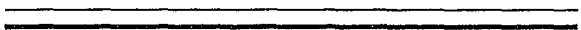


00362
3
2eje.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Evolucion de un plasma dentro de la
descripción MHD disipativa

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

P R E S E N T A

HECTOR PERALES VALDIVIA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JUAN ANTONIO ALMAGUER ANDRADE

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Resumen	1
Capítulo 1 Introducción	3
Capítulo 2 Análisis de estabilidad a dos escalas de tiempo para un plasma con disipación por resistividad, viscosidad y conducción de calor	
Las ecuaciones del modelo	8
Las dos escalas de tiempo	12
El análisis de estabilidad propuesto	14
La aproximación a primer orden	17
La aproximación a segundo orden	20
Capítulo 3 Aplicación del análisis de estabilidad para dos ejemplos	
Ejemplo 1: modos desacoplados	24
Ejemplo 2: acoplamiento entre los modos	28
Capítulo 4 Análisis de los resultados de los ejemplos	33
Capítulo 5 Conclusiones	39
Bibliografía	42
Apéndices	
Apéndice A	44
Apéndice B	47

Apéndice C	53
Apéndice D	55
Tabla 1	57

Resumen

En el presente trabajo se explora una manera de estudiar la estabilidad de un plasma resistivo (r), viscoso (v) y térmicamente conductor (cc); ante perturbaciones pequeñas a partir de un estado estacionario inicial, en el marco del modelo magnetohidrodinámico, buscando hacerlo de manera analítica. Los tratamientos encontrados en la literatura, que hacen uso de la magnetohidrodinámica (MHD), usualmente no consideran el conjunto completo de efectos, salvo para situaciones muy particulares.

El tratamiento que aquí se presenta toma como base una solución estacionaria, y sin flujo, de las ecuaciones de la MHD. En él, a partir de la ecuación de balance de energía se identifican las escalas de tiempo que rigen la evolución del sistema. Dicha ecuación hace las veces de una ecuación constitutiva para poder cerrar el conjunto de ecuaciones. En el supuesto de que las velocidades de Alfvén, el sonido y la del fluido sean similares, son las escalas de tiempo que resultan de los procesos viscoso, resistivo y de conducción de calor, las que imponen el grado de importancia de los términos asociados a ellos. A lo largo del trabajo se considera que los tiempos característicos de los procesos mencionados son del mismo orden, en comparación a la escala de tiempo en que las perturbaciones del campo magnético se propagan —la velocidad de Alfvén—; el cociente entre ambas establece el parámetro, ϵ , para los ordenamientos.

Se supuso que las cantidades físicas se podían desarrollar en serie de potencias de ϵ , a partir del valor del estado estacionario, con excepción del tiempo, para el que se escogen dos escalas, la asociada a la velocidad de Alfvén y la característica de los efectos disipativos, que se consideran independientes. A los términos que incluyen (r), (v) o (cc), se les impone un orden diferente —mayor— al de los demás términos, dado que se considera que todos los efectos son pequeños.

Los desarrollos se efectúan hasta orden dos. A orden cero, se tiene el estado estacionario. A primer orden se obtiene una ecuación para las velocidades que incluye el operador de Bernstein de la MHD ideal. Las soluciones para las velocidades a este orden son prácticamente las usuales de los desarrollos en modos normales, con la diferencia de que los coeficientes dependen de la escala de tiempo de los efectos (v) , (r) y de (cc) . Estos coeficientes no pueden determinarse a este orden, para ello se tiene que ir al siguiente y suponerse que las soluciones del segundo pueden encontrarse como una proyección en el espacio de las soluciones del orden anterior. Esto da lugar a obtener una ecuación del tipo de la del oscilador armónico forzado. Al término de forzamiento se le impone una condición de no resonancia, de la que resultan las ecuaciones para determinar los coeficientes que hacían falta. El comportamiento de estos últimos determina el comportamiento de las soluciones y, por ende, la estabilidad o inestabilidad del sistema.

Se presentan un par de ejemplos en los que se aplica el tratamiento para un plasma dentro de un cilindro circular recto de paredes conductoras y de longitud infinita; pero que presenta periodicidad a lo largo del eje del cilindro. El primero, para un plasma incompresible, puede resolverse enteramente de forma analítica, muestra que no hay acoplamiento entre los modos y resulta estable modo a modo. En el segundo se quita la restricción de la incompresibilidad. Su solución es más complicada ya que presenta acoplamiento entre los modos. Para darse una idea del comportamiento, se examinó qué solución resulta de aproximar la dinámica por un número muy pequeño de modos. Los resultados, que involucran un fuerte trabajo numérico, no fueron los esperados, ya que dado que se trata de un sistema con disipación se pensaba que la perturbación iba a decaer, sucediendo lo contrario. En la literatura hay evidencia de que el comportamiento depende fuertemente del número de modos que se considera. Intentar con más modos para estos casos, resulta impráctico y fuera del espíritu inicial que era la solución analítica.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se habla de manera muy general de los modelos que se emplean para el estudio de los plasmas y de las diversas maneras en que se aborda el problema de la estabilidad en base al modelo magnetohidrodinámico.

Existen diversos modelos clásicos para abordar el estudio de un plasma. En general estos modelos pueden dividirse en dos grupos: los modelos microscópicos y los macroscópicos, también llamados de fluidos. En los primeros, las dimensiones físicas de interés son lo suficientemente pequeñas como para tener que tomar en cuenta los efectos individuales de las partículas constituyentes del plasma, es decir, cuando las dimensiones del problema son comparables al camino libre medio efectivo; estos efectos suelen enmascarse, o incluso ignorarse en los modelos del segundo grupo.

Dentro de los modelos microscópicos puede incluso haber una subdivisión de acuerdo al grado de detalle de la descripción. La descripción más detallada consiste en seguir el movimiento de cada una de las partículas constituyentes del plasma e incluir las interacciones entre ellas. En esta descripción se representa al plasma con una función de distribución en el espacio fase de todas las partículas (el espacio Γ de la mecánica estadística) y los campos electromagnéticos producidos por todas las partículas cargadas. Aún cuando ésta es la manera más completa de describir a un plasma, es en muchas ocasiones de poca utilidad por la complicación que representa el manejar funciones que dependen de un número enorme de partículas (las densidades en un plasma pueden ser desde 10^6 partículas por m^3 , en el gas interestelar, hasta 10^{26} en los plasmas generados por laser, véase la tabla I que aparece al final de los apéndices), y usualmente sirven sólo

como punto de partida para descripciones reducidas que buscan la evolución del sistema a partir de un estado inicial. En estas descripciones reducidas se trata al plasma como a un continuo en el espacio fase, por medio de una función de distribución en el espacio fase de una partícula (el conocido espacio μ de la mecánica estadística) en presencia de un campo electromagnético promedio consistente con la distribución continua de partículas. Si se incluyen los efectos de las colisiones se llega a la ecuación de Boltzman; y en caso de no incluirlos se tiene la de Vlasov. Cuando se está en presencia de un campo magnético intenso, las ecuaciones se pueden simplificar aún más si se considera solamente el movimiento de los centros guía, que no son otra cosa que las líneas del campo, ya que como bien se sabe las partículas cargadas giran alrededor de las líneas de campo magnético siguiendo la evolución de estas últimas.

Pasando a los modelos de fluidos, el plasma se representa como un continuo en el espacio real y para su descripción se utilizan sólo cantidades tales como la densidad, la velocidad del fluido, la temperatura, el flujo de energía, etc. y los campos electromagnéticos consistentes con estas variables macroscópicas. Hay dos tipos de descripciones macroscópicas para un plasma de dos especies: una trata al plasma como un fluido de dos componentes, uno de electrones y otro de iones que no están en equilibrio termodinámico uno con otro; la otra, en cambio, los considera en equilibrio y por ser los iones mayormente masivos puede considerarse como un fluido de una sola componente (como en la hidrodinámica) con la suposición adicional de que localmente hay neutralidad eléctrica. El modelo de dos fluidos es útil para obtener la respuesta electrostática del plasma, mientras el de uno, usualmente llamado el modelo de la magnetohidrodinámica (MHD), permite acoplar directamente las ecuaciones de Maxwell y con ello se puede describir a un plasma en presencia de un campo magnético que no es homogéneo.

Cuando en la MHD se desprecian los efectos disipativos (resistividad eléctrica, viscosidad y conducción de calor), se obtiene lo que se conoce como la MHD ideal. No obstante su simplicidad, probó su capacidad predictiva experimental desde inicios de los años cin-

cuenta, cuando explicó satisfactoriamente las inestabilidades del "pinch" dinámico. En los trabajos de Rosenbluth de principios de 1956 [1] se demuestra la existencia de una configuración del tipo "pinch" completamente estable, dentro del marco de la MHD ideal. Hubo un gran revuelo causado por esta noticia, ya que se llegó a pensar que se tenían ya al alcance los reactores de fusión. Poco tiempo después se construyó la máquina con las especificaciones de Rosenbluth, pero los resultados no fueron del todo satisfactorios ya que se encontró que el "pinch" podía considerarse estable para tiempos del orden del tiempo hidrodinámico ($t_H = a(4\pi\langle\rho\rangle)^{1/2}/B \sim 10^{-7} - 10^{-6}$ s), pero a tiempos ligeramente mayores la inestabilidad tipo "kink" terminaba con el "pinch". Con estudios más detallados se notó que aún en la fase estable se tenían fluctuaciones irreproducibles. Posteriores análisis de este y otros experimentos han puesto de manifiesto que el proceso de disipación juega un importante papel. Con todo y esto la MHD ideal sigue siendo el punto de partida de numerosas investigaciones; bien sea que se le use comparativamente, que se le incluyan modificaciones o correcciones, que se suponga su validez en casi todo el plasma y sólo en regiones bien localizadas se complemente, sustituya o combine con otros tratamientos, etc. Un trabajo interesante en que las cantidades en la dirección paralela al campo magnético son tratadas desde el punto de vista cinético, mientras las que se refieren a la parte perpendicular se trabajan desde la perspectiva de los fluidos, puede verse en la referencia [2].

Cuando se pasa de las modificaciones antes descritas a incluir disipación debida a una conductividad finita, viscosidad y conducción de calor (todas o sólo algunas) para todo el plasma, se dejan los dominios de la MHD ideal para entrar a los de la MHD disipativa; y si bien es cierto que esta última comparte en buena medida las limitaciones de su hermana menor, permite un tratamiento más próximo a lo que sucede en la realidad sin las enormes complicaciones de otros tratamientos. La inclusión de los efectos disipativos permite abordar un número mayor de casos; pero, por otro lado, complica el tratamiento matemático.

Si bien es cierto, que debido a las singulares características del viento solar y de muchos otros plasmas espaciales y astrofísicos, la MHD ideal es ampliamente usada en astronomía [3], la MHD disipativa resulta ser muy útil en los estudios de la atmósfera solar, donde ha tenido tanto éxito que ha llegado a convertirse en la herramienta básica.

Usualmente en el estudio de la estabilidad, se usan algunas técnicas que no son exclusivas de los plasmas. Por ejemplo, el método de los modos normales, considerado el método propio para el análisis de la estabilidad de los sistemas mecánicos, que consiste en la solución de las ecuaciones de movimiento linealizadas para perturbaciones pequeñas alrededor del equilibrio y a partir de ellas, a través del análisis de Fourier y la solución del problema asociado de valores propios, se calculan las tasas de crecimiento de las amplitudes de los modos y se determinan las condiciones bajo las cuales puede ocurrir una inestabilidad. Están también los métodos que emplean una formulación variacional de las ecuaciones de movimiento (un ejemplo reciente puede verse en la referencia [4]). En esta modalidad cae el método del principio de la energía, basado en el cálculo de la variación de la energía potencial provocada por la perturbación. Con este método no es posible determinar las tasas de crecimiento de la inestabilidad (en caso de haberla) como puede hacerse con el de los modos normales, pero permite tratar equilibrios más complicados, aunque siempre para sistemas conservativos. Bernstein, Frieman, Kruskal y Kulsrud [5], fueron los primeros que aplicaron esta técnica en el caso de los plasmas. Trabajos recientes intentan extender este tratamiento a casos con disipación [6].

Uno de los primeros trabajos que abordó la estabilidad en el marco de la MHD disipativa, fue el de Furth, Killen y Rosenbluth [7], quienes consideran el método de modos normales para tratar una capa de corriente en una geometría plana e infinita en un plasma incompresible y con resistividad.

No existe un método general que pueda aplicarse en todos los casos debido a la gran variedad de situaciones que aparecen y por el hecho de que las ecuaciones de la MHD

no son lineales. Se pueden establecer ciertas aproximaciones de uso general, como podría ser el considerar un equilibrio ideal, un plasma incompresible, o bien, incluir los efectos disipativos uno por uno, queriendo dar a entender con esto que se puede tener un plasma que tenga únicamente resistividad, o bien, que sólo se considere la viscosidad o las pérdidas por conducción de calor; pero nunca se han tratado todas a la vez.

En un afán de encontrar un método que pudiera servir para varias situaciones sin mayores modificaciones y que de entrada incluyera la viscosidad, la resistividad eléctrica y la conducción de calor se desarrolla en el presente trabajo un formalismo para el análisis de la estabilidad a distintas escalas de tiempo. Dicho formalismo hará uso de resultados conocidos y pretende, hasta donde sea posible, obtener soluciones analíticas. Como podrá verse en el siguiente capítulo, que es el que presenta el tratamiento formal, todo parece indicar que se puede cumplir con ese objetivo, aunque a la hora de aplicarlo a algunos ejemplos, que se presentan en el capítulo 3, se verá que no es enteramente posible.

En el capítulo 4 se hace un balance del modelo a la luz de los resultados de los ejemplos. Y, finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones.

Análisis de estabilidad a dos escalas
de tiempo para un plasma con disipación
por resistividad, viscosidad y conducción de calor

Las ecuaciones del modelo

Si se considera un plasma que tiene una conductividad eléctrica finita, que conduce calor y que, además, tiene viscosidad el modelo adecuado para su estudio, desde el punto de vista macroscópico, es el de la MHD disipativa. Las ecuaciones que describen el comportamiento del plasma bajo este modelo son:

La de continuidad para la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

donde ρ es la densidad de masa y \mathbf{v} la velocidad del fluido.

La de conservación de momento

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot (\nu \bar{\sigma}), \quad (2.2)$$

con p la presión, \mathbf{B} el campo magnético, \mathbf{J} la densidad de corriente, que queda definida a través de $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$, ν es el coeficiente de viscosidad y $\bar{\sigma}$ es la parte disipativa del tensor de esfuerzos que a continuación se expresa de forma genérica para un fluido newtoniano

$$\bar{\sigma}_{ik} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)$$

* Nótese que se hará uso del sistema MKS, con la modificación de que la densidad de corriente (\mathbf{J}) tiene unidades de intensidad de campo magnético (B) entre longitud; por ello no le extrañe el no encontrar μ_0 donde usualmente aparecen y viceversa.

que como puede verse se trata de un tensor simétrico.

Ley de Faraday-Ohm

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \left(\frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) = 0, \quad (2.3)$$

η es el coeficiente de resistividad eléctrica y μ_0 la permeabilidad magnética del vacío. Aquí cabe mencionar que se ha despreciado la corriente de desplazamiento y el término Hall.

La de balance de energía

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma(p \nabla \cdot \mathbf{v}) = (\gamma - 1) \left[\frac{\eta}{\mu_0} J^2 + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \nu \bar{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \right] + S, \quad (2.4)$$

donde γ es el cociente de los calores específicos, κ el coeficiente de conductividad térmica y S una fuente externa.

Y la ley de Gauss para el campo magnético

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (2.5)$$

En las ecuaciones anteriores pueden verse a las de la mecánica de fluidos, acopladas con las de Maxwell de la electrodinámica porque se trata de un fluido conductor. Para poder cerrar el conjunto de ecuaciones, es decir, tener tantas variables como ecuaciones, es necesario introducir una ecuación de estado. Es por ello que aparece la ecuación de balance de energía. La elección que se ha hecho no es arbitraria y se ha escogido tomando su contraparte en la MHD ideal e incluyendo los efectos disipativos de manera que coincidan con los modelos usuales para la conducción de calor, las pérdidas debidas a la viscosidad del medio y el calentamiento óhmico** ; el único término que es un tanto arbitrario podría ser el de S , que se ha introducido para significar la posibilidad de tener una fuente externa que bien podría alimentar al plasma (piénsese en un método de calentamiento accesorio) o extraer energía para ayudar a la estabilización. A lo largo del trabajo se hace uso de la ley de los gases ideales para relacionar la presión con la temperatura.

