

49
2 eje.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA,
CONSIDERANDO GIROS Y ASENTAMIENTOS
EN ZAPATAS.

TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A :
ENRIQUE GARNICA GARCIA

DIRECTOR: M.I. AGUSTIN DEMENEGHI COLINA

TESIS CON
RAJA DE ORIGEN

MEXICO, D. F.

1994



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-094

SR. ENRIQUE GARNICA GARCIA
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor M.I. Agustín Deméneghi Colina, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de ingeniero civil.

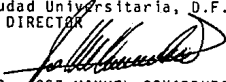
"INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA, CONSIDERANDO
GIROS Y ASENTAMIENTOS EN ZAPATAS "

- I. INTRODUCCION
- II. ANTECEDENTES
- III. INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA
- IV. EJEMPLO ILUSTRATIVO
- V. APLICACIONES
- VI. CONCLUSIONES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 8 de mayo de 1991
EL DIRECTOR


ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS/RAV/jrs*

A MI MADRE

Por tu dedicación y apoyo en todas las etapas de mi vida

Por haberme enseñado que día con día nuestro máximo obstáculo en todo lo que emprendemos es la confianza de poder lograr nuestros anhelos.

A MI PADRE

Por tu apoyo en todos mis proyectos, y tus valiosos consejos que siempre me han ayudado a salir de los mas difíciles problemas.

Por la confianza depositada en mi.

A MIS HERMANOS

Gerardo y Margarita.

Por su cariño y apoyo que siempre me han entregado.

Al Ing. Leyva y al Ing. Cárdenas

Por sus valiosas enseñanzas, apoyo y confianza depositada en mí.

A mis amigos

Por su valiosa compañía e incondicional amistad.

Al M. I. Agustín Deméneghi Colina

Por su valiosos conocimientos aportados en este trabajo, por su gran dedicación y tiempo invertido.

Por el gran compromiso y cariño con que afronta su labor docente.

INDICE

INTRODUCCION	1
ANTECEDENTES	2
INTERACCION SUELO - ESTRUCTURA	11
3.1.1 Análisis Estructural	13
3.1.2 Análisis de Asentamiento del Terreno	29
3.1.3 Compatibilidad de Deformaciones	33
EJEMPLOS ILUSTRATIVOS	34
4.a Estructura empotrada en su cimentación	35
4.b Estructura considerando giros y asentamientos en sus zapatas	50
4.c Cuadro Comparativo	61
APLICACIONES	63
CONCLUSIONES	68
BIBLIOGRAFIA	69

CAPITULO I

INTRODUCCION

La cimentación de estructuras sobre suelos de mediana a alta compresibilidad, plantea el problema de determinar los hundimientos totales y diferenciales así como los elementos mecánicos en la estructura.

Si tomamos en cuenta que los análisis estructurales tradicionales consideran a la estructura totalmente empotrada o articulada en su cimentación y a su vez se supone a la cimentación completamente rígida o totalmente flexible.

Como se puede concluir fácilmente, cualquiera de los dos casos son muy extremistas en sus consideraciones y de esta forma las condiciones de análisis no pueden tomar en cuenta las variantes que pudieran existir en la cimentación o en la estructura, después de existir cualquier tipo de modificación en las condiciones iniciales de trabajo entre la estructura y el suelo de cimentación.

El trabajo expuesto a continuación tiene como finalidad el poder realizar un análisis en conjunto entre la estructura y el suelo de cimentación.

El principio básico utilizado y bajo el cual se desarrolla todo el trabajo, es la consideración de que las modificaciones que sufra una de las partes (**Estructura-Cimentación**) son directamente transmitidas a la otra y por lo tanto influyen en el comportamiento en conjunto de la unidad estudiada.

Lo anterior esta íntimamente relacionado con una redistribución de esfuerzos, tanto en la cimentación como en la estructura, por lo que todo efecto en el suelo de cimentación será directamente transmitido a la estructura de cimentación y esta a su vez tendrá una influencia sobre la superestructura, lo que originará una redistribución de esfuerzos.

En el Capítulo No.2 se presentan antecedentes del método expuesto, en el Capítulo No.3 se muestra el desarrollo del mismo, en el Capítulo No.4 se presenta un ejemplo ilustrativo, haciendo las comparaciones pertinentes con los métodos tradicionales, en el Capítulo No.5 se hace referencia a algunas aplicaciones y en el Capítulo No.6 se presentan las conclusiones del estudio.

CAPITULO II

ANTECEDENTES

El contenido de este capítulo esta enfocado básicamente a explicar algunos métodos que han surgido para estudiar y calcular la INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA. Los métodos escogidos son producto de los estudios de los siguientes autores.

Dr. Leonardo Zeevaert
M.I. Agustín Deméneghi Colina
Ing. José Luis Sánchez Martínez e Ing. Pablo Enríquez

El Dr. Leonardo Zeevaert propone el siguiente método (Zeevaert 1973).

Se considera una planta de cimentación, y esta se idealiza como un sistema de vigas cortas en un sentido y vigas longitudinales en el otro.

En relación a la comprensibilidad del suelo las vigas cortas tienen una rigidez mayor que las longitudinales. Así mismo es necesario que las vigas cortas tomen las reacciones y las cargas de las columnas para lo cual consideramos las vigas longitudinales como un sistema estáticamente determinado, es decir se trabaja con áreas tributarias. Así, si los asentamientos diferenciales con esta hipótesis se cumplen, las vigas longitudinales no requerirán de ninguna rigidez, salvo la necesaria para transmitir el contacto de presión entre la losa de cimentación y la reacción de las vigas.

Sin embargo las vigas longitudinales pueden ser diseñadas con la rigidez necesaria para reducir los asentamientos a valores permisibles o menores. De esta forma las vigas longitudinales, además de transmitir reacciones, son usadas para distribuir cargas desbalanceadas en las vigas cortas, requeridas para obtener continuidad en las reacciones del terreno. Por lo cuál las vigas longitudinales pueden ser llamadas vigas para balancear cargas y así distinguir las de las vigas cortas o de reacción.

La superficie cargada se divide en bandas con área A_n en la dirección de las vigas cortas. El siguiente paso es determinar el asentamiento medio δ_n de cada banda del área A_n :

$$\delta'_{an} = \frac{\sum \delta_{nan}}{A_n}$$

Los valores δ'_{an} se consideran la primera aproximación para el desplazamiento vertical promedio de cada banda, correspondiendo a la primera suposición de una reacción del terreno q'_{an} .

Una vez que los valores δ'_{an} son conocidos, la primera aproximación del módulo de reacción puede ser calculada para cada banda

$$K's = \frac{q'_{an} A_n}{\delta'_{an}}$$

δ'_{an} = Asentamiento medio

q'_{an} = Reacción del terreno

A_n = Area de la banda

$K's$ = Módulo de reacción

Usando los valores de $K's$ y los de las columnas cargadas, para las bandas correspondientes, se calculan los desplazamientos verticales, considerando la rigidez de la estructura de cimentación en la dirección longitudinal, como si se tratara de una viga o una cimentación elástica, de esta forma se introduce dentro del cálculo la rigidez de la viga dada por " EI ".

En base a los resultados de esta primera aproximación obtenemos los cortantes y momentos flexionantes en la estructura de cimentación y los desplazamientos verticales promedio (δ''_{an}), con los que a su vez se pueden obtener los valores corregidos de la reacción del terreno :

$$q''_{an} = \frac{\delta''_{an} K's}{A_n}$$

q''_{an} = Valores corregidos de la reacción del terreno

δ''_{an} = Desplazamientos verticales promedio.

El cálculo de estos valores se puede llevar a cabo por métodos numéricos o a través del establecimiento de la matriz correspondiente para obtener las reacciones desconocidas de cada banda.

Con el mejoramiento del promedio de las reacciones del terreno unitarias q''_{an} de cada banda tributaria, se efectúa un segundo análisis de asentamientos. Los parámetros de comprensibilidad deben ser corregidos para el mejoramiento de los niveles de esfuerzo inducidos en el subsuelo.

El cálculo de asentamientos llevado a cabo dará un mejoramiento de los desplazamientos verticales promedio del subsuelo, bajo las bandas transversales; a estos los llamaremos δ'''_{an} y a partir de ellos se calcula el módulo de cimentación para las bandas tributarias por medio de la siguiente expresión :

$$K''_s = \frac{q''_{an} A_n}{\delta'''_{an}}$$

δ'''_{an} = Desplazamientos verticales promedio del subsuelo bajo las bandas transversales.

K''_s = Módulo de cimentación para las bandas tributarias.

Usando el valor de K''_s mejorado, llevaremos a cabo un segundo ciclo de cálculo para determinar cortantes, momentos flexionantes, deflexiones y reacciones del subsuelo.

Este procedimiento se repite hasta que el cambio de momentos flexionantes y fuerzas cortantes se considere despreciable.

Para fines prácticos este es el procedimiento propuesto por el Dr. Leonardo Zeevaert (Zeevaert 1973).

El segundo método que describiremos es el de el Ing. José Luis Sánchez Martínez y de el Ing. Pablo Enríquez.

El Ing. Sánchez Martínez, plantea, un método no interactivo que consiste en realizar el análisis conjunto suelo-estructura como un sistema estructural único utilizando el método general de las rigideces.

Primero estableceremos la matriz de rigideces de la estructura a partir cada uno de sus miembros; enseguida establecemos la matriz de rigideces del suelo, al que idealizamos como una serie de soportes interdependientes. De aquí obtenemos la matriz total de rigideces del sistema.

Las expresiones generales empleadas son :

$$S_T = S_E + S_S$$

$S_E = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_i =$ Matriz de rigideces de la estructura en función de sus "i" miembros.

$S_g =$ Matriz de rigideces del suelo.

Además de :

$$D = S_T^{-1} A$$

$A =$ Vector de acciones.

$D =$ Vector de desplazamientos desconocidos.

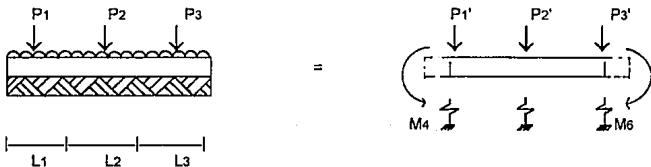
$S_T^{-1} =$ Inversa de la matriz de rigideces del sistema.

$A_i =$ $S_{iD} =$ Vector de acciones del miembro i

$F_g = S_g D =$ Vector de fuerzas sobre cada uno de los resortes que idealizan el suelo.

Se consideran como desplazamientos desconocidos a los desplazamientos verticales y a los giros de los puntos de la estructura que se escojan.

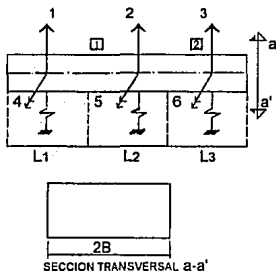
Ilustrando el método con una viga simple .



$$P'_i = P_i + WL_i$$

$$M = \frac{W}{2} \left[\frac{L_i}{2} \right]^2$$

Los desplazamientos desconocidos son tres movimientos verticales y tres giros.



La matriz de rigideces de la estructura queda de 6 x 6, se obtendrá superponiendo los de sus dos miembros.

Por ejemplo, las matrices de los miembros 1 y 2 quedan :

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{12EI_1}{L_1^3} & \frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_1}{L_1^2} & \frac{6EI_1}{L_1^2} \\ \frac{12EI_1}{L_1^3} & \frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_1}{L_1^2} & -\frac{6EI_1}{L_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_1}{L_1^2} & -\frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & 0 & 4EI_1 & 2EI_1 \\ \frac{6EI_1}{L_1^2} & -\frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & 0 & 4EI_1 & 2EI_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{L_1^3} & -\frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_1}{L_1^2} & \frac{6EI_1}{L_1^2} \\ -\frac{12EI_1}{L_1^3} & \frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_1}{L_1^2} & -\frac{6EI_1}{L_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_1}{L_1^2} & -\frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_1}{L_1} & \frac{2EI_1}{L_1} \\ \frac{6EI_1}{L_1^2} & -\frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_1}{L_1} & \frac{4EI_1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

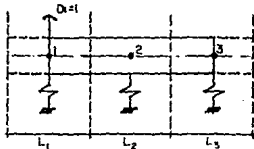
S_{ji} = Valor de la acción correspondiente al desplazamiento desconocido j producida por la aplicación de un desplazamiento i , con valor unitario.

Así la matriz de rigideces de la estructura la obtendremos como:

$$S_E = S_1 + S_2$$

Se establece la matriz de rigideces del suelo

Se obtiene dando desplazamientos verticales con valor unitario a cada uno de los resortes y calculando las fuerzas que aparecen por este efecto en todos ellos.



Al dar el desplazamiento $D_1 = 1$ aparecen fuerzas no solo en el resorte 1, sino también en todos los demás, ya que ellos deben considerarse ligados por pertenecer a un medio continuo. Lo mismo sucede al aplicar sucesivamente desplazamientos unitarios correspondientes a D_2 y D_3

El conjunto de todas las fuerzas obtenidas construye la matriz de rigideces del suelo.

