19
20

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEMOSTRACION DE LAS FORMULAS DE PLUCKER UTILIZANDO EL CONCEPTO DE LUGAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

DANIEL MAISNER BUSH

MEXICO, D.F. FEBRERO 1994

Agradecimientos y dedicatoria.

Este trabajo es el final de mi inicio en ese duro mundo, pero maravilloso, que son la matemáticas agadesco de manera general a todos los que han contibuído directa o indirectamente a adentrarme en éste hermoso paraje. Agradezco a Silvia y Marcelino el haberme dado el empujón inicial (léase, si se quiere el haberme grillado) hacia las matemáticas, al Dr Barajas, que sin él saberlo, contribuyó de manera definitiva en mi desarrollo a lo largo de la carrera, y a Rodolfo, León, don Emilio, Laura y Ernesto por su ayuda para realizar el trabajo de tesis. También agradezco a la facultad de ciencias y en específico al departamento de matemáticas por su ayuda para la realización de mi trabajo. Finalmente debo agradecer a todos los que soportaron mis malos humortes, mis distracciones, mis piruetas al resolver un problema y demás vicios de matemático que he adquirido en especial a mi familia y a Penélope.

A lo largo de mi estancia en la UNAM he aprendido a quererla y defenderla, he vivido intensamente ese inmenso aprendizaje que va mucho mas de las aulas, que se extiende por pasillos, cafeterias,asambleas manifestaciones y cineclubs. Que está presente en los cuates, compañeros universitarios maestros y alumnos y en ese calor humano incuantificable que se vive y que ojalá se siga viviendo a todo lol largo del campus.Con el deseo que siga siendo así nuestra universidad la dedico este trabajo.

Indice

Introducción:

El objetivo del presente trabajo es dar una demostración de dos fórmulas de Plücker que nos permiten obtener información global sobre las curvas planas utilizando como herramienta las series formales y especificamente el concepto de *lugar* .

Las fórmulas de Plücker que se demostrarán permiten calcular la *clase* y el número de puntos de *inflexión* de una curva. Tanto la *clase* como el número de puntos de *inflexión* son conceptos con los que se ha trabajado indirectamente sobre todo en los cursos de cálculo y geometría. A continucaión daremos una idea del problema, para lo cual daremos una definición provisional de dichos conceptos.

Definición provisional:

a) *La clase de una curva esta dada por el número de rectas tangentes a la curva que pasan por cualquier punto fuera de ésta.*

b) *Aquellos puntos donde se anula el determinante de la segunda derivada les llamaremos puntos de inflexión.*

Nuestra definición provisional sólo funciona de manera correcta en el caso en que nuestras curvas sean irreducibles y no contengan puntos singulares. De hecho en este caso calcular la clase y el número de puntos de inflexión es relativamente sencillo.

Si tenemos una curva lisa e irreducible definida como el conjunto de ceros de un polinomio homogeneo F entonces calcular la clase se reduce a contar el número de puntos de intersección de cualquier recta tangente, que pase por un punto p, con la curva.

En los párrafos a continuación consideramos cierto el teorema de Bezout, que dice, que dadas dos curvas definidas como los ceros de polinomiuos p de grado n y q de grado m respectivamente, el número de intersección de ambas curvas es mn

Cualquier recta tangente tiene una ecuación de la forma $T: \ < \nabla F, p >= 0$ por lo tanto si el grado de F es n ,el grado de T es n-1 y como la curva es lisa el número de intersecciones de F y T es exactamente n (n-1) y el problema se termina.

Por ejemplo podemos pensar en una circunferencia, su polinomio es de grado dos y por lo tanto su clase es dos. Lo cual es un resulatdo conocido de geometría euclidiana e inclusive sabemos como trazar las tangentes con regla y compas.

Para analizar el caso de los puntos de inflexión observemos que la matriz de la segunda derivada es de la forma:

$$\begin{pmatrix} F_{00} & F_{10} & F_{20} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} \\ F_{20} & F_{12} & F_{22} \end{pmatrix}$$

y como cada parcial tiene grado n-2 y cada sumando del determinante es producto de tres parciales, concluimos que el grado del determinante es 3(n-2) y por lo tanto el número de puntos de inflexión es 3n(n-2).

Como se puede observar el problema en realidad surge cuando admitimos singularidades en la curva.

Al admitir puntos singulares, admitimos puntos que al tomar la intersección de las curvas los contamos como varios y por lo tanto tanto la *clase* como el número de puntos de *inflexión* es menor.

El trabajo consiste por una parte en redefinir estos conceptos de tal forma que puedan calcularse en curvas singulares y por otro en dar esplicitamente los fórmulas que permitan dicho cálculo. Primeramente daremos formulas generales para curvas con cualquier tipo de singularidades y después fórmulas concretas para el caso en que tengamos nodos o cúspides simples.

Se desprende de los párrafos anteriores que el trabajo, es en realidad, un estudio de algunos aspectos de las singularidades de una curva, en específico nos interesa dar una definición adecuada de tangencia y para esto necesitamos una buena definición de intersección de curvas de tal manera que valga el teorema de Bezout.

Vamos a dar una definición adecuada de intersección de curvas en el sentido de que si tenemos un punto múltiple en la intersección de las curva, punto que en cierto lo estamos contando varias veces en la curva, entonces contemos las intersecciones en ese punto tantas veces como si tuvieramos una intersección por cada vez que contemos el punto en cada curva, es decir si en una curva lo contamos m veces y en otra n veces entonces contamos mn intersecciones en él.

Para definir tangente utilizaremos el hecho de que si en un punto de una curva tomamos todas las rectas por él, entonces la multiplicidad de la intersección de la curva y las rectas en ese punto es siempre el mismo excepto en las tangentes donde es mayor; intuitivamente podemos pensar que la tangente es el resultado del límite de comprimir varios puntos de intersección en uno y por lo tanto en este hay mas intersecciones. Entonces podemos definir las tangentes a un punto como las unicas rectas que intersectan en este con multiplicidad mayor que la multiplicidad con que corta una recta cualquiera.

Con esta idea de tangencia podemos redefinir la clase. Llamemos la clase de una recta tangente a la diferencia de la multiplicidad de intersección de ésta y la de una recta cualquiera, entonces podemos redefinir la clase, de una curva, como la suma de las clases de cada tangente. Con la salvedad de que si una recta tangente es múltiple sumamos su clase tantas veces como su multiplicidad. Una idea de porque esta nueva definición generaliza a la anterior es demostrar que en cualquier punto no singular que no sea de inflexión la clase es uno (es el límite de dos puntos que se juntan) y en cada punto sólo existe una tangente, por lo tanto en una curva lisa debe haber n (n-1) tangentes distintas de clase uno y por lo tanto la clase de la curva es n (n-1) . Podemos hacer algo semejante con los puntos de inflexión redefiniendo punto de inflexión como un punto simple en que la clase de su tangente es mayor que dos.

Nuestra definición de intersección de curvas, se basa principalmente, en generalizar el concepto de desarrollo, alrededor de un punto, en serie de potencias de variable compleja. Si consideramos el origen de coordenadas la idea es escencialmente la siguiente: la multiplicidad del origen (el número de veces que corta a una recta no tangente) esta dado por el orden del cero del desarrollo en serie alrededor de él y por lo tanto se puede definir intersección de curvas como la suma de los productos de los ordenes de los ceros de los puntos de intersección.

El problema es un poco mas complejo porque puede haber puntos donde el desarrollo no sea único, en cuyo caso debemos sumar los ordenes, pero para esto debemos precisar que entendemos por tener dos desarrollos distintos. Para esto definiremos una relación de equivalencia entre los distintos desarrollos alrededor de un punto y a las clases les llamaremos *lugar,* escencialmente la clase de equivalencia está dada cuando dados dos desarrollos uno se puede obtener del otro con un cambio de variable a precisar. .

Para poder desarrollar el concepto de *lugar* definiremos formalmente serie de potencias con coeficientes en un campo y describiremos sus propiedades algebraicas que son en muchos casos generalizaciones de las propieddaes básicas de los polinomios. En especial nos interesa demostrar que todo polinomio puede factorizarse como un producto de series formales.

La tesis está dividida en dos partes, la primera que incluye a los capítulos uno y dos, y consta del desarrollo de la herramienta utilizada, desde la definición de serie formal, hasta la obtención de algunos resultados importantes del concepto de lugar. La segunda parte, integra los capitulos tres y cuatro, comienza con la definición de tangencia y termina enunciando y demostrando las fórmulas de Plücker.

A lo largo de la tesis trabajaremos en un campo arbitrario K algebraicamente cerrado y de característica cero, y en en el espacio proyectivo $P^2(K)$. Pensaremos en curvas irreducibles dadas como el conjunto de ceros de un polinomio homogeneo o en ocasiones pensaremos en alguna representación afín de la misma curva.

Capítulo 1 Series formales. Resultados básicos

En este capítulo describiremos la teoría de las herramientas básicas que se usarán a lo largo del trabajo se trata de generalizar algunos de los conceptos básicos de los polinomios y de las funciones analiticas.

Sección 1: K[[x]] y K((x))

Para nuestro trabajo consideraremos series formales de la forma $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ con $a_i\in K$, un campo algebraicamente cerrado de característica cero.

Definición: Dadas dos series formales $f=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i$ y $g=\sum_{i=1}^{\infty}b_ix^i$, definimos las siguientes operaciones:

a) $f+g=\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i)x^i$

b) $f\cdot g=\sum_{i=m+n}a_m b_n x^i=\sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{j}a_ib_{j-i})x^j$

c) si $\alpha\in K$ definimos $\alpha f=\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha a_i)x^i$.

Observemos que las operaciones de suma y producto antes definidas, no son mas que una generalización de las operaciones usuales de polinomios o dicho de otra manera, un polinomio no es mas que una serie formal de las que acabamos de definir ,en donde casi todos los sumandos son cero. En general, suprimiremos el punto para denotar un producto entre dos series formales.
Al conjunto de series formales sobre un campo K lo denotaremos $K[[x]]$

Teorema: *$K[[x]]$ con las operaciones antes definidas es un álgebra.*

Demostración: Ver que $K[[x]]$ es un grupo abeliano bajo la suma se reduce a que K lo es. Simplemente tomando como cero a $\sum_{i=0}^{\infty}0x^i$ y si $f=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$. vemos que tiene inverso dado por $g = \sum_{i=0}^{\infty} -a_i x^i$. Es claro también, por la definición del producto por escalares, que $K[[x]]$ es un espacio vectorial sobre K.

Sean $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ y $h = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$; entonces:

$$(fg)h = \sum_{k=0}^{\infty} x^j \sum_{i=0}^{k} (\sum_{l=0}^{i} a_l b_{i-l}) c_{k-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{k} \sum_{l=0}^{i} a_l b_{j-l} c_{k-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{l=0}^{j} a_l \sum_{i=0}^{k} b_{i-l} c_{k-i} = f(gh),$$

lo que muestra la asociatividad del producto. Finalmente las propiedades distributivas se siguen inmediatamente de las definiciones. ■

Observemos, que al igual que en los polinomios, podemos considerar a los escalares también como series formales y que la definición de producto por escalares coincide con la multiplicación, considerándolos como series finitas.

Definición: *Sea* $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. *Definimos el orden de* f *como la función*:

$$O : K[[x]] \to N \;\; dada\, por\, O(f) = \begin{cases} i & f \neq 0 \text{ donde } i = \min\{j : a_j \neq 0\} \\ \infty & f = 0 \end{cases}$$

Considerando para cada i, $\infty + i = \infty$ y $\infty i = \infty$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema: *El orden de* f *es una valuación, es decir*:

a) $O(fg) = O(f) + O(g)$

b) $O(f+g) \geq \min \{O(f), O(g)\}$.

Demostración: Si f ó g son cero, los resultados se siguen de la definición de las operaciones con ∞.

Sean $f=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ y $g=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ con $m=O(f)$ y $n=O(g)$; entonces podemos escribir $fg=\sum_{l=i+j} a_i b_j x^l$ con $i\geq m$ y $j\geq n$ y por lo tanto $i+j\geq m+n$, de donde concluimos que $O(fg)\geq m+n$ .Dado que la otra desigualdad es clara, tenemos el resultado de la parte **a)**.
Si $m<n$ entonces:

$$O(f+g)=O(a_m x^m+\cdots+a_n+b_n+\cdots)=m=O(f)=\min\{O(f),O(g)\}$$

Si $m=n$ entonces:

$$O(f+g)=O((a_m+b_n)x^m+\cdots)\geq m=\min\{O(f),O(g)\}$$

y de hecho la igualdad se da siempre que $a_m\neq -b_m$. ∎

Corolario: $K[[x]]$ *es un dominio entero.*

Demostración: Ya demostramos que K[[x]] es un anillo, claramente conmutativo, por lo tanto basta demostar que no tiene divisores de cero. Si f y g son distintos de cero entonces existen i y j tales que $i=O(f)$ y $j=O(g)$ y por lo tanto $O(fg)=i+j$,de donde concluimos que el coeficiente i+j-ésimo del producto es distinto de cero y por tanto el producto también lo es.
Denotaremos, al campo de cocientes de K[[x]], como K((x)).
Para extender el concepto de orden de K[[x]] a K((x)), demostremos los siguientes resultados.

Lema: Son equivalentes:

a) $f=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *es unidad en* K[[x]]

b) a_0 *es unidad en* K

c) $O(f)=0$

Demostración:
$a\Rightarrow b$) Es claro.

$b\Rightarrow a$) Vamos a construir el inverso de f . Si definimos $g=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ tenemos:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right)=1 \Leftrightarrow a_0 b_0=1 \text{ y } \forall_{n\geq 1}\, a_0 b_n+\cdots+a_n b_0=0.$$

Por lo tanto para que g sea inverso de f es suficiente tener las siguientes igualdades:

$$b_0=\tfrac{1}{a_0} \text{ y } b_n=-\tfrac{a_1 b_{n-1}+\ldots+a_n b_0}{a_0}$$

$c \Leftrightarrow b)$ Se sigue inmediatamente de la definición de orden. ∎

Teorema: *Si* $f \neq 0 \in K((x))$ *entonces existe un único entero* k *tal, que* $f(x) = x^k g$ *con* g *unidad de* $K[[x]]$.

Demostración: Si $f \in K((x))$ entonces $f = \frac{e}{h}$ con $e, h \in K[[x]]$ y $h \neq 0$. Sea $O(h) = i$, entonces:

$$b_i \neq 0 \text{ y } h(x) = \sum_{l=i}^{\infty} b_l x^l = x^i \sum_{l=i}^{\infty} b_l x^{l-i} = x^i q(x) \text{ con } q(x) \in K[[x]].$$

Como $b_i \neq 0$, tenemos que $O(q) = 0$ y, por el lema $q(x)$ es una unidad. por consiguiente existe $p(x)$ tal que $p(x)q(x) = 1$ y si $j = O(e)$ entonces:

$$f(x) = \frac{e}{h} = \frac{\sum_{l=j}^{\infty} c_l x^l}{x^i q(x)} \, \frac{p(x)}{p(x)} = \frac{x^j p(x) \sum_{l=j}^{\infty} c_l x^{l-j}}{x^i} = x^{j-i} p(x) \sum_{l=j}^{\infty} c_l x^{l-j} = x^k g,$$

donde $O(g) = O(p) + O(c_0 + \cdots) = 0 + 0$ por lo tanto g es unidad.
con el fin de demostrar la unicidad supongamos que $f = x^k g = x^l h$ entonces $k + 0 = O(f) = l + 0$ de donde concluimos que l = k y por lo tanto para que se de la igualdad es también necesario que g = h ∎

Definición: *Dada* $f \neq 0 \in K((x))$, *al entero* k *del teorema anterior le llamaremos el orden de* f.

Es claro que esta definición generaliza nuestra definición anterior.
En el trabajo que se va a desarrollar nos proponemos estudiar curvas vistas como los ceros de polinomios homogeneos en tres variables o deshomogeneizdos en dos variables, por lo cuál nos interesa estudiar como generalizar nuestro concepto de serie formal para que nos sirva en dos o mas variables.

Para poder generalizar a dos variables, debemos primero definir las series formales con exponentes racionales y en el siguente capítulo estudiaremos el concepto de parametrización.