** Una ecuación parecida, en el contexto de la mecánica de fluidos, se deduce en [8].

Con el objeto de evitar excesivas complicaciones, se supondrá que el plasma se comporta de manera homogénea e isotrópica, aunque bien se sabe que no es cierto, debido a la presencia del campo magnético. Bajo la anterior suposición, los coeficientes de conductividad térmica, resistividad y viscosidad serán escalares, considerando, además, que dependen de la temperatura. La dependencia será del estilo de la de Spitzer para la resistividad y como la clásica para las otras dos, con la siguiente particularidad:

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{-3/2}, \quad \nu = \nu_0 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2}, \quad \kappa = \kappa_0 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2}; \quad (2.7)$$

la razón de haberlas escogido así quedará claro más adelante (los subíndices "0", indican valores constantes). Para la fuente (la S en la ecuación (2.4)) se supondrá también que depende de la temperatura, aunque no se dé desde ahora una expresión en particular, ya que dependiendo de la situación, se elegirá la que mejor convenga.

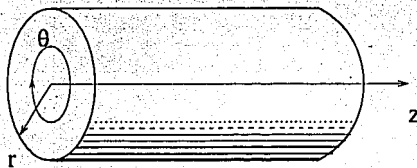


Fig. 2.1.- El contenedor para el plasma.

Falta únicamente establecer las condiciones a la frontera que habrán de satisfacer las variables dinámicas. Suponiendo que el plasma se encuentra en un contenedor perfectamente conductor al que llena completamente, como el de la figura 2.1, se tienen

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\partial D} = 0; \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial D} = 0; \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial D} = 0; \quad (2.8)$$

con \mathbf{n} el vector normal unitario que apunta hacia el exterior y ∂D la frontera del cilindro.

El problema del análisis de la estabilidad consiste esencialmente de dos partes: determinación del estado de equilibrio (que en este caso corresponde a las soluciones estacionarias de las ecuaciones), y la derivación y solución de las ecuaciones para las perturbaciones

Con respecto al equilibrio, pueden considerarse diversas situaciones, como por ejemplo que se tenga un plasma incompresible, o bien que sea ideal, que el plasma esté en reposo, que haya flujo; en fin, que hay varias posibilidades (en los capítulos posteriores se presentan ejemplos partiendo de varios tipos de equilibrio). Suponiendo que $\mathbf{v}_e = 0$, las ecuaciones (2.1)–(2.4), en el estado estacionario, se presentan ahora como

$$\nabla p_e = \mathbf{J}_e \times \mathbf{B}_e, \quad (2.9a)$$

$$\nabla \times \mathbf{J}_e = 0, \quad (2.9b)$$

$$\eta_0 J_e^2 + \kappa_0 \Delta T_e + \frac{1}{\gamma - 1} S_0 = 0. \quad (2.9c)$$

Nótese como la elección de $\mathbf{v}_e = 0$ elimina el término viscoso. El subíndice *e* indica que se trata de las soluciones para el caso estacionario, los 0, como antes se mencionó, indican que se trata de valores constantes.

Para un plasma encerrado en un cilindro de paredes conductoras, en que las cantidades de equilibrio dependieran sólo de la coordenada radial, una solución posible está dada por

$$\mathbf{B}_e = \frac{B_0}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right) \hat{\theta}, \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{J}_e = \frac{B_0}{r_0} \hat{z}, \quad (2.10b)$$

$$T_e = T_0 + \frac{1}{4\kappa_0} \left(\frac{S_0}{\gamma - 1} + \eta_0 J_e^2 \right) (r_0^2 - r^2), \quad (2.10c)$$

$$P_e = \frac{J_0^2}{4} (r_0^2 - r^2) + P_0; \quad (2.10d)$$

donde r_0 es el radio del cilindro contenedor, T_0 y p_0 , los valores de la temperatura y la presión en la cara del cilindro; la relación entre P_e y T_e , se tiene a través de la ecuación de estado de los gases ideales. Aunque en el tratamiento de la estabilidad se considerará un estado de equilibrio que cumpla con las ecuaciones (2.9a)–(2.9c), no tiene por qué ser el calculado anteriormente, éste se incluye sólo de manera ilustrativa.

Las dos escalas de tiempo

Para establecer los supuestos que regirán el desarrollo perturbativo, es útil escribir de manera adimensional la ecuación de balance de energía:

$$\frac{\partial p'}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' p' + \gamma p' \nabla' \cdot \mathbf{v}' = \frac{S_0 a_0}{v_0 \rho_0} S' + (\gamma - 1) \left[\frac{a_0}{v_0} \right] \times \quad (2.11)$$

$$\times \left\{ \left[\frac{\eta_0}{a_0^2 \mu_0} \right] \left(\frac{B_0^2}{\rho_0} \right) \left(\frac{\rho_0}{p_0} \right) \eta' J'^2 + \left[\frac{\kappa_0}{a_0^2 \rho_0} \right] \nabla' \cdot (\kappa' \nabla' T') - \left[\frac{v_0}{\rho_0 a_0^2} \right] (v_0^2) \left(\frac{\rho_0}{p_0} \right) v' \sigma' \cdot \nabla' \mathbf{v}' \right\},$$

para el segundo término dentro de la llave se utilizó $p_0 = \rho_0 T_0$. Las primas indican las cantidades adimensionales y los subíndices cero los valores característicos (o bien valores típicos), empleados para la transformación, a_0 se refiere a la longitud. En el lado derecho, los términos dentro de paréntesis cuadrados tienen unidades de tiempo o su inverso, mientras los de los paréntesis redondos las tienen de velocidad o inversos de ella; en estos últimos podemos identificar los cuadrados de la velocidad de Alfvén (B_0^2/ρ_0) y de la del sonido (p_0/ρ_0). La importancia de cada término queda determinada por dos factores: la relación que guardan entre sí las velocidades característica, de Alfvén y la del sonido y, por otro lado, los tiempos característicos de los procesos disipativos.

Considerando un régimen donde las diferentes velocidades sean comparables, una situación muy especial, aunque posible (véase la tabla 1 que aparece al final con los apéndices), se tendrá entonces que los términos de los paréntesis cuadrados son los que dan los ordenamientos. En principio se tendrían tres escalas de tiempo, una asociada al término resistivo, otra al de conducción de calor y una más asociada al término viscoso, en comparación a la impuesta por la velocidad de Alfvén (esto se debe a que dicha velocidad es la velocidad característica a la que viajan las perturbaciones del campo magnético [9]).

Supóngase que todos los procesos disipativos contribuyen de igual manera, esto es, que los tiempos característicos en que cada uno de ellos se lleva a cabo son comparables.

Por consecuencia, todos los términos del lado derecho de la ecuación (2.11) se escalarán de una misma forma, con excepción, quizá, de la fuente externa. El desarrollo perturbativo se hará en términos de un parámetro pequeño, ϵ , asociado a la razón del tiempo disipativo al impuesto por la velocidad de Alfvén. De entrada, los términos disipativos tendrán un factor de ϵ^l y S uno de ϵ^l ; la elección de la i y la l dependerá de la importancia que se asigne a los efectos, si apenas se les considera, la i será grande, en cambio, un valor pequeño de la misma significará que juegan un papel muy activo.

En cuanto a las cantidades físicas se les expresará como una serie cuyos coeficientes serán potencias enteras de ϵ , y para el tiempo se tomarán dos escalas, una asociada con las frecuencias altas (t_c , que tiene que ver con la escala impuesta por la velocidad de Alfvén), y otra con las frecuencias bajas (t_l , y que se relaciona con los procesos disipativos y que podría pensarse como un tiempo a largo plazo), las cuales se definen de acuerdo con

$$t_c = t \quad (2.12)$$

$$t_l = t^* = \epsilon^j t,$$

con j mayor o igual a uno y además entera. Esto último se verá en las ecuaciones como si las parciales respecto al tiempo se “desdoblaran” de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \epsilon^j \frac{\partial}{\partial t^*}(\cdot). \quad (2.13)$$

A manera de ejemplo, tómesese la ecuación (2.3). Sustitúyase la expresión de \mathbf{J} en términos de \mathbf{B} y la de la resistividad de (2.7). La ecuación adquirirá el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}_e + \epsilon \mathbf{B}_1 + \epsilon^2 \mathbf{B}_2 + \dots) + \epsilon^j \frac{\partial}{\partial t^*}(\mathbf{B}_e + \epsilon \mathbf{B}_1 + \epsilon^2 \mathbf{B}_2 + \dots) + \\ & + \nabla \times \epsilon^l \left[\eta_0 \left(\frac{T_c + \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + \dots}{T_c} \right) \nabla \times (\mathbf{B}_e + \epsilon \mathbf{B}_1 + \epsilon^2 \mathbf{B}_2 + \dots) \right] - \\ & - \nabla \times [(\epsilon \mathbf{v}_1 + \epsilon^2 \mathbf{v}_2 + \dots) \times (\mathbf{B}_e + \epsilon \mathbf{B}_1 + \epsilon^2 \mathbf{B}_2 + \dots)] = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

El análisis de estabilidad propuesto.

Por la manera en que se han escogido las cosas, la dinámica estará gobernada por el tiempo corto (t_c). Lo primero es llevar a cabo las expansiones, teniendo en cuenta los escalamientos. Para escoger los valores de los exponentes de la ϵ que acompañan a los términos con t^* , disipativos y al de la fuente, hay que tomar en cuenta lo siguiente: 1) La escala de tiempo larga la imponen los términos disipativos, así que ambos deben tener un mismo escalamiento. 2) La fuente tendría que inyectar, o extraer, energía al ritmo que la disipación la consumiera, así que debe ser del mismo orden que las anteriores. En suma, los valores de los exponentes son todos iguales. No pueden ser cero porque con anterioridad se ha supuesto que la disipación es una perturbación pequeña. Escoger el valor del exponente igual a 1, no es sólo cuestión de comodidad o por simplificar las cosas, sino por ser, de hecho, la única elección que permite reacomodar los órdenes sin desconectarlos totalmente (más adelante, cuando se presenten las ecuaciones a los diversos órdenes, se remarcará donde surgen las dificultades). Las ecuaciones a orden n correspondientes a las ecuaciones (2.1)–(2.5), resultan:

continuidad para la masa

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_c \mathbf{v}_n) = D_n, \quad (2.15)$$

conservación de momento

$$\rho_c \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \nabla p_n - \mathbf{J}_c \times \mathbf{B}_n - \mathbf{J}_n \times \mathbf{B}_c = \mathbf{M}_n, \quad (2.16)$$

ley de Faraday-Ohm

$$\frac{\partial \mathbf{B}_n}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v}_n \times \mathbf{B}_c) = \mathbf{I}_n, \quad (2.17)$$

balance de energía

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} + \mathbf{v}_n \cdot \nabla p_c + \gamma p_c \nabla \cdot \mathbf{v}_n = P_n + S_{n-1}, \quad (2.18)$$

y ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_n = 0. \tag{2.19}$$

El orden, indicado por n , se tomó de la siguiente forma: $n = 0$, las cantidades de equilibrio; $n = 1$, las que en el desarrollo individual van con ϵ^1 ; $n = 2$ con ϵ^2 y así sucesivamente. Los términos del lado derecho contienen explícitamente las derivadas en t^* y las combinaciones de cantidades con índices distintos de n (pero que acompañan una ϵ^n), así como todo lo que involucra a los términos disipativos. Rcuérdese, además, que $\mathbf{v}_e = 0$. Los lados derechos de las ecuaciones anteriores para i, j y l , cualesquiera son:

$$D_n = -\frac{\partial \rho_{n-j}}{\partial t^*} - \sum_{k=1}^{n-1} \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_{n-k}), \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} M_n = & -\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \frac{\partial \mathbf{v}_{n-k}}{\partial t} - \sum_{k=0}^{n-j-1} \rho_k \frac{\partial \mathbf{v}_{n-j-k}}{\partial t^*} - \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-k-1} \rho_k \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{v}_{n-s-k} \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{J}_k \times \mathbf{B}_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1-i} \nabla \cdot \nu_k \bar{\sigma}_{n-k-i}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$I_n = -\frac{\partial \mathbf{B}_{n-j}}{\partial t^*} + \sum_{k=1}^{n-1} \nabla \times (\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}_{n-k}) - \sum_{k=0}^{n-i} \nabla \times (\eta_k \mathbf{J}_{n-k-i}), \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} P_n = & -\frac{\partial p_{n-j}}{\partial t^*} - \sum_{k=1}^{n-1} [\mathbf{v}_k \cdot \nabla p_{n-k} + \gamma p_k \nabla \cdot \mathbf{v}_{n-k}] + (\gamma - 1) \left\{ \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{m=0}^{n-k-i} \eta_k \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{J}_{n-i-k-m} \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \nabla \cdot (\kappa_k \nabla T_{n-i-k}) + \sum_{k=0}^{n-2-i} \sum_{m=1}^{n-k-i-1} \nu_k \bar{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_{n-i-k-m} \right\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Para obtener las expresiones para los valores específicos de i, j y l , basta sustituirlos en las expresiones anteriores, teniendo cuidado de considerar sólo los términos cuyos límites superiores de las sumatorias sean, al menos, iguales a los inferiores, o su subíndice sea positivo o cero, en caso contrario, ese término es cero.

Si se deriva parcialmente, respecto al tiempo corto, la ecuación de momento (2.16) y sustituimos los valores de las derivadas respecto al tiempo de los términos enésimos, de

las otras ecuaciones (2.15), (2.17) - (2.19), se llega a una ecuación para \mathbf{v}_n de la forma

$$\rho_e \frac{\partial^2 \mathbf{v}_n}{\partial t^2} - \mathbf{F}(\mathbf{v}_n) - \mathbf{H}_n = -\nabla S_{n-1}; \quad (2.24)$$

con \mathbf{F} el operador de Bernstein usado en el análisis de la estabilidad lineal de la MHD ideal [5].

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = & \nabla(\gamma p_e \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla p_e) + \\ & \mathbf{J}_e \times \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_e) - \mathbf{B}_e \times \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_e); \end{aligned} \quad (2.25)$$

y la siguiente expresión para \mathbf{H}_n en términos de los lados derechos de las ecuaciones (2.15), (2.17) - (2.19):

$$\mathbf{H}_n = -\nabla P_n + \mathbf{J}_e \times \mathbf{I}_n - \mathbf{B}_e \times \nabla \times \mathbf{I}_n + \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial t}; \quad (2.26)$$

y que al incluir las expresiones (2.20)-(2.23) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n = & \nabla \left\{ \frac{\partial p_{n-j}}{\partial t^*} - \sum_{k=1}^{n-1} [\mathbf{v}_k \cdot \nabla p_{n-k} + \gamma p_k \nabla \cdot \mathbf{v}_{n-k}] + (\gamma - 1) \left[\sum_{k=0}^{n-i} \sum_{m=0}^{n-k-i} \eta_k \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{J}_{n-i-k-m} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=0}^{n-i} \nabla \cdot (\kappa_k \nabla T_{n-i-k}) + \sum_{k=0}^{n-2-i} \sum_{m=1}^{n-k-i-1} \nu_k \bar{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_{n-i-k-m} \right] \right\} \\ & + \mathbf{J}_e \times \left\{ -\frac{\partial \mathbf{B}_{n-j}}{\partial t^*} + \sum_{k=1}^{n-1} \nabla \times (\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}_{n-k}) - \sum_{k=0}^{n-1} \nabla \times (\eta_k \mathbf{J}_{n-k-i}) \right\} \\ & - \mathbf{B}_e \times \nabla \times \left\{ -\frac{\partial \mathbf{B}_{n-j}}{\partial t^*} + \sum_{k=1}^{n-1} \nabla \times (\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}_{n-k}) - \sum_{k=0}^{n-1} \nabla \times (\eta_k \mathbf{J}_{n-k-i}) \right\} \quad (2.27) \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial \rho_k}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{v}_{n-k}}{\partial t} + \rho_k \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{n-k}}{\partial t^2} \right] - \sum_{k=0}^{n-j-1} \left[\frac{\partial \rho_k}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{v}_{n-j-k}}{\partial t^*} + \rho_k \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{n-j-k}}{\partial t \partial t^*} \right] \\ & - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-k-1} \left\{ \frac{\partial \rho_k}{\partial t} \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{v}_{n-s-k} + \rho_k \left[\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \cdot \nabla \mathbf{v}_{n-s-k} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{v}_{n-s-k}}{\partial t} \right] \right\} \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial \mathbf{J}_k}{\partial t} \times \mathbf{B}_{n-k} + \frac{\partial \mathbf{B}_{n-k}}{\partial t} \times \mathbf{J}_k \right] - \sum_{k=0}^{n-1-i} \nabla \cdot \left[\frac{\partial \nu_k}{\partial t} \bar{\sigma}_{n-k-1} + \nu_k \frac{\partial \bar{\sigma}_{n-k-1}}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

y que como antes, sólo se necesita colocar los valores adecuados de i, j y l , y seguir las precauciones ya citadas. Nótese como la velocidad a orden n depende de las cantidades a

órdenes inferiores. Esto permite que a partir del estado estacionario sea posible encontrar la \mathbf{v}_1 . Con las expresiones (2.15), (2.17)–(2.19) se calculan las otras cantidades a primer orden y así seguirse con los órdenes superiores.