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S_{ij} = Fuerza que aparece en j al aplicar un desplazamiento unitario i .

El cálculo de estas fuerzas y por lo tanto el de la matriz de rigideces del suelo, no puede obtenerse directamente, sin embargo, se puede llegar a ella en forma indirecta, teniendo en cuenta que la matriz de rigideces es la inversa que la de flexibilidades.

La matriz de flexibilidades del suelo puede calcularse fácilmente determinando los hundimientos del terreno debido a la aplicación de fuerzas unitarias.

El conjunto de desplazamientos producidos por esfuerzos unitarios aplicados sobre áreas preestablecida (2BL), en la superficie del terreno constituye la matriz $|A_{ij}|$.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

δ_{ji} = Hundimiento de j al actuar un esfuerzo $q=1$ en un área con centro en i .

$$q = 1 = \frac{P}{a}$$

a = área en que se aplica un esfuerzo unitario

La matriz de flexibilidades se obtiene aplicando cargas unitarias $p=1$, esto es esfuerzos

$$q_i = \frac{1}{a_i}$$

a_i = área con centros en i en la que se aplica la carga unitaria.

Los desplazamientos producidos por las cargas unitarias se obtendrán dividiendo los de la matriz $|A_{ij}|$ entre el área correspondiente.

De este modo:

$$F_S = \begin{bmatrix} \frac{\delta_{11}}{a_1} & \frac{\delta_{12}}{a_1} & \frac{\delta_{13}}{a_1} \\ \frac{\delta_{21}}{a_1} & \frac{\delta_{22}}{a_1} & \frac{\delta_{23}}{a_1} \\ \frac{\delta_{31}}{a_1} & \frac{\delta_{32}}{a_1} & \frac{\delta_{33}}{a_1} \end{bmatrix}$$

F_S = Matriz de flexibilidad del suelo y su inversa es la matriz de rigideces que se requiere.

$$S_S = F_S^{-1}$$

$$S_T = S_E + S_S$$

Las expresiones generales son:

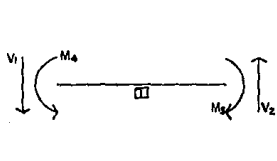
$$A = S_T D ; D = S_T^{-1} A$$

A : Vector de acciones

D : Vector de desplazamiento desconocidos.

Se plantea aplicando las acciones que en este caso serían, en general fuerzas verticales (1,2,3) y momentos (4,5,6) aplicados en los nudos.

Los elementos mecánicos en los miembros se obtienen a partir de sus matrices de rigideces.



$$A1 = \begin{bmatrix} V1 \\ V2 \\ M3 \\ M4 \end{bmatrix} = S1D$$

S1 = Matriz de rigideces del miembro 1
 D = Vector de desplazamientos.

Las fuerzas en el suelo se obtienen utilizando la matriz de rigideces del suelo.

$$\begin{bmatrix} S_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_u \\ D_m \end{bmatrix} = S_s D_u$$

En esto consiste el método de los Ingenieros Sánchez Martínez y Pablo Enríquez, que además propuso un programa de computadora con el fin de facilitar el uso de este método.

El tercer método elaborado por el M.I. Agustín Deméneghi Colina será aplicada en el Capítulo No.III.

Cabe mencionar que en virtud de la gran cantidad de operaciones que implican los métodos aquí descrito es conveniente la utilización de programas de computadora para facilitar su aplicación.

CAPITULO III

INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA

3.1 INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA

La idea fundamental del estudio de la interacción Suelo-Estructura, es conocer objetivamente la influencia que el terreno puede tener sobre las condiciones de trabajo de una estructura, una vez que el terreno ha sufrido los asentamientos ocasionados por las cargas inducidas por la estructura a la que soporta.

Así en este inciso estudiaremos un procedimiento para analizar en forma conjunta la estructura y el suelo, basándonos en un método elaborado por el M.I. Agustín Deméneghi Colina (Deméneghi 1979).

En principio considerando una estructura reticular apoyada sobre un suelo de mediana a alta compresibilidad.

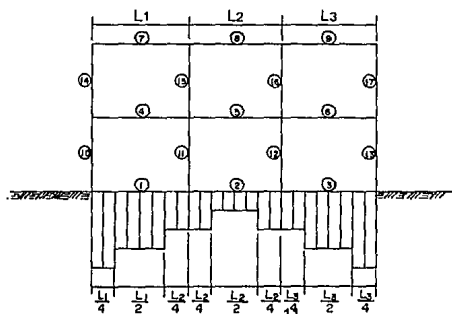


Fig. 3.1

En la que la cimentación puede ser resuelta mediante zapatas corridas o a base de una losa con contratraves de concreto armado.

Dentro de la fig.3.1, es de nuestro interes el determinar los hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos en la cimentación y en la superestructura.

Dado que el diagrama de reacciones del terreno es una incógnita, una opción es el sustituir la carga distribuida del suelo sobre la cimentación (presión de contacto) por cargas repartidas bajo las columnas y bajo los puntos medios de las contratraves (fig.3.1).

En el análisis conjunto de la estructura y el suelo se recomienda la utilización del método de las rigideces para el análisis de la estructura, ya que este procedimiento nos proporciona la matriz de rigideces y el vector de cargas.

Con este método se desconoce el vector de desplazamientos (desplazamientos angulares, o giros θ_i de cada nudo de la estructura y a los desplazamientos lineales δ_i).

Ahora bien, de la fig. 3.1 podemos observar que el vector de cargas no lo conocemos en su totalidad, ya que las reacciones del terreno r_i son también incógnitas; las ecuaciones faltantes pueden obtenerse al realizar el análisis de los hundimientos del terreno y obtener los desplazamientos del suelo δ_i en función de las reacciones r_i , manejando a estas como incógnitas.

Al aplicar el método de las rigideces para realizar el análisis de la estructura y del suelo, se sustituyen las ecuaciones de desplazamiento en función de las reacciones, y obtenemos un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son únicamente los giros en los nudos θ , y las reacciones del terreno r_i .

De esta forma podemos obtener los giros θ_i y las reacciones r_i al resolver el sistema de ecuaciones, además de los desplazamientos δ_i que al estar en función de r_i , es posible calcularlos.

Los momentos flexionantes, las fuerzas cortantes y las fuerzas normales son fácilmente calculadas, utilizando giros y desplazamientos de la estructura.

Al aplicar este método, podemos observar que el módulo de reacción del suelo, K 's no es involucrado en ningún momento del proceso, con lo cual nos evitamos las iteraciones.

Así mismo es posible observar que para resolver el problema, este método se basa esencialmente en tres pasos que se enumeran a continuación.

- a) Efectuar un análisis estructural, considerando como cargas actuantes sobre la estructura a las reacciones del terreno.
- b) Realizar un análisis para calcular los asentamientos del suelo de cimentación.
- c) Establecer la compatibilidad de desplazamientos entre la estructura y el suelo, ahora si tomamos en cuenta que prácticamente en todos los casos la estructura y el suelo se encuentran en contacto continuo, se puede considerar que las reacciones y los desplazamientos son iguales en ambos sistemas, la cual permite hacer compatible lo establecido en los incisos (a) y (b).

A continuación se explica detalladamente los tres incisos anteriores.

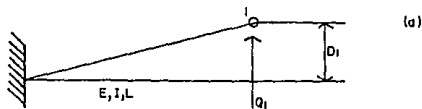
3.1.1 ANALISIS ESTRUCTURAL

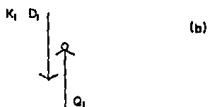
El análisis en conjunto de la estructura y el suelo lo realizamos empleando el método de las rigideces.

El método de las rigideces a utilizar puede ser cualquiera de los métodos conocidos, pero dada la cantidad de operaciones a realizar, es conveniente que sea un método factible de programar y de esta forma agilizar la obtención de resultados y por lo tanto hacer práctico el método aquí estudiado.

Considerando que la matriz de rigideces es un ordenamiento de los coeficientes de influencia de rigideces que se usan para determinar los desplazamientos, se puede plantear como la superposición de las rigidez de los miembros.

El fundamento básico del método de las rigideces se puede demostrar considerando el sistema de fuerzas de la viga en voladizo de la figura siguiente.





Se desea determinar el desplazamiento en el extremo 1 (D_1) bajo la acción de una carga Q_1 . En primer término se escribe una relación fuerza-desplazamiento imponiendo un desplazamiento unitario correspondiente a D_1 , procedemos a calcular la fuerza necesaria para producir dicho desplazamiento unitario en el extremo de una viga prismática en voladizo, que es :

$$\frac{3EI}{L^3}$$

Esta fuerza se define como "COEFICIENTE DE INFLUENCIA DE RIGIDEZ" para la viga, k_1 , ya que representa la resistencia de la viga a un desplazamiento unitario. El término k que se usa aquí, difiere del factor de rigidez de la distribución de momentos.

Haciendo ahora referencia a la figura (b) que representa el equilibrio existente en el nudo (1), la fuerza hacia abajo en el nudo, causada por la resistencia a la flexión de la viga es $K_1 D_1$, y la fuerza hacia arriba es la carga aplicada Q_1 , el equilibrio queda de la siguiente forma.

$$k_1 D_1 = Q_1$$

$$\left[\frac{3EI}{L^3} \right] D_1 = Q_1$$

$$D_1 = Q_1 \cdot \frac{1}{3EI}$$

Se ha usado un coeficiente de rigidez K_1 que expresa la influencia de un desplazamiento unitario, para determinar el desplazamiento para la carga Q_1 . El método de las rigideces es simplemente una extensión lógica de esta idea en una estructura con un número mayor de grados de libertad.

La ecuación básica de rigideces nos expresa el equilibrio de cada uno de los nudos en función de los coeficientes de influencia de la rigidez nodal y de los desplazamientos nodales desconocidos.

$$\begin{array}{rcl} K_{11} D_1 + K_{12} D_2 + & + K_{1n} D_n & = Q_1 \\ K_{21} D_1 + \dots & + K_{2n} D_n & = Q_2 \\ K_{n2} D_1 + \dots & + K_{nn} D_n & = Q_n \end{array}$$

La cual se puede expresar matricialmente de la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.1.1

ó en forma abreviada.

$$[K] [D] = [Q] \quad 3.1.2$$

Donde:

[K] - Matriz de rigideces de la estructura

[D] - Vector de desplazamientos

[Q] - Vector de cargas

En la ecuación 3.1.1. K_{ij} es la fuerza nodal correspondiente al grado de libertad i causado por la aplicación de un desplazamiento unitario correspondiente al grado de libertad j .

D_1, D_2, \dots, D_n son los desplazamientos nodales desconocidos y Q_1, Q_2, \dots, Q_n las cargas nodales aplicadas correspondientes al grado de libertad $1, 2, \dots, n$, así veremos que la formación de la matriz **[K]** es una parte fundamental del proceso de análisis.

Utilizando para el estudio del método una estructura como la indicada en la figura 3.1, como se puede observar se ha colocado una reacción r bajo cada columna y otra bajo la mitad de cada entre-eje, resultando tres reacciones bajo cada barra de la cimentación, esto es únicamente para fines de sencillez de cálculo, así si se desea obtener un mayor número de reacciones r_i se puede considerar cada barra de la cimentación como dos o más barras, para fines de análisis.

Así utilizando el método de las rigideces para el análisis estructural de la figura 3.1 se puede resumir en los términos siguientes.

- a) Se empotra toda la estructura, con lo que se generan momentos y cortantes de empotramiento a los que llamaremos M_i^e y V_i^e .

- b) Se permiten giros en los nudos y desplazamientos lineales (fig. 3.2), a los cuales simplemente se les denomina desplazamientos. Con esto se producen momentos y cortantes en los nudos y en los ejes de barras.

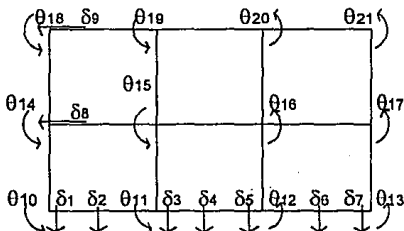


Fig. 3.2 Desplazamientos lineales δ_i y giros θ_i .

- c) En vista de que se desconocen los desplazamientos se calculan los elementos mecánicos (cortantes y momentos debidos a los desplazamientos unitarios).

En el sistema de ecuaciones 3.1.2, el cuál se puede expresar como :

$$[K] \{D\} = \{F\} \quad 3.1.3$$

Podemos encontrar tres tipos de incógnitas:

- Los desplazamientos δ_i
- Los giros θ_i
- Las reacciones r_i

Así las reacciones r_i pueden aparecer como V_i^e ó como M_i^e .

Esto se puede adecuar en la ecuación 3.1.3, quedando :

$$[K] \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_i^e \\ -M_i^e \end{bmatrix} \quad 3.1.4$$

Es importante recalcar en este punto, que la matriz de rigideces de toda la estructura se consigue al sumar cada una de las matrices de rigideces de cada una de las barras.