Podemos construír series formales en $x^{\frac{1}{n}}$ de manera análoga a las series formales en x, es decir series de la forma:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^i$$

Para darle sentido a estas nuevas series formales definamos las siguentes operaciones con el simbolo formal $x^{\frac{1}{n}}$.

$$x^{\frac{1}{1}} = x, (x^{\frac{1}{rn}})^r = x^{\frac{1}{n}} \text{ y } x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$$

Observemos que estas operaciones son esencialmente las leyes usuales de los exponentes y servirán para que estos simbolos tengan propiedades análogas, a definir $x^{\frac{1}{n}}$ como una solución a una ecuación de la forma $y^n - x = 0$.
De manera análoga a las series de K[[x]], tenemos la siguiente definición.

Definición: *Dadas dos series formales* $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x^{\frac{1}{n}})^i$ y $\sum_{i=0}^{\infty} b_i(x^{\frac{1}{n}})^i$ *definimos las siguientes operaciones:*

a) $f+g = \sum_{i=0}^{\infty}(a_i+b_i)(x^{\frac{1}{n}})^i$

b) $f \cdot g = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}(x^{\frac{1}{n}})^i$

c) Para cada $\alpha \in K$ definimos $\alpha f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha a_i(x^{\frac{1}{n}})^i$.

De manera totalmente análoga a lo expuesto anteriormente se demuestra que las series en $x^{\frac{1}{n}}$ forman un álgebra sobre K con las tres operaciones y un dominio entero con la suma y el producto al cuál denotaremos K[[$x^{\frac{1}{n}}$]]. Al campo de cocientes de K[[$x^{\frac{1}{n}}$]] lo denotaremos K(($x^{\frac{1}{n}}$)).

Sección 2: K{{x}}

En la sección anterior definimos a las series formales y sus cocientes en cualquier potencia racional de x, en esta sección estudiaremos un campo que contiene a todos los anteriores, con la caracteristica especial de ser algebraicamente cerrado. Esta última propiedad será fundamental en el resto de la tesis.

Claramente la familia $F = \left\{K((x^{\frac{1}{n}}))\right\}_{n=1}^{\infty}$, está parcialmente ordenada, con el orden dado por la contención como conjuntos, más aún, tenemos el siguiente lema:

Lema: *La pareja* $\{F, \alpha_{ij}\}$ *forma un sistema dirigido en el que los morfismos*

$\alpha_{ij} : K((x^{\frac{1}{i}})) \to K((x^{\frac{1}{j}}))$ *estan dados por la inclusión cuando* j *divide a* i

Demostración: Como para toda r tenemos $(x^{\frac{1}{nr}})^r = x^{\frac{1}{n}}$, entonces $K((x^{\frac{1}{n}})) \subseteq K((x^{\frac{1}{nr}}))$ y por lo tanto dados m y n cualesquiera, tenemos $K((x^{\frac{1}{n}}))$ y $K((x^{\frac{1}{m}})) \subseteq K((x^{\frac{1}{mn}}))$, lo cual demuestra que F es un conjunto dirigido.
Se verifica de inmediato que α_{ii} es la identidad y que $\alpha_{ik} = \alpha_{ij} \circ \alpha_{jk}$, lo cuál termina la demostración. ■
Utilizando la propiedad universal del limite directo se sigue inmediatamente de haber escogido como nuestro orden la contención, la siguiente igualdad:

$$\varinjlim\left\{K((x^{\frac{1}{n}}))\right\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} K((x^{\frac{1}{i}})).$$

Definición : Denotaremos por $K\{\{x\}\}$ al $\varinjlim\left\{K((x^{\frac{1}{n}}))\right\}$.

Para evitar confuciones en adelante ,denotaremos con letras testadas, a los elementos de K{{x}}.
El resto de la sección lo dedicaremos a demostrar el siguiente teorema que es la base de gran parte de las demostraciones posteriores en el trabajo.

Teorema: $K\{\{x\}\}$ *es algebraicamente cerrado.*

Demostración: Para demostrar el teorema, daremos un algoritmo que nos permitirá encontrar una raíz para cada $f \in K\{\{x\}\}[y]$.
Para efectuar la demostración seguiremos cuatro pasos . El primer paso es un esbozo de la forma en que se construye la raíz, hecho en base a observar las condiciones que debe cumplir, en el segundo, enunciaremos el algoritmo que nos permite encontrar los coeficientes para cada término de la raíz y, finalmente en los pasos tres y cuatro demostraremos que el algoritmo funciona de manera correcta.

Paso 1: Para demostrar que $K\{\{x\}\}$ es algebraicamente cerrado, consideraremos un polinomio $f \in K\{\{x\}\}[y]$ y construiremos $\bar{y} \in K\{\{x\}\}$ tal que $f(\bar{y}) = 0$.
sea:

$$f(y) = \overline{a_0} + \overline{a_1}y + \cdots + \overline{a_n}y^n$$

si $\overline{a_0} = 0$ entonces $\bar{y} \equiv 0$ es una solución se términa la construcción . Consideremos entonces el caso $\overline{a_0} \neq 0$ y supongamos que tenemos una raíz:

$$\bar{y} = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_1+\gamma_2} + \cdots \text{ con } \gamma_i > 0 \text{ para } i \geq 2 .$$

Nuestro problema se reduce entonces a hallar los coeficientes c_i y los exponentes γ_i; para esto, definamos

$$\overline{y_1} = c_2 x^{\gamma_2} + c_3 x^{\gamma_2+\gamma_3} + \cdots;$$

tenemos entonces $\bar{y} = x^{\gamma_1}(c_1 + \overline{y_1})$ y por lo tanto

$$f(\bar{y}) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} x^{i\gamma_1}(c_1 + \overline{y_1})^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} c_1^i x^{i\gamma_1} + g(\overline{y_1})$$

Como queremos que $f(\bar{y}) = 0 + 0x + \cdots$, necesitamos que todos los coeficientes sean iguales a cero. En particular consideraremos los términos de menor orden en el desarrollo antes descrito de $f(\bar{y})$.

Puesto que todos los términos en g tienen como factor a $\overline{a_i} x^{i\gamma_1+\gamma_2}$, para algún i, todo término en g tiene orden mayor que algún término de $f(\bar{y})$ que no este en g .

Por lo tanto, para hallar los términos de menor grado basta considerar:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} x^{i\gamma_1} c_1^i .$$

Si $\alpha_i = O(\overline{a_i})$, entonces nos interesa encontrar los términos para los cuáles $\alpha_i + i\gamma_1$ tiene un valor mínimo. En el caso de que el mínimo se alcance en una única i, tendríamos que ese término debería ser igual a cero. Por lo tanto podemos suponer que existe $m \geq 2$ tal que para los índices $\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ tenemos:

1) $\alpha_{i_j} + i_j\gamma_1 = \alpha_{i_k} + i_k\gamma_1 \ \forall_{j,k}$ con $j,k \in \{1, \cdots, m\}$ y

2) $\alpha_{i_j} + i_j\gamma_1 < \alpha_{i_l} + i_l\gamma_1$ si $j \in \{1, \cdots, m\}$ y $k \notin \{1, \cdots, m\}$

Como para cada exponente la suma de los coeficientes debe de ser igual a cero, tenemos entonces

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{a_{i_j}} c_1^{i_j} = 0$$

lo cuál nos determina un polinomio en c_1 y por lo tanto tenemos dos ecuaciones, una en γ_1 y otra en c_1 , lo cuál nos permite expresar el primer término de $\bar{y}$.

Observemos que si sustituimos los valores obtenidos de c_1 y γ_1 en $f(\bar{y})$, obtenemos

$$f(\bar{y}) = f(x^{\gamma_1}(c_1 + \overline{y_1})) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} c_1^i x^{i\gamma_1} + g(\overline{y_1}) = \sum_{i=0}^{n} \overline{b_i} \overline{y_1}^i$$

un polinomio del cual debe ser raíz $\overline{y_1}$ y en el cual podemos reiniciar el proceso.

Para obtener cierta comodidad en los cálculos reiniciaremos el proceso en:

$$f_1(\overline{y_1}) = x^{-\beta} f(x^{\gamma_1}(c_1 + y_1)) \text{ con } \beta = \alpha_{i_j} + i_j\gamma_1 \text{ y } 1 \leq i_j \leq m$$

que claramente es cero si $f(\bar{y})$ lo es. Inductivamente podemos encontrar $\bar{y}$.

Paso 2: En este paso vamos a describir un algoritmo que nos permite encontrar los exponentes mínimos de nuestro polinomio y poder así encontrar los valores de γ_1 y c_1 .Para esto, utilizaremos el llamado polígono de Newton.

Observemos que el problema central, una vez definido w, se reduce a encontrar los monomios en w que tengan exponente mínimo para después plantear las ecuaciones cuyas soluciones sean c_1 y γ_1

Observemos que la forma que tienen nuestros exponentes $\alpha_i + i\gamma_1$ corresponde a la ecuación de una recta en el plano $\alpha \times i$, con una pendiente $-\frac{1}{\gamma_1}$. Mas aún, para cada i,j ,si consideramos los puntos $p_1 = (\alpha_i, i)$ y $p_2 = (\alpha_j, j)$ y a L como la recta que pasa por p_1 con pendiente $-\frac{1}{\gamma_1}$ entonces:

$$\alpha_i + i\gamma_1 = \alpha_j + j\gamma_1 \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{\alpha_i - \alpha_j}{j-i} \Leftrightarrow p_2 \in L$$

Como además queremos que el exponente sea mínimo, es necesario que no existan puntos entre el segmento de recta y el origen.

Realicemos entonces la siguiente construcción: asignémosle a cada monomio de w un punto (α_i, i) y tracemos las rectas entre los puntos de tal manera de que formen un polígono convexo en el que todo punto sea un vértice del polígono, o esté en la región delimitada por el polígono, opuesta al origen de coordenadas.

Finalmente para encontrar c_1 y γ_1 , simplemente elegimos un segmento de recta, y ya que todos los puntos sobre el segmento corresponden a monomios de exponente mínimo e igual entre si, resolvemos en estos monomios las ecuaciones para c_1 y γ_1 .

Observemos además que dado que $\gamma_n > 0$, para $n \geq 2$ es necesario a partir del segundo paso considerar las rectas de pendiente negativa.

Observemos también que la solución para γ_i no necesariamente es única, en realidad, tenemos una para cada segmento de recta en el polígono, lo cuál era de esperarse, dado que si nuestro polinomio es de grado n, puede tener hasta n raices.(ver el diagrama de la siguiente página).

En los pasos siguientes demostraremos algunas de las características del algoritmo que garantizan su funcionamiento.

Paso 3: En este paso demostraremos que a partir de f_1 siempre existen segmentos con pendiente negativa en el polígono de Newton.

Para demostrar lo anterior sea L el segmento de recta electo en el polígono en la primera substitución y sean $p_{i_1}, \cdots, p_{i_k}$ los puntos sobre L, de tal forma que $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$ ..

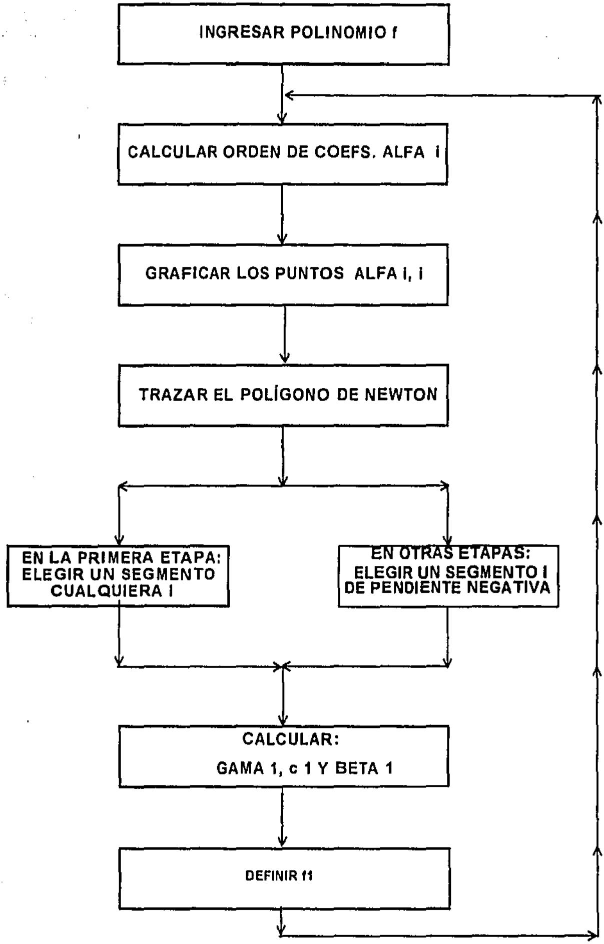
para simplificar la escritura en lo que sigue consideraremos las siguientes igualdades:

$$\gamma_1 = \gamma \ , c_1 = c, i_1 = h \text{ y } i_k = s.$$

Como K{{x}} es un conjunto dirigido, existe m mínimo tal que :

$$\overline{a_{i_j}} \in K\left[\left[x^{\frac{1}{m}}\right]\right] \forall_j = \{1, \cdots, k\},$$

es decir, m es un común denominador para todas las α_{i_j} correspondientes, de hecho m es


INGRESAR POLINOMIO f
CALCULAR ORDEN DE COEFS. ALFA i
GRAFICAR LOS PUNTOS ALFA i, i
TRAZAR EL POLÍGONO DE NEWTON
EN LA PRIMERA ETAPA: ELEGIR UN SEGMENTO CUALQUIERA l
EN OTRAS ETAPAS: ELEGIR UN SEGMENTO l DE PENDIENTE NEGATIVA
CALCULAR: GAMA 1, c 1 Y BETA 1
DEFINIR f1

el mínimo común múltiplo de las n_j tales que $\overline{a_{i_j}} \in K[[x^{\frac{1}{n_j}}]]$
Por lo tanto existe β_{ij} tal, que $\alpha_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{m}$, y substituyendo tenemos que:

$$\gamma = \frac{\alpha_h - \alpha_s}{s-h} = \frac{\frac{\beta_h - \beta_s}{m}}{s-h} = \frac{p}{mq} \text{ con } (p,q) = 1;$$

además para cada $t = \{i_2, \cdots, i_{k-1}\}$ tenemos que:

$$\gamma = \frac{\alpha_h - \alpha_t}{t-h} = \frac{p}{mq}$$

de donde concluimos que q divide a t-h y que por lo tanto, para cada t existe r_t tal que $t = qr_t + h$, por lo tanto, utilizando nuestra segunda ecuación, tenemos que:

$$0 = \sum_{t=i_1}^{i_k} a_t c^t = \sum_{t=i_1}^{i_k} a_t c^{qr_t} c^h = c^h \sum_{t=i_1}^{i_k} a_t (c^q)^{r_t}$$

Definamos ahora el siguiente polinomio:

$$\phi(z) = \sum_{t=i_1}^{i_k} a_t z^{qr_t}$$

Observemos que $r_h = 0$ y $r_s = \frac{s-h}{q}$ y además dado que $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$ tenemos que $r_h \leq r_{i_2} \leq \cdots \leq r_s$ y por lo tanto concluimos que:

$$\phi(0) \neq 0 \text{ y } \partial\phi = \frac{s-h}{q}$$

Por otrol lado tenemos también que:

$$0 = \sum_{t=i_1}^{i_k} a_t c^t = c^h \phi(c) \Leftrightarrow c = 0 \text{ o } \phi(c) = 0$$

Puesto que nuestro campo es algebraicamente cerrado y estamos considerando el grado mínimo en al menos dos sumandos, deben de existir soluciones de c diferentes de cero. Elijamos una de ellas como nuetra solución . Luego entonces c debe ser raíz de ϕ. Sea μ la multipilicidad de c , entonces :

$$\phi(z) = (z-c)^\mu \psi(z) \text{ con } \psi(c) \neq 0$$

Por otra parte, por definición tenemos que:

$$f_1(x,y_1) = f(x, x^\gamma(c+y_1)) = x^{-\beta}(A+B+C)$$

con:

$$A = \sum_t a_t x^{\gamma t + \alpha_t}(c+y_1)^t,\ B = \sum_t (\overline{a_t} - a_t x^{\alpha_t}) x^\gamma (c+y_1)^t \text{ y } C = \sum_\tau \overline{a_\tau} x^\gamma (c+y_1)^\tau$$

en donde t corre en el conjunto $\{i_1, \cdots, i_k\}$ y τ en su complemento.
Utilizando que $\beta = \gamma + \alpha_t$ tenemos que:

$$A = \sum_t a_t x^\beta (c+y_1)^t = x^\beta (c+y_1)^h \phi(c+y_1) = x^\beta (c+y_1)^h y_1^\mu \psi(c+y_1)$$

Como ψ es un polinomio, podemos escribir:

$$A = x^\beta c^h \psi(c) y_1^\mu + \cdots$$

Y por lo tanto tenemos que:

$$f_1 = (c^h \psi(c) y_1^\mu + \cdots) + x^{-\beta}(B+C)$$

Por construcción, tenemos que los sumandos de C y los sumandos de B tienen orden mayor que β por lo cuál nuestro elemento $c^h\psi(c)y_1^{\mu}$ es mínimo en f_1.

