + c_k z_{s_k} + g_{s_k}(z)) \frac{\partial}{\partial z_{s_k}} \},
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

donde  $z_1$  y  $z_2$  de (3.1.9) corresponden respectivamente a  $z_1$  y  $z_{i+1}$ ;  $g_1(z) \equiv 0$  y  $g_2(z)$  corresponde a  $g_{s_1+1}(z) \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ . Los restantes  $g_j(z)$  pertenecen a  $\mathfrak{m}^2$  ( $\mathfrak{m}$  denota al ideal maximal de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0}$ ).

**Lema 3.2.0** Sea  $\mathcal{F}$  la foliación en  $\mathbb{C}P^{m-1}$  inducida por un campo de vectores lineal  $B$  en  $\mathbb{C}^m$  a través de la aplicación de Euler, entonces el conjunto singular de  $\mathcal{F}$  consiste en las direcciones propias de  $B$ .

**Demostración.** Es consecuencia de los cálculos contenidos en la Observación 2.1.3 (con  $d = 0$ ). Un punto  $[\zeta] = [\zeta_0, \dots, 1, \dots, \zeta_{m-1}]$  es una singularidad de  $\mathcal{F}$  en el abierto  $U_k \subset \mathbb{C}P^{m-1}$  si y sólo si

$$\begin{pmatrix} B_0(\zeta_0, \dots, 1, \dots, \zeta_{m-1}) \\ \vdots \\ \widehat{B}_k \\ \vdots \\ B_{m-1}(\zeta_0, \dots, 1, \dots, \zeta_{m-1}) \end{pmatrix} = B_k(\zeta_0, \dots, 1, \dots, \zeta_{m-1}) \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \zeta_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{3.2.3}$$

Sean  $b_k = B_k(\zeta_0, \dots, 1, \dots, \zeta_{m-1})$  y  $z = (z_0, \dots, z_k, \dots, z_{m-1}) = z_k \cdot (\zeta_0, \dots, 1, \dots, \zeta_{m-1})$ . La igualdad (3.2.3) es equivalente a  $B(z) = b_k \cdot z$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

**Corolario 3.2.0** Sean  $B$  y  $\mathcal{F}$  como en el **Lema 3.2.0** y supongamos que  $B$  es un bloque de Jordan

$$B = \begin{pmatrix} b & & & \\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & b \end{pmatrix}.$$

Entonces el punto  $p_{m-1} = [0, \dots, 1] \in U_{m-1} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$  es la única singularidad de  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$ . Por las Proposiciones **2.2.2** y **2.2.4**, su multiplicidad  $\mu(\mathcal{F}, p_{m-1})$  es igual a  $m$ .

Si todos los valores propios  $c_k$  de una matriz  $A$  de la forma (3.2.1) son distintos, entonces el conjunto singular de la foliación  $\mathcal{F}$  inducida por  $A(z)$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$  consta solamente de singularidades aisladas, cuya multiplicidad es igual a la dimensión  $m_k$  del correspondiente bloque de Jordan:

$$\mu(\mathcal{F}, q_{s_k}) = m_k, \quad k = 1, \dots, r.$$

□

Para demostrar el **Teorema 3.1.7** consideraremos tres casos, dependiendo del valor propio al que están asociadas las singularidades.

**Caso 1.** Singularidades asociadas al primer bloque  $A_1^{m_1}$  de  $A$ .

En las coordenadas (3.1.3) alrededor del punto  $q_{m_1}$  (definido por (3.1.4) con  $k = m_1$ ), la explosión (3.1.1) está dada por

$$\sigma_{m_1, j}(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = \begin{cases} \zeta_m \zeta_j = z_j & \text{si } j \neq m_1 \\ \zeta_m = z_{m_1} & \text{si } j = m_1 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

En estas coordenadas,  $\zeta(q_{m_1}) = 0$ ,  $E_1 : (\zeta_m = 0)$  y  $\mathcal{F}_1$  está generada por un campo de vectores  $Y_{m_1}^*(\zeta)$  de la forma (3.1.8), con  $k = m_1$ . Para cada punto

$$p = [\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1-1}, 1, \lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_{s_1-1}, \lambda_{s_1}, \lambda_{s_1+1}, \dots, \lambda_m] \in \sigma_{m_1}^{-1}(0),$$

las coordenadas  $\zeta'$  definidas por

$$\begin{aligned} A(\zeta) &= A(\zeta_1, \dots, \zeta_m, \dots, \zeta_{s_1}, \dots, \zeta_m) \\ &= (\zeta_1 - \lambda_1, \dots, \zeta_{m_1-1} - \lambda_{m_1-1}, \zeta_m, \zeta_{m_1+1} - \lambda_{m_1+1}, \zeta_{s_1} - \lambda_{s_1}, \dots, \zeta_m - \lambda_m) \\ &= (\zeta'_1, \dots, \zeta'_{m_1}, \dots, \zeta'_{s_1}, \dots, \zeta'_m) = \zeta' \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

satisfacen que  $\zeta'(p) = 0$ . La expresión (3.2.4) de la explosión en 0 en las coordenadas (3.2.5) es

$$\begin{aligned} \sigma'_{m_1}(\zeta') &= (\sigma_{m_1} \circ A^{-1})(\zeta') = (\sigma'_{m_1, 1}(\zeta'), \dots, \sigma'_{m_1, m}(\zeta')) \\ &\quad \text{donde} \\ \sigma'_{m_1, j}(\zeta'_1, \dots, \zeta'_m) &= \begin{cases} \zeta'_{m_1}(\zeta'_j + \lambda_j) = z_j & \text{si } j \neq m_1 \\ \zeta'_{m_1} = z_{m_1} & \text{si } j = m_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

En estas coordenadas  $\mathcal{F}_1$  está generada por el campo de vectores

$$\begin{aligned} Y'_{m_1}(\zeta') &= \sum_{j=1}^m Y'_{m_1, j}(\zeta') \frac{\partial}{\partial \zeta'_j}, \quad \text{donde} \\ Y'_{m_1, j}(\zeta') &= \begin{cases} Y_{m_1}(\sigma'_{m_1}(\zeta')) & \text{si } j = m_1 \\ \zeta'_{m_1}^{-1} [Y_j(\sigma'_{m_1}(\zeta')) - (\zeta'_j + \lambda_j) Y'_{m_1, m_1}(\zeta')] & \text{si } j \neq m_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

**Lema 3.2.1** Sea  $A$  la parte lineal (3.2.1) del campo de vectores  $Y$  definido por (3.2.2).

**A** Si  $A$  contiene solamente un bloque de Jordan con valor propio 1, es decir, si  $c_l \neq 1$  para todo  $l = 3, \dots, r$ , entonces la única singularidad de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_{m_1}^{-1}(0)$  es el punto  $q_{m_1} = [0, \dots, 1, \dots, 0]$ , (con el 1 ocupando la posición  $m_1$ ).

**B** Si por el contrario,  $A$  contiene más de un bloque con valor propio 1, es decir, si  $c_{l_j} = 1$  para alguna (o algunas)  $l_j \in \{3, \dots, r\}$ , entonces las únicas singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_{m_1}^{-1}(0)$  son los puntos de la forma

$$p_{s_l} = [0, \dots, 1, \dots, 0, \lambda_{s_{l_1}}, 0, \dots, \lambda_{s_{l_2}}, \dots], \quad (3.2.8)$$

donde el 1 ocupa la posición  $m_1$  y los  $\lambda_{s_l}$  ocupan las posiciones  $s_{l_j}$ , cuando  $c_{l_j} = 1$ .

*Demostración.* Es consecuencia de aplicar el **Lema 3.2.0** a la parte lineal  $A$  de  $Y$ : los espacios propios asociados al valor propio  $c_l = 1$  son los que indica el enunciado del lema.  $\square$

**Proposición 3.2.2** Todas las singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_{m_1}^{-1}(0)$  son esquinas simples.

*Demostración.* La demostración es un cálculo que consta de tres partes: la primera es construir sistemas de coordenadas adaptados a las singularidades que indica el **Lema 3.2.1**; la segunda, calcular la expresión de los generadores (3.2.7) en estas coordenadas y, la tercera, comprobar que éstos verifican las condiciones de la **Definición 3.1.5**. Como la expresión de los generadores varía si la dimensión  $m_1$  del primer bloque  $A_1^{m_1}$  de  $A$  es mayor o es igual a uno, el cálculo se dividirá en dos partes.

**1.1**  $m_1 > 1$ .

Las coordenadas  $\zeta'$  de (3.2.5), sujetas a las siguientes condiciones

$$\zeta'_k = \begin{cases} \zeta_k - \lambda_k & \text{si } k = s_l \text{ y } c_l = 1 \\ \zeta_k & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.2.9)$$

satisfacen que  $\zeta'(p_{s_l}) = 0$ .

En estas coordenadas, el generador  $Y'_{m_1}(\zeta')$  de  $\mathcal{F}_1$  se obtiene sustituyendo (3.2.9) en (3.2.7). Su expresión es

$$\begin{pmatrix} Y'_{m_1,1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{m_1, m_1-1}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_1 \\ \vdots \\ \zeta'_{m_1-1} \end{pmatrix} - (\zeta'_{m_1-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_1 \\ \vdots \\ \zeta'_{m_1-1} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.10)$$

$$Y'_{m_1, m_1}(\zeta') = \zeta'_{m_1} + \zeta'_{m_1}(\zeta'_{m_1-1}) + g_{m_1} \circ \sigma'_{m_1}(\zeta'),$$

$$\begin{pmatrix} Y'_{m_1, m_1+1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{m_1, s_2}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta - 1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \beta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_{m_1+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_2} \end{pmatrix} - (\zeta'_{m_1-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_{m_1+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_2} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.11)$$

$$\begin{pmatrix} Y'_{m_1, s_{l-1}+1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{m_1, s_l}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_l - 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & c_l - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_{s_{l-1}+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} \end{pmatrix} - (\zeta'_{m_1-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_{s_{l-1}+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.12)$$

$$\begin{pmatrix} Y'_{m_1, s_{l-1}+1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{m_1, s_l}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_{s_{l-1}+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l} \end{pmatrix} - (\zeta'_{m_1-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_{s_{l-1}+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.13)$$

Donde los puntos suspensivos (...) indican términos en el ideal  $(\zeta'_{m_1})$  generado por  $\zeta'_{m_1}$ .

Pasamos ahora a concluir la prueba del caso  $m_1 > 1$ .

(a) Sea  $E_0^1$  el transformado estricto  $(\zeta'_1 = 0)$  del hiperplano  $(z_1 = 0)$ .  $\mathcal{F}_1$  está adaptada al divisor  $D_1 = E_1 + E_0^1$ , definido por  $(\zeta'_1 \zeta'_{m_1} = 0)$  y podemos concluir que los puntos  $p_{s_i}$  son esquinas simples:  $z_1$  y  $z_2$  de (3.1.9) corresponden respectivamente a  $\zeta_{m_1}$  y  $\zeta_1$ , y  $\beta$  de (3.1.9) corresponde ahora a 0.

(b) En este caso podemos también considerar  $F_0^1$  el transformado estricto  $(\zeta_{m_1+1} = 0)$  del hiperplano  $(z_{m_1+1} = 0)$ .  $\mathcal{F}_1$  también está adaptada al divisor  $F_1 = E_1 + F_0^1$  definido por  $(\zeta'_{m_1+1} \zeta'_{m_1} = 0)$  y en este caso concluimos que los  $p_{s_i}$  son esquinas simples:  $z_1$  y  $z_2$  de (3.1.9) corresponden respectivamente a  $\zeta_{m_1}$  y  $\zeta_{m_1+1}$  y  $\beta$  a  $\beta - 1$ .

1.2 Si  $m_1 = 1$ , entonces  $m_1 + 1 = 2$  y, con las sustituciones (3.2.9) en (3.2.7), la expresión del generador  $Y'_1(\zeta')$  de  $\mathcal{F}_1$  que se obtiene es

$$\begin{aligned} Y'_{1,1}(\zeta') &= \zeta'_1, \\ Y'_{1,2}(\zeta') &= \zeta'_2[\beta - 1 + \dots], \\ Y'_{1,j}(\zeta') &= (\beta - 1)\zeta'_j + \zeta'_{j-1} + \dots, \\ &\quad \text{si } j = m_1 + 2, \dots, s_2. \\ &\quad \text{Si } l \in \{3, \dots, r\} \text{ y } c_l \neq 1: \\ Y'_{1, s_{l-1}+1}(\zeta') &= (c_l - 1)\zeta'_{s_{l-1}+1} + \dots, \\ Y'_{1,j}(\zeta') &= (c_l - 1)\zeta'_j + \zeta'_{j-1} + \dots, \\ &\quad \text{si } j = s_{l-1} + 2, \dots, s_l. \\ &\quad \text{Si } l \in \{3, \dots, r\} \text{ y } c_l = 1: \\ Y'_{1, s_{l-1}+1}(\zeta') &= (c_l - 1)\zeta'_{s_{l-1}+1} + \dots \\ &= 0 + \dots, \\ Y'_{1,j}(\zeta') &= (c_l - 1)\zeta'_j + \zeta'_{j-1} + \dots \\ &= \zeta'_{j-1} + \dots, \\ &\quad \text{si } j = s_{l-1} + 2, \dots, s_l - 1. \\ Y'_{1, s_l}(\zeta') &= (c_l - 1)(\zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l}) + \zeta'_{s_{l-1}} + \dots \\ &= \zeta'_{s_{l-1}} + \dots \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Donde los puntos suspensivos (...) ahora indican términos en el ideal  $(\zeta'_1)$  generado por  $\zeta'_1$ .

Se observa que la expresión del generador  $Y'_1(\zeta')$  puede obtenerse de la de  $Y'_{m_1}(\zeta')$  omitiendo el bloque correspondiente a (3.2.10) y sustituyendo  $g_{m_1} = g_1$  y  $\zeta'_{m_1-1}$  por 0 en las expresiones (3.2.11), (3.2.12) y (3.2.13).

El mismo argumento de (b), con  $m_1 = 1$ , muestra en este caso que los  $p_s$  son esquinas simples: la foliación  $\mathcal{F}_1$  generada por (3.2.14) está adaptada al divisor  $F_1 = E_1 + F_0^1$  definido por  $(\zeta'_1 \zeta'_2 = 0)$ , donde ahora  $F_0^1$  denota al transformado estricto  $(\zeta'_2 = 0)$  del hiperplano  $(z_2 = 0)$ ;  $z$  de (3.1.9) es ahora  $\zeta'$ , y  $\beta$  corresponde a  $\beta - 1$ .  $\square$

**Caso 2.** Singularidades asociadas al segundo bloque  $A_2^{m_2}$  de  $A$ .

En las coordenadas (3.1.3) alrededor del punto  $q_{s_2}$  (definido por (3.1.4) con  $k = s_2$ ), la explosión (3.1.1) está dada por

$$\sigma_{s_2, j}(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = \begin{cases} \zeta_{s_2} \zeta_j = z_j & \text{si } j \neq s_2 \\ \zeta_{s_2} = z_{s_2} & \text{si } j = s_2 \end{cases} \quad (3.2.15)$$

En estas coordenadas,  $\zeta(q_{s_2}) = 0$ , el divisor excepcional  $E_1$  está definido por  $(\zeta_{s_2} = 0)$  y  $\mathcal{F}_1$  está generada por un campo de vectores  $Y'_{s_2}(\zeta)$  de la forma (3.1.8), con  $k = s_2$ . Argumentamos ahora como en el **Caso 1** anterior.

Para cada punto

$$p = [\lambda_1, \dots, \lambda_{s_2-1}, 1, \lambda_{s_2+1}, \dots, \lambda_{s_1-1}, \lambda_{s_1}, \lambda_{s_1+1}, \dots, \lambda_m] \in \sigma_s^{-1}(0)$$

se definen las coordenadas  $\zeta'$  análogas a (3.2.5) sustituyendo  $s_2$  por  $m_1$ :

$$\zeta'_k = \begin{cases} \zeta_k - \lambda_k & \text{si } k \neq s_2 \\ \zeta_{s_2} & \text{si } k = s_2 \end{cases} \quad (3.2.16)$$

y con ellas, la expresión  $\sigma'_{s_2}$  de la explosión en 0, análoga a (3.2.6).

En estas coordenadas  $\zeta'(p) = 0$  y  $\mathcal{F}_1$  está generada por el campo de vectores

$$Y'_{s_2}(\zeta') = \sum_{j=1}^{m_1} Y'_{s_2, j}(\zeta') \frac{\partial}{\partial \zeta'_j}, \quad \text{donde} \quad (3.2.17)$$

$$Y'_{s_2, j}(\zeta') = \begin{cases} Y_{s_2}(\sigma'_{s_2}(\zeta')) & \text{si } j = s_2 \\ \zeta'^{-1}_j [Y'_j(\sigma'_{s_2}(\zeta')) - (\zeta'_j + \lambda_j) Y'_{s_2, s_2}(\zeta')] & \text{si } j \neq s_2 \end{cases}$$

**Lema 3.2.3** Sea  $A$  la parte lineal (3.2.1) del campo de vectores  $Y$  definido por (3.2.2).

**A** Si  $A$  contiene solamente un bloque de Jordan con valor propio  $\beta$ , es decir, si  $c_l \neq \beta$  para todo  $l = 3, \dots, r$ , entonces la única singularidad de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_{s_2}^{-1}(0)$  es el punto  $q_{s_2} = [0, \dots, 1, \dots, 0]$ , (con el 1 ocupando la posición  $s_2$ ).