Desde el punto de vista práctico, se pueden presentar en el análisis estructural dos casos de interés :

- a) Barras con apoyos continuos
- b) Barra con apoyo continuo y otro apoyo articulado.

Además de los puntos anteriores, se puede apreciar con la figura 3.2 que se han incluido desplazamientos lineales a la mitad de los entre ejes en la cimentación (δ_2 , δ_4 y δ_6), las ecuaciones auxiliares para determinar estos desplazamientos y relacionarlos con el resto de los desplazamientos de la estructura, se pueden encontrar utilizando el teorema de la viga conjugada; para fines prácticos estudiaremos los casos siguientes :

- a) Barras con apoyos continuos
- b) Barra con apoyo continuo y otro apoyo articulado.

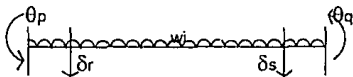
Finalmente la obtención de todas las ecuaciones que relacionan los desplazamientos lineales δ_i y los giros θ_i con los w_i y r_i se obtienen utilizando la ecuación matricial 3.1.4 y las ecuaciones auxiliares para determinar los desplazamientos que se desarrollaran a continuación.

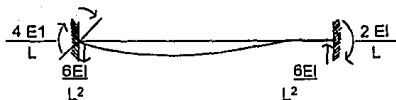
3.1.1.1 BARRA CON APOYOS CONTINUOS

Las condiciones para estudiar este inciso son las siguientes.

- a) Los giros se consideran positivos si van en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- b) Los desplazamientos son positivos si son hacia abajo.
- c) Los momentos flexionantes de barra sobre nudo son positivos si van en sentido de las manecillas del reloj.
- d) Las fuerzas cortantes de barra sobre nudo son positivas si van hacia arriba.

Así la matriz de rigideces de una barra j con apoyos continuos fig. 3.3 está dada por :





Ver tabla 1

Fig. 3.3 Barra con apoyos continuos.

$$k_j = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s \\ \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \quad 3.1.5$$

Donde :

- L = Longitud de la barra j
- E = Módulo de elasticidad del material de la barra j
- I = Momento de inercia de la barra j
- θ_p = Giro en el nudo p
- θ_q = Giro en el nudo q
- δ_r = Desplazamiento en el nudo r
- δ_s = Desplazamiento en el nudo s

Los momentos y cortantes de empotramiento de barra sobre nudos para diferentes condiciones de carga son las siguientes.

Para condiciones de la fig. 3.3

$$M_p^e = \frac{w_j L^2}{12} \quad 3.1.6$$

$$M_q^0 = \frac{wL^2}{12} \quad 3.1.7$$

$$V_r^0 = \frac{wL}{2} \quad 3.1.8$$

$$V_s^0 = \frac{wL}{2} \quad 3.1.9$$

Y para las cargas repartidas en la cimentación, fig. 3.4

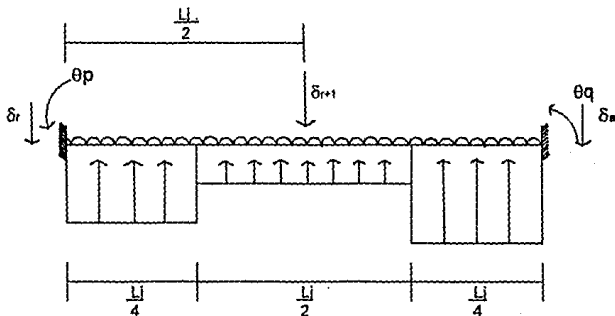


Fig.3.4 Barra con cargas repartidas en la cimentación. (Apoyos continuos).

$$M_p^0 = \frac{-67}{3072} L_j^2 r_r + \frac{11}{192} L_j^2 r_{r+1} - \frac{13}{3072} L_j^2 r_s \quad 3.1.10$$

$$M_q^0 = \frac{13}{3072} L_j^2 r_r + \frac{11}{192} L_j^2 r_{r+1} + \frac{67}{3072} L_j^2 r_s \quad 3.1.11$$

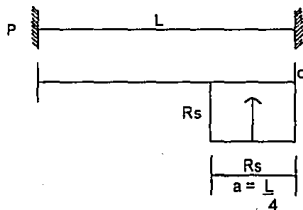
$$V_r^0 = \frac{121}{512} L_j r_r + \frac{1}{4} L_j r_{r+1} + \frac{7}{512} L_j r_s \quad 3.1.12$$

$$V_s^0 = \frac{7}{512} L_j r_r + \frac{1}{4} L_j r_{r+1} + \frac{121}{512} L_j r_s \quad 3.1.13$$

A continuación presentamos de manera ilustrativa la deducción de las ecuaciones. 3.1.11 y 3.1.12

Momento de empotramiento M_q^e

Parte derecha de la barra.



$$\text{Carga distribuida } W = R_s \left[\frac{L}{4} \right]$$

$$M_q = \frac{WL}{12} \times (3x^2 - 8x + 6)$$

$$x = a/L; a = L/4 \Rightarrow x = (L/4)/L = L/4L = 1/4$$

$$M_q^e = \frac{WL}{12} \left[\frac{1}{4} \right] \cdot \left[\left[\frac{1}{4} \right]^2 - 8 \left[\frac{1}{4} \right] + 6 \right] = \frac{WL}{48} \left[\frac{3}{16} - 2 + 6 \right]$$

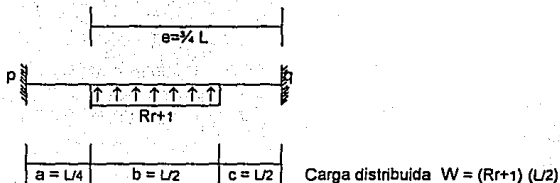
$$= \frac{WL}{48} \left[\frac{3}{16} - \frac{32}{16} + \frac{96}{16} \right] = \frac{WL}{48} \left[\frac{67}{16} \right] = \frac{67 WL}{768}$$

$$\text{Como } W = \frac{R_s L}{4}$$

$$M_q^e = \frac{67 L^2 R_s}{(968)(4)} = \frac{67 R_s}{3072}$$

Parte central de la barra.

$$M_q = \frac{W}{12 L^2 b} \left[e^3 \left[4L - 3c \right] - c^3 \left[4L - 3c \right] \right]$$



Sustituyendo.

$$Mq = \frac{W}{12L^2(L/2)} \left[\left[\frac{3L}{4} \right]^3 \left[4L - 3 \left[\frac{3L}{4} \right] \right] - \left[\frac{L}{4} \right]^3 \left[4L - 3 \left[\frac{L}{4} \right] \right] \right]$$

$$Mq = \frac{W}{6L^3} \left[\left[\frac{27L^3}{64} \right] \left[4L - \frac{9L}{4} \right] - \frac{L^3}{64} \left[4L - \frac{3L}{4} \right] \right]$$

$$Mq = \frac{W}{6L^3} \left[\frac{108L^4}{64} - \frac{243L^4}{256} - \frac{4L^4}{64} + \frac{3L^4}{256} \right]$$

$$Mq = \frac{W}{6L^3} \left[\frac{432L^4}{256} - \frac{243L^4}{256} - \frac{16L^4}{256} + \frac{3L^4}{256} \right]$$

$$Mq = \frac{W}{6L^3} \left[\frac{176L^4}{256} \right]$$

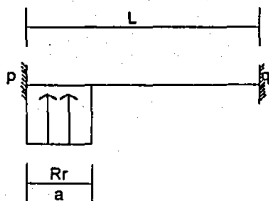
Como $W = \frac{(Rr+1)L}{2}$

$$Mq = \frac{Rr+1L}{12L^3} \left[\frac{176L^4}{256} \right] = \frac{176Rr+1L^5}{3072L^5} = \frac{(16)(11)Rr+1L^5}{(16)(192)L^5}$$

$$Mq = \frac{11Rr+1L^2}{192}$$

Parte izquierda de la barra.

$$Mq = \frac{WL}{12} X^2 (4-3x)$$



$$\text{Carga distribuida } W = Rr \left[\frac{L}{4} \right]$$

$$X = \frac{a}{L} = \frac{L/4}{L} = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo.

$$Mq = \frac{WL}{12} \left[\frac{1}{4} \right]^2 \left[4 - 3 \left[\frac{1}{4} \right] \right]$$

$$Mq = \frac{WL}{192} \left[\frac{16 - 3}{4} \right] = \frac{WL}{192} \left[\frac{13}{4} \right] = \frac{13 WL}{768}$$

$$\text{Como } W = Rr \left[\frac{L}{4} \right]$$

$$Mq = \frac{13 Rr L^2}{4 (768)} = \frac{13 Rr L^2}{3072}$$

La sumatoria de los momentos en q, nos da la ec. 3.1.11., y en forma analoga, se obtiene la ec. 3.1.10.

Para deducir los cortantes de empotramiento para el lado izquierdo. (q).

Hacemos M en q :

$$\Sigma M_q = 0$$

$$0 = \frac{67}{3072} Rr L^2 + \frac{11}{192} R_{r+1} L^2 + \frac{13}{3072} R_s L^2 - \frac{13}{3072} Rr L^2 - \frac{11}{192} R_{r+1} L^2$$

$$- \frac{67}{3072} R_s L^2 + Rr \frac{L}{4} \left[\frac{7L}{8} \right] + R_{r+1} \left[\frac{L}{2} \right] \left[\frac{L}{2} \right] + R_s \left[\frac{L}{4} \right] \left[\frac{L}{8} \right] + V_r^0 L$$

Simplificando.

$$\frac{726}{3072} RrL^2 + \frac{Rr+1L^2}{4} + \frac{42}{3072} RsL^2 = -Vr^0 L$$

$$Vr^0 = \frac{121}{512} RrL + \frac{Rr+1L}{4} + \frac{7}{512} RsL \quad (3.1.12)$$

De forma análoga se obtiene la ec. (3.1.13)

3.1.1.2 BARRA CON APOYO CONTINUO Y OTRO ARTICULADO.

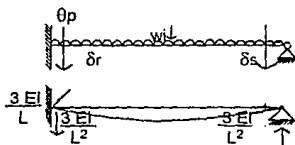


fig. 3.5

Ver tabla 1

La matriz de rigideces de una barra en las condiciones de la fig. 3.5 será.

$$[K]_j = \begin{bmatrix} & \theta_p & \delta_r & \delta_s \\ \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^3} \\ \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \theta_p \\ \delta_r \\ \delta_s \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

Los momentos y cortantes de empotramiento de barra sobre nudo para diversas condiciones de carga estarán dadas por:

a) Para una carga repartida w fig. 3.5

$$M_p^0 = \frac{wL^2}{8} \quad (3.1.15)$$

$$V_r^0 = \frac{5wL}{8} \quad (3.1.16)$$

$$V_s^0 = \frac{3Wl_i}{8}$$

3.1.17

- b) Para cargas repartidas en la cimentación. Barra con un apoyo continuo y otro articulado. fig. 3.6

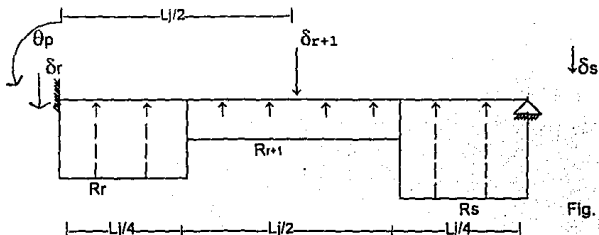


Fig. 3.6

$$M_p^0 = -\frac{49}{2048} L_j^2 R_r - \frac{11}{128} L_j^2 R_{r+1} - \frac{31}{2048} L_j R_s$$

3.1.18

$$V_r^0 = \frac{399}{2048} L_j R_r + \frac{21}{128} L_j R_{r+1} + \frac{33}{2048} L_j R_s$$

3.1.19

$$V_s^0 = \frac{113}{2048} L_j R_r + \frac{43}{128} L_j R_{r+1} + \frac{479}{2048} L_j R_s$$

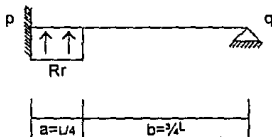
3.1.20

La deducción de las ecuaciones se hace a continuación.

