

37  
2ej.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**SIMULACION NUMERICA  
DE LAS  
COMPONENTES DE MAREA  
 $M_2$ ,  $S_2$  Y  $K_1$   
EN EL GOLFO DE  
CALIFORNIA**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

**F I S I C O**

**P R E S E N T A**

**IRMA RODRIGUEZ ARTEAGA**

MEXICO. D.F.

1994

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CIUDAD UNIVERSITARIA



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
División de Estudios  
Profesionales

Exp. Núm. 55

M. EN C. JOAQUIN CIFUENTES BLANCO  
Jefe de la División de Estudios Profesionales  
Universidad Nacional Autónoma de México  
P r e s e n t e

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo revisado el trabajo de tesis que realiz~~ó~~ la pasante Irma Rodríguez Arteaga

con el título: Simulación numérica de las componentes de marea M<sub>2</sub>, S<sub>2</sub> K<sub>1</sub> en el Golfo de California.

Consideramos que reúne los méritos necesarios para obtener el título de - - -  
Físico.

Comunicamos lo anterior para los fines a que haya lugar.

A t e n t a m e n t e  
México, D. F., a de abril de 1993.

- 1.- Doctor David Alberto Salas de León  
grado Nombre (s) Apellidos completos
- 2.- Doctor Victor Manuel Mendoza Castro  
grado Nombre (s) Apellidos completos
- 3.- M. en C. Augusto Cabrera Manuel  
grado Nombre (s) Apellidos completos
- 4.- Sup. Doctora María Edela Monreal Gomez  
grado Nombre (s) Apellidos completos
- 5.- Sup. Doctor Ramón Peralta Fabi  
grado Nombre (s) Apellidos completos

*[Handwritten signatures and initials]*

NOTA: El interesado deberá ponerse de acuerdo con el jurado para fijar fecha (día y hora) del examen, para evitar problemas de asistencia. ES IMPOR-  
TANTE LA PUNTUALIDAD.

UNIVERSIDAD AUTONOMA  
DE  
MEXICO

SIMULACION NUMERICA  
DE LAS  
COMPONENTES DE MAREA  
 $M_2$ ,  $S_2$  Y  $K_1$   
EN EL GOLFO DE  
CALIFORNIA

TESIS QUE PRESENTA  
IRMA RODRIGUEZ ARTEAGA

ASESOR : DOCTOR DAVID A. SALAS DE LEON

## **AGRADECIMIENTOS**

**Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a los Doctores David A. Salas de León y Adela Monreal G. por su infinita paciencia, así como por sus valiosos comentarios al dirigir este trabajo.**

**Gracias a los que me apoyaron.**

# C O N T E N I D O

## RESUMEN

1. INTRODUCCION	1
1.1. UBICACION GEOGRAFICA DEL GOLFO DE CALIFORNIA	1
1.2. LAS MAREAS EN EL GOLFO DE CALIFORNIA	3
2. MODELO HIDRODINAMICO	8
2.1. ECUACIONES HIDRODINAMICAS	8
2.1.1. Ecuaciones de conservación	9
2.1.2. El término de Coriolis	11
2.1.3. El término de la gravedad	12
2.1.4. Fuerza astronómica de marea	13
2.1.5. El término de viscosidad	16
2.2. APROXIMACIONES	20
2.2.1. Aproximación de Boussinesq	20
2.2.2. Aproximación Plano Beta	21
2.2.3. Aproximación hidrostática	21
2.3. INTEGRACION VERTICAL DE LAS ECUACIONES HIDRODINAMICAS	23
2.3.1. Ecuación de continuidad	24
2.3.2. Ecuación de movimiento	25
3. APROXIMACION NUMERICA DE LAS ECUACIONES HIDRODINAMICAS	28
3.1. APROXIMACION EN DIFERENCIAS FINITAS	28
3.2. DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES	31

3.2.1. Aproximación en diferencias finitas de operadores diferenciales temporales: método semi-implícito.	31
3.2.2. Aproximación en diferencias finitas de operadores diferenciales espaciales.	33
3.3. ANALISIS DE LA ESTABILIDAD, CONSISTENCIA Y CONVERGENCIA DEL ESQUEMA NUMERICO	39
3.4. CONDICIONES DE FRONTERA	44
3.5. VALORES INICIALES DE AMPLITUD Y FASE	46
4. RESULTADOS	47
4.1. ANALISIS ARMONICO	48
4.2. MAPAS COTIDALES	49
4.2.1. Componente $M_2$ .	50
4.2.2. Componente $S_2$ .	52
4.2.3. Componente $K_1$ .	54
CONCLUSIONES	56
BIBLIOGRAFIA	57

## RESUMEN

El presente trabajo consiste en la simulación numérica de las componentes de marea  $M_2$ ,  $S_2$  y  $K_1$ , en el Golfo de California.

Se toman en cuenta características de las ondas de marea en dicho Golfo usando una solución numérica desarrollada por Monreal Gómez y Salas de León (1986) de las ecuaciones de movimiento del océano. La solución del sistema de ecuaciones hidrodinámicas es realizada por medio de diferencias finitas, utilizando un algoritmo semi-implícito basado en una malla descentrada de 6.25 por 6.25 km de resolución (15753 puntos).

Los mecanismos de movimiento del sistema son los siguientes: una onda que entra por la boca del Golfo, impuesta utilizando resultados de observaciones de estaciones mareográficas y la fuerza astronómica considerada en cada punto de la malla. Los mapas cotidiales obtenidos mediante análisis armónico de la elevación de la superficie libre, muestran que las componentes semi-diurnas ( $M_2$  y  $S_2$ ) dominan sobre la componente diurna ( $K_1$ ). El modelo es capaz de simular la anfídomía virtual en las componentes semi-diurnas. Además se muestra que las componentes semi-diurnas se propagan de sur a norte mientras que la componente diurna lo hace de este a oeste.

Los resultados dados por medio de esta simulación numérica son comparados con los mapas por Gutierrez y Morales (1986) mostrando un error máximo del 10% .

## 1. INTRODUCCION

### 1.1 UBICACION GEOGRAFICA DEL GOLFO DE CALIFORNIA

El Golfo de California se ubica entre los  $22^{\circ}50'$  y  $32^{\circ}00'$  de latitud norte y entre los  $104^{\circ}$  y  $105^{\circ}$  de longitud oeste, con orientación sureste-noroeste, tiene una longitud aproximada de 1100 km y un ancho promedio de 150 km. Está limitado al oeste por la Península de Baja California y al este, en el sur por el estado de Sinaloa y al norte por el estado de Sonora, (fig. 1).

La boca del Golfo es profunda y ancha. La profundidad del Golfo es variable, pero en términos generales disminuye hacia el norte presentando varias fosas a lo largo.

La circulación de las aguas en el Golfo se realiza por el intercambio de agua que se lleva a cabo con el océano adyacente a través de la boca, también interviene la topografía del fondo.

Las mareas del Golfo son de tipo mixto, esto es, están constituidas por componentes semidiurnas y diurnas.

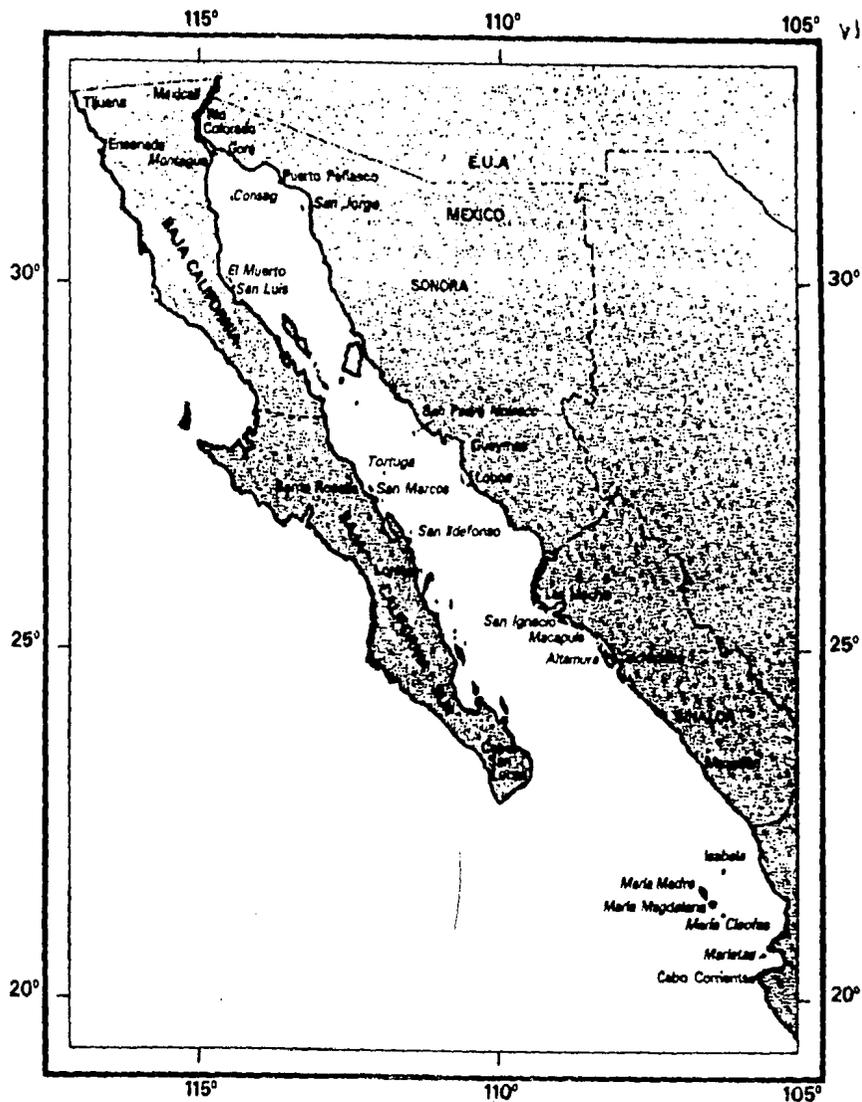


fig. 1 Ubicación geográfica del Golfo de California.

## 1.2 LAS MAREAS EN EL GOLFO DE CALIFORNIA

Conocemos con gran precisión el movimiento de los cuerpos celestes que más influyen en las masas oceánicas para producir las mareas, siendo estos el Sol y la Luna. Así que es conocido, entonces, con gran precisión el potencial generador de mareas en cualquier lugar de la tierra.

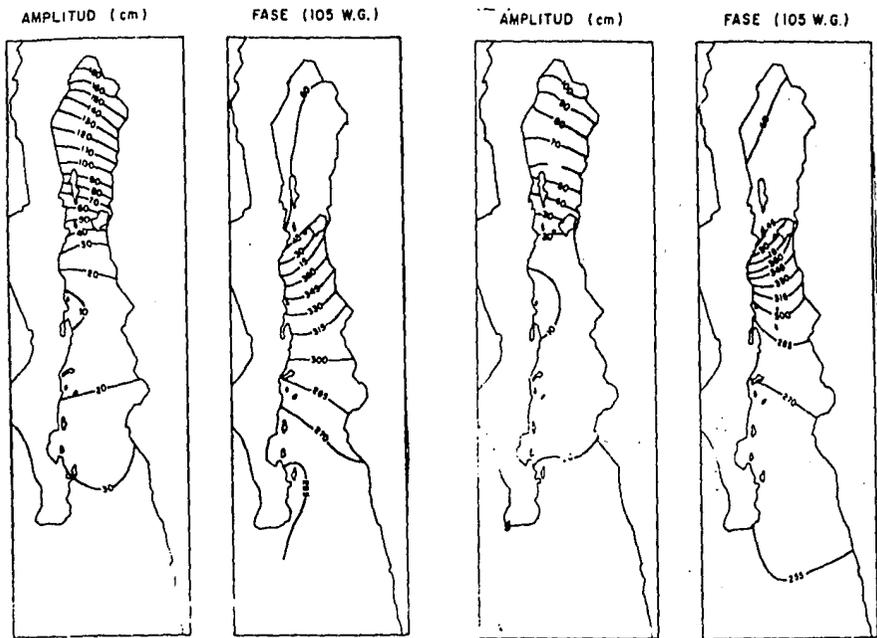
Matemáticamente el problema de las mareas se puede resolver con un número finito de componentes periódicas las cuales constituyen el potencial total de marea, Enfield (1976).

