

33  
201.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS  
PROFESIONALES ACATLAN**



**SISTEMA DE SIMULACION PARA PRONOSTICAR EL  
FINANCIAMIENTO EN LOS PLANES DE PENSIONES**

**T E S I S**

**PARA OBTENER EL TITULO DE  
LICENCIADO EN ACTUARIA**

**QUE PRESENTA :**

**MIGUEL ZAMUDIO MONTAÑO**

**ASESOR : ACT. MARIO ARRIAGA PARRA**

**ACATLAN EDO. DE MEXICO.,**

**FEBRERO DE 1994**



**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA  
PROGRAMA DE ACTUARIA Y M.A.C.

SR. MIGUEL ZAHUDIO MONTAÑO  
Alumno de la carrera de Actuaría  
P r e s e n t e .

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 6 de agosto de 1993, me complace notificarle que esta Jefatura tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesis: "SISTEMA DE SIMULACION PARA PRONOSTICAR EL FINANCIAMIENTO EN LOS PLANES DE PENSIONES", el cual se desarrollará como sigue:

INTRODUCCION

- CAP. I ASPECTOS GENERALES DE LOS PLANES PRIVADOS DE PENSIONES.
- CAP. II ASPECTOS ACTUARIALES BASICOS EN RELACION A LOS PLANES PRIVADOS DE PENSIONES.
- CAP. III DESARROLLO DEL SISTEMA DE SIMULACION.
- CAP. IV. TRASLACION Y VALIDACION DEL SISTEMA.
- CONCLUSIONES.
- BIBLIOGRAFIA.

Asimismo fué designado como Asesor de Tesis el -  
ACT. MARIO ARRIAGA PARRA, Profesor de esta Escuela.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá presentar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la tesis.

A T E N D I D O M E N T E  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Acatlán, Ed. de Mex. Enero 31 de 1993.

ACT. LUIS RIVERA BECERRA  
Jefe del Programa de Actuaría  
Y MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIONALES  
LMRB'cg,

QUERIA TAN SOLO INTENTAR VIVIR AQUELLO  
QUE TENDIA A BROTAR ESPONTANEAMENTE DE MI.  
¿PORQUE HABIA DE SERME TAN DIFICIL?  
HERMANN HESSE.

Tan pobre soy que hasta de gracias soy  
escaso, pero les agradezco todo lo que han  
hecho por mi; esto lo llevo en mi corazón  
como una deuda secreta que me complace  
pensar que nunca podré pagar.

M.Z.M.

Con todo cariño y repeto, doy  
las gracias a dos seres que me  
dieron la vida y me han sabido  
guiar hasta este momento, si a  
mis queridos padres: Miguel e  
Inés, los quiero.

A mis hermanos: Sergio,  
Margarita, Sonia y Evangelina,  
por su comprensión y apoyo  
durante todo este tiempo.

A mi sobrino: Sergio.

A José Luis.M.R. por su apoyo  
incondicional e invaluable  
ayuda y por su gran amistad.

Un hermano no siempre es un  
amigo, pero un amigo será  
siempre un hermano.

FRANKLIN.

A todas aquellas personas que  
de alguna forma contribuyeron  
a la realización del presente  
trabajo.

# INDICE

	Pág
INTRODUCCION	i
CAPITULO I.	
ASPECTOS GENERALES DE LOS PLANES DE PENSIONES.	1
CAPITULO II.	
ASPECTOS BASICOS ACTUARIALES EN RELACION A LOS PLANES DE PENSIONES.	5
II.1. Estructura General de los Planes de Pensiones.	5
II.2. Hipótesis Actuariales y Funciones Actuariales Básicas.	8
II.2.1. Hipótesis Actuariales.	8
II.2.2. Funciones Actuariales Básicas.	11
II.3. Métodos de Financiamiento.	16
II.3.1. Medidas del Pasivo de un Plan de Pensiones.	17
II.3.2. Conceptos Básicos del Financiamiento en Planes de Pensiones.	18
II.3.3. Métodos de Financiamiento.	21
II.4. Población de un Plan de Pensiones.	26
II.5. Concepto y Propósito de los Pronósticos de Financiamiento.	28
II.5.1. Pronósticos de Financiamiento.	29
CAPITULO III.	
FORMULACION DEL SISTEMA.	31
III.1. Simulación de Sistemas.	31
III.1.1. Función de los Modelos de Simulación.	32
III.1.2. El Proceso de Simulación.	33
III.2. Definición del Sistema.	34
III.2.1. Representación Estática.	35
III.2.2. Representación Dinámica.	37
III.3. Formulación del Modelo.	38
III.3.1. Especificación del Propósito del Sistema.	39

	Pág
III.3.2. Especificación de Componentes, Parámetros, Variables y Restricciones.	40
III.3.3. Parámetros, Variables de Estado y Variables Explicativas del Modelo.	45
III.3.4. Variables Auxiliares.	46
III.3.5. Algoritmo para la Simulación del Sistema.	47
III.3.6. Relaciones Funcionales.	49
<b>CAPITULO IV.</b>	
<b>TRASLACION Y VALIDACION DEL SISTEMA DE SIMULACION.</b>	<b>52</b>
IV.1. Traslación del Modelo.	52
IV.2. Validación del Modelo.	55
IV.2.1. Validación del Componente Población.	56
IV.2.2. Validación Global del Sistema.	71
<b>CONCLUSIONES.</b>	<b>91</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.</b>	<b>93</b>
<b>APENDICE I.</b>	<b>94</b>
<b>APENDICE II.</b>	<b>113</b>
<b>APENDICE III.</b>	<b>117</b>

## INTRODUCCION

CREO QUE SOY UN PINTOR BASTANTE MEDIOCRE EN LO QUE PRODUZO, LO QUE YO

CONSIDERO DEMASIADO EN MI VISION, NO LO QUE REALIZO EN ESTE MOMENTO.

SALVADOR DALI

Los planes de pensiones son modelos cuyo comportamiento en el tiempo resulta ser impredecible y difícil de describir de una manera general, debido a la gran cantidad de variables o factores interrelacionados que intervienen en ellos.

Un estudio detallado de los planes de pensiones, no sólo es interesante desde el punto de vista teórico, sino que también en la práctica resulta ser de importancia para el actuario consultor, debido a que su trabajo fundamentalmente consiste en saber pronosticar el comportamiento de un plan de pensiones bajo ciertas hipótesis, además de poder cuantificar el efecto de unas variables sobre otras en un periodo de tiempo, y en general poder tomar decisiones que afecten el comportamiento del plan de pensiones según sus propias conclusiones, resulten o no apegadas a la realidad.

Por otra parte, el avance tecnológico permanente que se observa en el área de computación, permite aplicaciones de la más amplia variedad, las cuales deben de ser aprovechadas también en el área de las pensiones.

El objetivo del presente trabajo, consistió en el desarrollo de un sistema de simulación, enfocado desde el punto de vista de sistemas, de tal forma que permita representar en forma sencilla, el proceso de financiamiento de un plan de pensiones y, simultáneamente, que proporcione fundamentos adicionales a los existentes para tomar decisiones sobre la evolución del plan.

En la primera parte del trabajo, presentamos brevemente el proceso de implantación de un plan de pensiones.

En la segunda parte del trabajo, introducimos algunos conceptos básicos que son indispensables para el desarrollo de los capítulos siguientes, y que corresponden a los aspectos técnicos de un plan:

- a) Estructura general de un plan de pensiones,
- b) Conceptos actuariales básicos y
- c) Fundamentos de la teoría sobre el financiamiento en planes de pensiones.

En la tercera parte, proponemos el plan que se llevará a cabo para el desarrollo del sistema, el cuál está basado en la teoría general de simulación de sistemas; implementando las dos primeras etapas del proceso de simulación, que consisten en:

- a) Definición y
- b) Formulación del Sistema.

En la cuarta parte de este trabajo, se describen las etapas correspondientes a la traslación del sistema a una computadora personal por medio de un lenguaje de programación, y a la validación del buen funcionamiento del sistema.

Finalmente, damos las conclusiones obtenidas en este trabajo.



# CAPITULO I.

## ASPECTOS GENERALES DE LOS PLANES DE PENSIONES.

PUSE TODO MI GEMO EN MI VIDA.

Y SOLO MI TALENTO EN MIS OBRAS.

OSCAR WILDE.

De acuerdo con el criterio adoptado por la AMACBE<sup>1</sup> el establecer un plan de pensiones en México, significa el que una empresa, defina ciertas políticas de retiro para sus empleados cuando éstos alcancen ciertas condiciones de edad y/o antigüedad.

Para la implantación de un plan de pensiones en México, se llevan a cabo cinco etapas fundamentales que resultan decisivas en el cumplimiento de los objetivos del plan, éstas son:

- a) Diseño,
- b) Valuación Actuarial,
- c) Instalación,
- d) Comunicación y
- e) Administración.

### Diseño

Para poder realizar el diseño de un plan de pensiones en México, deben tomarse en cuenta ciertas características que están relacionadas con el tipo de población al que está dirigido, además de que influyen algunos elementos de carácter general que están dados por las leyes que constituyen el marco legal en el que cabe el diseño de los planes de pensiones en México.

### Valuación Actuarial

Una vez que la estructura del plan de pensiones ha quedado definida, el actuario se limita a calcular el valor actual de los beneficios proyectados.

<sup>1</sup>Asociación Mexicana de Actuarios Consultores en Planes de Beneficio para Empleados. A.C.

Esto implica que el costo de un plan de pensiones, está dado por el monto de las pensiones que se paguen a quienes tengan derecho de acuerdo a las políticas establecidas en la etapa anterior, más los gastos que se originen por dichos pagos y menos los intereses de los fondos que eventualmente pudieran crearse para su financiamiento.

El principal objetivo de esta etapa es el de estimar en base a las hipótesis actuariales dichos costos, con el propósito de conocerlos y muy probablemente prevenirlos. Una vez calculado el valor presente de todos los beneficios que habrán de pagarse en el futuro, se debe definir la forma en que los recursos necesarios se acumularán para cubrir todas las eventualidades esperadas.

A los procedimientos para calcular dichas contribuciones, se les conoce como: **Métodos de Financiamiento ó Métodos Actuariales de Costeo**, y con ellos se determina la mayor o menor rapidez con los que los recursos del plan se acumularán.

### **Instalación**

La instalación de un plan de pensiones en México, es una labor conjunta entre la empresa y el actuario consultor, a fin de formalizar legalmente los documentos que regirán el financiamiento del plan, y esta etapa consiste básicamente en la redacción del texto del plan, que es el reglamento de operación interna del mismo; la celebración del contrato correspondiente al instrumento de financiamiento, que consta de las siguientes opciones:

- a) Contrato de Fideicomiso,
- b) Contrato Mercantil con una Casa de Bolsa o
- c) Contrato con una Aseguradora;

y el aviso que debe darse a la SHCP<sup>2</sup>, al cuál debe anexarse el texto del plan, el contrato celebrado con la agencia de financiamiento y la nota técnica actuarial, acreditándose la personalidad de quien la presente.

### **Comunicación**

Además de cumplir con lo señalado por las leyes que constituyen el marco legal, en relación a la comunicación de los beneficios para empleados, la comunicación efectiva del plan de pensiones a sus participantes y beneficiarios es esencial para lograr los objetivos del mismo. Al establecer un plan de pensiones, la mayoría de las empresas, espera retener a su personal productivo, y si el plan no es bien comunicado, puede no ser apreciado e incluso puede ser ignorado hasta el momento del retiro.

Los planes de beneficios para empleados, en general, son vistos como herramientas para construir y mantener una moral alta en el ambiente de trabajo, así como para afrontar la responsabilidad ética y social del empresario dentro de la relación laboral.

La empresa debe asegurarse que cuando se implante un plan de pensiones, los participantes entiendan los objetivos, alcances y funcionamiento del plan. Para lograr esto se pueden utilizar desde audiovisuales, juntas de personal, hasta folletos explicativos.

### **Administración**

Por administración de un plan de pensiones, debe entenderse el conjunto de acciones que son llevadas a cabo para lograr el mejor funcionamiento de éste.

---

<sup>2</sup>Secretaría de Hacienda y Crédito Público.

Durante esta etapa el actuario lleva a cabo valuaciones actuariales periódicas, comúnmente anuales, para determinar el valor presente de los beneficios futuros del plan, así como calcular las contribuciones para el siguiente período, detectando las posibles desviaciones del plan, que ocurran entre la experiencia real y la esperada, y de esta forma darle cumplimiento a los requisitos fiscales del plan de pensiones.

## **CAPITULO II. ASPECTOS BASICOS ACTUARIALES EN RELACION A LOS PLANES DE PENSIONES.**

MI HONOR ME OBLIGA A HACER SIEMPRE

LO QUE DECIDA LA SANGUIJA

SHAKESPEARE.

### **II.1 Estructura General de los Planes de Pensiones.**

Por estructura general de los planes de pensiones, debemos entender en términos generales, aquel conjunto de políticas establecidas por la empresa, las cuales contienen las condiciones y fórmulas que determinan los beneficios que se otorgarán, quiénes tienen derecho y bajo qué condiciones, la forma en que los montos serán calculados, cómo serán pagados y principalmente de dónde se obtendrán los recursos necesarios para poder financiar dicho plan.

Considerando los planes de pensiones por retiro, de los cuales nos ocupamos en este trabajo, la estructura queda definida de la siguiente manera:

#### **Requisitos de Elegibilidad:**

- a) Edad Mínima
- b) Antigüedad Mínima
- c) Edad Máxima de ingreso

#### **Condiciones de Retiro:**

- a) Retiro Normal
- b) Retiro Anticipado
- c) Retiro Diferido

#### **Monto de la Pensión:**

- a) Salario Pensionable
- b) Servicios Acreditables
- c) Fórmula de Beneficio

### **Forma de Pago de la Pensión:**

- a) Pensión Vitalicia
- b) Pensión Vitalicia con Garantía
- c) Pago Unico

### **Requisitos de Elegibilidad**

Al observar cómo está distribuida la población en una empresa, es conveniente establecer requisitos mínimos de edad y antigüedad, debido a que no es necesario comenzar a acumular recursos para una población relativamente joven, cuyo índice de rotación es muy elevado. Entre más estrictos sean los requisitos, menor será la rotación dentro del grupo y menor el período que se disponga para acumular su reserva actuarial correspondiente a cada pensión.

- a) **Edad Mínima:** Se establece esta edad con el fin de eliminar a la población joven, que generalmente está poco interesada en la jubilación a largo plazo.
- b) **Antigüedad Mínima:** Se establece con el propósito de evitar incluir a la población con mayor índice de rotación.
- c) **Edad Máxima:** Esta excluye a los empleados que son contratados a una edad tal que no les permita cumplir cuando menos 10 años de servicios en la empresa.

### **Condiciones de Retiro**

Por condiciones de retiro entendemos la edad y antigüedad con las que un participante debe contar para tener derecho a recibir el beneficio íntegro del plan de pensiones.

- a) **Retiro Normal:** En México, el requisito de edad generalmente es de 65 años y coincide con el que establece el Seguro Social para el mismo efecto, mientras que el período de antigüedad mínima generalmente fluctúa entre los 10 y 25 años.

- b) **Retiro Anticipado:** Generalmente se establece para un período de 5 a 10 años anterior a la fecha del retiro normal.
- c) **Retiro Diferido:** Este ocurre después de la fecha en que se hayan cumplido los requisitos para el retiro normal, generalmente, los planes de pensiones no aceptan este tipo de retiro, definiendo una política de separación del personal a edad avanzada.

#### **Monto de la Pensión**

La pensión que otorga un plan, generalmente toma en cuenta el salario y la antigüedad de un participante a la fecha de retiro. Por otra parte, el monto de los beneficios depende de las contribuciones que se hagan al fondo de pensiones y de que éstas sean fijas o variables. Los planes de costo fijo llevan implícito el pago de un beneficio variable, en tanto que los planes de costo variable llevan implícito el pago de un beneficio fijo y son los más frecuentes en México.

- a) **Salario Pensionable:** Este se define como el sueldo promedio percibido por un participante durante cierto número de meses inmediatos anteriores a la fecha de retiro.
- b) **Servicios Acreditables:** Generalmente toma en cuenta la antigüedad completa del participante, desde su última fecha de ingreso a la empresa hasta la fecha de retiro, aunque en ocasiones puede tomar sólo parte de ésta o bien puede considerarse incrementada.
- c) **Fórmula de Beneficio:** Es muy importante dentro de la estructura de un plan, la fórmula a utilizar para el cálculo de las pensiones. En México básicamente se utilizan tres tipos de fórmulas, las cuáles serán descritas más adelante.

### **Forma de Pago de la Pensión**

La idea primordial en un plan de pensiones es, otorgar a sus participantes retirados un ingreso mensual durante el resto de sus vidas (forma normal), sin embargo, existen otras formas opcionales de pago, cuyo valor actuarial deberá ser igual al de la forma normal de pago.

- a) **Pensión Vitalicia:** Los pagos inician en la fecha de retiro del participante y continúan mientras éste permanezca con vida.
- b) **Pensión Vitalicia con Garantía:** Los pagos se garantizan durante un período determinado, generalmente de 10 años a partir de la fecha de retiro.
- c) **Pago Unico:** El pago del valor actuarial de los beneficios otorgados por el plan, se realiza en una sola exhibición.

## **II.2 Hipótesis Actuariales y Funciones Actuariales Básicas.**

En esta sección describimos las principales hipótesis actuariales que son utilizadas en la valuación actuarial, así como también aquellas funciones actuariales básicas en los planes de pensiones que serán necesarias en este trabajo.

### **II.2.1 Hipótesis Actuariales.**

Las hipótesis actuariales, son los supuestos en los cuáles se apoya la valuación actuarial del plan de pensiones, para estimar los beneficios futuros y el correspondiente monto de las aportaciones de la empresa que serán necesarias para poder financiar anticipadamente esos pagos, según los métodos de financiamiento dados.