Para el nodo P

Parte izquierda.

$$M_p = -\frac{W_a}{8} (2-x)^2$$



Donde $X = \frac{a}{L}$; $a = L/4 \Rightarrow X = 1/4$

$$W = Rr \left[\frac{L}{4} \right]$$

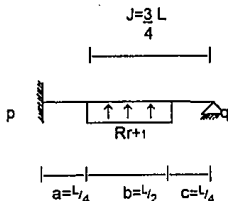
Sustituyendo.

$$M_p = -\frac{RrL}{32} \left[\frac{L}{4} \right] \left[2 \cdot \frac{1}{4} \right]^2 = -\frac{RrL^2}{128} \left[\frac{49}{16} \right]$$

$$M_p = \frac{49 Rr L^2}{2048}$$

Parte central.

$$M_p = -\frac{W}{8L^2b} (d^2 - c^2)(2L^2 - c^2 - d^2)$$



$$W = \frac{Rr+1L}{2}$$

Sustituyendo.

$$M_p = -\frac{W}{8L^2b} \left[\left(\frac{3}{4}L \right)^2 - \left(\frac{1}{4}L \right)^2 \right] \left[2L^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 - \left(\frac{3}{4}L \right)^2 \right]$$

$$M_p = -\frac{W}{8L^2b} (9/16L^2 - 1/16L^2) \left[\frac{2L^2 - L^2}{16} - \frac{9L^2}{16} \right]$$

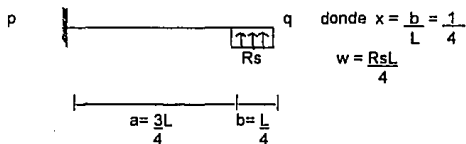
$$M_p = -\frac{W}{8L^2b} \left[\frac{8L^2}{16} \right] \left[\frac{22L^2}{16} \right] = -\frac{W}{8L^2(L/2)} \left[\frac{176L^4}{256} \right]$$

$$M_p = - \frac{352 WL^4}{2048 L^3} = - \frac{352 R_{r+1} L^5}{4096 L^3}$$

$$M_p = \frac{11 R_{r+1} L^2}{128}$$

Para la parte derecha de la barra

$$M_p = - \frac{Wb}{8} (2-X^2)$$



Sustituyendo.

$$M_p = \frac{-\frac{RsL}{4} \frac{L}{4}}{8} \left[2 \left[-\frac{1}{4} \right]^2 \right] = -\frac{RsL^2}{128} \left[2 - \frac{1}{16} \right]$$

$$M_p = -\frac{31 RsL^2}{2048}$$

Sumando los momentos parciales obtenemos la ecuación 3.1.18

Deducción de los cortantes de empotramiento cortante en P.
 Haciendo suma forma de momentos en q.

$$\Sigma M_q = 0$$

$$0 = -\frac{49}{2048} R_r L_j^2 - \frac{11}{128} R_r L_j^2 - \frac{31}{2048} R_s L_j^2 + R_r \left[\frac{L_j}{4} \right] \left[\frac{7L}{8} \right]$$

$$+ R_{r+1} \left[\frac{L_j}{2} \right] \left[\frac{L_j}{2} \right] + R_s \left[\frac{L_j}{4} \right] \left[\frac{L_j}{8} \right] + \sqrt{P} L = 0$$

$$V_p^0 = \frac{399}{2048} RrL_j + \frac{21}{128} Rr+L_j + \frac{33}{2048} R_sL_j \quad 3.1.19$$

Cortante en q.

Haciendo sumatoria de momentos en P.

$$\sum M_p = 0$$

$$0 = \frac{49}{2048} RrL_j^2 + \frac{11}{128} Rr+L_j^2 + \frac{31}{2048} R_sL_j^2 + R_s \begin{bmatrix} L \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7L \\ 8 \end{bmatrix} \\ + Rr+1 \begin{bmatrix} L \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ 2 \end{bmatrix} + Rr \begin{bmatrix} L \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ 8 \end{bmatrix} + V_q^0 L = 0$$

Despejando V_q^0

$$V_q^0 = \frac{113}{2048} RrL_j + \frac{43}{128} Rr+L_j + \frac{479}{2048} R_sL_j \quad 3.1.20$$

3.1.1.3 DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN LA CIMENTACION, A LA MITAD DEL ENTRE EJE.

La obtención del desplazamiento vertical δ_{r+1} en la cimentación, a la mitad del entre-eje, para una barra con apoyos continuos, empleando los teoremas de la viga conjugada, conduce a la siguiente expresión.

$$\frac{EI}{L} \theta_p - \frac{EI}{L} \theta_q - \frac{8EI}{L^2} \delta_{r+1} + \frac{16EI}{L^2} \delta_{r+1} - \frac{8EI}{L^2} \delta_s + \frac{1}{256} L^2 Rr + \frac{13}{384} L^2 Rr+1 + \frac{1}{256} L^2 R_s = \frac{1}{24} W_j L^2 \quad 3.1.21$$

De forma similar, para una barra en la cimentación con un apoyo continuo a la izquierda y otro apoyo articulado a la derecha.

$$-\frac{3EI}{L} \theta_p + \frac{11EI}{L^2} \delta_r - \frac{16EI}{L^2} \delta_{r+1} + \frac{5EI}{L^2} \delta_s - \frac{37}{6144} RrL^2 - \frac{3}{48} Rr+1L^2 - \frac{91}{6144} R_sL^2 = -\frac{1}{12} W_j L^2$$

Por lo tanto.

3.1.22

$$\frac{3EI}{L} \theta_p - 11 \frac{EI}{L^2} \delta_r + 16 \frac{EI}{L^2} \delta_r + 1.5 \frac{EI}{L^2} \delta_s + \frac{37}{6144} L^2 R_r + \frac{1}{16} L^2 R_{r+1} + \frac{91}{6144} L^2 R_s = \frac{WjL^2}{12}$$

3.1.1.4 MATRIZ DE RIGIDICES DE TODA LA ESTRUCTURA.

La matriz de rigideces de toda la estructura es la suma de las matrices de cada una de las barras.

En toda la estructura se deben de cumplir las siguientes condiciones:

- La suma de los momentos de empotramiento y los momentos de debidos a giros en los nudos debe ser cero en cada uno de los nudos.
- La suma de cortantes de empotramiento y de cortantes debidos a desplazamientos lineales de los nudos debe ser nula en cada uno de los ejes de barras.

Para que cada uno de los ejes de barras esté en equilibrio, estableciendo las condiciones anteriores y utilizando las Ec. 3.1.21 ó 3.1.22.

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} K_{11}\delta_1 + K_{12}\delta_2 + \dots + K_{1j}\theta_j + K_{1k}\theta_k + \dots + A_{11}r_1 + A_{12}r_2 + \dots &= B_{11}W_1 + B_{12}W_2 + \dots \\ K_{21}\delta_1 + K_{22}\delta_2 + \dots + K_{2j}\theta_j + K_{2k}\theta_k + \dots + A_{21}r_1 + A_{22}r_2 + \dots &= B_{21}W_1 + B_{22}W_2 + \dots \\ K_{j1}\delta_1 + K_{j2}\delta_2 + \dots + K_{jj}\theta_j + K_{jk}\theta_k + \dots + A_{j1}r_1 + A_{j2}r_2 + \dots &= B_{j1}W_1 + B_{j2}W_2 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Ec. 3.1.22 A}$$

En donde.

k_{ij} = Coeficiente de la matriz de rigideces de toda la estructura.

A_{ij} = Coeficiente que corresponde a la reacción r_j en la ec. i

B_{ij} = Coeficiente que corresponde a la carga w_j en la ec. i

En el sistema de ec 3.1.22A, contiene tres tipos de incógnitas.

Desplazamientos	δ_i
Giros	θ_i
Y Reacciones	r_i

Como se menciono anteriormente, en este punto procederemos a obtener los desplazamientos del suelo δ_i en función de las reacciones r_i en el análisis de hundimientos del terreno.

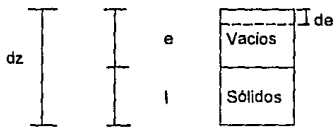
3.1.2 ANALISIS DE ASENTAMIENTO DEL TERRENO

Frecuentemente ocurre que durante el proceso de consolidación, (entendiendo así a el proceso de disminución de volumen que tiene lugar en un lapso, provocado por un aumento de las cargas sobre el suelo), la posición relativas de las partículas solidas sobre un mismo plano horizontal permanece especialmente la misma, así, el movimiento de las partículas del suelo puede ocurrir solo en deducción vertical; esta es la consolidación unidireccional o unidimensional.

Por tanto en la consolidación unidimensional, el volumen de la misma de suelo disminuye, pero los desplazamientos horizontales de las partículas solidas son nulos.

Las características de la consolidación de los estratos de arcilla (como es nuestro caso), pueden investigarse cuantitativamente con aproximación razonable, realizando la prueba de consolidación unidimensional sobre especimenes representativos del suelo, extraídos en forma tan inalterada como sea posible. Se puede sí calcular la magnitud y velocidad de los asentamientos probables a las cargas aplicadas.

Portando de el siguiente esquema de un elemento de suelo sujeto a consolidación unidimensional.



Si:

$$V_s = 1 \Rightarrow V_m = 1 + e$$

Se tiene la selección entre el cambio de la relación de varios y el cambio de volúmen de el elemento de suelo sujeto a prueba.

$$\Delta dV = \frac{de}{1+e} dz \quad (3.22)$$

Puesto que el área del elemento es unitaria, el cambio de volúmen del elemento resulta medido por el cambio de allura.

Se define ahora el coeficiente de compesibilidad, a_v , como la relación.

$$a_v = \frac{de}{dp} \quad (3.23)$$

Este coeficiente representa, en módulo, la pendiente de la curva de compesibilidad, en escala natural, en el punto de que se trate. El valor a_v depende de la presión actuante sobre el suelo y no es una constante del mismo. Físicamente mide la razón de variación de la relación de vacío con la presión.

De la ecuación 3.23 se deduce:

$$de = a_v dp$$

y sustituyendo en 3.22 se tiene:

$$\Delta dV = \frac{a_v}{1+e} dp dz \quad (3.24)$$

Al término $\frac{a_v}{1+e}$ se le conoce como "módulo de variación volumétrica".

$$mv \text{ de donde: } DdV = mv.dp dz \quad (3.25)$$

$$\text{Siendo } mv = \frac{a_v}{1+e} = \frac{de}{(1+e) dp} \quad (3.26)$$

Determinamos a continuación los desplazamientos verticales δ_i en función de las cargas r_i sobre el terreno, para la estratigrafía y propiedades del suelo de la figura 3.7

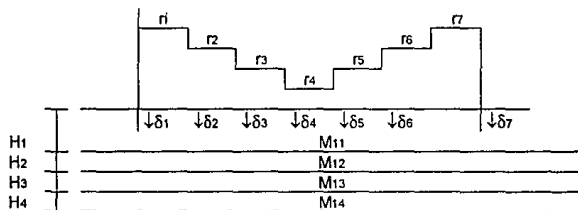


Fig. 3.7 Carga sobre el terreno de cimentación

El asentamiento del estrato j bajo el tramo i , es decir, el asentamiento del cuadro ij , debido a una carga r_k (colocada en k), vale: (fig. 3.8).

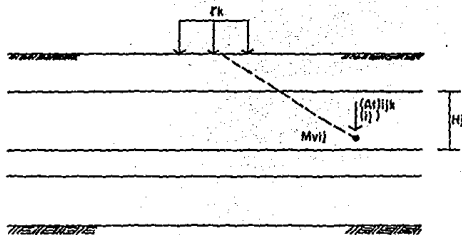


Fig. 3.8

Fig. 3.8 Cálculo del asentamiento ij

El asentamiento del estrato j bajo el tramo i es decir, el asentamiento del cuadrado ij , debido a una carga r_i colocada en K valdrá.

$$a_{ijk} = M_{vij} (\Delta\sigma)_{ijk} \quad 3.1.23$$

En donde.

- a_{ijk} = Asentamiento del cuadrado ij , debido a una reacción ubicada en k (r_k).
- M_{vij} = Módulo de deformación del cuadrado ij .
- H_i = Espesor del estrato j
- $(\Delta\sigma)_{ijk}$ = incremento del esfuerzo normal vertical; en el cuadrado ij , ocasionado por una presión r_k/b_k en el contacto entre suelo y cimentación.
- b_k = Ancho de la cimentación, correspondiente a la reacción r_k .

Pero según la fig. 3.8

$$(\Delta\sigma)_{ijk} = I_{ijk} \frac{r_k}{b_k} \quad 3.1.24$$

Siendo I_{ijk} = Valor de influencia en el cuadro ij debido a una presión unitaria colocada en K .

El valor de I_{ijk} puede determinarse calculando el esfuerzo normal vertical producido por una presión unitaria en K sobre el cuadro (Zeevaert 1973).

El asentamiento en el cuadro ij debido a todas las cargas r_k y a la carga q valdrá

3.1.25

$$\delta_{ij} = M_{vij} H_i \left[\begin{array}{c} m \\ q_{ij} + \sum_{k=1} I_{ijk} \frac{r_k}{b_k} \end{array} \right]$$

Donde:

m = Número total de reacciones aplicadas en la superficie.

q_{ij} = Esfuerzo normal vertical debido a la presión q , aplicada en la periferia de la estructura (fig. 3.7).

El asentamiento bajo el punto i será.

$$\delta_i = \sum_{J=1}^p \delta_{ij} \quad 3.1.26$$

En donde p = número de estratos del subsuelo.

Por lo tanto δ_i nos queda:

$$\delta_i = \sum_{J=1}^p M_{vij} H_j q_{ij} + \sum_{J=1}^p M_{vij} H_j \left[\sum_{k=1}^m I_{ijk} \frac{r_k}{b_k} \right] \quad 3.1.27$$

En esta ecuación los desplazamientos verticales del suelo quedan en función de las reacciones r_i .