Existe un gran número de componentes armónicos en las mareas pero las componentes más importantes y utilizadas en la práctica son las siguientes:

Componentes semi-diurnas:	Periodo en hora solar
$M_2$ Principal lunar	12.42
$S_2$ Principal solar	12.00
$N_2$ Gran lunar elíptica	12.66
$K_2$ Luni-solar semidiurno	11.97
componentes diurnas:	
$K_1$ Luni-solar diurno	23.93
$O_1$ Principal diurno lunar	25.82
$P_1$ Principal solar diurno	24.07

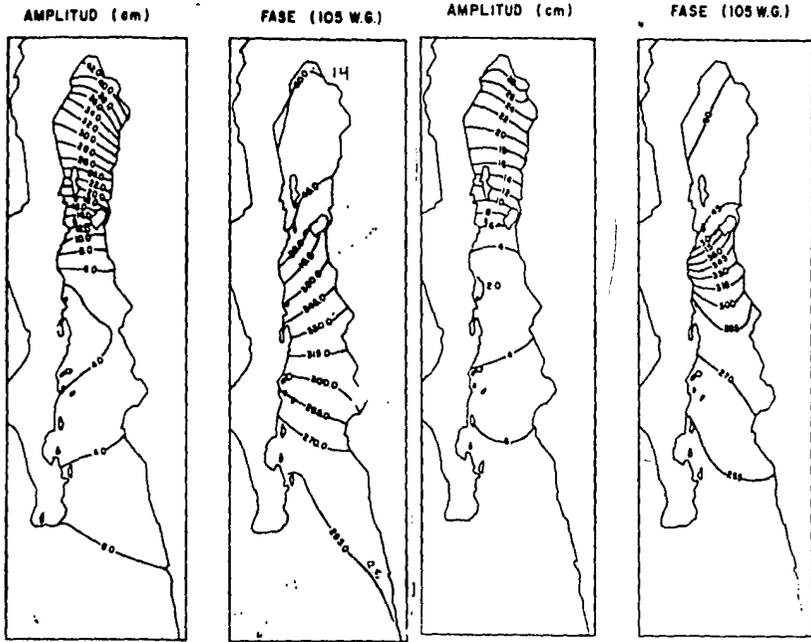
Gutierrez y Morales (1986); y Morales P. y Gutierrez de Velasco (1989), han obtenido las cartas cotidales para el Golfo de California, mediante observaciones obtenidas de estaciones mareográficas.

Haciendo una revisión a dichos mapas cotidales, se observa que las componentes semidiurnas (fig. 2) progresan de sur a norte a lo largo del Golfo con un atraso de 5 horas 40 minutos. Para las componentes diurnas (fig. 3) su progreso es casi de este a oeste con atraso de 30 a 45 minutos desde la boca hasta el extremo norte del Golfo, (Gutierrez y Morales 1986).



Componente  $M_2$

Componente  $S_2$



Componente  $N_2$

Componente  $K_2$

fig. 2 Cartas cotidianas de las componentes semidiurnas en el Golfo

de California. (Morales y Gutierrez, 1989).

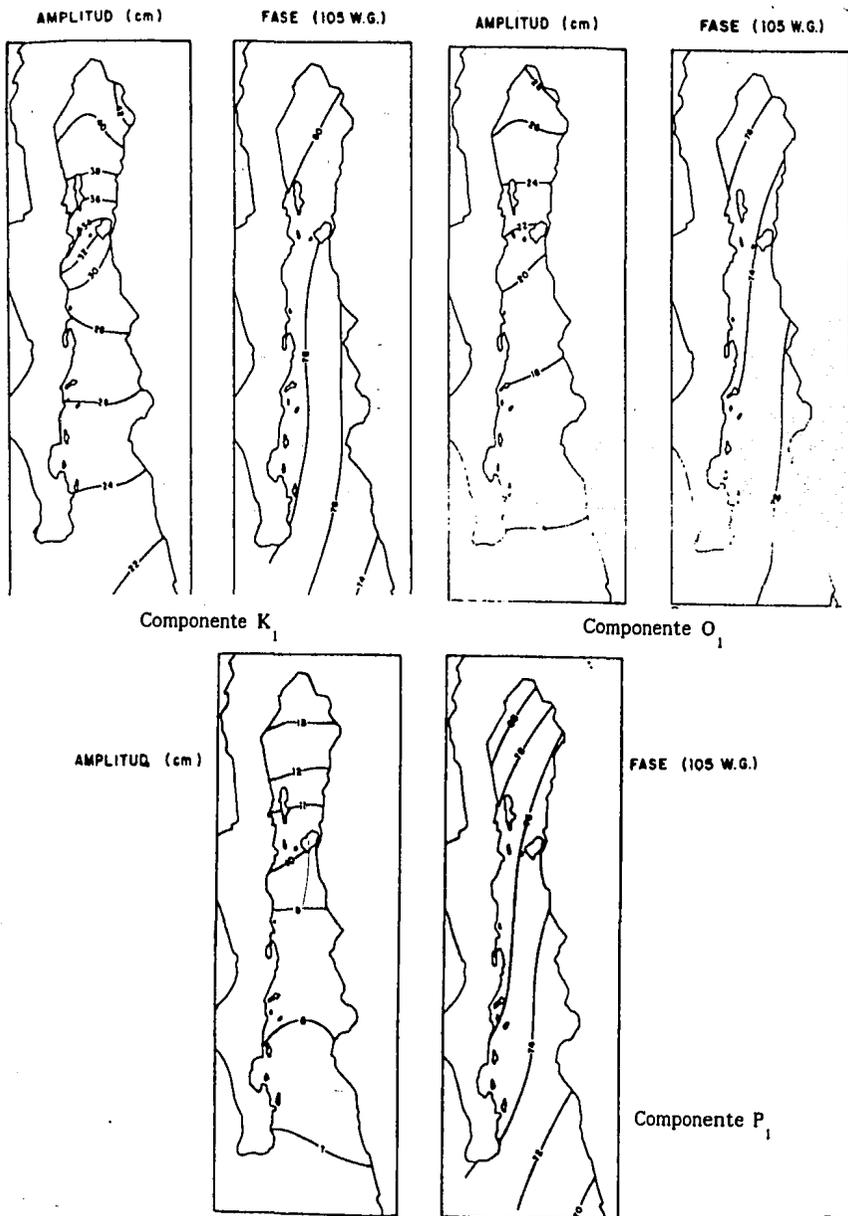


fig. 3 Cartas cotidianas de las componentes diurnas en el Golfo de California. (Morales y Gutierrez, 1989).

Otro tipo de componentes de mareas que presenta el Golfo son las llamadas de periodo largo:  $S_a$  solar anual y  $S_{sa}$  solar semianual (fig. 4). La primera con un periodo de un año, refleja la variación anual del nivel del mar, ésta componente progresa aproximadamente de este a oeste; su viaje desde el norte hasta el sur tarda de agosto hasta septiembre, con un atraso de 40 días. La componente  $S_{sa}$ , con periodo de 6 meses, provoca la variación semianual del nivel del mar, progresando de Topolobampo hacia el norte; hacia la punta de la península, durando su viaje hacia el norte del 4 de mayo al primero de junio, y el siguiente del 3 de noviembre al 30 del mismo mes, el viaje hacia la punta sur de la península va del 4 de mayo al 21 de junio y del primero de junio al 21 de diciembre, en el transcurso del viaje tiene un retraso de 28 días para el norte y 48 al sur hacia la punta de la península de Baja California, (Gutierrez y Morales, 1986).

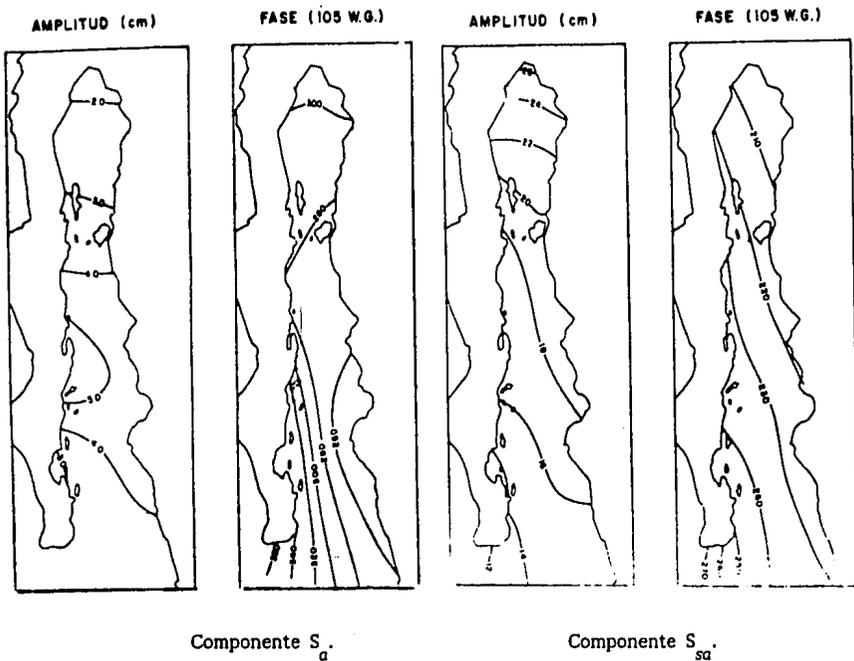
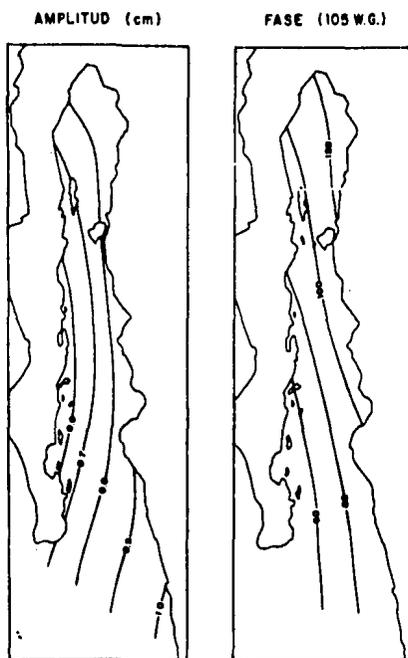


fig. 4 Cartas cotidales de las componentes solar anual y solar semi-anual (Morales y Gutierrez, 1989).

Por último, la componente  $M_f$  lunar quincenal, (fig. 5) que comparada con  $S_a$  y  $S_{sa}$  es débil, progresa de oeste a este de la punta del Golfo al norte en la región de Puerto Peñasco con retraso de tres días.



Componente  $M_f$ .

fig. 5 Carta cotidal de la componente lunar quincenal en el Golfo de California (Morales y Gutierrez, 1989).

## 2. MODELO HIDRODINAMICO

### 2.1. ECUACIONES HIDRODINAMICAS

Cuando se habla del movimiento de un cuerpo de masa  $m$ , la descripción de ese movimiento se hace por medio de la segunda ley de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$ , que se expresará como  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ , así se considera al movimiento como el resultado de diferentes factores, i.e. tomar a  $\vec{F}$  como la fuerza resultante y así estudiar cada una de sus componentes.

La ecuación de movimiento consta de varios términos, en esta sección se explican y se introducen algunas de las principales aproximaciones que se pueden hacer en ellos. En el movimiento de una masa de agua intervienen diferentes tipos de fuerzas, como son:

- Fuerzas astronómicas
- Fuerza debida al viento
- Fuerza de gravedad terrestre
- Gradiente de presión atmosférica
- Gradiente de presión
- Fuerza por movimiento del fondo del océano
- Fuerza de Coriolis
- Fuerza de fricción

Estas fuerzas producen movimiento de las masas de agua en mayor o menor grado. Dado que el interés del presente trabajo es simular los movimientos de marea, la fuerza debida al viento a pesar de ser un factor importante en el movimiento de la capa superficial de agua, no se tomará en cuenta, además debido a que la escala espacio-temporal considerada en este trabajo es pequeña con respecto a las variaciones que sufre el fondo marino se supondrá que este permanece inalterable, por lo que nos abstendremos también de tomar en consideración esta fuerza.

Por ahora tomaremos en cuenta las fuerzas de gradiente de presión, de Coriolis y más adelante se hablará de las fuerzas astronómica y de fricción del agua. Además, como se va a describir el movimiento de una masa de agua dentro de un campo gravitacional, se considerará la atracción terrestre sobre el elemento de volumen de agua.

### 2.1.1. Ecuaciones de conservación.

Cuando un fluido está en movimiento, sus propiedades  $X$  son funciones de la posición y del tiempo:

$$X = X(x,y,z,t) = X(\vec{x},t).$$

Para describir el movimiento de un fluido existen dos métodos: Euleriano y Lagrangiano; en el primero se fija un punto en el espacio y se observa el comportamiento del fluido que pasa por ese punto, especificando sus propiedades  $X$ , tales como densidad y velocidad. En el método Lagrangiano se 'observa' una partícula y se sigue en su movimiento determinando tiempo y posición. Para la descripción del movimiento estos dos métodos deben estar relacionados; el teorema de Reynolds (Currie, 1974) relaciona la derivada lagrangiana de una integral de volumen con otra integral donde los integrandos tienen derivadas eulerianas:

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} X \, dv = \int_{v(t)} \left[ \frac{\partial X}{\partial t} + \nabla \cdot (X\vec{V}) \right] dv.$$

El movimiento del fluido se determina por su velocidad, densidad y presión, estas propiedades son, en general, funciones de la posición y del tiempo, cumpliendo el teorema anterior.

#### a) Ecuación de continuidad.

Para comenzar a establecer la ecuación que rige la conservación de masa en el fluido tomemos un volumen  $V_0$  en el espacio, la masa en ese volumen es  $\int \rho dV$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido y la integración se realiza sobre todo el volumen  $V_0$ .