**B** Si por el contrario,  $A$  contiene más de un bloque con valor propio  $\beta$ , es decir, si  $c_{i_j} = \beta$  para alguna (o algunas)  $i_j \in \{3, \dots, r\}$ , entonces las únicas singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_{s_2}^{-1}(0)$  son los puntos de la forma

$$p_{s_i} = [0, \dots, 1, \dots, 0, \lambda_{s_{i_1}}, 0, \dots, \lambda_{s_{i_2}}, \dots],$$

donde el 1 ocupa la posición  $s_2$  y los  $\lambda_{s_{i_j}}$  ocupan las posiciones  $s_{i_j}$ , cuando  $c_{i_j} = \beta$ .

**Demostración.** Es de nuevo consecuencia de aplicar el **Lema 3.2.0** a la parte lineal  $A$  de  $Y$ : los espacios propios asociados al valor propio  $c_2 = \beta$  son los que indica el enunciado del lema.  $\square$

**Proposición 3.2.4** Todas las singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_2^{-1}(0)$  son esquinas simples.

*Demostración.* La demostración es como la del **Proposición 3.2.2** y consta igualmente de tres partes: la primera es construir sistemas de coordenadas adaptados a las singularidades que indica el **Lema 3.2.3**; la segunda, calcular la expresión de los generadores (3.2.7) en estas coordenadas y, la tercera, comprobar que éstos verifican las condiciones de la **Definición 3.1.5**. Como la expresión de los generadores varía si la dimensión  $m_2$  del segundo bloque  $A_2^{m_2}$  de  $A$  es mayor o es igual a uno, el cálculo se dividirá en dos partes.

**2.1**  $m_2 > 1$ .

Las coordenadas  $\zeta'$  de (3.2.16) sujetas a las siguientes condiciones

$$\zeta'_k = \begin{cases} \zeta_k - \lambda_k & \text{si } k = s_1 \text{ y } c_1 = \beta \\ \zeta_k & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.2.18)$$

satisfacen que  $\zeta'(p_{s_i}) = 0$ .

En estas coordenadas, el generador  $Y'_{s_2}(\zeta')$  de  $\mathcal{F}_1$  se obtiene sustituyendo (3.2.18) en (3.2.17). Su expresión es

$$\begin{pmatrix} Y'_{s_2,1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{s_2,m_1}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\beta & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-\beta \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_1 \\ \vdots \\ \zeta'_{m_1} \end{pmatrix} - (\zeta'_{s_2-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_1 \\ \vdots \\ \zeta'_{m_1} + \lambda_{m_1} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.19)$$

$$\begin{pmatrix} Y'_{s_2,m_1+1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{s_2,s_2-1}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_{m_1+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_2-1} \end{pmatrix} - (\zeta'_{s_2-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_{m_1+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_2-1} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.20)$$

$$Y'_{s_2,s_2}(\zeta') = \beta \zeta'_{s_2} + \zeta'_{s_2} \zeta'_{s_2-1} + g_{s_2} \circ \sigma'_{s_2}(\zeta'),$$

si  $l = 3, \dots, r$  y  $c_l \neq 1$ :

$$\begin{pmatrix} Y'_{s_2,s_{l-1}+1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{s_2,s_l}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_l - \beta & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & c_l - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_{s_{l-1}+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} \end{pmatrix} - (\zeta'_{s_2-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_{s_{l-1}+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.21)$$

si  $l = 3, \dots, r$  y  $c_l = 1$ :

$$\begin{pmatrix} Y'_{s_2,s_{l-1}+1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{s_2,s_l}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_{s_{l-1}+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l} \end{pmatrix} - (\zeta'_{s_2-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_{s_{l-1}+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.22)$$

Donde los puntos suspensivos (...) indican términos en el ideal  $(\zeta'_{s_2})$  generado por  $\zeta'_{s_2}$ .

**2.2** Si  $m_2 = 1$ , entonces  $s_2 = m_1 + 1$  y, con las sustituciones (3.2.18) en (3.2.17), la expresión del generador  $Y'_{s'_2}(\zeta')$  de  $\mathcal{F}_1$  que se obtiene es

$$\begin{aligned}
 Y'_{s'_2,1}(\zeta') &= \zeta'_1[1 - \beta + \dots], \\
 Y'_{s'_2,j}(\zeta') &= (1 - \beta)\zeta'_j + \zeta'_{j-1} + \dots \\
 &\quad \text{si } j = 2, \dots, m_1. \\
 Y'_{s'_2,s_2}(\zeta') &= \zeta'_{m_1+1}[\beta + (g_{m_1+1} \circ \sigma'_{m_1+1})(\zeta')]. \\
 &= \zeta'_{s_2}[\beta + (g_{m_1+1} \circ \sigma'_{s_2})(\zeta')]. \\
 &\quad \text{Si } l = 3, \dots, r \text{ y } \alpha_l \neq \beta: \\
 Y'_{s'_2, s_{l-1}+1}(\zeta') &= (\alpha_l - \beta)\zeta'_{s_{l-1}+1} + \dots \\
 Y'_{s'_2,j}(\zeta') &= (\alpha_l - \beta)\zeta'_j + \zeta'_{j-1} + \dots \\
 &\quad \text{si } j = s_{l-1} + 2, \dots, s_l. \\
 &\quad \text{Si } l = 3, \dots, r \text{ y } \alpha_l = \beta: \\
 Y'_{s'_2, s_{l-1}+1}(\zeta') &= (\alpha_l - \beta)\zeta'_{s_{l-1}+1} + \dots \\
 &= 0 + \dots \\
 Y'_{s'_2,j}(\zeta') &= (\alpha_l - \beta)\zeta'_j + \zeta'_{j-1} + \dots \\
 &= \zeta'_{j-1} + \dots \\
 &\quad \text{si } j = s_{l-1} + 2, \dots, s_l - 1 \\
 Y'_{s'_2, s_l}(\zeta') &= (\alpha_l - \beta)(\zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l}) + \zeta'_{s_l-1} + \dots \\
 &= \zeta'_{s_l-1} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Donde los puntos suspensivos (...) indican términos en el ideal  $(\zeta'_{m_1+1})$  generado por  $\zeta'_{m_1+1}$ .

Observe que la expresión (3.2.23) puede obtenerse de la del generador  $Y'_2(\zeta')$  de  $\mathcal{F}_1$  del caso 2.1 anterior, omitiendo el bloque (3.2.20) y sustituyendo  $\zeta'_{s_2-1}$  por 0 en las expresiones (3.2.19),  $Y'_{s_2, s_2}(\zeta')$ , (3.2.21) y (3.2.22).

Pasamos ahora a concluir la prueba.

Sea  $E_0^1$  el transformado estricto ( $\zeta'_1 = 0$ ) del hiperplano ( $z_1 = 0$ ).  $\mathcal{F}_1$  está adaptada al divisor  $D_1 = E_1 + E_0^1$  definido por  $(\zeta'_1 \zeta'_{s_2} = 0)$ .

Surgen dos casos: si  $\beta$  en (3.1.9) es 0, entonces lo mismo es cierto en las expresiones (3.2.19), (3.2.20) y (3.2.21) correspondientes al caso 2.1 y en la expresión (3.2.23) correspondiente al caso 2.2. En esta situación, la prueba se completa como en los casos 1.1 y 1.2, respectivamente.

Si  $\beta \neq 0$ , dividimos en (3.2.19), (3.2.20), (3.2.21) y (3.2.22) por

$$(\zeta_{s_2}^{-1}) \cdot Y'_{s_2, s_2}(\zeta') = \beta + \zeta'_{s_2-1} + g_{s_2} \circ \sigma'_{s_2}(\zeta'),$$

y en (3.2.23) por

$$(\zeta_{s_2}^{-1}) \cdot Y'_{s_2, s_2}(\zeta') = (\beta + g_2 \circ \sigma'_{s_2}(\zeta')).$$

Como  $1/\beta - 1 \notin \mathbb{Q}^+$ , podemos concluir en los casos 2.1 y 2.2 que los puntos  $p_{s_i}$  son esquinas simples, tomando  $z_1$  y  $z_2$  de (3.1.9) respectivamente por  $\zeta'_{s_2}$  y  $\zeta'_1$ .  $\square$

**Caso 3.** Singularidades asociadas con los bloques  $A_k^{m_k}$  de  $A$ ,  $k = 3, \dots, r$ .

Sea  $k \in \{3, \dots, r\}$  fijo. En las coordenadas (3.1.3) alrededor de  $q_{s_k}$  (definido por (3.1.4) con  $k = s_k$ ), la explosión (3.1.1) está dada por

$$\sigma_{s_k, j}(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = \begin{cases} \zeta_{s_k} \zeta_j = z_j & \text{si } j \neq s_k \\ \zeta_{s_k} = z_{s_k} & \text{si } j = s_k \end{cases} \tag{3.2.24}$$

En estas coordenadas,  $\zeta(q_{s_k}) = 0$ ,  $E_j : (\zeta_{s_k} = 0)$  y  $\mathcal{F}_1$  está generada por un campo de vectores  $Y'_k(\zeta)$  de la forma (3.1.8), con  $k = s_k$ .

Siguiendo el argumento de los casos anteriores, para cada punto

$$p = [\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{s_2}, \dots, \lambda_{s_k-1}, 1, \lambda_{s_k+1}, \dots, \lambda_{s_k-1}, \lambda_{s_1}, \lambda_{s_2+1}, \dots, \lambda_m] \in \sigma_{s_k}^{-1}(0)$$

se definen las coordenadas  $\zeta'$  análogas a (3.2.5) sustituyendo  $s_k$  por  $m_1$ :

$$\zeta'_j = \begin{cases} \zeta_j - \lambda_j & \text{si } j \neq s_k \\ \zeta_{s_k} & \text{si } j = s_k \end{cases} \quad (3.2.25)$$

y con ellas, la expresión  $\sigma'_{s_k}$  de la explosión en 0, análoga a (3.2.6).

En estas coordenadas  $\zeta'(p) = 0$  y  $\mathcal{F}_1$  está generada por el campo de vectores

$$Y'_{s_k, j}(\zeta') = \begin{cases} Y'_{s_k, j}(\zeta') = \sum_{j=1}^{m_1} Y'_{s_k, j}(\zeta') \frac{\partial}{\partial \zeta'_j}, & \text{donde} \\ Y'_{s_k, j}(\zeta') = \begin{cases} Y'_{s_k}(\sigma'_{s_k}(\zeta')) & \text{si } j = s_k \\ \zeta'_{s_k}^{-1} [Y'_{s_k}(\sigma'_{s_k}(\zeta')) - (\zeta'_j + \lambda_j) Y'_{s_k, s_k}(\zeta')] & \text{si } j \neq s_k \end{cases} \end{cases} \quad (3.2.26)$$

**Lema 3.2.5** Sea  $A$  la parte lineal (3.2.1) del campo de vectores  $Y$ , definido por (3.2.2).

**A** Si  $c_k = 1$  y  $c_i = 1$  para alguna (o algunas)  $i \in \{3, \dots, r\} \setminus \{k\}$ , entonces las únicas singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_{s_k}^{-1}(0)$  son los puntos de la forma

$$p_{k,1} = [0, \dots, \mu_{m_1}, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \mu_{s_1}, 0, \dots, \mu_{s_2}, \dots, 0] \in \sigma_{s_k}^{-1}(0)$$

donde el 1 ocupa la posición  $s_k$  y  $\mu_{s_i} \neq 0$  si y sólo si  $c_i = 1$ .

**B** Si  $c_k = \beta$  y  $c_i = \beta$  para alguna (o algunas)  $i \in \{3, \dots, r\} \setminus \{k\}$ , entonces las únicas singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_{s_k}^{-1}(0)$  son los puntos de la forma

$$p_{k,2} = [0, \dots, \mu_{s_2}, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \mu_{s_1}, 0, \dots, \mu_{s_2}, \dots, 0] \in \sigma_{s_k}^{-1}(0)$$

donde el 1 ocupa la posición  $s_k$  y  $\mu_{s_i} \neq 0$  si y sólo si  $c_i = \beta$ .

**C** Si  $c_k \neq 1$ ,  $c_k \neq \beta$  y  $c_i = c_k$  para alguna (o algunas)  $i \in \{3, \dots, r\} \setminus \{k\}$ , entonces las únicas singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_{s_k}^{-1}(0)$  son los puntos de la forma

$$p_{k,1} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \lambda_{s_1}, 0, \dots, \lambda_{s_2}, \dots, 0] \in \sigma_{s_k}^{-1}(0)$$

donde el 1 ocupa la posición  $s_k$  y  $\lambda_{s_i} \neq 0$  si y sólo si  $c_i = c_k$ .

*Demostración.* Como en los lemas 3.2.1 y 3.2.3, la demostración es consecuencia de aplicar el **Lema 3.2.0** a la parte lineal  $A$  de  $Y$ , pues los espacios propios asociados al valor propio  $c_k$  son los que indica el enunciado del lema.  $\square$

**Observación 3.2.5** Las singularidades  $p_{k,1}$  del inciso **A** del **Lema 3.2.5** conciden con las del inciso **B** del **Lema 3.2.1**. Del mismo modo, las singularidades  $p_{k,2}$  del inciso **B** del **Lema 3.2.5** son las que consideramos en el inciso **B** del **Lema 3.2.3**. Ya hemos probado, respectivamente en las proposiciones 3.2.2 y 3.2.4, que estas singularidades son esquinas simples.

**Proposición 3.2.6** Todas las singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_{s_k}^{-1}(0)$  son esquinas simples.

**Demostración.** Por la observación anterior, restan sólo por considerar las singularidades del inciso **C** del **Lema 3.2.5**. La demostración sigue el mismo esquema que la de las proposiciones **3.2.2** y **3.2.4** anteriores.

**3.1**  $m_k > 1$ .

Las coordenadas  $\zeta'$  de (3.2.25), sujetas a las siguientes condiciones

$$\zeta'_j = \begin{cases} \zeta_{s_l}, -\lambda_{s_l}, & \text{si } j = s_l, \text{ y } c_l = c_k \\ \zeta_j & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.2.27)$$

satisfacen que  $\zeta'(p_{k,l}) = 0$ .

En estas coordenadas, el generador  $Y'_s(\zeta')$  de  $\mathcal{F}_1$  se obtiene sustituyendo (3.2.27) en (3.2.26). Su expresión es

$$\begin{pmatrix} Y'_{s_k,1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{s_k,m_l}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - c_k & & & \\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 1 - c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_1 \\ \vdots \\ \zeta'_{m_l} \end{pmatrix} - (\zeta'_{s_k-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_1 \\ \vdots \\ \zeta'_{m_l} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.28)$$

$$\begin{pmatrix} Y'_{s_k,m_l+1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{s_k,s_2}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta - c_k & & & \\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \beta - c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_{m_l+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_2} \end{pmatrix} - (\zeta'_{s_k-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_{m_l+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_2} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.29)$$

Si  $l = k$ :

$$\begin{pmatrix} Y'_{s_k,s_k-1+1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{s_k,s_k-1}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_{s_k-1+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_k-1} \end{pmatrix} - (\zeta'_{s_k-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_{s_k-1+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_k-1} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.30)$$

$$Y'_{s_k,s_k}(\zeta') = \zeta'_{s_k} [c_k + \zeta'_{s_k-1} + (g_{s_k} \circ \sigma_{s_k})(\zeta')].$$

Si  $l = 3, \dots, r, l \neq k$  y  $c_l \neq c_k$ :

$$\begin{pmatrix} Y'_{s_k,s_l-1+1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{s_k,s_l}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_l - c_k & & & \\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & c_l - c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_{s_l-1+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} \end{pmatrix} - (\zeta'_{s_k-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_{s_l-1+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.31)$$

Si  $l = 3, \dots, r, l \neq k$  y  $c_l = c_k$ :

$$\begin{pmatrix} Y'_{s_k,s_l-1+1}(\zeta') \\ \vdots \\ Y'_{s_k,s_l}(\zeta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_{s_l-1+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l} \end{pmatrix} - (\zeta'_{s_k-1}) \begin{pmatrix} \zeta'_{s_l-1+1} \\ \vdots \\ \zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.32)$$

Donde los puntos suspensivos (...) indican términos en el ideal  $(\zeta'_{s_k})$  generado por  $\zeta'_{s_k}$ .

### 3.2 $m_k = 1$ .

Puede verificarse que la expresión del generador  $Y'_{s_k}(\zeta')$  de  $\mathcal{F}_1$  correspondiente al caso  $m_k = 1$  se obtiene sustituyendo  $\zeta'_{s_k-1} \equiv 0$  en las expresiones (3.2.28), (3.2.29),  $Y'_{s_k, s_i}(\zeta')$ , (3.2.31) y (3.2.32), y omitiendo el bloque (3.2.30) en la expresión del generador  $Y'_{s_k}(\zeta')$  correspondiente al caso 3.1 anterior.

Procedemos ahora a concluir la prueba.