En este punto, se debe aclarar que los valores del módulo de deformación del suelo M_{vij} dependen del esfuerzo de confinamiento, el cual no se conoce a priori, por esta razón, los M_{vij} deben de terminarse para un nivel de esfuerzos lo mas cercano posible a la realidad. (Zeevaert 1973), dependiendo este nivel de la experiencia del Ingeniero que realiza el análisis. Esta muy alejado de la magnitud de los esfuerzos obtenidos después de resolver todo el problema, es probable que haya necesidad de volver a calcular los hundimientos del suelo con los valores corregidos del módulo al tomar un nuevo nivel de esfuerzos.

Una vez que se ha hecho esta aclaración, y empleado la ec. 3.1.27 los valores de δ_i son una función lineal de las reacciones r_i .

3.1.3 COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

Una vez realizado el análisis de la estructura y del hundimiento del terreno se establece la compatibilidad de la siguiente forma:

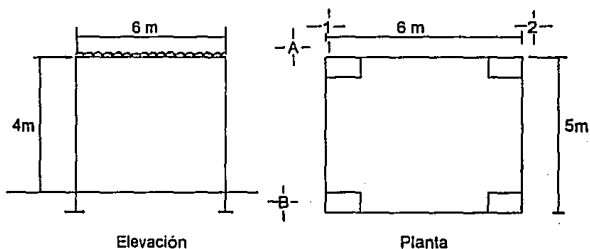
Los asentamientos del suelo ec. 3.1.27 se sustituyen en el sistema de ec. 3.1.22A; desapareciendo así como incógnitas los desplazamientos y quedando unicamente con incógnitas los desplazamientos angulares en los nodos θ_i , y las reacciones del terreno r_i .

Así tenemos un número de ecuaciones igual al numero de incógnitas, por lo que el sistema puede ser fácilmente resuelto.

Una vez conocidas las reacciones del terreno (r_i), se pueden determinar los desplazamientos verticales al terreno por medio de la ec. 3.1.27.

CAPITULO IV
EJEMPLO ILUSTRATIVO

En este capítulo determinaremos las reacciones de un marco con las siguientes características.



Vigas de 30x60 cm.
Columnas de 30x30 cm.
Losa de 15 cm de espesor.

Concreto $f'c=250$ Kg/cm²

Desplantaremos esta estructura sobre un terreno con las siguientes características:
Arena de grano medio.

N = 20 golpes (P.P.E.)

γ = 1.8 t/m³

Dr = 62 %

(Compacidad Relativa)

Con estas características calcularemos los elementos mecánicos de los marcos, primero con las consideraciones tradicionales y posteriormente haciendo las consideraciones de giros y hundimientos en las zapatas, para finalmente comparar las reacciones provocadas en uno y otro caso.

Sección 4.a. Estructura empotrada en su cimentación; cálculo tradicional por carga vertical.

W Losa (0.15 m)(2.4/m ³).	0.360 T/m ²
Entortado, enladrillado y relleno	<u>0.30 T/m²</u>
Carga muerta	0.660 T/m ²

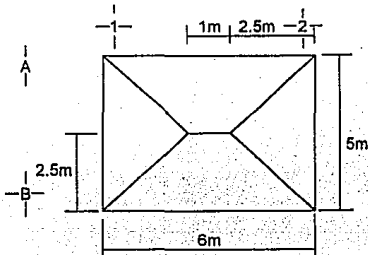
Por reglamento.

Carga Viva Máxima	100 kg/m ²
W trabes 30x60 cm.	$W_t = (0.30)(0.60)(2.40) = 0.432 \text{ T/m}$
W columnas 30x30 cm.	$W_c = (0.30)(0.30)(2.40) = 0.216 \text{ T/m}$

Bajando las cargas en las columnas

A tributaria	=	(3)(2.5)	=	7.50 m ²
W losa	=	(7.50)(0.66+0.1)	=	5.7 ton.
W trabes	=	(3+2.5)(0.432)	=	2.38 ton.
W columna	=	(4)(0.216)	=	<u>0.86 ton.</u>
		ΣQ	=	8.94 ton.

Cálculo de la carga repartida W



Análisis estructural marco eje A por C. V (Carga vertical)

$$\text{Area tributaria} = \frac{6+1}{2} (2.5) = 8.75 \text{ m}^2$$

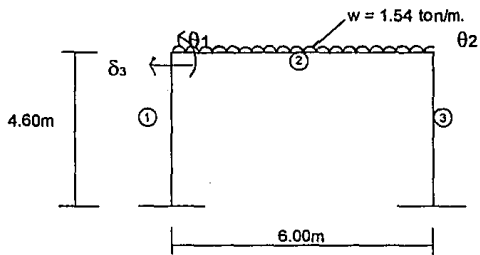
$$W \text{ losa} = (8.75)(0.76) = 6.65 \text{ ton.}$$

$$W \text{ trabe} = (6.00)(0.432) = 2.592 \text{ ton.}$$

$$Q_t = 9.242 \text{ ton.}$$

$$w = \frac{Q_t}{L_n} = \frac{9.242}{6.00} = 1.54 \text{ ton/m}$$

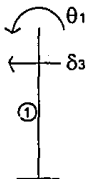
Suponiendo una profundidad de desplante de la zapata de 60 cm.



Tenemos un marco con 3 barras y tres grados de libertad.

Acudiendo a la Ec. 3.1.5 y analizando cada barra, tomamos los elementos de la ec. 3.1.5 que aparece en nuestra barra estudiada y formamos la matriz de rigideces de la barra en cuestión.

Barra 1



$$\theta_p = \theta_1$$

$$\delta_r = \delta_3$$

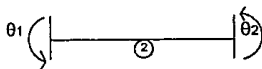
$$\theta_q = 0$$

$$\delta_s = 0$$

Por lo tanto nuestra K_1 queda :

$$K_1 = \begin{bmatrix} \theta_p & \delta_r \\ \frac{4EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \delta_r \end{matrix}$$

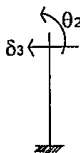
Barra 2



$$\begin{aligned} \theta_p &= \theta_1 \\ \delta_r &= 0 \\ \theta_q &= \theta_2 \\ \delta_s &= 0 \end{aligned}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_q \\ \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L^2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \end{matrix}$$

Barra 3



$$\begin{aligned} \theta_p &= 0 \\ \delta_r &= \delta_3 \\ \theta_q &= \theta_2 \\ \delta_s &= 0 \end{aligned}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \theta_q & \delta_r \\ \frac{4EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_q \\ \delta_r \end{matrix}$$

Según las NTC del reglamento de construcción del D.F. para concreto $f_c=250 \text{ kg/cm}^2$.

$$E = 14,000 \sqrt{f_c}$$

$$E = 14,000 \sqrt{250} = \underline{221,360 \text{ kg/cm}^2}$$

$$= \underline{2'213,600 \text{ T/M}^2}$$

Momentos de inercia.

$$I_{\text{col}} = \frac{1}{12} (0.30)^4 = 6.75 \times 10^{-4} \text{ M}^4$$

$$I_{\text{trabe}} = \frac{1}{12} (0.30)(0.60)^3 = 5.4 \times 10^{-3} \text{ M}^4$$

Con lo anterior obtenemos los valores de EI.

$$EI_{\text{col}} = (2'213,600 \text{ T/m}^2)(6.75 \times 10^{-4} \text{ M}^4) = 1,494.18 \text{ T-M}^2$$

$$EI_{\text{trabe}} = (2'213,600 \text{ T/m}^2)(5.4 \times 10^{-3} \text{ M}^4) = 11,953.44 \text{ T-M}^2$$

Sustituyendo estos valores en k_1, k_2 y k_3 obtenemos .

$$k_1 = \begin{bmatrix} \theta_p & \delta_r \\ \frac{4(1494.18)}{4.6} & \frac{6(1494.18)}{4.6^2} \\ \frac{-6(1494.18)}{4.6^2} & \frac{12(1494.18)}{4.6^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \delta_r \end{matrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \delta_3 \\ 1299.29 & -423.68 \\ -423.68 & 184.21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_q \\ \frac{4(11,953.44)}{6} & \frac{2(11,953.44)}{6} \\ \frac{2(11,953.44)}{6} & \frac{4(11,953.44)}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ 7968.96 & 3984.48 \\ 3984.48 & 7968.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} \theta_p & \delta_q \\ \frac{4(1494.18)}{4.6} & \frac{-6(1494.18)}{4.6^2} \\ \frac{-6(1494.18)}{4.6^2} & \frac{12(1494.18)}{4.6^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_q \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 & \delta_3 \\ 1299.29 & -423.68 \\ -423.68 & 184.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigideces $K = \Sigma k_j = k_1 + k_2 + k_3$

$$K = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \delta_3 \\ 9,268.25 & 3,984.48 & -423.68 \\ 3,984.48 & 9,268.25 & -423.64 \\ -423.68 & -423.68 & 368.42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

Calculamos los momentos de empotramiento de la tabla 1

$$M^e = \frac{wL^2}{12}$$

$$M_1^e = \frac{(1.54)(6^2)}{12} = 4.62 \text{ T.m}$$

$$M_2^e = -\frac{(1.54)(6^2)}{12} = -4.62 \text{ T.m}$$

___ Ecuación matricial de ecuación en nudos

$$[K] [D] + [F] = 0$$

ec. 3.1.12

$$F = \begin{bmatrix} 4.62 \\ -4.62 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se puede escribir de la siguiente forma

$$K\delta + P_e + P_c = 0$$

$$\delta = [D], \quad F = P_e + P_c$$

Donde : P_e = vector de empotramiento

P_c = vector de cargas

$$\begin{vmatrix} 9768.24 & 3984.48 & -423.68 \\ 3944.48 & 9268.24 & -423.68 \\ -423.68 & -423.68 & 368.42 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4.62 \\ -4.62 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el sistema.

$$\theta_1 = -8.74 \times 10^{-4}$$

$$\theta_2 = 8.74 \times 10^{-4}$$

$$\delta_3 = 1 \times 10^{-15} \approx 0$$

Comprobando por simetría.

$$\theta_1 = -\theta_2$$

Momento en el grado de libertad P

$$M_p = M_p^e + \frac{4EI}{L} \theta_p + \frac{2EI}{L} \theta_q - \frac{6EI}{L^2} \delta_r + \frac{6EI}{L^2} \delta_s$$

En barra 2

$$M_p = 4.62 + 7968.96 (-8.74 \times 10^{-4}) + 3984.48 (8.74 \times 10^{-4})$$

$$M_p = 1.14 \text{ T.m.}$$

En barra 1

$$M_p = 0 + 4 \frac{EI}{L} \theta_p + \frac{6EI}{L} \delta r = 1299.29 (-8.74 \times 10^{-4}) = -1.14 \text{ T.m.}$$

Momento en el grado de libertad q

$$M_q = M_p^0 + \frac{2EI}{L} \theta_p + \frac{4EI}{L} \theta_q - \frac{6EI}{L^2} \delta r + \frac{6EI}{L^2} \delta s$$

En barra 2

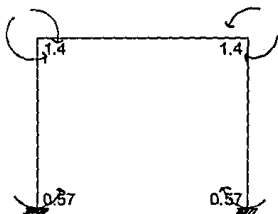
$$M_q = -4.62 + 3984.48 (-8.74 \times 10^{-4}) + 7968.96 (8.74 \times 10^{-4})$$

$$M_q = -1.14 \text{ T.m.}$$

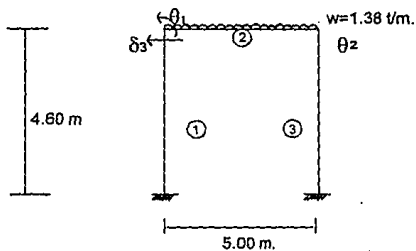
En barra 3

$$M_q = 0 + 4 \frac{EI}{L} \theta_q - \frac{6EI}{L^2} \delta r = 0 + 1299.29 (8.74 \times 10^{-4})$$

$$M_q = 1.14 \text{ T.m.}$$



Análisis estructural marco eje l por C.V. (Carga vertical)



$$A \text{ tributaria} = \frac{5 \times 2,5}{2} = 6,25 \text{ m}^2$$

$$W \text{ losa} = (6,25) (0,76) = 4,75 \text{ T}$$

$$W \text{ trabe} = (5,00) (0,432) = \frac{2,16 \text{ T}}{6,91 \text{ T}}$$

$$w = \frac{\theta t}{L} = \frac{6,91 t}{5} = 1,38 \text{ t/m}$$

Como podemos observar las matrices K_1 y K_3 son las mismas que en el caso del eje A, por lo que unicamente nos falto la matriz K_2 que esta dada por.

$$K_2 = \begin{array}{c} \theta_p \\ \theta_q \end{array} \begin{array}{cc} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{array} = \begin{array}{cc} \frac{4(11,953,44)}{5} & \frac{2(11,953,44)}{5} \\ \frac{2(11,953,44)}{5} & \frac{4(11,953,44)}{5} \end{array}$$

$$K_2 = \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \begin{bmatrix} 9562,75 & 4781,34 \\ 4781,78 & 9562,75 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array}$$