En ese volumen fijo, la masa que fluye por unidad de tiempo a través de un elemento de área  $d\vec{f}$ , con cierta velocidad  $\vec{V}$ , es, entonces:

$$\rho \vec{V} \cdot d\vec{f}.$$

Tomando toda la superficie que contiene al volumen  $V_0$ , la masa total en el volumen es:

$$\oint_{V_0} \rho \vec{V} \cdot d\vec{f}.$$

La salida de masa por unidad de tiempo en  $V_0$ , se puede escribir:

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV,$$

como la cantidad de masa que entra es la misma que sale del volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint_{V_0} \rho \vec{V} \cdot d\vec{f}, \quad (2.1)$$

escribiendo la parte derecha de la ecuación anterior de la forma:

$$\oint_{V_0} \rho \vec{V} \cdot d\vec{f} = \int \operatorname{div}(\rho \vec{V}) dV,$$

entonces la ecuación (2.1) toma la forma:

$$\int \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right] dV = 0,$$

esta ecuación es válida para cualquier volumen V, por lo tanto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0, \quad (2.2)$$

a esta ecuación se le conoce como la ecuación de continuidad.

#### b) Conservación de momento.

Las fuerzas que actúan en un elemento de fluido son de dos tipos:

i) Fuerzas sobre el volumen debidas a agentes externos, por ejemplo: la gravedad. ii) Fuerzas de superficie, ejercidas a través de la frontera, por ejemplo: esfuerzos en el fluido.

La ecuación que relaciona las fuerzas de superficie y fuerzas sobre el volumen es la ecuación de conservación de momento.

Esta ecuación de conservación (Currie, 1974), está dada por:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{V} dv = \int_S \tau \cdot \hat{n} ds + \int_V \rho \vec{F} dv, \quad (2.3)$$

el término de la izquierda es el cambio temporal del momento lineal,  $\tau \cdot \hat{n}$  son las fuerzas superficiales y  $\rho \vec{F}$  son las volumétricas.

Las fuerzas superficiales pueden ser normales, debidas a la presión, o cortantes, debidas a la viscosidad. Como ejemplo, tomemos un cubo y las fuerzas mostradas en la figura 6.

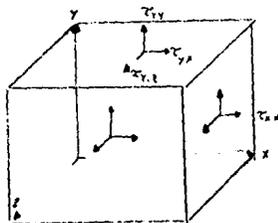


fig. 6.

Las fuerzas superficiales o esfuerzos que actúan en ese elemento de volumen o en cualquier otro, pueden representarse como  $\tau_{ij}$  que es el tensor de esfuerzos que actúa sobre un elemento de área  $ds$  con orientación  $\hat{n}$ .  $\tau_{ij}$  es la componente  $i$  de la fuerza por unidad de área que actúa sobre una superficie con normal  $j$ . A partir de la conservación de momento angular se obtiene la simetría del tensor de esfuerzos (Single, Schild 1949), esto es,  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ .

Tomando a la presión como el promedio de los esfuerzos normales a la superficie,  $-\frac{1}{3} \tau_{ii}$ , tenemos que el primer término de la ecuación de momento (2.3), es:  $-\nabla P$ .

### 2.1.2. El término de Coriolis.

Para trabajos oceanográficos es más sencillo expresar el término de Coriolis en un sistema de referencia sobre la tierra (ejes en rotación) (Hauser, 1969). Para una transformación en los ejes se tiene:

$$\vec{a}_f = \left[ \frac{d\vec{V}'}{dt} \right]_f = \left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_e + 2\vec{\Omega} \times \vec{V}' + \dot{\vec{\Omega}} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}', \quad (2.4)$$

donde los subíndices  $f$  y  $e$  indican ejes fijos fuera de la tierra y ejes sobre la tierra, respectivamente; el término  $\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_e$  es la aceleración relativa a ejes sobre la tierra,  $2\vec{\Omega} \times \vec{V}'$  es el término de Coriolis y  $\dot{\vec{\Omega}} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$  es la aceleración centrípeta que experimenta una masa sobre la superficie terrestre.

El término  $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}'$  es el cambio en la aceleración angular de la tierra de manera que, considerando que las escalas de tiempo utilizadas en oceanografía para describir movimientos de mareas son pequeños en comparación con esos cambios de aceleración, el último término de la ecuación (2.4) es despreciable, es decir se considera a  $\vec{\Omega}$  constante.  $\vec{V}'$  es la velocidad en los ejes fijos,  $\vec{r}'$  es el vector de posición y  $\dot{\vec{\Omega}}$  es la velocidad angular de rotación de la tierra ( $|\dot{\vec{\Omega}}| \sim 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ ).

### 2.1.3. El término de la gravedad.

La fuerza por unidad de masa debida a la gravedad es  $\vec{g}_f$  y está dirigida al centro de la tierra. Los términos  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  y  $\vec{g}_f$  combinados dan por resultado una gravedad aparente:  $\vec{g}_a = \vec{g}_f - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ , (fig. 8).

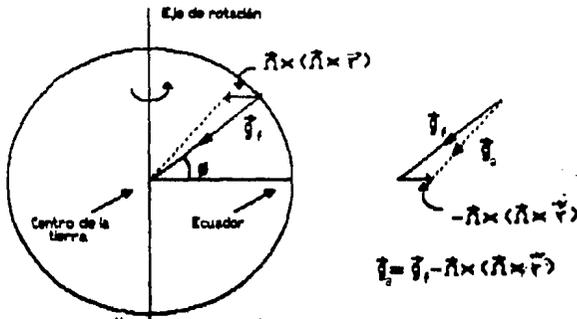


fig. 8 Aceleración debida a la gravedad

En la superficie,  $\vec{g}_a$  cambia dependiendo de la posición geográfica, siendo máxima en los polos y mínima en el Ecuador (ahí  $\vec{g}_a$  es mínimo pero la aceleración centrípeta es máxima).

Así pues, la ecuación de movimiento en ejes fijos está escrita como:

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_f = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \vec{g}_f + \vec{F}^* \quad (2.5)$$

La ecuación de movimiento en un sistema en rotación puede escribirse como:

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_e = -\frac{1}{\rho} \nabla P - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \vec{g}_a + \vec{F}^* \quad (2.6)$$

los términos de la derecha, como se comentó, son las fuerzas por unidad de masa, i. e. aceleraciones debidas a diferentes fuerzas.

La ecuación de movimiento en componentes sería:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + 2\Omega v \sin\phi - 2\Omega w \cos\phi + F_x,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega u \sin\phi + F_y,$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + 2\Omega u \cos\phi - g_a + F_z,$$

donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  son las componentes de la velocidad en dirección  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

Debemos notar que en la ecuación de movimiento en componentes, la aceleración debida a la gravedad aparece únicamente en la componente del eje z.

La ecuación de movimiento en forma vectorial se escribe ahora como:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \vec{g}_a + \vec{F}, \quad (2.7)$$

el primer término del lado derecho de la igualdad ( $-\frac{1}{\rho} \nabla P$ ) es el debido al gradiente de presión, el siguiente a la fuerza de Coriolis, el tercero a la gravedad y el último es debido, como ya se mencionó, a otros tipos de fuerzas tales como fuerza de fricción y fuerza astronómica. Todos los términos están divididos por la masa, lo que indica una fuerza por unidad de masa obteniendo una ecuación en términos de aceleración.

#### 2.1.4. Fuerza astronómica de marea.

Consideremos la fuerza astronómica debida a la atracción de los astros, la cual es periódica y causante principal de las mareas. En las mareas de la tierra los astros que más influyen son la luna y el sol.

Una partícula cualquiera de masa  $M_L$  y ejerce una fuerza gravitacional sobre otra partícula cualquiera de masa  $M_B$  de acuerdo con la ley (fig. 9):

$$F_{LB} = \frac{G M_L M_B}{|\vec{R}|^2},$$

siendo  $G$  ( $= 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{Kg}^2$ ) la constante de gravitación universal y  $|\vec{R}|$  la distancia que separa los centros de masa de los dos cuerpos.

Si  $M_B$  se encuentra además sometido a otro campo de fuerza creado por una tercera masa  $M_T$ , la fuerza total que se ejerce sobre  $M_B$  es la suma vectorial de las dos fuerzas anteriores debidas a  $M_L$  y a  $M_T$ . Así las masas de agua sentirán una fuerza debida a la atracción de algún astro (sol o luna), supongamos la luna y la tierra, dada por (Mc Lellan, 1975):

$$\vec{F}_T \cong \frac{GM_B M_L 2\vec{r}}{|\vec{R}|^3}, \quad (2.8)$$

considerada como fuerza de marea.

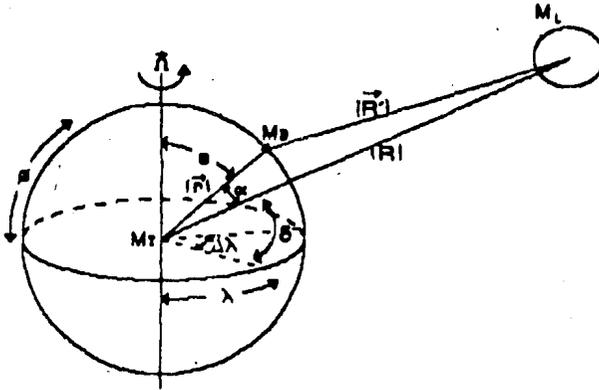


fig. 9 Fuerza de atracción que siente un elemento de masa  $M_B$ .

donde  $M_L$  es la masa de la luna

$M_B$  es la masa del agua (de una sección)

$|\vec{R}_L|$  es la distancia de la tierra a la luna

$|\vec{r}|$  es el radio de la tierra.

Consideremos ahora la fuerza ejercida sobre una partícula de masa unitaria, en la superficie del océano debida a la atracción gravitacional terrestre en rotación, esta será:

$$\vec{g}_a = \frac{GM_T \vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}),$$

donde  $M_T$  es la masa de la tierra. El primer término está en la dirección del centro de masa de la tierra.

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -|\vec{\Omega}|^2 \vec{r} \cos \phi,$$

$\phi$  es la latitud en un punto sobre la superficie de la tierra. Esta atracción estará dirigida en dirección paralela al plano ecuatorial. La gravedad aparente  $\vec{g}_a$ , descrita en la sección 2.1.3., es la resultante de la atracción de la tierra y de la fuerza centrípeta. Como  $\phi$  cambia dependiendo del lugar en que nos encontremos sobre la tierra,  $\vec{g}_a$  cambia y la fuerza producida por los astros será diferente dependiendo del lugar y, por lo tanto también variará el movimiento de las masas de agua de un lugar a otro; las mareas serán diferentes dependiendo de donde nos encontremos.

Si uno hace una comparación de las mareas producidas por la atracción de la luna con las producidas por el sol, tenemos que las solares son más pequeñas que las lunares, a pesar de que la masa del sol es mucho mayor, esto es debido a que la distancia entre el sol y la tierra es mayor que la de la luna a la tierra. Al comparar las fuerzas debidas al sol y a la luna sobre una partícula de agua en la tierra, se tiene:

$$\frac{F_L}{F_S} = 2.2 .$$

El movimiento de rotación de la luna produce un defasamiento de 0.44 horas con respecto al periodo solar de 12 o 24 horas, de manera que a veces se conjugan para producir una gran marea o marea viva, existiendo también influencia estable cuando son cuartos crecientes o menguantes produciendo una marea muerta.

La ecuación (2.8) describe la fuerza astronómica de marea, que tiene un efecto local considerablemente pequeño, sin embargo, ésta actúa en mar profundo generando la marea oceánica, (Salas de León, 1986).

La expresión (2.8) que se incluirá en la ecuación de movimiento queda de la siguiente forma:

$$\vec{F}_E = \frac{\vec{F}_T}{M_B} = \frac{GM_L 2\vec{r}}{|\vec{R}|^3} .$$

La ecuación de movimiento en forma vectorial, considerando la fuerza exterior o fuerza astronómica de marea resulta:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \vec{g}_a + F + \frac{GM_L 2\vec{r}}{|\vec{R}|^3} . \quad (2.9)$$

#### 2.1.4. Término de viscosidad turbulenta.

Las velocidades en un fluido en movimiento fluctúan en el tiempo (flujo turbulento); tomemos a las velocidades constituidas por un valor medio y fluctuaciones o desviaciones respecto a la media

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}',$$

cuyo promedio temporal  $\langle \vec{v}' \rangle = 0$ .