La aproximación a primer orden.

Ahora a primer orden en \mathbf{v} , la ecuación (2.24) se reduce a

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} - \mathbf{F}(\mathbf{v}_1) = 0, \quad (2.28)$$

por ser S_0 constante y $\mathbf{H}_1 \equiv 0$. Las soluciones a \mathbf{v}_1 son entonces como las del problema de la estabilidad lineal en MHD ideal; convirtiéndose en un problema de valores y vectores propios y que, aprovechando la hermiticidad de \mathbf{F} , nos lleva a la siguiente solución

$$\mathbf{v}_1 = \sum_k b_k^{(1)} \sin(\omega_k t) \mathbf{u}_k, \quad (2.29)$$

donde \mathbf{u}_k y ω_k son el vector propio y la frecuencia propia asociados al modo k . Se cumple, además, la condición de ortonormalidad

$$(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k'}) = \frac{\int \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_{k'} dV}{\int dV} = \delta_{k,k'}. \quad (2.30)$$

La dependencia espacial de \mathbf{v}_1 es debida exclusivamente a \mathbf{u}_k . Ahora bien, si \mathbf{v}_1 es independiente de t^* , todas las otras cantidades también lo serán. Cuando se vayan a resolver los siguientes órdenes, nada va a depender de la t^* . La manera de salvar esta situación es permitir que la dependencia sea a través de los coeficientes $b_k^{(1)}$ que están aún por ser determinados.

Una vez obtenida la solución de \mathbf{v}_1 es muy fácil encontrar las soluciones para las otras cantidades a orden 1, se obtienen como a continuación se muestra para la densidad. Se parte de la ecuación de conservación de masa

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \sum_k b_k^{(1)} \sin(\omega_k t) \mathbf{u}_k) = 0; \quad (2.31)$$

donde se ha substituido \mathbf{v}_1 por su expresión en serie. Como la dependencia espacial es a través de \mathbf{u}_k y, posiblemente, de ρ_0 , la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \sum_k b_k^{(1)} \operatorname{sen}(\omega_k t) \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_k) = 0. \quad (2.32)$$

Que al integrarse respecto al tiempo lleva a

$$\rho_1 = \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \rho_k^{(1)}, \quad (2.33)$$

donde se ha usado la siguiente definición para la parte espacial de la componente k -ésima de orden 1, $\rho_k^{(1)} = \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_k)$.

De manera similar, partiendo de la ley de inducción de Faraday (2.17), se llega a que la solución para el campo magnético es

$$\mathbf{B}_1 = - \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \mathbf{B}_k^{(1)}, \quad (2.34)$$

con $\mathbf{B}_k^{(1)} = \nabla \times (\mathbf{u}_k \times \mathbf{B}_c)$.

Siguiendo el mismo procedimiento, partiendo de la ecuación de balance de entropía, se tiene para la presión

$$p_1 = \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} p_k^{(1)}, \quad (2.35)$$

en la cual $p_k^{(1)} = \mathbf{u}_k \cdot \nabla p_c + \gamma p_c \nabla \cdot \mathbf{u}_k$.

De suponer válida la ecuación de estado de los gases ideales, se tiene, hasta primer orden en ϵ

$$p_c + \epsilon p_1 + \dots = \rho_c T_c + \epsilon (\rho_c T_1 + \rho_1 T_c) + \dots \quad (2.36)$$

de donde se puede despejar la expresión para la temperatura a primer orden

$$T_1 = \frac{1}{\rho_c} (p_1 - T_c \rho_1) = \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \left(\frac{p_k^{(1)} - T_c \rho_k^{(1)}}{\rho_c} \right), \quad (2.37)$$

pudiéndose definir $T_k^{(1)} = (p_k^{(1)} - T_c \rho_k^{(1)}) / \rho_c$, para darle la forma de las expresiones anteriores. Esto de escribir las ecuaciones así, no es un simple capricho, obedece a razones

computacionales, es decir, cuando se substituya en la expresión para H_n a un orden mayor, reultará más claro el poder seguir cuál término viene de qué lado si usamos $p_k^{(1)}$ que si ponemos $\mathbf{u}_k \cdot \nabla p_e + \gamma p_e \nabla \cdot \mathbf{u}_k$

Para la fuente se hará la suposición de que depende sólo de la temperatura, siendo la dependencia similar a la de los coeficientes disipativos, es decir $S = S_0(T/T_e)^c$, con $c \geq 1$. Si se substituye T por su desarrollo en potencias de ϵ , la expresión anterior, a primer orden en ese parámetro, se verá como a continuación

$$S = S_0 + \epsilon S_0 c \left(\frac{T_1}{T_e} \right); \quad (2.38)$$

e incluyendo la expresión en serie de T_1 , se tiene

$$S_1 = \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} S_0 c \frac{T_k^{(1)}}{T_e}. \quad (2.39)$$

Los coeficientes disipativos tienen, por depender de la temperatura, expresiones similares a (2.39), las que se presentan a continuación sin mayor preámbulo

$$\eta_1 = \frac{-3}{2} \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \eta_0 \frac{T_k^{(1)}}{T_e}, \quad (2.40)$$

$$\kappa_1 = \frac{5}{2} \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \kappa_0 \frac{T_k^{(1)}}{T_e}, \quad (2.41)$$

$$\nu_1 = \frac{5}{2} \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \nu_0 \frac{T_k^{(1)}}{T_e}. \quad (2.42)$$

Toda esta molestia es porque para los siguientes órdenes es necesario conocer las cantidades del primero. A este grado de aproximación la forma general de las soluciones no difieren mucho de las del análisis usando MHD ideal, aunque bien cabe recordar que los coeficientes $b_k^{(1)}$ no siguen siendo constantes, sino funciones de t^* que todavía hay que determinar.

Es tiempo ahora de volver al comentario del inicio de la sección anterior, referente a la elección de los exponentes de los términos con t^* , disipativos y de fuente, como 1. Si la elección hubiera sido 2, no habría habido manera de determinar las cantidades a primer

orden. Las del segundo dependerían de las del estado estacionario, las del tercero de las del primero. Se tendrían dos juegos de ecuaciones desconectadas. Ni que decir si la elección hubiera sido 3 o mayor. Esto resulta aún más evidente al tratar la aproximación a segundo orden.

La aproximación a segundo orden

A segundo orden la ecuación (2.24) adquiere la siguiente forma:

$$\rho_e \frac{\partial^2 \mathbf{v}_2}{\partial t^2} - \mathbf{F}(\mathbf{v}_2) - \mathbf{H}_2 = -\nabla S_1. \quad (2.43)$$

Para resolverla, se propone utilizar una proyección de \mathbf{v}_2 en el espacio de \mathbf{v}_1 , usando la base de las soluciones \mathbf{u}_k :

$$\mathbf{v}_2 = \sum_k \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{u}_k. \quad (2.44)$$

Introduciendo la solución anterior en la ecuación (2.43) y tomando el producto escalar con \mathbf{u}_k se obtiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_2 \rangle + \omega_k^2 \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_k, (1/\rho_e)(\mathbf{H}_2 - \nabla S_1) \rangle. \quad (2.45)$$

La expresión para \mathbf{H}_2 puede obtenerse fácilmente de (A2), que aparece en el apéndice A, al hacer i, j y l iguales a 1 y $n = 2$, teniéndose así:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 = \nabla \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial t^*} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla p_1 + \gamma p_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + (1 - \gamma) \left[2 \frac{\eta_0}{\mu_0} \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\eta_1}{\mu_0} J_e^2 + \right. \right. \\ \left. \left. \nabla \cdot (\kappa_0 \nabla T_1 + \kappa_1 \nabla T_e) \right] \right\} + \mathbf{J}_e \times \left\{ \frac{-\partial \mathbf{B}_1}{\partial t^*} + \nabla \times \left(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1 - \frac{\eta_0}{\mu_0} \mathbf{J}_1 - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\eta_1}{\mu_0} \mathbf{J}_e \right) \right\} - \mathbf{B}_e \times \nabla \times \left\{ \frac{-\partial \mathbf{B}_1}{\partial t^*} + \nabla \times \left(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1 - \frac{\eta_0}{\mu_0} \mathbf{J}_1 - \frac{\eta_1}{\mu_0} \mathbf{J}_e \right) \right\} - \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} - \rho_e \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t \partial t^*} - \rho_e \left(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \cdot \nabla \mathbf{v}_1 - \\ \rho_e \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial t} \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{J}_1 \times \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\nu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial t} \right). \quad (2.46) \end{aligned}$$

Esta ecuación, del tipo de la del oscilador armónico forzado, se puede resolver encontrando la solución particular (a través de la función de Green [9]) y agregándole, luego, la solución a la homogénea. Formalmente, la solución particular viene dada por

$$\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_2 \rangle_p = \int^t \left(\frac{\exp[\lambda_1^{(k)}(t-t')] - \exp[\lambda_2^{(k)}(t-t')]}{\lambda_1^{(k)} - \lambda_2^{(k)}} \right) \Phi_2^{(k)}(t') dt', \quad (2.47)$$

donde las $\lambda^{(k)}$ son soluciones de la ecuación característica $\lambda^2 + \omega_k^2 = 0$, $\Phi_2^{(k)}(t')$ el término del lado derecho de la ecuación (2.45) y dentro del paréntesis está la función de Green. La solución a la ecuación homogénea (es decir, la que resulta de igualar el lado izquierdo de (2.45) a cero) dependerá del signo de la ω_k^2 (recuérdese que, dado que el operador \mathbf{F} es hermitiano, ω_k^2 es real), siendo soluciones oscilatorias, senos y cosenos, para $\omega_k^2 > 0$; y exponenciales crecientes o decrecientes, cuando se tiene lo contrario (obvia decir, para este último caso cual es la que se escoge). La parte homogénea de la solución no contribuye a una posible inestabilidad, la única opción es buscarla en la otra parte, la solución particular.

En el término $\langle \mathbf{u}_k, (1/\rho_e)\{\mathbf{H}_2 - \nabla S_1\} \rangle$, \mathbf{H}_2 se puede reescribir de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 = & \sum_{k'=0} \frac{\cos(\omega_{k'} t)}{\omega_{k'}} \left[\mathbf{f}_{k'}^{(2)} \frac{db_{k'}^{(1)}}{dt} + \mathbf{g}_{k'}^{(2)} b_{k'}^{(1)} \right] + \\ & \sum_{k'=0} \sum_{k''=0} \text{sen}(\omega_{k'} t) \frac{\cos(\omega_{k''} t)}{\omega_{k''}} \mathbf{Q}_{k'k''}^{(2)} b_{k'}^{(1)} b_{k''}^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde se han usado las expresiones (2.31)-(2.42), de las cantidades a primer orden y se han definido:

$$\mathbf{f}_{k'}^{(2)} = \nabla p_{k'}^{(1)} + \mathbf{J}_e \times \mathbf{B}_{k'}^{(1)} - \mathbf{B}_e \times \nabla \times \mathbf{B}_{k'}^{(1)} - \rho_e \omega_{k'}^2 \mathbf{u}_{k'}; \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{k'}^{(2)} = & (1 - \gamma) \nabla \left\{ \kappa_0 \left[\Delta T_{k'}^{(1)} + \frac{5}{2} \nabla \cdot \left(\frac{T_{k'}^{(1)}}{T_e} \nabla T_e \right) \right] - \frac{\eta_0}{\mu_0} \left[2 \mathbf{J}_e \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{k'}^{(1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{3}{2} \frac{T_{k'}^{(1)}}{T_e} \mathbf{J}_e \right] \right\} + \frac{\eta_0}{\mu_0} \mathbf{J}_e \times \nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{B}_{k'}^{(1)} + \frac{3}{2} \frac{T_{k'}^{(1)}}{T_e} \mathbf{J}_e \right) - \\ & \frac{\eta_0}{\mu_0} \mathbf{B}_e \times \nabla \times \nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{B}_{k'}^{(1)} + \frac{3}{2} \frac{T_{k'}^{(1)}}{T_e} \mathbf{J}_e \right) - \nu_0 \omega_{k'}^2 \nabla \cdot \bar{\sigma}_{k'}^{(1)}; \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{k'k''}^{(2)} = & \nabla \left[\mathbf{u}_{k'} \cdot \nabla p_{k''}^{(1)} + \gamma p_{k''}^{(1)} \nabla \cdot \mathbf{u}_{k'} \right] - \mathbf{J}_e \times \nabla \times (\mathbf{u}_{k'} \times \mathbf{B}_{k''}^{(1)}) + \\
 & \mathbf{B}_e \times \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u}_{k'} \times \mathbf{B}_{k''}^{(1)} + \rho_{k''}^{(1)} \omega_{k''}^2 \mathbf{u}_{k''} + \rho_{k''}^{(1)} \omega_{k'}^2 \mathbf{u}_{k'}) - \\
 & \rho_e \omega_{k''}^2 (\mathbf{u}_{k''} \cdot \nabla \mathbf{u}_{k'} + \mathbf{u}_{k'} \cdot \nabla \mathbf{u}_{k''}) - (\nabla \times \mathbf{B}_{k'}^{(1)}) \times \mathbf{B}_{k''}^{(1)} - \\
 & (\nabla \times \mathbf{B}_{k''}^{(1)}) \times \mathbf{B}_{k'}^{(1)}.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

$\mathbf{f}_{k'}^{(2)}$ contiene todo aquello que depende de un solo modo y ningún término disipativo.

$\mathbf{g}_{k'}^{(2)}$ los términos disipativos con dependencia de un solo modo

$\mathbf{Q}_{k'k''}^{(2)}$ la mezcla entre los modos.