Es necesario suponer el comportamiento de ciertas variables demográficas y económicas que afectan de manera definitiva los resultados de la valuación, por ello clasificamos a las hipótesis en económicas y de decrementos.

Las hipótesis actuariales no tienen efecto alguno sobre los montos de los beneficios que serán pagados, pero sí afectan las contribuciones que hará la empresa para financiar los beneficios. Por lo tanto, el mejor financiamiento del plan dependerá en gran medida a la consistencia entre las hipótesis y el comportamiento real de las variables que afectan el costo del plan.

Las hipótesis actuariales utilizadas en México para la valuación actuarial, se describen a continuación:

**Hipótesis Económicas:**

- a) Incremento de Salarios
- b) Tasa de inversión

**Hipótesis de Decrementos:**

- a) Mortalidad de Activos
- b) Mortalidad de Jubilados
- c) Invalidez de Activos
- d) Rotación de Activos
- e) Retiro

**Hipótesis Económicas**

Estas hipótesis suponen los incrementos en los salarios de los participantes, así como el interés que generará el fondo del plan de pensiones.

- a) **Incremento de Salarios:** Esto se refiere a las tasas de incremento en la compensación, para lograr el nivel que se espera alcancen los salarios en el futuro; además estas tasas son necesarias para estimar el monto de los

beneficios que otorgará el plan a cada uno de los participantes que se retire. Normalmente se expresa mediante una función que le asigna a cada edad entera  $x$  la tasa en que se incrementa el salario de los participantes entre la edad  $x$  y  $x+1$ .

- b) **Tasa de inversión:** El actuario debe seleccionar las hipótesis que espera obtengan en el futuro las inversiones que se realicen con el fondo del plan de pensiones. En la selección debe contemplar lo siguiente:

Protección del fondo contra bajas en los rendimientos.

Expectativas de liquidez.

Acumulación de una reserva para contingencias por baja de la tasa real de interés.

Normalmente se expresa como una tasa anual compuesta y constante.

#### **Hipótesis de Decrementos**

Son las supuestos que hace el actuario sobre la población en estudio, que para efectos de la valuación, considera al grupo cerrado, que está continuamente expuesto a diversos decrementos, y éstos se representan por medio de tablas, que son utilizadas para proyectar el futuro comportamiento de la población.

- a) **Mortalidad de Activos:** Estas tasas sirven para estimar el número de participantes que permanecerán vivos en su fecha de jubilación.
- b) **Mortalidad de Jubilados:** Las tasas de mortalidad aplicadas a los jubilados, sirven para estimar el tiempo en el que deberán pagarse los beneficios señalados por el plan y tienen un impacto importante en el costo de la pensión.

- c) **Invalidez de Activos:** Estas tasas se utilizan para estimar el número de empleados que dejarán de ser activos debido a algún tipo de incapacidad, y esto está estrechamente relacionado con el tipo de empleo.
- d) **Rotación de Activos:** Estas tasas son utilizadas en los cálculos para estimar el efecto de la reducción en el número de empleados que ocurre si éstos se separan de la empresa antes de tener derecho al beneficio otorgado por el plan.
- e) **Retiro:** Para poder estimar el monto de los beneficios que serán pagados a los participantes de un plan de pensiones, es determinante estimar por medio de estas tasas el número de empleados que pueden jubilarse con derecho a su pensión total. Este parámetro sirve como base para las estimaciones actuariales del costo del plan.

## **II.2.2 Funciones Actuariales Básicas.**

El propósito en esta parte del trabajo, es el proporcionar la notación y terminología requerida para el desarrollo de la teoría sobre el financiamiento en los planes de pensiones que utilizaremos en los siguientes capítulos.

### **Funciones de Supervivencia.**

En el cálculo del valor presente actuarial de un plan de pensiones debe tomarse en cuenta que la mortalidad, invalidez y separación, son decrementos mutuamente excluyentes y que actúan simultáneamente sobre una población determinada, por esto se requiere de una tabla de decrementos múltiples para su cálculo.

Las tasas de decrementos que utiliza el actuario como hipótesis, las denotamos de la siguiente manera:

Causa de Decremento	Tasa de Decremento a Edad $x$
Mortalidad	$q_x^{(m)}$
Invalidez	$q_x^{(i)}$
Rotación	$q_x^{(w)}$
Retiro	$q_x^{(r)}$

Dentro del contexto de grupos con un solo decremento, estas tasas representan tanto la tasa anual como la probabilidad de decremento. Sin embargo, en el caso de decrementos múltiples, como el que nos ocupa en este trabajo, estas funciones representan tan solo las tasas anuales de decrementos que deben distinguirse de las probabilidades.

A un participante activo de edad  $x$  lo representamos por  $(x)$  y a las probabilidades de que  $(x)$  salga del grupo antes de alcanzar la edad  $x+1$  por muerte, invalidez, rotación o retiro, las denotamos por  $q_x^{(m)}$ ,  $q_x^{(i)}$ ,  $q_x^{(w)}$  y  $q_x^{(r)}$  respectivamente. Por lo cual, la probabilidad de que  $(x)$  salga del grupo por cualquier causa antes de alcanzar la edad  $x+1$  es  $q_x^T$  y  $p_x^T$  es la probabilidad complementaria.

$$q_x^T = \frac{d_x^T}{l_x^T} = q_x^{(m)} + q_x^{(i)} + q_x^{(w)} + q_x^{(r)}$$

$$p_x^T = 1 - q_x^T = \frac{l_{x+1}^T}{l_x^T}$$

La probabilidad de que un participante  $(x)$  permanezca en el grupo al menos  $n$  años se denota por  ${}_n p_x^T$  y la probabilidad complementaria por  ${}_n q_x^T$ , donde:

$${}_n p_x = \frac{1 - v^{n+1}}{1 - v} = \prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t}$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$$

Según Jordan<sup>3</sup>, una aproximación de las probabilidades de decremento a partir de las tasas correspondientes, está dada por:

$$q_x^{(m)} = q_x^{(m)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(q_x^{(l)} + q_x^{(w)} + q_x^{(r)})\right)$$

$$q_x^{(l)} = q_x^{(l)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(q_x^{(m)} + q_x^{(w)} + q_x^{(r)})\right)$$

$$q_x^{(w)} = q_x^{(w)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(q_x^{(m)} + q_x^{(l)} + q_x^{(r)})\right)$$

$$q_x^{(r)} = q_x^{(r)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(q_x^{(m)} + q_x^{(l)} + q_x^{(w)})\right)$$

De acuerdo con Bowers<sup>4</sup> et. al, está dada por:

$$q_x^{(m)} = q_x^{(m)} \left[1 - \frac{1}{2}(q_x^{(l)} + q_x^{(r)}) + \frac{1}{3}(q_x^{(l)} q_x^{(r)})\right]$$

#### Proyección de Salarios<sup>5</sup>.

Al salario de un participante (x) lo denotamos por  $S_x$  y a la tasa en que se incrementa entre las edades  $x$  y  $x+1$ , la denotamos por  $IS_x$ . Para cualquier edad  $w > x$  se tiene que:

$$S_w = S_x \prod_{t=x}^{w-1} (1 + IS_t)$$

#### Fórmulas de Beneficio<sup>5</sup>.

<sup>3</sup> [2] Jordan, C.W. Life Contingencies.

<sup>4</sup> [3] Bowers, et al. Actuarial Mathematics.

<sup>5</sup> [1] Rosado, et al. Aspectos Actuariales de la Teoría y Práctica de los Planes Privados de Pensiones en México.

Existen 3 tipos básicos de fórmulas de beneficio, que se analizan a continuación y en las cuales usamos la siguiente notación:

$r$  = Edad de retiro.

$z$  = Edad de ingreso a la que el participante comienza a acreditar beneficios.

$Sp$  = Salario pensionable del participante a edad  $r$ .

$Br$  = Beneficio acumulado a edad  $r$ .

a) Fórmula de Beneficio Cerrado. El monto de la pensión se define como una constante  $k$ , independiente del salario del participante y de sus servicios acreditables, ésta fórmula se expresa como:

$$Br = k$$

b) Fórmula de Procentaje Nivelado de Compensación. El monto de la pensión se define como un porcentaje  $\alpha$  de  $Sp$  y se expresa como:

$$Br = \alpha (Sp)$$

c) Fórmula de Crédito Unitario. El monto se define como un cierto porcentaje  $\alpha$  de  $Sp$  por cada año de servicios acreditables del participante dentro de la empresa y se expresa por:

$$Br = \alpha Sp (r-z)$$

Esta fórmula también puede definirse como una cantidad específica de beneficio por cada período de servicios y se expresa como:

$$Br = Cn$$

El beneficio acumulado de un participante ( $x$ ), con edad de ingreso  $z$ , donde ( $x < r$ ), es la proporción de  $Br$  que corresponde a la parte de servicios ya acreditados a edad  $x$  del total de los servicios acreditables proyectados, esto es:

$$B_x = Br \frac{(x-2)}{(r-2)}$$

Para seleccionar una fórmula que sea práctica y eficaz, debe considerarse la necesidad de otorgar una pensión que, por lo menos, actuarialmente sea equivalente a la indemnización legal a la que tiene derecho un participante en la fecha normal de su retiro; según la Ley Federal del Trabajo, la edad avanzada no es una causa justificada de despido.

Por eso en México, los planes de pensiones deben otorgar por lo menos una pensión básica con una fórmula de crédito unitario, que considere la antigüedad total en el servicio y un salario igual al que se utiliza para calcular la indemnización legal.

#### Anualidades<sup>6</sup>.

En el desarrollo de la teoría sobre el financiamiento de planes de pensiones, es muy frecuente el uso de anualidades contingentes basadas en el grupo de participantes activos del plan. Por esto, la notación que utilizaremos para estas anualidades es la siguiente:

$$\ddot{a}_x^T = \sum_{t=0}^{\infty} t p_x^T v^t \qquad n|\ddot{a}_x^T = \sum_{t=n}^{\infty} t p_x^T v^t \qquad \ddot{a}_{x:n}^T = \ddot{a}_x^T - n|\ddot{a}_x^T$$

Una variación importante de estas anualidades es la que denotamos por  ${}_s\ddot{a}_{x:r-x}^T$ , donde el superíndice  $s$ , indica que la anualidad involucra el salario del participante. Definimos:

$${}_s\ddot{a}_{x:r-x}^T = \sum_{t=0}^{r-1-x} \frac{s^{t+1}}{s^t} t p_x^T v^t$$

<sup>6</sup> [2] Jordan, C.W. Life Contingencies.

es decir, el valor presente de cada peso de salario futuro para un participante (s) entre las edades x y r.

### II.3 Métodos de Financiamiento.

Un método de financiamiento, es un modelo para determinar el costo de un plan de pensiones de manera que el pago de las aportaciones al plan se acumulen para formar la reserva requerida a la fecha en que los participantes tengan derecho a los beneficios del mismo.

El costo de un plan de pensiones es igual a la suma de los beneficios y gastos<sup>7</sup> pagaderos por el plan, menos las aportaciones de los empleados y los rendimientos por inversiones del plan.

Un método de financiamiento, distribuye el costo de la pensión de un participante a lo largo de su vida activa dentro de la empresa. Además, reconoce el costo de la pensión como un costo inherente a la relación laboral. Los métodos de financiamiento difieren en la forma en que dividen la obligación entre la reserva de servicios pasados (RSP) y los costos normales futuros (CNF). Estos métodos se clasifican de diversas formas:

- a) Método de Beneficios Adquiridos y Proyectados: Un método de beneficio adquirido se basa en el monto de los beneficios acreditados a la fecha de valuación, mientras que un método de beneficio proyectado se basa en el monto estimado de beneficios que se espera serán pagados por el plan a la fecha de valuación.
- b) Métodos Individuales y Colectivos: Bajo un método individual, el costo normal y la reserva de servicios

<sup>7</sup> [1] Las hipótesis descritas anteriormente se refieren solo al cálculo del "valor presente actuarial", derivado de los beneficios que otorga el plan, ignorando los costos que se derivan de la admón. y otros similares. Si los gastos inherentes al plan se pagan del fondo, es imprescindible tomarlos en consideración.



pasados pueden ser calculados para cada participante, donde la suma de estos términos para todos los participantes, representa el total para el plan.

- c) Métodos a Edad Alcanzada y a Edad de Entrada: Bajo los métodos a edad alcanzada, el costo normal se determina en base a la edad alcanzada actual del participante, sin hacer referencia a la edad en que entró al plan. Bajo la base de edad de entrada, ésta desempeña un papel clave al determinar el costo normal.
- d) Métodos de Grupo Cerrado o Grupo Abierto: Un método de grupo cerrado sólo considera a los participantes a la fecha de valuación, mientras que un método de grupo abierto considera también a los empleados que se supone serán contratados en el futuro.

Con el propósito de lograr un nivel razonable de seguridad para pagar los beneficios que surgan de un plan de pensiones, es necesario definir e implementar un programa financiero. Para ello debe seleccionarse el instrumento de financiamiento, incluyendo la creación de una reserva en libros, así como también la mecánica que ha de seguirse para hacer las contribuciones con las que se constituye el fondo. Los métodos de financiamiento no elevan ni disminuyen el costo del plan, sino que determinan la mayor o menor rapidez con la que se acumula el fondo.

### **II.3.1 Medidas del Pasivo de un Plan de Pensiones<sup>8</sup>.**

#### **Valor Presente de Beneficios Futuros.**

El valor presente de beneficios futuros (VPBF) de un plan de pensiones es el pasivo asociado con los beneficios devengados a la fecha de valuación y los que se espera acumule cada participante en años futuros.

---

<sup>8</sup> [6] H. Winklevoss. Pension Mathematics With Numerical Illustrations.

Generalmente el VPBF se divide en 2 partes, correspondientes al pasado y al futuro. La parte atribuible al pasado es llamada: Pasivo Actuarial, Reserva por Servicios Pasados, Reserva Actuarial u Obligaciones por Servicios Pasados. La parte asignada al futuro es llamada: Valor Presente de Costos Normales Futuros u Obligaciones por Servicios Futuros, y es equivalente a la porción del VPBF que se espera sean pagados en el futuro por costos normales, o el costo asignable a cada uno de los años futuros. El VPBF se expresa como:

$$\begin{aligned} (\text{VPBF})_x &= Br \ddot{a}r_{r-x} P_x^T V^{r-x} & x < r \\ (\text{VPBF})_x &= Br \ddot{a}r & x \geq r \end{aligned}$$

El VPBF total del plan es la suma del VPBF de todos los participantes, tanto activos como retirados.

#### Pasivo de Continuación del Plan.

El pasivo de continuación del plan (PCP) para un participante (x) se define en términos de  $B_x$ , considerando todos los decrementos que están asociados con la población activa.

$$\begin{aligned} (\text{PCP})_x &= B_x \ddot{a}r_{r-x} P_x^T V^{r-x} & x < r \\ (\text{PCP})_x &= (\text{VPBF})_x & x \geq r \end{aligned}$$

### II.3.2 Conceptos Básicos del Financiamiento en Planes de Pensiones<sup>9</sup>.

#### Costo Normal.

El costo normal (CN) de un plan de pensiones es el costo anual, determinado de acuerdo al método de financiamiento, asignado a un año determinado de la operación del plan. Este parámetro es asignado para amortizar el VPBF durante la vida

<sup>9</sup> [6] H. Winklevoss. Pension Mathematics With Numerical Illustrations.

activa del participante. Los costos normales deben cumplir con la siguiente igualdad:

$$(VPBF)_z = \sum_{t=z}^{r-1} (CN)_{t-z} P_z^T V^{t-z}$$

#### Pasivo Actuarial.

El pasivo actuarial (PA) asociado a un participante (x), en cualquier momento equivale prospectivamente al valor presente de todos los beneficios futuros, menos el valor presente de los costos normales futuros, es decir, la porción del VPBF que teóricamente ha sido amortizada a edad x.

$$(PA)_x = (VPBF)_x - (VPCNF)_x$$

donde:

$$(VPCNF)_x = \sum_{t=x}^{r-1} (CN)_{t-x} P_x^T V^{t-x}$$

El pasivo actuarial también puede definirse de manera retrospectiva, como el valor acumulado de los costos normales pasados (VACNP).

$$(PA)_x = (VACNP)_x = \sum_{t=z}^{x-1} (CN)_t (1+i)^{x-t} \frac{1}{x-t P_t}$$

#### • Pasivo Suplementario.

El pasivo suplementario (PS) es la diferencia que existe entre el cálculo prospectivo y retrospectivo del pasivo actuarial. Restringiendo la notación  $(PA)_x$  al cálculo prospectivo y la notación  $(VACNP)_x$  al retrospectivo, entonces tenemos que:

$$(PS)_x = (PA)_x - (VACNP)_x$$

### Costo Suplementario.

El costo suplementario (CS) de un plan, es aquel que amortiza el pasivo suplementario correspondiente. El valor acumulado de los costos suplementarios pasados y el valor presente de los costos suplementarios futuros deben sumar el pasivo suplementario:

$$(PS)_x = (VACSP)_x + (VPCSF)_x$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior y despejando el VPBF tenemos que:

$$(VPBF)_x = (VACNP)_x + (VACSP)_x + (VPCNF)_x + (VPCSF)_x$$

esto es, que el VPBF es igual al valor acumulado de los costos normales y suplementarios pasados, más el valor presente de los costos normales y suplementarios futuros.