Tomemos el lado izquierdo de la ecuación de movimiento (2.9) escrita en componentes:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u + w \frac{\partial}{\partial z} u - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2.10)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} v + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v + w \frac{\partial}{\partial z} v - f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2.11)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} w + u \frac{\partial}{\partial x} w + v \frac{\partial}{\partial y} w + w \frac{\partial}{\partial z} w - f w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (2.12)$$

donde  $f u$  son las componentes de las fuerzas de Coriolis, de la Gravedad y la astronómica. Además tenemos la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v + \frac{\partial}{\partial z} \rho w = 0; \quad (2.13)$$

multiplicando las ecs. (2.10), (2.11) y (2.12) por  $\rho$  y sumandolas con  $u$  veces (2.13),  $v$  veces (2.13) y  $w$  veces (2.13), respectivamente, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho uw) - f \rho v = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho vw) - f \rho u = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uw) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho vw) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w^2) - f \rho w = -\frac{\partial P}{\partial z}; \quad (2.16)$$

sustituyendo en estas ecuaciones las velocidades  $u = \langle u \rangle + u'$ ,  $v = \langle v \rangle + v'$  y  $w = \langle w \rangle + w'$ , el resultado se puede promediar en el tiempo. Los términos de fluctuaciones en densidad, asociados con la turbulencia son:  $\langle \rho uv \rangle = \rho \langle (\langle u \rangle + u')(\langle v \rangle + v') \rangle = \rho \langle u \rangle \langle v \rangle + \rho \langle u' v' \rangle$  pues  $\langle \langle u \rangle w' \rangle$  y  $\langle \langle w \rangle u' \rangle$  se anulan, pues  $\langle u \rangle$  y  $\langle w \rangle$  son constantes sobre el promedio, entonces  $\langle \langle u \rangle w' \rangle = \langle u \rangle \langle w' \rangle$ , pero  $\langle w' \rangle$  es cero, con esto las ecuaciones toman la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \rho u' u' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \rho u' v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle \rho u' w' \rangle, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \rho v' v' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \rho v' v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle \rho v' w' \rangle, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \rho u' w' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \rho w' v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle \rho w' w' \rangle, \quad (2.19)$$

y están asociados a fluctuaciones turbulentas. Se puede hacer la suposición de que una parcela de fluido es desplazada verticalmente con su velocidad media horizontal, de un nivel original a una distancia  $l'$ ; este desplazamiento crea una fluctuación donde la magnitud depende de  $l'$  y de la velocidad media (Holton, 1972).

$$u' = -l' \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z}.$$

Entonces los esfuerzos  $\langle \rho u' w' \rangle$ , de las ecs. (2.17), (2.18) y (2.19) se escriben como:

$$\rho \langle u' w' \rangle = -\rho \langle w' l' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z};$$

la escala horizontal es comparable con la vertical,  $w' \approx l'$  y también  $|w'| \approx |u'|$ , así:

$$w' = l' \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \right|.$$

Tomando en cuenta lo anterior, los esfuerzos toman la forma:

$$\rho \langle u' w' \rangle = \rho \langle l'^2 \rangle \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \right| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} = \mathcal{A}_z \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z},$$

donde  $\mathcal{A}_z \equiv \rho \langle l'^2 \rangle \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \right|$  es conocido como el coeficiente de intercambio en flujos turbulentos. Para las otras componentes tenemos:

$$-\langle u' u' \rangle = \mathcal{A}_x \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x}, \quad -\langle u' v' \rangle = \mathcal{A}_y \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}, \quad -\langle u' w' \rangle = \mathcal{A}_z \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z};$$

desarrollando sólo la parte en x, pues para las otras componentes es semejante, se obtiene, al efectuar las derivadas:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \langle u' u' \rangle = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathcal{A}_x \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \langle u' u' \rangle = \left( \mathcal{A}_x \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} \right),$$

los términos de viscosidad quedan:

$$\mathcal{A}_x \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2}; \quad \mathcal{A}_y \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial y^2}; \quad \mathcal{A}_z \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial z^2}.$$

Que salen de las derivadas en virtud de que los términos  $\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A}_x \cdot \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x}$  son menos importantes (de acuerdo con la analogía con la viscosidad molecular) y esta suposición adicional no es tan mala, con esta suposición se desprecian las variaciones espaciales de las  $\mathcal{A}$ 's relativas a los otros términos.

En la ecuación de Navier-Stokes (Landau, 1982), el término de viscosidad  $\nu$ , se encuentra relacionado con  $\nabla^2 \vec{V}$ , al igual que la aproximación que se acaba de realizar, para  $\mathcal{A}$ . Tomando valores tales como: longitud horizontal de 1000 km, velocidad horizontal del orden de 0.1 m/s y una longitud vertical de 1 km, los valores para las  $\mathcal{A}_x$  y  $\mathcal{A}_y$  son del orden de  $10^5 \text{ m}^2/\text{s}$ , y para  $\mathcal{A}_z$  es de  $10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$  (Pond y Pickard, 1978), mientras que el valor aceptado para la viscosidad  $\nu$  es de  $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Comparando la viscosidad molecular, con las  $\mathcal{A}$ 's, la ecuación de movimiento se transforma en:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - 2\Omega \times \vec{v} + \mathcal{A} \nabla^2 \vec{v} + \frac{GM_L}{|\vec{R}|^3} 2\vec{r}$$

En esta ecuación aplicamos el mismo tratamiento al término  $-\frac{1}{\rho} \nabla P$ , resultando

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle + \rho'} \frac{\partial}{\partial x} \langle P + P' \rangle; \quad (2.20)$$

usamos una expansión binomial para la densidad:

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle + \rho'} = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left( 1 + \frac{\rho'}{\langle \rho \rangle} \right)^{-1} \approx \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left( 1 - \frac{\rho'}{\langle \rho \rangle} \right)$$

y como  $\left| \frac{\rho'}{\langle \rho \rangle} \right| \ll 1$ ,

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle + \rho'} \approx \frac{1}{\langle \rho \rangle};$$

así que (2.20) queda, después de promediar,

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x} \langle P \rangle,$$

y análogamente para las otras componentes.

Para el término de Coriolis en dirección x:

$$2\Omega (\langle u \rangle + \langle u' \rangle) \langle \sin \phi \rangle - 2\Omega (\langle w \rangle + \langle w' \rangle) \langle \cos \phi \rangle = 2\Omega \langle u \rangle \langle \sin \phi \rangle - 2\Omega \langle w \rangle \langle \cos \phi \rangle.$$

Finalmente la ecuación de movimiento que resulta después de tomar valores medios y fluctuantes es:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - 2\Omega \times \vec{V} + A \nabla^2 \vec{V} + \frac{GM_L}{|\vec{R}|^3} 2\vec{r}, \quad (2.21)$$

donde el símbolo  $\langle \rangle$  se ha eliminado por comodidad, pero esta ecuación describe el movimiento medio.

## 2.2. APROXIMACIONES

### 2.2.1. Aproximación de Boussinesq.

Al analizar la masa específica (densidad) del agua de mar o de otro fluido geofísico se observa una muy pequeña diferencia entre el valor de la masa específica del fluido  $\rho$ , y el valor de referencia  $\rho_0$ . Es decir, si  $\rho = \rho_0 + \rho'$  se tiene:

$$\frac{|\rho'|}{\rho_0} \leq 10^{-2}.$$

De la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0,$$

como  $\text{div } (\rho \vec{v}) = \rho \text{ div } \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad } \rho$  y tomando en cuenta  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho' + (\rho_0 + \rho) \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.22)$$

los dos primeros términos de esta ecuación son más pequeños que el tercero, resultando:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.23)$$

La homogeneidad de la columna de agua expresada por (2.23), es conocida como aproximación de Boussinesq.

La aproximación de Boussinesq considera que si la variación de la densidad es muy pequeña, en primera aproximación, se puede despreciar su efecto sobre la masa del fluido pero se debe mantener el efecto sobre la flotación. Al llevar a cabo dicha aproximación se puede reemplazar  $\rho$  por  $\rho_0$  dentro de la ecuación de movimiento, excepto en el término de gradiente de presión, donde hay que conservar  $\rho$  como variable para tener en cuenta la variación del peso específico, debido a que la aceleración producida por ésta, es mayor que las aceleraciones típicas del fluido.

La variación del peso específico que resulta en las ecuaciones de movimiento da origen a una fuerza vertical llamada 'boyancia', la cual puede aparecer a causa de variaciones de temperatura, salinidad o turbidez.

### 2.2.2. Aproximación Plano Beta.

Cuando el área que se considera sobre la superficie de la tierra no es muy grande (100 km), uno puede trabajar en un plano tangente a la esfera usando un sistema rectangular, a este plano se le llama *plano-f*, pues el término de Coriolis  $f$  puede ser tomado como constante. Para áreas mayores (donde  $\phi$  abarque unos diez grados entre latitudes medias y el ecuador) el plano tangente se le conoce como plano  $\beta$ .

Desarrollando el término de Coriolis en serie de Taylor:

$$f \sim f_0 + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

se tiene:

$$f = 2|\Omega| \operatorname{sen}\phi \Big|_{\phi_0} + 2|\Omega| \cos\phi \frac{d\phi}{dy} \Big|_{\phi_0} + \dots$$

tomando los dos primeros términos y dado que  $(d\phi/dy)=1/r$ :

$$f = f_0 + \beta dy$$

donde  $f_0 = 2|\Omega| \operatorname{sen}\phi_0$ ;  $\beta = \frac{2|\Omega| \cos\phi_0}{r}$ .

$f_0$  es el valor de  $f$  en las latitudes medias y  $\beta$  es la variación del término de Coriolis con la latitud.

Esta aproximación que nos permite utilizar una geometría plana para modelar mareas, es en sí, aproximar localmente por un plano a la tierra. Dicha aproximación es válida en latitudes medias y donde la escala norte-sur sea pequeña y en este caso, el parámetro de Coriolis se considera una función lineal de la latitud, (Pedlosky, 1979).

### 2.2.3. Aproximación hidrostática.

Haciendo un análisis de los órdenes de magnitud en la ecuación (2.21) se puede llegar a que el término  $\partial P/\partial z$  es del orden del de Coriolis  $fv$ . Los demás términos resultan ser menores que ellos, así entonces, se tendrá una ecuación de movimiento 'aproximada':

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + fv,$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - fu,$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g.$$

Estas ecuaciones relacionan la distribución de la presión horizontal y las componentes de la velocidad en el interior del océano. Tomando para esta aproximación, un fluido estacionario, esto es:

$$\partial V/\partial t = 0 \quad \text{y} \quad u = 0, v = 0, w = 0,$$

no incluyendo por ahora el resto de los términos ( $F=0$ ).

Así, la ecuación (2.7) queda como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = g;$$

en las dos primeras igualdades la presión es uniforme, pues es una superficie horizontal, es decir, la presión no provoca movimientos horizontales. La tercera igualdad se puede escribir como:

$$dP = \rho g dz,$$

que es la ecuación hidrostática (en forma diferencial). Si  $\rho$  es constante (independiente de la profundidad) se llega a:

$$P = \rho g z + p_0,$$

resultando una buena aproximación de la variación de la presión con la profundidad.

### 2.3. INTEGRACION VERTICAL DE LAS ECUACIONES HIDRODINAMICAS.

Nos interesa la variación de la superficie libre del océano y no sus oscilaciones internas, entonces se puede integrar la ecuación de movimiento verticalmente y simplificar el problema.

Tomando un perfil del sistema, se encuentra que tanto el fondo como la superficie no son lisos, es decir, en el fondo existen desniveles respecto al datum, las que se denotarán por  $d(x,y)$ . En la superficie designaremos a  $h$  como un nivel promedio el cual depende sólo de  $x$  y de  $y$ ,  $h(x,y)$ , al igual que  $d$  (fig. 10) pues los cambios a través del tiempo en el fondo del mar no se toman en cuenta, ya que los lapsos de tiempo en que ocurren dichos cambios son muy largos en comparación con los lapsos en que cambia la superficie del mar debido a las mareas.  $\xi$  será la variación de la superficie libre relativa a  $h(x,y)$  y depende de  $(x,y)$  y del tiempo.  $H(x,y,t)$  que es la posición instantánea de la superficie del mar, estará dada por:

$$H(x,y,t) = h(x,y) + \xi(x,y,t).$$

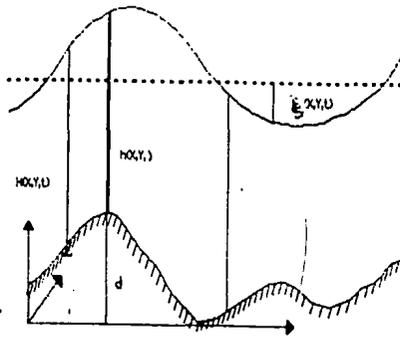


fig. 10 Esquematzación de una columna de agua.

Definimos a la velocidad ( $\vec{v}$ ), en algún punto de la columna de agua como constituida por una parte media ( $\overline{\vec{v}}$ ) más sus variaciones en la vertical ( $\vec{v}_v$ ), como:

$$\vec{v} = \overline{\vec{v}} + (\vec{v}_v),$$

la cual integraremos y normalizaremos a  $H$  desde el fondo ( $d$ ) hasta la superficie libre ( $\xi$ ).

Definimos un vector de transporte horizontal  $\vec{V}_H$  como

$$\vec{V}_H = \int_d^\xi \overline{(\vec{u})} dz + \int_d^\xi (\vec{u}_v) dz.$$

El promedio de la parte fluctuante es cero:

$$\int_d^\xi (\vec{u}_v) dz = 0,$$

$$\vec{V}_H = \int_d^\xi \overline{(\vec{u})} dz \Rightarrow \vec{V}_H = H \vec{u}.$$

Tanto en el fondo como en la superficie se deben cumplir las condiciones tales que:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}; \quad (2.24)$$

en el fondo (d) no depende del tiempo, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} d = 0,$$

de manera que se tiene:

$$\frac{d}{dt} d = u \frac{\partial}{\partial x} d + v \frac{\partial}{\partial y} d,$$

sea  $w_d = u \frac{\partial}{\partial x} d + v \frac{\partial}{\partial y} d = 0$  para  $z = d$ .