La matriz de rigideces K es igual a

$$K = \begin{array}{ccc} \theta_1 & \theta_2 & \delta_3 \end{array} \begin{array}{ccc} 10,462,04 & 4,781,38 & -423,68 \\ 4,781,38 & 10,862,04 & -423,68 \\ -423,68 & -423,68 & 368,44 \end{array} \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{array}$$

Cálculo de los momentos de empotramiento.

$$M_1^e = \frac{(1.38)(5)^2}{12} = 2.875 \quad \text{T.m.}$$

$$M_2^e = -\frac{(1.38)(5)^2}{12} = -2.875 \quad \text{T.m.}$$

El sistema

$$K\delta + P_e + P_c = 0 \text{ nos queda.}$$

$$\begin{vmatrix} 10,862.04 & 4,781.38 & -423.68 \\ 4,781.38 & 10,862.04 & -423.68 \\ -423.68 & -423.68 & 368.42 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2.875 \\ -2.875 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el sistema tenemos.

$$\theta_1 = -4.73 \times 10^{-4}$$

$$\theta_2 = 4.73 \times 10^{-4}$$

$$\delta_3 = 0$$

Comprobando por simetría $\theta_1 = -\theta_2$

$$M_p = 2.875 + 9562.75 (-4.73 \times 10^{-4}) + 4781.38(4.73 \times 10^{-4})$$

$$M_p = 0.613 \text{ T.m.}$$

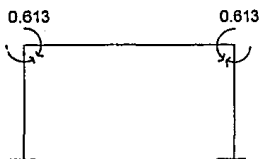
$$M_q = -2.875 + 4781.38 (-4.73 \times 10^{-4}) + 9562.75 (4.73 \times 10^{-4})$$

$$M_q = -0.613 \text{ T.m.}$$

De manera análoga al eje A se obtienen los momentos en las barras 1 y 3 y sus valores son:

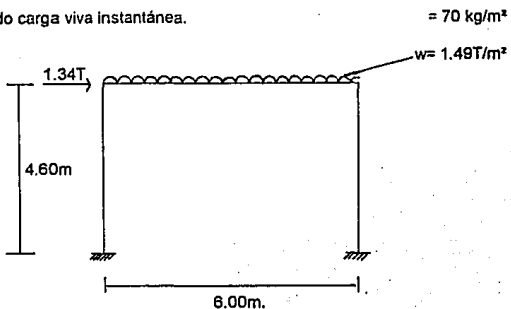
$$M_p = -0.613 \text{ T.m.}$$

$$M_q = 0.613 \text{ T.m.}$$



Análisis para el marco A con sismo.

Utilizando carga viva instantánea.



Para zona I

$$C = 0.16$$

$$Q = 2$$

$$\frac{C}{Q} = \frac{0.16}{2} = 0.08$$

$$Q = 2$$

Con un procedimiento similar al eje A por CV, obtenemos $w = 1.49 \text{ T/m}$.

— Cálculo del peso del tablero

$$W = (5)(6)(0.66 + 0.07) + (12 + 10)(0.432)$$

$$W = 31.40 \text{ Ton.}$$

— Peso de las columnas

$$(4.00)(0.216)(4) = 3.456 \text{ Ton.}$$

$$F = \frac{0.16}{2} (31.4) = 2.512 \text{ Ton.}$$

Dividiendo entre 2 marcos

$$\frac{F}{2} = \frac{2.512}{2} = 1.26 \text{ ton.}$$

$F_T =$	1.26 ton.
más columnas	0.08 ton.

	1.34 ton.

Calculamos el vector de empotramiento

$$M_1^6 = \frac{wL^2}{12} = \frac{(1.49)(6)^2}{12} = 4.47 \text{ T.m.}$$

$$M_2^6 = \frac{wL^2}{12} = \frac{(1.49)(6)^2}{12} = 4.47 \text{ T.m.}$$

$$P_e = \begin{bmatrix} 4.47 \\ -4.47 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de el vector de cargas.

$$P_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.34 \end{bmatrix}$$

Ecuación matricial de equilibrio en nudos.

$$K\delta + P_e + P_c = 0$$

$$\begin{vmatrix} 9268.24 & 3984.48 & -423.68 \\ 3984.48 & 9268.24 & -423.68 \\ -423.68 & -423.68 & 368.42 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4.47 \\ -4.47 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.34 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el sistema.

$$\theta_1 = -9.71 \times 10^{-4}$$

$$\theta_2 = 7.20 \times 10^{-4}$$

$$\delta_3 = 3.93 \times 10^{-3}$$

Cálculo de los momentos.

$$M_2^p = M^p + \frac{4EI}{L} \theta_p + \frac{2EI}{L} \theta_q - \frac{6EI}{L^2} \delta_r + \frac{6EI}{L^2} \delta_s \quad (\text{Barra 2.})$$

$$M_2^p = 4.47 + 7968.96(-9.71 \times 10^{-4}) + 3984.48(7.20 \times 10^{-4})$$

$$M_2^p = -0.40 \text{ tm}$$

$$M_2^p = -4.47 + 3984.48(-9.71 \times 10^{-4}) + 7968.96(7.20 \times 10^{-4})$$

$$M_2^p = -2.60 \text{ tm}$$

Cálculo de cortantes.

Barra 1

$$V_r = V_r^p - \frac{6EI}{L^2} \theta_p - \frac{6EI}{L^2} \theta_q + \frac{12EI}{L^3} \delta_r - \frac{12EI}{L^3} \delta_s$$

$$V_r = -423.68(-9.71 \times 10^{-4}) + 184.21(-3.93 \times 10^{-3})$$

$$V_r = 0.312 \text{ ton.}$$

Barra 3

$$V_r = -\frac{6EI}{L^2} \theta_q + \frac{12EI}{L^3} \delta_r$$

$$V_r = -423.68(7.20 \times 10^{-4}) + 184.21(-3.93 \times 10^{-3})$$

$$V_r = -1.028 \text{ ton.}$$

Cálculo de momentos.

Barra 1

$$M_1^p = M_1^q + \frac{4EI}{L} \theta_p + \frac{2EI}{L} \theta_q - \frac{6EI}{L^2} \delta_r + \frac{6EI}{L^2} \delta_s$$

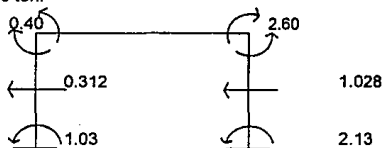
$$M_1^p = 1299.29(-9.71 \times 10^{-4}) - 423.68(-3.93 \times 10^{-3})$$

$$M_1^p = 0.40$$

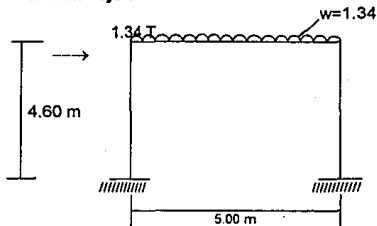
Barra 3

$$M_3^q = 1299.29(7.20 \times 10^{-4}) - 423.68(-3.93 \times 10^{-3})$$

$$M_3^q = 2.60 \text{ ton.}$$



Análisis con sismo eje 1



Con un procedimiento similar al eje 1 por C.V, obtenemos $w = 1.34$

Cálculo del vector de empotramiento.

$$M_1^e = \frac{wL^2}{12} = \frac{1.34(5^2)}{12} = 2.79 \text{ tm}$$

$$M_2^e = \frac{wL^2}{12} = \frac{-1.34(5^2)}{12} = -2.79 \text{ tm}$$

$$P_e = \begin{bmatrix} 2.79 \\ -2.79 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo del vector de cargas

$$P_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.34 \end{bmatrix}$$

Planteando la ec. de equilibrio.

$$K\delta + P_e + P_c = 0$$

$$\begin{bmatrix} 10,862.04 & 4,781.38 & -423.68 \\ 4,781.38 & 10,862.04 & -423.68 \\ -423.68 & -423.68 & 368.42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.79 \\ -2.79 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.34 \end{bmatrix} = 0$$

Resolviendo el sistema.

$$\theta_1 = -5.64 \times 10^{-4}$$

$$\theta_2 = 3.54 \times 10^{-4}$$

$$\delta_3 = 3.88 \times 10^{-3}$$

Cálculo de los momentos.

Barra 2

$$M_2^p = M_p^e + \frac{4EI}{L} \theta_p + \frac{2EI}{L} \theta_q$$

$$M_2^p = 2.79 + 9562.75(-5.64 \times 10^{-4}) + 4781.38(3.54 \times 10^{-4})$$

$$M_2^p = -0.910 \text{ t.m.}$$

$$M_2^q = M_q^e + \frac{4EI}{L} \theta_q + \frac{2EI}{L} \theta_p$$

$$M_2^q = 2.79 + 9562.75(-3.54 \times 10^{-4}) + 4781.38(-5.64 \times 10^{-4})$$

$$M_2^q = -2.10 \text{ t.m.}$$

Barra 1

Momento

$$M_1^p = \frac{4EI}{L} \theta_p - \frac{6EI}{L^2} \delta r$$

$$M_1^p = 1299.29(-5.64 \times 10^{-4}) - 423.68(-3.88 \times 10^{-3})$$

$$M_1^p = 0.91$$

Cortante

$$V_1^p = \frac{-6EI}{L^2} \theta_p + \frac{12EI}{L^3} \delta r$$

$$V_1^p = -423.68(-5.64 \times 10^{-4}) + 184.21(-3.88 \times 10^{-3})$$

$$V_1^p = 0.48$$

Barra 3

Momento

$$M_3^q = \frac{4EI}{L} \theta_q - \frac{6EI}{L^2} \delta r$$

$$M_3^q = 1299.29(3.54 \times 10^{-4}) - 423.68(-3.88 \times 10^{-3})$$

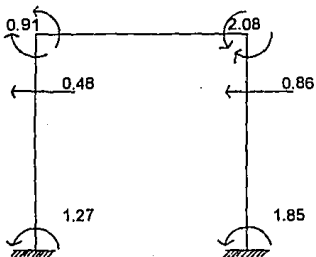
$$M_3^q = 2.10$$

Cortante

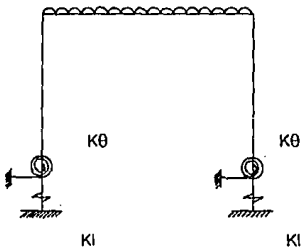
$$V_3^P = \frac{-6EI}{L^2} \theta_p + \frac{12EI}{L^3} \delta_r$$

$$V_3^P = -423.68(3.54 \times 10^{-4}) + 184.21(-3.88 \times 10^{-3})$$

$$V_3^P = -0.86$$



Una vez determinados los elementos mecánicos de los marcos bajo las consideraciones tradicionales, procedemos a analizarlos, haciendo las consideraciones de los giros y los asentamientos en el terreno, para la cual el marco lo idealizaremos de la siguiente forma.



En donde :

$$KI = \frac{P}{\delta}$$

y

$$K\theta = \frac{M}{\theta}$$

- P** = Carga sobre la zapata.
 δ = Asentamiento de la zapata.
M = Momento en la base de la zapata.
 θ = Giro de la zapata con respecto a la horizontal.
KI = Rigidez lineal.

$$\delta = \frac{\alpha (1-\nu^2)}{\pi E} \left[\frac{L \ln \frac{B + \sqrt{L^2 + B^2}}{L}}{L} + \frac{B \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + B^2}}{B}}{B} \right]$$

$$q = \frac{P}{A} = \frac{P}{BL} \quad A=BL$$

$$\Rightarrow P = q BL$$

$$K_L = \frac{P}{\delta} = \frac{q BL}{\frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\frac{L \ln \frac{B/2 + \sqrt{(L/2)^2 + (B/2)^2}}{L/2} + \frac{B \ln \frac{L/2 + \sqrt{(L/2)^2 + (B/2)^2}}{B/2}}{B/2} \right]}$$

$$K_L = \frac{BL \pi E}{4 (1-\nu)} \left[\frac{L \ln \left[\frac{B/2 + \sqrt{(L/2)^2 + (B/2)^2}}{L/2} \right]}{2} + \frac{B \ln \left[\frac{L/2 + \sqrt{(L/2)^2 + (B/2)^2}}{B/2} \right]}{2} \right]^{-1}$$

Para determinar la rigidez angular ($K\theta$) utilizamos la siguiente ec. valida para un cimiento circular.

$$\theta = \frac{3(1-\nu) M}{8 GR^3} \quad -a$$

Deducida para la teoría de la elasticidad para cimiento circular.

$$R = \left[\frac{4I}{\pi} \right]^{1/4} \text{ Radio equivalente} \quad -b$$

I = Momento de inercia del rectángulo

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad \text{Módulo de resistencia al esfuerzo cortante} \quad -c$$

Sustituyendo las ec. a, b, y c en la ecuación de $K\theta$, obtenemos.

$$K\theta = \frac{M}{\theta} = \frac{M}{\frac{3(1-\nu)M}{8} \frac{E}{2(1+\nu)} R^3} = \frac{4ER^3}{3(1-\nu)(1+\nu)}$$

$$K\theta = \frac{4ER^3}{3(1-\nu^2)}$$

E= Módulo de elasticidad del suelo.