Por lo tanto si escribimos:

$$f_1(x,y_1)=\sum_{i=0}^{n}\overline{b_i}y_1^i$$

tenemos que:

$$O(\overline{b_\mu})=O(c^h\psi(c)+\cdots)=0$$

Además, por la minimalidad de $c^h\psi(c)y_1$, tenemos que para toda $j<\mu$, $O(\overline{b_j})>0$

cuando μ es por lo menos uno, entonces al menos el segmento $\overrightarrow{(0,\overline{b_0})(\mu,\overline{b_\mu})}$ tiene pendiente negativa. Si en algún paso del algoritmo, μ fuera cero, entonces nuestra solución terminaria en ese paso, siendo de hecho solamente un polinomio.

Paso 4 : En este paso demostraremos que, en realidad, las raíces obtenidas con el algoritmo pertenecen a K{{x}}. Es decir, demostraremos que para cada raíz $\bar{y}$ que obtengamos existe i con la propiedad de que :

$$\bar{y}\in K[[x^{\frac{1}{i}}]]$$

En el paso anterior vimos que en cada etapa del algoritmo podemos escribir:

$$\gamma=\tfrac{p}{mq}\text{ con }(p,q)=1$$

en donde m es mínimo con la propiedad de que todos los coeficientes $\overline{a_i}$ de f pertenecen a $K[[x^{\frac{1}{m}}]]$. Por la construcción de nuestro algoritmo observemos que si en el i-ésimo paso hemos definido el polinomio f_i entonces $f_{i+1}=x^{-\beta_i}f_i(x^{\gamma_i}(c_i+y_i))$ por lo cual si los coeficientes de f_i pertenecen a $K[[x^{\frac{1}{m}}]]$, también pertenecen los de f_{i+1}.

Por consiguiente para demostrar que $y\in K[[x^{\frac{1}{i}}]]$ para alguna i , basta demostrar que existe una etapa a partir de la cual q= 1, es decir , de hecho demostraremos que m = i.

Ya que nuestro polinomio tiene a lo mas n raíces distintas, a partir de alguna etapa sólo podemos tener una raíz para γ y una para c y por lo tanto el polinomio ϕ debe ser de la siguiente forma:

$$\phi(z)=(z-c)^{\mu}\psi\text{ con }\psi\text{ constante}$$

de donde concluímos que:

$$\sum_{i=1}^{l_k} a_i z^{qr_i} = \psi z^{\mu} + \mu\psi z^{\mu-1}(-c) + \cdots + \mu\psi z(-c)^{\mu-1} + \psi c^{\mu}$$

como μ, ψ y c son distintos de cero, tenemos $\mu\psi(-c)^{\mu-1} \neq 0$ y por lo tanto $qr_1 = 1$ de donde concluimos $q = r_1 = 1$. ∎

Para finalizar con esta sección enunciaremos los siguientes corolarios inmediatos :

Corolario: *Dado* $p \in K\{\{x\}\}[y]$ *existen* $\{\overline{y_1}, \cdots, \overline{y_s}\}$ *tales que* $p(x,y) = \overline{a}\prod_{i=1}^{s}(x - \overline{y_i})$ *con* $\overline{a} \in K\{\{x\}\}$ *y* s el grado de p.

Corolario: *Si* $p \in K[x,y]$ *existe al menos un* $\bar{y} \in K\{\{x\}\}$ *tal, que* $p(x,\bar{y}) = 0$

Observemos que en realidad el primer corolario es una nueva enunciación del teorema y el segundo no es más que un caso particular del mismo; sin embargo los enunciamos de manera explícita por la importancia que tendrán en el resto del trabajo.

El primer corolario permitirá una buena escritura para realizar las demostraciones de varios resultados, el segundo es de gran importancia, dado que las curvas que estudiaremos están dadas por los ceros de polinomios.

Sección 3: Derivación

Para poder mas adelante estudiar ciertos conceptos, como la tangencia, necesitamos definir en nuestras series una derivada. Ya que lo único que estamos pidiendo a nuestro campo es ser algebraicamente cerrado y de característica cero no necesariamente podemos definir un concepto de límite, más sin embargo definiremos nuestras derivada formalmente demostrando que cumple las propiedades básicas de una derivación.[1]

[1] Se puede definir una norma en las series formales de la siguiente manera: $\|f\| = 2^{o(f)}$ y con ella definir la derivación con resultados análogos pero este método no lo utilizamos por no concordar con la tónica del trabajo.

Definición: *Sea* $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *, definimos la derivada de p como la serie:*

$\sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1}$

Usaremos las notaciones usuales para denotar la derivada . Con el fin de demostrar que realmente se trata de una derivación tenemos el siguiente resultado:

Lema: *sean p,q elementos de* K[[x]] *entonces:*

a) $\frac{d}{dx}(p+q) = \frac{d}{dx}p + \frac{d}{dx}q$

b) $\frac{d}{dx}(pq) = p\frac{d}{dx}q + q\frac{d}{dx}p$

Demostración: Sean $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ y $q = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ entonces:

$$\frac{d}{dx}(p+q) = \sum_{i=0}^{\infty} i(a_i + b_i)x^i = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} i b_i x^i = \frac{d}{dx}p + \frac{d}{dx}q$$

con lo cuál se demuestra la parte **a** del teorema. Para la parte **b**,observemos las siguientes igualdades:

$$q\frac{d}{dx}p = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}(j+1)a_{j+1}b_{i-j}\right)x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{i+1} j a_j b_{i+1-j}\right)x^i$$

y análogamente:

$$p\frac{d}{dx}q = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}(j+1)a_{i-j}b_{j+1}\right)x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1-j)a_j b_{i+1-j}\right)$$

de donde concluímos que su suma es igual a:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left((i+1)(a_{i+1}b_0 + a_0 b_{i+1} + \sum_{j=1}^{i}(i+1-j+j)a_j b_{i+1-j}\right)x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\left(\sum_{j=0}^{i+1} a_j b_{i+1-j}\right)x^i = \frac{d}{dx}(pq)$$

Dado que en nuestro campo no tenemos necesariamente un concepto de límite en general, no podemos definir la composición de series formales, sin embargo si podemos enunciar el siguiente lema que en cierto sentido generaliza la regla de la cadena.

Lema: *Sean* $p \in K[x]$ *y* $q \in K[[x]]$ *entonces.*

$$\frac{d}{dx}p(q) = \left(\frac{d}{dx}p\right)(q)\frac{d}{dx}q$$

Demostración: Primero demostraremos, por inducción sobre n, la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{dx}q^n = nq^{n-1}\frac{d}{dx}q$$

Para n = 1, el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado es cierto para todos los valores menores o igules a n - 1 entonces:

$$\frac{d}{dx}q^n = \frac{d}{dx}(qq^{n-1}) = q^{n-1}\left(\frac{d}{dx}q\right) + q\left(\frac{d}{dx}q^{n-1}\right)$$

y, utilizando la hipótesis de inducción, concluimos que:

$$\frac{d}{dx}q^n = \left(\frac{d}{dx}q\right)\left(q^{n-1} + q(n-1)q^{n-2}\right) = nq^{n-1}\frac{d}{dx}q$$

Por lo tanto si $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, entonces

$$\frac{d}{dx}p(q) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i q^i\right) = \sum_{i=0}^{n}\frac{d}{dx}a_i q^i = \sum_{i=0}^{n}(ia_i q^{i-1})\frac{d}{dx}q = \left(\frac{d}{dx}p\right)(q)\frac{d}{dx}q$$

■

Cuando definamos el concepto de lugar en el próximo capítulo, estudiaremos mas detenidamente lo que sucede con la composición de las series y hasta donde podemos generalizarla.

Una vez definida nuestra derivación, podemos recuperar algunos teoremas básicos sobre las series formales que serán importantes en el resto del trabajo.

Teorema (Formula del binomio) : *Si definimos*

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \qquad \textit{entonces:}$$

$$(1+x)^m = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \Leftrightarrow a_i = \binom{m}{i}$$

Demostración:

$$(1+x)^m = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(1+x)^m = \frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$\Leftrightarrow m(1+x)^{m-1} = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^i$$

$$\Leftrightarrow (1+x)\sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^i = m\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$\Leftrightarrow (i-1)a_{i-1} + i a_i = m a_{i-1}$$

$$\Leftrightarrow a_i = \frac{(m-n+1)a_{i-1}}{i} = \cdots = \frac{(m-i+1)\cdots(m)a_0}{i!}$$

Aunque no podemos evaluar la serie en cualquier punto, si lo podemos hacer en $x=0$ lo cual nos da:

$$a_0 = 1^m = 1$$

y con esto se termina la demostración. ∎

Lema: *Sea $f(x,y) = \sum_{n,m} a_{nm}x^n y^m = 0$, entonces si $a_{00}=0$ y alguno de los coeficientes a_{10}, a_{01} es diferente de cero, entonces existe un único valor de y tal que y se puede escribir como una serie de potencias de x con término independiente igual a cero.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad, supongamos $a_{01} \neq 0$. Como podemos dividir entre $-a_{01}$, supongamos, de hecho, que $a_{01} = -1$ entonces:

$$0 = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n = -y + a_{10}x + \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$$

y por lo tanto:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}x^n\right)y^m$$

Por otra parte, si nuestro lema fuera cierto, tendríamos una ecuación de la forma

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i$$

y por lo tanto tenemos una ecuación de la forma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}x^n\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i\right)^m$$

Igualando coeficientes, obtenemos de manera recursiva los valores para cada b_i, en términos de los coeficientes a_{nm} y los b_j tales que $1 \leq j < i$.

Realizando algunos cálculos podemos ver de hecho que los coeficientes estan dadosde la siguiente manera:

$$b_1 = a_{10},\ b_2 = a_{20} + a_{11}b_1 + a_{02}b_1^2, \cdots, b_i = a_{i0} + a_{11}b_{i-1} + \cdots + a_{0i}b_1^n$$

■

Teorema : *Si* $x = a_0 + a_m y^m + a_{m+1}y^{m+1} + \cdots$ *con* $a_m \neq 0$ *entonces podemos encontrar una expresión para* y *como una serie de potencias de* $x - a_0$.

Demostración: Sea $\xi = \left(\frac{x-a_0}{a_m}\right)^{\frac{1}{m}}$, entonces si w_m es una raiz m-ésima de la uniad, tenemos m ecuaciones de la forma:

$$w_m^r \xi = y\left(1 + \frac{a_{m+1}}{a_m}y + \cdots\right)^{\frac{1}{m}}$$

y dado que el lado derecho lo podemos desarrollar en serie, tenemos un desarrollo de la forma $-w_m^r\xi + y + c_2x^2 + \cdots = 0$. Por el lema tenemos que para cada raíz distinta w_m^r tenemos un desarrollo de la forma:

$$y = b_1 w_m^r \xi + b_2 w_m^{2r}\xi^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x - a_0)^i$$

■

Observemos que con estos teoremas podemos hacer que el algoritmo términe en un número finito de pasos, es decir, si en algún paso del algoritmo f_i cumple las condiciones de los teoremas de esta sección entonces ya conocemos la serie solución para f_i y por lo tanto para toda la ecuación.

Por otra parte, a lo largo del trabajo vamos a utilizarcurvas definidas como los ceros de un polinomio y nos interesará factorizar a éste en K{{x}}, lo cual lo podremos relizar con alguno de los métodos descritos.

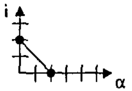
Sección 4: Ejemplos.

En esta sección veremos algunos ejemplos de como aplicar el polígono de Newton y algunos otros de los resultados y métodos descritos en el resto del capítulo[2]

Ejemplo 1: *Utilizando el polígono de Newton calcular los primeros tres términos de una raíz de la ecuación* $f(x,y)=y^2-x^2-x^3$

Observemos que en realidad las soluciones de f son $\pm x(1+x)^{\frac{1}{2}}$ por lo cual podríamos resolver nuestro ejemplo directamente al desarrollar el binomio.

Para calcular el primer coeficiente tenemos dos puntos $(2,0)$ y $(0,2)$, por lo cuál nuestro polígono nos queda:

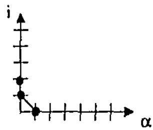


De donde podemos concluír que $\beta=2+0$, $\gamma_1=\frac{2}{2}=1$ y $c_1^2-1=0$ y por lo tanto $c_1=\pm 1$. Si elijamos $c_1=1$ entonces:

$$f_1(y_1)=x^{-2}f(x^1(1+y_1))=x^{-2}(x^2+2x^2y_1+y_1^2-x^2-x^3)=y_1^2+2y_1-x$$

Observemos que, dado que sólo podemos tener dos raices, a partir de este momento sólo podemos tener una raíz para γ y c.

Considerando tenemos tres puntos $(0,2)$, $(0,1)$ y $(1,0)$ nuestro polígono nos queda:

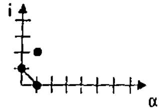


Por lo tanto $\beta=1, \gamma_2=1$ y la ecuación $2c_2-1=0$, de donde concluimos que $c_2=\frac{1}{2}$. Para obtener el siguiente coeficiente definamos

$$f_2=x^{-1}f_1(x(\tfrac{1}{2}+y_2))=xy_2^2+(x+2)y_2+\tfrac{1}{4}x$$

Finalmente para obtener el tercer coeficiente, consideremos los puntos $(1,2)$, $(0,1)$ y $(1,0)$ de donde obtenemos un polígono de la siguiente forma:

[1] Existen algunas mejoras al algoritmo de Newton que no trataremos en este trabajo pero puede consultarse en los números [2], [5] de la bibliografía.



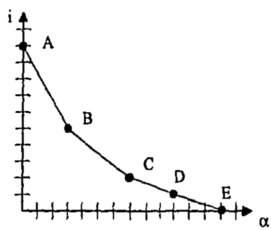
por lo tanto $\gamma_3 = 1$ y nuestra ecuación para c_3 nos queda como $\frac{1}{4} + 2c_3 = 0$ de donde concluimos $c_3 = -\frac{1}{8}$.

Por lo tanto nuestra raíz debe ser de la siguiente forma:

$$x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \cdots$$

Ejemplo 2 : *Dada* $f(y) = 2x^{13} - 3x^{10}y + x^7y^2 - x^3y^5 + y^{10}$ *, dar los primeros coeficientes de sus diez raices .*

El polígono asociado a f tiene la siguiente forma:



y podemos ver que tenemos tres posibles caminos para hallar las raíces, utilizando los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CDE}$.

Si consideramos el segmento $\overline{AB}$ entonces $\gamma = \frac{3}{10-5} = \frac{3}{5}$ y la ecuación para c tiene la siguiente forma: $-c^5 + 1 = 0$, de donde vemos que este segmento, nos determina cinco raices de la siguiente forma:

$$x^{\frac{3}{5}}(\alpha + d_1 x^{\frac{1}{5}} + d_2 x^{\frac{2}{5}} + \cdots) \text{ con } \alpha^5 = 1$$

Si consideramos el segemnto $\overline{BC}$, entonces $\gamma = \frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$ y la ecuación para c queda de la siguiente forma: $-c^5 + c^2$, pero como sólo nos interesan las raices diferentes de cero, entonces podemos considerar la siguiente ecuación: $c^3 - 1 = 0$ y por lo tanto tenemos tres raices de la siguiente forma:

$$x^{\frac{4}{3}}(\varpi + d_1 x^{\frac{1}{3}} + \cdots) \text{ donde } \varpi^3 = 1$$

Finalmente, si consideramos el segemento $\overline{CDE}$, entonces $\gamma = 3$ y la ecuación para obtener el valor de c es $c^2 - 3c + 2 = 0$, de donde concluimos $c = 1$ o $c = 2$.