Y en la superficie ( $z = \xi$ ):

$$\frac{d \xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = w_\xi.$$

### 2.3.1. Ecuación de continuidad.

Utilizando el teorema de Leibnitz en la integral de  $d$  a  $\xi$  y con la condición de incompresibilidad  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_d^\xi \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_d^\xi u dz - u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + u_d \frac{\partial d}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_d^\xi v dz - v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial y} + v_d \frac{\partial d}{\partial y} \\ &+ w_\xi - w_d = 0. \end{aligned}$$

Con la ecuación  $\vec{v} = (\vec{v}) + (\vec{v}_v)$ , las condiciones cinemáticas en la superficie libre y con  $H(x,y,t) = \xi(x,y,t) - d(x,y)$  se llega a:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Conocida como ecuación de conservación de masa o de continuidad y donde  $U$  y  $V$  son las componentes en la dirección  $x$  y  $y$  del transporte horizontal.

### 2.3.2. Ecuación de movimiento.

De la ecuación de movimiento, en la dirección  $x$  se calcula la integral del cambio local:

$$\int_d^\xi \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_d^\xi u dz - u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

como  $U = \int_d^\xi u dz$ , la ecuación anterior queda:

$$\int_d^\xi \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial U}{\partial t} - u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Los términos de advección al integrarlos verticalmente:

$$\int_d^\xi \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz. \quad (2.25)$$

Si usamos  $v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (uv) - u \frac{\partial v}{\partial y}$ , además de la aproximación de Boussinesq

y de incompresibilidad  $\frac{\partial v}{\partial y} = - \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]$ , en la ecuación (2.18), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_d^\xi \left( \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} (\overline{uuH}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{uvH}) + u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_d^\xi \overline{u}_v \overline{u}_v dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_d^\xi \overline{u}_v \overline{v}_v dz; \end{aligned}$$

los términos  $\frac{\partial}{\partial x} (\overline{uuH})$  y  $\frac{\partial}{\partial y} (\overline{uvH})$  representan esfuerzos cortantes, cuyo orden de magnitud es mucho menor que el de la fuerza de Coriolis en la ecuación de cantidad de movimiento.

Los otros términos de la ecuación de movimiento, integrándolos en la vertical dan:

En el término de Coriolis, como  $f$  es independiente de  $z$ , se tiene:

$$\int_d^{\xi} f v \, dz = fV.$$

El término del gradiente de presión:

$$-\frac{1}{\rho} \int_d^{\xi} \frac{\partial P}{\partial x} \, dz = \frac{H}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Los términos de difusión horizontal:

$$\int_d^{\xi} \mathcal{A}_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dz = \mathcal{A}_H \left( H \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right),$$

donde  $\mathcal{A}_H = \mathcal{A}_x + \mathcal{A}_y$ .

La difusión vertical:

$$\int_d^{\xi} \mathcal{A}_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \, dz = \frac{\tau_s^x - \tau_f^x}{\rho}.$$

Donde  $\mathcal{A}_v = \mathcal{A}_z$ ,  $\tau_s$  es la tensión en la superficie y  $\tau_f$  es la fricción en el fondo. La fricción superficial en este caso es debida al viento, el cual, como se explicó anteriormente, no se consideró en nuestro estudio, por lo tanto lo omitiremos.

Sumando todos los términos que se han encontrado en la ecuación de movimiento en dirección  $x$ , se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}H) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}uH) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}vH) - f\bar{v}H \\ = -\frac{H}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\tau_f^x}{\rho} + \mathcal{A}_H H \nabla^2 \bar{u} + F_{Ex} H. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Haciendo el desarrollo anterior, para la dirección  $y$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{v}H) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}uH) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}vH) + f\bar{u}H \\ = -\frac{H}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\tau_f^y}{\rho} + \mathcal{A}_H H \nabla^2 \bar{v} + F_{Ey} H, \end{aligned} \quad (2.27)$$

y la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}H) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}H) = 0, \quad (2.28)$$

suponiendo que podemos escribir  $\mathcal{A} H \nabla^2 \vec{u} = \mathcal{A} \nabla^2 \vec{U}$ , (O'Brien y Hurlburt, 1972) para ambas direcciones. Las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.28), en términos de transporte horizontal quedan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U U}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V U}{H} \right) - fV \\ = - \frac{H}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\tau_f^x}{\rho} + \mathcal{A}_H \nabla_H^2 U + F_{Ex} H, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V U}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V V}{H} \right) + fU \\ = - \frac{H}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\tau_f^y}{\rho} + \mathcal{A}_H \nabla_H^2 V + F_{Ey} H, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (2.31)$$

donde  $\nabla_H$  es el operador vectorial nábla horizontal.

Las ecuaciones (2.29) a (2.31), reescritas en forma vectorial dan:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla_H \left( \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{H} \right) + f \hat{k} \times \vec{V} = - \frac{H}{\rho} \nabla_H P - \frac{\vec{\tau}_f}{\rho} + \mathcal{A}_H \nabla_H^2 \vec{V} + \vec{F}_E H,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla_H \cdot \vec{V} = 0.$$

La fricción en el fondo  $\vec{\tau}_f$  será aproximada mediante un modelo cuadrático

$$\vec{\tau}_f = \rho D \frac{|\vec{V}|}{H^2} \vec{V},$$

donde  $D$  es un coeficiente adimensional de fricción en el fondo, con valor de  $3.3 \times 10^{-3}$ , (Ramming y Kowalik, 1980).

Ya establecido el modelo hidrodinámico para las mareas se procede a darle solución.

### 3. APROXIMACION NUMERICA DE LAS ECUACIONES HIDRODINAMICAS

#### 3.1 APROXIMACION EN DIFERENCIAS FINITAS

Debido a la dificultad de encontrar una solución analítica de las ecuaciones hidrodinámicas, ya que estas son ecuaciones diferenciales no-lineales que en este caso se aplican a zonas con batimetría y geometría irregular, se procede a obtener una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales (ecuaciones hidrodinámicas integradas verticalmente) en diferencias finitas.

El método numérico que se aplica fué desarrollado por Monreal Gómez y Salas de León (1986), y es semi-implícito y usa la técnica UPSTREAM para los términos de advección, llevando un error de truncación de segundo orden.

La diferencia de este método con el que usa Leendertse (1967) es que se utiliza una aproximación implícita del término de fricción en el fondo.

Espacialmente se utiliza una malla uniforme de 6.25 km de resolución, discretizando la geometría de la costa y la profundidad del Golfo de California.

El uso de una malla descentrada (fig.11) en el espacio permite reducir el número de puntos  $(U, V, \xi)$ , conservando las mismas características en las ecuaciones en diferencias finitas que en una malla centrada, reduciendo así los tiempos de cálculo para la solución numérica.

En esta malla, se toma en cuenta, en cada punto nodal a h, los valores de U, y de  $\xi$ , en la horizontal, se alternan, es decir esquemáticamente en el renglón i se tiene:

$$\xi_{i,j-1} \quad h_{2i,2j-2} \quad \text{---} \quad U_{i,j} \quad h_{2i,2j-1} \quad \text{---} \quad \xi_{i,j} \quad h_{2i,2j} \quad \text{---} \quad U_{i,j+1} \quad h_{2i,2j+1}$$

en la vertical los valores que están alineados son V y  $\xi$

En la malla, se ajusta la profundidad en todos los puntos introduciendo una matriz de mayor densidad con respecto a los valores U, V, y  $\xi$ , en cambio se reducen los tiempos de cálculo, ya que se simplifican las pruebas en las fronteras.

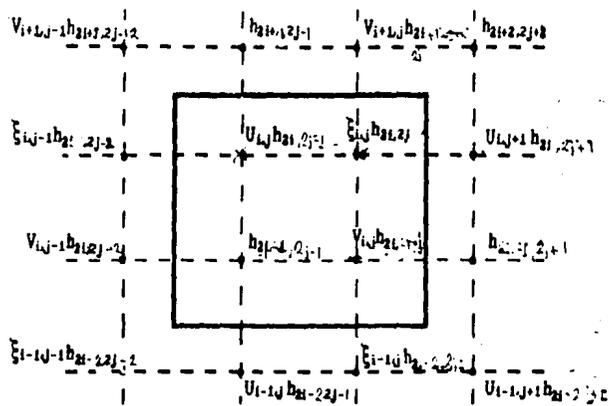


fig. 11 Malla espacial descentrada

Este método usado por Platzman (1959) y después por Leendertse (1967) introduce dos matrices paralelas para  $U$ ,  $V$  y  $\xi$ , con los mismos valores  $(i,j)$  en cada variable.

La figura 12, muestra la geometría real del Golfo de California y el resultado de usar la malla espacial propuesta en la solución del modelo.

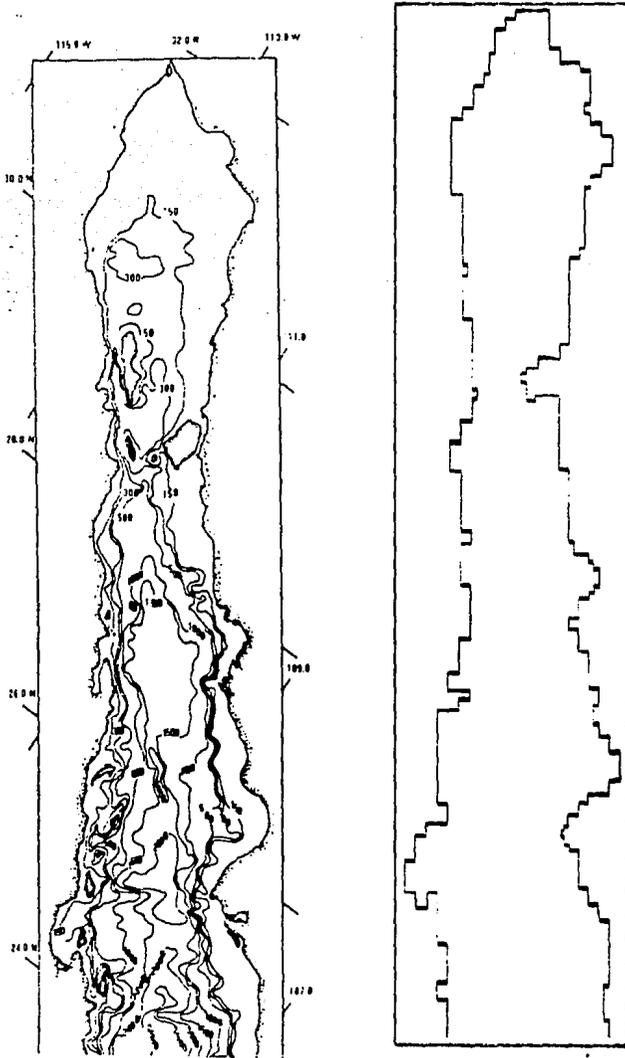


fig. 12. Geometría real del Golfo de California y aproximación de la costa usada en la solución numérica.

### 3.2. DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES

3.2.1. Aproximación en diferencias finitas de los operadores diferenciales temporales: método semi-implícito.

En la aproximación temporal se utiliza un método semi-implícito con doble paso de integración, llamado por algunos autores como salto de rana, salto de borrego o a dirección alternada, este método consiste en integrar sobre el tiempo por medio de dos operaciones sucesivas sobre un intervalo de tiempo dado. En  $n+1/2$ , se calcula el transporte  $V$  con un procedimiento explícito y  $U$  con uno implícito,  $\xi$  es calculada con los valores de  $U$  y de  $V$  encontrados en los niveles  $n+1/2$  y  $n$ , respectivamente. Del nivel  $n+1/2$  al  $n+1$  el procedimiento es a la inversa;  $V$  se calcula con un procedimiento implícito y  $U$  con uno explícito, encontrándose  $\xi$  con valores de  $U$  y  $V$  en  $n+1/2$  y  $n+1$  respectivamente.

Este método impide un defasamiento de la solución numérica en cualquier dirección, evita la inversión de matrices grandes del método implícito puro y permite la utilización de intervalos temporales de integración más grandes que el método exclusivamente explícito.

Este método a la vez explícito e implícito se convierte finalmente en semi-implícito, es interesante porque la dispersión numérica de ondas es pequeña.