El módulo de elasticidad del suelo, depende del nivel de confinamiento (profundidad) al que este sometido en condiciones naturales.

En el congreso de San Francisco, se recomienda utilizar la ec. de Denver para arenas.

$$E = 700 \sqrt{N} \quad T/m^2$$

y para la Ciudad de México se recomienda usar :

$$E = 400 \text{ a } 500 \sqrt{N} \quad T/m^2$$

En nuestro ejemplo tenemos

$$N=20$$

$$E = 400\sqrt{20} = 1788.85 \quad \approx \quad E=1800 \text{ T/m}^2$$

Teniendo una capacidad de carga del terreno de 8 ton/m² y una carga de 8.94 ton/zapata.

Obtenemos zapatas de 1.00x1.20 m.

$$B=1\text{m} \quad \text{y} \quad L=1.20 \text{ m.}$$

Si el valor de $\nu=0.25$

Tenemos los siguientes valores.

Cálculo de R.

$$R = \left[\frac{4I}{\pi} \right]^{1/4}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1)(1.20)^3}{12} = 0.144 \text{ M}^4$$

$$R = \left[\frac{4(0.144)}{\pi} \right]^{1/4} = 0.654 \text{ m}$$

La rigidez angular esta dada por

$$K\theta = \frac{(4)(1800)(0.654)^3}{3(1-0.25^2)} = 716.1 \text{ T.m/rad.}$$

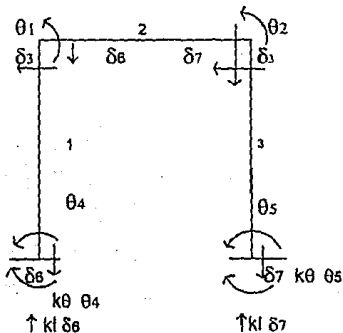
Calculamos la Rigidez Lineal.

$$Kl = \frac{BL}{4} \frac{\pi E}{1-\nu^2} \left[\frac{L \ln}{2} \left[\frac{B/2 + \sqrt{(L/2)^2 + (B/2)^2}}{L/2} \right] \right] \frac{B \ln}{2} \left[\frac{L/2 + \sqrt{(L/2)^2 + (B/2)^2}}{B/2} \right]$$

$$Kl = \frac{(1)(1.20) \pi (1800)}{4(1-0.25^2)} \left[\frac{1.2 \ln}{2} \left[\frac{1/2 + \sqrt{(1.20/2)^2 + (1/2)^2}}{1.2/2} \right] \right] \frac{1 \ln}{2} \left[\frac{1.20/2 + \sqrt{(1.20/2)^2 + (1/2)^2}}{1/2} \right]$$

$$Kl = 1878.92 \text{ N/m}$$

Teniendo los valores anteriores procedemos al análisis estructural del marco.



Barra	θ_p	θ_q	δ_r	δ_s
1	θ_1	θ_4	δ_3	0
2	θ_1	θ_2	δ_6	δ_7
3	θ_2	θ_5	δ_3	0

Si tenemos una matriz de rigideces de la siguiente forma=

$$K_j = \begin{bmatrix} \theta_p & & & \delta_s \\ 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix}$$

Matriz K_j

Para la Barra 1

$$K_1 = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_4 & \delta_3 \\ 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_4 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

Con los valores de $EI = 1,494.18 \text{ T.M}^2$ obtenida en la seccion A del ejemplo, tenemos:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_4 & \delta_3 \\ 1299.29 & 649.64 & -423.68 \\ 649.64 & 1299.29 & -423.68 \\ -423.68 & -423.68 & 184.21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_4 \\ \delta_3 \end{matrix} \quad \text{Barra 1}$$

Y con el valor de $EI = 11,953.44$ para vigas.

$$K_2 = \begin{array}{cccc|c} & \theta_1 & \theta_2 & \delta_6 & \delta_7 & \text{Barra 2} \\ \hline & 7968.96 & 7984.48 & -1992.24 & 1992.24 & \theta_1 \\ & 3984.48 & 7968.96 & -1992.24 & 1992.24 & \theta_2 \\ & -1992.24 & -1992.24 & 664.08 & -664.08 & \delta_6 \\ & 1992.24 & 1992.24 & -664.08 & 664.08 & \delta_7 \end{array}$$

Y para la Barra 3

$$K_3 = \begin{array}{ccc|c} & \theta_2 & \theta_5 & \delta_3 \\ \hline & 1299.29 & 649.64 & -423.68 \\ & 649.64 & 1299.29 & -423.68 \\ & -423.68 & -423.68 & 184.21 \end{array} \begin{array}{l} \theta_2 \\ \theta_5 \\ \delta_3 \end{array}$$

$K = \Sigma k_i = k_1 + k_2 + k_3$

$$K = \begin{array}{cccccc|c} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \delta_6 & \delta_7 & \\ \hline & 9268.25 & 3984.48 & -423.68 & 649.64 & 0 & -1992.24 & 1992.24 & \theta_1 \\ & 3984.48 & 9268.25 & -423.68 & 0 & 649.64 & -1992.24 & 1992.24 & \theta_2 \\ & -423.68 & -423.68 & 368.42 & -423.68 & -423.68 & 0 & 0 & \delta_3 \\ & 649.64 & 0 & -423.68 & 1299.24 & 0 & 0 & 0 & \theta_4 \\ & 0 & 649.64 & -423.68 & 0 & 1299.24 & 0 & 0 & \theta_5 \\ & -1992.24 & -1992.24 & 0 & 0 & 0 & 664.08 & -664.08 & \delta_6 \\ & 1992.24 & 1992.24 & 0 & 0 & 0 & -664.08 & 664.08 & \delta_7 \end{array}$$

Para la barra 2

$$M_1^o = \frac{wL^2}{12} = \frac{(1.54)(6)^2}{12} = 4.62$$

$$M_2^o = -4.62 \text{ tm}$$

$$V_6^2 = -\frac{wL}{2} = -4.62 \text{ ton}$$

$$M_2^p = 0.992$$

De forma similar

$$M_1^p = -0.992$$

Barra 1

$$M_2^p = M_p^0 + \frac{4EI}{L} \theta_p + \frac{2EI}{L} \theta_q - \frac{6EI}{L^2} \delta_r + \frac{6EI}{L^2} \delta_s$$

$$M_2^p = 0 + 1299.28(-9.104 \times 10^{-4}) + 649.64(2.93 \times 10^{-4}) - 423.68(0) + 0$$

$$M_2^p = -0.992$$

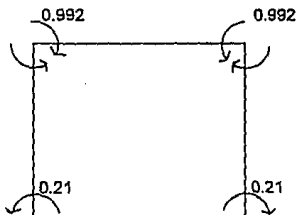
$$M_1^p = k\theta \theta_4 = -0.21 \text{ t.m.}$$

De forma similar en Barra 3

$$M_2^p = 0.942$$

Y

$$M_1^p = k\theta \theta_5 = 0.21$$



Resolviendo el mismo marco pero ahora con sismo tenemos que:

Zapatas de 1.20 x 1.00

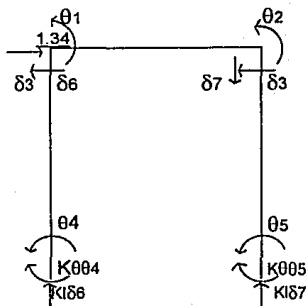
En el sentido de 6 m. de longitud.

$$B = 1.00$$

$$L = 1.20$$

$$EI \text{ col} = 1,494.18$$

El viga 11,953.44
 K θ = 716.10
 KI = 1,878.92



Con los momentos de empotramiento calculados en la sección A

$$M_6^A = 4.47$$

$$V_6^2 = -\frac{wL}{2} = \frac{1.49(6)}{2} = -4.47$$

$$M_7^B = -4.47$$

$$V_7^2 = -\frac{wL}{2} = \frac{1.49(6)}{2} = -4.47$$

Calculamos el vector de cargas y de empotramientos.

$$P_e = \begin{bmatrix} 4.47 \\ -4.47 \\ 0 \\ 0 \\ -4.47 \\ -4.47 \end{bmatrix}$$

$$P_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.34 \\ K_{\theta 04} \\ K_{\theta 05} \\ KI_{06} \\ KI_{07} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema

$$K\delta + P_e + P_c$$

$$\theta_1 = -0.00116$$

$$\theta_2 = 6.01 \times 10^{-4}$$

$$\delta_3 = -0.00788$$

$$\theta_4 = -0.00128$$

$$\theta_5 = -0.00185$$

$$\delta_6 = 0.00149$$

$$\delta_7 = 0.00219$$

Calculamos los momentos con barra 2

$$M_2^P = 4.47 + 7968.96(-0.00116) + 3984.48(6.01 \times 10^{-4}) - 1992.24(0.00149) + 1992.24(0.00219)$$

$$M_2^P = -0.984$$

$$M_2^q = -4.47 + 3984.48(-0.00116) + 7968.96(6.01 \times 10^{-4}) - 1992.24(0.00149) + (1992.24)(0.00219)$$

$$M_2^q = -2.908$$

Cálculo de momento Barra 1

$$M_1^P = K\theta_4 = (716.10)(0.00128) = 0.916$$

Barra 3

$$M_3^P = K\theta_5 = (716.10)(0.00185) = 1.325$$

Cálculo de cortante Barras 1 y 3

$$V_r = V_r^P - \frac{6EI}{L^2} \theta_p - \frac{6EI}{L^2} \theta_q + \frac{12EI}{L^3} \delta_r - \frac{12EI}{L^3} \delta_s$$

Barra 1

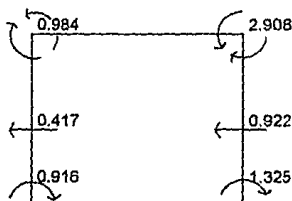
$$V_1^P = -423.68(-0.00116) - 423.68(-0.00128) + 184.21(-0.000788)$$

$$V_1^P = -0.417$$

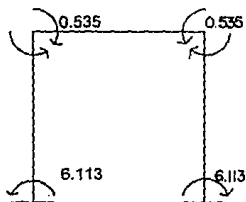
Barra 3

$$V_3^P = 0 - 423.68(6.01 \times 10^{-4}) - 423.68(-0.00185) + 184.21(-0.00788)$$

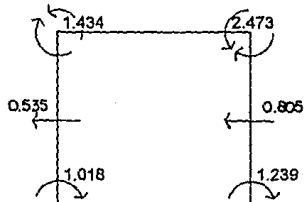
$$V_3^P = -0.922$$



De forma similar sobre el eje I se obtiene lo siguiente:

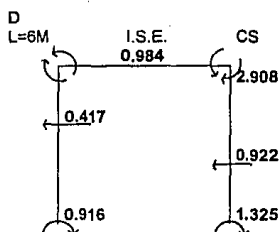
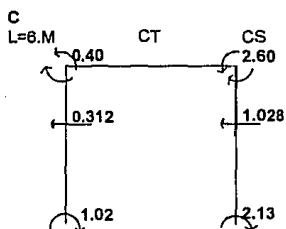
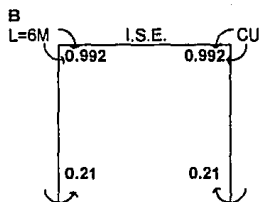
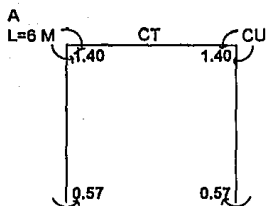


Sin sismo



Con sismo

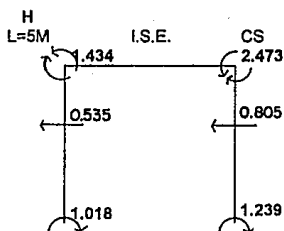
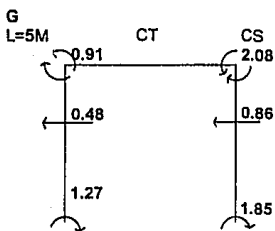
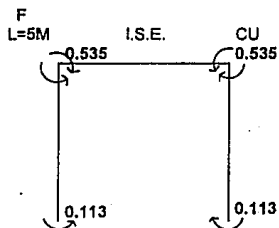
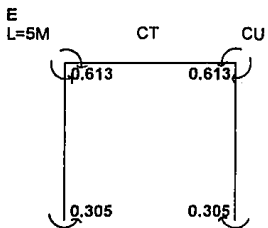
CUADRO COMPARATIVO



NOTA :

CT = Cálculo Tradicional

ISE = Interacción Suelo - Estructura



NOTA :

CT = Cálculo Tradicional

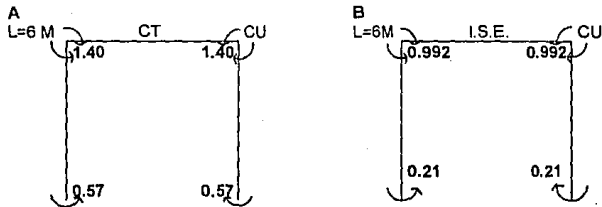
ISE = Interacción Suelo - Estructura

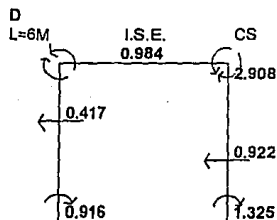
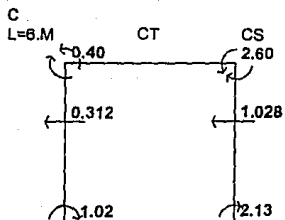
CAPITULO V

APLICACIONES

Como hemos visto este método tiene aplicaciones como las mostradas en el capítulo anterior, en el cual pudimos resolver un mario de sus dos condiciones de carga (carga vertical y con sismo); así la interacción suelo - estructura es factible de aplicarse en este tipo de problemas con el fin de tener un parámetro de comparación con los métodos tradicionalmente utilizados, como se muestra en la siguiente figura.