Lo anterior, permite escribir el término que recuerda al de forzamiento en el caso del oscilador, de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
 \sum_{k'} \frac{\cos(\omega_{k'} t)}{\omega_{k'}} \left[\frac{db_{k'}^{(1)}}{dt^*} (\mathbf{u}_{k'}, (1/\rho_e) \mathbf{f}_{k'}^{(2)}) + b_{k'}^{(1)} (\mathbf{u}_{k'}, (1/\rho_e) (\mathbf{g}_{k'}^{(2)} - \nabla S_{k'}^{(1)})) \right] + \\
 + \sum_{k'} \sum_{k''} \text{sen}(\omega_{k'} t) \frac{\cos(\omega_{k''} t)}{\omega_{k''}} b_{k'}^{(1)} b_{k''}^{(1)} (\mathbf{u}_{k'}, (1/\rho_e) \mathbf{Q}_{k'k''}^{(2)}).
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Siendo éste un término del tipo de forzamiento, estará inyectando energía al sistema continuamente. Si se quiere que las soluciones no den lugar a inestabilidades, sería deseable que la transferencia de energía por periodo, suministrada por la "fuerza", fuera cero. Esto puede expresarse matemáticamente como:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ \sum_{k'} \frac{\cos(\omega_{k'} t)}{\omega_{k'}} \left[\frac{db_{k'}^{(1)}}{dt^*} (\mathbf{u}_{k'}, (1/\rho_e) \mathbf{f}_{k'}^{(2)}) + b_{k'}^{(1)} (\mathbf{u}_{k'}, (1/\rho_e) (\mathbf{g}_{k'}^{(2)} - \nabla S_{k'}^{(1)})) \right] + \right. \\
 \left. + \sum_{k'} \sum_{k''} \text{sen}(\omega_{k'} t) \frac{\cos(\omega_{k''} t)}{\omega_{k''}} b_{k'}^{(1)} b_{k''}^{(1)} (\mathbf{u}_{k'}, (1/\rho_e) \mathbf{Q}_{k'k''}^{(2)}) \right\} \cos(\omega_1 t) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

donde τ se refiere al periodo de prueba asociado a la ω_1 . Este tipo de relaciones se conocen también como condiciones de no resonancia.

Como puede verse, es de aquí de donde se determinan los coeficientes $\mathbf{b}_k^{(1)}$. El comportamiento combinado de éstos en la escala de tiempo a largo plazo (la de los procesos disipativos), permitirá saber si la configuración propuesta es estable o no.

Formalmente, todo hace pensar que es posible realizar un tratamiento como el aquí presentado. Para ver qué tan práctico resulta, cuáles son sus ventajas y desventajas y qué posibles modificaciones habría que hacerle, se presentan algunos ejemplos en el siguiente capítulo .

Capítulo 3

Aplicación del análisis de estabilidad para dos ejemplos

Ejemplo 1: modos desacoplados

Con el objeto de familiarizarse con el tratamiento expuesto en el capítulo anterior, se desarrollará inicialmente un ejemplo lo más sencillo posible.

Un plasma llena completamente a un contenedor metálico en forma de cilindro de sección circular de radio r_0 (que eventualmente se tomará como 1), con periodicidad a lo largo del eje, cada cierta distancia z_0 y que está embebido en un campo magnético constante que apunta en la dirección del eje del contenedor. Para simplificar aún más las cosas, se supondrá que el plasma es incompresible (en principio esto no debería ser, ya que cuando el plasma es incompresible se está en un régimen subsónico, es decir, la velocidad del sonido es mucho mayor que cualquier otra velocidad característica del plasma), que $v_e = 0$ y que hay axisimetría.

Para encontrar el estado de equilibrio, puede hacerse uso de las ecuaciones (2.9a)-(2.9c). Como el campo magnético de equilibrio es constante, la corriente de equilibrio será cero, con lo que se cumple la ecuación (2.9b). De (2.9a) se tendrá que p_e es constante. La manera más sencilla de cumplir con (2.9c) es asignar a S_0 el valor de cero y considerar a la temperatura como constante. Los coeficientes de viscosidad, conductividad térmica y resistividad son, de acuerdo a (2.7), también constantes (ahora se ve la conveniencia de haberlas elegido de esa manera). Sólo falta determinar la densidad. Como la presión y la temperatura son constantes, no hay nada que haga pensar que la densidad no lo sea también; además, siempre se puede recurrir a que la ecuación de los gases ideales es aplicable.

Ahora hay que iniciar el análisis a primer orden. La ecuación (2.28) se reduce a

$$-\mathbf{B}_e \times \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_e) = \rho_e \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2}; \quad (3.1)$$

debiéndose cumplir, además, con que la divergencia de \mathbf{v}_1 sea cero y con las condiciones a la frontera $\mathbf{v}_1(0, z) = \mathbf{v}_1(r_0, z) = 0$ y $\mathbf{v}_1(r, 0) = \mathbf{v}_1(r, z_0)$. Las primeras condiciones obedecen a la eliminación de las discontinuidades en el eje del cilindro y a que, por un lado, debido a que hay cierta viscosidad, la capa de plasma más próxima a la pared ha de permanecer adherida a ella y, por otro lado, a que el recipiente es rígido y no permite deformaciones ni fugas a través de la pared. Las otras condiciones imponen una periodicidad; esto es importante para la ortonormalización*.

Al emplear soluciones del estilo de (2.29) en la ecuación (3.1) se llega a un sistema de ecuaciones como el siguiente

$$B_0^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} u_r + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) \right] = -\rho_e \omega_k^2 u_r, \quad (3.2)$$

$$B_0^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} u_\theta \right] = -\rho_e \omega_k^2 u_\theta, \quad (3.3)$$

$$0 = -\rho_e \omega_k^2 u_z. \quad (3.4)$$

Nótese que se ha pasado de \mathbf{v} , a las \mathbf{u}_k ; esto se puede hacer gracias a la ortogonalidad de las funciones seno. Del sistema anterior se ve de inmediato que la componente z de la \mathbf{u}_k es cero. En el lado izquierdo de (3.2), el término que tiene derivadas respecto a la coordenada radial no es otra cosa que la parcial respecto a r de la divergencia de \mathbf{u}_k , que por la incompresibilidad, es cero. Esto deja dos ecuaciones idénticas para las componentes radial y angular, cuya solución general puede expresarse de la siguiente manera

$$u_{r,\theta} = f(r) \{ A \cos(l_k z) + B \sin(l_k z) \}, \quad \text{donde } l_k^2 = \frac{\rho \omega_k^2}{B_0^2}. \quad (3.5)$$

La componente angular cumple sin ningún problema el que la divergencia de \mathbf{u}_k sea cero. Lo que se quiere decir es que no importa qué $f(r)$ se tenga, siempre se cumple la condición.

* Esto es del mismo tenor que en mecánica cuántica cuando se usa la normalización de Born

Sin embargo, esta condición en la componente radial le restringe a que la función que depende de r sea de tipo hiperbólico o constante. Al aplicar las condiciones a la frontera se tendrá que la componente radial sólo la satisfará si es cero, dando lugar a que la solución sea $u_k = (0, u_r(r, z), 0)$ con

$$u_r = A \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \text{sen}(l_k z); \quad (3.6)$$

donde únicamente falta por determinar la A . Esta se calcula de la condición de ortonormalidad (2.30) y resulta ser $A = \sqrt{60}$.

La condición de periodicidad permite determinar los valores de las frecuencias propias, que resultan ser

$$\omega_k = \frac{2(k+1)\pi}{z_0} \sqrt{\frac{B_0^2}{\rho e}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

La solución para la velocidad a primer orden es finalmente

$$v_1 = \hat{\theta} \sum_k b_k(1) \text{sen}(\omega_k t) \left(\sqrt{60} \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \text{sen}(l_k z) \right); \quad (3.8)$$

donde aún no se determina la $b_k^{(1)}$, para ello es necesario ir al siguiente orden; pero antes hay que calcular las otras cantidades a primer orden. Para ello basta tomar las ecuaciones (2.33)–(2.42), substituir el valor encontrado de u_k y cancelar todo aquello que tenga divergencias de la velocidad. El resultado es

$$B_1 = \hat{\theta} \sum_k -b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \left(B_0 l_k \sqrt{60} \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cos(l_k z) \right); \quad (3.9)$$

y todas las otras cantidades iguales a cero.

Se está ya en posibilidades de encontrar los $b_k^{(1)}$; pero para ello hay que calcular la condición de no resonancia, lo cual involucra bastantes operaciones, aunque todas ellas pueden llevarse a cabo analíticamente sin mayor problema (en el apéndice A están en detalle).

Tras efectuar todas las operaciones, la condición de no resonancia se reduce a

$$\frac{1}{r} \int_0^r \cos(\omega_k t) \cos(\omega_i t) \left\{ \frac{db_k^{(1)}}{dt} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_0}{\rho_e} - \frac{\eta_0}{\mu_0} \right) \left(\frac{15}{r_0} + l_k^2 \right) b_k^{(1)} \right\} dt = 0. \quad (3.10)$$

Para escoger el periodo y la frecuencia de prueba (ω_i en la expresión de arriba), existen varias posibilidades: un periodo y una frecuencia únicos para todos los modos, un sólo periodo y las frecuencias correspondientes a cada modo, una sola frecuencia y los periodos correspondientes a cada modo, o bien, el periodo y la frecuencia correspondientes a cada uno.

Como lo que se quiere es que para un ciclo completo la contribución promedio sea cero, la opción que cumple debidamente este requerimiento es la última. Para las otras, aunque uno de los modos cumpla lo pedido, los otros se verían ajustados a un ciclo que no es el propio, dando lugar a que, por ejemplo, un ciclo de prueba correspondiera a uno y un cuarto de ciclos propios y, aunque en el ciclo de prueba su contribución es cero, en un ciclo propio no lo sería necesariamente.

La condición se cumplirá sólo si lo que está dentro de las llaves en (3.10) es cero y la estabilidad de la solución dependerá del signo del término que no tiene derivada, ya que se tienen soluciones exponenciales. El signo queda determinado de la relación que guarden entre sí los cocientes ν_0/ρ_e y η_0/μ_0 . Los valores no son arbitrarios ya que quedan determinados desde el inicio, al escoger el escalamiento. Así, para el caso que interesa; esto es, cuando las velocidades de Alfvén, del sonido y del fluido son comparables es, por ejemplo, en la atmósfera solar. Allí $v_0 \sim v_A \sim v_s \sim 10^4$ m/s, $\rho_0 \sim 10^{-5}$ kg/m³, $T_0 \sim 10^4$ K, $B_0 \sim 10\sqrt{10} \sqrt{\text{Pa}}$, $\eta_0 \sim 10^{-3}$ Ωm , $\nu_0 \sim 10^3$ Pa, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. Si a la hora del escalamiento se pide que los efectos disipativos sean dos órdenes de magnitud más pequeños (hablando en potencias de diez), resulta que la longitud donde se aprecian los cambios será de aproximadamente 10 m, $\kappa_0 \sim 10^{-2}$ W/mK y $\nu_0 \sim 10^{-2}$ Kg/ms. con lo anterior se tiene que el signo del coeficiente que acompaña a $b_k^{(1)}$ es positivo y por lo tanto, los coeficientes decrecen, en la escala de tiempo de t^* , de manera exponencial. En

consecuencia la configuración es estable modo a modo.

Ejemplo 2: acoplamiento entre los modos

En el ejemplo que se presenta a continuación, se van a utilizar la mayoría de los supuestos del ejemplo anterior, quitando la restricción de la incompresibilidad y sólo se permitirá dependencia en la coordenada radial.

En el equilibrio se tendrá exactamente la solución anterior. Las diferencias empiezan a partir del primer orden. La ecuación (2.24), al substituir el desarrollo en serie de \mathbf{v}_1 , se transforma en

$$\sum_k b_k^{(1)} \sin(\omega_k t) [\gamma p_c \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_k - \mathbf{B}_c \times \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u}_k \times \mathbf{B}_c) + \rho_c \omega_k^2 \mathbf{u}_k] = 0. \quad (3.11)$$

Para cumplir en esta última expresión con la igualdad, debe ser necesario que el coeficiente del $\sin(\omega_k t)$ sea cero para cada k , debido a la independencia lineal de la función seno. Ahora bien, como en general $b_k^{(1)}$ es distinta de cero, basta entonces con que lo que está dentro del paréntesis lo sea. Si se considera que la \mathbf{u}_k sólo depende de la coordenada radial, eso simplifica las cosas bastante permitiendo escribir lo que está dentro del parentesis cuadrado en la ecuación (3.11) como a continuación:

$$\hat{r} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(r u_r)}{dr} \right) \right] (\gamma p_c + B_0^2) + \rho_c \omega_k^2 (\hat{r} u_r + \hat{\theta} u_\theta + \hat{z} u_z) = 0. \quad (3.12)$$

De la ecuación anterior se concluye que u_θ y u_z son cero, y sólo queda u_r ; la ecuación correspondiente es, ya desarrollada:

$$\frac{d^2}{dr^2} u_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} u_r + \left[\left(\frac{\rho_c \omega_k^2}{\gamma p_c + B_0^2} \right) - \frac{1}{r^2} \right] u_r = 0 \quad (3.12)$$

Cuya solución es $u_r = J_1(\alpha_k r)$, la función de Bessel regular de primer orden, donde se han hecho, además, las siguientes definiciones $\alpha_k = \omega_k / v_u$ y $v_u = \sqrt{(\gamma p_c + B_0^2) / \rho_c}$. En esta última se pueden reconocer los cuadrados de las velocidades del sonido (p_c / ρ_c) y de Alfvén (B_0^2 / ρ_c).

Suponiendo que el cilindro tiene radio unitario, y dado que la condición a la frontera es $u_r = 0$ en la misma, las alfas serán las raíces de la función de Bessel (sin incluir al cero). Para los plasmas que interesan, es decir, aquellos en los que las velocidades del sonido, de Alfvén y de flujo son comparables; las frecuencias, correspondientes a las alfas, inician en las decenas de kilohertz.

La velocidad $\mathbf{1}$ puede ya expresarse en términos de las \mathbf{u}_k :

$$\mathbf{v}_1 = \sum_k b_k^{(1)} \text{sen}(\omega_k t) (u_r, 0, 0) = \sum_k b_k^{(1)} \text{sen}(\omega_k t) \hat{r} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_k)|} J_1(\alpha_k r) \quad (3.14)$$

Consecuentemente, las otras cantidades a primer orden pueden calcularse usando las relaciones (3.33)-(3.42), resultando:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{u}_k) \\ &= \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \rho_e \alpha_k \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_k)|} J_0(\alpha_k r), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= - \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \nabla \times (\hat{r} u_r \times \mathbf{B}_e) \\ &= - \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} (-\mathbf{B}_e \alpha_k) \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_k)|} J_0(\alpha_k r), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \gamma p_e \nabla \cdot \mathbf{u}_k \\ &= \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \gamma p_e \alpha_k \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_k)|} J_0(\alpha_k r), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \left(\frac{p_k^{(1)} - T_e \rho_k^{(1)}}{\rho_e} \right) \\ &= \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \alpha_k (\gamma - 1) T_e \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_k)|} J_0(\alpha_k r), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$S_1 = 0, \quad (3.19)$$

$$\eta_1 = - \frac{3}{2} \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \alpha_k \eta_0 (\gamma - 1) \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_k)|} J_0(\alpha_k r), \quad (3.20)$$

$$\kappa_1 = \frac{5}{2} \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \alpha_k \kappa_0 (\gamma - 1) \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_k)|} J_0(\alpha_k r), \quad (3.21)$$

$$\nu_1 = \frac{5}{2} \sum_k b_k^{(1)} \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \nu_0 \alpha_k (\gamma - 1) \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_k)|} J_0(\alpha_k r). \quad (3.22)$$

Falta determinar los valores de las $b_k^{(1)}$, para ello es necesario utilizar la condición de no resonancia. Hay que calcular, primeramente, las expresiones para las funciones $f_{k'}^{(2)}$, $g_{k'}^{(2)}$ y $Q_{k'k''}^{(2)}$. A continuación se dan las expresiones finales, los detalles están en el apéndice B.

$$f_{k'}^{(2)} = \hat{r} \left\{ -2\alpha_{k'}^2 (\gamma p_e + B_0^2) \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \right\} \quad (3.23)$$

$$g_{k'}^{(2)} = \hat{r} \left\{ J_1(\alpha_{k'} r) \alpha_{k'}^4 \left(\frac{4\nu_0}{3} \nu_0^2 - (1 - \gamma)^2 \kappa_0 T_e - \frac{\eta_0}{\mu_0} B_0^2 \right) + \frac{4\nu_0}{3} \omega_{k'}^2 \alpha_{k'} \frac{1}{r} J_0(\alpha_{k'} r) \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|}. \quad (3.24)$$

$$Q_{k'k''}^{(2)} = \hat{r} \left\{ J_0(\alpha_{k'} r) J_1(\alpha_{k'' r}) (\alpha_{k'} \alpha_{k''}^2) [3B_0^2 - \gamma p_e (1 + \gamma)] + J_0(\alpha_{k'' r}) J_1(\alpha_{k'} r) \alpha_{k''} [\alpha_{k''}^2 (-2\gamma p_e) + \alpha_{k'}^2 (3B_0^2 + \gamma p_e (1 - \gamma))] + J_1(\alpha_{k'} r) J_1(\alpha_{k'' r}) \left[\frac{2\alpha_{k''}^2}{r} \right] 2\gamma p_e \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k''})|} \quad (3.25)$$

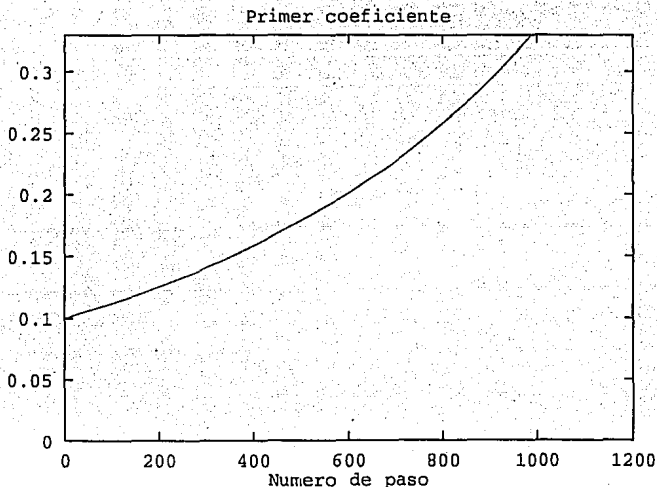
El desarrollo de la velocidad en función de las u_k contiene, en principio, un número infinito de términos, tantos como raíces tiene la $J_1(\alpha_k r)$; con lo que se tendría un infinito número de condiciones de no resonancia, correspondientes a cada una de las u_k . Ante este hecho pareciera imposible obtener una respuesta; pero si se considera que la solución pudiera aproximarse satisfactoriamente por un número finito de términos (este tipo de suposiciones se realiza a menudo en los problemas de turbulencia [11]), se puede dar un resultado. Para el ejemplo aquí considerado, se supondrá que es suficiente el empleo de los tres primeros modos. Las sumatorias de la condición de no resonancia pueden desarrollarse y efectuarse las integrales indicadas. Algunas de las que tienen que ver con funciones de Bessel, pueden calcularse haciendo uso de las propiedades de ortogonalidad de las mismas, en cambio otras, que resultan ser la mayoría, sólo pueden encontrarse numéricamente.