La aproximación temporal en diferencias finitas de las ecuaciones (2.29) a (2.31), son:

Paso de integración de  $n$  a  $n+1/2$

$$\begin{aligned}
 v^{n+1/2} = v^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{UV}{H} \right]^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{V^2}{H} \right]^n - \frac{\Delta t}{2} g \left[ H \frac{\partial \xi}{\partial y} \right]^n \\
 - (f_o + \beta y) \frac{\Delta t}{2} U^n + A_H \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right]^n + A_H \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]^n \\
 - D \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{|V|}{H^2} \right]^n v^n + [HF_{Ex}]^n
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
U^{n+1/2} = & U^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{U}{H} \right)^n U^{n+1/2} \right] - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{UV}{H} \right]^n \\
& - \frac{\Delta t g}{2} \left[ H^n \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{n+1/2} \right] + (f_o + \beta y) \frac{\Delta t}{2} V^{n+1/2} \\
& + \frac{\Delta_H \Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]^{n+1/2} + \frac{\Delta_H \Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]^n \\
& - D \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{|V|}{H^2} \right]^n U^{n+1/2} + [HF_{Ex}]^n
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\xi^{n+1/2} = \xi^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \right]^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial V}{\partial y} \right]^n \tag{3.3}$$

Segundo semipaso de integración  $n+1/2$  a  $n+1$

$$\begin{aligned}
U^{n+1} = & U^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{H} \right)^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{UV}{H} \right]^{n+1/2} \\
& - \frac{\Delta t g}{2} \left[ H \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]^{n+1/2} + (f_o + \beta y) \frac{\Delta t}{2} V^{n+1/2} \\
& + \frac{\Delta_H \Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]^{n+1/2} + \frac{\Delta_H \Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]^{n+1/2} \\
& - D \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{|V|}{H^2} \right]^{n+1/2} U^{n+1/2} + [HF_{Ex}]^{n+1/2}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
V^{n+1} = & V^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{UV}{H} \right]^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{V}{H} \right)^{n+1/2} V^{n+1/2} \right] \\
& - \frac{\Delta t g}{2} \left[ H^{n+1/2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{n+1} \right] - (f_o + \beta y) \frac{\Delta t}{2} U^{n+1} \\
& + \Delta_H \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right]^{n+1/2} + \Delta_H \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]^{n+1} \\
& - D \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{|V|}{H^2} \right]^{n+1/2} V^{n+1} + [HF_{Ex}]^{n+1}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\xi^{n+1} = \xi^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \right]^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial V}{\partial y} \right]^{n+1} \quad (3.6)$$

donde  $\beta \left( = \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  y  $f_0$  es debido a la aproximación plano- $\beta$ .

### 3.2.1. Aproximación en diferencias finitas de operadores

diferenciales espaciales

Las ecuaciones de cantidad de movimiento y las ecuaciones (2.29) a (2.31) en diferencias finitas espaciales, quedan expresadas como sigue:

En la ecuación de continuidad los términos  $\frac{\partial U}{\partial x}$  y  $\frac{\partial V}{\partial y}$  quedan:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i,j} \cong \frac{1}{\Delta x} (U_{i,j+1} - U_{i,j}) + O(\Delta x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{i,j} \cong \frac{1}{\Delta y} (V_{i+1,j} - V_{i,j}) + O(\Delta y).$$

La ecuación de la cantidad de movimiento, en la dirección  $x$ , resulta:

El término de gradiente de presión:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{i,j} \cong \frac{1}{\Delta x} (\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}) + O(\Delta x).$$

El término de advección con el método upstream:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{H} \right) &\cong \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \left[ \frac{U}{H} \Big|_{i,j+1/2} + \left| \frac{U}{H} \right|_{i,j+1/2} \right] U_{i,j} \right. \\ &+ \left[ \frac{U}{H} \Big|_{i,j+1/2} - \left| \frac{U}{H} \right|_{i,j+1/2} \right] U_{i,j+1} \\ &\left. - \left[ \frac{U}{H} \Big|_{i,j-1/2} + \left| \frac{U}{H} \right|_{i,j-1/2} \right] U_{i,j-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{U}{H} \Big|_{i,j-1/2} - \frac{U}{H} \Big|_{i,j-1/2} \right] U_{i,j} \Big\} + O\{\Delta x^2\} \\
\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{UV}{H} \right) \Big|_{i,j} & \cong \left\{ \left[ \frac{V}{H} \Big|_{i+1/2,j} + \frac{V}{H} \Big|_{i+1/2,j} \right] U_{i,j} \right. \\
& + \left[ \frac{V}{H} \Big|_{i+1/2,j} - \frac{V}{H} \Big|_{i+1/2,j} \right] U_{i+1,j} \\
& - \left[ \frac{V}{H} \Big|_{i-1/2,j} + \frac{V}{H} \Big|_{i-1/2,j} \right] U_{i-1,j} \\
& \left. - \left[ \frac{V}{H} \Big|_{i-1/2,j} - \frac{V}{H} \Big|_{i-1/2,j} \right] U_{i,j} \right\} \\
& + O\{\Delta y^2\} ,
\end{aligned}$$

esta aproximación es la denominada Up-stream, y el nodo  $U$  que se toma en cuenta en esta aproximación, depende de la dirección del flujo, tanto en  $x$  como en  $y$ .

El término de viscosidad turbulenta es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{i,j} & \cong \frac{1}{\Delta x^2} (u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) + O\{\Delta x^2\} \\
\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{i,j} & \cong \frac{1}{\Delta y^2} (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + O\{\Delta y^2\} .
\end{aligned}$$

El término de Coriolis es desarrollado como un promedio entre cuatro puntos:

$$\begin{aligned}
fV & \cong \left( f_0 + \beta(i-1)\Delta y \right) \cdot \\
& \left( - \frac{V_{i,j} + V_{i+1,j} + V_{i+1,j-1} + V_{i,j-1}}{4} \right)
\end{aligned}$$

donde  $f_0 = 4.49 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  y  $\beta = 2.17 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .





$$U_{l,j-1} = W_{l,j-1} U_{l,j} + G_{l,j-1}$$

eliminando  $U_{l,j-1}$  de la ecuación (3.8), se tiene

$$U_{l,j} = \frac{-c_{l,j}}{a_{l,j} W_{l,j-1} + b_{l,j}} U_{l,j+1} + \frac{TI_{l,j} - a_{l,j} G_{l,j-1}}{a_{l,j} W_{l,j-1} + b_{l,j}}$$

comparando con la ecuación (3.10), se puede decir que:

$$W_{l,j} = \frac{-c_{l,j}}{a_{l,j} W_{l,j-1} + b_{l,j}}$$

y

$$G_{l,j} = \frac{TI_{l,j} - a_{l,j} G_{l,j-1}}{a_{l,j} W_{l,j-1} + b_{l,j}}$$

En el caso en que  $U_{l,1} = 0$ , entonces:

$$U_{l,1} = W_{l,1} U_{l,2} + G_{l,1} = 0$$

$W_{l,1} = 0$  y  $G_{l,1} = 0$  para todo valor de  $U_{l,2}$ .

Para calcular el valor de  $W_{l,j}$  y de  $G_{l,j}$  en el intervalo  $2 \leq j \leq m-1$ , se hace lo siguiente

$$W_{l,2} = -\frac{c_{l,2}}{b_{l,2}} \quad G_{l,2} = \frac{TI_{l,2}}{b_{l,2}}$$

$$W_{l,3} = -\frac{c_{l,3}}{a_{l,3} W_{l,2} + b_{l,3}} \quad G_{l,3} = \frac{TI_{l,3} - a_{l,3} G_{l,2}}{a_{l,3} W_{l,2} + b_{l,3}}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$W_{l,m-1} = -\frac{c_{l,m-1}}{a_{l,m-1} W_{l,m-1} + b_{l,m-1}} ; \quad G_{l,m-1} = \frac{TI_{l,m-1} - a_{l,m-1} G_{l,2}}{a_{l,m-1} W_{l,m-1} + b_{l,m-1}}$$

$U_m$  queda entonces como  $U_{m-1}, U_{m-2}, \dots, U_2$ , a partir de la ecuación (3.10):

$$U_{l,m-1} = W_{l,m-1} U_{l,m} + G_{l,m-1}$$

$$U_{l,m-2} = W_{l,m-2} U_{l,m-1} + G_{l,m-2}$$

.

.

$$U_{l,2} = W_{l,2} U_{l,3} + G_{l,2}$$

usando este método, se obtienen valores en los cuales es posible trabajar, así:

$$|W_{l,j}| \leq 1$$

$$-\frac{c_{l,j}}{b_{l,j} + a_{l,j}} \leq 1,$$

se llega a:

$$0 \leq W_{l,j} \leq 1,$$

para toda  $l$  en el intervalo  $2 \leq j \leq m-1$ .

### 3.3. ANALISIS DE LA ESTABILIDAD, CONSISTENCIA Y CONVERGENCIA

#### DEL ESQUEMA NUMERICO.

Para la solución de las ecuaciones hidrodinámicas del modelo de mareas se ha establecido un esquema numérico, este sistema de ecuaciones es aproximado en diferencias finitas por medio de series de Taylor. De la misma forma, el sistema de ecuaciones en diferencias finitas puede reescribirse como derivadas parciales, por medio de un desarrollo en series de Taylor término a término, de tal manera que cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ , se regresa al sistema original. Si el sistema de ecuaciones en diferencias cumple esta condición, entonces se dice que es un sistema consistente.

La estabilidad implica que el error de truncación que se obtiene al aproximar las ecuaciones hidrodinámicas del modelo tienda a cero al desarrollarse computacionalmente la solución, es decir un pequeño error generado tiende a amortiguarse y no a amplificarse. Sin embargo el hecho de que el error tienda a cero no implica que la solución tienda a la solución real.

Si el esquema es inestable, la presencia de una perturbación extraña daría como consecuencia una desviación cada vez más grande entre la solución real y la aproximada. Se analizará el comportamiento del esquema numérico al introducir de manera arbitraria, un error escrito como una perturbación en forma de serie de Fourier, este método se conoce como el método de amplificación de modos de Fourier.

El método de amplificadores de Fourier para probar la estabilidad de un esquema se basa en el hecho de que el valor absoluto de los valores propios de la matriz de amplificación, debe ser menor o igual a uno, que es la condición de estabilidad de von Neuman.

Para obtener esa matriz de amplificación se supone que un conjunto de errores existen en un momento dado en las soluciones aproximadas.

Se sustituyen las variables  $U$ ,  $V$  y  $\xi$  por series discretas de Fourier:

$$\xi(x, y, t) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \exp i(Kx + Ly + \sigma t) ,$$

$$U(x, y, t) = \sum_{\alpha} U_{\alpha} \exp i(Kx + Ly + \sigma t) ,$$

$$V(x, y, t) = \sum_{\alpha} V_{\alpha} \exp i(Kx + Ly + \sigma t) ,$$

donde  $i = \sqrt{-1}$   $K$  y  $L$  son los números de onda en dirección  $x$  y  $y$  respectivamente y  $\sigma$  es la frecuencia de las ondas espúreas.

En la solución numérica  $\xi$ ,  $U$  y  $V$  se calculan en función de la posición de la malla en  $i,j$ :

$$\begin{aligned}\xi_{i,j}^n &= \xi_c \exp i(jK\Delta x + iL\Delta y), \\ U_{i,j}^n &= U_c \exp i((j-1/2)k\Delta x + iL\Delta y), \\ V_{i,j}^n &= V_c \exp i(jK\Delta x + (i-1/2)L\Delta y),\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\xi_c &= \xi^* \exp (in\sigma\Delta t), \\ U_c &= U^* \exp (in\sigma\Delta t), \\ V_c &= V^* \exp (in\sigma\Delta t),\end{aligned}$$

$\xi^*$ ,  $U^*$ ,  $V^*$  son amplitudes características de  $\xi$ ,  $U$  y  $V$  en el Golfo.

Introduciendo estas ecuaciones linealizadas y discretizadas se obtiene la forma matricial siguiente:

$$B\phi^{n+1/2} = A\phi^n ; D\phi^{n+1} = C\phi^{n+1/2}, \quad (3.11)$$

con

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ 0 & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & D_{13} \\ 0 & D_{22} & 0 \\ D_{31} & 0 & D_{33} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

siendo los coeficientes:

$$A_{1,1} = 1 + \frac{A \Delta t}{H \Delta x} (\cos K\Delta x + \cos L\Delta y - 2)$$

$$A_{1,3} = -2i \operatorname{sen} \frac{K\Delta x}{2} \left[ 1 + \frac{A \Delta t}{H \Delta x^2} (\cos K\Delta x + \cos L\Delta y - 2) \right]$$

$$A_{2,2} = 1 + \frac{A \Delta t}{H \Delta x^2} (\cos K\Delta x - 1)$$

$$A_{3,1} = -i \frac{\Delta t}{\Delta x} \operatorname{sen} \frac{K\Delta x}{2}$$

$$A_{3,3} = 1$$

$$B_{1,1} = B_{3,3} = 1$$

$$B_{2,2} = 1 - \frac{4H}{\Delta x^2} \Delta t (\cos L\Delta y - 1)$$

$$B_{2,3} = igH \frac{\Delta t}{\Delta y} \operatorname{sen} \frac{L\Delta y}{2}$$

$$B_{3,2} = i \frac{\Delta t}{\Delta y} \operatorname{sen} \frac{L\Delta y}{2}$$

$$C_{1,1} = 1 + \frac{4H}{\Delta x^2} \Delta t (\cos L\Delta y - 1)$$

$$C_{2,2} = 1 + \frac{4H}{\Delta x^2} \Delta t (\cos K\Delta x + \cos L\Delta y - 2)$$

$$C_{2,3} = -igH \frac{\Delta t}{\Delta y} \operatorname{sen} \frac{L\Delta y}{2}$$

$$C_{3,2} = -i \frac{\Delta t}{\Delta y} \operatorname{sen} \frac{L\Delta y}{2}$$

$$C_{3,3} = 1$$

$$D_{1,1} = 1 - \frac{4H}{\Delta x^2} \Delta t (\cos K\Delta x - 1)$$

$$D_{1,3} = igH \frac{\Delta t}{\Delta y} \operatorname{sen} \frac{K\Delta x}{2}$$

$$D_{2,2} = D_{3,3} = 1$$

$$D_{3,1} = i \frac{\Delta t}{\Delta x} \operatorname{sen} \frac{K\Delta x}{2}$$

se observa de la ecuación (3.11) que:

$$\phi^{n+1/2} = B^{-1} A \phi^n ,$$

entonces se llega a:

$$\phi^{n+1} = E \phi^n ,$$

donde  $E = D^{-1} C B^{-1} A$ .