### Pasivo Actuarial no Financiado.

El pasivo actuarial no financiado (PANF) de un plan de pensiones al año  $t$ , es la diferencia que existe entre el pasivo actuarial y el valor de los activos del plan en ese instante.

$$(PANF)_t = (PA)_t - (\text{Activos})_t$$

donde:

$$(\text{Activos})_t = (VACNP)_t + (VACSP)_t$$

### Ganancias y Pérdidas Actuariales.

El incremento en el pasivo suplementario ( $\Delta PS$ ) durante el año  $t$  por desviaciones actuariales, se expresa como la diferencia entre el pasivo actuarial no financiado al año  $t+1$  y el pasivo actuarial no financiado esperado en ese mismo año.

$$(\Delta PS)_t = (PANF)_{t+1} - E(PANF)_{t+1}$$

donde:

$$E(PANF)_{t+1} = E(PA)_{t+1} - E(\text{Activos})_{t+1}$$

$$E(PA)_{t+1} = [(PA)_t + (CN)_t - B_t] (1+i)$$

$$E(\text{Activos})_{t+1} = [(\text{Activos})_t + (\text{Cont})_t - B_t] (1+i)$$

Donde el CN es el costo normal del plan,  $B_t$  es el total de beneficios pagados y  $(\text{Cont})_t$  son las contribuciones realizadas al año  $t$ . Por lo tanto:

$$(\Delta PS)_t = (PANF)_{t+1} - [(PA)_t + (CN)_t - (\text{Activos})_t - (\text{Cont})_t] (1+i)$$

### II.3.3 Métodos de Financiamiento<sup>10</sup>.

A continuación describimos brevemente 5 métodos de financiamiento que están incluidos en el libro de H. Winklevoss, en los cuales suponemos que los beneficios del plan se pagan anualmente y de forma vitalicia.

#### Método de Financiamiento de Crédito Unitario<sup>11</sup>.

Bajo un método de financiamiento de crédito unitario, el cual es un método de beneficio adquirido, los costos se basan directamente en los beneficios acreditados a la fecha de valuación, es decir, la pensión prevista a la fecha de retiro se divide en tantas unidades como años de servicio tenga el participante, pagando cada año el costo total de la unidad devengada. Para un participante ( $x$ ), el costo normal bajo este método es:

$$(CN)_x = \frac{Br}{(r-z)} \bar{a}_r \cdot r^{-1} P_x^T V^{r-x}$$

<sup>10</sup> [6] H. Winklevoss. Pension Mathematics With Numerical Illustrations.

<sup>11</sup> [6] Accrued Benefit Cost Method with Supplemental Liability.

y el pasivo actuarial está dado por:

$$(PA)_x = (VPBF)_x \frac{(x-z)}{(r-z)}$$

#### Método de Financiamiento a Edad de Entrada<sup>12</sup>.

El método de financiamiento a edad de entrada, es un método de beneficios proyectados, es decir, en lugar de financiar los beneficios acreditados durante un período específico, este tipo de métodos proyecta el monto total de beneficios que serán acreditados a la fecha de retiro, y lo distribuye en forma nivelada durante un período futuro.

Bajo este método, el costo normal equivale a un monto anual de aportaciones niveladas desde la edad de contratación del empleado hasta la fecha de jubilación. Estas aportaciones niveladas deberán ser suficientes para financiar los beneficios proyectados. Para determinar el costo normal, equivalente a una cantidad constante para un participante a su edad de entrada, igualamos el valor presente de beneficios futuros, teniendo la siguiente ecuación:

$$(CN)_x \ddot{a}_{x:\overline{T}|r-z} = (VPBF)_z,$$

donde:

$$(CN)_x = \frac{(VPBF)_z}{\ddot{a}_{x:\overline{T}|r-z}}$$

con lo que se garantiza que los costos normales amortizan el  $(VPBF)_z$  durante la carrera activa de un participante. El pasivo actuarial, bajo este método equivale al  $(VPBF)_z$  menos el valor presente de costos normales futuros y se obtiene sustituyendo la expresión para  $(CN)_x$  en la definición del pasivo actuarial:

<sup>12</sup> [6] Projected Benefit Cost Method with Supplemental Liability.

$$(PA)_x = (VPBF)_x - \frac{(VPBF)_z}{s_z^T: r-z} s_x^T: r-x$$

y usando  $(VPBF)_z = (VPBF)_x x-z P_z^T V^{x-z}$ , se tiene que:

$$(PA)_x = (VPBF)_x \frac{s_z^T: x-z}{s_z^T: r-z}$$

Finalmente despejando el valor de  $(CN)_x$  tenemos que:

$$(CN)_x = \frac{(VPBF)_x - (PA)_x}{s_x^T: r-x}$$

tomando estas dos últimas fórmulas como las definiciones del pasivo actuarial y del costo normal respectivamente, bajo este método de financiamiento.

#### Método de Financiamiento Individual Nivelado<sup>13</sup>.

El método de financiamiento individual nivelado, determina el costo anual nivelado, mediante una serie de pagos periódicos iguales para financiar los beneficios proyectados de cada participante a partir de la fecha en que se inicia su participación en el plan hasta la fecha normal de su retiro.

Este método de financiamiento, es una variante del método anterior, siempre y cuando el pasivo actuarial se pague durante los años de servicios futuros.

De acuerdo con el método de financiamiento a edad de entrada, el pasivo actuarial que existe al comienzo del plan (pasivo inicial) es:

<sup>13</sup> [6] Projected Benefit Cost Method without Supplemental Liability.

$$(PA)_0 = (VPBF)_0 \frac{\ddot{s}_0^T : \theta - z}{\ddot{s}_0^T : r - z}$$

El método de financiamiento individual nivelado consiste en sumar al costo normal del método a edad de entrada el costo de amortizar el pasivo inicial entre las edades 0 y r. Es decir:

$$(CN)_x = (CN \text{ a edad de entrada})_x + \frac{(PA)_0}{\ddot{s}_0^T : r - \theta}$$

donde:

$$(CN)_x = \frac{(VPBF)_0}{\ddot{s}_0^T : r - \theta}$$

La expresión para el pasivo actuarial es la siguiente:

$$(PA)_x = (VPBF)_x \frac{\ddot{s}_0^T : x - \theta}{\ddot{s}_0^T : r - \theta}$$

Finalmente, despejando el valor de  $(CN)_x$  tenemos:

$$(CN)_x = \frac{(VPBF)_x - (PA)_x}{\ddot{s}_x^T : r - x}$$

Tomando éstas dos últimas fórmulas como las definiciones del pasivo actuarial y del costo normal respectivamente bajo este método de financiamiento.

#### Método de Financiamiento Colectivo Nivelado<sup>14</sup>.

El método de financiamiento colectivo nivelado define el costo normal del plan como:

<sup>14</sup> [6] Constant Amount - Aggregate Projected Benefit Cost Method without Supplemental Liability.



$$(CN)_t = \frac{\sum (VPBF)_x - (\text{Activos})_t}{\sum S_x s_{\ddot{x}:r-x}^T}$$

El costo anual incluye un costo suplementario implícito que amortiza el correspondiente pasivo suplementario implícito.

$$(PA)_t = \sum (PA)_x$$

donde:

$\Sigma$  = Denota la suma de todos los participantes del plan

$(PA)_x$  = Es el pasivo actuarial para un participante (x) bajo el método de financiamiento individual nivelado.

#### Método de Financiamiento Colectivo<sup>15</sup>.

El método de financiamiento colectivo, calcula el costo anual, que incluye también un costo suplementario implícito, en base a la relación que existe entre el pasivo no financiado del plan y el valor presente de los sueldos futuros de los participantes.

$$(CN)_t = \sum S_x \frac{\sum (VPBF)_x - (\text{Activos})_t}{\sum S_x s_{\ddot{x}:r-x}^T}$$

$$(PA)_t = \sum (PA)_x$$

donde  $S_x$  representa el salario del participante (x) y

$$(PA)_x = (VPBF)_x \frac{s_{\ddot{x}:r-x}^T}{s_{\ddot{x}:r-x}^T}$$

<sup>15</sup> [6] Constant Percentage of Salary - Aggregate Projected Benefit Cost Method without Supplemental Liability.

## II.4 Población de un Plan de Pensiones.

En esta parte describimos brevemente las definiciones que H. Winklevoss<sup>16</sup> hace de algunos tipos de poblaciones que resultan útiles en el estudio de planes de pensiones, las cuales son:

- a) Población Estacionaria,
- b) Población Madura,
- c) Población Inmadura,
- d) Población Sobre-Madura y
- e) Población de Tamaño Restringido.

### **Población Estacionaria:**

Una población estacionaria, es aquella cuyo tamaño y distribución por edades son constantes año con año. Si las tasas de decremento asociadas, así como también el número de participantes que ingresan cada año a la población son constantes, después de  $n$  años se dará una condición estacionaria, donde  $n$  es la diferencia máxima de edades en la población.

Es importante destacar también que la distribución de la población estacionaria por antigüedades permanece constante después de  $n$  años.

Lo más probable es que en una población real existan varias edades de ingreso. Por lo tanto para mostrar que en ese caso se sigue dando el fenómeno de estacionaridad, es necesario observar a la población como una serie de poblaciones con una sola edad de entrada, de tal manera que cada edad de entrada represente una subpoblación. De esta manera la población total será estacionaria después de  $m$  años, donde  $m$  es la máxima diferencia entre la edad de retiro y la edad de entrada de todas las subpoblaciones.

---

<sup>16</sup> [6] H. Winklevoss, Pension Mathematics with Numerical Illustrations.

### **Población Madura:**

Cuando el número de participantes que ingresan a la población se incrementa a una tasa constante, la población alcanzará una distribución constante por edad y antigüedad en el tiempo necesario para que la población se vuelva estacionaria, y a partir de ese momento la población crecerá en la misma proporción en que lo hace el número de nuevos participantes. Entonces decimos que la población se ha convertido en una población madura.

Como puede observarse, una población estacionaria es un caso particular de una población madura, en donde la tasa de crecimiento del número de nuevos participantes es igual a cero.

### **Población Inmadura y Sobremadura.**

Una población es considerada inmadura, si su distribución por edad y antigüedad tiene una mayor proporción de participantes jóvenes con poca antigüedad con respecto a una población madura del mismo tamaño, con las mismas tasas de decremento asociadas y con la misma distribución de edades de entrada.

Una población es considerada sobremadura, si tiene mayor proporción de participantes de edad avanzada con mucha antigüedad con respecto a una población madura del mismo tamaño y con las mismas condiciones de decrementos y de edades de entrada.

De acuerdo con H. Winklevoss<sup>17</sup>, las empresas que no tienen éxito tienen poblaciones sobremaduras, mientras que las empresas en expansión se caracterizan por tener poblaciones inmaduras.

---

<sup>17</sup> [6] H. Winklevoss. Pension Mathematics with Numerical Illustrations.

### **Poblaciones de Tamaño Restringido.**

En los tipos de población que se han mencionado, el número de nuevos participantes se maneja como una variable independiente, mientras que el tamaño de la población se maneja como una variable dependiente del número de nuevos participantes. Sin embargo en la realidad, las empresas determinan el tamaño de su población (variable independiente), siendo entonces el número de nuevos participantes, la variable dependiente del tamaño de la población.

Una población de tamaño restringido por lo general tiende a converger a la correspondiente población estacionaria, creada sin restricciones de tamaño, pero de forma lenta y menos suave que una población de tamaño variable. El tiempo requerido para dicha convergencia está en función del número de edades en la población y de las tasas de decremento en cada edad.

### **II.5 Concepto y Propósito de los Pronósticos de Financiamiento.**

Los resultados más importantes en la valuación actuarial de un plan de pensiones, son la determinación del costo anual y la evaluación del estado de financiamiento del plan. Por esto último se entiende la comparación de los activos como una medida del pasivo del plan, mediante el cálculo en dinero o como un porcentaje de dicha medida. A la medida del pasivo se le conoce como **objetivo de los activos** y al cociente entre los activos y esta medida se le conoce como **razón de financiamiento** del plan de pensiones.

Según Winklevoss y McGill<sup>18</sup>, la medida del pasivo más adecuada como objetivo de los activos es aquella que represente la obligación financiera que tiene el plan por los beneficios acumulados de los participantes activos y retirados, es decir, definiremos el objetivo de los activos de un plan de pensiones en cierto año como el valor que corresponda al Pasivo de Continuación del Plan (PCP) en ese mismo año.

### II.5.1 Pronósticos de Financiamiento.

El principal objetivo de los pronósticos de financiamiento, es el de anticipar el costo anual y el estado de financiamiento de un plan de pensiones en años futuros, es decir, tratan de medir los efectos sobre estos resultados a largo plazo, de cambios que puedan surgir dentro de la estructura del plan, en las hipótesis actuariales o en los métodos de financiamiento utilizados. De igual manera los pronósticos pueden realizarse para conocer los efectos de las desviaciones en la experiencia real de un plan de pensiones con respecto a las hipótesis actuariales, incluso pueden usarse para predecir el costo real de un plan de pensiones a futuro, sin embargo, son más utilizados para preveer el futuro comportamiento que tendrán a largo plazo las aportaciones de la empresa o algún otro indicador del proceso de financiamiento de un plan de pensiones.

Para realizar los pronósticos de financiamiento en los planes de pensiones, es necesario hacer una serie de valuaciones actuariales anuales, sobre proyecciones sucesivas de la población en estudio, salarios y los fondos del plan. A las hipótesis que son utilizadas para proyectar el comportamiento de estos tres elementos a futuro, se les conoce como hipótesis de proyección, y las que son utilizadas

---

<sup>18</sup> [8] H. Winklevoss y D. McGill. Public Pension Plans.

en las valuaciones actuariales, las cuales se practican sobre dichas proyecciones, se les conoce como hipótesis de valuación.

De acuerdo con H. Winklevoss<sup>19</sup>, es de gran importancia para la validez de los pronósticos de financiamiento, el que las hipótesis de proyección sean una buena aproximación del comportamiento real que se quiera proyectar, tratando así de minimizar el grado de error existente en los pronósticos, el cual se ve reflejado en los resultados de la valuación.

Los pronósticos de financiamiento más sencillos, son aquellos en los que las hipótesis de proyección y valuación son iguales.

---

<sup>19</sup> [6] H. Winklevoss. Pension Mathematics with Numerical Illustrations.

## CAPITULO III. FORMULACION DEL SISTEMA.

SON LOS SENTIMIENTOS, Y NO LAS IDEAS.

LOS QUE IMPULSAN AL HOMBRE.

SCHOPENHAUER.

### III.1 Simulación de Sistemas.

De acuerdo con Robert Shannon<sup>20</sup>, por simulación se entiende el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y realizar una serie de experimentos con él para entender el comportamiento del mismo, o evaluar diversas estrategias para la operación del sistema (dentro de los límites impuestos por uno o varios criterios).

La definición del proceso de simulación incluye la construcción del modelo, así como también el uso analítico para estudiar un sistema con el propósito de:

- a) Describir su comportamiento.
- b) Establecer hipótesis que expliquen el comportamiento observado.
- c) Usar las hipótesis para predecir su comportamiento futuro, es decir, los efectos que se producirán por cambios en el sistema.

El desarrollo y uso de un sistema de simulación, le permite al experimentador observar y manipular el sistema con el fin de entenderlo y adquirir experiencia sobre su funcionamiento.

Para emplear la simulación como una herramienta para el estudio de un sistema, mencionamos cuatro condiciones que el autor considera de importancia en el proceso de financiamiento de un plan de pensiones como sistema en el tiempo:

<sup>20</sup> [4] R. Shannon. Systems Simulation the Art and Science.

- a) Los métodos analíticos están disponibles, pero los procedimientos matemáticos son demasiado complejos, por lo que la simulación proporciona un método de solución más sencillo.
- b) Se desea observar el comportamiento histórico simulado del proceso en un período determinado.
- c) La simulación resulta ser la única vía de experimentación viable, debido a la dificultad de realizarlo en un entorno real.
- d) Se requiere cierta aceleración del tiempo para sistemas que necesitan de largos períodos para realizarse.

### III.1.1 Función de los Modelos de simulación.

Por modelo, se entiende la representación de un objeto, sistema o idea, diferente a su forma real. Particularmente, cuando se habla de un sistema, los modelos suelen ser abstracciones de las propiedades dominantes de éste, cuyo objetivo principal es la predicción y comparación para proporcionar una manera lógica de predecir resultados de acciones alternativas e indicar una preferencia entre ellas.

El uso de modelos de simulación hace factible la experimentación controlada en situaciones en que los experimentos sobre el sistema real son imprácticos por el costo que implican. Además, al experimentar con el modelo de un sistema complejo podemos aprender más de las interacciones internas y de sus elementos, que lo que podríamos aprender por medio de la manipulación del sistema en el mundo real, debido a la estructura organizacional del modelo y a la facilidad de variación de los parámetros.

Los modelos suelen ser útiles también como ayuda para el pensamiento y la comunicación: nos ayudan a organizar y clasificar los conceptos confusos e inconsistentes, que al construir nos obligan a evaluar y examinar su validez;



incluso los modelos pueden ayudar a eliminar ambigüedades propias de los lenguajes verbales, proporcionando un modo de comunicación más eficiente, de manera tal que al construirlos, la estructura del sistema modelado sea más comprensible, donde se revelan relaciones de causa y efecto muy importantes.

### III.1.2 El Proceso de Simulación.

Las etapas sugeridas por R. Shannon<sup>21</sup>, para realizar la simulación en el estudio de un sistema real en general, son las siguientes:

- a) **Definición del Sistema.** Su definición consiste en determinar las restricciones que serán utilizadas para su estudio.
- b) **Formulación del Modelo.** La formulación del modelo, prácticamente es la abstracción del sistema real a un diagrama de flujo lógico.
- c) **Traslación del Modelo.** La translación del modelo es la descripción detallada del modelo por medio de un lenguaje de programación aceptable para la computadora.
- d) **Validación del Sistema.** La validación consiste en tener un nivel aceptable de confianza, de manera que la inferencia obtenida del sistema de simulación respecto al sistema real sea correcta.
- e) **Diseño de Experimentos.** El diseño de experimentos producirá la información deseada, así como también determinará cómo se usará cada una de las corridas de prueba especificadas en el diseño experimental.
- f) **Experimentación.** La experimentación consiste en realizar varias corridas de la simulación para generar los datos deseados y poder efectuar el análisis de sensibilidad.

---

<sup>21</sup> [4] R. Shannon. Systems Simulation the Art and Science.

g) **Interpretación.** La interpretación se resume en la obtención de inferencias en base a los datos generados por la simulación.

h) **Implantación y Documentación.**

### III.2 Definición del Sistema.

De acuerdo con la definición dada por R. Shannon<sup>22</sup>, un sistema es un conjunto de objetos que interactúan entre sí para realizar una función específica.