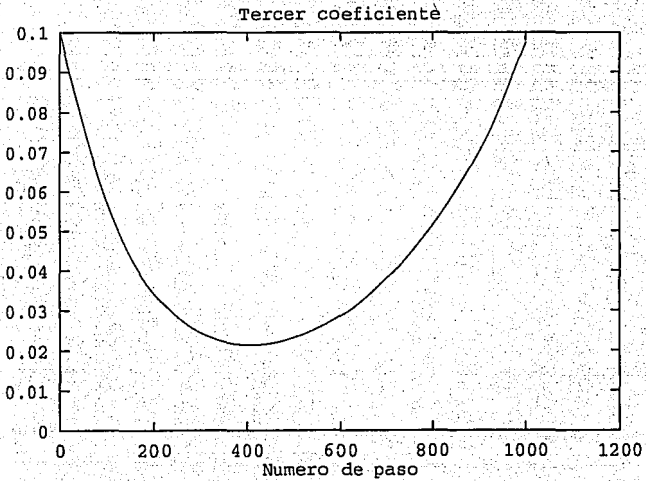
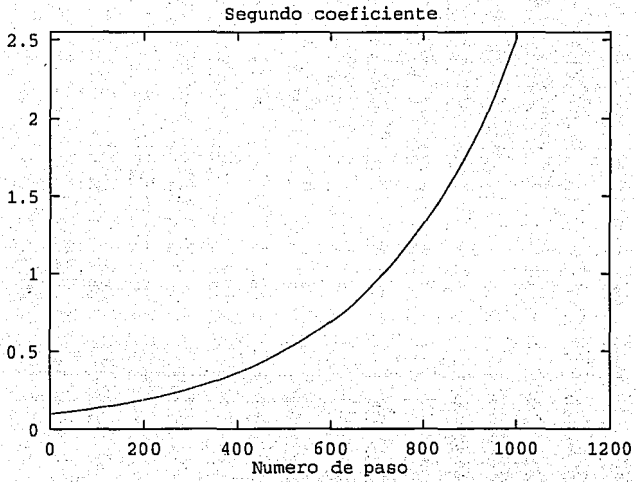
Para el cálculo explícito se recurrió a "Mathematica" (el programa puede verse en el apéndice C). De esta manera se obtiene una serie de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, del tenor siguiente

$$c_0 \frac{db_0^{(1)}}{dt^*} + c_1 b_0^{(1)} + c_2 b_1^{(1)} + c_3 b_2^{(1)} + c_4 (b_0^{(1)})^2 + c_5 (b_1^{(1)})^2 + c_6 (b_2^{(1)})^2 + c_7 b_0^{(1)} b_1^{(1)} + c_8 b_0^{(1)} b_2^{(1)} + c_9 b_1^{(1)} b_2^{(1)} = 0. \quad (3.26)$$

Los coeficientes involucran los parámetros iniciales, esto es, las conductividades eléctrica y térmica, la viscosidad, la temperatura inicial, etc. (las consideraciones para elegir los adecuados a este ejemplo son las mismas que las del ejemplo anterior).

Este sistema de ecuaciones tiene que integrarse numéricamente, para ello se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden (el programa que hace esto se realizó en AmigaBasic y se presenta en el apéndice D), obteniéndose resultados como los que se muestran en las gráficas siguientes. En el eje vertical se grafica el coeficiente indicado en el encabezado y los pasos son de 1×10^{-6} segundos.





Capítulo 4

Análisis de los resultados de los ejemplos

Es conveniente, una vez presentado el análisis de estabilidad en el capítulo 2, resaltar algunos puntos importantes en relación a dicho análisis.

El primero es que los escalamientos se hicieron en potencias enteras del parámetro elegido (la razón del tiempo impuesto por la velocidad de Alfvén entre los tiempos característicos de los procesos disipativos), que difiere con los tratamientos usuales [7] en los que se usan escalamientos con potencias fraccionarias.

El segundo es que los tiempos característicos de los procesos disipativos son todos de orden uno. Esto se hizo con el fin de poder desacoplar los distintos términos de manera tal que al resolver los órdenes inferiores se pudiera obtener la solución de los siguientes, usando algo así como una solución en mínimos cuadrados [12]. Todo lo anterior permite recuperar, a primer orden el operador $F(v)$ de la MHD ideal (ecuación 2.25) y obtener la solución del comportamiento a escalas de tiempo grandes, usando una ecuación del tipo de la del oscilador armónico forzado.

En principio se podría haber elegido una escala distinta de acuerdo con cada proceso disipativo o, incluso, dependiendo de cada velocidad. La posibilidad queda abierta; pero parece poco probable que eso resuelva la dificultad en tratamiento como éste, ya que las operaciones se complican fenomenalmente. Y ni qué decir si se desea incluir la anisotropía.

Al evitarse este tipo de complicaciones se llevaba en mente el poder llegar a resolver las cosas analíticamente y, con suerte, encontrar los aspectos relevantes del comportamiento de este tipo de plasmas. Los ejemplos expuestos en el capítulo anterior no son de ninguna

manera arbitrarios, sino, por el contrario, son aquellos que, después de numerosos e infructuosos intentos, tuvieron una solución analítica (como el primero) o bien algo lo bastante cercano a una solución de ese tipo. La mayor de las limitantes en este proceso fueron las condiciones a la frontera, que como es bien sabido, con frecuencia, es el problema central en esta clase de tratamientos.

En cuanto a los ejemplos, las diferencias entre ambos son notables. La primera de ellas es que la incompresibilidad da por resultado que la solución sea un continuo de modos que no tienen entre sí ningún tipo de interacción o acoplamiento; además de que la solución queda bien determinada con los valores de las condiciones iniciales de los parámetros, esto es con los valores iniciales de la resistividad, viscosidad, conductividad térmica, densidad y campo magnético. Las soluciones son, de acuerdo a los valores iniciales que se dan en el capítulo 3, absolutamente estables. Con lo anterior se quiere dar a entender que las amplitudes de todos los modos involucrados, decrecen en la escala de tiempos largos. Esto es lógico pues se trata de un sistema con disipación y sin ningún tipo de fuente de energía que lo alimente, una perturbación tenderá a decaer hasta finalmente desaparecer.

El otro ejemplo tiene características distintas y es, de hecho, el más interesante de los dos. Su solución requirió de un mayor trabajo.

La primera gran diferencia con el caso anterior es que se presenta un acoplamiento entre los distintos modos. La ecuación diferencial resultante de la condición de no resonancia para cada coeficiente, involucra no sólo al coeficiente en cuestión, sino a todos ellos, además de los cuadrados de todos los otros (el cuadrado del coeficiente del modo correspondiente no aparece por la manera en que se escogieron las frecuencias de prueba en la condición de no resonancia) y los productos dos a dos. La solución está dada por un número infinito de modos acoplados en una forma complicada; como es imposible una solución con todos, se hizo la suposición de que con unos cuantos sería posible aproximar, de manera apropiada, la solución. Tres, es el número más bajo de modos que en principio mostraría con claridad

el acoplamiento y permitiría llevar a cabo las operaciones involucradas, en un principio y de manera aproximada, "a mano" para, posteriormente y con todo detalle, hacerlas en la computadora sabiendo por dónde iba la cosa.

Los resultados no fueron los esperados, ya que tratándose, como en el caso anterior, de un plasma donde hay procesos disipativos y ninguna fuente externa, era de suponerse que la perturbación introducida decayera. Más sorprendente resulta si se tiene en cuenta que las ecuaciones que deben cumplir los coeficientes del desarrollo provienen de lo que se dió por llamar la condición de no resonancia; a pesar de ello, al menos uno de los coeficientes crece muy rápidamente en un tiempo extremadamente corto (incluso menor al de la escala del tiempo corto).

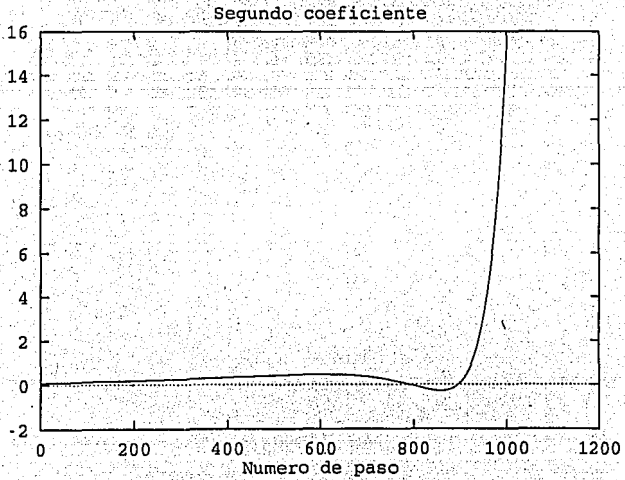
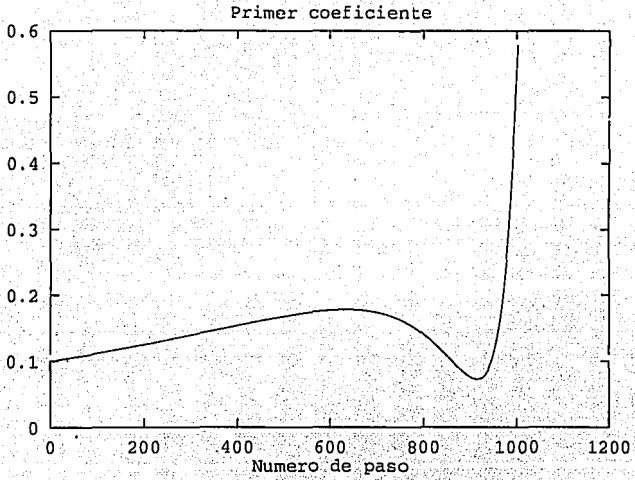
Se realizaron diversas pruebas, utilizando valores un poco diferentes de los parámetros iniciales, las condiciones iniciales de los coeficientes, los tiempos y el número de pasos de integración; pero los resultados fueron cualitativamente los mismos. Es de resaltar que el coeficiente que crece lo hace aún cuando se le da un valor inicial de cero.

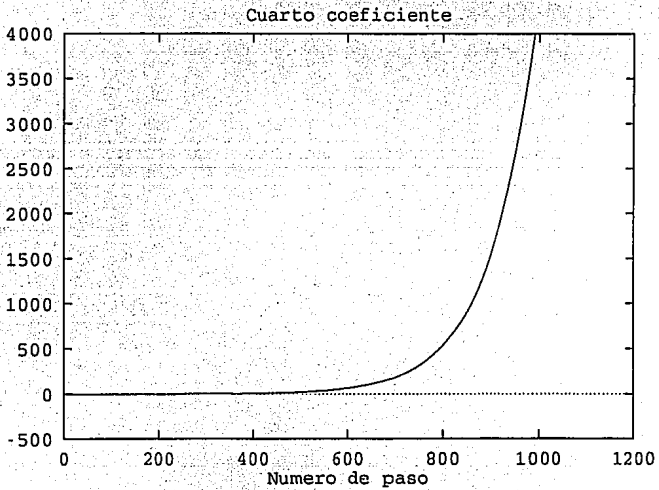
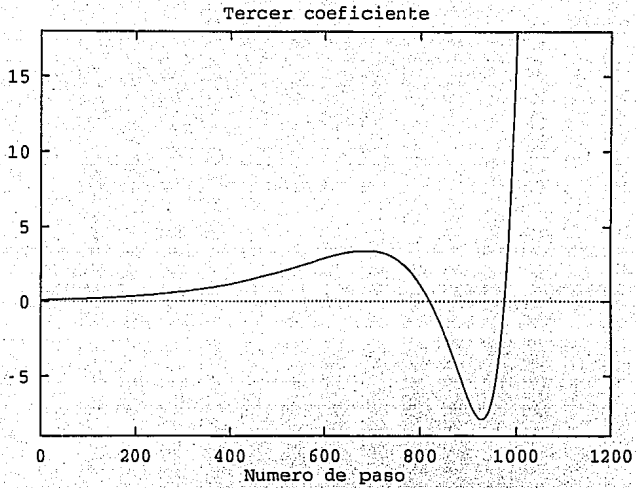
Pensando que quizá el número de modos considerado no fuera suficiente para aproximar con propiedad la solución se decidió intentar con cuatro modos. El programa utilizado anteriormente para calcular la condición de no resonancia, apenas requirió de modificaciones, no así el que resolvía las ecuaciones diferenciales. Esto último porque cada ecuación incluía siete términos más, además de ser más ecuaciones (el número de ecuaciones va como el número de modos y cada una incluye términos por el cuadrado de ese número). Como se puede uno imaginar, los tiempos de máquina crecen de manera considerable.

Los resultados del uso de cuatro modos para situaciones idénticas al caso con tres, se presentan en las gráficas de las páginas siguientes, en el eje vertical se grafica el coeficiente indicado en el encabezado y el paso es de 1×10^{-7} .

Como se aprecia, el coeficiente del cuarto modo se dispara, haciendo nuevamente inestable la configuración (es del tipo de inestabilidades que se da en llamar "explosivas").

[13]).





Por un momento se llegó a pensar que los resultados que se obtenían obedecían a un problema más de fondo, que tendría que ver con el método en sí. Tras una ardua revisión, se creyó que el problema estaría, quizá, en considerar casos sin flujo de masa.

Así, la siguiente tarea consistió en tratar de hallar soluciones con flujo que permitieran aprovechar lo que ya se tenía y, al mismo tiempo, buscar en la literatura tratamientos de la estabilidad en sistemas que incluyeran flujo.

En cuanto a encontrar una solución con las características arriba citadas, fué imposible obtener alguna configuración que pudiera resolverse de manera analítica (o lo más cercano a eso) y que permitiera usar el análisis que se tenía.