Por lo tanto tenemos dos raíces de la forma:

$$x^3(1 + d_1 x + \cdots) \text{ y } x^3(2 + e_1 x + \cdots)$$

Capítulo 2: Concepto de lugar

Sección 1 : Parametrizaciones y definición de lugar.

En lo que sigue denotaremos a los elementos de $K[[x]]$ como $\bar{x}$ y utilizaremos x cuando hablemos de variables, principalmente en los sumandos de las series formales.

A lo largo del trabajo trabajaremos con curvas irreducibles proyectivas definidas como el conjunto de ceros de un polinomio homogeneo o con alguna representación afín de la misma curva. Denotaremos a los polinomios homogeneos con letras mayusculas y a los no homogeneos con minúsculas. Al conjunto de ceros de un polinomio F (o f) lo denotaremos por V(F).

Abusando del lenguaje a lo largo del trabajo cuando hablemos de curvas nos estaremos refiriendo a curvas irreducibles.

Normalmente cuando hablamos de parametrizar una curva pensamos en dar una función de $f: K \to K^2$ o $F: P(K) \to P^2(K)$ de tal manera que la imagen de nuestra función sea la curva. O, dicho de otra manera, si la curva esta dada como los ceros de un polinomio en dos variables x e y, entonces considerar a x e y como funciones de un parámetro t de tal forma que el polinomio evaluado en t sea cero.

En este capítulo consideraremos nuestras variables como funciones de un parámetro, pero no en K si no en K[[x]], es decir a cada punto (x_0, x_1, x_2) en el plano proyectivo le asociaremos una tripleta de la forma:

$$(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2}) \text{ con } \overline{x_i} \in K[[x]] \text{ para } i = \{0, 1, 2\}$$

de tal manera que cumpla con la ecuación del polinomo.

En general demos la siguiente definición:

Definición: *Sea una curva $C = V(F(x_0, x_1, x_2))$ en el plano proyectivo sobre K un campo algebraicamente cerrado y de característica cero.*

Decimos que la tripleta $(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2})$ con $\overline{x_i} \in K[[x]]$ conforma una parametrización de C si:

a) $F(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2}) = 0$ *donde esta evaluación se realiza con las operaciones de $K[[x]]$ y el cero es la serie cero.*

b) *Si no existe $\bar{e}$ con la propiedad de que $\bar{e}\overline{x_i} \in K$ para cada $0 \leq i \leq 2$*

Para obtener información sobre la curva requerimos de cierta unicidad en nuestras parametrizaciones y para esto definiremos una relación de equivalencia entre ellas.

Definición: *Una serie* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *decimos que es reducible si existe un entero* $\alpha \neq 1$ *tal que* α *divide a todos los exponentes* i *cuyo coeficiente es distinto de cero. En caso contrario diremos que es irreducible.*

El siguiente lema se sigue inmediatamente de la definición :

Lema : *Son equivalentes* :

a) *Una serie* $\bar{x}$ *es reducible.*

b) *Existe un número natural* $i > 1$ *tal que* $\bar{x} \in K[[x^i]]$

Definición: *Si* $\bar{x}$ y $\bar{t}$ *son elementos* de K[[x]] *definidos como*:

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \text{ y } \bar{t} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \text{ con } O(\bar{t}) > 0$$

entonces definimos:

$$\bar{x}(\bar{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \bar{t}^{\,i} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)$$

Observemos que la condición de que el orden de $\bar{t}$ sea mayor que cero es necesaria para efectuar la substitución de una serie formal cualquiera en otra. Dado que no necesariamente tenemos en nuestro campo un concepto de convergencia si:

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \text{ y } \bar{t} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \text{ con } b_o \neq 0$$

entonces:

$$\bar{x}(\bar{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_0 + a_1 b_1 x + \cdots$$

a lo cual no le podemos dar sentido sin un concepto de convergencia.

Lema: Tenemos las siguientes igualdades:

a) $(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z})=\bar{x}(\bar{z})+\bar{y}(\bar{z})$

b) $(\bar{x}\bar{y})(\bar{z})=\bar{x}(\bar{z})\bar{y}(\bar{z})$

Demostración: Sean $\bar{x}=\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, \bar{y}=\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ y $\bar{z}=\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i$ entonces tenemos que:

$$(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z})=\sum_{i=0}^{\infty}(a_i+b_i)\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j t^j\right)^i=\sum_{i=0}^{\infty} a_i\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j t^j\right)^i+\sum_{i=0}^{\infty} b_i\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j t^j\right)=\bar{x}(\bar{z})+\bar{y}(\bar{z})$$

lo cuál prueba la parte a del lema; para la parte b, basta demostrar que dadas dos series cualesquiera $\bar{u}$ y $\bar{v}$ y los escalares α y β, entonces $(\alpha\bar{u})(\beta\bar{v})=\alpha\beta\bar{u}\bar{v}$ de ser cierto tenemos:

$$(a_i\bar{z}^i)(b_j\bar{z}^j)=a_i b_j\bar{z}^{i+j}$$

y por lo tanto :

$$\bar{x}(\bar{z})\bar{y}(\bar{z})=\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\bar{z}^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\bar{z}^i\right)=\sum_{i+j=s} a_i b_j\bar{z}^s=(\bar{x}\bar{y})(\bar{z})$$

Si $\bar{u}=\sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i$ y $\bar{v}=\sum_{i=0}^{\infty} e_i t^i$ entonces:

$$(\alpha\bar{u})(\beta\bar{v})=\left(\sum_{i=0}^{\infty}\alpha a_i t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\beta b_i t^i\right)=\sum_{s+j=l}\alpha a_s\beta b_j t^l=\alpha\beta\sum_{s+j=l} a_s b_j t^l=\alpha\beta(\bar{u}\bar{v})$$

con lo cual se términa la demostración. ■

Lema: *Dada una serie $\bar{x}$ de orden $n>0$ existe $\bar{u}$ de orden 1 tal que $\bar{x}(\bar{u})=t^n$*

Demostración: Como el orden de $\bar{x}$ es igual a n podemos escribir:

$$\bar{x}=t^n\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \text{ con } a_0\neq 0$$

y por lo tanto para cualquier serie $\bar{u}=\sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i$ con $b_1\neq 0$ tenemos que:

$$\bar{x}(\bar{u})=\bar{u}^n\sum_{i=0}^{\infty} a_i\bar{u}^i=\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j\right)^n\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\bar{u}^i\right)=x^n\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^{j-1}\right)^n\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j\right)^i\right)$$

desarrollando en binomio de Newton tenemos que:

$$\bar{x}(\bar{u}) = x^n\left(b_1^n a_0 + (nb_1^{n-1}b_2a_0 + b_1^{n+1}a_1)t + \cdots + (nb_1^{n-1}b_ib_0 + P_i) + \cdots\right)$$

donde P_i es un polinomo que depende de $a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_{i-1}$ y por lo tanto si definimos:

$$b_1 = a_0^{\frac{1}{n}}, b_2 = -(nb_1^{n-1}a_0)^{-1}b_1^{n+1}a_1, \cdots, b_i = -(nb_1^{n-1}a_0)^{-1}P_i$$

tenemos la serie buscada. ■

Definición: *Dados $\bar{x}$ y $\bar{y}$ elementos de $K[[x]]$ decimos que son equivalentes si existe $t \in K[[x]]$ de orden 1 tal que $\bar{x}(\bar{t}) = \bar{y}$.*

Antes de demostrar que la definición anterior corresponde realmente es una clase de equivalencia conviene hacer algunas observaciones. En primer lugar la clase de equivalencia definida no es mas que un cambio de variable, si consideramos nuestras variables en K[[x]].

En segundo lugar para que la substitución tenga sentido, debemos considerar $O(\bar{t}) > 0$ pero para depurar nuestra clase de equivalencia y hacerla mas manejable, conviene utilizar series irreducibles para lo cuál necesitamos que $O(\bar{t}) = 1$, dado que si:

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \text{y} \quad \bar{t} = \sum_{s=0}^{\infty} b_{j+s} x^{j+s} \text{ con } j \geq 2$$

entonces:

$$\bar{x}(\bar{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\left(\sum_{s=0}^{\infty} b_{j+s}x^{j+s}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{ji}\left(\sum_{s=0}^{\infty} b_{j+s}x^s\right)^i$$

y por lo tanto $\bar{x}(\bar{t}) \in K[[x^j]]$, lo cuál implica $\bar{x}(\bar{t})$ es reducible.

Lema: El conjunto $A = \{\bar{x} \in K[[x]] : O(\bar{x}) = 1\}$, es un grupo bajo la composición.

Demostración: sean:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i, \bar{y} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i \text{ y } \bar{z} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i$$

elementos cualesquiera en A entonces:

$$\bar{x}(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j t^j\right)^i = a_1 b_1 t + \sum_{j=2}^{\infty} a_1 b_j t^j + \sum_{i=2}^{\infty} a_i \bar{y}^i \in A$$

lo cuál prueba la cerradura en la operación de composición.

Para demostrar la asociatividad, operemos con la composición de la siguiente forma:

$$\bar{x}(\bar{y}(\bar{z})) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\bar{y}(\bar{z}))^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\bar{y}^i(\bar{z})) = \sum_{i=0}^{\infty}(a_i\bar{y}^i(\bar{z})) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\bar{y}^i\right)(\bar{z}) = (\bar{x}(\bar{y}))(\bar{z})$$

La serie $\bar{x} = t \in A$ que claramente es neutro bajo la composición.

Finalmente si $\bar{x} \in A$, entonces $O(\bar{x}) = 1$ y por el lema anterior exite $\bar{u}$ de orden 1 tal que:

$$\bar{x}(\bar{u}) = t^{O(\bar{x})} = t$$

■

Teorema: *La relación antes definida es de equivalencia.*

Demostración: Para demostrar que la relación es reflexiva observemos que $\bar{t} = x$ es también una serie formal y por lo tanto $\bar{x}(\bar{t}) = \bar{x}$

Para ver la transitividad sean $\bar{x}, \bar{y}$ y $\bar{z}$ series formales tales que $\bar{x}$ esté relacionado con $\bar{y}$ y $\bar{y}$ relacionado con $\bar{z}$ entonces existen $\bar{t}, \bar{u} \in A$ tales que $\bar{x}(\bar{t}) = \bar{y}$ y $\bar{y}(\bar{u}) = \bar{z}$.

Como la composición en A es asociativa tenemos:

$$\bar{z} = \bar{y}(\bar{u}) = (\bar{x}(\bar{t}))(\bar{u}) = \bar{x}(\bar{t}(\bar{u})) = \bar{x}(\bar{v}) \text{ con } \bar{v} \in A$$

y por lo tanto $\bar{x}$ está relacionado con $\bar{z}$.

Finalmente para demostrar la simetría, supongamos $\bar{x}$ esta relacionado con $\bar{y}$ entonces existe $\bar{t}$ de orden 1 tal que $\bar{x}(\bar{t}) = \bar{y}$. Dado que A es grupo existe $\bar{u}$ tal que $\bar{u}(\bar{t}) = x$ entonces:

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{t}(\bar{u})) = (\bar{x}(\bar{t}))(\bar{u}) = \bar{y}(\bar{u})$$

y por lo tanto $\bar{y}$ está relacionada con $\bar{x}$. ■

Definición: *Dos parametrizaciones* $(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2})$ y $(\overline{y_0}, \overline{y_1}, \overline{y_2})$ *son equivalentes si existe* $\bar{t} \in A$ *tal que* $\overline{x_i}(\bar{t}) = \overline{y_i}$.

Con lo visto anteriormente es claro que realmente es una clase de equivalencia.

Definición: *A la clase de equivalencia de parametrizaciones irreducibles de una curva se le llamará lugar de la curva.*

Puesto que en las series formales no tenemos un concepto de convergencia no podemos asignar valores de la serie evaluada en un punto cualquiera del campo, sin embargo, podemos dar la siguiente definición:

Definición: *Dada una serie formal* $\bar{x} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, *definimos* $\bar{x}(0) = a_0$.

Definición: *Dada una parametrización* $(\overline{x_0},\overline{x_1},\overline{x_2})$ *de una curva, definimos el centro de la parametrización como el punto* $(\overline{x_0}(0),\overline{x_1}(0),\overline{x_2}(0))$.

Teorema:

a) *Dado cualquier representante de un lugar tiene el mismo centro, por lo cuál en adelante hablaremos del centro de un lugar.*

b) *El centro es un punto sobre la curva parametrizada.*

Demostración:

a) Para demostrar este inciso sólo debemos observar que dada una serie cuálquiera $\bar{x}=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, para cada $\hat{t}$ tal que $O(\hat{t})=1$ tenemos:
$\bar{x}(\hat{t})=a_0+a_1\hat{t}+\cdots$ y por lo tanto $\bar{x}(0)=(\bar{x}(\hat{t}))(0)$

b) Sea $C=V(F)$ una curva definida por:

$$F(x_1,x_2,x_3)=\sum_{j+r+s=n} x_1^j x_2^r x_3^s$$

sea $\overline{X}=(\overline{x_0},\overline{x_1},\overline{x_2})$ una parametrización de la curva con:

$$\overline{x_i}=\sum_{j=0}^{\infty} a_{ji}x^j$$

entonces :

$$0=F(\overline{X})=\sum_{j+r+s=n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k0}x^k\right)^j\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{l1}x^l\right)^r\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m2}x^m\right)^s$$

$$=\sum_{i+j+s=n} a_{00}^i a_{01}^j a_{02}^s+A(x)\Leftrightarrow\sum_{i+j+s=n} a_{00}^i a_{01}^j a_{02}^s=0 \text{ y } A(x)=0$$

y por lo tanto $(a_{00},a_{01},a_{02})\in C$ ■

Corolario: *El centro de una parametrización pertenece al plano.*

En un sistema adecuado de coordenadas a cada curva proyectiva le podemos asociar una curva en el plano afín, definida como $F(x,y,1)=f(x,y)$

Podemos de manera análoga a lo anterior definir el concepto de lugar en una curva afín, en lo que sigue trabajaremos por igual tanto en el proyectivo como en el afín.

Lema: *En un sistema adecuado de coordenadas cualquier parametrización es equivalente a una del tipo*:

$$\bar{x} = t^n \text{ y } \bar{y} = a_1 t^{n_1} + a_2 t^{n_2} + \cdots \text{ con } 0 < n \text{ y } 0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

Demostración: Elijamos un sistema adecuado de coordenadas de tal forma que el centro de la parametrización sea el origen. Entonces tenemos una parametrización del tipo:

$$\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \quad \text{y} \quad \overline{y_1} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j$$

como $O(\bar{x}) = n > 0$ existe una $\bar{u}$ tal que $\bar{x}(\bar{u}) = t^n$.

Por lo tanto

$$\bar{x} = \overline{x_1}(\bar{u}) = t^n \quad \text{y} \quad \bar{y} = \overline{y_1}(\bar{u})$$

es la solución buscada. ∎

Aunque el lema anterior es puramente técnico será la base de gran parte de las demostraciones del resto del trabajo dado que nos permite describir de una manera canónica los lugares alrededor del origen.

Hemos visto que el centro de un lugar siempre es un punto de la curva, el inverso de este teorema también es veradero. Su demostración requiere de algunos resultados previos que veremos a continuación.

Teorema: *Dado un polinomio $P(x,y)$ a cada raiz $\bar{y} \in K[[x]]$ con $O(\bar{y}) > 0$ corresponde un lugar de la curva con centro en el origen e inversamente, dado un lugar $(\bar{x},\bar{y})$ con centro en el origen, determina $O(\bar{x})$ raíces.*

Demostración: Sea $\bar{y}$ una raiz de $P(x,y)$ y consideremos el mínimo valor n para el cuál $\bar{y} \in K[[x^{\frac{1}{n}}]]$, entonces podemos obtener un lugar con la parametrización:

$$\bar{x} = x^n \text{ y } \bar{y} = \bar{y}$$

Inversamente, si tenemos un lugar con centro en el origen, entonces podemos darle una parametrización de la forma:

$$\bar{x} = x^n \text{ y } \bar{y} = a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \cdots$$

Por la definición de lugar tenemos que $P(\bar{x},\bar{y}) = 0$ y por lo tanto si λ es una raiz enésima de la unidad, tenemos que cualquier serie de la forma $\bar{z} = \bar{y}(\lambda x)$ debe de ser una raiz de P.