La descripción de sistemas para propósitos de simulación incluye dos tipos de representación:

a) Representación estática y

b) Representación dinámica.

La **Representación Estática**, busca determinar la existencia de subsistemas y el establecimiento de las condiciones limitantes entre el sistema de interés y el entorno: qué componentes del sistema serán incluidos y cuáles serán excluidos del modelo, y qué relaciones funcionales se reconocerán entre los primeros.

La **Representación Dinámica**, trata de qué cambios de estado son posibles en el sistema y en su medio y cuál es la relación de secuencia entre estos cambios, es decir, después de haber definido los elementos y los límites del sistema, se procede a reducir al sistema real en un diagrama de flujo lógico.

---

<sup>22</sup> [4] R. Shannon. Systems Simulation the Art and Science.

### **III.2.1 Representación Estática.**

Considerando que el propósito de este trabajo, es desarrollar un sistema de simulación para pronosticar el financiamiento en los planes de pensiones, el sistema real del que nos ocupamos es el proceso de financiamiento de un plan de pensiones (Pension Funding).

De acuerdo con Winklevoss y McGill, el sistema puede ser representado por cinco componentes principales que son las siguientes:

- a) Objetivo de los activos.
- b) Activos o fondos del plan.
- c) Pago de beneficios.
- d) Aportaciones de la empresa.
- e) Ganancias de la inversión.

Por lo tanto la representación estática completa del sistema es la siguiente:

#### **Objetivo de los activos.**

Puesto que este componente es una medida del pasivo del plan que resulta de la valuación actuarial anual, los componentes de los que depende son precisamente aquellos de los que depende una valuación y que son:

- a) Estructura del Plan,
- b) Población del Plan,
- c) Hipótesis Actuariales y
- d) Método de Financiamiento.

#### **Fondos del Plan.**

Podemos decir que el nivel de los activos del plan depende de lo siguiente:

- a) Pago de Beneficios,
- b) Aportaciones de la Empresa y

c) Ganancias de la Inversión.

#### **Pago de Beneficios.**

El pago de beneficios de un plan de pensiones, que afecta el nivel de los recursos invertidos está determinado fundamentalmente por dos componentes del sistema:

- a) Estructura del Plan y
- b) Población del Plan.

#### **Aportaciones de la Empresa.**

El monto de las aportaciones de la empresa, depende finalmente de seis componentes del sistema:

- a) Estructura del Plan,
- b) Método de Financiamiento,
- c) Hipótesis Actuariales,
- d) Fondos del Plan,
- e) Población del Plan e
- f) Interés de la Inversión.

#### **Ganancias de la Inversión.**

La magnitud de esta fuente de ingresos para los fondos del plan, depende directamente de tres componentes del sistema:

- a) Fondos del Plan,
- b) Interés de la Inversión y
- c) Pago de Beneficios.

Para terminar con la representación estática del sistema, debemos comprobar que en la lista anterior se encuentran todos los componentes que afectan a los cinco principales. Para ello, basta observar que los siguientes componentes dependen únicamente del entorno del sistema o que dependen entre sí por medio de relaciones que no interesan para efectos del modelo:

- a) Población del Plan,
- b) Interés,

- c) Estructura del Plan,
- d) Fondos del Plan,
- e) Hipótesis Actuariales y
- f) Método de Financiamiento.

En efecto, los dos primeros componentes dependen de condiciones no sólo ajenas al sistema, sino incluso independientes de la existencia de un plan de pensiones. Los otros dependen de los primeros a través de la experiencia y el criterio del actuario que diseña y valúa el plan, y dependen de alguno de los cinco componentes básicos cuando este comportamiento hace necesario un cambio en la estructura, las hipótesis actuariales o el método de financiamiento, pero nuevamente por intervención del actuario.

Por supuesto, no podemos incluir en el modelo las variables que componen el criterio del actuario al intervenir en el desarrollo del sistema, pues el propósito del modelo es el de poder experimentar con decisiones propias sobre un plan de pensiones.

### III.2.2 Representación Dinámica.

Partimos del estado inicial en el que se encuentra el sistema al tiempo  $t$ , en el que están dadas:

- a) La Población del Plan,
- b) La Estructura del Plan,
- c) Las Hipótesis Actuariales,
- d) El Método de Financiamiento,
- e) El Interés y
- d) El Fondo del Plan.

Al momento  $t$ , se realiza una valuación actuarial y se determina el objetivo de los activos y en el transcurso de un año se conoce el valor de la aportación de la empresa, el

pago de beneficios, y las ganancias de la inversión. Con estos valores se determina el monto de los fondos del plan para el tiempo  $t+1$ , mientras tanto, los demás elementos se modifican para el tiempo  $t+1$ , por intervención del actuario o por variables que pertenecen al entorno del sistema. De esta manera se completa el estado del sistema al momento  $t+1$ . El estado  $t+k$  ( $k \geq 2$ ) del sistema se obtiene del estado  $t+k-1$  de manera análoga.

### III.3 Formulación del Modelo.

De acuerdo con R. Shannon<sup>23</sup>, cualquier modelo de simulación consiste en alguna combinación de los siguientes elementos:

- a) Componentes. Partes que en conjunto constituyen al sistema.
- b) Parámetros y Variables. Los parámetros son cantidades a las cuales se les puede asignar valores arbitrarios.
- c) Relaciones Funcionales. Describen a las variables y a los parámetros de manera que muestran su comportamiento dentro de uno o varios componentes del sistema.
- d) Restricciones. Son limitantes que se imponen a los valores de los parámetros.
- e) Funciones Objetivo. Una función objetivo, es una definición explícita de los objetivos del sistema y la forma en que éstas se evaluarán.

Para el proceso de la formulación del modelo, R. Shannon sugiere seguir las siguientes etapas:

- a) Especificación del propósito del modelo.
- b) Especificación de las componentes que se incluirán en el modelo.

<sup>23</sup> [4] R. Shannon. Systems Simulation the Art and Science.

- c) Especificación de los parámetros y variables asociadas con las componentes.
- d) Especificación de las relaciones funcionales entre los componentes, parámetros y variables.

### III.3.1 Especificación del Propósito del Sistema.

Se pretende desarrollar un sistema que simule el proceso de financiamiento de un plan de pensiones, que sirva como herramienta para el pronóstico de costos mediante la consecución de los siguientes objetivos:

- a) Que permita la evaluación del proceso de financiamiento de un plan de acuerdo al criterio definido por Winklevoss y McGill para evaluar métodos de financiamiento. Este criterio establece que los activos de un plan, deben acumularse hasta igualar un objetivo de los activos dado, durante un período de financiamiento dado y mediante aportaciones niveladas como porcentaje de los salarios de los participantes del plan.
- b) Que permita efectuar el análisis de sensibilidad de un costo anual de un plan de pensiones (y de todas las variables de salida directamente involucradas en su cálculo) ante cambios en los parámetros del sistema, controlados por el operador.
- c) Que el sistema simule cambios de estado anuales, durante periodos no mayores a 60 años y que el operador pueda efectuar cambios en los parámetros del sistema en cualquier momento del período de simulación.
- d) Por otra parte, consideramos importante aclarar en este momento que el sistema no tiene como propósito permitir al usuario hacer predicciones cuantitativas exactas de costos anuales futuros de un plan de pensiones, tampoco se considera como objetivo la evaluación del desarrollo del proceso de financiamiento de un plan en un sentido absoluto.

### III.3.2 Especificación de Componentes, Parámetros, Variables y Restricciones.

Hemos decidido separar al sistema en cinco componentes, los cuales son en cierta medida independientes entre sí en cuanto a los factores que determinan su comportamiento desde el entorno del sistema. Estos componentes son:

- a) Tiempo,
- b) Población del Plan,
- c) Estructura del Plan,
- d) Valuación Actuarial y
- e) Fondo del Plan.

Los parámetros, variables y restricciones asociados a cada componente se definen a continuación:

#### Tiempo

##### Variables

- $t$  Variable que controla el tiempo en el proceso de simulación.

##### Parámetros

- $t_0$  Valor inicial de  $t$ . ( $t_0 \geq 1$ )

#### Población del plan

##### Variables

- $P_{xy}^t$  Número de participantes activos con edad  $x$  y antigüedad  $y$ , al tiempo  $t$ .
- $S_{xy}^t$  Sueldo total anual de los participantes  $P_{xy}$ .
- $S_0^t$  Sueldo de un participante que ingresa a la población activa entre  $t$  y  $t+1$  a la mínima edad.
- $r_{xy}^t$  Número de participantes retirados con edad  $x$  y antigüedad  $y$ , al tiempo  $t$ .
- $b_{xy}^t$  Monto total del beneficio anual que reciben los participantes  $r_{xy}$ .
- $P^t$  Número total de participantes activos al tiempo  $t$ .



- $S^t$  Total de los sueldos anuales que reciben los participantes activos que están con vida al tiempo  $t$ .
- $R^t$  Total de participantes retirados que están con vida al tiempo  $t$ .
- $B^t$  Total de beneficios anuales que reciben los participantes retirados que están vivos al tiempo  $t$ .
- $x_{pa}^t$  Edad promedio de todos los participantes activos, al tiempo  $t$ .
- $y_{pa}^t$  Antigüedad promedio de todos los participantes activos, al tiempo  $t$ .
- $x_{pr}^t$  Edad promedio de todos los participantes retirados vivos, al tiempo  $t$ .
- $y_{pr}^t$  Antigüedad promedio de todos los participantes retirados vivos, al tiempo  $t$ .
- $EP^t$  Número de participantes que ingresarán a la población activa entre  $t$  y  $t+1$ .
- $SP_T^t$  Número de participantes que saldrán de la población activa por fallecimiento, invalidez o rotación entre  $t$  y  $t+1$ .
- $SP_r^t$  Número de participantes que saldrán de la población activa por retiro entre  $t$  y  $t+1$ .
- $SP_{sb}^t$  Número de participantes que saldrán de la población activa entre  $t$  y  $t+1$ , porque alcanzarán la edad máxima de retiro sin derecho a recibir el beneficio.
- $SP^t$  Número de participantes que saldrán de la población activa por cualquier razón, entre  $t$  y  $t+1$ .
- $ER^t$  Número de participantes activos que ingresarán a la población de retirados, entre  $t$  y  $t+1$ .
- $SR^t$  Número de participantes que saldrán de la población de retirados entre  $t$  y  $t+1$ , por fallecimiento.
- $IncP^t$  Incremento del total de activos entre  $t$  y  $t+1$ , medido como proporción de  $P$ .

- IncS<sup>t</sup>** Incremento de los salarios totales de los activos entre  $t$  y  $t+1$ , medido como proporción de  $S$ .
- IncR<sup>t</sup>** Incremento del total de retirados entre  $t$  y  $t+1$ , medido como proporción de  $R$ .
- IncB<sup>t</sup>** Incremento de los beneficios anuales totales entre  $t$  y  $t+1$ , medido como proporción de  $B$ .

#### Parámetros

- $Q_x^T$**  Probabilidad de que un participante de edad  $x$  salga de la población activa antes de llegar a la edad  $x+1$ , por fallecimiento, invalidez o rotación.
- $Q_x$**  Probabilidad de que un participante retirado de edad  $x$  muera antes de llegar a la edad  $x+1$ .
- IS<sub>x</sub>** Tasa de incremento salarial de un participante activo de edad  $x$  entre las edades  $x$  y  $x+1$ .
- IS<sub>0</sub>** Tasa de incremento anual de  $s_0$ .
- E<sub>x</sub>** Función que asigna al cuádruplo  $(x, p_1, p_2, p_3)$  el número de personas que ingresarán a la población activa a edad  $x$  entre  $t$  y  $t+1$ , dado que en  $t$  hay  $p_1$  activos de edad  $x$ , de los cuales  $p_2$  sobrevivirán a la edad  $x+1$  y  $p_3$  participantes saldrán de la población por retiro o por separación sin beneficio a la edad máxima de retiro.

#### Restricciones

$$0 \leq Q_x^T, Q_x \leq 1 \quad \forall x.$$

$$Q_w = 1 \quad \text{para } w = \text{edad máxima de la población de retirados.}$$

$$IS_x, E_x \geq 0 \quad \forall x.$$

$$IS_0 \geq 0.$$

#### **Estructura del plan**

##### Parámetros

- $r$**  Edad mínima de retiro.
- $r'$**  Edad máxima de retiro.
- $\alpha$**  Antigüedad mínima de retiro.
- FB** Fórmula de beneficio del plan, es una función que asigna al cuádruplo  $(x, y, n, s)$  el beneficio anual que

corresponde a  $n$  personas que se retiran a edad  $x$  y antigüedad  $y$  y cuyos sueldos anuales a edad  $x$  son en total  $s$ .

### Restricciones

$$r \leq r', \alpha \geq 1.$$

$$FB(x,y,n,s) \geq 0 \quad \forall \text{ cuádruplo } (x,y,n,s).$$

## **Valuación Actuarial**

### Variables

- VPBF** Valor Presente de Beneficios Futuros al tiempo  $t$ .  
**PA** Pasivo Actuarial al tiempo  $t$ .  
**PCP** Pasivo de Continuación del Plan al tiempo  $t$ .  
**VPSF** Valor Presente de Sueldos Futuros al tiempo  $t$ .  
**VACNP** Valor Acumulado de los Costos Normales Pasados al tiempo  $t$ .  
**PANF** Pasivo Actuarial No Financiado al tiempo  $t$ .  
**PS** Pasivo Suplementario al tiempo  $t$ .  
**IncPS** Incremento en el Pasivo Suplementario entre  $t-1$  y  $t$ .  
**CN** Costo Normal para el año  $t$ .  
**%CN** Costo Normal como porcentaje de  $S$ .

### Parámetros

#### Hipótesis Actuariales

- $q_x^T$  Probabilidad de que un participante de edad  $x$  salga de la población activa antes de llegar a la edad  $x+1$  por fallecimiento, invalidez o rotación.  
 $q_x$  Probabilidad de que un participante retirado de edad  $x$  muera antes de llegar a la edad  $x+1$ .  
 $i_{sx}$  Tasa de incremento salarial de un participante activo de edad  $x$  entre las edades  $x$  y  $x+1$ .  
 $i$  Tasa anual de interés que obtiene la inversión de los fondos del plan.  
**MF** Método de financiamiento, está dado como una función que calcula los valores de las variables **VPBF**, **PA**, **PCP**, **VPSF** y **CN**.

### Restricciones

$$0 \leq q_x, q_x^T \leq 1 \quad \forall x.$$

$$i_s x \geq 0 \quad \forall x.$$

$$i \geq 0.$$

### Fondo del plan

#### Variables

- F Valor de los fondos del plan al año  $t$ .
- OA Valor del objetivo de los activos del plan al año  $t$ .
- PB Pago total de beneficios que otorga el plan durante el año  $t$ .
- AR Aportación real que se hace al fondo del plan durante el año  $t$ .
- G Valor de las ganancias que se obtienen de la inversión del fondo durante el año  $t$ .
- RF Razón de financiamiento del plan de pensiones al año  $t$ .

#### Parámetros

- I Tasa anual de interés que se obtiene de inversión de los fondos del plan.
- FAR Factor que se aplica al valor del costo normal en un año dado para obtener el valor de la variable AR .
- OA Función que calcula el valor de la variable OA a partir de los resultados de la valuación actuarial.

#### Restricciones

$$I, FAR \geq 0.$$

Es importante aclarar que en las definiciones anteriores están implícitos los siguientes supuestos, que también forman parte del modelo:

- Todos los participantes de la población activa son elegibles.
- El sueldo pensionable de un participante es igual al sueldo que recibe a la edad de retiro y para el cálculo

del beneficio se considera toda la antigüedad como servicio acreditable.

- c) Los beneficios del plan son pagados mediante una pensión anual vitalicia.
- d) Los participantes se retiran a la mínima edad  $x$  ( $r \leq x \leq r^t$ ) con la que cuenten con la antigüedad mínima  $\alpha$ . Si un participante tiene una antigüedad menor que  $\alpha$  al cumplir  $r$  años de edad, entonces se separa de la empresa a la edad  $r$  sin recibir beneficios por parte del plan.