Mientras se revisaban diversas referencias, se encontraron algunas en que se plantea el problema de determinar el número mínimo de modos para obtener soluciones aproximadas a las ecuaciones de la hidrodinámica [14]. En ellos se habla de la evidencia numérica del drástico cambio de comportamiento de las soluciones al incrementar el número de modos en la aproximación (en todos ellos se hace uso de representaciones en serie de Fourier de las soluciones), manteniendo fijos los parámetros físicos. Si bien se dan algunas estimaciones para casos relativamente sencillos (algunas muy elaboradas desde el punto de vista matemático) se afirma que aún no es posible hacer algo similar para el caso más general. En un ejemplo mencionado en [14] se comenta como al pasar de un análisis con tres modos a uno con veintiocho produce un comportamiento totalmente diferente de las soluciones.

Bien pudiera ser que el tratamiento propuesto en el capítulo 2 tuviera este tipo de problemas, esto es, que requiriera de un número elevado de modos para poder dar cabal cuenta del comportamiento de la configuración propuesta. Aún suponiendo que fuera posible estimar el número mínimo ¿quién sería el valiente que se pondría a hacer las cuentas para, digamos, 50 modos (esto por dar un número)? En todo caso, sería más adecuado plantear desde el principio, un tratamiento numérico al problema.

Capítulo 5

Conclusiones

La motivación principal del trabajo fue explorar una manera de estudiar la estabilidad de sistemas en los que interviniera un plasma con resistividad (r), viscosidad (v) y que condujera el calor (cc), ante pequeñas perturbaciones a partir de un estado estacionario inicial en el marco del modelo magnetohidrodinámico. Los tratamientos encontrados en la literatura, que hacen uso de la MHD, no consideran el conjunto completo de efectos $(-r)$, (v) y (cc) , algunos por separado [15] o si acaso combinaciones [16] de dos de ellos. Las técnicas que emplean son diversas, incluso se hacen, lo que se podría llamar tratamientos híbridos [2].

El tratamiento expuesto en el capítulo 2 toma como base una solución estacionaria, y sin flujo, de las ecuaciones de la MHD. Utiliza la ecuación de balance de entropía (2.11) (que viene a hacer las veces de una ecuación de estado para poder cerrar el problema) para identificar las escalas de tiempo que regirán el desarrollo posterior. En el supuesto de que las velocidades de Alfvén, el sonido y la del fluido sean similares, son las escalas de tiempo que resultan de los procesos viscoso, resistivo y de conducción de calor, las que imponen el grado de importancia de los términos asociados a ellos. En un afán simplificador, se consideró que los tiempos característicos de los procesos mencionados eran del mismo orden, en comparación a la escala de tiempo en que las perturbaciones del campo magnético se propagan (la velocidad de Alfvén); el cociente entre ambas establece el parámetro ϵ para los ordenamientos.

Lo siguiente que se hizo fue suponer que las cantidades físicas involucradas (con excepción del tiempo), se podían expresar como una serie de potencias enteras de ϵ a partir del valor del estado estacionario. A los términos que incluían (r) , (v) o (cc) se les impuso,

un orden diferente al de los demás términos, esto con la intención de "minimizar su efecto". Para el tiempo se asignaron dos escalas (véase 2.12) *las que se consideraron como variables independientes*.

Se realizaron los desarrollos, se reagruparon los órdenes y al derivar la ecuación de momento (2.16) respecto al la escala de tiempo asociada a la velocidad de Alfvén (la escala de tiempo corta), se obtuvo una ecuación para las velocidades, que incluía el operador de Bernstein de la MHD ideal (2.24). A primer orden las soluciones son como las del problema de la estabilidad lineal en la MHD ideal, con la diferencia de que los coeficientes de la solución en serie son dependientes del otro tiempo (el tiempo largo (2.29)). Para poder determinarlos hay que ir al siguiente orden, donde la situación se vuelve más interesante.

Las soluciones al segundo orden se calculan usando una proyección de \mathbf{v}_2 en el espacio de \mathbf{v}_1 , usando la base de las soluciones \mathbf{u}_k (2.44). Esto permite tener una ecuación del tipo de la del oscilador armónico forzado, cuya solución es bien conocida. Al término de forzamiento (2.52) puede imponerse una condición de no resonancia (2.53), de esa manera se obtienen las ecuaciones para determinar los coeficientes que hacían falta, y de paso asegurar (en principio) que las soluciones no se dispararán.

En cuanto a los ejemplos, el número de los que se puede tratar es muy pequeño, debido a las limitantes que imponen las condiciones a la frontera. El primero que se presenta en el capítulo 3, es muy sencillo, en él los modos quedan enteramente desacoplados. Caso contrario a lo que pasa en el segundo, donde puede apreciarse la interacción por parejas de los modos (aquí se usaron 3 modos para ejemplificar). Por otro lado, el resultado en el primero era el esperado, ya que una perturbación en un medio disipativo, sin una fuente que lo mantenga, debería, como finalmente sucedió, extinguirse. En cambio, en el segundo, se tiene que uno de los modos crece a gran ritmo, no importando si de inicio es cero. Aún intentando con un mayor número de modos (4), hay uno que se dispara en muy corto tiempo. Diferentes revisiones no mostraron errores en las operaciones, así

que el comportamiento mostrado debe obedecer a un problema más de fondo. En la literatura hay evidencia de que el número de modos involucrados en la solución determina el comportamiento de la misma [14]; bien pudiera ser éste el caso del segundo ejemplo, aunque intentar "a ciegas" con un mayor número de modos sería impráctico, por las razones a las que se aduce en el capítulo anterior *.

* Se refiere a la discusión que se hace respecto al número de términos asociado a la cantidad de modos que se toman en cuenta

Bibliografía

- [1] *M.N. Rosenbluth*, USAEC Report No. LA-2030,1956, citado por *H.P. Furth*, *Phys. Fluids* **28**, 1595 (1985).
- [2] *A. Bondeson y R. Incono*, *Phys. Fluids B* **1**, 1431 (1989).
- [3] *W.H. Matthaeus y Y. Zhou*, Nearly incompressible MHD turbulence in the solar wind, en: *Turbulence and nonlinear dynamics in MHD flows*, Proc. of the Workshop on turbulence and Nonlinear Dynamics in MHD Flows, Cargèse, Francia 1988, editado por M. Meneguzzi, A. Pouquet y P.L. Sulem. North-Holland Physics.
- [4] *J.A. Almaguer, E. Hameiri, J. Herrera y D.D. Holm*, *Phys. Fluids* **31**, (1988)
- [5] *I.B. Bernstein, E.A. Frieman, M.D. Kruskal y R.M. Kulsrud*, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **244**, 17 (1958).
- [6] *M.S. Chu, M.S. Chance, J.M. Green y T.H. Jensen*, *Phys. Fluids B* **1**, 62 (1989).
- [7] *H.P. Furth, J. Killen y M.N. Rosenbluth*, *Phys. Fluids* **6**, 459 (1963).
- [8] *L.D. Landau y E.E. Lifshitz*, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Londres 1959.

- [9] *F.F. Chen*, Introduction to plasma physics and controlled fusion, Plenum, Nueva York 1984.
- [10] *G. Arfken*, Mathematical Methods for Physicists (2da. ed.), Academic Press, Nueva York 1970.
- [11] *A.M. Pukhov y A.B. Mikhailovski*, *Sov. J. Plasma Phys.* **17**, 244 (1991).
- [12] *G. Strang*, Algebra lineal y sus aplicaciones, Fondo Educativo Interamericano, México 1982.
- [13] *F. Cap*, Einführung in die Plasmaphysik I, Vieweg&Sohn, Alemania 1975.
- [14] *C. Foias y Y.M. Treve*, *Phys. lett.* **85 A**, 35 (1981).
O.P. Manley y Y.M. Treve, *Phys. lett.* **82 A**, 88 (1981).
C. Foias, O.P. Manley, R. Temam y Y.M. Treve, *Physica* **9D**, 157 (1983).
- [15] *Y. Pao y W. Kerner*, *Phys. Fluids* **28**, 287 (1985).
- [16] *A.C. Ting, W.H. Matthaeus y D. Montgomery*, *Phys. Fluids* **29**, 3261 (1986).

Apéndice A

En este apéndice se muestran, de manera desarrollada, los cálculos involucrados en el primer ejemplo del capítulo 3.

Para determinar los valores de $b_k^{(1)}$ es necesario conocer los valores de $f_{k'}^{(2)}$, $g_{k'}^{(2)}$ y $Q_{k',k''}^{(2)}$; para ello se hará uso de las ecuaciones (2.49)–(2.51). Se comenzará por $f_{k'}^{(2)}$ que es la más simple

$$f_{k'}^{(2)} = -B_c \times \nabla \times B_k^{(1)} - \rho_0 \omega_{k'}^2 \mathbf{u}_{k'} \quad (A1)$$

que al hacer las operaciones y sustituir el valor de $\mathbf{u}_{k'}$, se tiene

$$f_{k'}^{(2)} = -\hat{\theta} 2\sqrt{60} \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) [\rho_0 \omega_{k'}^2] \text{sen}(l_{k'} z). \quad (A2)$$

La expresión (2.50), se reduce para este caso a

$$g_{k'}^{(2)} = - \underbrace{\frac{\eta_0}{\mu_0} B_c \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times \left(\nabla \times B_k^{(1)} \right)}_1 - \underbrace{\nu_0 \omega_{k'}^2 \nabla \cdot \left(\bar{\sigma}_{k'}^{(1)} \right)}_2. \quad (A3)$$

Para conocer el término marcado con el número dos, se necesita calcular el tensor $\bar{\sigma}$. La expresión general, en coordenadas cilíndricas es

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} & \sigma_{\theta\theta} &= 2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right] - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \sigma_{zz} &= 2 \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} & \sigma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \sigma_{rz} &= \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} & \sigma_{r\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (A4)$$

Al sustituir la expresión para v_1 y tomar la divergencia del tensor, se tendrá que solamente la componente θ no es cero

$$(\nabla \cdot \bar{\sigma}_{k'}^{(1)})_\theta = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{u}_{k'\theta} - \frac{\mathbf{u}_{k'\theta}}{r} \right) + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{u}_{k'\theta} - \frac{\mathbf{u}_{k'\theta}}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{u}_{k'\theta} \quad (A5)$$

al introducir el valor de $\mathbf{u}_{k'}$ y efectuar las operaciones indicadas, lleva a

$$(\nabla \cdot \bar{\sigma}_{k'}^{(1)})_{\theta} = \frac{-\sqrt{60}}{r_0} \sin(l_{k'} z) \left\{ \frac{3}{r_0} + l_{k'}^2 \left(r - \frac{r^2}{r_0} \right) \right\} \quad (A6)$$

La parte 1 de (A3), al incluir la expresión (3.9) para $\mathbf{B}_{k'}^{(1)}$ se transforma en

$$-\hat{\theta} B_0 \frac{\eta_0}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r B_0 l_{k'} \sqrt{60} \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \cos(l_{k'} z) \right] \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[B_0 l_{k'} \sqrt{60} \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \cos(l_{k'} z) \right] \right\} \quad (A7)$$

que finalmente resulta

$$-\hat{\theta} \frac{B_0^2 l_{k'}^2 \sqrt{60}}{r_0} \frac{\eta_0}{\mu_0} \sin(l_{k'} z) \left\{ \frac{3}{r_0} + l_{k'}^2 \left(r - \frac{r^2}{r_0} \right) \right\} \quad (A8)$$

Si se reúnen y reagrupan las expresiones (A6) y (A8) se llega a

$$\mathbf{g}_{k'}^{(2)} = \hat{\theta} \frac{B_0^2 l_{k'}^2 \sqrt{60}}{r_0} \sin(l_{k'} z) \left\{ \frac{3}{r_0} + l_{k'}^2 \left(r - \frac{r^2}{r_0} \right) \right\} \left[\frac{\nu_0}{\rho_e} - \frac{\eta_0}{\mu_0} \right] \quad (A9)$$

Falta sólo la expresión de $\mathbf{Q}_{k'k''}^{(2)}$, de (2.51) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{k'k''}^{(2)} = & \mathbf{B}_e \times \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u}_{k'} \times \mathbf{B}_{k''}^{(1)}) - (\nabla \times \mathbf{B}_{k''}^{(1)}) \times \mathbf{B}_{k'}^{(1)} - \\ & (\nabla \times \mathbf{B}_{k'}^{(1)}) \times \mathbf{B}_{k''}^{(1)} + \rho_e \omega_{k''}^2 (\mathbf{u}_{k''} \cdot \nabla \mathbf{u}_{k'} + \mathbf{u}_{k'} \cdot \nabla \mathbf{u}_{k''}) \end{aligned} \quad (A10)$$

Aquí se pueden eliminar rápidamente los términos que involucran un producto cruz con los modos del campo magnético a primer orden, el que tiene que ver con $\mathbf{u}_{k'}$ es directamente cero porque ambas cantidades están en la dirección $\hat{\theta}$; mientras los otros, eliminan la componente en la dirección $\hat{\theta}$ y al efectuar después el producto punto con $\mathbf{u}_{k'}$ que sólo tiene una componente en esa dirección (esto a la hora de calcular la condición de resonancia) será cero, así que no hay que preocuparse por ellas. Las que son del estilo $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$, como los vectores tienen componentes sólo en la dirección $\hat{\theta}$ resultan

$$a_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} b_{\theta} \hat{\theta} = a_{\theta} b_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} = -\hat{r} a_{\theta} b_{\theta} \quad (A11)$$

que nuevamente serán cero a la hora de calcular la condición de no resonancia. Se puede uno olvidar del término $Q_{k',k''}^{(2)}$. La ecuación de no resonancia queda reducida a

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ \sum_{k'} \frac{\cos(\omega_{k'} t)}{\omega_{k'}} \left[\frac{db_{k'}^{(1)}}{dt} \langle \mathbf{u}_k, (1/\rho_e) \mathbf{f}_{k'}^{(2)} \rangle + b_{k'}^{(1)} \langle \mathbf{u}_k, (1/\rho_e) (\mathbf{g}_{k'}^{(2)} - \nabla S_{k'}^{(1)}) \rangle \right] \right\} \cos(\omega t); \quad (53)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_k, (1/\rho_e) \mathbf{f}_{k'}^{(2)} \rangle &= \frac{1}{\int dV} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi_0} \int_0^{r_0} \left[\sqrt{60} \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \text{sen}(l_k z) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \left[-2\sqrt{60} \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \omega_{k'}^2 \text{sen}(l_{k'} z) \right] r dr d\theta dz \right\} \\ &= -2\omega_{k'}^2 \delta_{k,k'} \end{aligned} \quad (A13)$$

y para el otro producto escalar, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_k, (1/\rho_e) \mathbf{g}_{k'}^{(2)} \rangle &= \frac{1}{\int dV} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi_0} \int_0^{r_0} \left[\sqrt{60} \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \text{sen}(l_k z) \right] \times \\ &\quad \left[\frac{\omega_{k'}^2 \sqrt{60}}{r_0} \left(\frac{3}{r_0} + l_{k'}^2 \left(r - \frac{r^2}{r_0} \right) \right) \left[\frac{\nu \mu_0}{\rho_e} - \frac{\eta_0}{\mu_0} \right] \text{sen}(l_{k'} z) \right] r dr d\theta dz \\ &= \left[\frac{\nu \mu_0}{\rho_e} - \frac{\eta_0}{\mu_0} \right] \delta_{k,k'} \omega_{k'}^2 \left[\frac{15}{r_0^2} + l_{k'}^2 \right] \end{aligned} \quad (A14)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (A12) y reagrupando se llega a la ecuación (3.10)

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\omega_k t) \cos(\omega t) \left\{ \frac{db_k^{(1)}}{dt} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_0}{\rho_e} - \frac{\eta_0}{\mu_0} \right) \left(\frac{15}{r_0^2} + l_k^2 \right) b_k^{(1)} \right\} dt = 0. \quad (3.10)$$

En este apéndice se muestran, de manera desarrollada, los cálculos involucrados en el segundo ejemplo del capítulo 3.