Por la forma en que está parametrizado nuestro lugar, tenemos que todas las parametrizaciones equivalentes a él se reducen a substituir $t = \lambda x$ en la parametrización, de donde concluimos que tenemos a lo mas n raíces.

Supongamos que dos raíces distintas de la unidad λ_1 y λ_2 determinan la misma raíz para P, entonces: $\forall_i \quad a_i\lambda_1^{n_i} = a_i\lambda_2^{n_i}$.

Como nuestras parametrizaciones son irreducibles tenemos que $MCD \ \{n, n_1, n_2, \cdots\} = 1$ y por lo tanto existe $m \in Z$ y enteros $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ tales que $\Sigma\alpha_i n_i = 1$.

Por lo tanto :

$$\lambda_1 = \lambda_1^{\sum a_i n_i} = \lambda_2^{\sum a_i n_i} = \lambda_2.$$

de donde cocluímos que nuestro lugar determina exactamente n raices. ■

Teorema: *Todo punto p de una curva $C = V(P(x,y))$ es centro de al menos un lugar.*

Demostración: Dado $p \in C$, podemos elegir un sistema adecuado de coordenadas de tal forma que sea el origen. Como $K\{\{x\}\}$ es algebraiamnte cerrado, existe una serie formal $\bar{y}$ tal, que $P(\bar{y}) = 0$.Por el teorema anterior, dicha serie determina un lugar con centro en p

■

En resumen, hemos establecido una función entre los lugares de una curva y los puntos de esta, de tal forma que a cada lugar de la curva le asociamos su centro. Dicha función es suprayectiva pero no inyectiva.

En el resto del trabajo estudiaremos algunas propiedades de los puntos de la curva a partir de los lugares con centro en ellos y serán especialmente importantes aquellos puntos que son centro de más de un lugar.

Sección 2: Ejemplos

En esta sección daremos algunos ejemplos de la forma en que se relacionan las raices de un polinomio $P = P(x,y)$ visto como una serie formal en $K\{\{y\}\}$. Los ejemplos también permitirán visualizar que la función que a cada lugar de la curva, le asocia su centro, no es uno a uno.

Ejemplo 1: *Construir un polinomio de tal forma que tenga dos raices que determinen lugares distintos con centro en el origen*

Una manera sencilla de tener un polinomio con dos raice manejables distinatas entre si, es que una raíz sea el inverso aditivo de la otra.

Dado lo anterior definamos $P(x,y) = (y-\bar{a})(y+\bar{a}) = y^2 - \bar{a}^2$ con $\bar{a} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Para construir nuestro ejemplo necesitamos que P sea un polonomio y por lo tanto es necesario pedir además que

$\bar{a}^2$ lo sea, para esto, definamos $\bar{a} = (g(x))^{\frac{1}{2}}$ con g un polinomio.

Claramente P resulve el problema, dado que tiene dos lugares con centro en el origen, parametrizados por:

$$\bar{x} = t,\ \bar{y} = \bar{a}(t) \text{ y } \bar{x} = t \text{ y } \bar{y} = -\bar{a}(t)\ .$$

Más adelante en el trabajo nos interesará en especial el caso particular en el que $g(x) = x^2 + x^3$, el cuál determina una curva con un nodo simple en el origen.

Podemos generalizar el ejemplo anterior dando el siguiente

Ejemplo 2 : *Construír un polinomio de tal forma que tenga 2^n raices que determinen 2^n lugares distintos.*

Para este ejemplo simplemente construyamos el el siguiente polinomio:

$$P(x,y) = y^{2^n} - \bar{a}^{2^n} = \Pi(y - \xi\bar{a}) \text{ con } \xi^{2^n} = 1 \text{ y } \bar{a} = (g(x))^{\frac{1}{2^n}}, \text{ para algún polinomio } g.$$

y análogamente al ejemplo anterior tenemos las siguientes 2^n parametrizaciones:

$$\bar{x} = t \text{ y } \bar{y} = \xi a$$

En estos ejemplos podemos observar que el número de lugares con centro en un punto es tan grande como queramos. Complementariamente a los ejemplos anteriores, tenemos el siguiente:

Ejemplo 3 : *Dar un polinomio que tenga 2^n raices que determinen un único lugar.*

Con objeto de desarrollar este ejemplo haremos una pequeña modificación de los ejemplos anteriores.

Observemos que lo primero que necesitamos para que nuestras parametrizaciones sean equivlentes es que lo sean sus $\bar{x}$ correspondientes. Dicho de otra manera pidiendo $\bar{x} = t^{2^n}$ podemos construir las parametrizaciones que determinen el mismo lugar.

Para lograr lo anterior, requerimos que la serie solución pertenezca a $K[t^{\frac{1}{2^n}}]]$, lo cuál sucede, obviamente, cuando las raices son de la forma $x^{\frac{1}{2^n}}\bar{b}$ con $\bar{b} \in K[[t]]$.
Por lo tanto, podemos dar como ejemplo, el siguiente polinomio:

$$P(x,y) = y^{2^n} - x\bar{a}^{2^n} \text{ donde } \bar{a} = ((g(x))^{\frac{1}{2^n}} \text{ donde } g \text{ es un polinomio.}$$

claramente P tiene 2^n raices de la forma $\bar{y} = x^{\frac{1}{2^n}}\bar{a}$ y por lo tanto tiene un único lugar

parametrizado de la forma:

$$\bar{x} = t^{2^n} \text{ y } \bar{y} = t\bar{a}(t^{2^n}) \ .$$

Utilizaremos mas adelante, en particular, el caso $\bar{a} = x$ y $n = 1$, que se trata de una curva con una cúspide en el origen.

Capítulo 3 Tangencia

Uno de los conceptos fundamentales de la geometría es el concepto de tangencia. Estamos acostumbrados a definir tangencia utilizando la herramienta del cálculo con el concepto de derivada, sin embargo esta manera de definirla es restringinda dado que en un punto en que no exista la derivada pueden existir tangentes y sin embargo no estar definidas. Además, al estar trabajando en campos arbitrarios, no necesarimente tenemos un concepto de límite y por lo tanto de derivada.

En este capítulo daremos una definición mas general de tangencia y para esto utilizaremos las herramientas desarrolladas en los capítulos anteriores, especificamente la derivación formal de polinomios y el concepto de lugar.

Para entender el concepto de tangencia y poderlo generalizar, estudiaremos primero el concepto de intersección de curvas, de tal manera de poder definir tangencia como un caso límite de la intersección.

Sección 1: Intersección de curvas.

En esta sección daremos una definición de intersección de curvas que nos permitacontar bien las intersecciones entre las curvas. Para dar esta definición utilizaremos el concepto de lugar y después demostraremos que coincide con la definición usual utilizando la resultante.

Definición: *Sea* $l = (\bar{x}, \bar{y})$ *un lugar de alguna curva irreducible*[3] C *y sea* g *un polinomio cualquiera, entonces definimos el orden de* g *en* l , $O_g(l)$, *como el orden de la serie* $g(\bar{x}, \bar{y})$.

Teorema: *Sean* $C_1 = V(f(x,y))$ y $C_2 = V(g(x,y))$ *curvas con un punto comun* p *entonces:*

$$\sum_{l \in f} O_g(l) = \sum_{l \in g} O_f(l)$$

donde l *son los lugares con centro en* p.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, supondremos que p es el origen de coordenadas y que el punto al infinito del eje Y no pertenece a C_1 ni a C_2.

[3] Recuerde el lector, que estamos considerando a lo largo del trabajo curvas irreducibles.

Como $K\{\{x\}\}$ es algebraicamente cerrado podemos escribir:

$$f(x,y)=\prod_{i=1}^{m}(y-\overline{y_i})\quad \text{y}\quad g(x,y)=\prod_{i=1}^{n}(y-\overline{z_j})$$

Sean $\{l_1, l_2, \cdots, l_s\}$ los lugares de la curva C_1 con centro en p y supongamos que cada lugar l_i está parametrizado de la siguiente forma:

$$\bar{x}_l = x^{r_l}\quad \text{y}\quad \bar{y}=\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}x^j$$

Observemos que cada lugar l_i determina r_i raices de f, de la siguiente forma:

$$\bar{y}=\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\frac{j}{r_i}}$$

Sean α el exponente mínimo de g y $\beta = O(\bar{y})$, entonces para cada una de las r_i raices tenemos que:

$$O(g(x,\bar{y})) = \frac{\alpha\beta}{r_i}$$

y por lo tanto:

$$O_{l_i}(g) = \alpha\beta = O(\prod_{j=0}^{r_i} g(x,\overline{y_j}))$$

donde j corre sobre todas las raíces que determina el lugarl_i .

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{s} O_{l_i}(g) = \sum_{i=1}^{s}\alpha\beta_i = \sum_{i=1}^{s} O(\prod_{j=1}^{r_i} g(x,\bar{y}_j)) = O(\prod_{j=1}^{m} g(x,\overline{y_j}))$$

de donde tenemos:

$$\sum_{l\in C_1} O_l(g) = O\,(\prod_{j=1}^{m} O(g(x,\overline{y_j}\,)) = O((\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(\overline{y_j}-\overline{z_i}\,)) = O((\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\overline{z_i}-\overline{y_j}\,))$$

Dado que hay simetría en los argumentos anteriores entre f y g, concluimos que:

$$\sum_{l\in C_1} O_l(g) = \sum_{l\in C_2} O_l(f)$$

■

Definición: *Sean* $C_1 = V(f(x,y))$ *y* $C_2 = V(g(x,y))$ *curvas en el plano afín y sea* $p\in C_1\cap C_2$ *definimos la multiplicidad de la intersección en* p *coma*

$$\sum_{l\in C_1} O_g(l)$$

Es claro por el teorema anterior que nuestra definición no depende de la elección de C_1 .

Aunque la definición anterior parece artificial, se basa en el hecho de que el orden de una serie, es la multiplicidad del cero como raiz de la misma, y por lo tanto el sumar los órdenes de todas las series nos da la multiplicidad del origen en cada curva. El evaluar, en el polinomio que determina la otra curva es por lo tanto contar cuantas veces está en ambas curvas.

Normalmente la multiplicidad de intersección se da en términos de la resultante, para demostrar la consistencia de la definición anterior enunciaremos varios resultados a continuación.[4]

Lema: *Sean* $f=\prod_{j=1}^{n}(x-y_i)$ *y* $g=\prod_{i=1}^{m}(x-z_j)$ *dos polinomios; entonces la resultante con respecto a y,* $R_y(f,g)=a\prod_{i,j}(y_i-z_j)$.

Demostración: Sea $F=\prod_{i,j}(y_i-z_j)$, entonces es claro que $F=0$ sí y solamente sí tenemos raíces comunes a f y a g, de donde concluíos que F divide a la resultante; y como el grado de F es mn igual al grado de la resultante, tenemos el resultado. ■

De hecho, el inverso del lema es también cierto e incluso algunos textos definen resultante como $\prod_{i,j}(y_i-z_j)$.

Teorema: *Dadas dos curvas como los ceros de los polinomios* $f(x,y)$ *y* $g(x,y)$, *tales que no tienen intersecciones con el eje Y excepto el origen de*

---

[4] En esta parte de la tesis, suponemos, que el lector conoce la definición de resultante como determinante y demostramos que con esta definición que la resulante puede verse como el producto de las diferencias de las raices de cada polinomio. El inverso también es cierto pero no lo demostraremos en el trabajo. Para una discución mas amplia de la resultante vease [3] y [5] de la bibliografía.

coordenadas, entonces $R_x(f,g)$ tiene a cero como una raíz de multiplicidad igual al número de intersecciones de f y g.

Demostración: Sean n y m los grados de f y g respectivamente y sean $\{y_1,\cdots,y_n\}$ las raices de f y $\{z_1,\cdots,z_m\}$ las raices de g en $K\{\{x\}\}$

Supongamos que las raices estan ordenadas de tal forma que existan s y r tales que:

$$1 \le s \le n \text{ y } 1 \le r \le m$$

con la propiedad de que:

$$O(y_i) = 0 \text{ si } 1 \le i \le s \text{ y } O(y_i) > 0 \text{ si } s+1 \le i \le n$$

y

$$O(z_j) = 0 \text{ si } 1 \le j \le r \text{ y } O(z_j) > 0 \text{ si } r+1 \le j \le m$$

Entonces tenemos que:

$$f(x,y) = \prod_{i=1}^{s}(y-\overline{y_i})\prod_{i=s+1}^{n}(y-\overline{y_i}) \quad \text{y} \quad g(x,y) = \prod_{j=1}^{r}(y-\overline{z_j})\prod_{j=r+1}^{m}(y-\overline{z_j})$$

Luego entonces por el lema anterior tenemos que:

$$R_x(f,g) = \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{r}(\overline{y_i}-\overline{z_j})\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=r+1}^{m}(\overline{y_i}-\overline{z_j})\prod_{i=s+1}^{n}\prod_{j=1}^{r}(\overline{y_i}-\overline{z_j})\prod_{i=s+1}^{n}\prod_{j=r+1}^{m}(\overline{y_i}-\overline{z_j})$$

Como la multiplicidad de la resultante en cero esta dada por el menor exponente de sus términos coincide con su orden. Pero:

$$O(R_x(f,g)) = O(\prod_{i,j}^{s,r}(\overline{y_i}-\overline{z_j})) + O(\prod_{i,j}^{s,m}(\overline{y_i}-\overline{z_j})) + O(\prod_{i,j}^{n,r}(\overline{y_i}-\overline{z_j})) + O(\prod_{i,j}^{n,m}(\overline{y_i}-\overline{z_j}))$$

Ahora bien, como $O(\overline{y_i}) = 0 = O(\overline{z_j})$, para $i = \{1,\cdots,s\}$ y $j = \{1,\cdots,r\}$ tenemos lo siguiente:

$$O(\prod_{i,j}^{s,m}(\overline{y_i}-\overline{z_j})) = O(\prod_{i,j}^{n,r}(\overline{y_i}-\overline{z_j})) = 0$$

Por otro lado, si $O(\prod_{i,j}^{s,r}(\overline{y_i}-\overline{z_j})) > 0$, entonces existen i, j tales, que $\overline{y_i}, \overline{z_j}$ tienen el mismo término independiente, es decir $\overline{y_i}(0) = \overline{z_j}(0) = a$, lo cual implica que el punto $(0,a)$ es centro de los lugares determinados por $\overline{y_i}$ y $\overline{z_j}$ y por lo tanto, es un punto sobre el eje Y que pertenece a ambas curvas lo cuál por hipótesis no es posible.

Por lo tanto:

$$O(R_x(f,g)) = O\left(\prod_{i=r+1}^{n}\prod_{j=s+1}^{m}(\bar{y_i}-\bar{z_j})\right) = \sum_i\left(\prod_j(\bar{y_i}-\bar{z_j})\right)$$

Lo cual sabemos por la demostracción del teorema anterior que es igual al número de intersecciones. ■

Sabemos que en los puntos de intersección de dos curvas sin componentes comunes la resutante se anula; observemos entonces que el teorema anterior nos da un resultado más fuerte, nos da una forma de contar bien el número de las intersecciones.

Sección 2: Definición de Tangencia:

Para generalizar el concepto de tangencia vamos a utilizar dos herramientas: la derivación formal y la definición de intersección de curvas de la sección anterior.

Sea $C = V(f)$ una curva en el plano afín y consideremos un punto $p = (a,b) \in C$.

Sea L una recta cualquiera que pase por p, entonces L, esta definido por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = a + \lambda t \text{ y } y = b + \mu t$$

luego entonces las intersecciones de L y C estan dadas por las raices del polinomo:

$$f(a+\lambda t, b+\mu t)$$

A continuación daremos algunos resultados que nos permiten estudiar el comportamiento de dichas intersecciones.