$E$  es llamada matriz de ampliación de Lax, (Ramming y Kowalik, 1980). La estabilidad del esquema depende de los valores propios de  $E$ . Tomando en cuenta todos los valores posibles de la longitud de onda entre  $\Delta x$  y  $\Delta y$ . La longitud de la onda mínima del esquema será  $2\Delta x$ , ya que  $\Delta x = \Delta y$  entonces los números de onda se encontrarán entre  $0$  y  $\pi/\Delta x$ , así que los valores de  $K\Delta x$  y  $L\Delta y$  están entre  $0$  y  $\pi$ , siendo  $\pi$  el valor más restrictivo entonces se analiza solo el caso en el cual se toman valores de  $\pi$  (Runday, 1976). von Neumann establece que los valores propios ( $\lambda$ ) de  $E$  deben satisfacer la relación:

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t) ,$$

para todos los valores de  $K\Delta x$  y  $L\Delta y$  entre  $0$  y  $\pi$  basta con que se cumpla:

$$|\lambda| \leq 1 ,$$

para demostrar estabilidad en el esquema.

Los valores propios de la matriz  $E$  se obtienen a partir de la ecuación característica correspondiente a:

$$\det |E - \lambda I| = 0 ,$$

donde  $I$  es la matriz identidad. De la solución numérica de la ecuación característica se encuentra una dependencia inversa del esquema en el paso de integración  $\Delta t$  con la viscosidad turbulenta  $\mathcal{A}_H$  y una dependencia directa con el paso espacial de la malla ( $\Delta x$ ), cuando  $\mathcal{A}_H = 0$  tenemos que el esquema es incondicionalmente estable (Monreal Gómez y Salas de León, 1990).

La combinación de los esquemas implícitos (que, en general son incondicionalmente estables) con los explícitos, dan condiciones de estabilidad diferentes, Holland y Lin (1975) proponen dos criterios de estabilidad para este tipo de esquemas, esos criterios basados en un análisis físico de las ecuaciones de movimiento dan:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\mathcal{A}_H} , \quad (3.12)$$

el cual es muy similar al que se obtiene numéricamente. El valor de  $\Delta_H$  utilizado fué de 2 000 m<sup>2</sup>/s. Por otro lado el teorema de Nyquist (Papoulis, 1978), establece que para obtener información sobre un proceso de período  $T$ , la frecuencia de muestreo debe ser  $\pi/T$ ; entonces, dependiendo del período de la componente de marea se tendrá un  $\Delta t$  acotado por la frecuencia de Nyquist. Por ejemplo, en el caso de componente  $M_2$  cuyo período es 12.42 h (44 712 s), el intervalo máximo de integración numérica sera 14 232.2 s. Por cuestiones operativas al calcular la fase y la amplitud en cada punto de la malla se utilizó un  $\Delta t$  de 876.70 s, para esta componente.

El teorema de Lax establece que para que un esquema sea convergente es necesario y suficiente que el esquema sea estable y consistente (Ramming y Kowalik, 1980), por lo que al considerar la condición de estabilidad ecuación (3.12) y el hecho que cuando  $\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0$  el error de truncación tiende a cero, se asegura la convergencia de la solución.

### 3.4. CONDICIONES DE FRONTERA.

Para resolver el sistema de ecuaciones es necesario establecer condiciones de frontera, se pueden considerar dos tipos de frontera en este modelo: la cerrada que corresponde a la costa, y la frontera abierta que es la boca del Golfo, en las primeras se establecen condiciones de no flujo o de impermeabilidad a través de las fronteras cerradas, o contorno de la costa.

Como el paso espacial de la malla, tanto en dirección  $x$  como en  $y$ , es de 6.25 km, no es posible considerar la presencia de la capa límite o de un gradiente tangencial de velocidad a la costa, ya que dicho gradiente se ha observado que alcanza sólo algunos cientos de metros (Nihoul, 1977). La no existencia de flujo a través de las fronteras cerradas se expresa matemáticamente como:

<i>costa zonal</i>		<i>costa meridional</i>
$V = 0$		$U = 0$
$\frac{\partial U}{\partial y} = 0$		$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$

En las fronteras abiertas se prescribe  $\xi(x,y,t)$  en lugar de la velocidad; la amplitud y la fase de la onda de marea se han utilizado para obtener  $\xi(x,y,t)$ , pues en general, la velocidad presupone la existencia de corrientes de marea las cuales son difíciles de medir u obtener, en cambio, la amplitud y la fase se obtienen de estaciones mareográficas cercanas a la frontera abierta.

En este caso la elevación de la onda de marea  $\xi = \xi(x,y,t)$  es expresada como una función cosenoidal con amplitudes y fases obtenidas a partir de constantes armónicas de mareas reportadas por el Instituto de Geofísica de la UNAM. Una ecuación general para expresar la evolución de una onda de marea al tiempo  $t$  está dada por:

$$\xi = A \cos[nt + Gwch(v_0 + u) + \frac{n}{15} S^0 - pL + K^0] \quad (3.13)$$

denotando la elevación de la onda  $n$  en el instante  $t$  para un meridiano origen de tiempo arbitrario  $S$ ;  $-pL$  es la corrección para la longitud local

(Mónaco, 1953), expresando todo en tiempo referido al meridiano de Greenwich (GMT) o al meridiano local,  $S^0$  y  $-pL$  representan la longitud en grados al oeste de Greenwich. El tiempo en el cual  $\xi$  es máximo con respecto a Greenwich está dado por:

$$nt + Gwch(V_0 + u)$$

obteniendo de (3.13):

$$\xi = A \cos(\omega t - g^0)$$

donde  $g^0 = K^0 + pL - nS^0 / 15$ .

La elevación en cada una de las estaciones mareográficas esta calculada con ayuda de la ecuación (3.13) con fases relativas al meridiano local.

Para obtener las elevaciones instantáneas a partir de datos de dos estaciones mareográficas, en cada uno de los puntos de los nodos de la frontera abierta, para cada tiempo se interpola linealmente en cada punto  $\xi_{i,j}$  de la malla sobre la frontera abierta, posteriormente las velocidades son obtenidas a partir de considerar la existencia de un equilibrio entre el término de Coriolis y el gradiente de presión.

### 3.5. VALORES INICIALES DE AMPLITUD Y FASE.

Los valores iniciales de frontera amplitud y fase de las componentes de marea  $M_2$ ,  $S_2$  y  $K_1$  con los que el programa comienza sus cálculos se establecieron de la siguiente manera: de mediciones hechas en estaciones mareográficas localizadas en Los Cabos, Mazatlán y Topolobampo, se hace una aproximación lineal entre los valores Mazatlán y Topolobampo tanto para la amplitud como para la fase fijando valores en El Dorado, después se hace nuevamente una aproximación lineal ahora entre Los Cabos y El Dorado fijando amplitudes y fases en los 42 nodos o puntos que consta la malla en la boca del Golfo.

Las amplitudes y fases de los puntos fijos: Los Cabos y El Dorado son:

Componente de marea	Amplitud (cm)		Fase ( $105 \cdot W$ )	
	Los Cabos	El Dorado	Los Cabos	El Dorado
$M_2$	36.29	32.80	252.05	273.83
$S_2$	23.67	22.82	251.17	269.99
$K_1$	22.5	22.98	77.6	74

#### 4. RESULTADOS

Al resolver numéricamente las ecuaciones hidrodinámicas, se obtienen valores de  $U$ ,  $V$  y  $\xi$  en cada uno de los nodos de la malla, sin embargo; un análisis más objetivo y práctico sobre la onda de marea se realiza mediante mapas cotidales como se ha explicado en el primer capítulo.

En este trabajo, para obtener dichos mapas cotidales de cada una de las componentes armónicas, se aplicó el análisis de Fourier, calculando los coeficientes de cada armónico deseado.

#### 4.1. Análisis armónico.

Para obtener los resultados numéricos de las ecuaciones establecidas en capítulos anteriores, información de fácil manejo, es necesario realizar un análisis armónico para obtener la amplitud y fase en cada punto de la malla dentro del Golfo, dicho análisis consta de una aplicación sucesiva de una serie de factores de filtración, aplicados a una serie de datos, esos factores de filtración bloquean todos los constituyentes excepto el que deseamos analizar.

El método aplicado consiste en obtener los coeficientes de Fourier de una serie temporal, en este caso de  $\xi(x, y, t)$  la cual es la elevación de la superficie libre del Golfo; es decir, se almacena la solución en cada nodo de la malla durante un periodo ( $T$ ) de la componente que se desee analizar, donde  $T = n\Delta t$ ,  $\Delta t$  es el intervalo de integración temporal el cual debe cumplir con la condición de estabilidad numérica y  $n$  es el número de iteraciones que deben almacenarse para realizar dicho análisis armónico, una condición para  $n$  es que sea un número impar.

Por ejemplo, para la componente  $M_2$  el periodo es 12.42 hr. (44 712 s) una vez estabilizada la solución, se utilizó un  $\Delta t=876.70$  s almacenando 51 matrices de  $\xi$  para un ciclo completo, lo cual significa guardar 51 matrices solución para  $\xi(x, y, t)$ .

Mediante los coeficientes de Fourier se obtiene la amplitud y fase de la componente armónica ( $k$ ).

La amplitud es:

$$A_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

la fase:

$$\phi = \text{arc tan} \left( \frac{B_k}{A_k} \right)$$

siendo  $A_k$  y  $B_k$  en la serie de Fourier los coeficientes del coseno y seno respectivamente.

#### 4.2. Mapas cotidales.

Una carta cotidal muestra características espaciales y temporales de las mareas. Por medio de líneas se unen los puntos con igual amplitud, expresada en centímetros en los mapas presentados, también se unen los puntos con igual fase, expresada en grados relativos al meridiano local ( $105^{\circ}\text{W}$ ). Los puntos nodales llamados 'anfodrómicos', representan una amplitud de valor cero. Estos puntos son los lugares en los cuales rota la onda de marea, en general en el hemisferio norte esta onda gira en dirección contraria a las manecillas del reloj, es decir, en forma ciclónica.

En una carta cotidal, una línea de igual fase indica el lugar en donde la onda de marea tiene su máximo ; el máximo no necesariamente es el mismo en todos los puntos por donde pasa la línea de igual fase. Las líneas de igual amplitud indican el lugar donde esos máximos son iguales aún cuando no ocurran al mismo tiempo. Una de las utilidades de las cartas cotidales es obtener el retardo de la onda de marea entre dos puntos, así como predecir la hora de ocurrencia de marea alta o baja.

Los resultados del análisis armónico permiten obtener cartas cotidales para las componentes  $M_2$ ,  $S_2$  y  $K_1$ , las cuales han sido tratadas en forma independiente. Y serán presentadas a continuación.

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

#### 4.2.1. Componente $M_2$

Analizando el mapa cotidal mostrado para la componente  $M_2$  (fig. 13.a) vemos la existencia de una anfídomía virtual en la Península de Baja California, pues se localiza tierra adentro. La amplitud mínima que se puede observar es de 10 cm aumentando hacia el norte del Golfo hasta llegar a un valor de 180 cm en la cabeza del Golfo.

Haciendo una descripción de la marea, se tiene que la marea entra con una amplitud de 30 cm orientada perpendicularmente a la entrada del Golfo decrece hacia el centro mostrando la pseudoanfídomía, para crecer nuevamente hacia el extremo norte hasta llegar al valor máximo de 180 cm, manteniendo un perfil oeste-este.

La fase cercana en la boca del Golfo, tiene una orientación noroeste-sureste con un valor de  $270^\circ$ , aumenta cerca de la pseudoanfídomía hasta llegar al extremo del Golfo con una orientación casi longitudinal, cruzando amplitudes desde 40 cm hasta 180 cm. Analizando la fase se observa que la componente  $M_2$  progresa de sur a norte.