Si  $m_k > 1$ , consideremos las siguientes componentes del generador  $Y'_{s_k, j}(\zeta')$  de  $\mathcal{F}_1$ :

$$\begin{aligned} Y'_{s_k, 1}(\zeta') &= \zeta'_1 [1 - c_k - \zeta'_{s_k-1} + \dots], \\ Y'_{s_k, m_j+1}(\zeta') &= \zeta'_{m_j+1} [\beta - c_k - \zeta'_{s_k-1} + \dots], \\ Y'_{s_k, s_k}(\zeta') &= \zeta'_{s_k} [c_k + \zeta'_{s_k-1} + \dots]. \\ \text{Si } c_l &= c_k: \\ Y'_{s_k, s_l}(\zeta') &= (c_l - c_k)(\zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l}) + \zeta'_{s_l-1} - (\zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l})\zeta'_{s_k-1} + \dots \\ &= \zeta'_{s_l-1} - (\zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l})\zeta'_{s_k-1} + \dots \\ \text{Si } c_l &\neq c_k: \\ Y'_{s_k, s_l}(\zeta') &= (c_l - c_k)\zeta'_{s_l} + \zeta'_{s_l-1} - (\zeta'_{s_l} + \lambda_{s_l})\zeta'_{s_k-1} + \dots \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Como  $c_k/(1 - c_k)$  y  $(\beta - c_k)/(1 - c_k)$  no pueden estar simultáneamente en  $\mathbb{Q}^+$ , si  $\beta$  no lo está, entonces surgen dos posibilidades:

[i]  $(\beta - c_k)/(1 - c_k)$  es un racional estrictamente positivo.

Consideremos  $E_0^1$ , el transformado estricto ( $\zeta'_1 = 0$ ) del hiperplano ( $z_1 = 0$ ).  $\mathcal{F}_1$  está adaptada al divisor  $D_1 = E_1 + E_0^1$ , en estas coordenadas definido por  $(\zeta'_{s_k} \zeta'_1 = 0)$ .

Dividiendo en (3.2.33) por

$$(\zeta'_1)^{-1} \cdot Y'_{s_k, 1}(\zeta') = 1 - c_k - \zeta'_{s_k-1} + \dots$$

concluimos que las singularidades  $p_{k, l}$  son esquinas simples: las coordenadas  $z_1$  y  $z_2$  de (3.1.9) son ahora  $\zeta'_1$  y  $\zeta'_{s_k}$  respectivamente, con  $\beta = c_k/(1 - c_k)$ .

[ii] Si ahora  $c_k/(1 - c_k)$  es un racional estrictamente positivo, puede verificarse fácilmente que, entonces,  $(\beta - c_k)/c_k$  no lo es.  $\mathcal{F}_1$  está adaptada al divisor  $F_1 = E_1 + F_0^1$ , donde  $F_0^1$  denota ahora al transformado estricto  $\zeta'_{m_j+1}$  del hiperplano  $z_{m_j+1} = 0$ . Dividiendo en (3.2.33) por

$$(\zeta'_{s_k})^{-1} \cdot Y'_{s_k, s_k}(\zeta') = c_k + \zeta'_{s_k-1} + \dots$$

concluimos que los  $p_{k, l}$  son esquinas simples: las coordenadas  $z_1, z_2$  y  $z_{s_k}$  de (3.1.9) corresponden respectivamente a  $\zeta'_{s_k}, \zeta'_{m_j+1}$  y  $\zeta'_1$  y  $\beta$  corresponde a  $(\beta - c_k)/c_k$ .

Esto concluye la prueba de la **Proposición 3.2.6**. □

**Proposición 3.2.7** Si  $m \in \{s_1, s_2, s_k\}$ , entonces todas las singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_m^{-1}(0)$  son no-dicríticas.

*Demostración.* Los términos lineales de los generadores de  $\mathcal{F}_1$  alrededor de sus puntos singulares no son múltiplos del campo vectorial radial, según se desprende de (3.2.10) y (3.2.11) si  $m_1 > 1$  y de (3.2.14), si  $m_1 = 1$ , para el primer caso; de (3.2.19) y (3.2.20) si  $m_2 > 1$  y de (3.2.23), si  $m_2 = 1$  para el segundo y de (3.2.33) para el tercero. □

El **Teorema 3.1.7** es consecuencia de las proposiciones 3.2.2, 3.2.4, 3.2.6 y 3.2.7.

## 4 Un teorema de suficiencia de jets

Sea  $X$  un germen en  $0$  de campo de vectores holomorfo en  $\mathbb{C}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , de multiplicidad algebraica  $d + 1$ ,  $d \geq 2$ . Estamos pensando entonces en  $n + 1$  series de potencias convergentes en alguna vecindad común de  $0$ , cuya primera componente homogénea no nula ocurre en grado  $d + 1$ .

En esta sección obtendremos condiciones suficientes en el jet de orden  $d + 2$  de  $X$  que garantizan que el germen en  $X$  no tiene separatrices por el  $0$ .

Para establecer estas condiciones, hemos optado por definir un subconjunto  $\mathcal{V}$  del espacio vectorial (de dimensión finita) de campos de vectores polinomiales, cuyos términos homogéneos no nulos ocurren solamente en grados  $d + 1$  y  $d + 2$ .

En este capítulo no nos ocuparemos del problema de mostrar que  $\mathcal{V}$  es no vacío: tal es el contenido del capítulo siguiente.

**Definición** Una separatriz de un germen de campo de vectores holomorfo  $X$  en  $0$  en  $\mathbb{C}^m$  es un germen de curva analítica reducida  $C$  en  $0$  tal que  $X$  restringido a  $C \setminus \{0\}$  es tangente a  $C$ .

A lo largo de este capítulo,  $\mathfrak{m}$  denotará al ideal maximal en  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}$ .

**Definición 4.1** Denotaremos por  $\mathcal{V}$

$$\mathcal{V} \subset \Sigma(n + 1, d + 1) = \frac{\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{d+1} \cdot \Theta_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}}{\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{d+3} \cdot \Theta_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}} \quad (4.1)$$

al subconjunto del espacio vectorial de campos de vectores polinomiales homogéneos en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , con términos no nulos solamente en grados  $d + 1$  y  $d + 2$ , formado por aquellos campos de vectores  $\{X\}$  que satisfacen las siguientes condiciones:

- (a)  $X$  es no-dicrítico en  $0$  y la foliación adaptada en  $\mathbb{C}^m$  inducida por  $X$  y la explosión en  $0$ ,  $\mathcal{F}_1|_E$ , restringida al divisor excepcional  $E$ , tiene solamente singularidades aisladas y, en cada una de ellas, la parte lineal de  $\mathcal{F}_1$  tiene valor propio normal a  $E$  no nulo y repetido con alguno de los que son tangentes a  $E$ .
- (b) En cada punto singular, el bloque de Jordan asociado al valor propio normal es no semisimple.
- (c) En cada punto singular, los cocientes del valor propio repetido con los valores propios distintos restantes no son racionales estrictamente positivos.

**Observación 4.1.1** En  $\mathbb{C}^2$ , los conjuntos de campos de vectores  $\mathcal{V} \subset \Sigma(2, d + 1)$  así definidos son vacíos: por un lado, por cada punto singular  $p \in E$  de  $\mathcal{F}_1$  solamente hay un valor propio tangente y, si éste coincide con el normal, entonces todos los cocientes valen  $1$ . Por otro lado, este cociente de valores propios resulta ser lo que en [5] (p. 285, Observación 2.1) se define como el índice en  $p$  de  $\mathcal{F}_1$  relativo al divisor excepcional  $E$ . Por la Proposición 2.2 ([5] p.586), la suma de estos índices sobre todas las singularidades  $p$  de  $\mathcal{F}_1$  en  $E$  es igual a  $-1$ .

**Observación 4.1.2** Sean  $X$  un campo de vectores en  $\mathcal{V}$  y  $p$  en  $E$ , una singularidad aislada de  $\mathcal{F}_1$ . Sea  $z$  un sistema coordenado en  $\mathbb{C}^{n+1}$  alrededor de  $p$  tal que  $z(p) = 0$  y el divisor excepcional  $E$  está definido por  $(z_1 = 0)$ . En estas coordenadas,  $\mathcal{F}_1$  está generada por un campo de vectores  $Y$ , cuya parte lineal podemos suponer en forma canónica de Jordan.

En la notación de (3.2.2), y con las convenciones anteriores, las condiciones (a) y (b) de la **Definición 4.1** implican que  $Y$  tiene la siguiente forma:

$$Y(z) = z_1(a + h_1(z))\frac{\partial}{\partial z_1} + (z_1 + az_2 + h_2(z))\frac{\partial}{\partial z_2} + \sum_{k=3}^r \{(c_k z_{s_{k-1}+1} + h_{s_{k-1}+1}(z))\frac{\partial}{\partial z_{s_{k-1}+1}} + \sum_{j=2}^{s_k-1} (z_{j-1} + c_k z_j + h_j(z))\frac{\partial}{\partial z_j} + (z_{s_k-1} + c_k z_{s_k} + g_{s_k}(z))\frac{\partial}{\partial z_{s_k}}\} \quad (4.2)$$

donde  $s_r = n + 1$ ,  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $h_1 \in \mathfrak{m}$ ;  $h_j \in \mathfrak{m}^2$ ,  $j = 2, \dots, n + 1$ .

El valor propio normal a  $E$  es  $a \in \mathbb{C}^*$  y hemos denotado por  $\{c_k\}_{k=3, \dots, r}$  a los valores propios restantes.

La condición (c) de la **Definición 4.1** es necesaria para mostrar que las singularidades de la forma (4.2) generan, al ser explotadas, singularidades en forma de esquina simple. Ese es el contenido de la siguiente

**Proposición 4.2** Sea  $\mathcal{F}$  la foliación inducida por (4.2) en una vecindad de  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Sea  $\mathcal{F}_1$  la foliación adaptada en  $\mathbb{C}^m$  inducida por  $\mathcal{F}$  y la explosión en  $0$  y sea  $E_1$  el divisor excepcional invariante. Sea  $E_0^1$  el transformado estricto del hiperplano  $E : (z_1 = 0)$  y sea  $D_1$  el divisor  $D_1 = E_1 + E_0^1$ . Supongamos además que, cuando  $c_k \neq a$ , se cumple que  $c_k/a \notin \mathbb{Q}^+$ ,  $k \in \{3, \dots, n+1\}$ . Entonces la foliación  $\mathcal{F}_1$  está adaptada al divisor  $D_1$  y todas las singularidades de  $\mathcal{F}_1|_{E_1}$  son esquinas simples.

*Demostración.* Dividiendo en (4.2) por  $a + h_1(z)$  y haciendo un cambio de coordenadas, podemos suponer en (4.2) que  $h_1(z) \equiv 0$ , que  $a = 1$  y que los restantes valores propios son  $c_k = e_k/a$ ,  $k = 2, \dots, r$ .

Siguiendo la notación de la demostración del **Teorema 3.1.7**, con  $m_1 = 2$ , uno calcula los generadores locales

$$X'_{s_k}(\zeta') = \sum_{j=1}^m X'_{s_k, j}(\zeta') \frac{\partial}{\partial \zeta'_j}$$

de  $\mathcal{F}_1$ . De la expresión (3.2.7) correspondiente a  $X$ , se obtienen, en particular

$$\begin{aligned} X'_{2,1}(\zeta') &= -\zeta'_1 \zeta'_1 + (\zeta'_2)^{-1} (g_2 \circ \sigma_2)(\zeta'), \\ X'_{2,2}(\zeta') &= \zeta'_2 (1 + \zeta'_1) + (g_2 \circ \sigma_2)(\zeta'). \end{aligned}$$

Si alguno (o algunos) de los valores propios  $c_k$  es igual con  $a$ , entonces las singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_2^{-1}(0)$  son los puntos  $p_{s_i}$  definidos por (3.2.8), en la demostración del **Teorema**

**3.1.7.** Si, por el contrario,  $c_k \neq a$ , entonces la única singularidad de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_2^{-1}(0)$  es el punto  $q_2$ , como se definió en (3.1.4). Cualquiera que sea el caso, de la expresión anterior se concluye que son esquinas simples:  $z_1$  y  $z_2$  de (3.1.9) corresponden respectivamente a  $\zeta'_2$  y  $\zeta'_1$ ;  $\beta$  a 0.

Para probar que las singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en  $\sigma_{s_k}^{-1}(0)$  son esquinas simples, los términos relevantes de los generadores de  $\mathcal{F}_1$  son, para el caso en que  $m_k > 1$

$$\begin{aligned} X'_{s_{k-1}}(\zeta') &= \zeta'_1 [1 - c_k a^{-1} - \zeta'_{s_{k-1}} + (\zeta'_{s_k})^{-1} (g_{s_k} \circ \sigma_{s_k})(\zeta')], \\ X'_{s_k}(\zeta') &= \zeta'_{s_k} (c_k a^{-1} + \zeta'_{s_{k-1}}) + (g_{s_k} \circ \sigma_{s_k})(\zeta'), \end{aligned}$$

y las expresiones que se obtienen de éstas sustituyendo  $\zeta'_{s_{k-1}} \equiv 0$ , para el caso en que  $m_k = 1$ . La prueba se completa con el mismo argumento del **Caso 2** del **Teorema 3.1.7**, con  $\beta = e_k a^{-1}$ .  $\square$

**Observación 4.2.1** Si  $X$  es un germen en  $p$  del generador de una foliación por curvas  $\mathcal{F}$  de la forma (4.2) y  $\mu(\mathcal{F}, p) > 1$ , entonces  $c_k = 0$  para algún  $k \in \{3, \dots, n+1\}$  y las singularidades de  $\mathcal{F}_1$  en el abierto  $U_k \subset E_1$  (3.1.3) son esquinas simples.

**Lema 4.3** Sea  $X$  un germen de campo de vectores holomorfo en  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ , de multiplicidad algebraica  $d+1$  tal que su  $(d+2)$ -jet está en  $\mathcal{V}$ . Sea  $\mathcal{F}_1$  la foliación adaptada en  $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$  inducida por  $Y$  y la explosión en 0. Entonces  $Y$  tiene una singularidad aislada en 0 y satisface las condiciones (a), (b) y (c) de la **Definición 4.1**.

*Demostración.* Por la **Proposición 3.1.3**, la foliación  $\mathcal{F}_1|_E$  es isomorfa a la que se obtiene por  $\mathcal{E}(d)$  (2.1.3) en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  por los términos de grado  $d+1$  de  $Y$  y el  $(d+2)$ -jet de  $Y$  determina a la parte lincal de  $\mathcal{F}_1$  en las singularidades en  $E$ , lo que prueba que  $Y$  satisface las condiciones (a), (b) y (c).

Sólo resta mostrar que  $Y$  tiene una singularidad aislada en 0 y para ello basta probar que  $\mathcal{F}_1$  tiene singularidades solamente en  $E$ , porque  $\sigma$  es un biholomorfismo entre  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus E$  y  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

De hecho mostraremos que  $\mathcal{F}_1$  tiene singularidades aisladas en  $E$ . Sea  $p \in \text{Sing } \mathcal{F}_1$  y sea  $z$  un sistema coordenado en el que  $z(p) = 0$ ,  $E$  está dado por  $(z_1 = 0)$  y  $\mathcal{F}_1$  está generada por un campo de vectores  $X$  de la forma (4.2), con  $m = n+1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{F}_1, 0) &= \dim \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}}{(z_1(a+h_1), z_1+a z_2+g_2, c_3 z_3+h_3, \dots, c_{n+1} z_{n+1}+h_{n+1})} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}}{(z_1, z_2+g_2, c_3 z_3+h_3, \dots, c_{n+1} z_{n+1}+h_{n+1})} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}}{(z_2+g_2(0, z_2, \dots, z_{n+1}), c_3 z_3+h_3(0, z_2, \dots, z_{n+1}), \dots, c_{n+1} z_{n+1}+h_{n+1}(0, z_2, \dots, z_{n+1}))} \\ &= \mu(\mathcal{F}_1|_E, 0) < \infty \end{aligned}$$

$\square$

**Proposición 4.4** Sea  $Y$  un germen de campo de vectores holomorfo en  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ , con una singularidad aislada en 0 de la forma (4.2) y que satisface las condiciones de

la **Proposición 4.2**. Entonces todas las separatrices de  $Y$  por  $0$  están contenidas en el hiperplano  $z_1 = 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $C_0$  es un germen de curva analítica irreducible por  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$  que es tangente a  $Y$  y no está contenido en el plano  $z_1 = 0$ . Sea  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  una sucesión de explosiones que desingulariza a  $C_0$ , con  $C_j$  la transformada estricta de  $C_{j-1}$  bajo  $\sigma_j$ ,  $p_0 = 0$  y  $\{p_j\} = C_j \cap \sigma_j^{-1}(p_{j-1})$ . Sean  $\mathcal{F}_0$  la foliación definida por  $Y$  y  $\mathcal{F}_j$  la foliación adaptada inducida por  $\mathcal{F}_{j-1}$  y  $\sigma_j$ . Podemos suponer, aplicando más explosiones, que  $C_{r-1}$  no es tangente a ninguna componente irreducible de  $(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{r-1})^{-1}(0)$ , de manera que  $C_r$  intersecta a  $(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_r)^{-1}(0)$  solamente en  $E_r$ . Por la **Proposición 4.2** y el **Teorema 3.1.7**, las foliaciones  $\mathcal{F}_j$  son no dicríticas en cada divisor excepcional y sus puntos singulares son esquinas simples. Sin embargo, el punto  $p_r \in C_r \cap E_r$  es una singularidad de  $\mathcal{F}_r$  (porque  $C_r \setminus \{p_r\}$  es una hoja de  $\mathcal{F}_r$  y  $E_r$  es invariante por  $\mathcal{F}_r$ ) que no es una esquina simple porque sólo está en una componente irreducible de  $(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_r)^{-1}(0)$ . Esta contradicción al **Teorema 3.1.7** demuestra la Proposición.  $\square$

A continuación, demostraremos el teorema principal de esta sección.