### III.3.3 Parámetros, Variables de Estado y Variables Explicativas del Modelo.

Llamamos estado del modelo al año  $t$ , a la colección de valores de las siguientes variables o parámetros:

$t, P_{xy}^t, s_{xy}^t, r_{xy}^t, b_{xy}^t, s_0^t, P^t, S^t, R^t, B^t, x_{pa}^t, y_{pa}^t, x_{pr}^t, y_{pr}^t, VPBF^t, PA^t, PCP^t, VPSF^t, PANF^t, PS^t, VACNP^t, CN^t, \%CN^t, F^t, OA^t, RF^t.$

También llamamos variables explicativas del modelo para la transición del tiempo  $t$  a  $t+1$ , a la colección de valores de las siguientes variables o parámetros:

$EP^t, SP_T^t, SP_r^t, SP_{sb}^t, SP^t, ER^t, SR^t, IncP^t, IncS^t, IncR^t, IncB^t, IncPS^t, PB^t, AR^t, G^t.$

Por último, distinguimos dos grupos dentro de los parámetros del modelo:

#### De Proyección

$t_0, Q_x^T, Q_x, IS_x, IS_0, E_x, r, r', \alpha, FB, OA$  (función),  $I, FAR.$

#### De Valuación

$q_x^T, q_x, is_x, i, MF.$

### III.3.4 Variables Auxiliares.

Con el objeto hacer más sencilla la definición de relaciones funcionales más adelante, definimos a continuación algunas variables auxiliares que no forman parte del modelo:

- a) El valor de un peso de salario a edad  $z+t$ , por cada peso de salario a edad  $z$  se define como:

$$IS_z = \prod_{k=0}^{t-1} (1 + IS_{z+k})$$

- b) El número de participantes activos que se retirarán al final del año  $t$  con edad  $x$  y antigüedad  $y$  se define como:

$$ER_{xy}^t = p_{x-1,y-1}^t (1 - Q_{x-1}^t), \quad \text{si } r \leq x < r', \quad y \geq a$$

- c) El sueldo total anual de los  $ER_{xy}^t$  al año  $t+1$ , que es necesario para calcular su beneficio correspondiente se define como:

$$SER_{xy}^t = \frac{s_{x-1,y-1}^t}{p_{x-1,y-1}^t} ER_{xy}^t (1 + IS_{x-1}),$$

- d) De manera tal, que el beneficio anual que recibirán los  $ER_{xy}^t$  se calcula como:

$$BER_{xy}^t = FB(x,y,ER_{xy}^t,SER_{xy}^t)$$

- e) El número de retirados que inician el año  $t$  con edad  $x$  y antigüedad  $y$  y fallecen antes del año  $t+1$ , se define como:

$$SR_{xy}^t = r_{xy}^t Q_x$$

- f) En lo que se refiere a la población activa del plan, definimos de la siguiente manera al número de participantes activos que inician el año  $t$  con edad  $x$  y

antigüedad y y salen antes de llegar al año  $t+1$  por fallecimiento, invalidez o rotación:

$$SP_{rxy}^t = p_{xy}^t Q_x^t$$

- g) El número de participantes activos que inician el año  $t$  con edad  $x$  y antigüedad  $y$  y se retiran en el año  $t+1$ , se define como:

$$SP_{rxy}^t = p_{xy}^t - SP_{rxy}^t \quad \text{si } r \leq x+1 < r', y+1 \geq \alpha$$

- h) De igual forma, el número de participantes activos que inician el año  $t$  con edad  $x$  y antigüedad  $y$  y se retiran en el año  $t+1$  sin recibir beneficios del plan, por haber llegado a la edad máxima de retiro con una antigüedad menor que  $\alpha$ , se define como:

$$SP_{sby}^t = p_{xy}^t - SP_{rxy}^t \quad \text{si } x = r-1, y+1 < \alpha$$

- i) Por último, el número de participantes activos que tienen edad  $x$  y antigüedad  $y$  al inicio del año  $t$ , y salen de la población activa en el transcurso del año, se define como:

$$SP_{xy}^t = SP_{rxy}^t + SP_{rxy}^t + SP_{sby}^t$$

### III.3.5 Algoritmo para la Simulación del Sistema.

Según lo expuesto a principios de la sección III.3, para terminar con la formulación del modelo, todavía tenemos que definir las relaciones funcionales entre las variables y los parámetros. Esto es, no sólo dar las fórmulas para calcular cada una de las variables, sino además, definir el algoritmo del proceso necesario para simular y experimentar el comportamiento del modelo, es decir, la forma en que la información se proporciona, procesa y sale del modelo en cualquier período de simulación.

Definimos el algoritmo general para la simulación del sistema, independientemente del lenguaje o método utilizado para su traslación a una computadora, dejando la definición explícita de las fórmulas para el cálculo de las variables para la siguiente sección.

### INICIO

- Paso 1 Proporcionar el valor de  $t_0$  y hacer  $t=t_0$ .
- Paso 2 Proporcionar los siguientes parámetros:  
 $Q_x^T, Q_x, IS_x, IS_0, E_x, q_x^T, q_x, is_x, i, MF, r, r', \alpha, FB, I, FAR$
- Paso 3 Proporcionar el valor inicial de las siguientes variables:  
 $p_{xy}^t, s_{xy}^t, r_{xy}^t, b_{xy}^t, s_0^t, VACNP^t, F^t, PA^{t-1}, CN^{t-1}, F^{t-1}, AR^{t-1}$
- Paso 4 Calcular lo siguiente:  
 $P^t, S^t, R^t, B^t, x_{pa}^t, y_{pa}^t, x_{pr}^t, y_{pr}^t$
- Paso 5 Realizar la valuación actuarial al inicio del año  $t$  para obtener el valor de las siguientes variables:  
 $VPBF^t, PA^t, PCP^t, VPSF^t, PANF^t, PS^t, CN^t, \%CN^t, OA^t, RF^t$
- Paso 6 Escribir los parámetros y el estado del modelo al año  $t$ :  
 $p_{xy}^t, s_{xy}^t, r_{xy}^t, b_{xy}^t, s_0^t, P^t, S^t, R^t, B^t, x_{pa}^t, y_{pa}^t, x_{pr}^t, y_{pr}^t, Q_x^T, Q_x, IS_x, IS_0, E_x, r, r', \alpha, FB, I, FAR, F^t, OA^t, RF^t, VPBF^t, PA^t, PCP^t, VPSF^t, PANF^t, PS^t, VACNP^t, CN^t, \%CN^t, q_x^t, q_x, is_x, i, MF$
- Paso 7 Almacenar el valor de las siguientes variables si se desea, para que puedan tomarse como datos iniciales en una simulación posterior:  
 $p_{xy}^t, s_{xy}^t, r_{xy}^t, b_{xy}^t, s_0^t, VACNP^t, F^t, PA^{t-1}, CN^{t-1}, F^{t-1}, AR^{t-1}$
- Paso 8 Si se va a simular la transición de  $t \rightarrow t+1$ , entonces ir al Paso 9, de lo contrario ir a FIN.
- Paso 9 Calcular y escribir las siguientes variables de la transición  $t \rightarrow t+1$ :  
 $EP^t, SP_T^t, SP_r^t, SP_{sb}^t, SP^t, ER^t, SR^t, IncPS^t, PB^t, AR^t, G^t$
- Paso 10 Realizar las siguientes asignaciones:



$$PA^{t-1} = PA^t, CN^{t-1} = CN^t, F^{t-1} = F^t, AR^{t-1} = AR^t.$$

Paso 11 Calcular las siguientes variables de la población, el fondo y el VACNP para el año  $t+1$ :

$$p_{xy}^{t+1}, s_{xy}^{t+1}, r_{xy}^{t+1}, b_{xy}^{t+1}, s_0^{t+1}, VACNP^{t+1}, F^{t+1}, P^{t+1}, S^{t+1}, R^{t+1}, B^{t+1},$$

$$x_{pa}^{t+1}, y_{pa}^{t+1}, x_{pr}^{t+1}, y_{pr}^{t+1}$$

Paso 12 Calcular las siguientes variables de transición:

$$IncP^t, IncS^t, IncR^t, IncB^t.$$

Paso 13 Hacer  $t=t+1$ .

Paso 14 Proporcionar los parámetros que especifica el Paso 2.

Paso 15 Ir al Paso 5.

FIN

### III.3.6 Relaciones Funcionales.

En esta sección, definimos las fórmulas explícitas para realizar los cálculos mencionados en el algoritmo anterior:

Paso 4

$$P^t = \sum_x \sum_y p_{xy}^t, \quad S^t = \sum_x \sum_y s_{xy}^t, \quad R^t = \sum_x \sum_y r_{xy}^t, \quad B^t = \sum_x \sum_y b_{xy}^t.$$

$$x_{pa}^t = \sum_x \sum_y x \frac{p_{xy}^t}{p^t}, \quad y_{pa}^t = \sum_x \sum_y y \frac{p_{xy}^t}{p^t}, \quad x_{pr}^t = \sum_x \sum_y x \frac{r_{xy}^t}{R^t},$$

$$y_{pr}^t = \sum_x \sum_y y \frac{r_{xy}^t}{R^t}.$$

Paso 5

La función MF definida por el usuario, calcula lo siguiente:

$$VPBF^t, PA^t, PCP^t, VPSF^t, CN^t.$$

La función OA definida también por el usuario, calcula el valor de OA.

$$PANF^t = PA^t - F^t, \quad PS^t = PA^t - VACNP^t, \quad \%CN^t = \frac{CN^t}{St}$$

$$RF = \frac{F^t}{OAt}$$

Paso 9

$$SP_T^t = \sum_x \sum_y SP_{Txy}^t, \quad SP_r^t = \sum_x \sum_y SP_{rxy}^t, \quad SP_b^t = \sum_x \sum_y SP_{sby}^t$$

$$EP^t = \sum_x E_x, \quad SR^t = \sum_x \sum_y SR_{xy}^t, \quad ER^t = \sum_x \sum_y ER_{xy}^t$$

$$IncPS = PANF^t - (PA^{t-1} + CN^{t-1} \cdot F^{t-1} \cdot AR^{t-1}) (1+i), \quad \text{si } t > 1$$

$$PB^t = \sum_x \sum_y b_{xy}^t, \quad AR^t = FAR CN^t$$

$$G^t = \text{MAX} (0, (F^t + \frac{1}{2}(AR^t - PB^t)) I)$$

Paso 11

Denotamos por  $x_{max}$ ,  $x_{min}$ ,  $y_{max}$  y  $y_{min}$  a las edades y antigüedades máxima y mínima de la población respectivamente, entonces:

Para  $x$  desde  $x_{max}$  hasta  $x_{min}$  y

Para  $y$  desde  $y_{max}$  hasta  $y_{min}$

$$r_{xy}^{t+1} = r_{x-1,y-1}^t - SR_{x-1,y-1}^t + ER_{xy}^t$$

$$b_{xy}^{t+1} = \frac{b_{x-1,y-1}^t}{t} (r_{x-1,y-1}^t - SR_{x-1,y-1}^t) + BER_{xy}^t$$

$$p_{xy}^{t+1} = \begin{cases} E_x & \text{si } y=0 \\ \frac{t}{p_{x-1,y-1} - SP_{x-1,y-1}} & \text{si } y>0 \end{cases}$$

$$s_{xy}^{t+1} = \begin{cases} \frac{t}{s_0 x - x_{\min} IS_{x_{\min}}} & \text{si } y=0 \\ \frac{t}{p_{x-1,y-1}} \frac{t}{pxy(1+IS_{x-1})} & \text{si } y>0 \end{cases}$$

$$s_0^{t+1} = s_0^t + (1+IS_0) F^{t+1} = F^t + AR^t - PB^t + G^t$$

$$VACNP^{t+1} = VACNP^t (1+i) + CN^t$$

Paso 12

$$IncP^t = \frac{P^{t+1}}{P^t} - 1,$$

$$IncS^t = \frac{S^{t+1}}{S^t} - 1,$$

$$IncR^t = \frac{R^{t+1}}{R^t} - 1,$$

$$IncB^t = \frac{B^{t+1}}{B^t} - 1$$

## CAPITULO IV. TRASLACION Y VALIDACION DEL SISTEMA DE SIMULACION.

A MEDIDA QUE EL TIEMPO PASA SE VA UNO QUEDANDO

EN AQUELLO A LO QUE SE HA ACOSTUMBRADO.

HERMANN HESSE.

### IV.1 Traslación del Modelo.

El modelo descrito anteriormente, puede trasladarse a una computadora de distintas maneras, dependiendo del uso que se le quiera dar, del lenguaje de programación y sobre todo del estilo del programador. En nuestro caso, elegimos el lenguaje de programación Pascal (en particular el compilador Turbo Pascal versión 5.0).

No se pretende hacer una descripción detallada del sistema, pues eso tomaría mucho espacio considerando que la intención del trabajo es proporcionar una visión global del proceso de simulación de sistemas.

Los aspectos más importantes de la traslación son los siguientes:

#### Lenguaje de programación.

Las principales causas por las que elegimos el lenguaje Pascal como lenguaje de programación son: que es un lenguaje estructurado, tiene la posibilidad de programar en módulos por medio de unidades, la gran velocidad de procesamiento y ejecución, y sobre todo la gran difusión que tiene entre los estudiantes.

#### Estructura General.

Siguiendo hasta cierto punto la estructura del modelo, el sistema está compuesto de las siguientes unidades:

Principal. Contiene la definición de constantes y variables del sistema.

- Población.** Contiene los procedimientos para leer los valores iniciales de las variables de la población, la proyección de la población y el almacenamiento de los resultados de la población en cualquier año del período de simulación.
- Actuarial.** Contiene las funciones FB, Ex, MF y OA que el usuario debe proporcionar, así como también los procedimientos y funciones que puedan requerirse para su definición.
- Parámetros.** Contiene los procedimientos para leer los parámetros de proyección y de valuación.
- Simulación.** Contiene el programa principal. Lleva el control del proceso de simulación y contiene los procedimientos que calculan las variables del componente Fondo y las variables de la valuación actuarial que no se calculan con MF. Además contiene los procedimientos para guardar los archivos de salida.
- Utilerías.** Contiene los procedimientos para leer en forma correcta los archivos de datos.

#### **Constantes.**

Con el fin de formar las estructuras de datos para el sistema, definimos las siguientes constantes:

Los enteros  $x_{min\_act}=15$ ,  $x_{max\_act}=70$ ,  $x_{min\_ret}=55$ ,  $y_{min\_ret}=100$ , de tal forma que el intervalo de edades de los activos sea  $[x_{min\_act}, x_{max\_act}]$ ; el intervalo de edades de los retirados sea  $[x_{min\_ret}, x_{max\_ret}]$  y los intervalos de las antigüedades de los activos y retirados respectivamente son  $[0, x_{max\_act} - x_{min\_act}]$  y  $[0, x_{max\_ret} - x_{min\_act}]$ . Además definimos 9 enteros  $x_i$ ,  $x_1 = x_{min\_act} - 1 < x_2 < \dots < x_9 = x_{max\_act}$ ; los 9 enteros  $z_k$ ,  $z_1 = x_{min\_ret} - 1 < z_2 < \dots < z_9 = x_{max\_ret}$  y los 8 enteros  $y_j$ ,  $y_1 = -1 < y_2 < \dots < y_8 = x_{max\_act} - x_{min\_act}$ , de tal forma que:

- a) Cada uno de los parámetros  $Q_x^T$ ,  $Q_x$ ,  $IS_x$ ,  $q_x^T$ ,  $q_x$  e  $is_x$  serán introducidos al sistema como una colección de 8 valores tales que para toda  $k=1,2,\dots,8$ :

$$Q_x^T = Q_k^T \quad y$$

$$q_x^T = q_k^T \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}];$$

$$Q_x = Q_k \quad y$$

$$q_x = q_k \quad \forall x \in [z_k, z_{k+1}];$$

$$S_x = IS_k \quad e$$

$$s_x = is_k \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}].$$

- b) Estas constantes definen la forma en que las variables  $p_{xy}^t$ ,  $s_{xy}^t$ ,  $r_{xy}^t$  y  $b_{xy}^t$  son presentadas a través de la pantalla para cada año  $t$  de simulación.

#### Entrada de la Información.

La información se proporciona al sistema por medio de cinco mecanismos distintos:

- El archivo de la población activa, que contiene los valores iniciales de  $F$ ,  $VACNP$ ,  $F^{t-1}$ ,  $PA^{t-1}$ ,  $AR^{t-1}$ ,  $CN^{t-1}$ , y  $p_{xy}$ ,  $s_{xy}$ .
- El archivo de la población retirada, que contiene los valores iniciales de  $r_{xy}$  y  $b_{xy}$ .
- El archivo de parámetros, que contiene el valor inicial de los parámetros  $q_x^T$ ,  $q_x$ ,  $Q_x^T$ ,  $Q_x$ ,  $IS_x$ ,  $is_x$ .
- La pantalla a través de la cual se proporcionan los valores de  $IS_0$ ,  $l$ ,  $FAR$ ,  $r$ ,  $r'$ ,  $\alpha$ ,  $i$ ,  $t_0$  y el valor inicial de la variable  $s_0$ .
- El código fuente del sistema, para proporcionar las funciones  $FB$ ,  $Ex$ ,  $MF$  y  $OA$ .

Los archivos de las poblaciones activa y retirada, así como las definiciones de  $FB$ ,  $Ex$ ,  $MF$  y  $OA$  se proporcionan una sola vez al inicio en cada ejecución del sistema. El archivo

de parámetros y los parámetros que se introducen a través de la pantalla, pueden cambiarse al inicio de cualquier año durante el proceso de simulación.

#### **Salidas del Sistema.**

El sistema genera dos tipos de archivos de salida:

- a) El archivo en el cual se guardan los resultados de la simulación cada año, los parámetros y nombres de los archivos de entrada utilizados.
- b) Opcionalmente, al inicio de cualquier año de simulación pueden generarse dos archivos con la información del año  $t$ , que contengan los datos y el formato requerido para ser utilizados como los archivos de entrada en ambas opciones. Además se pueden modificar las funciones  $FB$ ,  $Er$ ,  $MF$  y  $OA$  para después reiniciar la simulación con los valores iniciales de la población activa y retirada contenidos en estos archivos.

#### **Información Desplegada en la Pantalla.**

El sistema muestra en la pantalla la siguiente información:

Valores de  $p_{xy}$ ,  $s_{xy}$  por intervalos de edad y antigüedad.

Valores de  $r_{xy}$ ,  $b_{xy}$  por intervalos de edad.

Valor actual de  $t$ .

Valor de los parámetros  $IS_0$ ,  $I$ ,  $FAR$ ,  $r$ ,  $r'$ ,  $\alpha$ ,  $i$  y el valor actual de  $s_0$ .

Nombres de los archivos de la población activa y retirada, de parámetros y de salida.

#### **IV.2 Validación del Sistema.**

Según R. Shannon<sup>24</sup>, la meta de un sistema de simulación es que éste genere las mismas situaciones y características del

---

<sup>24</sup> [4] R. Shannon. Systems Simulation the art and Science.

comportamiento del sistema real; por lo tanto, validarlo significa desarrollar un nivel aceptable de confianza, de modo que las inferencias obtenidas del comportamiento del sistema de simulación sean aplicables al mundo real.

La primera etapa de validación de acuerdo con R. Shannon, consiste en la observación de cada uno de los procesos simples simulados, a fin de asegurarse de que su estructura sea la mejor posible. La segunda fase, pretende verificar la habilidad del sistema de simulación para predecir el futuro comportamiento del sistema del mundo real.

En nuestro caso, debido a la imposibilidad de realizar experimentos prácticos con planes de pensiones del mundo real, asumiremos que el comportamiento del sistema alcanza un nivel aceptable de confianza cuando logremos que las proyecciones realizadas con el sistema de simulación, sean consistentes con las que H. Winklevoss<sup>25</sup> presenta en su libro.