Lema: $f(a + \lambda t,\ b + \mu t)$ *tiene un desarrollo en serie de Taylor, es decir, tenemos la siguiente igualdad:*

$$f(a+\lambda t, b+\mu t) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(\sum_{s=0}^{i}\binom{i}{s}f_{x^s y^{i-s}}(a,b)\lambda^s\mu^{i-s}\right)t^i$$

Demostración: Escribamos a f de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k} a_{ij}x^i y^j$$

Por lo tanto:

$$\binom{i}{s} f_{x^s y^{i-s}}(a,b) = \binom{i}{s}\sum_{l+j=k}\left(a_{lj}\prod_{r=0}^{s-1}(l-r)\prod_{t=0}^{i-s-1}(j-t)a^{l-s}b^{j-(i-s)}\right)$$

de donde tenemos que:

$$\binom{i}{s} f_{x^s y^{i-s}}(a,b) = \sum_{l+j=k}\left(a_{lj}\binom{i}{s}\frac{l!}{(l-s)!}\frac{j!}{j-(i-s)}a^{l-s}b^{j-(i-s)}\right)$$

$$=\sum_{l+j=k}\left(a_{lj}\, i!\,\frac{l!}{(l-s)!s!}\,\frac{j!}{(i-s)!(j-(i-s))!}a^{l-s}b^{j-(i-s)}\right)$$

$$=\sum_{l+j=k}\left(a_{lj}\, i!\binom{l}{s}\binom{j}{i-s}a^{l-s}b^{j-(i-s)}\right)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(\sum_{s=0}^{i}\binom{i}{s} f_{x^s y^{i-s}}(a,b)\lambda^s\mu^{i-s}\right)t^i =$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(\sum_{s=0}^{i}\sum_{l+j=k}\left(i!\binom{l}{s}\binom{j}{i-s}a^{l-s}b^{j-(i-s)}\right)\lambda^s\mu^{i-s}\right)t^i =$$

$$=\sum_{l+j=k}a_{lj}\sum_{i=0}^{l+j}\left(\sum_{s=0}^{i}\binom{l}{s}a^{l-s}\lambda^s\binom{j}{i-s}b^{j-(i-s)}\mu^{i-s}\right)t^i =$$

$$=\sum_{l+j=k}a_{lj}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}a^{l-s}\lambda^s t^s\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}b^{j-s}\mu^s t^s$$

$$=\sum_{l+j=k}a_{lj}(a+\lambda t)^l(b+\mu t)^j = f(a+\lambda t, b+\mu t)$$

■

Para generalizar el concepto usual de tangencia, demos la siguiente definicióin:

Definición: *Sea $p=(a,b)$ un punto en C, entonces:*

a) *Llamamos la multiplicidad, del punto υ_p, al mínimo índice para el cual existe al menos una parcial no nula, en el desarrollo en serie de Taylor de $f(a+\lambda t, b+\mu t)$.*

b) *Supongamos* $\nu_p = i$ *entonces descompongamos el polinomio:*

$$f_{x^i} + \cdots + \binom{i}{j} f_{x^{i-j}} f_{y^j} \lambda^{i-j} \mu^j + \cdots + f_{y^i} = 0$$

en factores lineales $a_i x + b_i y$. *A la cerradura afín, de cada línea definida como los ceros de alguno de estos factores lineales, les llamaremos las tangentes a C en p.*

Definición:

a) *Si* $\nu_p = 1$, *diremos que p es un punto simple o regular de la curva.*

b) *Si* $\nu_p > 1$ *diremos que p es un punto singular o múltiple; si* $\nu_p = 2$ *le llamaremos punto doble, si* $\nu_p = 3$ *diremos que es un punto triple y así sucesivamente.*

c) *Si un punto de multiplicidad r tiene r tangentes distintas le llamaremos un punto singular ordinario. En particular si un punto doble tiene dos tangentes distintas diremos que es un punto doble ordinario o nodo.*

d) *A los puntos dobles con una sola recta tangente les llamaremos cúspides.*

e) *Decimos que p es un nodo o una cúspide simple, si cada tangente en el punto corta a la curva C en exactamente tres puntos.*

f) *Llamaremos a C no singular o lisa en el caso en que no tenga puntos singulares.*

Para generalizar nuestro concepto de tangencia a lugares utilizaremos el camino dado por el siguiente :

Teorema: *Sea p un punto perteneciente a una curva C; entonces el número de intersecciones de todas las rectas L que pasan por p y no son tangente a C en p, es igual a* ν_p

Demostración: Como l es una recta en p = (a,b) tenemos un único lugar dado por:

$$\bar{x} = a + \lambda t \text{ y } \bar{y} = b + \mu t$$

Por lo tanto el número de intersecciones esta dado por:

$$\sum_{l \in L} O(f(l)) = O(f(a + \lambda t, b + \mu t)) = \nu_p$$

■

Como todas las rectas que pasan por p salvo un número finito intersectan a C en v_p tenemos el siguiente corolario:

Corolario: *Todas las rectas que pasan por p salvo un número finito cortan a C en el mismo número de puntos*

Por lo tanto podemos redefinir recta tangente de la siguiente manera:

Definición: *Una recta es tangente a C en p si corta a C en mas puntos que casi todas las rectas que pasan por p*

Aunque aparentemente esta definición parezca menos manejable que la anterior es presisamente la que nos permitirá utilizar los lugares para encontrar las tangentes.

Lema: *Dado un lugar l con centro en p, existe un entero r tal que todas las rectas, excepto una y sólo una, cumplen que* $O_l(L) = r$

Demostración: Sea $p = (a_0, b_0)$, entonces cualquier recta L que pase por p se puede ver como:

$$L(x,y) = V(a(x - a_0) + b(y - b_0))$$

Sea l un lugar con centro en p definido por:

$$l = (\bar{x}, \bar{y}) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i)$$

entonces:

$$L(\bar{x}, \bar{y}) = a\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i - a_0\right) + b\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i - b_0\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (aa_i - bb_i) t^i$$

Si r es el mínimo índice para el cual $a_r \neq 0$ o $b_r \neq 0$ entonces $O_l(L) = r$ ecepto en la recta que cumple:

$$aa_r - bb_r = 0$$

en cuyo caso $O_l(L) > r$. ■

Definición:

a) *A la única recta que tiene orden mayor que r en el lema anterior le llamaremos la tangente al lugar.*

b) *Al número r le llamaremos el orden del lugar*

c) *Si T es la recta tangente al lugar, entonces llamaremos la clase del lugar al número s definido como $s = O_l(T) - r$*

Teorema: *Sea p un punto sobre una curva C; las tangentes a los lugares con centro en p, son tangentes a C en p; e inversamente paracualquier tangente T a C en p existe un lugar, con centro en p, tal que T es tangente a él.*

Demostración: Sean $\{l_1, \cdots, l_d\}$ los lugares de la curva con centro en p, asociemos a cada l_i ,r_i como en el lema anterior . Si m es el número de intersecciones, con C, de todas las rectas, no tangentes, que pasan por p entonces tenemos que:

$$m = \sum_i O_l(L) = r_1 + \cdots + r_d$$

Si T es tangente al lugar l_i entonces $O_{l_i}(L) > r_i$ y por lo tanto $\sum_{j=1}^{d} r_j > m$ de donde concluimos que T es tangente a C en p. Inversamente si L es una recta tangente a C, entonces el número de intersecciones de L con C en p es mayor que m y por la tanto existe i tal que $O_{l_i}(L) > r_i$ lo cuál implica que L es tangente a l_i ■

Corolario: *Si un punto p tiene multiplicidad r, entonces la suma de los ordenes de los lugares en p es r. En paricular es condición necesaria y suficiente para que p sea simple el que p sea el centro de un único lugar de orden 1.*

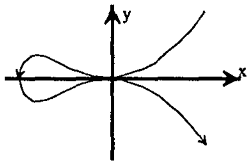
Demostración: Por definición, en un punto de multiplicidad r se anulan las primeras r-1 derivadas y por lo ya demostrado, esto implica que casi todas las rectas cortan en r-1 puntos a C en p y por lo tanto se tiene el resultado buscado. ■

En resumen, podemos establecer una función suprayectiva, que a cada lugar asocia una recta tangente al centro del lugar. Sin embargo dicha función no necesariamente es inyectiva. Para visualizarlo, pensemos en el siguiente contraejemplo:

Sea C = V(f) con $f(x,y) = y^2 - x^4 - x^5$; obsrvemos que f , puede factorizarse de la siguiente forma:

$$f = (y + x^2(1+x)^{\frac{1}{2}})(y - x^2(1+x)^{\frac{1}{2}})$$

de donde concluímos, desarrollando el binomio de Newton, que f tiene dos raices distintas que pertenecen a K[[x]] y por lo tanto determinan los sigientes lugares alrededor del origen:



$$\begin{cases} l_1: & (\bar{x}=t, \bar{y}=t^2(1+\frac{1}{2}t+\cdots)) \\ l_2: & (\bar{x}=t, \bar{y}=-t^2(1+\frac{1}{2}t+\cdots)) \end{cases}$$

Sea L una recta cualquiera que pasa por el origen de coordenadas, luego entonces claramente L tiene una ecuación de la forma $ax+by=0$ y por lo tanto:

$$O(L(l_i)) = O(at \pm bt^2)$$

es igual a uno excepto en el caso en que $a = 0$ en que vale dos, por lo cual podemos concluir que la recta $X=0$ es tangente a ambos lugares

Capítulo 4 Fórmulas de Plücker

En esta parte de la tesis aplicaremos los conceptos y teoremas acerca de los lugares desarrollados con anterioridad para demostrar dos de las fórmulas de Plücker y generalizarlas en el caso de curvas planas como en los cpítulos anteriores nos referiremos siempre a curvas irreducibles.

Las fórmulas de Plücker que demostraremos sirven para calcular la clase de una curva y el número de sus puntos simples de inflexión.

Es importante señalar que existen otras fórmulas de Plücker que miden el grado de la curva dual y el género de la curva pero no se tratarán a lo largo de éste trabajo.[5]

El enunciado original de las fórmulas de Plücker contempla solamente curvas cuyos únicos puntos singulares sean nodos o cúspides; lo que haremos en este capítulo es deducir, primero las fórmulas en general para curvas con cualquier tipo de singularidad, y luego obtener las fórmulas de Plücker como un caso particular.

Sección 1: La clase

Comenzaremos esta sección con la siguiente

> **Definición:** *Dado un punto fuera de una curva al número de tangentes a la curva que pasan por el punto se le llamará la clase de la curva.*

Para ver que esta es una buena definición demostraremos a continuación, en primer lugar, que no depende del sistema de coordenadas elegido y poteriormente demostraremos que contando adecuadamente el número de tangentes, la clase tampoco depende del punto elegido en donde entendemos por contar adecuadamente, contar cada recta con sus multiplicidades.

> **Lema:** *Dado un lugar $l = (\bar{x}, \bar{y})$ con centro en el origen tiene una parametrización de la forma :*
>
> $$\bar{x} = t^r \text{ y } \bar{y} = t^{r+s} + \cdots$$
>
> en donde r es el orden del lugar y s su clase.[6]

---

[5] La demostración de estas fórmulas utiliza escencialmente la definición de curva dual y el teorema de Riemann- Hurwitz para poderlas leer consulte [4] de la bibliografía.

[6] Ver la definición de clase y orden de un lugar en el capitulo tres en la página 41.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, supongamos que $O(\bar{x}) = n \leq O(\bar{y})$ y que la tangente al lugar está dada por la recta Y = 0; en caso contrario, hagamos un cambio de coordenadas rotando y trasladando los ejes coordenados.

Como se demostró en el capítulo 2 existe una parametrización de la forma:

$$\bar{x} = t^n \text{ y } \bar{y} = \sum_{i \geq n} b_i t^i$$

Entonces como dada cualquier recta por el origen L = ax + by tenemos que:

$$L(\bar{x},\bar{y}) = (a + bb_n)t^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} (bb_i)t^i$$

concluímos que n debe de ser el orden del lugar, y ya que estamos suponiendo, que la tangente T a l es la recta Y = 0 , entonces la recta tangente está dada cuando a = 0 y esto nos implica que $b_n = 0$. Por lo tanto concluimos que $O(\bar{y}) = O_p(T) = r + s$. ■

Sea $C_1 = V(F)$ una curva en el plano proyectivo y sea un ounto $q = (q_0, q_1, q_2)$ tal que $q \notin C_1$; entonces una recta T que pase por q y sea tangente a C_1 debe de tener una ecuación de la forma $< \nabla F, q >= 0$. Por otra parte, si p es el punto de tangencia sobre la curva, entonces el número de intersecciones de la recta tangente y la curva en p debe de ser mayor de cero, es decir:

$$\sum_{l \in C_1} O_l(T) > 0$$

en donde l son los lugraes de C_1 con centro en p.

Lema: *El número:* $\sum_l O_l(T)$ *no depende del sistema de coordenadas utilizado.*

Demostración: Sean r_i y y_i nuevas coordenadas para q y p respectivamente; entonces, como cambiar de coordenadas en el espacio proyectivo corresponde a un cambio de base en el espacio afín, podemos encontrar una matriz $M = (a_{ij})$ tal, que existen p y r tales que $q = Mr$ y $p = My$.

Sea

$$G(y) = F(x) = F(My) = F((\sum_j a_{ij} y_j) e_i)$$

entonces por la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} G(y) = \left(\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} (\sum_j a_{ij} y_j) \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} (\sum_j a_{ij} y_j) \frac{\partial \sum_s a_{is} y_s}{\partial y_j} \right) = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) a_{ij}$$

Por lo tanto si denotamos por F_i a $\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ tenemos que:

$$O_l(\sum_j r_j G_j) = O(\sum_j r_j G_j(\bar{y})) = O(\sum_j r_j (\sum_i F_i(\bar{x}) a_{ij})$$

y reordenando, concluimos:

$$O_l(\sum_j r_j G_j) = O((\sum_j a_{ij} r_j) \sum_i F_i(\bar{x})) = O(\sum_i q_i F_i(\bar{x}) = O_l(\sum_i q_i F_i)$$

■

Lema: *Sea* $C = V(F)$ *una curva en el espacio proyectivo y* $q = (q_0, q_1, q_2)$ *un punto fuera de la curva. Supongamos que cada lugar* l *de la curva tiene una parametrización de la forma:*

$$\overline{x_o} = 1, \overline{x_1} = t^r \text{ y } \overline{x_2} = t^{r+s} + \cdots$$

$$\textit{entonces, } \sum_l O_l(\sum q_i F_i) = \sum_l \delta(l) + \varepsilon(l) \quad \textit{en donde:}$$

$$\delta(l) = O_l(F_2) \text{ y } \varepsilon(l) = \begin{cases} 0 & si\ q \notin T \\ r+s & si\ q = p \\ s & si\ q \neq p\ y\ q \in T \end{cases}$$

en donde T es la tangente al lugar y p es el centro del lugar y por lo tanto el punto de tangencia.

Demostración: Por el teorema de Euler y dado que $F(\bar{x}) = 0$ tenemos las siguientes dos igualdades:

$$\begin{cases} \sum_i \overline{x_i} F_i = nF = 0 \\ \sum_i F_i(\bar{x}) \frac{d}{dt} \overline{x_i} = D_t F(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

Substituyendo los valores de $\overline{x_i}$ y $\frac{d}{dt}\overline{x_i}$ en ambas ecuaciones obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} F_0 + t^r F_1 + (t^{r+s} + \cdots)F_2 = 0 \\ rt^{r-1}F_1 + (r+s)(t^{r+s-1} + \cdots)F_2 = 0 \end{cases}$$

despejando F_1 en términos de F_2 en la segunda ecuación obtenemos:

$$F_1 = \left(-\frac{(r+s)\,t^{r+s-1}}{rt^{r-1}}\right)F_2 = \left(-(1+\tfrac{s}{r})t^s + \cdots\right)F_2$$

y despejando F_0 de la primera, obtenemos:

$$F_0 = -t^r F_1 - (t^{r+s} + \cdots)F_2 = (\tfrac{s}{r}t^{r+s} + \cdots)F_2$$

Por lo tanto:

$$O_l(\sum_i q_i F_i) = O\left(F_2\left[q_0(\tfrac{s}{r}t^{r+s} + \cdots) - q_1((1+\tfrac{s}{r})t^s + \cdots)) + q_2\right]\right)$$

de donde concluimos que:

$$O_l(\Sigma q_i F_i) = \delta(l) + \varepsilon(l)$$

donde $\varepsilon(l) = O\left(q_0(\tfrac{s}{r}t^{r+s} + \cdots) + q_1(-(1+\tfrac{s}{r})t^s + \cdots) + q_2\right)$.