**Teorema 4.5** Sea  $X$  un germen de campo de vectores holomorfo en  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$  de multiplicidad algebraica  $d + 1$  tal que su  $(d + 2)$ -jet pertenece al conjunto  $\mathcal{V}$  definido en (4.1). Entonces  $X$  no tiene separatriz por el  $0$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}_1$  la foliación adaptada en  $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$  inducida por  $X$  y la explosión en  $0$ . El divisor excepcional  $E$  es invariante por  $\mathcal{F}_1$  y, por la **Proposición 2.4**,  $\text{Sing}(\mathcal{F}_1|_E)$  consta únicamente de singularidades aisladas. En cada una de ellas,  $\mathcal{F}_1$  satisface las condiciones de la **Proposición 4.2** y, en consecuencia, la **Proposición 4.4** puede aplicarse para concluir que todas las separatrices por los puntos singulares de  $\mathcal{F}_1$  están contenidas en  $E$ . Una separatriz de  $X$  por  $0$  se levanta en una separatriz de  $\mathcal{F}_1$  por algún punto singular de  $\mathcal{F}_1|_E$  pero no contenida en  $E$ ; así es que  $X$  no puede tener una separatriz por  $0$ .

## 5 Teoremas de Existencia

Sean  $n \geq 2$  y  $d \geq 1$  enteros fijos. Sea  $X$  un germen en 0 de campo de vectores holomorfo en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , de multiplicidad algebraica  $d+1$  y sea  $\mathcal{F}_X$  la foliación adaptada en  $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$  inducida por  $X$  y la explosión en 0. Sea  $E$  el divisor excepcional (que es invariante por  $\mathcal{F}_X$ ).

En el capítulo anterior obtuvimos condiciones suficientes en el jet de orden  $d+2$  del campo de vectores  $X$  para que éste no tenga separatrices por el 0.

El conjunto de campos de vectores polinomiales  $\{W\}$  con componentes homogéneas no nulas sólo en grados  $d+1$  y  $d+2$  tiene una estructura natural de  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita, digamos  $\mathbb{C}^M$ , y, asociada a ésta, una estructura de espacio proyectivo  $\mathbb{P}^M$ . Este último es un espacio de parámetros natural en el que nos proponemos obtener ecuaciones que garanticen las condiciones de no existencia de separatrices.

La idea es la siguiente: escoger convenientemente un conjunto finito de puntos  $Z$  en  $E$ , y buscar ecuaciones, en los coeficientes de  $W$ , que garanticen que el conjunto singular de  $\mathcal{F}_W|_E$  sea  $Z$  y que la parte lineal de  $\mathcal{F}_W|_E$ , en cada punto  $p$  en  $Z$ , satisfaga las condiciones de valor propio repetido, no-semisimplicidad y de cocientes de valores propios que garanticen la no existencia de separatrices. Si uno consigue resolver el sistema de ecuaciones así obtenido, habrá conseguido ejemplos de familias de gérmenes de campos de vectores sin separatriz.

Para llevar a cabo este plan, la **Proposición 2.2.6** es relevante: si uno impone condiciones de modo que en todo punto  $p$  en  $Z$ , la multiplicidad  $\mu(\mathcal{F}_W|_E, p)$  de la foliación en  $p$  sea igual a 1 (en otras palabras, que  $\mathcal{F}_W|_E$  sea no degenerada), entonces, como la posición de los puntos  $p$  en  $Z$  determina completamente a  $\mathcal{F}_W|_E$ , en particular la parte lineal de esta foliación en los puntos  $Z$  ya estaría determinada y entonces, desde el momento en que uno elige al conjunto  $Z$ , uno tendría que arreglárselas para garantizar las condiciones de valor propio repetido faltantes.

Lo que haremos entonces es escoger  $Z$  con "pocos" puntos e imponer condiciones en los coeficientes de  $W$  para que algunas multiplicidades  $\mu(\mathcal{F}_W|_E, p)$  de los puntos  $p$  en  $Z$ , sean estrictamente mayores que 1. Mostraremos que esta elección del conjunto singular  $Z$  sí permite escribir las condiciones sobre la parte lineal de  $\mathcal{F}_W|_E$ .

Para campos de vectores en  $\mathbb{C}^3$ , probaremos que el sistema de ecuaciones así obtenidas tiene soluciones, es decir, exhibiremos familias de gérmenes de campos sin separatriz. Este es el contenido de la primera sección de este capítulo.

En la segunda sección, mostraremos cómo se obtienen sistemas de ecuaciones similares para campos de vectores en  $\mathbb{C}^4$ , aunque no exhibiremos soluciones.

### 5.1 Familias de gérmenes sin separatriz en $\mathbb{C}^3$

En esta sección construiremos una familia no vacía  $\mathcal{W}$  de campos de vectores polinomiales  $W$  en  $\mathbb{C}^3$ , con términos homogéneos no nulos solamente en grados  $d+1$  y  $d+2$ , tal que todo germen en 0 de campo de vectores en  $\mathbb{C}^3$ , de multiplicidad algebraica  $d+1$  cuyo  $(d+2)$ -jet pertenece a  $\mathcal{W}$ , no tiene separatriz por 0.

Las condiciones que definen a la familia  $\mathcal{W}$  están inspiradas en las que definen al subconjunto  $\mathcal{V}$  del capítulo anterior, con dos salvedades. La primera es que el conjunto singular de la foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  asociada a un campo de vectores  $W \in \mathcal{W}$  está contenido en una línea proyectiva  $\mathcal{L}$ , invariante por  $\mathcal{F}_1$ ; la segunda diferencia está en

la condición sobre los cocientes de los valores propios de la parte lineal de  $\mathcal{F}_1$ . Esta condición se utiliza para probar que todas las separatrices de  $\mathcal{F}_1$  están contenidas en el divisor excepcional (ver el punto 5 en la **Observación 5.2**, adelante).

A lo largo de esta sección,  $\mathfrak{m}$  denotará al ideal maximal en  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}$  y  $d$  a un entero mayor o igual que 1.

Sea  $\mathcal{L} \subset E \simeq \mathbb{C}P^2$  una línea proyectiva fija y sea  $Z = \{p_k \in \mathcal{L} \mid k = 0, 1, \dots, d+1\}$  un subconjunto de  $d+2$  puntos distintos en ella.

**Definición 5.1.1** Denotaremos por  $\mathcal{W}$

$$\mathcal{W} \subset \frac{\mathfrak{m}^{d+1} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}}{\mathfrak{m}^{d-3} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}} \quad (5.1.1)$$

al subconjunto del  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de campos de vectores polinomiales en  $\mathbb{C}^3$ , con términos homogéneos no nulos solamente en grados  $d+1$  y  $d+2$ , formado por aquellos campos de vectores  $\{W\}$  que satisfacen las siguientes condiciones:

- (i)  $W$  es no-dicrítico en 0 y  $\mathcal{L}$  es invariante por la foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  en  $\bar{\mathbb{C}}^3$  inducida por  $W$  y la explosión en 0.
- (ii) Cada  $p_k$  en  $Z$  es una singularidad de  $\mathcal{F}_1$ .
- (iii)  $\sum_k \mu(\mathcal{F}_1; p_k) = c_2(\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^2}(d))$ .
- (iv) La parte lineal de  $\mathcal{F}_1$  en cada  $p_k$  en  $Z$  tiene valor propio normal a  $E$  no nulo y repetido con alguno de los que son tangentes a  $E$ .
- (v) Para cada  $p_k$  en  $Z$ , el bloque de Jordan asociado al valor propio normal es no semisimple.
- (vi) Para cada  $p_k$  en  $Z$ , el cociente del valor propio repetido con el valor propio distinto restante es un número complejo que no es de la forma  $1/n$  con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

**Observación 5.1.2** Sea  $W_0$  un germen de campo de vectores holomorfo de multiplicidad algebraica  $d+1$ , cuyo jet  $W$  de orden  $d+2$  está en  $\mathcal{W}$ . Sean  $\mathcal{F}_{W_0}$  y  $\mathcal{F}_W$  las foliaciones en  $\bar{\mathbb{C}}^3$  inducidas por la explosión en 0, respectivamente por  $W_0$  y  $W$ . Entonces

- 1 Por la **Proposición 3.1.3** estas dos foliaciones coinciden al restringirlas al divisor excepcional  $E$ . En particular tienen el mismo conjunto singular y parte lineal en  $E$ .
- 2 Por la **Proposición 2.2.2**, una foliación por curvas  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol(d, \mathbb{C}P^2)$  tiene  $d^2+3d+3$  singularidades aisladas, salvo multiplicidad. Si  $\mathcal{F}$  tiene una línea  $\mathcal{L}$  invariante, la misma **Proposición 2.2.2** muestra que por lo menos  $d+2$  de ellas están en  $\mathcal{L}$ .
- 3 Los puntos  $p_k \in Z \subset E$  de la **Definición 5.1.1** son singularidades aisladas de la foliación  $\mathcal{F}_W$  y  $W_0$  tiene una singularidad aislada en el 0: por un lado, las condiciones (ii) y (iii) implican, por la **Proposición 2.2.5**, que  $\text{Sing}(\mathcal{F}_W|_E) = Z$  y consiste sólo de singularidades aisladas; lo anterior, junto con las condiciones (iv) y (v), nos coloca en las hipótesis del **Lema 4.3**, del que se sigue la afirmación.

- 4 Por la **Proposición 3.1.3**, las condiciones ( i ) a ( iv ) y ( vi ) dependen solamente de la parte  $d+1$ -homogénea de  $W$ . Los términos de grado  $d+2$  intervienen solamente en ( v ).
- 5 La condición ( vi ) es necesaria para mostrar que toda separatriz de  $\mathcal{F}_{W_0}$  por algún punto singular  $p_k$  en  $Z$  está contenida en el divisor excepcional  $E$  ( ver la subsección 5.2.4, en el **Caso 3.2**, el **Caso resonante** [R2] ). Esta variante de la **Proposición 4.4** se probará construyendo una *forma normal* para campos de vectores singulares en  $\mathbb{C}^3$  que tienen un divisor invariante ( ver la **Proposición A** en el Apéndice ).

Para hacer explícita la dependencia de la foliación  $\mathcal{F}_1$  del campo  $W$ , algunas veces la denotaremos por  $\mathcal{F}_{\tilde{W}}$ .

Iniciamos ahora la construcción de la familia  $W$  de la **Definición 5.1.1**.

En esta sección y en el Apéndice, cuando hablemos de un campo  $r$ -homogéneo nos estaremos refiriendo a un campo de vectores polinomial homogéneo de grado  $r$  en  $\mathbb{C}^3$ .

Denotaremos por  $W$  al  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de campos  $(d+1)$ -homogéneos. Su dimensión es  $(3d^2 + 15d + 18)/2$ . La dimensión de su espacio proyectivo asociado  $\mathbb{P}W$  es entonces  $(3d^2 + 15d + 16)/2$ .

Sea  $\sigma : \tilde{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  la explosión en 0 y escojamos coordenadas en  $\tilde{\mathbb{C}}^3$  en las que  $\sigma$  está dado por

$$\sigma(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_1 z_2, z_1 z_3) = (x_1, x_2, x_3) \quad (5.1.2)$$

y el divisor excepcional  $E \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , por  $(z_1 = 0)$ .

En las coordenadas anteriores, sea  $\mathcal{L}$  la línea definida por  $(z_3 = 0)$  y sea

$$Z = \{(0, z_2, 0) \in \mathcal{L} : z_2(z_2^{d+1} - 1) = 0\}.$$

$Z$  consiste del origen y de las raíces  $(d+1)$ -ésimas de la unidad en  $\mathcal{L}$ .

**Proposición 5.1.3** La familia de campos de vectores  $(d+1)$ -homogéneos cuya foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  es singular en  $Z$  y deja invariante a la línea  $\mathcal{L}$ , consiste de los campos de vectores  $W$  de la forma

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, x_3) &= -x_1[ax_2^{d+1} + x_3 \sum_{i+j=d} l_{ij} x_2^i x_3^j] \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &+ [-ax_1^d x_2 + x_3 \sum_{i+j=0}^d p_{ij} x_1^{d-(i+j)} x_2^i x_3^j] \frac{\partial}{\partial x_2} \\ &+ x_3 \left[ \sum_{i+j=0}^d q_{ij} x_1^{d-(i+j)} x_2^i x_3^j \right] \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &= \sum_{k=1}^3 W_k(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

donde  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $l_{ij}$ ,  $p_{ij}$  y  $q_{ij}$  denotan a los parámetros de la familia. Esta familia es de hecho una subvariedad proyectiva de  $\mathbb{P}W$  de codimensión  $2(d+2)$ .

**Demostración.** Las coordenadas  $(z_2, z_3)$  corresponden a las coordenadas afines  $\varphi_1(U_1) \subset \mathbb{C}^2$  en el abierto  $U_1 \subset E$ , definidas en (2.1.1). La expresión

$$X|_{\mathcal{L}} = az_2(z_2^{d+1} - 1) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

preasigna las singularidades de un campo de vectores  $X$  en la línea invariante ( $z_3 = 0$ ). Usando la Proposición 1.23 en [12], uno extiende esta expresión a la expresión local de una sección  $X \in H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \Theta_{\mathbb{P}^2}(d))$ :

$$\begin{aligned} X(z_2, z_3) &= [az_2(z_2^{d+1} - 1) + z_3(\mathbf{P}_0^d + z_2\mathbf{L}_d)] \frac{\partial}{\partial z_2} \\ &\quad + z_3[az_2^{d+1} + z_3\mathbf{L}_d + \mathbf{Q}_0^d] \frac{\partial}{\partial z_3} \\ &= X_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + X_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

$$\begin{aligned} \text{donde } \mathbf{L}_d &= \sum_{i+j=d} l_{ij} z_2^i z_3^j, \quad \mathbf{Q}_0^d = \sum_{i+j=0}^d q_{ij} z_2^i z_3^j \\ \text{y } \mathbf{P}_0^d &= \sum_{i+j=0}^d p_{ij} z_2^i z_3^j. \end{aligned}$$

Sea  $\Pi: \mathbb{C}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$  la proyección natural. Es sencillo comprobar que la derivada de  $\Pi$  satisface  $D\Pi(W) = X$ . El campo  $X$  satisface  $2(d+2)$  ecuaciones lineales independientes en  $\mathbb{P}W$  que corresponden a escoger la línea invariante y las singularidades en ella.

Por otro lado, la foliación  $\mathcal{F}_1$  en  $\tilde{\mathbb{C}}^3$  inducida por  $W$  y la explosión (5.1.2) está generada por

$$\begin{aligned} \tilde{W}(z_1, z_2, z_3) &= \frac{1}{z_1^d} (D\sigma)^{-1} W(z_1, z_1 z_2, z_1 z_3) \\ &= z_1 W_1(1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{k=2}^3 [W_k - z_k W_1](1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_k} \end{aligned}$$

por lo que  $\tilde{W}(0, z_2, z_3) = X(z_2, z_3)$ .

Por construcción, la foliación  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_{\tilde{W}}$  tiene singularidades en los  $(d+2)$  puntos  $p_0 = (0, 0, 0)$  y  $p_k = (0, \omega^k, 0)$ ,  $k = 1, \dots, d+1$ , donde  $\omega = e^{2\pi i/(d+1)}$ .  $\square$

Por la sucesión de Euler torcida, para cualquier polinomio homogéneo  $H$  de grado  $d$

$$H = \sum_{i+j+k=d} h_{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k \quad (5.1.4)$$

el campo  $d+1$ -homogéneo

$$W^H = W + H \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

induce la misma foliación  $\mathcal{F}_1|_E$  que  $\tilde{W}$  en  $E$ . En las coordenadas (5.1.2) de  $\tilde{\mathbb{C}}^3$ ,  $\mathcal{F}_1$  está generada por

$$\tilde{W}^H = z_1 [H + W_1](1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{k=2}^3 X_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

$$= \sum_{k=1}^3 \bar{W}_k^{Hl} \frac{\partial}{\partial z_k}$$

La parte lineal  $D \bar{W}^{Hl}(0, z_2, 0)$  de  $\mathcal{F}_{\bar{W}^{Hl}}|_{\mathcal{L}}$  es

$$\begin{pmatrix} W_1^{Hl}(1, z_2, 0) & 0 & 0 \\ 0 & (d+2)az_2^{d+1} - a & \frac{\partial X_2}{\partial z_2}(z_2, 0) \\ 0 & 0 & az_2^{d+1} + \sum_{i=0}^d q_{i,0}z_2^i \end{pmatrix}$$

donde

(5.1.5)

$$\begin{aligned} W_1^{Hl}(1, z_2, 0) &= \sum_{i=0}^d h_{i,d-i,0} z_2^{d-i} - az_2^{d+1} \\ \frac{\partial X_2}{\partial z_3}(z_2, 0) &= z_2 [\mathbf{L}_d + \frac{\partial \mathbf{L}_d}{\partial z_3}](z_2, 0) + \mathbf{P}_0^d(z_2, 0) \end{aligned}$$

Observe que la matriz (5.1.5) es triangular, así que los valores propios de  $D \bar{W}^{Hl}$  en cada punto singular están en la diagonal principal. El bloque  $2 \times 2$  inferior derecho es la parte lineal  $DX(z_2, 0)$ , de  $\mathcal{F}_X$  en  $\mathcal{L}$ . Así que el valor propio restante es el *normal* a  $E$ .