Para dar cumplimiento a la primera etapa de validación, se preparó una prueba para el componente Población. La segunda etapa consistió en generar 6 proyecciones de financiamiento de 50<sup>26</sup> años cada una, comparados contra una proyección base predefinida y en la comparación de los resultados con los que obtuvo H. Winklevoss en 6 proyecciones análogas.

#### IV.2.1 Validación del Componente Población.

El criterio utilizado para validar el funcionamiento del componente Población del sistema, fué el de probar que con éste fuera posible realizar simulaciones consistentes con las presentadas por H. Winklevoss<sup>25</sup> en su libro, en el capítulo de Teoría de poblaciones de planes de pensiones.

---

<sup>25</sup> [6] H. Winklevoss. Pension Mathematics with Numerical Illustrations.

<sup>26</sup> Este tamaño de muestra es adecuado para analizar detalladamente el comportamiento del plan de pensiones durante toda la vida activa de los participantes de la población inicial.



En ese capítulo el autor presenta los resultados de dos simulaciones de 50 años para dos poblaciones distintas, ambas partiendo de la población final que resulta de una simulación previa de 25 años sobre una población inmadura. La forma en que se llevaron a cabo las simulaciones no se especifica en el libro, así como tampoco el valor de algunos de los parámetros utilizados, ni la composición de la población inicial.

Nuestro objetivo fue obtener un comportamiento similar en las poblaciones correspondientes a las dos simulaciones de 50 años con el sistema, utilizando los datos proporcionados por H. Winklevoss y manejando debidamente los parámetros del sistema.

#### Simulaciones Incluidas en el Libro de H. Winklevoss.

El autor inicia con una población inmadura no especificada, a la cual llamaremos  $P_0$  y cuya escala de salarios y distribución por edades de ingreso de nuevos participantes es la siguiente:

Edad de ingreso	% del total de entradas	Escala de salarios
20	0.32	1.0000
25	0.26	1.1171
30	0.17	1.2437
35	0.10	1.3747
40	0.05	1.5042
45	0.04	1.6525
50	0.03	1.7301
55	0.02	1.8122
60	0.01	1.8655

Las tasas de decremento y las tasas de incremento de salarios supuestas, son las mismas utilizadas por el autor como estándares en su libro y que presentamos a continuación:

x	$Q_x = q_x$	$IS_x = is_x$
[15,25]	0.24371	0.075
(25,30]	0.12629	0.072
(30,35]	0.07208	0.069
(35,40]	0.05948	0.067
(40,45]	0.04829	0.064
(45,50]	0.04585	0.062
(50,55]	0.04709	0.059
(55,70]	0.04800	0.055

Finalmente se supone que no existe ningún plan de pensiones, por lo que la población contará solo con participantes activos.

El tamaño de  $P_0$  crece progresivamente durante 25 años (no se especifica como) en una primera simulación llamada  $S_0$ , hasta alcanzar un crecimiento anual de 7.8%, a la población resultante de esta simulación la llamamos  $P_1$ .

Después el autor supone la existencia de un plan de pensiones con edad de retiro de 65 años y parte de la población  $P_1$  para realizar otra simulación  $S_1$  también de 50 años, cuyos resultados se muestran en la Tabla IV-1. A la población resultante de la simulación al año 17 la llamamos  $P_2$ .

El autor realiza una nueva simulación  $S_2$  de 50 años, a partir de la población  $P_2$ . Durante los primeros 10 años de esta simulación, los supuestos son los mismos que en  $S_1$  y de ahí en adelante se supone que el tamaño de la población permanece constante. Los resultados de la simulación  $S_2$  se muestran en la Tabla IV-2.

Tabla IV.1 Evolución de la Población P1						
Año	# Act. como % de los Iniciales	Edad Prom.	Antig. Prom.	Suel.Tot. en % de los Iniciales	Suel. Pro. en % de los Iniciales	Ret. como % de Act.
1	100.0	34.9	4.6	100.0	100.0	0.0
2	107.8	35.0	4.8	113.6	105.3	0.3
3	115.4	35.1	4.9	128.1	111.0	0.7
4	122.6	35.3	5.1	143.6	117.1	1.0
5	129.4	35.5	5.2	160.0	123.6	1.3
6	136.0	35.7	5.4	177.4	130.5	1.6
7	142.2	35.7	5.6	195.9	137.7	1.9
8	148.2	36.1	5.8	215.4	145.4	2.2
9	153.8	36.3	6.0	236.0	153.5	2.6
10	159.0	36.5	6.2	257.7	162.1	2.9
11	164.0	36.7	6.4	280.6	171.1	3.2
12	168.1	37.0	6.6	304.5	180.6	3.6
13	173.0	37.2	6.8	329.7	190.6	4.0
14	177.0	37.4	7.0	356.0	201.2	4.3
15	180.6	37.6	7.2	383.5	212.3	4.7
16	184.0	37.7	7.4	412.2	224.0	5.1
17	187.0	37.9	7.6	442.1	236.3	5.5
18	189.8	38.1	7.7	473.1	249.3	6.0
19	192.2	38.3	7.9	505.4	263.0	6.4
20	194.2	38.5	8.1	538.9	277.4	6.9
21	196.0	38.7	8.3	573.5	292.6	7.4
22	197.4	38.8	8.5	609.2	308.5	7.8
23	198.6	39.0	8.7	646.0	325.3	8.4
24	199.4	39.2	8.8	683.9	343.0	8.9
25	199.8	39.3	9.0	722.8	361.7	9.4
26	200.0	39.5	9.2	762.6	381.3	10.0
27	199.8	39.7	9.4	803.3	402.0	10.6
28	199.4	39.8	9.5	844.7	423.7	11.2
29	198.6	40.0	9.7	886.8	446.6	11.8
30	197.4	40.1	9.9	929.5	470.8	12.4
31	196.0	40.3	10.1	972.6	496.2	13.1
32	194.2	40.4	10.2	1015.9	523.0	13.6
33	192.2	40.6	10.4	1059.4	551.3	14.6
34	189.8	40.8	10.6	1102.7	581.1	15.3
35	187.0	40.9	10.8	1145.8	612.6	16.1
36	184.0	41.1	10.9	1188.3	645.8	17.0
37	180.6	41.3	11.1	1230.0	680.9	17.9
38	177.0	41.4	11.3	1270.5	718.0	18.8
39	173.0	41.6	11.5	1309.7	757.2	19.8
40	168.6	41.8	11.7	1347.1	798.8	20.9
41	164.0	42.0	12.0	1382.3	842.9	22.0
42	159.0	42.3	12.2	1414.9	889.6	23.2
43	153.8	42.5	12.4	1444.4	939.4	24.5
44	148.2	42.8	12.7	1470.3	992.3	25.9
45	142.2	43.1	13.0	1492.0	1048.9	27.4
46	136.0	43.4	13.4	1509.0	1109.5	29.1
47	129.4	43.7	13.8	1520.4	1174.6	30.9
48	122.6	44.2	14.2	1525.5	1244.7	33.0
49	115.4	44.6	14.7	1523.7	1320.8	35.3
50	107.8	45.2	15.3	1513.8	1403.8	38.1
51	100.0	45.9	16.0	1495.0	1495.0	41.2

Tabla IV.2 Evolución de la Población P2						
Año	# Act. como % de los iniciales	Edad Prom.	Antig. Prom.	Suel. Tot. en % de los iniciales	Suel. Pro. en % de los iniciales	Ret. como % de Act.
1	100.0	37.9	7.6	100.0	100.0	5.5
2	101.5	38.1	7.7	107.0	105.5	6.0
3	102.7	38.3	7.9	114.3	111.3	6.4
4	103.8	38.5	8.1	121.9	117.4	6.9
5	104.8	38.7	8.3	129.7	123.8	7.4
6	105.8	38.8	8.5	137.8	130.5	7.8
7	106.2	39.0	8.7	146.1	137.7	8.4
8	106.6	39.2	8.8	154.7	145.1	8.9
9	106.8	39.2	9.0	163.5	153.0	9.4
10	106.9	39.5	9.2	172.5	161.3	10.0
11	106.9	39.6	9.4	181.8	170.0	10.5
12	106.9	39.8	9.5	191.5	179.1	11.1
13	106.9	39.9	9.7	201.7	188.6	11.7
14	106.9	40.0	9.8	212.3	198.6	12.3
15	106.9	40.1	9.9	223.4	209.0	12.8
16	106.9	40.2	10.0	235.0	219.8	13.4
17	106.9	40.2	10.0	247.2	231.2	14.0
18	106.9	40.3	10.1	259.9	243.0	14.5
19	106.9	40.3	10.2	273.2	255.5	15.1
20	106.9	40.3	10.2	287.0	268.4	15.6
21	106.9	40.3	10.3	301.6	282.0	16.2
22	106.9	40.4	10.3	316.8	296.2	16.7
23	106.9	40.4	10.3	332.7	311.1	17.2
24	106.9	40.4	10.3	349.4	326.7	17.7
25	106.9	40.4	10.3	366.8	343.1	18.1
26	106.9	40.4	10.3	385.1	360.2	18.6
27	106.9	40.3	10.3	404.3	378.1	19.0
28	106.9	40.3	10.3	424.4	398.9	19.4
29	106.9	40.3	10.3	445.4	416.6	19.8
30	106.9	40.3	10.3	467.5	437.2	20.1
31	106.9	40.3	10.2	490.7	458.9	20.4
32	106.9	40.3	10.2	515.0	481.6	20.7
33	106.9	40.2	10.2	540.5	505.5	21.0
34	106.9	40.2	10.2	567.3	530.5	21.3
35	106.9	40.2	10.2	595.4	556.8	21.5
36	106.9	40.2	10.2	625.0	584.5	21.7
37	106.9	40.2	10.1	656.0	613.5	21.8
38	106.9	40.2	10.1	688.6	644.0	22.0
39	106.9	40.2	10.1	722.8	676.0	22.1
40	106.9	40.1	10.1	758.8	709.6	22.2
41	106.9	40.1	10.1	796.6	745.0	22.3
42	106.9	40.1	10.1	836.3	782.1	22.4
43	106.9	40.1	10.1	878.0	821.1	22.4
44	106.9	40.1	10.1	921.8	862.1	22.5
45	106.9	40.1	10.1	967.9	905.2	22.5
46	106.9	40.1	10.1	1016.3	950.4	22.5
47	106.9	40.1	10.1	1067.1	998.0	22.5
48	106.9	40.1	10.1	1120.5	1047.9	22.5
49	106.9	40.1	10.1	1176.6	1100.4	22.5
50	106.9	40.1	10.1	1235.6	1155.5	22.5

### Simulaciones con el Sistema.

Como población inicial consideramos una de 100 personas con la misma distribución por edades de ingreso y la misma escala de salarios propuesta por H. Winklevoss. La edad mínima es de 18 años y el sueldo para un participante de esta edad es igual a 1. (El archivo de entrada correspondiente a esta población se muestra en el apéndice A.II).

Los parámetros utilizados por el sistema fueron los siguientes:

- a) Población activa  $Pob^0$ .
- b) No hay población de retirados.
- c) Las tasas de decrementos y las tasas de incremento de salarios son las estándares utilizadas por H. Winklevoss.
- d) El valor inicial de  $F$ ,  $VACNP$ ,  $F^{t-1}$ ,  $PA^{t-1}$ ,  $CN^{t-1}$  y  $AR^{t-1}$  es igual a cero.
- e)  $t_0 = 1$ .
- f)  $r = r' = 65$  y  $\alpha = 50$  con el fin de que todo participante que llegue a la edad  $r$  salga de la población sin recibir beneficio.
- g)  $FB = 0$ .
- h)  $Ex$ , para el primer año entran 107 nuevos participantes y este número crece a una tasa del 7% anual en los años restantes.
- i) La distribución por edad de ingreso es la misma que mencionamos anteriormente.

j)  $I=1=0.10$  y  $FAR=1$ , aunque el valor de estos parámetros no afecta la simulación.

k)  $s_0=1$ , e  $IS_0=0.05$ .

Con estos parámetros realizamos una simulación  $Sim_0$  de 25 años y la población final se almacenó en  $Pob_{tact}$ .

A partir de la población  $Pob_{tact}$ , se realizó una nueva simulación  $Sim_1$  hasta 50 años, con los siguientes cambios en los parámetros:

a) La población activa inicial es  $Pob_{tact}$ .

b) Nuevamente el valor inicial de  $t_0=1$ .

c)  $\alpha = 1$  por el supuesto de que a partir de este momento existe un plan de pensiones con edad de retiro igual a 65 años.

d) El valor inicial de  $s_0 = (1 + IS_0) = 3.2251$ , ya que este es el monto que ha alcanzado  $s_0$  después de 24 años transcurridos en la simulación  $Sim_0$ .

e) La distribución por edades de los nuevos participantes sigue siendo la misma, pero ahora el número total de entradas es:

$$\begin{array}{ll} 100(1.07)^{25} & sit=1. \\ 100(1.07)^{26} & sit=2,3,\dots,26. \\ 100(1.07)^{52-t} & sit=27,\dots,51. \end{array}$$

La evolución de la población  $Pob_{tact}$  durante los 50 años, se muestra en la Tabla IV-3. La población de activos

correspondiente al inicio del año 17 de la simulación Sim1, fué almacenada en Poblact.

Por último, a partir de la población Poblact se generó una nueva simulación Sim2 de 50 años, con los siguientes cambios en los parámetros con respecto a la simulación Sim1:

- a) La población es Poblact.
- b) Poblret se considera como población de retirados.
- c) El valor de  $t_0 = 1$ .
- d) El valor inicial de  $s_0 = (1 + IS_0) = 7.03998$ , pues éste es el monto que ha alcanzado  $s_0$  después de 41 años transcurridos en las simulaciones Sim0 y Sim1.
- e) La distribución por edades de los nuevos participantes es la misma, pero ahora el número total de entradas es:

$$100(1.07)^{26} \quad \text{si } t = 1, \dots, 11,$$

el suficiente para mantener constante el tamaño de la población si  $t > 11$ .

La evolución de la población Poblact, se muestra en la Tabla IV-4, y parte de los resultados de las simulaciones realizadas con el sistema se presentan después de éstas. Las correspondientes funciones de nuevos participantes  $Ex$ , aparecen en el apéndice A.III.

Tabla IV.3 Evolución de la Población Pob1act						
Año	# Act. como X de los iniciales	Edad Prom.	Antig. Prom.	Suel.Tot. en X de los iniciales	Suel. Prog. en X de los iniciales	Ret. como % de Act.
1	100.0	37.1	7.2	100.0	100.0	0.0
2	107.1	37.2	7.4	112.6	105.1	0.5
3	114.9	37.4	7.6	127.3	110.8	0.9
4	122.2	37.6	7.8	142.8	116.9	1.4
5	128.6	37.9	8.0	158.9	123.5	1.9
6	134.8	38.3	8.3	176.0	130.6	2.4
7	140.5	38.6	8.5	194.0	138.1	2.9
8	145.9	39.0	8.8	213.1	146.1	3.5
9	150.9	39.3	9.1	232.8	154.3	4.1
10	155.7	39.6	9.4	253.6	162.9	4.9
11	160.3	40.0	9.7	275.6	172.0	5.6
12	164.5	40.3	10.0	298.6	181.5	6.4
13	168.6	40.6	10.2	322.6	191.3	7.4
14	172.4	40.9	10.5	347.5	201.6	8.4
15	176.0	41.1	10.8	373.8	212.4	9.4
16	179.4	41.4	11.0	401.2	223.7	10.6
17	182.6	41.6	11.2	429.7	235.4	11.8
18	185.5	41.8	11.4	459.4	247.6	13.1
19	188.3	42.0	11.6	490.2	260.4	14.5
20	190.8	42.2	11.8	522.3	273.7	16.0
21	193.2	42.4	12.0	555.6	287.6	17.6
22	195.3	42.5	12.2	590.0	302.2	19.3
23	197.2	42.7	12.3	625.9	317.4	21.1
24	198.9	42.8	12.4	663.1	333.4	22.9
25	200.5	42.9	12.6	701.7	350.0	24.8
26	201.9	43.0	12.7	741.8	367.5	26.8
27	203.1	43.1	12.8	783.5	385.7	28.8
28	202.8	43.3	12.9	827.8	405.1	31.2
29	201.6	43.5	13.2	859.5	426.3	33.5
30	199.9	43.7	13.4	897.1	448.9	35.9
31	197.1	44.0	13.7	931.2	472.4	38.5
32	194.3	44.3	13.9	965.9	497.2	41.2
33	191.3	44.6	14.2	1001.0	523.4	44.1
34	187.8	44.9	14.5	1035.6	551.4	47.1
35	184.1	45.2	14.8	1066.9	579.5	50.2
36	180.5	45.5	15.1	1098.2	608.6	53.4
37	176.7	45.8	15.4	1130.4	639.8	56.6
38	173.0	46.1	15.7	1163.0	672.3	59.8
39	169.2	46.3	16.0	1195.0	706.1	63.0
40	165.1	46.6	16.3	1222.2	740.4	66.4
41	161.3	46.8	16.5	1250.8	775.4	69.6
42	157.3	47.0	16.8	1277.9	812.4	72.8
43	153.4	47.3	17.1	1304.5	850.5	75.9
44	149.6	47.5	17.4	1332.1	890.6	79.0
45	145.8	47.7	17.7	1359.3	932.5	82.0
46	141.8	47.9	17.9	1384.7	976.8	85.1
47	137.9	48.1	18.2	1410.0	1022.7	88.1
48	133.6	48.2	18.5	1426.7	1068.1	91.5
49	129.5	48.4	18.7	1444.9	1116.1	94.6
50	125.3	48.6	19.0	1461.1	1166.3	97.9
51	121.3	48.7	19.3	1476.6	1217.0	101.1