Dado que la tangente al lugar está dada por la recta $\overline{x_2} = 0$, tenemos que:

a) Si $q \notin T$ entonces $q_2 \neq 0$ y por tanto $\varepsilon(l) = 0$.

b) Como $p = (\overline{x_0}(0) : \overline{x_1}(0) : \overline{x_2}(0)) = (1 : 0 : 0)$, entonces si $q = p$, $\varepsilon(l) = r + s$

c) Y si $q \in T$ y $q \neq p$, entonces $q_2 = 0$, pero $q_1 \neq 0$ y por lo tanto $\varepsilon(l) = s$

lo cuál términa la demostración. ■

Corolario: *La clase de la curva esta dada presisamente por:*

$$\sum_l \varepsilon(l)$$

en donde l corre sobre todos los lugares y p es el centro del lugar correspondiente.

Demostración: Se sigue inmediatamente de la definición de $\varepsilon(p)$

Observemos que para casi todos los lugares l, $\varepsilon(p) = 0$. Por lo tanto, nuestra suma esta bien definida.

Observemos que dado que q no pertenece a la curva podemos volver a escribir el corolario de la siguiente manera:

Corolario: *La clase de una curva está dada por la suma de las clases de todos los lugares con centro en un punto de tangencia.*

Podemos observar que la ecuación obtenida nos cuenta bien las tangentes, en el sentido de que si tenemos una recta tangente multiple, la cuenta tantas veces como aparezca.

Por otra parte $\sum_l O_l(\Sigma q_i F_i)$ cuenta el número de intersecciones entre la curva y su derivada, pero ya sabemos que el número de intersecciones de la recta con su derivada es exactamente n(n-1).

Por lo tanto podemos concluimos el siguiente:

Teorema: *La clase m de una curva está dada por la siguiente ecuación:*

$$m = n(n-1) - \sum_l \delta(l)$$

Observemos que como el orden y la clase de un lugar no dependen de la parametrización que elijamos nuestra fórmula no depende del punto que hallamos elegido. A continuación daremos algunos corolarios importantes.

Corolario: *Si C es una curva lisa entonces su clase es igual a n(n-1).*

Demostración: Basta con demostrar que en todo punto simple de la curva δvale cero.

Para la demostración utilizaremos nuestro polinomio deshomogeneizado, pero queda claro que vale en general, es decir haremos la demostración para una curva afin.

Sea p un punto simple, entonces existe un único lugar l con centro en él y con una parametrización de la forma:

$$l = (\bar{x}, \bar{y}) = (t, t^2 + \cdots)$$

ya que f (l) = 0, entonce f debe tener la siguente forma:

$$f(x,y) = y + g(x,y)$$

en donde g no contiene términos en x de grado menor que dos.

Por lo tanto :

$$\delta(l) = O_l(f_y) = O(1 + g_y(l)) = 0$$

■

Vamos a demostrar a continuación la fórmula de Plücker en su enunciado original, como un caso particular; para esto necesitamos redefinir los conceptos de nodo y cúspide simple en términos de lugares(ver capítulo 3 página 40)

Lema: *Dada una curva C, tenemos:*

a) *Es condición necesaria y suficiente para que* (0,0)*sea un nodo simple, que tengamos dos lugares de orden 1 y clase 1 con centro en el origen cuyas tangentes sean distintas entre si.*

b) *Es condición necesaria y suficiente para que* (0,0)*sea una cúspide simple que tengamos un único lugar con centro en el origen de orden dos y clase tres.*

Demostración:

Si tenemos un nodocon centro en p = (0,0) entonces p es un punto doble ordinario, es decir, en p tenemos dos rectas tangentes distintas, que cortan a C en tres puntos cada una. Si cada lugar l_i con centro en p tiene una parametrización:

$$\bar{x_i} = t^{r_i} \text{ y } \bar{y} = t^{r_i+s_i} + \cdots$$

entonces el número de intersecciones de cualquier recta L con C en p es:

$$\sum_i r_i$$

pero como p es un punto doble concluimos $\sum_i r_i = 2$. Por lo tanto tenemos a lo mas dos lugares con centro en p pero como en p tenemos tangentes distintas, tenemos exactamente dos lugares de orden 1. Como además queremos que las tangentes corten en tres puntos, tenemos que $3 = r_i + r_j + s_j = 2 + s_j$ con $i \neq j$, $1 \leq i \leq 2$ y $1 \leq j \leq 2$ y por lo tanto en ambos lugares, la clase debe ser igual a 1.

Inversamente, si tenemos dos lugares de orden 1 y clase 1 con centro en el origen y cuyas tangentes son distintas entre sí, entonces el origen debe ser un punto doble con dos tangentes distintas que cortan a cada una en tres puntos, lo cual termina la demostración de la parte a.

Para demostrar la parte b observemos que es claro que si tenemos un único lugar con centro en el origen de orden 2 y clase 1, entonces es una cúspide simple. Ahora bien, sólo tenemos dos posibilidades de tener una única tangente en un punto doble: tener un único lugar de orden 2 y clase 1 o tener dos lugares de orden 1 que determinen la misma tangente. Vamos a demostrar que esto último no puede darse.

Supongamos que alrededor del origen tenemos dos lugares, l_1 y l_2 de orden 1, clases s_1 y s_2 respectivamente; entonces, la recta tangente corta a C en $1+1+s_1+s_2 \geq 4$, lo cuál contradice el hecho de ser una cúspide simple.

Por lo tanto, es absurdo suponer que tenemos dos lugares y por lo tanto sólo podemos tener un lugar de orden 2 y de clase 3, lo cuál termina la demostración de la parte b. ■

Teorema (Fórmula de Plücker): *Si una curva tiene como únicos puntos singulares nodos o cúspides simples, entonces:*

$$m = n(n-1) - 2N - 3K$$

donde N es el número de los nodos simples y K el número de las cúspides simples.

Demostración: Para realizar la demostración analicemos la forma que debe de tenerf en el caso de tener un nodo o una cúspide en el origen de coordenadas.

Si en p = (0,0) tenemos un punto doble, entonces:

$$f_x(p) = f_y(p) = 0$$

lo cual nos implica que f no puede tener términos lineales, es decir:

$$f(x,y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + h(x,y) \text{ con } \partial(h) \geq 3$$

y si suponemos que la recta Y = 0 es tangente a nuestra curva en el origen, entonces podemos suponer que existe al menos un lugar l con centro en el origen y con una parametrización de la forma:

$$\bar{x} = t^r \text{ y } \bar{y} = t^{r+s} + \cdots \quad \text{siendo r el orden y s, la clase del lugar.}$$

Como :

$$f(l) = a_{20}t^{2r} + g(l) \text{ con } O_l(g) > 2r$$

entonces, como f(l) = 0, concluimos que $a_{20} = 0$.

Por lo tanto el desarrollo en serie de Taylor de f(λt,μt) nos queda de la siguiente forma:

$$f(\lambda t, \mu t) = a_{11}\lambda\mu + a_{02}\mu^2 + g(x,y) \text{ con } \partial g \geq 3$$

Si $a_{11} \neq 0$, entonces tenemos dos tangentes distintas determinadas por la ecuación:

$$a_{11}\mu\lambda + a_{20}\mu^2 = 0$$

en cuyo caso tenemos un nodo; si por el contrario $a_{11} = 0$ tenemos una recta doble determinada por la ecuación:

$$\mu^2 = 0$$

y por lo tanto tenemos una cúspide.

En resumen, podemos considerar lo siguiente:

1) Si f tiene un nodo en el origen, entonces podemos considerar que f tiene la siguiente forma:

$$f(x,y) = a_{02}y^2 + a_{11}xy + g(x,y) \text{ con } \partial(g) \geq 3$$

2) Si f tiene una cúspide, entonces podemos considerarla de la forma:

$$f(x,y) = a_{02}y^2 + g(x,y) \text{ con } \partial(g) \geq 3$$

Para calcular δ hagamos lo siguente:

Si tenemos un nodo simple, entonces tenemos exactamente dos lugares de orden 1 y de clase 1, entonces para cada uno de ellos tenemos una parametrización de la forma:

$$\bar{x} = t \text{ y } \bar{y} = t^2 + \cdots$$

y por lo tanto:

$$\delta(l) = O(f_y(l)) = O(2a_{02}(t^2 + \cdots) + a_{11}t + g_y) = 1 \text{ con } a_{11} \neq 0$$

Análogamente, si tenemos una cúspide simple, entonces tenemos un único lugar que podemos parametrizar de la siguiente forma:

$$\bar{x} = t^2 \text{ y } \bar{y} = t^3 + \cdots$$

y por lo tanto en este caso $\delta = 3$.

Luego entonces si tenemos una curva que sólo tiene nodos o cúspides la fórmula de la clase se reduce a:

$$m = n(n-1) - 2N - 3K \quad \blacksquare$$

Sección 2: Puntos simples de inflexión.

En esta sección vamos a estudiar a otro importante invariante de las curvas: el número de sus puntos simples de inflexión. De manera análoga a la sección anterior, daremos primero una fórmula general y obtendremos después las fórmulas de Plücker como un corolario.

Para comenzar, demos la siguiente

> **Definición:** *Sea una curva p, un punto simple sobre la curva y T, la tangente a la curva en p entonces decimos que p es un punto de inflexión de C si la multiplicidad de la intersección de T a C en p es mayor que tres.*

Observemos que en nuestra definición los puntos de inflexión son simples y que se sigue de ésta que para que una curva contenga un punto de inflexión, debe de ser de grado al menos tres.

> **Definición:** *Dada una curva proyectiva $C = V(F)$, definimos el hessiano de C como el determinante de la matriz de las segundas derivadas de F*

En lo que sigue consideraremos que p = (0,0) es un punto simple en C, cuya única tangente está dada por la recta Y = 0; entonces existe un único lugar l con centro en p de orden uno, parametrizado de la forma:

$$\bar{x} = t \text{ y } \bar{y} = t^{s+1} + \cdots$$

> **Lema:** *p es un punto de inflexión, si y solamente si, $s \geq 2$.*

Demostración : Como estamos suponiendo que p es el origen de coordenadas y que la tangente al lugar esta dada por la recta L: Y = 0, entonces el número de intersecciones de la tangente con C esta dado por:

$$\sum_{l \in C} O(L(l)) = O(L(\bar{x},\bar{y})) = O(t^{s+1} + \cdots) = s+1$$

y se sigue el resultado de la definición de punto de inflexión. ■

Lema: *Tenemos la siguiente igualdad:*

$$H(x) = \begin{vmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n}{n-1}F & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \frac{(n-1)^2}{x_0^2}$$

Demostración: Aunque la demostración es consecuencia directa del lema de Euler requiere de muchos cálculos y es poco ilustrativa, por lo cuál la dejamos como apéndice.

Lema: *Si $C = V(f)$ y $(0,0)$ es un punto simple de inflexión entonces podemos suponer que f es de la forma:*

$$f = y - x^{s+1} + g(x,y)$$

en donde g(x, y) no contiene términos de la forma ayy g es cero o $O(g(\bar{x},\bar{y})) \geq s+2$

Demostración: Como (0,0) es un punto simple debe de cumplir:

$$f_x(0,0) \neq 0 \text{ o } f_y(0,0) \neq 0$$

entonces, sin pérdida de generalidad, supongamos que $f_y(0,0) \neq 0$; entonces f debe ser de la forma: $f = ay + h(x,y)$ en donde h es un polinomio en x y y que no contiene términos lineales en y. Más aún, podemos suponer sin perder generalidad, que a = 1.

Como f (1) = 0, tenemos que:

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{y} + h(\bar{x},\bar{y}) = (t^{s+1} + \cdots) + h(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

por lo cuál en la fórmula anterior debe de existir un término en h de la forma $-x^{s+1}$.

Por lo tanto, podemos escribir:

$$f = y - x^{s+1} + g(x,y)$$

donde g es cero o no contiene términos lineales en y. Mas aún, no contiene potencias de x de exponente menor a s+2 , dado que si contuviera alguno no se cancelaria y $f(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$.

De donde concluímos $O(g(\bar{x},\bar{y})) \geq s+2$ ∎

Lema: *Si en* (0,0) *tenemos un punto simple, centro de un único lugar parametrizado de la forma* $\bar{x}=x$ y $\bar{y}=x^{s+1}+\cdots$ *, entonces el hessiano de f en* (0,0) *tiene orden s-1*

Demostración: Por los lemas anteriores, tenemos que el hessiano de f, H(x) cumple:

$$H(l)=\begin{vmatrix} \frac{n}{n-1}f(l) & f_x(l) & f_y(l) \\ f_x(l) & f_{xx}(l) & f_{xy}(l) \\ f_y(l) & f_{xy}(l) & f_{yy}(l) \end{vmatrix}$$

en donde $l=(\bar{x},\bar{y})$. Por lo tanto como podemos escribir $f=y-x^{s+1}+g$ tenemos que:

$$H(l)=\begin{vmatrix} 0 & -\alpha x^s+g_x(l) & 1+g_y(l) \\ -\alpha x^s+g_x(l) & -s\alpha x^{s-1}+g_{xx}(l) & g_{xy}(l) \\ 1+g_y(l) & g_{xy}(l) & g_{yy}(l) \end{vmatrix}$$

con $\alpha=s+1$.

Si g es igual a cero, tenemos $H(l)=s\alpha x^{s-1}$ y el resultado se sigue de manera inmediata.

Si $g\neq 0$, entonces el orden de g es por lo menos s+2y por lo tanto :

$$O(g_x)\geq s+1 \text{ y } O(g_{xx})\geq s$$

Además, como g no contiene términos de la forma ay, los términos de menor orden en y deben ser de la forma xy, de donde concluímos:

$$O(g_y)\geq 1$$

Por lo tanto tenemos las siguientes desigualdades:

1) $A=O((-\alpha x^s+g_x)^2 g_{yy})\geq 2s$

2) $B=O((-\alpha x^s+g_x)(1+g_y)g_{xy})\geq s$

3) $C=O(1+g_y)g_{xy}(ax^s+g_x)\geq s$

4) $D=O(-(1+g_y)^2(-\alpha s x^{s-1}+g_{xx}))\geq s-1$.

Observemos que la desigualdad 4 es estricta sólo en el caso en que los coeficientes de x^{s-1} se anulen, pero como $O(g_{xx})\geq s$ el único coeficiente de x^{s-1} es αs y como $s\geq 2$, entonces $s\alpha\neq 0$ y por lo tanto D = s-1.

Entonces podemos concluir:

$$O(h(\bar{x},\bar{y})=O(A+B+C+D)\geq \min\{A,B,C,D\}=s-1$$

pero como solamente en D tenemos términos enx^{s-1} se da la igualdad y por lo tanto tenemos el resultado buscado. ∎

Como una consecuencia inmediata de los lemas y observaciones anteriores tenemos el siguiente

Teorema: *Si* $p=(0,0)$ *es un punto simple entonces son equivalentes*:

a) *p es un punto de inflexión de C*

b) $O(H(p))>0$

c) $H(p)=0$

Demostración: p es un punto de inflexión $\Leftrightarrow s\geq 2\Leftrightarrow O(H)=s-1>0\Leftrightarrow H(p)=0$ ∎

Corolario: *Si p es punto simple de inflexión, entonces* $p\in C\cap V(H)$

Lema: *Si p es un punto singular de* f, *entonces* $p\in V(H)$

Demostración: Supongamos que $C=V(F)$; entonces si p es un punto singular de F, tenemos que $F(p)=F_1(p)=F_2(p)=0$ y por lo tanto :

$$H(p)=\frac{(n-1)^2}{x_o^2}\begin{vmatrix}\frac{n}{n-1}F(p) & F_1(p) & F_2(p)\\ F_1(p) & F_{11}(p) & F_{12}(p)\\ F_2(p) & F_{12}(p) & F_{22}(p)\end{vmatrix}=\frac{(n-1)^2}{x_0^2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & F_{11}(p) & F_{12}(p)\\ 0 & F_{12}(p) & F_{22}(p)\end{vmatrix}=0$$ ∎

Teorema: *El número de puntos de inflexión i esta dado por la siguiente fórmula:*

$$i=3n(n-2)-\sum_{l}O_l(H)$$

en donde l corre sobre todos los lugares con centro en un punto singular.

Demostración: Si consideramos nuestra curva dada por un polinomio homogéneo F de grado n, entonces el grado de F_{ij} con $i,j \in \{0,1,2\}$ es n-2 y por lo tanto el hessiano esta dado por un polinomio homogéneo de grado 3(n-2), de donde podemos concluír que el número total de intersecciones contanto multiplicidades de $V(F) \cap V(H)$ es 3 n(n-2).