### 5.1.1 Condiciones de multiplicidades

Para que un campo de vectores  $(d+1)$ -homogeneo  $W$  verifique la condición (iii) de la **Definición 5.1.1**, es necesario que todas las singularidades de  $\mathcal{F}_{\bar{W}}$  estén concentradas en  $Z$ . Una forma de conseguirlo es la siguiente: nos proponemos imponer condiciones en los coeficientes de  $W$  de manera que  $\mathcal{F}_{\bar{W}}$  tenga singularidades simples en los puntos  $p_1, \dots, p_{d+1}$  y una singularidad de multiplicidad  $1 + (d+1)^2$  en el punto  $p_0$ . Con estas multiplicidades, su suma es compatible con la **Proposición 2.2.4**:

$$c_2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) = d^2 + 3d + 3 = d + 1 + (1 + (d+1)^2).$$

En esta sección mostraremos que  $\mathbb{P}W$  contiene una subvariedad casi-proyectiva no vacía  $\mathcal{V}_1$  que satisface las condiciones anteriores (en particular, satisface las condiciones (ii), (iii) y parcialmente la (i) de la **Definición 5.1.1**).

El siguiente cálculo involucra exclusivamente a los  $(d+2)^2$  coeficientes de  $X$  definidos en (5.1.3), a los que se les pensará como variables (las variables  $h_{i,j,k}$  no intervienen).

De (5.1.5), es claro que los puntos  $\{p_k : k = 1, \dots, d+1\}$  en  $\mathbb{C}P^2$  son singularidades simples de  $\mathcal{F}_{\bar{W}}|_E$  si y sólo si los correspondientes valores propios son no nulos

$$\begin{aligned} (d+1)a &\neq 0 \\ a + q_{0,0} + \sum_{i=1}^d q_{i,0} \omega^{k,i} &\neq 0 \quad k = 1, \dots, d+1 \end{aligned} \quad (5.1.1.1)$$

Condiciones suficientes para que la multiplicidad de  $p_0$  sea  $1 + (d+1)^2$  pueden escribirse de la siguiente manera: En (5.1.3), sea  $Y_3 = z_3^{-1} X_3$ . Observe que

$$\begin{aligned} \mu(X_2, z_3 Y_3; p_0) &= \mu(X_2, z_3; p_0) + \mu(X_2, Y_3; p_0) \\ &= \mu(X_2(z_2, 0); 0) + \mu(X_2, Y_3; p_0) \\ &= 1 + \mu(X_2, Y_3; p_0) \end{aligned}$$

así que  $\mu(X; \rho_0) \geq 2$  si  $\mu(X_2, Y_3; (0, 0)) \geq 1$ , que es el caso, de (5.1.3), si

$$q_{00} = 0 \quad (5.1.1.2)$$

pues  $q_{00}$  es el término independiente de  $Y_3$ .

Supongamos que  $q_{00} = 0$ . Podemos ahora incrementar  $\mu(X_2, Y_3; \rho_0)$  forzando a que las curvas ( $X_2 = 0$ ) y ( $Y_3 = 0$ ) sean *muy tangentes* en  $\rho_0$  en una dirección común escogida: los términos lineales de  $X_2$  y de  $Y_3 = z_2^{-1} X_3$  en (5.1.3) definen, respectivamente, a la línea tangente por  $\rho_0$  a las curvas ( $X_2 = 0$ ) y ( $Y_3 = 0$ ). Entonces, la línea ( $z_3 = 0$ ) es tangente a ambas curvas si dichos términos lineales satisfacen las condiciones

$$\rho_{0,0} = q_{0,1} = 0 \quad (5.1.1.3)$$

$$a \neq 0, q_{1,0} \neq 0 \quad (5.1.1.4)$$

Suponemos (5.1.1.2), (5.1.1.3) y (5.1.1.4) y describimos al campo de vectores (5.1.3) como

$$\begin{aligned} X(z_2, z_3) &= [-az_2 + z_2(az_2^{d+1} + z_3 L_d) + z_3 P_1^d] \frac{\partial}{\partial z_2} \\ &\quad + z_3 [q_{1,0} z_2 + az_2^{d+1} + z_3 L_d + Q_2^d] \frac{\partial}{\partial z_3} \\ &= X_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 Y_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \end{aligned} \quad (5.1.1.5)$$

En ésta última expresión, consideremos  $X_{23} = (\frac{a}{q_{1,0}} - z_2) Y_3 + X_2$  y observemos que los ideales  $(X_2, Y_3)$  y  $(X_{23}, Y_3)$  coinciden. Entonces

si  $X_{23} \in \mathbb{C} \cdot z_2^{d+1}$  y  $Y_3(0, z_3) \in (z_3^{d+1})$  entonces

$$\begin{aligned} \mu(X_2, Y_3; \rho_0) &= \mu(X_{23}, Y_3; \rho_0) = \mu(kz_2^{d+1}, Y_3; \rho_0) \\ &= (d+1) \cdot \mu(Y_3(0, z_3); 0) = (d+1)^2 \end{aligned}$$

así es que  $\mu(X; \rho_0) = 1 + (d+1)^2$ , como se quería.

Ahora procedemos a escribir las ecuaciones de las condiciones anteriores. Se definen  $Q'$  y  $Q''$  en (5.1.1.5) por

$$\begin{aligned} Q_2^d(z_2, z_3) &= \sum_{i=2}^d q_{i,0} z_2^i + z_3 \left( \sum_{i+j=2, j \geq 1}^d q_{i,j} z_2^i z_3^{j-1} \right) \\ &= Q'(z_2) + z_3 Q''(z_2, z_3) \end{aligned}$$

Así es que  $X_{23}$  es un múltiplo escalar de  $z_2^{d+1}$  si se satisfacen las siguientes condiciones

$$\frac{a}{q_{1,0}} (L_d + Q'') - z_2 Q'' + P_1^d = 0 \quad (5.1.1.6)$$

$$\frac{a}{q_{1,0}} (Q' + az_2^{d+1}) - z_2 Q' - q_{1,0} z_2^2 \in (z_2^{d+1}) \quad (5.1.1.7)$$

La ecuación (5.1.1.6) puede resolverse para los coeficientes de  $P_1^d$ :

$$P_1^d = z_2 Q'' - \frac{a}{q_{1,0}} (L_d + Q'') \quad (5.1.1.8)$$

(5.1.1.8) es un sistema de  $d(d+3)/2$  ecuaciones, así que los  $p_{i,j}$ 's ya no son variables libres.

Factorizando las potencias de  $z_2$  en (5.1.1.7), se encuentran las siguientes condiciones suficientes para que (5.1.1.7) se satisfaga

$$q_{1,0} = \lambda a, \quad q_{j,0} = \lambda^j a \quad \text{para } j = 2, \dots, d \quad (5.1.1.9)$$

$$a^2 + q_{d,0} q_{1,0} = (\lambda^{d+1} - 1)a^2 \neq 0 \quad \text{para algún } \lambda \in \mathbb{C}^* \quad (5.1.1.10)$$

Finalmente, las condiciones para que  $Y_3(0, z_3) \in (z_3^{d-1})$  son

$$q_{0,j} = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, d \quad (5.1.1.11)$$

$$l_{0,d} \neq 0 \quad (5.1.1.12)$$

El número total de ecuaciones en (5.1.1.2), (5.1.1.3), (5.1.1.8), (5.1.1.9) y (5.1.1.11) es  $(d^2 + 7d + 6)/2$ , en  $(d+2)^2$  variables. Es posible encontrar soluciones a este sistema que sean consistentes con las condiciones abiertas (5.1.1.1), (5.1.1.4), (5.1.1.10) y (5.1.1.12) puesto que, hasta ahora, el parámetro  $\lambda$  obtenido en (5.1.1.9) y (5.1.1.11) solamente debe satisfacer que es no nulo y que no es una raíz  $(d+1)$ -ésima de la unidad. En resumen, hemos demostrado

**Lema 5.1.1** El espacio de campos  $(d+1)$ -homogéneos  $\{W\}$  en  $\mathbb{C}^3$  cuya foliación adaptada  $\mathcal{F}_{\tilde{W}}$  satisface (i), (ii) y (iii), contiene una subvariedad casi-proyectiva  $\mathcal{V}_1$  formada por campos de vectores cuya foliación adaptada  $\mathcal{F}_{\tilde{W}}$  tiene singularidades simples en los puntos  $p_k$ ,  $k = 1, \dots, d+1$ , y una singularidad de multiplicidad  $1 + (d+1)^2$  en el punto  $p_0$ . Está definida por las soluciones a (5.1.1.2), (5.1.1.3), (5.1.1.8), (5.1.1.9) y (5.1.1.11) que satisfacen las condiciones abiertas (5.1.1.1), (5.1.1.4), (5.1.1.10) y (5.1.1.12). Cada componente irreducible no vacía tiene codimensión a lo más  $(d^2 + 11d + 14)/2$  en  $\mathbb{P}W$ .  $\square$

## 5.1.2 Condiciones de valores propios repetidos

En esta sección mostraremos que la variedad  $\mathcal{V}_1$ , definida en el Lema 5.1.1 anterior, contiene una subvariedad casi-proyectiva no vacía, formada por campos de vectores que satisfacen la condición adicional de valor propio repetido (iv) de la Definición 5.1.1.

De la expresión (5.1.5) de la parte lineal de la foliación  $\mathcal{F}_{\tilde{W}}|_{\mathcal{L}}$  restringida a  $\mathcal{L}$ , se observa que las variables  $h_{i,j,k}$  definidas en (5.1.4) intervienen sólo en la determinación del valor propio  $W_1^H(1, z_2, 0)$  normal al divisor excepcional ( $z_1 = 0$ ), y no en las condiciones de multiplicidades de la sección anterior, por lo que es apenas ahora que entran en juego.

Se sigue de (5.1.5) que la condición de valor propio repetido en  $p_0$  es

$$h_{d,0,0} = -a \quad (5.1.2.1)$$

misma que asumiremos en lo que sigue.

Como  $X$  es tangente a una línea proyectiva  $\mathcal{L} \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , aquellos valores propios cuyo espacio propio está contenido en  $T_{p_0}\mathcal{L}$  necesariamente satisfacen la relación del residuo de [5] (ver la Observación 4.1.1). Para evitarla, estamos forzados a hacer una elección

conveniente de aquellos pares de valores propios que deseamos sean repetidos. Una de tales posibles elecciones es la siguiente: impondremos la condición de que el valor propio que es normal al divisor excepcional  $E$  coincida con aquél que es *tangente* a  $\mathcal{L}$  solamente en los  $d$  puntos  $p_k$ ,  $k = 1, \dots, d$  y, en el restante  $p_{d+1} = (0, 1, 0)$ , que coincida con el que es tangente a  $E$ , pero no a  $\mathcal{L}$ .

De (5.1.5), estas condiciones son

$$\begin{aligned} -2a + \sum_{i=0}^{d-1} h_{i,d-i,0} \omega^{k(d-i)} - a(d+1) &= 0 & k = 1, \dots, d \\ -3a + \sum_{i=0}^{d-1} h_{i,d-i,0} - \sum_{i=1}^d q_{i,0} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.2.2)$$

Procedemos ahora a encontrar soluciones a las ecuaciones (5.1.2.2) que satisfagan las condiciones del Lema 4.1.1. Para simplificar la notación, reemplacemos  $h_{j,d-j,0}$  por  $h_j$ . Entonces, sustituyendo (5.1.1.9) en (5.1.2.2) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{d-1} h_j \omega^{kj} &= a(3+d) & k = 1, \dots, d \\ \sum_{j=0}^{d-1} h_j &= a(3 + \sum_{j=1}^d \lambda^j) \end{aligned} \quad (5.1.2.3)$$

que en notación matricial es

$$\mathbf{A}_{d+1} \cdot \begin{pmatrix} h_{d-1} \\ h_{d-2} \\ \vdots \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(3 + \sum_{j=1}^d \lambda^j) \\ a(3+d) \\ \vdots \\ a(3+d) \\ a(3+d) \end{pmatrix}$$

donde  $\mathbf{A}_{d+1}$  denota a la transpuesta de la matriz de Vandermonde  $(d+1) \times (d+1)$  con valores  $\omega, \omega^2, \dots, \omega^{d^2+1} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 & \dots & \omega^d & 1 \\ \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2d} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega^d & \omega^{2d} & \dots & \omega^{d^2} & 1 \end{pmatrix}$$

Como  $\mathbf{A}_{d+1}^{-1}$  es igual a  $(1/d+1)$  por la transpuesta conjugada de  $\mathbf{A}_{d+1}$ , la solución a las ecuaciones (5.1.2.3) es entonces

$$\begin{pmatrix} h_{d-1} \\ h_{d-2} \\ \vdots \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{d+1} \cdot \overline{(\mathbf{A}_{d+1})^T} \begin{pmatrix} a(3 + \sum_{j=1}^d \lambda^j) \\ a(3+d) \\ \vdots \\ a(3+d) \\ a(3+d) \end{pmatrix}$$

La última ecuación impone una nueva condición al parámetro  $\lambda$  obtenido en las ecuaciones (5.1.1.9) y (5.1.1.10) que es equivalente a

$$\sum_{j=1}^d \lambda^j = -(d^2 + 3d + 3) \quad (5.1.2.4)$$

Es decir,  $\lambda$  debe ser una raíz del polinomio

$$P(x) = (d+1)(d+2) + \sum_{j=0}^d x^j \quad (5.1.2.5)$$

Así que en particular, si  $\lambda$  es real, debe ser negativo.

Tomando el módulo en ambos lados de (5.1.2.4) se verifica que ninguna raíz  $\lambda$  de (5.1.2.5) puede tener módulo  $\leq 1$ . Cada una de ellas es entonces compatible con aquella obtenida en (5.1.1.9) y (5.1.1.10), así es que las soluciones  $h_j$  del sistema de ecuaciones lineales (5.1.2.3) son

$$h_j = -a(d+3) \quad j = 0, 1, \dots, d-1 \quad (5.1.2.6)$$

**Observación.** Sea

$$Q(z_2) = \sum_{j=0}^d z_2^j. \quad (5.1.2.7)$$

Entonces, para  $k = 1, \dots, d+1$ , el valor propio inferior derecho de (5.1.5) en  $p_k$  es no nulo y su valor puede escribirse como

$$\begin{aligned} a \cdot Q(\lambda\omega^k) &= a \left( 1 + \sum_{j=1}^d \lambda^j \omega^{kj} \right) = a \frac{\lambda^{d+1} - 1}{\lambda\omega^k - 1} \\ &= -a(d+1)(d+2) \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda\omega^k - 1} \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se sigue del hecho de que  $\lambda$  es una raíz de (5.1.2.5). Los puntos  $p_k$  son efectivamente singularidades simples.

**Lema 5.1.2** El espacio de campos  $(d+1)$ -homogéneos in  $\mathbb{C}^3$ , contiene una subvariedad casi-proyectiva no vacía  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_1$  definida por las ecuaciones (5.1.1.2), (5.1.1.3), (5.1.1.8), (5.1.1.9), (5.1.1.11), (5.1.2.1), (5.1.2.2), (5.1.2.4) y por las condiciones abiertas (5.1.1.1), (5.1.1.4), (5.1.1.10) y (5.1.1.12).  $\mathcal{V}$  consiste de campos de vectores  $\{W\}$  en  $\mathcal{V}_1$  (del **Lema 5.1.1**) tales que, en cada punto singular, la parte lineal de  $\mathcal{F}_W$  tiene valor propio normal a  $E$  no nulo y doble. Cada componente irreducible no vacía de  $\mathcal{V}$  es de codimensión a lo más  $(d^2 + 13d + 20)/2$  en  $\mathbb{P}W$ .

*Demostración.* La afirmación estará probada si exhibimos un elemento en  $\mathcal{V}$ . Sea  $\lambda$  que satisface (5.1.2.4),  $\omega = e^{2\pi i/(d+1)}$ ,  $a \neq 0$  y  $l_{0,d} \neq 0$ .

Sea  $H(x_1, x_2, x_3) = -a(d+3) \sum_{j=0}^{d-1} x_1^j x_2^{d-j} - ax_1^d$ . Entonces el campo de vectores

$$\begin{aligned} W^H(x_1, x_2, x_3) &= [x_1 H - (ax_2^{d+1} + l_{0,d} x_3^{d+1})] \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &+ [x_2 H - ax_1^d x_2 - \lambda^{-1} l_{0,d} x_3^{d+1}] \frac{\partial}{\partial x_2} \\ &+ x_3 [H + a \sum_{j=1}^d \lambda^j x_2^j x_1^{d-j}] \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (5.1.2.8)$$

pertenece a  $\mathcal{V}$ . □

### 5.1.3 Condiciones de no-semisimplicidad

En esta sección mostraremos que el espacio proyectivo de campos de vectores polinomiales  $\{V\}$  en  $\mathbb{C}^3$ , con componentes homogéneas no nulas solamente en grados  $d+1$  y  $d+2$ , contiene una subvariedad casi-proyectiva no vacía  $\mathcal{W}_1$  formada por campos de vectores que satisfacen las condiciones (i) a (v) de la **Definición 5.1.1**.