Se comienza por las funciones $\mathbf{f}_{k'}^{(2)}$, $\mathbf{g}_{k'}^{(2)}$ y $\mathbf{Q}_{k'k''}^{(2)}$, para ello, se sustituyen las ecuaciones (3.15)–(3.22), en las expresiones (2.49)–(2.51), que para la primera de las funciones enunciadas resulta:

$$\mathbf{f}_{k'}^{(2)} = \left\{ \gamma p_e \alpha_{k'} \nabla J_0(\alpha_{k'} r) - \mathbf{B}_e \times \nabla \times [-\mathbf{B}_e \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'} r)] - \hat{r} \rho_e \omega_{k'}^2 J_1(\alpha_{k'} r) \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \quad (B1)$$

$$= \left\{ \gamma p_e \alpha_{k'} \hat{r} \left(\frac{d}{dr} J_0(\alpha_{k'} r) \right) - B_0^2 \alpha_{k'} \hat{z} \times \left[\hat{\theta} \frac{d}{dr} J_0(\alpha_{k'} r) \right] - \hat{r} \rho_e \omega_{k'}^2 J_1(\alpha_{k'} r) \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \quad (B2)$$

$$= \hat{r} \left\{ \alpha_{k'} (\gamma p_e + B_0^2) \frac{d}{dr} J_0(\alpha_{k'} r) - \rho_e \omega_{k'}^2 J_1(\alpha_{k'} r) \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \quad (B3)$$

que al reagrupar y utilizar la expresión para la v_u da finalmente

$$\mathbf{f}_{k'}^{(2)} = -\hat{r} \left\{ (\gamma p_e + B_0^2) \alpha_{k'}^2 + \rho_e \omega_{k'}^2 \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \quad (B4)$$

$$= \hat{r} \left\{ -2\alpha_{k'}^2 (\gamma p_e + B_0^2) \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \right\} \quad (3.23)$$

Para $\mathbf{g}_{k'}^{(2)}$ se tiene

$$\mathbf{g}_{k'}^{(2)} = (1 - \gamma) \nabla [\kappa_0 \Delta (\alpha_{k'} T_e (\gamma - 1) \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r))] - \frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{B}_e \times \nabla \times \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_{k'}^{(1)}) - \nu_0 \omega_{k'}^2 \nabla \cdot \hat{\sigma}_{k'}^{(1)}; \quad (B5)$$

donde falta por conocerse el tensor $\hat{\sigma}_{k'}^{(1)}$. La expresión general, en coordenadas cilíndricas, de la parte disipativa del tensor de esfuerzos [15] es

$$\sigma_{rr} = 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \sigma_{\theta\theta} = 2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right] - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= 2 \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} & \sigma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \sigma_{rz} &= \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} & \sigma_{r\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (B6)$$

Que al sustituir los valores para las componentes de \mathbf{v}_1 se tiene, para cada modo,

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr})_{k'}^{(1)} &= \left\{ 2 \frac{d}{dr} (J_1(\alpha_{k'} r)) - \frac{2}{3} \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'} r) \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} & (\sigma_{r\theta})_{k'}^{(1)} &= 0 \\ (\sigma_{\theta\theta})_{k'}^{(1)} &= \left\{ \frac{2}{r} J_1(\alpha_{k'} r) - \frac{2}{3} \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'} r) \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} & (\sigma_{rz})_{k'}^{(1)} &= 0 \\ (\sigma_{zz})_{k'}^{(1)} &= -\frac{2}{3} \alpha_{k'} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) & (\sigma_{\theta z})_{k'}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (B7)$$

Y como para $\mathbf{g}_{k'}^{(2)}$ es necesaria la divergencia del tensor, se tendrá, por componentes:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \hat{\sigma}_{k'}^{(1)})_r &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \left\{ 2 \frac{d}{dr} (J_1(\alpha_{k'} r)) - \frac{2}{3} \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'} r) \right\} \right) \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \\ &\quad - \frac{1}{r} \left(\frac{2}{r} J_1(\alpha_{k'} r) - \frac{2}{3} \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'} r) \right) \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \\ (\nabla \cdot \hat{\sigma}_{k'}^{(1)})_\theta &= 0 & (\nabla \cdot \hat{\sigma}_{k'}^{(1)})_z &= 0 \end{aligned} \quad (B8)$$

Con lo que queda únicamente por desarrollar la expresión de la componente \hat{r}

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \hat{\sigma}_{k'}^{(1)})_r &= 2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} J_1(\alpha_{k'} r) \right) - \frac{1}{r^2} J_1(\alpha_{k'} r) \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \\ &\quad - \frac{2}{3} \alpha_{k'} \frac{1}{r} \left\{ \frac{d}{dr} (r J_0(\alpha_{k'} r)) + J_0(\alpha_{k'} r) \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \\ &= - \left[2 \alpha_{k'}^2 J_1(\alpha_{k'} r) + \frac{2}{3} \alpha_{k'} \frac{1}{r} \{ 2 J_0(\alpha_{k'} r) - r \alpha_{k'} J_1(\alpha_{k'} r) \} \right] \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \\ &= - \frac{4}{3} \left\{ \alpha_{k'}^2 J_1(\alpha_{k'} r) + \alpha_{k'} \frac{1}{r} J_0(\alpha_{k'} r) \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \end{aligned} \quad (B9)$$

La función $\mathbf{g}_{k'}^{(2)}$, insertando la expresión anterior, se ve:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{k'}^{(2)} &= \nu_0 \omega_{k'}^2 \frac{4}{3} \left\{ \alpha_{k'}^2 J_1(\alpha_{k'} r) + \alpha_{k'} \frac{1}{r} J_0(\alpha_{k'} r) \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \hat{r} \\ &\quad - \underbrace{(1 - \gamma)^2 \kappa_0 \alpha_{k'} T_c \nabla [\Delta \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r)]}_1 \\ &\quad - \underbrace{\frac{\eta_0}{\mu_0} \mathbf{B}_c \times \nabla \times \nabla \times [\nabla \times -\hat{z} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r)] \mathbf{B}_0 \alpha_{k'}}_2 \end{aligned} \quad (B10)$$

Se desarrollará, primero, la parte correspondiente al laplaciano del término marcado con el número 1 de la expresión anterior

$$\Delta \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) \right) = -\alpha_{k'}^2 \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) \quad (B11)$$

aplíquese el gradiente, sabiendo que la única contribución es aquella debida a la componente en la dirección radial

$$\nabla \Delta \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) = \hat{r} \frac{d}{dr} \left(-\alpha_{k'}^2 \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) \right) = \hat{r} \alpha_{k'}^3 \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \quad (B12)$$

Para el término marcado con el número 2, se procederá por partes

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(-\hat{z} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) \right) &= \hat{\theta} \frac{d}{dr} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) = -\hat{\theta} \alpha_{k'} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \\ \nabla \times \left(-\hat{\theta} \alpha_{k'} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \right) &= -\hat{z} \frac{d}{dr} \left(\alpha_{k'} r \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \right) \\ &= -\hat{z} \frac{d \alpha_{k'} r}{dr} \frac{d}{d \alpha_{k'} r} \left(\alpha_{k'} r \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \right) \\ &= -\hat{z} \frac{\alpha_{k'}}{r} \alpha_{k'} r \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) \\ &= -\hat{z} \alpha_{k'}^2 \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) \end{aligned} \quad (B13)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(-\alpha_{k'}^2 \hat{z} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) \right) &= -\hat{\theta} \alpha_{k'}^3 \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \\ -\hat{z} \times \hat{\theta} \alpha_{k'}^3 \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) &= -\alpha_{k'}^3 \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \hat{r} \end{aligned}$$

teniéndose finalmente

$$-\frac{\eta_0}{\mu_0} B_0^2 \alpha_{k'} \hat{z} \times \nabla \times \nabla \times \left[\nabla \times -\hat{z} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_0(\alpha_{k'} r) \right] = \frac{\eta_0}{\mu_0} B_0^2 \alpha_{k'} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \hat{r}. \quad (B14)$$

Finalmente la expresión para la función resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{k'}^{(2)} = \hat{r} \left\{ J_1(\alpha_{k'} r) \alpha_{k'}^4 \left(\frac{4\nu_0}{3} v_u^2 - (1-\gamma)^2 \kappa_0 T_e - \frac{\eta_0}{\mu_0} B_0^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{4\nu_0}{3} \omega_{k'}^2 \alpha_{k'} \frac{1}{r} J_0(\alpha_{k'} r) \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sólo resta obtener $\mathbf{Q}_{k',k''}^{(2)}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{k',k''}^{(2)} = & \left\{ \nabla \left[J_1(\alpha_{k'}r) \frac{d}{dr} \gamma p_c \alpha_{k''} J_0(\alpha_{k''}r) + \gamma^2 p_c \alpha_{k''} J_0(\alpha_{k''}r) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r J_1(\alpha_{k'}r)) \right] \right. \\ & + B_0^2 \alpha_{k''} \hat{z} \times \nabla \times \nabla \times (\hat{r} J_1(\alpha_{k'}r) \times -\hat{z} J_0(\alpha_{k''}r)) \\ & + \hat{r} \rho_c [\omega_{k''}^2 \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) + \omega_{k'}^2 \alpha_{k''} J_0(\alpha_{k''}r) J_1(\alpha_{k'}r)] \\ & - \rho_c \omega_{k''}^2 \left[\hat{r} J_1(\alpha_{k''}r) \cdot \hat{r} \frac{d}{dr} \hat{r} J_1(\alpha_{k'}r) + \hat{r} J_1(\alpha_{k'}r) \cdot \hat{r} \frac{d}{dr} \hat{r} J_1(\alpha_{k''}r) \right] \\ & - \alpha_{k'} \alpha_{k''} B_0^2 \{ [\nabla \times \hat{z} J_0(\alpha_{k'}r)] \cdot \times \hat{z} J_0(\alpha_{k''}r) \\ & + [\nabla \times \hat{z} J_0(\alpha_{k''}r) \times \hat{z} J_0(\alpha_{k'}r)] \} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k''})|} \end{aligned} \quad (B15)$$

$$\begin{aligned} = & \left\{ \hat{r} \gamma p_c \alpha_{k''} \frac{d}{dr} [-\alpha_{k''} J_1(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) + \gamma \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k''}r) J_0(\alpha_{k'}r)] \right. \\ & + B_0^2 \alpha_{k''} \hat{z} \times \nabla \times \nabla \times [-\hat{\theta} J_1(\alpha_{k'}r) J_0(\alpha_{k''}r)] \\ & + \hat{r} \rho_c [\omega_{k''}^2 \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) + \omega_{k'}^2 \alpha_{k''} J_0(\alpha_{k''}r) J_1(\alpha_{k'}r)] \\ & - \hat{r} \rho_c \omega_{k''}^2 \left[J_1(\alpha_{k''}r) \left\{ \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'}r) - \frac{1}{r} J_1(\alpha_{k'}r) \right\} \right. \\ & \left. + J_1(\alpha_{k'}r) \left\{ \alpha_{k''} J_0(\alpha_{k''}r) - \frac{1}{r} J_1(\alpha_{k''}r) \right\} \right] \\ & + \hat{r} \frac{B_0^2}{\sqrt{\mu_0}} \alpha_{k'} \alpha_{k''} \{ \alpha_{k'} J_1(\alpha_{k'}r) J_0(\alpha_{k''}r) \\ & + \alpha_{k''} J_1(\alpha_{k''}r) J_0(\alpha_{k'}r) \} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k''})|} \end{aligned} \quad (B16)$$

Calculando por separado la segunda línea de la expresión anterior

$$\begin{aligned} \nabla \times (\hat{\theta} J_1(\alpha_{k'}r) J_0(\alpha_{k''}r)) &= -\frac{\hat{z}}{r} \frac{d}{dr} [r J_1(\alpha_{k'}r) J_0(\alpha_{k''}r)] \\ &= -\frac{\hat{z}}{r} \left\{ J_0(\alpha_{k''}r) \frac{d}{dr} (r J_1(\alpha_{k'}r)) + r J_1(\alpha_{k'}r) \frac{d}{dr} J_0(\alpha_{k''}r) \right\} \\ &= -\hat{z} \underbrace{\{ J_0(\alpha_{k''}r) \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'}r) - J_1(\alpha_{k'}r) \alpha_{k''} J_1(\alpha_{k''}r) \}}_1 \end{aligned}$$

$$\nabla \times -\hat{z} l = \hat{\theta} \frac{d}{dr} \{ J_0(\alpha_{k''}r) \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'}r) - J_1(\alpha_{k'}r) \alpha_{k''} J_1(\alpha_{k''}r) \}$$

$$\begin{aligned}
 &= \hat{\theta} \left\{ \alpha_{k'} \left[J_0(\alpha_{k''}r) \frac{d}{dr} J_0(\alpha_{k'}r) + J_0(\alpha_{k'}r) \frac{d}{dr} J_0(\alpha_{k''}r) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_{k''} \left[J_1(\alpha_{k'}r) \frac{d}{dr} J_1(\alpha_{k''}r) + J_1(\alpha_{k''}r) \frac{d}{dr} J_1(\alpha_{k'}r) \right] \right\} \\
 &= \hat{\theta} \left\{ \alpha_{k'} \left[-\alpha_{k'} J_0(\alpha_{k''}r) - \alpha_{k''} J_0(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_{k''} \left[J_1(\alpha_{k'}r) \left(\alpha_{k''} J_0(\alpha_{k''}r) - \frac{1}{r} J_1(\alpha_{k''}r) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + J_1(\alpha_{k''}r) \left(\alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'}r) - \frac{1}{r} J_1(\alpha_{k'}r) \right) \right\} \\
 \hat{z} \times (\nabla \times -\hat{z}l) &= \hat{r} \left\{ 2\alpha_{k'} \alpha_{k''} J_0(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) + (\alpha_{k'}^2 + \alpha_{k''}^2) J_0(\alpha_{k''}r) J_1(\alpha_{k'}r) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2\alpha_{k''}}{r} J_1(\alpha_{k''}r) J_1(\alpha_{k'}r) \right\} \tag{B17}
 \end{aligned}$$

Para la primera línea de la expresión (B16) se tendrá

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} (J_1(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r)) &= \alpha_{k'} J_0(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) - \frac{2}{r} J_1(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) + \alpha_{k''} J_0(\alpha_{k''}r) J_1(\alpha_{k'}r) \\
 \frac{d}{dr} (J_0(\alpha_{k'}r) J_0(\alpha_{k''}r)) &= -\alpha_{k'} J_1(\alpha_{k'}r) J_0(\alpha_{k''}r) - \alpha_{k''} J_0(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) \tag{B18}
 \end{aligned}$$

Incluyendo todo lo anterior en (B16) se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{k'k''}^{(2)} &= \hat{r} \left\{ \gamma p_e \left[\left\{ \alpha_{k''}^2 \alpha_{k'} (1 + \gamma) \right\} J_0(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) + \left\{ -\alpha_{k''} (\alpha_{k''}^2 + \alpha_{k'}^2 \gamma) \right\} J_0(\alpha_{k''}r) J_1(\alpha_{k'}r) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2}{r} \alpha_{k''}^2 J_1(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) \right] - B_0^2 \alpha_{k''} \left[\frac{2}{r} \alpha_{k''} J_1(\alpha_{k''}r) J_1(\alpha_{k'}r) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2\alpha_{k'} \alpha_{k''} J_0(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) - (\alpha_{k'}^2 + \alpha_{k''}^2) J_0(\alpha_{k''}r) J_1(\alpha_{k'}r) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \rho_e \left[\alpha_{k''} (\omega_{k'}^2 - \omega_{k''}^2) J_0(\alpha_{k''}r) J_1(\alpha_{k'}r) + \frac{2\omega_{k''}^2}{r} J_1(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) \right] \right. \\
 &\quad \left. + B_0^2 \alpha_{k'} \alpha_{k''} \left[\alpha_{k'} J_1(\alpha_{k'}r) J_0(\alpha_{k''}r) + \alpha_{k''} J_1(\alpha_{k''}r) J_0(\alpha_{k'}r) \right] \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k''})|} \\
 \mathbf{Q}_{k'k''}^{(2)} &= \hat{r} \left\{ J_0(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) (\alpha_{k'} \alpha_{k''}^2) [3B_0^2 - \gamma p_e (1 + \gamma)] + \right. \\
 &\quad J_0(\alpha_{k''}r) J_1(\alpha_{k'}r) \alpha_{k''} [\alpha_{k''} (-2\gamma p_e) + \alpha_{k'}^2 (3B_0^2 + \gamma p_e (1 - \gamma))] + \\
 &\quad \left. J_1(\alpha_{k'}r) J_1(\alpha_{k''}r) \left[\frac{2\alpha_{k''}^2}{r} \right] 2\gamma p_e \right\} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k''})|} \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Como es la condición de no resonancia la que va a determinar, como antes se ha dicho, los $b_k^{(1)}$, se escribe a continuación en forma semidesarrollada