CUADRO COMPARATIVO



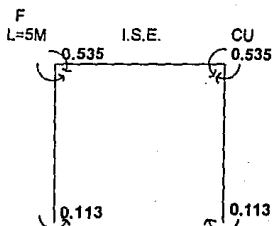
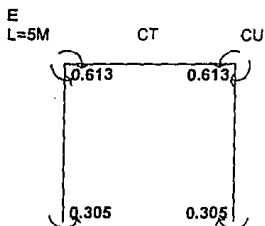


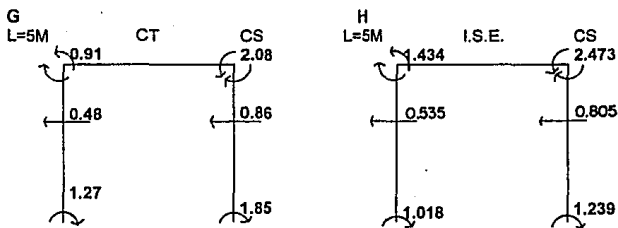
NOTA :

CT = Cálculo Tradicional

ISE = Interacción Suelo - Estructura

CUADRO COMPARATIVO





NOTA :

CT = Cálculo Tradicional

I.S.E. = Interacción Suelo - Estructura

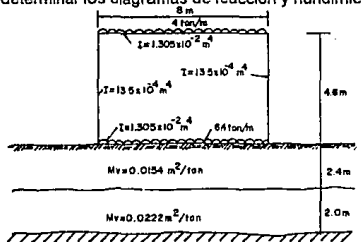
Otra aplicación es la que propone el M.I. Agustín Deméneghi Colina (Deméneghi 1981).

En el ejemplo que resuelve dentro de su publicación en la revista de ingeniería.

En esta se propone una estructura tipo anillo con un ancho de cimentación de 8 m.

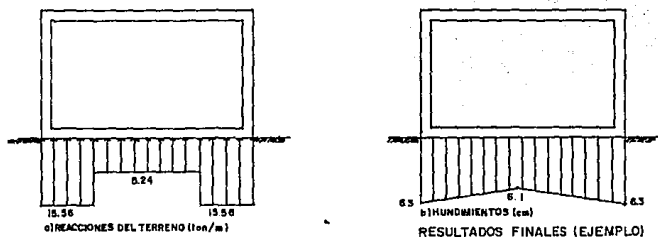
$$E = 1.5811 \times 10^6 \text{ T/M}^2$$

Y en la cual se pide determinar los diagramas de reacción y hundimientos del terreno.



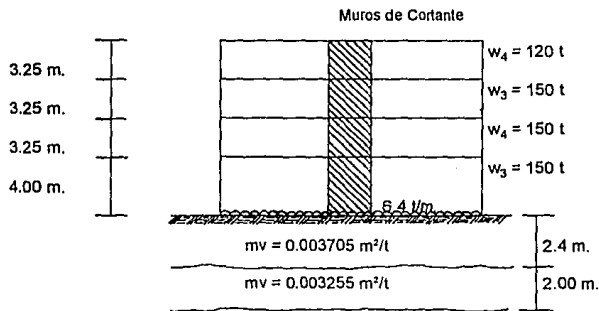
ESTRUCTURA ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES
(EJEMPLO)

Teniendo finalmente los siguientes resultados.



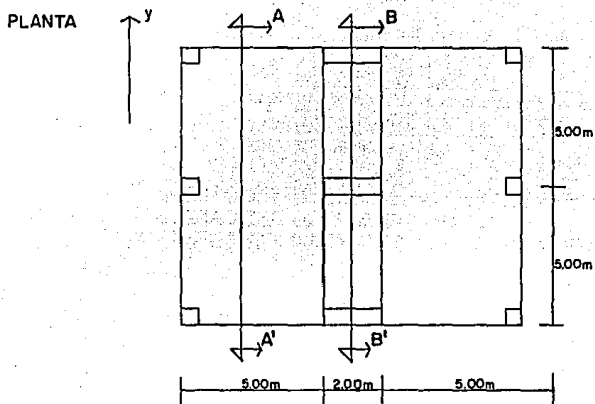
Otra de las aplicaciones que podemos comentar es el ejemplo propuesto por Jesús Arellano Leyva (Arellano 1993).

El cual consiste en determinar los diagramas de reacción y hundimientos del terreno, para la estructura, estratigrafía y propiedades indicadas en la figura siguiente :

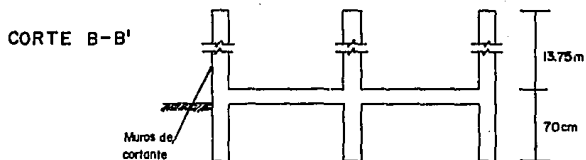
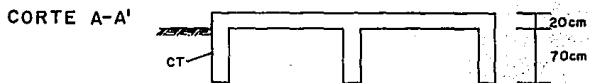


Se trata de una estructura de concreto de 4 niveles, cuyos pesos por entrepisos (W_i), ya han sido previamente calculados, integrada por muros de concreto, ligados a la misma y que contribuyen a la capacidad de resistir, las fuerzas laterales en ella, estructura del tipo A, ubicada en la zona 1 de la Ciudad de México.

Se desplanta sobre una losa de cimentación de 20 cm. espesor, apoyada en contratraveses desplantados a 70 cm. de profundidad.

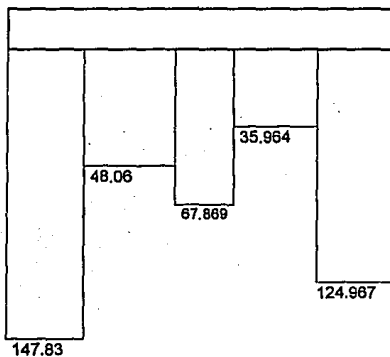


Sección de las columnas 30x 30 cm.
 Sección de las traves 30x 60 cm.
 Sección de los muros 30x200 cm.
 $F'c$ concreto = 250 kg/cm²

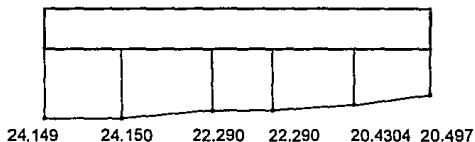


Los resultados se muestran esquemáticamente;

a) Reacciones del terreno (t/m).



b) desplazamientos



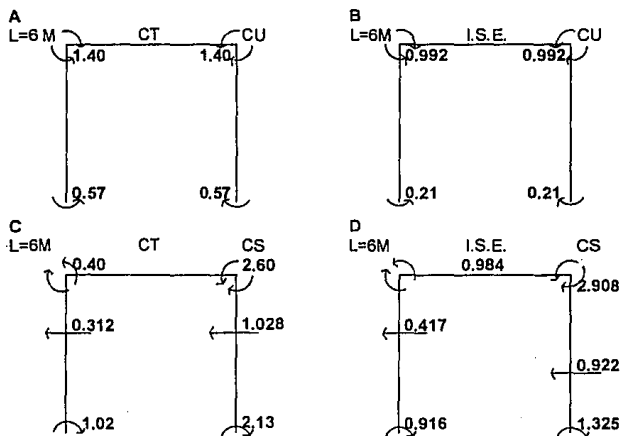
Es claramente perceptible, el desplazamiento diferencial obtenido, considerando la interacción suelo-viga flotante sometida a muros de cortante en nuestro análisis.

Estas son algunas de las aplicaciones posibles, las cuales como podemos ver son variadas, lo cual nos puede dar una idea de la diversidad de opciones que se pueden manejar con estas teorías.

CAPITULO VI
CONCLUSIONES

Tomando como base lo expuesto en el Capítulo III y analizando el cuadro No. (R-1), podemos destacar lo siguiente :

CUADRO COMPARATIVO



NOTA :

CT = Cálculo Tradicional

ISE = Interacción Suelo - Estructura

BIBLIOGRAFIA

**Reglamento de Construcción del Departamento del Distrito Federal.
Noviembre de 1987.**

**Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones, para Diseño por Sismo.
Gaceta Oficial del D.D.F. Septiembre de 1987.**

**XV Reunión Nacional de Mecánica de Suelos.
Inovaciones en Geotecnia, San Luis Potosí, S.L.P.
Interacción Suelo - Viga Flotante Pág. 19 a 33
Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos A.C.**

**Temas de Cimentaciones.
M. I. Agustín Deméneghi Colina.
Mayo 1990.**

**Apuntes de la materia de Cimentaciones.
M.I. Agustín Deméneghi Colina
Facultad de Ingeniería U.N.A.M.
Semestre 90-II**

**Revista de Ingeniería.
Facultad de Ingeniería U.N.A.M.
M.I. Agustín Deméneghi Colina.
Interacción suelo - Estructura.
Abril 1981**

**Foundation Engineering for Difficult Subsoild Conditions.
D.I. Leonardo Zeevaert.
Van Nostrand Reinhold . New York 1983.**

**Mecánica de Suelos
Juárez Badillo y Rico, Tomo I, Capitulo 10
Editorial Limusa 1976.**

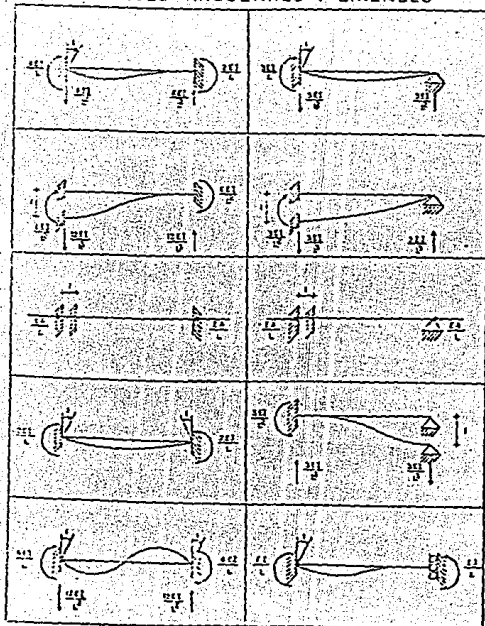
**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

- A) Si analizamos los subcuadros A, B, E y F, podemos observar que en todos los casos las reacciones son menores en el caso de la interacción suelo - estructura que en los métodos tradicionales.
- B) Si se comparan los subcuadros C Y D, G y H (casos con sismos), se pueden observar que las reacciones en las zapatas disminuyen y en las trabes aumentan, esto junto con lo expuesto en el inciso A, nos muestra que bajo estas circunstancias las reacciones varían notablemente.
- C) De lo anterior podemos concluir que la utilización de este método nos lleva a una mayor seguridad en el análisis, no por que los métodos tradicionales no sean confiables, si no por que para el diseño se cuenta con un número mayor de variantes.
- D) Por lo expuesto en el inciso "C" podemos concluir que junto con la mayor certidumbre en el comportamiento de la estructura se pueden reducir factores de seguridad al tener contempladas mayores formas de comportamiento en la estructura.
- E) Al analizar una estructura por el método de la interacción suelo - estructura, y este complementario con un análisis tradicional de la misma, nos proporciona en los puntos críticos de la estructura valores en los esfuerzos actuantes con distintas magnitudes, resultado de el estudio de dos comportamientos distintos de la estructura, bajo las mismas condiciones de carga.

El uso de estos dos valores en conjunto, nos puede encaminar en el momento de hacer el diseño estructural a una mayor confiabilidad y certidumbre en los valores utilizados para cada punto de la estructura y de esta forma tenía valores mas finos y precisos para cada caso.

- F) De lo expuesto anteriormente y de acuerdo a los resultados obtenidos podemos concluir finalmente que :
- El empleo de métodos como el aquí expuesto nos puede llevar a reducir factores de seguridad en lo que se refiere a la magnitud en las condiciones de carga de la estructura.
 - El estudio en conjunto de la estructura y el suelo de cimentación nos presenta un análisis en el cual la información de las dos partes nos conduce a una redistribución de esfuerzos tanto para la estructura como para la cimentación y el suelo, lo que nos permite contemplar todo como un conjunto y no como partes independientes entre sí, lo cual nos da una visión mas próxima a las condiciones de trabajo en la realidad.

RIGIDECES ANGULARES Y LINEALES



MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