Consideramos ahora un campo  $(d+2)$ -homogéneo

$$\begin{aligned}\hat{W} &= \sum_{m=1}^3 \hat{W}_m \frac{\partial}{\partial x_m} \\ &= \sum_{i+j+k=d+2} a_{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &\quad + \sum_{i+j+k=d+2} b_{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k \frac{\partial}{\partial x_2} \\ &\quad + \sum_{i+j+k=d+2} c_{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k \frac{\partial}{\partial x_3}\end{aligned}\tag{5.1.3.1}$$

la suma  $V = W^H + \hat{W}$  y la foliación adaptada  $\mathcal{F}_{\hat{V}}$  en  $\tilde{\mathbb{C}}^3$  inducida por  $V$  y la explosión en 0 (5.1.2). Esta foliación está generada por el campo de vectores

$$\tilde{V}(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{z_1^d} (D\sigma)^{-1} V(z_1, z_1 z_2, z_1 z_3)\tag{5.1.3.2}$$

La parte lineal de  $\mathcal{F}_{\hat{V}}$  restringida a  $\mathcal{L}$  es muy similar a (5.1.5), excepto por la primera columna

$$\begin{pmatrix} W_1^H(1, z_2, 0) & 0 & 0 \\ \hat{W}_2 - z_2 \hat{W}_1(1, z_2, 0) & (d+2)az_2^{d+1} - a & \frac{\partial X_2}{\partial z_2}(z_2, 0) \\ \hat{W}_3(1, z_2, 0) & 0 & az_2^{d+1} + q_{0,0} + \sum_{i=1}^d q_{i,0} z_2^i \end{pmatrix}$$

Por simplicidad, sean

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{21}(z_2) &= \hat{W}_2 - z_2 \hat{W}_1(1, z_2, 0) \\ \tilde{W}_3(z_2) &= \hat{W}_3(1, z_2, 0)\end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $W^H$  está en la subvariedad  $\mathcal{V}$  definida en el **Lema 5.1.2**, entonces, las partes lineales  $D\tilde{V}$  en cada  $p_k$  están dadas, respectivamente, por

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ \tilde{W}_{21}(0) & -a & 0 \\ \tilde{W}_3(0) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } p_0 = (0, 0, 0)\tag{5.1.3.3}$$

$$\begin{pmatrix} -a(d^2 + 3d + 2) & 0 & 0 \\ \tilde{W}_{21}(1) & a(1+d) & \frac{\partial X_2}{\partial z_2}(1, 0) \\ \tilde{W}_3(1) & 0 & -a(d^2 + 3d + 2) \end{pmatrix} \quad \text{en } p_{d+1} = (0, 1, 0)\tag{5.1.3.4}$$

y

$$\begin{pmatrix} a(1+d) & 0 & 0 \\ \tilde{W}_{21}(\omega^k) & a(1+d) & \frac{\partial X_2}{\partial z_2}(\omega^k, 0) \\ \tilde{W}_3(\omega^k) & 0 & a(1 + \sum_{j=1}^d \lambda^j \omega^{kj}) \end{pmatrix} \quad \text{en } p_k = (0, \omega^k, 0), \quad k = 1, \dots, d\tag{5.1.3.5}$$

De modo que las condiciones necesarias y suficientes para que  $D\tilde{V}$  sea no-semisimple en cada singularidad  $p_\alpha$  son, respectivamente,

$$\tilde{W}_{21}(0) \neq 0 \quad \text{para } p_0 = (0, 0, 0), \quad (5.1.3.6)$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial z_3}(1, 0) \cdot \tilde{W}_3(1) \neq 0 \quad \text{or} \quad [-a(d^2 + 3d + 2) + a(d + 1)] \tilde{W}_3(1) \neq 0$$

$$\text{para } p_{d+1} = (0, 1, 0), \quad (5.1.3.7)$$

y

$$\frac{\partial X_2}{\partial z_3}(\omega^k, 0) \cdot \tilde{W}_3(\omega^k) + \tilde{W}_{21} \cdot [a(1 + d) - a(1 + \sum_{j=1}^d \lambda^j \omega^{kj})] \neq 0$$

$$\text{para } p_k = (0, \omega^k, 0), \quad k = 1, \dots, d \quad (5.1.3.8)$$

**Observación.** Es claro que tenemos dos valores propios distintos en (5.1.3.3) y en (5.1.3.4). En (5.1.3.5) no es necesariamente el caso; de hecho, si regresamos a (5.1.2.7), encontramos que son distintos si y sólo si las condiciones

$$Q(\lambda \omega^j) = 1 + \sum_{j=1}^d \lambda^j \omega^{kj} \neq d + 1$$

se satisfacen para todo  $j \in \{1, \dots, d\}$ .

De cualquier manera, es claro que, una vez que la parte  $(d + 1)$ -homogénea ha sido escogida en  $\mathcal{V}$ , siempre es posible encontrar polinomios (5.1.3.1) que satisfagan las condiciones (5.1.3.6), (5.1.3.7) y (5.1.3.8).

**Definición 5.1.3.1** Denotaremos por  $\mathcal{W}_1$  a la variedad casi-proyectiva obtenida al intersectar  $\mathcal{V}$  con el abierto que definen las condiciones (5.1.3.6), (5.1.3.7) y (5.1.3.8).

Entonces, hemos probado el siguiente

**Lema 5.1.3.2** La variedad casi-proyectiva  $\mathcal{W}_1$  es no vacía en el espacio proyectivo de campos de vectores polinomiales  $\{V\}$  en  $\mathbb{C}^3$ , con componentes homogéneas no nulas solamente en grados  $d + 1$  y  $d + 2$ .

Para cada  $V \in \mathcal{W}_1$ , la foliación adaptada  $\mathcal{F}_V$  satisface las condiciones (i) a (v) en el conjunto singular  $Z = \{p_0 = (0, 0, 0), p_k = (0, \omega^k, 0); k = 1, \dots, d + 1\}$  y línea escogida  $\mathcal{L} : (z_1 = z_3 = 0)$  en las coordenadas (5.1.2). Cada componente irreducible no vacía es de codimensión a lo más  $(d^2 + 13d + 20)/2$ .  $\square$

Es decir, la componente homogénea de grado  $d + 1$  de los campos  $V \in \mathcal{W}_1$  está en  $\mathcal{V}$  (del Lema 5.1.2) y la componente homogénea de grado  $d + 2$  satisface las condiciones abiertas (5.1.3.6), (5.1.3.7) y (5.1.3.8).

**Observación.** Si pudiésemos eliminar las  $2(d + 2)$  condiciones requeridas para escoger la línea invariante y las singularidades en ella, entonces la codimensión de la familia así definida sería  $d^2 + 3d + 3$ .

#### 5.1.4 Existencia de gérmenes sin separatriz

En esta subsección, finalmente probaremos que la familia  $\mathcal{W}$  de la **Definición 5.1.1** es no vacía y que todo germen en 0 de campo de vectores en  $\mathbb{C}^3$ , de multiplicidad algebraica  $d+1$  cuyo  $(d+2)$ -jet pertenece a  $\mathcal{W}$ , no tiene separatriz por 0.

Comenzaremos probando la propiedad de no existencia de separatrices. Esta prueba utilizará conceptos y resultados contenidos en el Apéndice.

Después probaremos que  $\mathcal{W}$  es no vacía, demostrando que, a cada campo de vectores en la variedad casi-proyectiva  $\mathcal{W}_1$  de la **Definición 5.1.3.1**, siempre es posible imponerle una condición adicional, que garantiza que este campo de vectores pertenece a  $\mathcal{W}$  (ver la **Observación 5.1.4.3**).

**Teorema 5.1.4.1** Si un campo de vectores  $V$  pertenece a la familia  $\mathcal{W}$  (5.1.1) entonces toda separatriz de  $\mathcal{F}_V$  por algún punto singular  $p \in Z$  está contenida en  $E$ .

Este teorema es la clave para probar el siguiente teorema de no existencia de separatrices, del mismo modo en que la **Proposición 4.4** lo fue en la prueba del **Teorema 4.5**.

**Teorema 5.1.4.2** Sea  $X$  un germen de campo de vectores holomorfo en  $0 \in \mathbb{C}^3$ , de multiplicidad algebraica  $d+1$ , cuyo  $(d+2)$ -jet pertenece a la familia  $\mathcal{W}$  definida en (5.1.1). Entonces  $X$  no tiene separatriz por el 0.

*Demostración.* El argumento es muy similar al que prueba el **Teorema 4.5**: sea  $\mathcal{F}_1$  la foliación adaptada en  $\mathbb{C}^3$  inducida por  $X$  y la explosión en 0. El divisor excepcional  $E$  es invariante por  $\mathcal{F}_1$  y, por la **Observación 5.2** (inciso 3), el conjunto singular  $\text{Sing}(\mathcal{F}_1)$  es precisamente el conjunto  $Z$  de puntos aislados del **Lema 5.1.1**. Por el **Teorema 5.1.4.1**, todas las separatrices por los puntos singulares de  $\mathcal{F}_1$  están contenidas en  $E$ . Una separatriz de  $X$  por 0 se levanta en una separatriz de  $\mathcal{F}_1$  por algún punto singular de  $\mathcal{F}_1$  |  $E$  pero no contenida en  $E$ ; así es que  $X$  no puede tener una separatriz por 0.  $\square$

*Demostración del Teorema 5.1.4.1* De acuerdo a las distintas elecciones de las parejas de valores propios repetidos y las correspondientes condiciones de no-semisimplicidad, la prueba se dividirá en tres casos principales: el primero corresponde a la singularidad múltiple en  $p_0$ ; el segundo, a la singularidad simple en  $p_{d+1}$  y, las singularidades simples restantes  $\{p_1, \dots, p_d\}$  al tercero.

**Caso 1.** Comenzamos con  $p_0$ . Sujeto a la condición (5.1.3.6), existe un sistema coordenado en el que (5.1.3.3) está en forma canónica de Jordan y en el que podemos escribir al generador  $Y$  de  $\mathcal{F}_V$  en la forma

$$Y(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (\zeta_1 \cdot (-a + h_1), \zeta_1 - a\zeta_2 + h_2, \zeta_3 h_3)$$

donde  $\deg h_1 \geq 1$ ,  $\deg h_3 \geq 1$ ,  $\deg h_2 \geq 2$

Los espacios propios asociados a los valores propios  $-a$  y 0 son  $r_0 = [0, 0, 1]$  y  $r_1 = [0, 1, 0]$  respectivamente, por el **Lema 3.3.1** son singularidades de la foliación adaptada  $\mathcal{F}_V$  restringida al nuevo divisor excepcional  $E_1$ .

Sean  $(y_1, y_2, y_3)$  coordenadas en una vecindad de  $r_0$  tales que

$$\sigma(y_1, y_2, y_3) = (y_1 y_3, y_2 y_3, y_3) = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \quad (5.1.4.1)$$

La foliación  $\mathcal{F}_{\tilde{Y}}$  está adaptada al divisor  $D_0 = E_0^1 + E_1$ , donde  $E_0^1$  denota al transformado estricto de  $E$  bajo  $\sigma$ .  $D_0$  está dado en estas coordenadas por  $y_1 y_3 = 0$ , y la foliación está generada por

$$(D\sigma)^{-1}Y = (y_1 \cdot (-a + y_3 H_1 - H_3), y_1 - a y_2 + y_3 H_2 - y_2 H_3, y_3 H_3)$$

donde  $H_1 = y_3^{-1} h_1$ ,  $H_2 = y_3^{-2} h_2$ , y  $H_3 = y_3^{-1} h_3$ . Después de dividir entre  $-a$  se ve de esta última expresión que  $r_0$  es una esquina simple con  $\beta = 0$ .

Sean ahora  $(x_1, x_2, x_3)$  coordenadas en una vecindad de  $r_1$  tales que

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2, x_3 x_2) = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \quad (5.1.4.2)$$

En estas coordenadas  $D_0$  está dado por  $x_1 x_2 = 0$  y la foliación adaptada está generada por

$$(D\sigma)^{-1}Y = (x_1(-x_1 + x_2(G_1 - G_2)), x_2(-a + x_1 + x_2 G_2), x_3(a - x_1 + x_2 x_3(G_3 - G_2)))$$

donde ahora  $G_1 = x_2^{-1} h_1$ ,  $G_2 = x_2^{-2} h_2$ , y  $G_3 = x_2^{-1} h_3$ . Nuevamente, después de dividir entre  $-a$ , se ve de esta última expresión que  $r_1$  es una esquina simple con  $\beta = 0$ .

**Caso 2.** Consideremos ahora el punto  $p_d$ . Sujeto a la segunda condición de (5.1.3.7), escribimos (5.1.3.4) en forma canónica de Jordan. Siguiendo las convenciones adoptadas en el Caso 1 respecto a las funciones  $h_j$ , consideramos ahora el campo de vectores

$$Y(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (\zeta_1 \cdot (e_2 + h_1), e_3 \zeta_2 + h_2, \zeta_1 + e_2 \zeta_3 + \zeta_3 h_3)$$

donde  $e_2 = -a(d^2 + 3d + 2)$ ,  $e_3 = a(d + 1)$

donde, abusando de la notación, hemos denotado a las coordenadas y al campo de vectores como en el Caso 1.

Una vez más, en estas coordenadas los espacios propios asociados a los valores propios  $e_2$  y  $e_3$  son  $r_0 = [0, 0, 1]$  y  $r_1 = [0, 1, 0]$  respectivamente.

La foliación  $\mathcal{F}_{\tilde{Y}}$  está adaptada al divisor  $D_d = E_0^1 + E_d$ , donde  $E_0^1$  denota al transformado estricto de  $E$  bajo  $\sigma$  y  $E_d$  denota al nuevo divisor excepcional, como en el Caso 1.

En una vecindad de  $r_0$ , usamos las coordenadas (5.1.4.1). El divisor  $D_d$  está dado por  $y_1 y_3 = 0$  y la foliación  $\mathcal{F}_{\tilde{Y}}$  está generada por

$$(D\sigma)^{-1}Y = (y_1(-y_1 + y_3(H_1 - H_3)), (e_3 - e_2)y_2 - y_1 y_2 + y_3(H_2 - y_2 H_3), y_3(e_2 + y_1 + y_3 H_3))$$

con los  $H_j$ 's definidos en el Caso 1. Después de dividir entre  $e_2$  se ve de ésta última expresión que  $r_0$  es una esquina simple con  $\beta = 0$ .

Para  $r_1$  usamos las coordenadas (5.1.4.2). El divisor  $D_d$  está dado por  $x_1 x_2 = 0$  y la foliación está generada por

$$(D\sigma)^{-1}Y = (x_1[(e_2 - e_3) + x_2(G_1 - G_2)], x_2(e_3 + x_2 G_2), x_1 + (e_2 - e_3)x_3 + x_2 x_3(H_3 - H_2))$$

con los  $G_j$ 's definidos en el Caso 1. Dividiendo entre  $e_2 - e_3$  obtenemos que  $r_1$  es una esquina simple con  $\beta = -(1/d + 1)$ .

**Caso 3.** Consideremos ahora los puntos  $\{p_1, \dots, p_d\}$ . Por simplicidad denotemos los valores propios de (5.1.3.5) por  $e_3 = a(d+1)$  y  $c_k = a \cdot \mathbf{Q}(\lambda\omega^k) = a(1 + \sum_{j=1}^d \lambda^j \omega^{kj})$ . Para cada  $k \in \{1, \dots, d\}$ , la posición relativa de  $(d+1)$  y  $\mathbf{Q}(\lambda\omega^k)$  en el plano complejo determina distintas *formas normales* que procedemos a considerar. Para dar fluidez a la prueba, estos conceptos y resultados se detallarán en el **Apéndice**.

Por supuesto, esta discusión se hace necesaria porque desconocemos los valores de los  $c_k$ .

**Caso 3.1.** Si  $e_3 = c_k$  para alguna  $k \in \{1, \dots, d\}$ , entonces la condición (5.1.3.8) de no-semisimplicidad pasa a ser alguna de las siguientes

$$\tilde{W}_{21}(\omega^k), \tilde{W}_3(\omega^k), \text{ ó } \frac{\partial X_2}{\partial z_3}(\omega^k, 0) \neq 0 \quad (5.1.4.3)$$

Como la condición (iv) debe satisfacerse, estamos forzados a escoger la primera o la segunda. Tomemos la primera. Después de un cambio de coordenadas alrededor de  $p_k$ , podemos suponer que la foliación  $\mathcal{F}_Y$  está generada por un campo de la forma

$$Y(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (\zeta_1 \cdot (e_3 + h_1), \zeta_1 + e_3\zeta_2 + h_2, \zeta_3 \cdot (e_3 + h_3)) \quad (5.1.4.4)$$

El campo  $Y$  es *linealizable* dejando a  $E$  invariante (ver la **Observación A4** y el **Corolario A5**, en el **Apéndice**). El campo lineal obtenido puede ser integrado explícitamente y, por la condición elegida en (5.1.4.3), concluimos que toda separatriz de  $Y$  está contenida en  $E$ .

**Caso 3.2.** Cuando  $e_3$  y  $c_k$  son diferentes, la situación es similar a la del Caso 2: siguiendo la notación de los casos precedentes, un cambio de coordenadas nos permite suponer que la foliación está generada por un campo de la forma

$$Y(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (\zeta_1 \cdot (e_3 + h_1), \zeta_1 + e_3\zeta_2 + h_2, \zeta_3 \cdot (c_k + h_3)) \quad (5.1.4.5)$$

En estas coordenadas, los espacios propios asociados a los valores propios  $e_3$  y  $c_k$  son  $r_1 = [0, 1, 0]$  y  $r_0 = [0, 0, 1]$  respectivamente. La foliación  $\mathcal{F}_Y$  está adaptada al divisor  $D_k$ , definido de manera análoga a los casos anteriores.