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_{k'} \frac{\cos(\omega_k' t)}{\omega_k'} \left\{ \frac{db_{k'}^{(1)}}{dt} \langle \mathbf{u}_k, (1/\rho_e) \mathbf{f}_{k'}^{(2)} \rangle + b_{k'}^{(1)} \langle \mathbf{u}_k, (1/\rho_e) \mathbf{g}_{k'}^{(2)} \rangle \right\} \cos(\omega_l t) dt + \\ & \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_{k'} \sum_{k''} \frac{\text{sen}(\omega_k' t) \cos(\omega_{k''} t)}{\omega_{k''}} b_{k'}^{(1)} b_{k''}^{(1)} \langle \mathbf{u}_k, (1/\rho_e) \mathbf{Q}_{k'k''}^{(2)} \rangle \cos(\omega_l t) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Primeramente tienen que determinarse los productos internos que están indicados, para ello se considerará un volumen cilíndrico de radio 1, localizado entre $-z_0$ y z_0 , con esto se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_k, (1/\rho_e) \mathbf{f}_{k'}^{(2)} \rangle &= \frac{1}{\rho_e \int dV} \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_k)|} J_1(\alpha_k r) \hat{r} \cdot \\ & \quad \left[\hat{r} \{ -2\alpha_{k'}^2 (\gamma p_e + B_0^2) \} \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\alpha_{k'})|} J_1(\alpha_{k'} r) \right] r dr \\ &= -(1/\rho_e) \{ 2\alpha_{k'}^2 (\gamma p_e + B_0^2) \} \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k'} \rangle \\ &= -(1/\rho_e) \{ 2\alpha_{k'}^2 (\gamma p_e + B_0^2) \} \cdot \delta_{k,k'} \end{aligned} \quad (B20)$$

Este es un caso muy afortunado, ya que es posible efectuar las operaciones analíticamente con la ayuda de las relaciones de ortonormalidad de las funciones de Bessel. Para los otros productos aparecen integrales como las siguientes

$$\begin{aligned} & \int_0^1 J_1(\alpha_k r) J_0(\alpha_{k'} r) dr \\ & \int_0^1 J_1(\alpha_k r) J_1(\alpha_{k'} r) J_1(\alpha_{k''} r) dr \\ & \int_0^1 J_1(\alpha_k r) J_0(\alpha_{k'} r) J_1(\alpha_{k''} r) r dr \end{aligned}$$

que sólo pueden ser evaluadas numéricamente.

Este es el programa en "Mathematica", que calcula las ecuaciones a partir de la condición de no resonancia.

Primero están los parametros iniciales y los valores de las raíces de las funciones de Bessel, así como los valores para normalizarlas.

```

gama = 5/3
pe = 1000
bmag0 = 31.622777
mu0 = 0.01
vu = 16330
kap0 = .01
teq = 10000
eta0 = 0.001
perm = 0.000001256637061435917

omega/: omega[1] = 62571.75849009999
omega/: omega[2] = 114564.5303211
omega/: omega[3] = 166132.7345629

alfa/: alfa[1] = 3.83170597
alfa/: alfa[2] = 7.01558667
alfa/: alfa[3] = 10.17346813

norma/: norma[1] = 3.511311163594863
norma/: norma[2] = 4.712227033967352
norma/: norma[3] = 5.66354001185722

```

Estas son redefiniciones de las funciones de Bessel de orden cero y uno, para no andar escribiendo tanto.

```

b0/: b0[s_] := BesselJ[0, s*x]
b1/: b1[t_] := BesselJ[1, t*x]

```

Las integrales que involucran funciones de Bessel.

```

bes10/: bes10[s_, t_] := NIntegrate[b1[alfa[s]]*b0[alfa[t]], {x, 0, 1}]
bes11/: bes11[s_, t_] := NIntegrate[b1[alfa[s]]*b1[alfa[t]]*x, {x, 0, 1}]
bes101/: bes101[r_, s_, t_] :=
NIntegrate[b1[alfa[r]]*b0[alfa[s]]*b1[alfa[t]]*x, {x, 0, 1}]
bes111/: bes111[r_, s_, t_] :=
NIntegrate[b1[alfa[r]]*b1[alfa[s]]*b1[alfa[t]], {x, 0, 1}]

```

Las integrales en que intervienen funciones trigonométricas, lim es $2\pi/\omega_{\text{[i]}}$, la ω que corresponda en cada caso.

```

coocos/: coocos[s_, t_] :=
Integrate[(Cos[omega[s]*x]*Cos[omega[t]*x])/omega[s], {x, 0, lim}]
sencocos/: sencocos[r_, s_, t_] :=
Integrate[(Sin[omega[r]*x]*Cos[omega[s]*x]*Cos[omega[t]*x])/omega[s],
{x, 0, lim}]
lim = 0.00003782027258932941

```

Los productos f, g y Q que aparecen en la condición de no resonancia.

```

prodf/: prodf[s_, t_] :=
-(2*alfa[t]^2*norma[s]*norma[t]*(gama*pe + bmag0^2)*bes11[s, t])

```

$\text{prodg}/: \text{prodg}[s, t] :=$
 $\text{alfa}[t]^4 * \text{norma}[s] * \text{norma}[t] * \text{bes11}[s, t] *$
 $((4 * \mu_0 * \nu * \nu) / 3 - (1 - \gamma)^2 * \kappa_0 * \text{teq} - (\eta_0 * \text{bmag}_0^2) / \text{perm}) +$
 $(4 * \mu_0 * \nu * \nu * \text{alfa}[t]^3 * \text{norma}[s] * \text{norma}[t] * \text{bes10}[s, t]) / 3$

$\text{prodq}/: \text{prodq}[r, s, t] :=$
 $(3 * \text{bmag}_0^2 - \gamma * \text{pe} * (1 + \gamma)) * \text{alfa}[s] * \text{alfa}[t]^2 * \text{norma}[r] * \text{norma}[s] *$
 $\text{norma}[t] * \text{bes101}[r, s, t] +$
 $(\text{alfa}[t]^2 * (-2 * \gamma * \text{pe}) +$
 $\text{alfa}[s]^2 * (3 * \text{bmag}_0^2 + \gamma * \text{pe} * (1 - \gamma))) * \text{alfa}[t] *$
 $\text{norma}[r] * \text{norma}[s] * \text{norma}[t] * \text{bes101}[r, t, s] +$
 $\text{alfa}[t]^2 * (4 * \gamma * \text{pe}) * \text{norma}[r] * \text{norma}[s] * \text{norma}[t] * \text{bes111}[r, s, t]$

Finalmente, la condición de no resonancia, que hace uso de todas las definiciones anteriores.

$\text{acoondc}/: \text{acoondc}[r, s] :=$
 $\text{Sum}\{\text{cbp}[i] * \text{prodq}[r, i] + \text{cb}[i] * \text{prodg}[r, i]\} * \text{coocos}[i, s], \{i, 1, 3\} +$
 $\text{Sum}\{\text{cb}[i] * \text{cb}[j] * \text{prodq}[r, i, j] * \text{sencoocos}[i, j, s], \{i, 1, 3\},$
 $\{j, 1, 3\}$

```

' *****
' ***** Programa que resuelve las ecuaciones que resultan *****
' ***** de la condición de no resonancia, por el método de *****
' ***** Runge-Kutta de cuarto orden y las grafica. *****
' *****

```

```

DIM x(100),y(100),z(100),g(100),ca(10),cb(10),cc(10),ll(10)

```

```

' Se leen los archivos de datos
INPUT "Dame el nombre del archivo de la 1a eq.,";q$
CALL llama(q$,ca())
INPUT "Dame el nombre del archivo de la 2a eq.,";q$
CALL llama(q$,cb())
INPUT "Dame el nombre del archivo de la 3a eq.,";q$
CALL llama(q$,cc())

```

```

' Se escalan los valores con el coef. de la derivada
a0=(-1)*ca(1): a1=ca(2)/a0: a2=ca(3)/a0: a3=ca(4)/a0: a4=ca(5)/a0
a5=ca(6)/a0: a6=ca(7)/a0: a7=ca(8)/a0: a8=ca(9)/a0: a9=ca(10)/a0
b0=(-1)*cb(1): b1=cb(2)/b0: b2=cb(3)/b0: b3=cb(4)/b0: b4=cb(5)/b0
b5=cb(6)/b0: b6=cb(7)/b0: b7=cb(8)/b0: b8=cb(9)/b0: b9=cb(10)/b0
c0=(-1)*cc(1): c1=cc(2)/c0: c2=cc(3)/c0: c3=cc(4)/c0: c4=cc(5)/c0
c5=cc(6)/c0: c6=cc(7)/c0: c7=cc(8)/c0: c8=cc(9)/c0: c9=cc(10)/c0

```

```

' Se definen las derivadas
DEF FNderx(x,y,z)=a1*x+a2*y+a3*z+a4*x*x+a5*y*y+a6*z*z+a7*x*y+a8*x*z+a9*y*z
DEF FNdery(x,y,z)=b1*x+b1*y+b3*z+b4*x*x+b5*y*y+b6*z*z+b7*x*y+b8*x*z+b9*y*z
DEF FNderz(x,y,z)=c1*x+c2*y+c3*z+c4*x*x+c5*y*y+c6*z*z+c7*x*y+c8*x*z+c9*y*z

```

```

vuelta: ' esta etiqueta es para las pruebas
INPUT "Dame el valor maximo de t ",tmax
INPUT "Dame el numero de pasos (max=100)",pasos
INPUT "Dame los valores iniciales x0,y0,z0 ",x(0),y(0),z(0)

```

```

' Aquí empieza a calcular
paso=tmax/pasos: veces=pasos-1
FOR i = 0 TO veces
  k1x = paso*FNderx(x(i),y(i),z(i))
  k1y = paso*FNdery(x(i),y(i),z(i))
  k1z = paso*FNderz(x(i),y(i),z(i))
  ex=x(i)+k1x/2: ey=y(i)+k1y/2: ez=z(i)+k1z/2
  k2x = paso*FNderx(ex,ey,ez)
  k2y = paso*FNdery(ex,ey,ez)
  k2z = paso*FNderz(ex,ey,ez)
  fx=x(i)+k2x/2: fy=y(i)+k2y/2: fz=z(i)+k2z/2
  k3x = paso*FNderx(fx,fy,fz)
  k3y = paso*FNdery(fx,fy,fz)
  k3z = paso*FNderz(fx,fy,fz)
  gx=x(i)+k3x: gy=y(i)+k3y: gz=z(i)+k3z
  k4x = paso*FNderx(gx,gy,gz)
  k4y = paso*FNdery(gx,gy,gz)
  k4z = paso*FNderz(gx,gy,gz)
  x(i+1) = x(i) + (k1x+2*k2x+2*k3x+k4x) / 6
  y(i+1) = y(i) + (k1y+2*k2y+2*k3y+k4y) / 6
  z(i+1) = z(i) + (k1z+2*k2z+2*k3z+k4z) / 6
NEXT i

```

```

' Lo siguiente pide información para la graficación
PRINT x(pasos),y(pasos),z(pasos)
INPUT "Eje1 ¿s lo +? (176) ¿+ y -? (91) ";eje1
INPUT "Eje2 ¿s lo +? (176) ¿+ y -? (91) ";eje2
INPUT "Eje3 ¿s lo +? (176) ¿+ y -? (91) ";eje3
INPUT "Dame el valor maximo del eje y1 ",escala1
INPUT "Dame el valor maximo del eje y2 ",escala2
INPUT "Dame el valor maximo del eje y3 ",escala3

```

```

'Define la pantalla y las ventanas
SCREEN 1,640,400,1,4
WINDOW 2,"Coeficiente b0.",(2,2)-(310,184),20,1
WINDOW 3,"Coeficiente b1.",(320,2)-(628,184),20,1
WINDOW 4,"Coeficiente b2.",(2,204)-(310,386),20,1
WINDOW 5,"Indicaciones.",(320,204)-(628,386),20,1

```

```

'Grafica los coeficientes en la vent. indicada
WINDOW OUTPUT 2
CALL grafica(eje1,x(),escala1)
WINDOW OUTPUT 3
CALL grafica(eje2,y(),escala2)
WINDOW OUTPUT 4
CALL grafica(eje3,z(),escala3)

```

```

'Imprime la información de lo que se hizo
WINDOW OUTPUT 5
PRINT :PRINT SPC(2)"En el eje horizontal se grafica"
PRINT :PRINT SPC(2)"el tiempo. La escala es de 1/10"
PRINT :PRINT SPC(2)"de tmax =" ;tmax;" . En el eje vertical"
PRINT :PRINT SPC(2)"se grafica el coeficiente indicado."
PRINT :PRINT SPC(2)"La escala es de 1/10 de" ;escala1
PRINT :PRINT SPC(2)escala2;"y "escala3;"respectivamente."
PRINT :PRINT SPC(2)"La integracion se realizo con el"
PRINT :PRINT SPC(2)"metodo de Runge-Kutta de 4to. orden,"
PRINT :PRINT SPC(2)"usando";pasos;"pasos en el caso de "
PRINT :PRINT SPC(2)"nu=.001, et=.001 y kp=.01 "
END

```

```

SUB llama(l$,ll()) STATIC
OPEN "i",#1,l$ 'este subprograma abre el
FOR i=1 TO 10 'archivo de datos y los lee
INPUT #1,ll(i)
NEXT
CLOSE #1
END SUB

```

```

SUB grafica(ejje,g(),esscala) STATIC 'este subprograma
SHARED pasos,veces 'grafica los datos
'estos son los ejes
ejjelp=ejje+4:ejjelm=ejje-4 'tamaño de las divisiones
LINE (9,ejje)-(301,ejje),1: LINE (9,6)-(9,176),1 'eje x; eje y
FOR l = 0 TO 10
xr=9+29*l: yr=176-17*l 'pone las divisiones
LINE (xr,ejelp)-(xr,ejelm),1: LINE (5,yr)-(13,yr),1 'a los ejes
NEXT l
'esta parte grafica los datos
FOR i = 0 TO veces
xi=CINT(9+i*290/pasos): xd=CINT(9+(i+1)*290/pasos)
yi=CINT(ejje-g(i)*170/esscala): yd=CINT(ejje-g(i+1)*170/esscala)
LINE(xi,yi)-(xd,yd),1
NEXT i
END SUB

```

	ρ (g/cm ³)	n (cm ⁻³)	T (K)	v_{ALF} (m/s)	c_s (m/s)	α_0	B (Gauss)	R_m	σ (s ⁻¹)
Mercurio	13.5	$8 \cdot 10^{24}$	300	$1 - 10$	1500	10 m	$10^3 - 10^4$	0.1	10^{16}
Centro de la Tierra	12	$7 \cdot 10^{24}$		0.1		10^3 km	1	10^2	10^{15}
Plasma de fusión	$10^{-9} - 10^{-6}$	$10^{15} - 10^{18}$	10^8	$10^3 - 10^6$	10^6	1 m	$10^3 - 10^6$	10^4	10^{13}
Generador MHD	$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{21}$	2500	500	5000	10 m	10^4		10^{11}
Atmósfera solar	10^{-8}	$6 \cdot 10^{15}$	10^4	3000	10^4	10^4 km	10^2	10^6	10^{13}
Gas interestelar	10^{-24}	0.6	10^4	$10^3 - 10^4$	10^4	10^{15} km	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{15}	10^{13}
Ionósfera terrestre	10^{-8}	$6 \cdot 10^{15}$	10^3	6	3000	10^2 km	0.2	10	10^{11}

Tabla 1.- Valores típicos de algunos plasmas *.

* Compilado de [9][13]