Tabla IV.4 Evolución de la Población Pob2act						
Año	# Act. como % de los iniciales	Edad Prom.	Antig. Prom.	Suel. Tot. en % de los iniciales	Suel. Pro. en % de los iniciales	Ret. como % de Act.
1	100.0	41.6	11.2	100.0	100.0	11.8
2	101.6	41.8	11.4	106.9	105.2	13.1
3	103.1	42.0	11.6	114.1	110.6	14.5
4	104.5	42.2	11.8	121.5	116.3	16.0
5	105.8	42.4	12.0	129.3	122.2	17.6
6	107.0	42.5	12.2	137.3	128.4	19.3
7	108.0	42.7	12.3	145.7	134.8	21.1
8	109.0	42.8	12.4	154.3	141.6	22.9
9	109.8	42.9	12.6	163.3	148.7	24.8
10	110.6	43.0	12.7	172.6	156.1	26.8
11	111.3	43.1	12.8	182.3	163.9	28.8
12	111.9	43.2	12.9	192.4	172.0	31.0
13	111.9	43.3	13.0	201.0	179.7	33.0
14	111.9	43.4	13.1	209.9	187.6	35.1
15	111.9	43.4	13.2	219.1	195.9	37.2
16	111.9	43.5	13.3	228.7	204.5	39.2
17	111.9	43.5	13.4	238.7	213.4	41.3
18	111.9	43.6	13.5	249.0	222.6	43.3
19	111.9	43.6	13.6	259.7	232.2	45.3
20	111.9	43.6	13.6	270.9	242.2	47.1
21	111.9	43.6	13.7	282.5	252.5	49.0
22	111.9	43.6	13.7	295.2	263.9	50.7
23	111.9	43.6	13.7	308.5	275.8	52.2
24	111.9	43.6	13.8	322.5	288.3	53.6
25	111.9	43.6	13.8	337.2	301.4	54.8
26	111.9	43.6	13.8	353.1	315.7	55.9
27	111.9	43.6	13.8	370.4	331.1	56.8
28	111.9	43.6	13.8	388.7	347.5	57.5
29	111.9	43.6	13.8	408.0	364.7	58.1
30	111.9	43.6	13.8	428.8	383.3	58.6
31	111.9	43.7	13.8	451.3	403.5	58.8
32	111.9	43.7	13.8	475.8	425.4	59.0
33	111.9	43.8	13.8	501.8	448.6	59.1
34	111.9	43.9	13.8	530.0	473.8	59.0
35	111.9	44.0	13.8	559.6	500.3	58.8
36	111.9	44.1	13.9	591.3	528.6	58.5
37	111.9	44.2	13.9	624.6	558.4	58.2
38	111.9	44.4	14.0	660.4	590.4	57.7
39	111.9	44.6	14.1	698.3	624.3	57.2
40	111.9	44.8	14.3	738.2	660.0	56.8
41	111.9	45.0	14.4	780.0	697.3	56.3
42	111.9	45.2	14.5	822.3	735.2	55.8
43	111.9	45.3	14.6	866.6	774.8	55.4
44	111.9	45.4	14.7	913.1	816.3	55.1
45	111.9	45.6	14.8	961.6	859.7	54.7
46	111.9	45.7	14.9	1012.4	905.1	54.4
47	111.9	45.8	15.0	1064.3	951.5	54.1
48	111.9	45.8	15.0	1117.6	999.1	54.1
49	111.9	45.8	15.1	1172.4	1048.1	54.1
50	111.9	45.8	15.1	1229.2	1098.9	54.2

A continuación mostramos los resultados de los primeros 5 años de las simulaciones:  
Sim0, Sim1 y Sim2.

Simulación Sim0:

```
( 1 )
P          S xpa  yp  R          B xpr  ypr
100      120.7 26.7 0.0  0          0.0 0.0 0.0
VPBF      PA          PCP  VPSF      F          PANF      PS      VACNP      GA      RF
0.0      0.0  0.0  0.0      896.2      0.0  0.0      0.0      0.0      0.0      0.0000
Archivo Par metros r' r' a So Iso I I FAR
param.txt 65 65 50 1.0 0.0500 0.1000 0.1000 1.0000
IncP IncS IncR IncB ER SR EP SPT SPr SPsb
0.8900 2.3214 0.0000 0.0000 0 0 103 14 0 0
PB      G      AR      IncPS      CN      XCN
0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.00000
```

```
( 2 )
P          S xpa  yp  R          B xpr  ypr
189      401.0 27.4 0.5  0          0.0 0.0 0.0
VPBF      PA          PCP  VPSF      F          PANF      PS      VACNP      GA      RF
-0.0     0.0  0.0  0.0      3253.1      0.0  0.0      0.0      0.0      0.0      0.00000
Archivo Par metros r' r' a So Iso I I FAR
param.txt 65 65 50 1.0 0.0500 0.1000 0.1000 1.0000
IncP IncS IncR IncB ER SR EP SPT SPr SPsb
0.4444 0.7596 0.0000 0.0000 0 0 111 27 0 0
PB      G      AR      IncPS      CN      XCN
0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.00000
```

```
( 3 )
P          S xpa  yp  R          B xpr  ypr
273      705.5 28.1 0.9  0          0.0 0.0 0.0
VPBF      PA          PCP  VPSF      F          PANF      PS      VACNP      GA      RF
0.0      0.0  0.0  0.0      5874.0      0.0  0.0      0.0      0.0      0.0      0.00000
Archivo Par metros r' r' a So Iso I I FAR
param.txt 65 65 50 1.1 0.0500 0.1000 0.1000 1.0000
IncP IncS IncR IncB ER SR EP SPT SPr SPsb
0.3004 0.4763 0.0000 0.0000 0 0 117 35 0 0
PB      G      AR      IncPS      CN      XCN
0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.00000
```

```
( 4 )
P          S xpa  yp  R          B xpr  ypr
355      1041.6 28.7 1.3  0          0.0 0.0 0.0
VPBF      PA          PCP  VPSF      F          PANF      PS      VACNP      GA      RF
0.0      0.0  0.0  0.0      8823.1      0.0  0.0      0.0      0.0      0.0      0.00000
Archivo Par metros r' r' a So Iso I I FAR
param.txt 65 65 50 1.2 0.0500 0.1000 0.1000 1.0000
IncP IncS IncR IncB ER SR EP SPT SPr SPsb
0.2366 0.3668 0.0000 0.0000 0 0 130 46 0 0
PB      G      AR      IncPS      CN      XCN
0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.00000
```

```
( 5 )
P          S xpa  yp  R          B xpr  ypr
439      1423.7 29.3 1.6  0          0.0 0.0 0.0
VPBF      PA          PCP  VPSF      F          PANF      PS      VACNP      GA      RF
0.0      0.0  0.0  0.0      12206.9      0.0  0.0      0.0      0.0      0.0      0.00000
Archivo Par metros r' r' a So Iso I I FAR
param.txt 65 65 50 1.2 0.0500 0.1000 0.1000 1.0000
IncP IncS IncR IncB ER SR EP SPT SPr SPsb
0.1822 0.2903 0.0000 0.0000 0 0 135 55 0 0
PB      G      AR      IncPS      CN      XCN
0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.00000
```

SimulaciAn Sim1.

( 1 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
3520	41817.5	37.1	7.2	0	0.0	0.0	0.0								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACHP	OA	RF						
0.0	0.0	0.0	348276.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000						
Archivo Par metros r r' a So Iso I I FAR															
param.txt 65 65 1 3.2 0.0500 0.1000 0.1000 1.0000															
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0713	0.1256	0.0000	0.0000	18	0	536	267	18	0						
PB	G	AR	IncPS	CW	XCH										
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000									

( 2 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
3771	47070.1	37.2	7.4	18	0.0	65.0	16.9								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACHP	OA	RF						
0.0	0.0	0.0	390212.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000						
Archivo Par metros r r' a So Iso I I FAR															
param.txt 65 65 1 3.4 0.0500 0.1000 0.1000 1.0000															
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0724	0.1307	1.0556	0.0000	19	0	584	292	19	0						
PB	G	AR	IncPS	CW	XCH										
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000									

( 3 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
4044	53222.9	37.4	7.6	37	0.0	65.5	17.6								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACHP	OA	RF						
0.0	0.0	0.0	439306.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000						
Archivo Par metros r r' a So Iso I I FAR															
param.txt 65 65 1 3.6 0.0500 0.1000 0.1000 1.0000															
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0633	0.1223	0.5946	0.0000	22	0	584	306	22	0						
PB	G	AR	IncPS	CW	XCH										
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000									

( 4 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
4300	59732.3	37.6	7.8	59	0.0	65.9	18.3								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACHP	OA	RF						
0.0	0.0	0.0	491023.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000						
Archivo Par metros r r' a So Iso I I FAR															
param.txt 65 65 1 3.7 0.0500 0.1000 0.1000 1.0000															
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0530	0.1124	0.4407	0.0000	26	0	584	330	26	0						
PB	G	AR	IncPS	CW	XCH										
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000									

( 5 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
4528	66443.5	37.9	8.0	85	0.0	66.3	18.9								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACHP	OA	RF						
0.0	0.0	0.0	544234.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000						
Archivo Par metros r r' a So Iso I I FAR															
param.txt 65 65 1 3.9 0.0500 0.1000 0.1000 1.0000															
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0479	0.1077	0.3294	0.0000	28	0	584	339	28	0						
PB	G	AR	IncPS	CW	XCH										
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000									

SimulaciAn Sin2:

( 1 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR							
6426	179699.7	41.6	11.2	759	0.0	70.3	27.4							
VpBF	PA	PCP	VPSF	F	PAHF	PS	VACNP	CA	RF					
0.0	0.0	0.0	0.0	1371638.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000					
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	IsO	I	I	FAR					
	param.txt	65	65	1	7.0	0.0500	0.1000	0.1000	1.0000					
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPab					
0.0162	0.0690	0.1304	0.0000	99	0	584	381	99	0					
PB	G	AR	IncPS	CM	XCN									
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000								

( 2 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR							
6530	192089.5	41.8	11.4	858	0.0	70.6	28.1							
VpBF	PA	PCP	VPSF	F	PAHF	PS	VACNP	CA	RF					
0.0	0.0	0.0	0.0	1458569.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000					
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	IsO	I	I	FAR					
	param.txt	65	65	1	7.4	0.0500	0.1000	0.1000	1.0000					
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPab					
0.0149	0.0672	0.1235	0.0000	106	0	584	381	106	0					
PB	G	AR	IncPS	CM	XCN									
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000								

( 3 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR							
6627	204988.8	42.0	11.6	964	0.0	70.8	28.7							
VpBF	PA	PCP	VPSF	F	PAHF	PS	VACNP	CA	RF					
0.0	0.0	0.0	0.0	1548762.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000					
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	IsO	I	I	FAR					
	param.txt	65	65	1	7.8	0.0500	0.1000	0.1000	1.0000					
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPab					
0.0136	0.0655	0.1172	0.0000	113	0	584	381	113	0					
PB	G	AR	IncPS	CM	XCN									
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000								

( 4 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR							
6717	218410.3	42.2	11.8	1077	0.0	71.1	29.4							
VpBF	PA	PCP	VPSF	F	PAHF	PS	VACNP	CA	RF					
0.0	0.0	0.0	0.0	1642344.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000					
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	IsO	I	I	FAR					
	param.txt	65	65	1	8.1	0.0500	0.1000	0.1000	1.0000					
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPab					
0.0122	0.0637	0.1123	0.0000	121	0	584	381	121	0					
PB	G	AR	IncPS	CM	XCN									
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000								

( 5 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR							
6799	232322.5	42.4	12.0	1198	0.0	71.4	30.0							
VpBF	PA	PCP	VPSF	F	PAHF	PS	VACNP	CA	RF					
0.0	0.0	0.0	0.0	1739453.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000					
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	IsO	I	I	FAR					
	param.txt	65	65	1	8.6	0.0500	0.1000	0.1000	1.0000					
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPab					
0.0109	0.0620	0.1077	0.0000	129	0	584	381	129	0					
PB	G	AR	IncPS	CM	XCN									
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000								

## Resultados de las Simulaciones con el Sistema.

A continuación mencionamos los puntos en los que se obtuvo consistencia entre las simulaciones de H. Winklevoss y las realizadas con el sistema.

Haciendo una comparación entre las Tablas IV-1 y IV-3, observamos lo siguiente:

- a) El tamaño de la población activa se duplica a la mitad del período, decreciendo luego hasta alcanzar su tamaño original en  $S_1$  (El 121.3% del tamaño original bajo  $Sim_1$ ).
- b) La edad y antigüedad promedio se incrementan en 11 años entre  $t=1$  y  $t=51$  bajo  $S_1$  y en 12 años bajo  $Sim_1$ . (Los valores iniciales de estas variables difieren debido a que la composición de  $P_0$  y  $P_{00}$  no necesariamente es igual).
- c) El patrón de incremento de salarios es similar bajo  $S_1$  y bajo  $Sim_1$ . Al tiempo  $t=26$  y  $t=51$  los sueldos totales son de 7.626 veces y 14.950 veces el total original bajo  $S_1$ , mientras que bajo  $Sim_1$  son de 7.418 y 14.760 respectivamente.
- d) En  $S_1$ , al tiempo  $t=26$  la razón de los sueldos totales respecto a los originales es exactamente el doble de la razón correspondiente al sueldo promedio; mientras que en  $Sim_1$ , la razón es de 2.02 veces la del sueldo promedio.

La diferencia observada en el comportamiento en el número de retirados se debe igualmente a la diferencia que existe en ambas poblaciones iniciales  $P_0$  y  $P_{00}$ . Seguramente la composición de  $P_{00}$  generó en  $Sim_0$  más proporción de participantes en edad avanzada que lo que generó  $P_0$  en  $S_0$ , por lo que al establecerse el plan de pensiones en el año 25 en ambos casos, se retira más gente de  $P_{0act}$  que de  $P_1$ .

Una característica del sistema que quedó validada al efectuarse la simulación Sim2, fue el almacenamiento que se hace durante una simulación del estado de la población, para tomarla después como población inicial de otra simulación. En efecto, la edad y antigüedad promedio y el porcentaje de retirados es el mismo en el año 11 de Sim2 y en el año 27 de Sim1; de igual manera, el crecimiento de la población de activos, los sueldos totales y el sueldo promedio es exactamente el mismo entre  $t=1$  y  $t=11$  en Sim2, y en  $t=17$  y  $t=27$  en Sim1.

Por otra parte, comparando los resultados de las Tablas IV-2 y IV-4 observamos lo siguiente:

- a) En ambos casos se mantiene constante el tamaño de la población a partir del año 12.
- b) La edad y antigüedad promedio son menos estables y crecen más en Sim2 que en S2, debido quizá a la composición original de P<sub>0</sub> y de P<sub>1</sub> y a la forma en que se mantiene constante el tamaño de la población, pues seguramente en S2 esto se logra con el ingreso de gente más joven que en el caso de Sim2.
- c) El nivel que alcanzan los sueldos totales y el sueldo promedio en  $t=50$  es de 12.356 veces y de 11.555 veces el original bajo S2, mientras que en Sim2 estas cifras son 12.292 y 10.989 respectivamente.
- d) Tanto en S2 como en Sim2 se observa que la proporción de retirados es mucho menor que en Sim1 y S1 respectivamente, debido a que en Sim1 y S1 el tamaño de la población decrece a partir del año 26, mientras que en Sim2 y S2 se mantiene constante.

#### IV.2.2 Validación Global del Sistema.

La segunda etapa de validación del sistema, como ya mencionamos, consistió en realizar 6 proyecciones de financiamiento de 50 años comparadas contra un caso base, las cuales se obtuvieron de la siguiente manera:

##### Caso Base.

- a) Población activa  $Pob2act$ .
- b) No hay población de retirados.
- c) Las tasas de decrementos y de incremento de salarios son los mismos utilizados en la sección anterior.
- d) El valor inicial de  $F$ ,  $VACNP$ ,  $F^{t-1}$ ,  $PA^{t-1}$ ,  $AR^{t-1}$ ,  $CN^{t-1}$ , es igual a cero.
- e)  $t_0 = 1$ .
- f)  $r = r' = 65$  y  $\alpha = 1$ .
- g)  $FB(x,y,z,s) = 0.015 * (s * y)$
- h)  $Ex$ : se utilizó la misma función que en la simulación Sim2 (tamaño constante a partir del año 12).
- i)  $s_0 = 7.03988$ ,  $IS_0 = 0.05$ .
- j) MF: Método de Financiamiento Colectivo. (descrito en la sección III.3.3).
- k)  $I = i = 0.07$ .
- l)  $FAR = 1$ .
- m) Simulación hasta  $t = 50$ .

##### Proyección I.

La diferencia respecto al Caso Base es que a partir de  $t=1$ , las hipótesis de decrementos  $Q_x^T$  y  $Q_x$ , son iguales a 1.5 veces los del Caso Base.

### Proyección II.

A partir de  $t=1$ , las hipótesis de decrementos  $Q_x^T$  y  $Q_x$ , son iguales a 0.5 veces los del Caso Base.

### Proyección III.

A partir de la valuación actuarial del año 11, el interés utilizado para la proyección del fondo disminuye dos puntos respecto al Caso Base, es decir,  $i=0.05$ .

### Proyección IV.

A partir de la valuación actuarial del año 11, el interés utilizado para la proyección fondo aumenta dos puntos respecto al Caso Base, es decir,  $i=0.09$ .

### Proyección V.

A partir de la valuación actuarial del año 11, las tasas de incremento de salarios utilizadas para la proyección de  $IS_x$ , son dos puntos mayores que en el Caso Base.