En la notación del Caso 2, alrededor de  $r_1$  y  $r_0$ , el divisor  $D_k$  está dado, respectivamente, por  $x_1x_2 = 0$  y  $y_1y_3 = 0$ .

Alrededor de  $r_1 = [0, 1, 0]$ , la foliación está generada por

$$(D\sigma)^{-1}Y = (x_1[-x_1 + x_2(G_1 - G_2)], x_2[e_3 + x_1 + x_2G_2], x_3[(c_k - e_3) - x_1 + x_2(G_3 - G_2)])$$

Dividiendo entre  $e_3$  se obtiene que  $r_1$  es una esquina simple con  $\beta = 0$ .

El generador alrededor de  $r_0 = [0, 0, 1]$  es

$$(D\sigma)^{-1}Y = (y_1[(e_3 - c_k) + y_3(H_1 - H_3)], y_1 + (e_3 - c_k)y_2 + y_3(H_2 - y_2H_3), y_3[c_k + y_3H_3]) \quad (5.1.4.6)$$

Sea  $A = \{e_3, c_k\} \subset \mathbb{C}$ . Si  $A$  está en el Dominio de Siegel ( $e_3/c_k \in \mathbb{R}^-$ ), dividiendo entre  $c_k$  en (5.1.4.6) se obtiene una expresión que muestra que  $\eta_0$  es una esquina simple con  $\beta = (e_3 - c_k)/c_k \in \mathbb{R}^-$

Si  $A$  está en el Dominio de Poincaré, se tienen dos casos principales:

**Caso no resonante**. Por el **Corolario A5**, el campo de vectores (5.1.4.5) es *linealizable manteniendo al divisor  $E$  invariante* y el campo lineal así obtenido puede integrarse explícitamente. Todas sus separatrices están contenidas en  $E$ .

**Caso resonante**. Solamente hay dos tipos posibles de resonancias:

$$[\text{R1}] \quad c_k = ne_3 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$[\text{R2}] \quad e_3 = rc_k \text{ para algún } r \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

y la segunda fue explícitamente excluida de  $\mathcal{W}$  (en la condición (vi) de la **Definición 5.1.1**. Tan pronto concluyamos la prueba del **Teorema 5.1.4.1**, explicaremos la razón de esta exclusión).

Si alguna resonancia del tipo [R1] ocurre, entonces  $\eta_0$  es una esquina simple con  $\beta = (1/n) - 1 \in \mathbb{R}^-$ .

Este último cálculo concluye la prueba del **Teorema 5.1.4.1**. □

Consideremos el tipo resonante [R2] del párrafo anterior. Si

$$e_3 = rc_k \tag{5.1.4.7}$$

para algún  $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , mostraremos que existen separatrices que no están contenidas en el divisor excepcional  $E$ . De hecho, en la situación (5.1.4.7), el generador (5.1.4.5) puede reescribirse como

$$Y = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 1 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \cdot h_1 \\ h_2 \\ \zeta_3 \cdot h_3 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}) \tag{5.1.4.8}$$

Sea  $A = A\zeta$  la parte lineal del campo  $Y$  anterior. Las referencias contenidas en la siguiente discusión se encuentran en el Apéndice. Por el **Lema A3**, el único monomio **P**-resonante asociado a la ecuación homológica (A.5) es  $\zeta_3^r \frac{\partial}{\partial \zeta_3}$ . Aplicando la **Proposición A**, obtenemos que  $Y$  es analíticamente conjugado, manteniendo invariante al plano  $E : (\zeta_1 = 0)$ , con el campo de vectores

$$Y_c = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 1 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_3^r \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.4.9}$$

El cambio de coordenadas holomorfo

$$F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (\zeta_1 + \zeta_3^r, \zeta_2, \zeta_3) = (w_1, w_2, w_3)$$

conjugará ahora a  $Y_c$  con el campo lineal  $A$ , pero lleva al plano invariante  $E : (\zeta_1 = 0)$  sobre la superficie invariante  $S : (w_1 - w_3^r = 0)$ .

El campo de vectores lineal  $Aw$  tiene separatrices en el plano invariante  $w_1 = 0$  que no están contenidas en  $S$ .

**Observación 5.1.4.3** No estamos en posición de determinar si resonancias del tipo (5.1.4.7) aparecen en nuestros ejemplos porque no podemos calcular las raíces de (5.1.2.5). Sin embargo, es posible asegurar que este tipo de resonancias no aparecerán si hacemos una elección conveniente de la raíz  $\lambda$  de (5.1.2.5).

Primero mostraremos que, para cada elección de  $\lambda$ , existe a lo más una resonancia del tipo (5.1.4.7).

**Lema 5.1.4.4** Si  $e_3 = r\omega^k$  para alguna  $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , y alguna  $k \in \{1, \dots, d\}$ , entonces  $k$  es única.

*Demostración.* Supongamos que existen  $j \in \{1, \dots, d\}$  y  $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , tales que  $s(\lambda\omega^j - 1)/(\lambda\omega^j - 1) = d+1$ , entonces  $(\lambda\omega^k - 1)/(\lambda\omega^j - 1) = r/s \in \mathbb{Q}^+$  lo que implica que  $(\lambda\omega^k - 1)$  y  $(\lambda\omega^j - 1)$  tienen el mismo argumento (mod  $2\pi$ ). Por un lado, ambos están en el círculo centrado en  $-1$  de radio  $|\lambda| > 1$  y  $0 \in \Delta(-1, |\lambda|)$ . Es decir, que estos dos puntos son el mismo y  $j = k$ .  $\square$

Ahora probaremos la afirmación de la **Observación 5.1.4.3**:

$$r \cdot \mathbf{Q}(\lambda\omega^k) = d + 1 \quad \text{para algún } r \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \text{ y alguna } k \in \{1, \dots, d\} \\ \text{si y sólo si} \\ \lambda = (1 + r(d+2))/(\omega^k + r(d+2))$$

Este último es un número complejo cuya parte real es positiva para toda elección de  $r, k$  y  $d$  y nuestro cálculo muestra que, si se tiene una resonancia (5.1.4.7), entonces la raíz  $\lambda$  que escogimos necesariamente tiene parte real positiva.

Si  $(1 + r(d+2))/(\omega^k + r(d+2))$  no es raíz de (5.1.2.4) -algo ciertamente difícil de determinar- entonces la resonancia (5.1.4.7) no puede aparecer. Pero si lo fuera, entonces todo lo que tenemos que hacer es escoger  $\lambda$  con parte real negativa. Esta raíz siempre existe pues la suma de las raíces de (5.1.2.5) es igual a  $-1$  (porque el coeficiente de  $x^{d-1}$  en (5.1.2.5) es 1). En particular, si el grado  $d$  es impar, entonces la raíz real negativa de (5.1.2.4) es una buena elección.

La discusión anterior demuestra el

**Teorema 5.1.4.5** La familia  $\mathcal{W}$  de la **Definición 5.1.1** es no vacía.

**Observación.** Aunque  $\mathcal{W}$  es de dimensión grande, solamente hay un grado de libertad en el cálculo anterior ( $\lambda \in \mathbb{C}$  que satisface (5.1.2.4)). Muchas variables libres en  $\mathcal{W}$  nunca aparecieron (por ejemplo, los  $h_{i,j,k}$ ,  $k > 0$ ).

## 5.2 Familias en $\mathbb{C}^4$

En esta sección describiremos una subvariedad casi-proyectiva  $\mathcal{Y}$  de campos de vectores 2-homogéneos  $\{Y\}$  en  $\mathbb{C}^4$ , que satisface parcialmente las condiciones (a) y (b) del subconjunto  $\mathcal{V}$  de la **Definición 4.1**.

Primero indicaremos cómo pueden obtenerse condiciones algebraicas que garantizan que el conjunto singular de la foliación adaptada  $\mathcal{F}_1$  consta de 5 puntos singulares aislados en el divisor excepcional  $E \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ ,  $\{q_1 = [1, 0, 0, 0], \dots, q_4 = [0, 0, 0, 1], q_5 =$

$[1, 1, 1, 1]$ ], cada uno de multiplicidad 3 y que la parte lineal de  $\mathcal{F}_1$  en cada uno de ellos satisface las condiciones de valor propio repetido de la **Definición 4.1**. Posteriormente utilizaremos la acción del grupo proyectivo para engrosar este conjunto algebraico.

Un campo de vectores 2-homogéneo  $Y$  en  $\mathbb{C}^4$  es un campo de vectores de la forma

$$Y = \sum a_{j,k} z_j z_k \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum b_{j,k} z_j z_k \frac{\partial}{\partial z_2} + \sum c_{j,k} z_j z_k \frac{\partial}{\partial z_3} + \sum d_{j,k} z_j z_k \frac{\partial}{\partial z_4} \quad (5.2.1)$$

donde  $a_{j,k}, b_{j,k}, c_{j,k}, d_{j,k} \in \mathbb{C}$  y los subíndices en las sumas varían entre  $1 \leq j \leq k \leq 4$ . El conjunto  $\{Y\}$  de campos de vectores 2-homogéneos tiene una estructura natural de  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial, con espacio proyectivo asociado  $\Sigma \simeq \mathbb{P}^{39}$ .

Por la sucesión de Euler torcida, un campo  $Y \in \Sigma$  induce una foliación  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol(1, \mathbb{C}\mathbb{P}^3) \simeq \mathbb{P}^{35}$  con 15 puntos singulares aislados, contando multiplicidad.

Procedemos ahora a escribir, explícitamente, las condiciones de multiplicidad y valor propio repetido en  $q_1$ , en las variables  $\{a_{j,k}, b_{j,k}, c_{j,k}, d_{j,k}\}$ .

En las coordenadas (3.1.3),  $m = 4$  y  $k = 1$ , el divisor excepcional  $E$  está dado por  $(z_1 = 0)$  y el punto  $q_1$  por  $(0, \dots, 0)$ .

El generador  $Y_1$  de la foliación  $\mathcal{F}_1$  adaptada a  $Y$  es singular en  $q_1$ , si y sólo si

$$b_{1,1} = c_{1,1} = d_{1,1} = 0, \quad (5.2.2)$$

condiciones que supondremos en adelante. Podemos entonces escribir

$$Y_1(z) = A(z) + Q(z) - g(z) R(z) \quad (5.2.3)$$

donde la parte lineal  $A$  es

$$A(z) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{1,2} - a_{1,1} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ 0 & c_{1,2} & c_{1,3} - a_{1,1} & c_{1,4} \\ 0 & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} - a_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

la parte cuadrática  $Q$  es

$$Q(z) = \begin{pmatrix} z_1 (a_{1,2} z_2 + a_{1,3} z_3 + a_{1,4} z_4), \\ (-a_{1,2} + b_{2,2}) z_2^2 + b_{3,4} z_3 z_4 + z_2 ((-a_{1,3} + b_{2,3}) z_3 + (-a_{1,4} + b_{2,4}) z_4), \\ (-a_{1,3} + c_{3,3}) z_3^2 + (-a_{1,4} + c_{3,4}) z_3 z_4 + z_2 ((-a_{1,2} + c_{2,3}) z_3 + c_{2,4} z_4), \\ (-a_{1,3} + d_{3,4}) z_3 z_4 + (-a_{1,4} + d_{4,4}) z_4^2 + z_2 (d_{2,3} z_3 + (-a_{1,2} + d_{2,4}) z_4) \end{pmatrix} \\ = \sum_{j=1}^4 Q_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \quad (5.2.5)$$

y la parte cúbica es

$$-g(z)R(z) = -(a_{2,3} z_2 z_3 + a_{2,4} z_2 z_4 + a_{3,4} z_3 z_4) \begin{pmatrix} -z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^4 C_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \quad (5.2.6)$$

Observe que  $(z_1 = 0)$  es invariante por  $Y_1$ . Se sigue de (5.2.4) que

$$\mu(\mathcal{F}_1, q_1) \geq 2 \iff \begin{vmatrix} b_{1,2} - a_{1,1} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ c_{1,2} & c_{1,3} - a_{1,1} & c_{1,4} \\ d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} - a_{1,1} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.2.7)$$

porque buscamos que el valor propio normal  $a_{1,1}$  sea no nulo.

Si suponemos esta última condición, entonces la condición de valor propio normal repetido con alguno de los tangentes se escribe, desarrollando el polinomio característico correspondiente, como

$$7 a_{1,1}^2 - b_{1,3} c_{1,2} + b_{1,2} c_{1,3} - b_{1,4} d_{1,2} - c_{1,4} d_{1,3} - 3 a_{1,1} (b_{1,2} + c_{1,3} + d_{1,4}) + b_{1,2} d_{1,4} + c_{1,3} d_{1,4} = 0 \quad (5.2.8)$$

Las condiciones de multiplicidad mayor o igual a 3 pueden describirse del siguiente modo: por simplicidad, denotemos por  $X$  al generador de  $\mathcal{F}_1|_{E \simeq \mathcal{F}}$  y sean  $z = (z_2, z_3, z_4)$  coordenadas con  $z(q_1) = 0$

$$X(z) = \sum_{j=2}^4 Y_{1j}(0, z) \frac{\partial}{\partial z_j} = \sum_{j=2}^4 X_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \quad (5.2.9)$$

La idea es la siguiente: si suponemos que dos de las tres hipersuperficies  $(X_j = 0)$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$  son transversales en  $q_1 = 0$ , podemos tomar como variable local  $u$  a la curva (lisa) que define su intersección. Usando el teorema de la función implícita podemos calcular el germen  $\alpha(u)$  de esta curva (hasta el jet que sea necesario), de modo que la intersección de  $\alpha$  con la hipersuperficie restante  $X_k$ , ( $k \neq j$ ) se expresa como una serie de potencias

$$X_k(\alpha(u)) = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots \quad (5.2.10)$$

en  $u$  (un polinomio, para fines prácticos) con un cero de cierto orden  $\text{ord}(X, 0)$  en  $u = 0$ . Es fácil ver que  $\mu(\mathcal{F}_1, q_1) = \text{ord}(X, 0)$  y en consecuencia

$$a_k = 0, j = 1, \dots, k \iff \mu(\mathcal{F}_1, q_1) \geq k + 1.$$

Para llevar a cabo el plan anterior, suponemos que las hipersuperficies  $X_j = 0$ ,  $j = 2, 3$ , son transversales en 0. De (5.2.4), esto equivale a suponer que

$$D_{23} = \begin{vmatrix} b_{1,2} - a_{1,1} & b_{1,3} \\ c_{1,2} & c_{1,3} - a_{1,1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.2.11)$$

y que podemos tomar  $u = z_4$  como parámetro local. Es fácil ver que nos basta calcular el 2-jet de  $\alpha$  para conocer al coeficiente  $a_2$  de (5.2.10). Sean

$$F(z) = (X_2(z), X_3(z), z_4), \quad S = (dF_0)^{-1}$$

y sea  $F_2(z) = (Q_2(z), Q_3(z), 0)$  la parte cuadrática de  $F(z)$ , formada por las componentes segunda y tercera de (5.2.5). Por el teorema de la función implícita (o mejor dicho, por su prueba), se sigue que el 2-jet  $\alpha_2(u)$  de la intersección está dado por

$$\begin{aligned} \alpha_2(u) &= S(0, 0, u) - (S \circ F_2 \circ S)(0, 0, u) \\ &= D_{23}^{-1} (D_{34}, D_{23}) u - (S \circ F_2) \circ (D_{23}^{-1} (D_{34}, -D_{24}, D_{23}) u) \\ &= v_1 \cdot u - D_{23}^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,3} - a_{1,1} & -b_{1,3} & D_{34} \\ -c_{1,2} & b_{1,2} & -D_{24} \\ 0 & 0 & D_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_2(v_1) \\ Q_3(v_1) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u^2 \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

donde

$$D_{34} = \begin{vmatrix} b_{1,3} & b_{1,4} \\ c_{1,3} - a_{1,1} & c_{1,4} \end{vmatrix}; \quad D_{24} = \begin{vmatrix} b_{1,2} - a_{1,1} & b_{1,4} \\ c_{1,2} & c_{1,4} \end{vmatrix}$$

**Observación 5.2.1** Las condiciones (5.2.7) y (5.2.11) implican que el vector  $(D_{34}, -D_{24}, D_{23})$  está en el núcleo de  $A$ .

Por último, evaluando la expresión final de  $\alpha_2(u)$  en  $X_4(z)$  se obtiene la expresión de los coeficientes (5.2.10)

$$\begin{aligned} X_4(\alpha_2(u)) &= (D_{34}, -D_{24}, D_{23})\alpha_2(u) + Q_4(\alpha_2(u)) - g(\alpha_2(u)) \cdot \alpha_2(u) \\ &= ((D_{34}, -D_{24}, D_{23}) \cdot v_1) u - ((D_{34}, -D_{24}, D_{23}) \cdot v_2) u^2 + (Q_4(v_1 - v_2 u)) u^2 \\ &= a_1 u + ((D_{34}, -D_{24}, D_{23}) \cdot v_2 + Q_4(v_1)) u^2 + \mathcal{O}(u^3) \\ &= a_1 u + a_2 u^2 + \mathcal{O}(u^3) \end{aligned}$$

Manipulando un poco las expresiones anteriores para  $a_1$  y  $a_2$ , puede verse que  $a_1$  es igual al producto de los determinantes (5.2.7) y (5.2.11), así que la condición (5.2.7) de multiplicidad 2 es equivalente a  $a_1 = 0$ .