Por otra parte si $p \in V(F) \cap V(H)$, entonces p es un punto simple de inflexión o un punto singular de F y por lo tanto :

$$3n(n-2) = \sum_{l \in F} O(H(l) = \sum_{i} O(H(l_i)) + \sum_{s} O(H(l_s))$$

en donde l_i son los lugares con centro en un punto simple de inflexión y l_s son los lugares con centro en un punto singular. Claramente $i = \sum_{i} O(H(l_i))$ y despejando obtenemos el resultado. ■

Teorema: (*Fórmula de Plücker*) *Si en una curva* $C = V(F)$ *sólo tenemos como puntos singulares nodos o cúspides simples, entonces el número de puntos de inflexión i está dado por la siguiente ecuación:*

$$i = 3n(n-2) - 6N - 8K$$

en donde N *es el número de nodos y* K *el número de cúspides simples.*

En la demostración sólo utilizaremos nodos o cúspides simples, por lo cuál, abusando del lenguaje les llamaremos simplemente nodos y cúspides.

Demostración: Análogamente a lo que hicimos en la sección anterior, basta con calcular cuanto vale O(H(l)) cuando l es un lugar con su centro en un nodo o una cúspide.

Consideremos primero l un lugar con centro en un nodo entonces como vimos en la sección **1**, podemos considerar a f de la siguiente forma:

$$f(x,y) = a_{02}y^2 + a_{11}xy + g(x,y) \text{ con } \partial(g) \geq 3 \text{ y } a_{11} \neq 0$$

Para calcular O(H(l)) necesitamos estudiar el comportamiento de g. En general g tiene la siguiente forma:

$$g(x,y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + q(x,y) \text{ con } \partial(q) \geq 4$$

Para calcular el orden de h calcularemos primero las siguientes parciales.

1) $f_x = a_{11}y + 3a_{03}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 + q_x$

2) $f_y = a_{11}x + 2a_{02}y + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2 + q_y$

3) $f_{xx} = 6a_{03}x + 2a_{21}y + q_{xx}$

4) $f_{xy} = a_{11} + 2a_{21}x + 2a_{12}y + q_{xy}$

5) $f_{yy} = 2a_{02} + 2a_{12}x + 6a_{03}y + q_{yy}$

Por otra parte, como l es un lugar con centro en un nodo, tiene una parametrización:

$$\bar{x} = t \text{ y } \bar{y} = t^2 + \cdots$$

Si $q \neq 0$, entonces el grado de q es mayor que cuatro y por lo tanto tenemos :

$$O_l(q_x),\ O_l(q_y) \geq 3 \text{ y } O_l(q_{xx}),\ O_l(q_{xy}),\ O_l(q_{yy}) \geq 2$$

de donde deducimos que:

$$O_l(f_x) = O_l(a_{11}y + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 + q_x) \geq O_l(a_{11}y + 3a_{30}x^2) = 2$$
$$O_l(f_y) = O_l(a_{11}x + 2a_{02}y + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy) \geq O_l(a_{11}x) = 1$$

Y de hecho tenemos que $O_l(f_x) = 2$ si $a_{11} \neq -3a_{30}$ y $O_l(f_y) = 1$, dado que $a_{11} \neq 0$, por lo cuál:

$$O_l(f_x^2 f_{yy}) = 2 + 2 + O_l(2a_{02} + g_{yy}) \geq 4$$
$$O_l(f_x f_y f_{xy}) \geq 2 + 1 + O_l(a_{11}) = 3,\ \text{dado que } a_{11} \neq 0$$
$$O_l(f_y^2 f_{xx}) = 2 + O_l(6a_{30}x + 2a_{21}y) \geq 3$$

en donde $O_l(f_x f_y f_{xy}) = 3$ si $a_{11} \neq -3a_{30}$ y $O_l(f_y^2 f_{xx}) = 3$, en caso de que $a_{30} \neq 0$.

Dado que no puede suceder simultaneamente que $a_{11} = -3a_{30}$ y $a_{30} = 0$ tenemos:

$$O_l(H) = O_l(-f_x^2 f_{yy} + 2f_x f_y f_{xy} - f_y^2 f_{xx}) \geq \min\{O_l(-f_x^2 f_{yy}), O_l(2f_x f_y f_{xy}), O_l(f_y^2 f_{xx})\} = 3$$

Observemos que los coeficientes de los sumandos de orden 3 estan dados por:

$$a_{11}^2(a_{11} + 3a_{03}) \text{ en } f_x f_y f_{xy} \text{ y } a_{11}^2 6a_{30} \text{ en } f_y^2 f_{xx}$$

que son claramente distintos y por lo tanto de da la igualdad.

Si en el origen tenemos una cúspide, entonces sabemos que existe un lugar con centro en el origen, parametrizado de la siguiente forma:

$$\bar{x} = t^2 \text{ y } \bar{y} = t^3 + \cdots$$

y podemos pensar a f de la siguiente forma:

$$f(x,y) = y^2 + g(x,y) \text{ con } \partial(g) \geq 3$$

De hecho como $f(l) = 0$ podemos reecribir la ecuación anterior:

$$f(x,y) = a_{02}y^2 - a_{03}x^3 + yp(x,y) + q(x,y)$$

en donde $p(x,y)=a_{12}x^2+a_{21}xy+a_{03}y^2$ y por lo tantoes homgeneo de grado 2 y $\partial(q)\geq 4$.

Para calcular el hessiano observemos las siguientes propiedades de p y q en caso de ser diferentes de cero.

Como p es homogéneo de orden dos, entonces p_x y p_y son homogéneos de grado uno y p_{xx}, p_{yy} y p_{xy} son homogéneos de grado cero. Análogamente, como q tiene por lo menos grado cuatro, podemos concluír que q_x y q_y son homogéneos de grado tres y q_{xx}, q_{xy} y q_{yy} son homogéneos de grado dos.

Por lo tanto:

$$O_l(p)\geq 4,\ O_l(p_x) \text{ y } O_l(p_y)\geq 2$$

y

$$O_l(q_x),\ O_l(q_y)\geq 6 \text{ y } O_l(q_{xx}), O_l(q_{xy}) \text{ y } O_l(q_{yy})\geq 4$$

Calculando el orden en las parciales obtenemos que:

$$\begin{aligned}
O_l(f_x) &= O_l(-3a_{03}x^2+yp_x+q_x)\geq O_l(a_{03}x^2)=4\\
O_l(f_y) &= O_l(2a_{02}y+p+yp_y+q_y)\geq O_l(a_{02}y)=3\\
O_l(f_{xx}) &= O_l(-6a_{03}x+yp_{xx}+q_{xx})\geq O_l(a_{03}x)=2\\
O_l(f_{xy}) &= O_l(p_x+yp_{xy}+q_{xy})\geq O_l(p_x)=2\\
O_l(f_{yy}) &= O_l(2a_{02}+2p_y+p_{yy}+q_{yy})\geq O_l(a_{02})=0
\end{aligned}$$

y de hecho, como a_{03} y a_{02} son diferentes de cero, tenemos que:

$$O_l(f_x)=4,\ O_l(f_y)=3,\ O_l(f_{xx})=2,\ \text{y } O_l(f_{yy})=0$$

Por lo tanto:

$$O_l(h)=O_l(-f_x^2f_{yy}+2f_xf_yf_{xy}-f_y^2f_{xx})\geq \min\{8,9,8\}=8$$

ya que los monomios de grado 8 son $(-3a_{03}x)^2$ en $-f_x^2f_{yy}$ y $(2a_{02})^2a_{03}xy^2$ en $f_y^2f_{xx}$ no se cancelan y se da la igualdad.

Por lo tanto si queremos contar el número total de puntos simples d inflexión en el caso en que sólo tenemos nodos o cúspides tenemos:

$$i=3n(n-2)-6N-8K$$

■

Sección 3 : Ejemplos:

En esta sección calcularemos la clase y la inflexión en algunos casos concretos.

Ejemplo 1: *La cúbica dada como los ceros de $f(x,y) = y - x^3$ tiene clase 3 y un sólo punto de inflexión.*

Demostración: Sea F el polinomio homogéneo asociado a f, entonces:

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_1x_2^2 - x_0^3$$

luego:

$$F_{x_0} = 3x_0^2,\ F_{x_1} = x_2^2 \text{ y } F_{x_2} = 2x_1x_2$$

de donde concluímos que para que las tres parciales sean simultáneamente cero necesitamos $x_0 = x_2 = 0$ y por lo tanto la curva tiene un único punto singular que corresponde al punto $(0:0:1)$.

Observemos que este punto corresponde al punto al infinito en la dirección del eje Y y que es el único punto al infinito del plano xy en F.

Para ver de que tipo de singularidad se trata, sea:

$$g(x_0,x_2) = F(x_0 : 1 : x_2) = x_2^2 - x_0^3$$

la función que se obtiene a partir de deshomogeneizar en la segunda coordenada. Nuestro punto es el origen de coordenadas y claramente, con centro en él, tenemos un único lugar parametrizado de la forma:

$$\overline{x_0} = t^2 \text{ y } \overline{x_2} = t^3$$

y por lo tanto concluimos que la singularidad es una cúspide.

Aplicando las fórmulas de Plücker tenemos:

$$m = 3(2) - 3(1) = 3 \quad \text{y} \quad i = 3(3) - 8 = 1$$

El ejemplo anterior resulta un caso particular del siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: *Sólo existen tres tipos distintos de cúbicas irreducibles de clase 6,4 o3 y con 9,3 o1 puntos de inflexión respectivamente.*

Demostración: Para demostrar el ejemplo seguiremos varios pasos. Observemos que la demostración se reduce a demostrar que dada una cúbica esta es lisa o tiene un único punto singular de tipo cúspide o nodo; dado que si lo demostramos aplicando directamente las fórmulas de Plücker[7] obtenemos el resultado. Entonces nuestros pasos a seguir serán demostrar que a lo mas tenemos un punto doble y después demostrar que de existir debe ser un nodo o una cúspide.

Sea C = V (f) una curva cúbica con $\partial(f) = 3$.

Paso 1 : *Cualquier cúbica irreducible sólo puede tener por singularidades a puntos dobles.*

Demostración: La demostración de este paso se sigue directamente de la siguente observación geométrica:

si la cúbica tuviera dos puntos dobles entonces la recta que los une cortaría a la cúbica en cuatro puntos lo cual sólo es posible si dicha recta es una componente de la cúbica contradiciendo que esta es irreducible.

Paso 2 : *Dada una cúbica ireeducible sus puntos dobles son necesariamente cúspides o nodos.*

Demostración: Para la demostración de esta afirmación daremos dos demostraciones que ejemplifiquen el uso el concepto de lugar.

Primeramente daremos una demostración sin utilizar el concepto de lugar.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que en el origen de coordenadas tenemos un punto doble, entonces por la definición de punto doble si nuestra curva está dada como los ceros de un polinomio f, tenemos que el desarrollo de f $(\lambda, \mu t)$ en serie de Taylor tiene la siguiente forma:

$$f(\lambda t, \mu t) = (a\lambda^2 f_{xx} + b\lambda\mu f_{xy} + c\mu^2 f_{yy})t^2 + \cdots$$

en donde al menos uno de los coeficientes a, b o c es distinto de cero

Sin pérdida de generalidad, supongamos que la recta Y = 0 es tangente a nuestra curva en el origen; entonces, queremos que $\mu = 0$ sea raiz de $a\lambda^2 f_{xx} + b\lambda\mu f_{xy} + c\mu^2 f_{yy}$, lo cuál sucede sólo si a = 0. Por lo tanto, podemos considerar:

$$f(\lambda t, \mu t) = (b\lambda\mu f_{xy} + c\mu^2 f_{yy})t^2 + \cdots$$

[7] Recordemos que estamos llamandole nodos y cúspides a nodos y cúspide simples.

Si $b=0$ tenemos que $\mu=0$ es una raíz doble, es decir, tenemos sólo una tangente, mientras que si $b\neq 0$, entonces tenemos dos raices distintas y por lo tanto dos tangentes distintas.

Puesto que f es un polinomio cúbico, entonces en el desarrollo en serie de Taylor de f(λt,μt), el coeficiente de t^3 es diferente de cero y por lo tanto las tangentes cortan en tres puntos, de donde concluimos que si $b=0$, entonces tenemos una cúspide y si $b\neq 0$ tenemos un nodo.

La segunda demostración la haremos usando el concepto de lugar.

Si en el origen de coodenadas tenemos un punto doble, entonces todas las rectas que pasan por el origen, excepto sus tangentes cortan a este en dos puntos lo cual nos implica que la suma de los ordenes de los lugares con centro en el origen debe de ser dos y por lo tanto tenemos dos posibilidades dos lugares de orden 1 o un lugar de orden 2. Además, como nuestra curva es cúbica, entonces las tangentes cortan, a lo mas, en tres puntos, lo cuál nos implica que la clase de los lugares debe ser uno, es decir ,tenemos un nodo o una cúspide.

Apéndice

En este apéndice demostraremos el siguiente teorema, usado en la teoria:

> **Teorema:** *Sea* F *un polinomio homogéneo de grado* n *y* H(x) *su hessiano entonces tenemos la siguiente igualdad*:

$$H(x)=\begin{vmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} \\ F_{01} & F_{11} & F_{12} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n}{n-1}F & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} \frac{(n-1)^2}{x_0^2}$$

Demostración: Por el lema de Euler tenemos las siguientes ecuaciones:

$$x_iF_i = nF - x_1F_1 - x_2F_2 \text{ y } x_0F_{0i} = (n-1)F_i - x_1F_{1i} - x_2F_{2i}$$

de donde si definimos $A = n-1$, tenemos las siguientes igualdades:

1) $x_0^2F_{00} = x_0(AF_0 - x_1F_{10} - x_2F_{20})$
$= AnF - 2Ax_1F_1 - 2Ax_2F_2 + x_1^2F_{11} + x_2^2F_{22} + 2x_1x_2F_{12}$

2) $-x_0^2F_{01}^2 = -(AF_1 - x_1F_{11} - x_2F_{12})^2$
$= -A^2F_1^2 + 2Ax_1F_1F_{11} + 2Ax_2F_1F_{12} - x_1^2F_{11}^2 - x_2^2F_{12}^2 - 2x_1x_2F_{11}F_{12}$

3) $-x_0^2F_{02}^2 = -(AF_2 - x_1F_{12} - x_2F_{22})^2$
$= -A^2F_2^2 + 2Ax_1F_2F_{12} + 2Ax_2F_2F_{22} - x_1^2F_{12}^2 - x_2^2F_{22}^2 - 2x_1x_2F_{12}F_{22}$

4) $x_0^2F_{01}F_{02} = (AF_1 - x_1F_{11} - x_2F_{12})(AF_2 - x_1F_{12} - x_2F_{22})$
$= A^2F_1F_2 - Ax_1F_1F_{12} - Ax_2F_1F_{22} - Ax_1F_{11}F_2 + Ax_2F_2F_{12} +$
$+ x_1x_2F_{12}F_{22} + x_1x_2F_{12}^2 + x_2^2F_{12}F_{22} + x_1^2F_{11}F_{12}$

Como

$$x_0^2H(x) = x_0^2(F_{00}F_{11}F_{22} - F_{00}F_{12}^2 - F_{01}^2F_{22} - F_{11}F_{02}^2 + 2F_{01}F_{02}F_{12})$$

tenemos que:

$$x_0^2H(x) = A^2\left(\tfrac{n}{A}FF_{11}F_{22} - \tfrac{n}{A}FF_{12}^2 - F_1^2F_{22} - F_2^2F_{11} + 2F_1F_2F_{12}\right)$$

y por lo tanto:

y por lo tanto:

$$H(x) = \frac{(n-1)^2}{x_0^2}\begin{vmatrix} F & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}$$

■

Bibliografía:

1) ABHYANKAR, S, 1988, "What is the difference between a Parabola and Hyperbola?", *The mathe matical intelligencer*, New York, Estados Unidos.

2) CHRYSTAL, 1904, *Algebra*, Vol II, New York, Estados Unidos

3) KUROSCH, A, 1977, *Curso de algebra superior*, Moscu, URSS

4) GRIFFITS, P y HARRIS, J, 1978, *Principles of algebraic geometry*, Estados Unidos.

5) WALKER, R, 1949, *Algebraic curves*, New York, Estados Unidos.