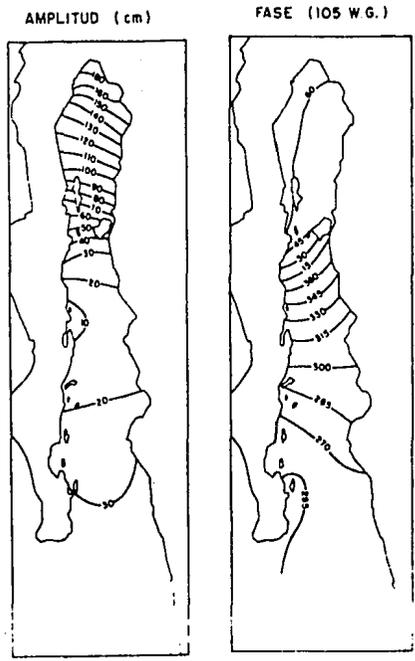
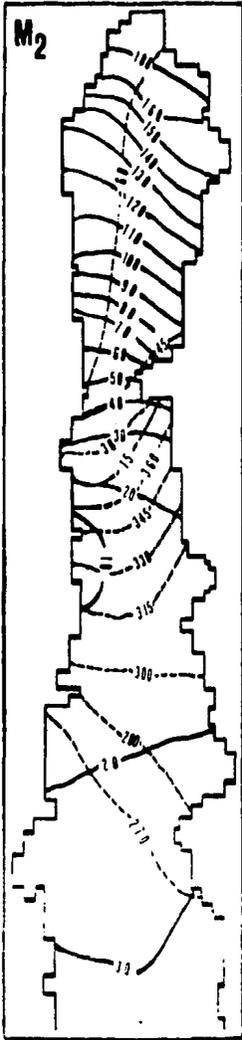


fig. 13 Carta cotidal de la componente de marea  $M_2$ .

— amplitud      ---- fase

a) Resultado de la simulación.

b) Reportados por Morales y Gutierrez de Velasco (1989).

#### 4.2.2. Componente $S_2$

Esta componente de marea (fig. 14) presenta características semejantes a la  $M_2$ ; un punto anfifrónico virtual ubicado tierra adentro localizado aproximadamente en el centro de la península. Valores de amplitud que van desde 20 cm en la entrada del Golfo hasta 100 cm en la parte norte, las líneas de igual amplitud mantienen perfiles casi perpendiculares al eje a lo largo del Golfo; en lo que respecta a la fase, el valor que encontramos es de  $270^\circ$  un poco adentro del Golfo, progresando hacia la cabeza hasta llegar a  $60^\circ$ , las líneas de igual fase cruzan cada vez más líneas de amplitud llegando a una posición casi longitudinal en la última línea marcada, de  $60^\circ$ , la cual cruza amplitudes desde 40 cm hasta 100 cm. En este caso, la componente armónica se propaga de la boca hacia la cabeza con una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj, con eje en la pseudoanfídomía.

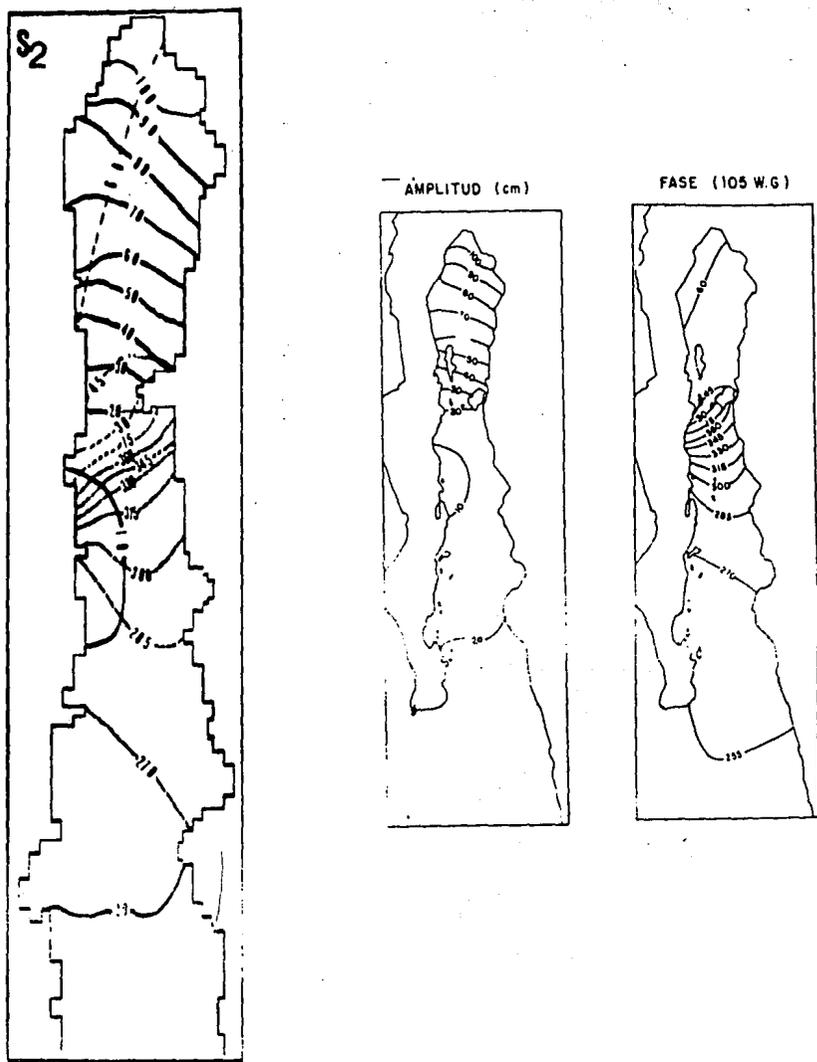


fig. 14 Carta cotidial de la componente de marea  $S_2$ .

—— amplitud      ---- fase

a) Resultado de la simulación.

b) Reportados por Morales y Gutierrez de Velasco (1989).

#### 4.2.3. Componente $K_1$ .

La carta cotidal que se puede trazar para esta componente diurna (fig. 15), muestra amplitudes que van de 24 cm en la entrada del Golfo, progresando con menor gradiente que en las componentes semidiurnas anteriores, hasta un valor de 40 cm en la cabeza.

La última línea trazada, de 42 cm, varía un poco su perfil a una orientación a lo largo del Golfo. Las fases mostradas están comprendidas dentro del valor de  $74^\circ$  a  $80^\circ$ , alineándose longitudinalmente en el Golfo entre los valores  $78^\circ$  y  $80^\circ$ , en  $80^\circ$  no es tan marcada esta orientación como en las anteriores líneas de igual fase. Se observa del mapa cotidal que la onda de marea se propaga hacia el oeste.

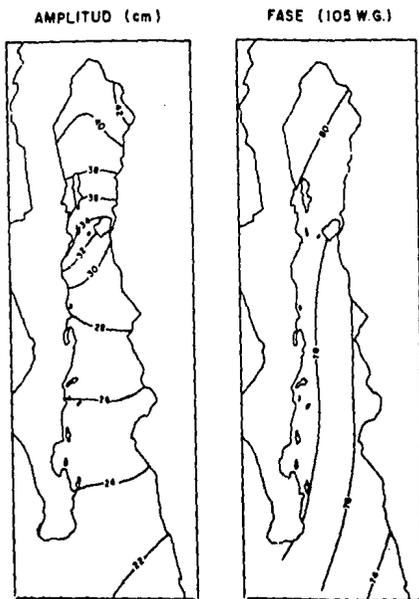
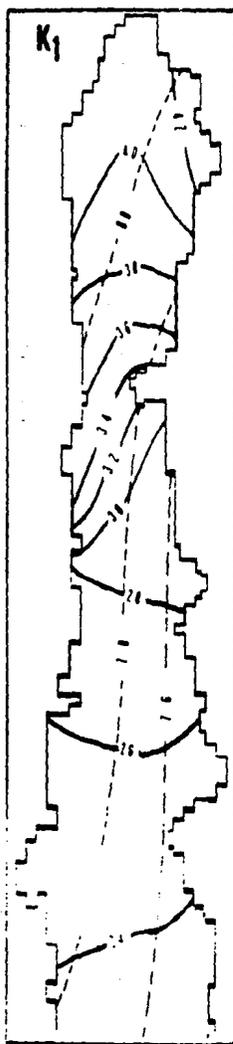


fig. 15 Carta cotidal de la componente de marea  $K_1$ .

—— amplitud      ---- fase

a) Resultado de la simulación.

b) Reportados por Morales y Gutierrez de Velasco (1989).

## CONCLUSIONES.

En general, los mapas cotidales de las componentes semi-diurnas  $M_2$  y  $S_2$  presentan el mismo patrón, amplitudes creciendo al extremo norte con anfíromías virtuales, las fases orientadas, de tal forma que la onda se propaga de sur a norte que es el sentido en que aumenta la fase. Sin embargo, las amplitudes de la componente  $S_2$  son menores que de  $M_2$ .

Comparando los mapas cotidales realizados en este trabajo mediante simulación numérica con los obtenidos por Morales y Gutierrez de Velasco (1989) podemos observar lo siguiente:

Primero: En la carta que corresponde a  $M_2$ , el punto de pseudoanfíromía se localiza en ambos mapas en el centro de la Península. Los valores de amplitud demarcan líneas semejantes al igual que las de fase. El error máximo existente entre los valores calculados y los observados es del 10% en las fases y 5% para las amplitudes.

Segundo: Para los mapas de la componente de marea  $S_2$  nos encontramos con una situación parecida a la anterior, las líneas que muestran las amplitudes se incrementan de la boca al extremo norte, encontrando el punto anfíromico en el centro de la Península. Las líneas de fase presentan gran semejanza con los perfiles y la variación reportados por Morales y Gutierrez de Velasco (1989).

Las mayores diferencias como ya se mencionó, son con respecto a las fases. Sin embargo, se observa un gran parecido entre los dos mapas, en ambos las líneas de amplitud varían, mientras que las fases mantienen un perfil longitudinal al Golfo, excepto en la última componente ( $K_1$ ) que no es tan marcada la similitud.

De lo anterior se puede concluir que el modelo numérico simula adecuadamente las características de las componentes de marea diurna y semi-diurna, manifestando una dominancia de la componente  $M_2$ .

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- Pond S. y G. Pickard *Introductory Dynamic Oceanography* (Pergamon Press, 1978).
- 2.- Mc Lellan H., *Elements of Physical Oceanography* (Pergamon Press).
- 3.- José José, *El Potencial Terrestre* (La Plata, 1968).
- 4.- Wastler T. A., *Spectral Analysis* (U. S. Department of the Interior, 1969).
- 5.- Enfield D., *Manual de Prácticas de Oceanografía Física* (Guayaquil, Ecuador, 1976).
- 6.- Morales Pérez R. A. Y G. Gutierrez de Velasco, *Mareas en el Golfo de California* Geofis. Int., 28(1), 1989.
- 7.- Garret C., *Tides in Gulfs*, Deep sea Research, 23,22, 1975.
- 8.- Salas de León D. A., *Modelisation de la Maree  $M_2$  et de la Circulation Residuelle dans le Gulf du Mexique* Tesis Doctoral, Universite de Liege, Francia, 1986.
- 9.- Gutierrez G. y R. Morales, *Revisión de los datos de marea para el Golfo de California. Informe Técnico, oc-85-03, CIGESE*, 1985.
- 10.- O' Brien J. J. y H. E. Hurlburt, *A numerical model Of coastal upwelling*. Journal Phys. Oceanogr. 2, 14-26, 1972.
- 11.- Rosenberg, D. U. V., *Methods for the numerical solutions of partial differential equations*. American Elsevier Publishing Co. 128 pag. 1969.
- 12.- Holland W. R. y L. B. Lin, *On the generation of mesoscale eddies and their contribution to the oceanic general circulation II. A parameter study*. Journal Phys. Oceanogr. 5 658-669, 1975.
- 13.- Ramming H. G. y Z. Kowalik, *Numerical modelling of marine hydrodynamics. Applications to dynamics physical processes*. Elsevier Scientific Publishing, 368 pag. 1980.
- 14.- Ronday F. C., *Modèles hydrodynamiques. Modélisation des systèmes marins*. Projet Mer. Rapport final. Nihoul J. C. J. (Ed). Service du premier Ministre, Prommagation de la politique Scientifique, Bruxelles, vol 3, 270 pag. 1976.
- 15.- Monreal Gómez M. y D. Salas de León, *Simulación de la circulación en la Bahía de Campeche*. Geofis. Intern., 29(2), 101-111, 1990.
- 16.- Papoulis A., *Sistemas digitales y analógicos, transformadas de Fourier, estimación espectral*. Marcombo Nooixareu (Ed), 308

- pag. 1978.
- 17.- Nihoul J. C. J., *Modèles mathématiques et dynamique de l'environnement*. Ele Publ., Liège, 198 pag. 1977.
  - 18.- Godin G., *The analysis of tides*. University of Toronto press. 264 pp, 1972.
  - 19.- Newman G. y W. J. Pierson Jr., *Principles of Physical Oceanography*. Prentice Hall inc. 545 pp, 1966.
  - 20.- Pedlosky J., *Geophysical fluid dynamics*. Springer-Verlag, Ed. 624 pp, 1979.
  - 21.- Holton J., *An introduction to dynamic meteorology*. Academic Press, 1972.
  - 22.- Landau L. y E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*. Pergamon Press, 1982.
  - 23.- Roca Vila, *Introducción a la Mecánica de los Fluidos*. Limusa, 1980.
  - 24.- Hauser, W., *Introducción a los Principios de Mecánica*, UTEHA, 1969.