De modo similar, puede verse que la condición  $a_2 = 0$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} 0 &= -D_{23}^{-1} (-C_{23} Q_2(v_1) + B_{24} Q_3(v_1)) + Q_4(v_1) \iff \\ 0 &= (C_{23}, -B_{24}, D_{23}) \cdot (Q_2(v_1), Q_3(v_1), Q_4(v_1)), \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

donde  $\cdot$  denota al producto interior real usual,

$$C_{23} = \begin{vmatrix} c_{1,2} & c_{1,3} - a_{1,1} \\ d_{1,2} & d_{1,3} \end{vmatrix}; \quad B_{24} = \begin{vmatrix} b_{1,2} - a_{1,1} & b_{1,3} \\ d_{1,2} & d_{1,3} \end{vmatrix}$$

y  $v_1$  fue definido en (5.2.12) por la relación

$$D_{23} v_1 = (D_{34}, -D_{24}, D_{23})$$

La condición (5.2.13) también puede expresarse como

$$P(D_{34}, -D_{24}, D_{23}) = 0 \quad (5.2.14)$$

donde  $P$  denota al polinomio

$$\begin{aligned} P(z_2, z_3, z_4) &= C_{23} ((-a_{1,2} + b_{2,2}) z_2^2 + b_{3,4} z_3 z_4 + z_2 ((-a_{1,3} + b_{2,3}) z_3 + (-a_{1,4} + b_{2,4}) z_4) - \\ &B_{24} ((-a_{1,3} + c_{3,3}) z_3^2 + (-a_{1,4} + c_{3,4}) z_3 z_4 + z_2 ((-a_{1,2} + c_{2,3}) z_3 + c_{2,4} z_4)) + \\ &D_{23} ((-a_{1,3} + d_{3,4}) z_3 z_4 + (-a_{1,4} + d_{3,4}) z_3^2 + z_2 (d_{2,3} z_3 + (-a_{1,2} + d_{2,4}) z_4)) \end{aligned}$$

De donde (5.2.13) es una ecuación homogénea de grado 7.

**Observación 5.2.2** Manipulando un poco en las condiciones (5.2.7) y (5.2.11), puede verse que implican que el vector  $(C_{23}, -B_{24}, D_{23})$  está en el núcleo de la matriz transpuesta  $A^t$  de  $A$ . Esto dice que el polinomio  $T(z) = C_{23}X_2(z) - B_{24}X_3(z) + D_{23}X_4(z)$  no tiene parte lineal y que su parte cuadrática es precisamente  $P(z)$ , así que la condición (5.2.14) se interpreta geoméricamente diciendo que el vector  $(D_{34}, -D_{24}, D_{23})$  está contenido en el cono tangente de  $T = 0$ . Como los ideales  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(X_2, X_3, X_4)$  e  $\mathcal{I}(X_2, X_3, T)$  coinciden, entonces la codimensión de  $\mathcal{I}$  en  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}$  es al menos 3.

Por lo tanto: si un campo de vectores 2-homogéneo  $Y$  satisface las tres condiciones lineales (5.2.2), la condición cúbica (5.2.7), la condición séptica (5.2.13) y la condición cuadrática (5.2.8), junto con las condiciones abiertas  $a_{1,1} \neq 0$  y (5.2.11), entonces la foliación  $\mathcal{F}_1$  adaptada a  $Y$  tiene un punto singular de multiplicidad al menos 3 en  $q_1$  y la parte lineal de  $\mathcal{F}_1$  en  $q_1$  tiene el valor propio normal a  $E$  repetido con alguno de los tangentes.

Sea  $\mathcal{Y}_1 \subset \Sigma$  la variedad casi proyectiva definida por condiciones análogas a las anteriores, en todos los puntos  $\{q_1 = [1, 0, 0, 0], \dots, q_4 = [0, 0, 0, 1], q_5 = [1, 1, 1, 1]\}$ . Si es no vacía, cada componente irreducible es de dimensión al menos  $39 - 30 = 9$  (porque estamos imponiendo 6 condiciones por punto). Sea  $\mathcal{Y}_2 = \text{GL}_4 \mathcal{Y}_1$  el conjunto construible obtenido por la acción del grupo lineal en  $\mathcal{Y}_1$  y sea  $\mathcal{Y}_3$  el interior  $(\overline{\mathcal{Y}_2})^\circ$  de su cerradura de Zariski. Es una variedad casi-proyectiva de dimensión al menos  $9 + 15 = 9 + 3 \cdot 5 = 24$  en  $\Sigma$  porque, para cada punto en  $\mathbb{C}P^3$ , tres condiciones lineales independientes se requieren para que sea singular.

Si  $\mathcal{Y}_1$  es no vacía, entonces la codimensión de  $\mathcal{Y}_3$  en  $\Sigma$  es al menos 15, es decir, que esencialmente basta una condición por punto singular (la de valor propio repetido) para que  $Y$  pertenezca a  $\mathcal{Y}_3$ .

## A Apéndice

Este apéndice contiene la discusión de las formas normales para los campos de vectores que aparecieron en la subsección **Existencia de gérmenes sin separatriz**. La notación y los resultados generales siguen la exposición de [1], Capítulo 5.

Consideremos (el germen en 0 de) una ecuación diferencial autónoma definida por (el germen en 0 de) un campo de vectores holomorfo

$$\dot{x} = Ax + \sum_{m \geq 2} v_m(x) \quad x \in \mathbb{C}^n \quad (\text{A.1})$$

Sean  $(x_1, \dots, x_n)$  coordenadas con respecto a la base  $(e_1, \dots, e_n)$  y  $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ . Denotemos por

$$L_A : \Xi_{(\mathbb{C}^n, 0)}^m \longrightarrow \Xi_{(\mathbb{C}^n, 0)}^m \quad (\text{A.2})$$

al operador lineal que transforma a cada campo  $m$ -homogéneo en  $\mathbb{C}^n$ , en el corchete de Poisson del campo de vectores lineal  $Ax$  con éste.

Sea  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathbb{C}^n$  y sea  $(\mathbf{m}, \phi) = \sum_{j=1}^n m_j \phi_j$ . Si  $A = \text{diag}\{\phi_j\}$  entonces  $L_A$  también es diagonal:

$$L_A(x^m e_j) = [\phi_j - (\mathbf{m}, \phi)] x^m e_j \quad (\text{A.3})$$

Y si  $A$  tiene bloques de Jordan, entonces  $L_A$  también los tiene, aunque aún en este caso sus valores propios están dados por la fórmula anterior.

Una  $n$ -ada  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathbb{C}^n$  se dice que es *resonante* si existe una relación

$$\phi_j - (\mathbf{m}, \phi) = 0$$

para algún  $j \in \{1, \dots, n\}$ ; en cualquier otro caso se dice que es *no resonante*. Un campo de vectores (A.1) se dice que es resonante (resp. no resonante) si los valores propios de  $A$  son (resp. no son) resonantes. En presencia de resonancias, el correspondiente vector propio de (A.3) se dice que es un *monomio resonante* o, simplemente, una *resonancia*.

Se dice que la  $n$ -ada  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  de valores propios de  $A$  está en el Dominio de Poincaré si  $0 \in \mathbb{C}$  no está contenido en la envolvente convexa de  $\phi$ .

**Teorema de Poincaré-Dulac** Si los valores propios  $\phi$  de la parte lineal  $A$  de un campo de vectores holomorfo en un punto singular pertenecen al dominio de Poincaré entonces, en una vecindad del punto singular, se verifica que:

1. Si  $\phi$  es no resonante, el campo de vectores es biholomórficamente equivalente al campo de vectores lineal  $A$
2. Si  $\phi$  es resonante, entonces es biholomórficamente equivalente a una *forma normal polinomial* de la forma  $A + \{\text{monomios resonantes}\}$ .

El teorema establece la existencia de una *conjugación* del campo de vectores dado, bien con su parte lineal, o con una *forma normal polinomial*.

La prueba de este teorema se divide en dos partes. La primera es la construcción formal del cambio de coordenadas deseado: para cada  $m \geq 2$ , la solución  $h_m$  de la ecuación homológica

$$L_A h_m = v_m \quad (\text{A.4})$$

asociada a (A.1) origina un cambio de coordenadas (polinomial y tangente a la identidad) que anula todos los monomios no resonantes en este  $m$  fijo. La aplicación repetida de este procedimiento da lugar a una sucesión de cambios de coordenadas cuyo producto (composición), en el límite, es el cambio de coordenadas que buscamos.

La segunda parte es la demostración de la convergencia de esta serie de potencias, bajo la hipótesis de que los valores propios pertenecen al Dominio de Poincaré.

Es decir, a lo más las resonancias no serán eliminadas por este cambio de coordenadas.

Regresamos ahora al campo de vectores  $Y$  en  $\mathbb{C}^3$ , definido en (5.1.4.8). El divisor  $(\zeta_1 = 0)$  es invariante por  $Y$ .

Construiremos una forma normal tipo Poincaré-Dulac para campos con esta propiedad, de manera que el divisor en cuestión permanezca invariante por la conjugación (siguiendo ideas de [8]).

Denotemos por  $\Xi_{(\mathbf{P},0)}^s$  al espacio de campos  $s$ -homogéneos que son tangentes al plano  $E : (\zeta_1 = 0)$ , i.e., aquellos cuya  $\frac{\partial}{\partial \zeta_1}$ -componente está en el ideal  $(\zeta_1)$ . Considere la restricción  $\widehat{L}_A$  de (A.2) a ellos.

**Lema A1**  $\widehat{L}_A$  deja invariante a  $\Xi_{(\mathbf{P},0)}^s$  para cada grado  $s$ :

$$\widehat{L}_A : \Xi_{(\mathbf{P},0)}^s \longrightarrow \Xi_{(\mathbf{P},0)}^s \quad (\text{A.5})$$

*Demostración.* Sean  $e_{lmn}^k = \zeta_1^l \zeta_2^m \zeta_3^n \frac{\partial}{\partial \zeta_k}$ ,  $k = 1, 2, 3$  y  $l + m + n = s$ . Entonces

$$L_A(e_{lmn}^k) = \begin{cases} (lr + mr + n - r)e_{lmn}^1 + me_{l+1,m-1,n}^1 - e_{lmn}^2 & \text{si } k = 1 \\ (lr + mr + n - r)e_{lmn}^2 + me_{l+1,m-1,n}^2 & \text{si } k = 2 \\ (lr + mr + n - 1)e_{lmn}^3 + me_{l+1,m-1,n}^3 & \text{si } k = 3 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Con esta notación,

$$\Xi_{(\mathbf{P},0)}^s = \{e_{lmn}^k : k = 1, 2, 3, \quad l + m + n = s \quad \text{y} \quad l \geq 1\}$$

Usando (A.6), es sencillo verificar que (A.5) es verdadera.  $\square$

Un monomio en  $\Xi_{(\mathbf{P},0)}^s$  se llamará **P-resonante** si no está en la imagen de  $\widehat{L}_A$ .

**Lema A2** Sea  $A$  la parte lineal de (5.1.4.8), y sean  $s > 1$ ,  $r > 1$  números enteros. Entonces los únicos monomios resonantes asociados a  $L_A : \Xi_{(\mathbf{C}^3,0)}^s \longrightarrow \Xi_{(\mathbf{C}^3,0)}^s$  son  $\zeta_3^r \frac{\partial}{\partial \zeta_1}$  y  $\zeta_3^r \frac{\partial}{\partial \zeta_2}$ .

*Demostración.* Siguiendo la notación del **Lema A1**, como  $s, r > 1$ , entonces  $lr + rm + n - 1$  siempre es no nulo.  $lr + rm + n - r = 0$  implica que  $l + m = 0$  y  $s = n = r$ . Esto muestra que  $e_{00r}^1 = \zeta_3^r \frac{\partial}{\partial \zeta_1}$  y  $e_{00r}^2 = \zeta_3^r \frac{\partial}{\partial \zeta_2}$  son las únicas resonancias.  $\square$

**Lema A3** Sea  $A$  la parte lineal de (5.1.4.8). El único monomio  $\mathbf{P}$ -resonante asociado a (A.5) es  $\zeta_3^r \frac{\partial}{\partial \zeta_2}$ .

*Demostración.* Por el Lema A2,  $\zeta_3^r \frac{\partial}{\partial \zeta_2}$  es  $\mathbf{P}$ -resonante. (pero  $\zeta_3^r \frac{\partial}{\partial \zeta_1}$  no lo es). Un monomio  $\mathbf{P}$ -resonante que es no resonante necesariamente está en  $L_A(\Xi_{(\mathbf{C}^n, 0)}^* \setminus \Xi_{(\mathbf{P}, 0)}^*)$ .

Sea  $e_{mn}^k \in \Xi_{(\mathbf{P}, 0)}^*$  un monomio  $\mathbf{P}$ -resonante. Para cada grado  $s \geq 2$ ,  $\Xi_{(\mathbf{C}^n, 0)}^* \setminus \Xi_{(\mathbf{P}, 0)}^*$  está generado por campos de vectores monomiales de la forma

$$e_{0mn}^1 = \{ \zeta_2^m \zeta_3^n e_1 : m + n = s; m, n = 0, 1, \dots \}$$

De (A.6):

$$L_A(e_{0mn}^1) = (mr + n - r)e_{0mn}^1 + me_{1, m-1, n}^1 - e_{0mn}^2$$

Los dos últimos sumandos a la derecha pertenecen a  $\Xi_{(\mathbf{P}, 0)}^*$ . Así es que  $L_A(e_{0mn}^1) \in \Xi_{(\mathbf{P}, M)}$  si y sólo si  $0 = n + r(m - 1)$ , si y sólo si  $n = 0$  y  $m = 1$  ó  $n = r$  y  $m = 0$ . Como el primero es lineal, la única resonancia es  $e_{0r}^2 = \zeta_3^r \frac{\partial}{\partial \zeta_2}$ .  $\square$

**Observación A4** El Caso 3.1 admite un tratamiento similar: podemos suponer que la parte lineal de (5.1.4.4) es la de (5.1.4.8) con  $r = 1$ . Se sigue de los cálculos anteriores que la ecuación homológica asociada a este operador no tiene  $\mathbf{P}$ -resonancias.

**Proposición A** Denotemos por  $Y$  al campo de vectores (5.1.4.8). Existe un cambio de coordenadas holomorfo  $x = \varphi(\zeta)$  tal que  $(\zeta_1 = 0) = (x_1 = 0)$  y  $\varphi \cdot Y = Ax + \tau \cdot x_3^r \frac{\partial}{\partial x_2}$ , para algún  $\tau \in \mathbf{C}$ .

*Demostración:* La prueba se obtiene siguiendo la del teorema de Poincaré-Dulac: Por el **Lema A1**, tiene sentido considerar la ecuación homológica asociada con el operador (A.5). Esta ecuación tiene solución para todo grado  $s \neq r$  por el **Lema A3**, y éstas producen una sucesión de cambios de coordenadas para cada uno de los cuales el plano  $E$  es invariante. El producto de ellos, en el límite, en principio solamente es una conjugación formal con la forma normal en cuestión. Sin embargo, como los valores propios pertenecen al Dominio de Poincaré, las estimaciones usuales en la norma mayorante muestran que esta conjugación formal de hecho es convergente.  $\square$

**Corolario A5** El Caso 3.1 es linealizabile manteniendo invariante al plano  $E$  al igual que (5.1.4.5) en el caso no resonante.  $\square$

## Bibliografía

- [1] V.I. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag (1983)
- [2] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko, Singularities of Differentiable Maps Vol I, Birkhäuser (1985)
- [3] P. Baum, R. Bott, On the zeroes of meromorphic vector-fields, Essays on Topology and Related Topics, Mémoires dédiés à Georges de Rham, Springer-Verlag, Berlin, 1970, 29-47.
- [4] C.A. Briot, J.C. Bouquet, Propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier 36 (1856), 133-198.
- [5] C. Camacho, P. Sad, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Ann. Math., 115 (1982) 579-595.
- [6] F. Cano, Final forms for a tridimensional vector field under blowing-up, Ann. Inst. Fourier, 37 (1987) 151-193.
- [7] S.S. Chern, Meromorphic vector fields and characteristic numbers, Scripta Math. XXIX, 243-251 (1973)
- [8] F. Sánchez-Bringas, Normal forms for vector fields of a type of singular surface. Preprint Facultad de Ciencias, U.N.A.M., No. 1, 1993.
- [9] Ph. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley-Interscience (1978)
- [10] X. Gomez-Mont, G. Kempf, Stability of meromorphic vector fields in projective spaces, Comment. Math. Helvetici 64 (1989), 462-473
- [11] X. Gomez-Mont, I. Luengo, Germs of holomorphic vector fields in  $\mathbb{C}^3$  without a separatrix. Inv. Math. 109 (1992), 211-219.
- [12] X. Gómez-Mont, L. Ortiz, Sistemas Dinámicos Holomorfos en Superficies. Aportaciones Matemáticas (3), Sociedad Matemática Mexicana (1989).
- [13] R. Gunning, H. Rossi, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965
- [14] J. Harris, Algebraic Geometry, a first course. Springer-Verlag, 1992.
- [15] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1977.
- [16] J. Olivares. On vector fields in  $\mathbb{C}^3$  without a separatrix. Rev. Mat. de la U. Complutense de Madrid. Vol.5, num. 1; 1992
- [17] I.R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry, Springer-Verlag (1977)