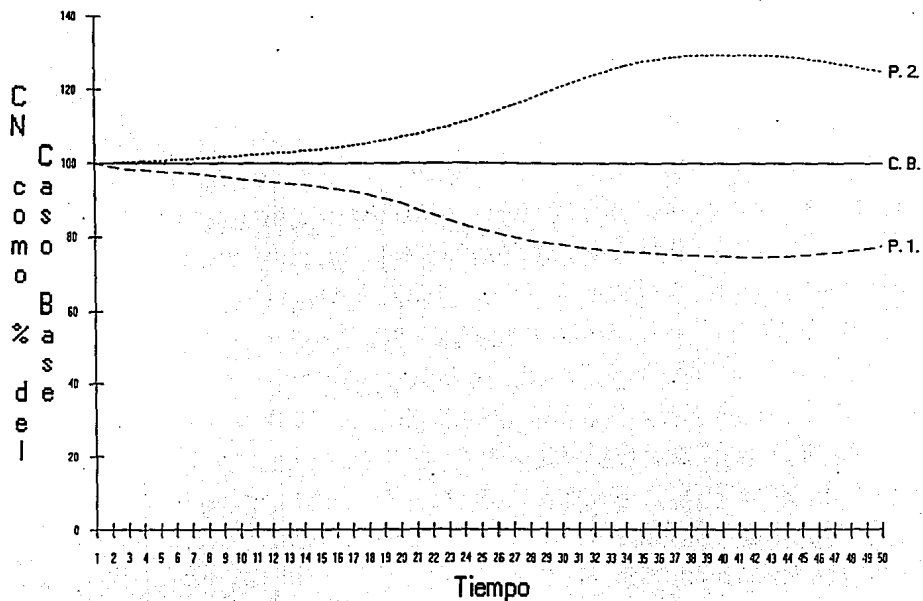
### Proyección VI.

A partir de la valuación actuarial del año 11, las tasas de incremento de salarios utilizadas para la proyección de  $IS_x$ , son dos puntos menores que en el Caso Base.

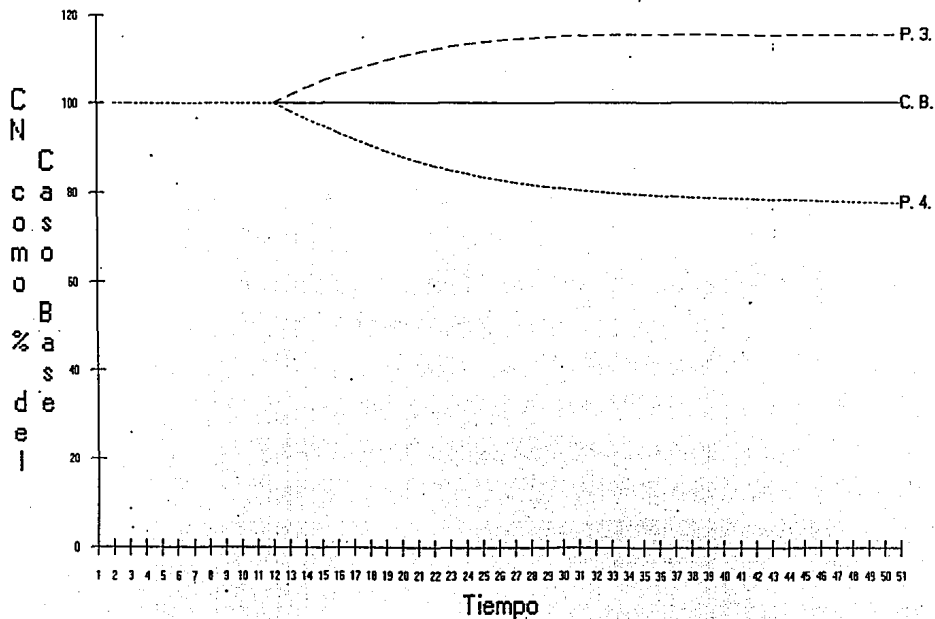
Como puede observarse, en todos los casos se pretende generar una desviación de la realidad (proyectada) respecto a las hipótesis actuariales, a fin de observar el impacto de las mismas en los costos normales de los planes de pensiones.



# Proyección del CN con desviaciones en las tasas de decremento

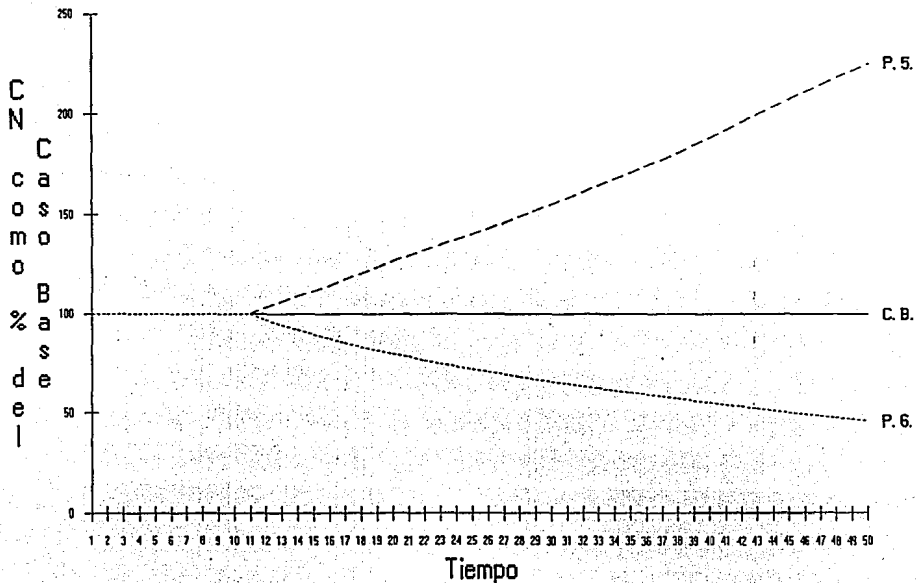


## Proyección del CN con desviaciones en la tasa de interés



# Proyección del CN con desviaciones en el incremento de salarios

75



En las gráficas anteriores se muestran los costos normales generados por las 6 proyecciones, expresados como porcentajes de los correspondientes costos normales del Caso Base. Del análisis de las gráficas podemos obtener las siguientes observaciones, que son cualitativamente consistentes con las obtenidas por H. Winklevoss en su libro:

#### **Desviaciones de las Tasas de Decremento.**

Si los decrementos en la población se dan a una tasa menor que la supuesta (Proyección II), los costos del plan se incrementan y viceversa (Proyección I). Sin embargo el impacto de la desviación provocada por tasas menores a las esperadas es ligeramente mayor en todos los años de proyección, que el que provocan tasas mayores a las esperadas.

Bajo la Proyección II, el costo normal se incrementa hasta un 29.5 % respecto al del Caso Base, en el año 39, mientras que bajo la Proyección I, la diferencia más grande es del 25.6% en el año 42. En ambos casos, la diferencia respecto al costo normal del Caso Base parece estabilizarse a partir del año 35.

#### **Desviaciones de la Tasa de Interés.**

El efecto de que a partir del año 11, el interés ganado por el fondo sea dos puntos superior al esperado (Proyección IV), ocasiona una disminución en el costo normal del plan mayor, que el incremento ocasionado por un interés dos puntos menor al esperado (Proyección III).

En el primer caso, el costo normal es de 77.5% del costo del Caso Base en el año 50, mientras que bajo la Proyección III, el costo alcanza un máximo del 115.5% del costo del Caso Base en el mismo año. Sin embargo, en ambos casos la diferencia respecto al Caso Base, crece cada vez más

lentamente y parece estabilizarse rápidamente a partir del año 30.

#### **Desviaciones en el Incremento de Salarios.**

Como puede observarse en las gráficas, el efecto de una desviación de dos puntos en el incremento de salarios, resulta mucho más importante que una desviación de la misma magnitud en la tasa de interés.

En la Proyección V, cuando el incremento de salarios comienza a ser dos puntos mayor que el esperado a partir del año 11, el costo normal del plan aumenta rápidamente hasta alcanzar el 225.4% del costo bajo el Caso Base en el año 50. El efecto de una desviación opuesta es significativamente menor, ya que el costo normal alcanza un mínimo de 46.3% del costo del Caso Base en el año 50. Sin embargo, es interesante observar que en ambos casos los costos normales se alejan rápidamente del Caso Base y continúa con este comportamiento más allá del año 50, lo cual no ocurre en los casos anteriores.

Los 3 análisis anteriores se basan en la comparación de los costos normales como cantidades absolutas en unidades monetarias. Sin embargo, en el caso de las proyecciones I, II, V y VI los salarios totales de la población varían respecto a los del Caso Base debido a las desviaciones, por lo que un análisis más cuidadoso implica la comparación de los costos normales como porcentaje de los sueldos totales (%CN).

En las Tablas IV-5 y IV-6, se presentan respectivamente los valores de las variables CN y %CN para las 6 proyecciones, expresados como porcentaje de las mismas variables del Caso Base, también se presentan los resultados de las simulaciones de las 6 proyecciones y sus respectivas gráficas.

Tabla IV.5 Costos Normales de las 6 proyecciones, expresados como Porcentajes del correspondiente al Caso Base							
Año	Caso Base	Proyec. 1	Proyec. 2	Proyec. 3	Proyec. 4	Proyec. 5	Proyec. 6
1	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
2	100.0	99.0	100.2	100.0	100.0	100.0	100.0
3	100.0	98.5	100.3	100.0	100.0	100.0	100.0
4	100.0	98.2	100.5	100.0	100.0	100.0	100.0
5	100.0	97.9	100.7	100.0	100.0	100.0	100.0
6	100.0	97.6	100.9	100.0	100.0	100.0	100.0
7	100.0	97.3	101.1	100.0	100.0	100.0	100.0
8	100.0	96.9	101.3	100.0	100.0	100.0	100.0
9	100.0	96.4	101.6	100.0	100.0	100.0	100.0
10	100.0	96.0	102.0	100.0	100.0	100.0	100.0
11	100.0	95.4	102.3	100.0	100.0	100.0	100.0
12	100.0	94.9	102.7	101.7	98.3	103.4	97.0
13	100.0	94.6	103.0	103.3	96.6	106.3	94.3
14	100.0	94.2	103.3	104.9	95.0	109.2	91.8
15	100.0	93.6	103.7	106.3	93.4	112.1	89.5
16	100.0	92.9	104.2	107.6	91.9	114.9	87.3
17	100.0	92.2	104.7	108.7	90.5	117.8	85.2
18	100.0	91.3	105.4	109.8	89.2	120.6	83.2
19	100.0	90.1	106.1	110.7	88.0	123.5	81.3
20	100.0	88.8	107.0	111.5	86.9	126.4	79.5
21	100.0	87.2	107.9	112.2	86.0	129.0	78.0
22	100.0	85.8	108.9	112.9	85.1	131.8	76.4
23	100.0	84.4	110.0	113.4	84.2	134.6	74.9
24	100.0	83.2	111.3	113.8	83.5	137.6	73.4
25	100.0	81.9	112.6	114.2	82.9	140.3	72.1
26	100.0	80.9	114.1	114.5	82.3	143.0	70.8
27	100.0	80.0	115.7	114.8	81.8	145.9	69.5
28	100.0	79.2	117.4	115.0	81.3	149.0	68.2
29	100.0	78.5	119.1	115.2	80.9	151.9	67.0
30	100.0	77.9	120.9	115.3	80.5	154.8	65.9
31	100.0	77.3	122.5	115.4	80.2	157.8	64.7
32	100.0	76.8	124.1	115.4	79.9	161.0	63.5
33	100.0	76.4	125.5	115.5	79.6	164.2	62.4
34	100.0	76.0	126.7	115.5	79.4	167.4	61.3
35	100.0	75.7	127.6	115.5	79.2	170.7	60.3
36	100.0	75.5	128.4	115.5	79.0	174.0	59.2
37	100.0	75.2	129.0	115.5	78.9	177.4	58.2
38	100.0	74.9	129.3	115.4	78.7	180.9	57.1
39	100.0	74.7	129.5	115.4	78.6	184.6	56.1
40	100.0	74.6	129.5	115.4	78.5	188.3	55.1
41	100.0	74.5	129.5	115.3	78.4	192.1	54.1
42	100.0	74.4	129.5	115.3	78.3	195.8	53.1
43	100.0	74.4	129.3	115.3	78.2	199.5	52.2
44	100.0	74.6	129.1	115.2	78.1	203.3	51.3
45	100.0	74.8	128.6	115.2	78.0	207.1	50.4
46	100.0	75.2	128.0	115.3	77.9	211.0	49.5
47	100.0	75.6	127.3	115.3	77.8	214.7	48.6
48	100.0	76.1	126.5	115.3	77.7	218.3	47.8
49	100.0	76.8	125.8	115.4	77.6	221.9	47.0
50	100.0	77.5	125.0	115.5	77.5	225.4	46.3

Tabla IV.6 Porcentajes de Costos Normales de las 6 proyecciones, expresadas como Porcentajes del correspondiente al Caso Base							
Año	Caso Base	Proyec. 1	Proyec. 2	Proyec. 3	Proyec. 4	Proyec. 5	Proyec. 6
1	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
2	100.0	102.0	98.6	100.0	100.0	100.0	100.0
3	100.0	103.4	97.3	100.0	100.0	100.0	100.0
4	100.0	104.3	96.1	100.0	100.0	100.0	100.0
5	100.0	105.0	95.0	100.0	100.0	100.0	100.0
6	100.0	105.7	94.0	100.0	100.0	100.0	100.0
7	100.0	106.2	93.1	100.0	100.0	100.0	100.0
8	100.0	106.7	92.3	100.0	100.0	100.0	100.0
9	100.0	107.0	91.6	100.0	100.0	100.0	100.0
10	100.0	107.2	91.0	100.0	100.0	100.0	100.0
11	100.0	107.4	90.4	100.0	100.0	100.0	100.0
12	100.0	107.5	89.8	101.7	98.3	99.1	100.3
13	100.0	107.2	89.9	103.3	96.6	99.7	100.4
14	100.0	107.0	90.0	104.9	95.0	98.4	100.5
15	100.0	106.6	90.1	106.3	93.4	98.1	100.6
16	100.0	106.1	90.4	107.6	91.9	97.8	100.7
17	100.0	105.4	90.6	108.7	90.5	97.6	100.9
18	100.0	104.6	91.0	109.8	89.2	97.3	101.1
19	100.0	103.3	91.4	110.7	88.0	97.1	101.3
20	100.0	102.0	92.0	111.5	86.9	96.9	101.5
21	100.0	100.5	92.6	112.2	85.9	96.8	101.8
22	100.0	98.9	93.4	112.9	85.1	96.6	102.1
23	100.0	97.3	94.3	113.4	84.2	96.5	102.3
24	100.0	95.8	95.3	113.8	83.5	96.4	102.6
25	100.0	94.3	96.5	114.2	82.9	96.4	102.8
26	100.0	93.0	97.9	114.5	82.3	96.5	102.9
27	100.0	91.6	99.4	114.8	81.8	96.5	103.1
28	100.0	90.3	101.1	115.0	81.3	96.7	103.1
29	100.0	89.2	103.0	115.2	80.9	96.9	103.1
30	100.0	88.1	105.1	115.3	80.5	97.2	102.9
31	100.0	87.3	107.3	115.4	80.2	97.6	102.7
32	100.0	86.8	109.5	115.4	79.9	98.1	102.5
33	100.0	85.9	111.8	115.5	79.6	98.6	102.1
34	100.0	85.3	114.2	115.5	79.4	99.2	101.7
35	100.0	84.6	116.2	115.5	79.2	99.8	101.2
36	100.0	83.9	118.1	115.5	79.0	100.5	100.7
37	100.0	83.1	119.8	115.5	78.9	101.2	100.0
38	100.0	82.3	121.4	115.4	78.7	102.0	99.4
39	100.0	81.6	122.8	115.4	78.6	102.9	98.6
40	100.0	81.2	123.9	115.4	78.5	103.9	97.8
41	100.0	80.7	124.9	115.3	78.4	104.9	97.0
42	100.0	80.2	125.6	115.3	78.3	106.0	96.0
43	100.0	79.8	126.1	115.3	78.2	107.2	95.0
44	100.0	79.4	126.4	115.2	78.1	108.4	94.0
45	100.0	79.0	126.2	115.2	78.0	109.7	92.8
46	100.0	78.7	125.7	115.3	77.9	111.0	91.7
47	100.0	78.5	125.2	115.3	77.8	112.4	90.5
48	100.0	78.4	124.4	115.3	77.7	113.9	89.2
49	100.0	78.4	123.5	115.4	77.6	115.4	88.0
50	100.0	78.5	122.5	115.5	77.5	116.9	86.7

## Caso Base:

( 11 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypr								
7150	327639.9	43.1	12.8	1306	28624.9	69.1	31.3								
VPDF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF						
760078.6	567321.7	557487.9	2874858.8	357704.4	209617.3	95975.8	471345.9	557487.9	0.64164						
Archivo Par metros	r	r'	a	So	Isa	I	I	FAR							
param.txt	65	65	1	11.5	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0053	0.0552	0.1263	0.1594	165	0	584	381	165	0						
PB	G	AR	IncPS	CH	XCW										
28624.9	25642.4	45857.5	8126.3	45857.5	0.13996										

( 12 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypr								
7188	345738.9	43.2	12.9	1471	33187.0	69.5	31.8								
VPDF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF						
826235.6	632622.8	612672.6	3027300.1	400579.4	232043.4	82425.2	550197.7	612672.6	0.65382						
Archivo Par metros	r	r'	a	So	Isa	I	I	FAR							
param.txt	65	65	1	12.0	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0000	0.0446	0.1149	0.1479	169	0	550	381	169	0						
PB	G	AR	IncPS	CH	XCW										
33187.0	28580.5	48612.8	7752.9	48612.8	0.14061										

( 13 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypr								
7188	361162.3	43.3	13.0	1640	38094.9	69.9	32.4								
VPDF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF						
892623.9	700241.9	670500.3	3156073.4	444585.7	255656.2	62917.6	637324.3	670500.3	0.66307						
Archivo Par metros	r	r'	a	So	Isa	I	I	FAR							
param.txt	65	65	1	12.6	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0000	0.0442	0.1055	0.1384	173	0	554	381	173	0						
PB	G	AR	IncPS	CH	XCW										
38094.9	31582.2	51270.8	7369.8	51270.8	0.14196										

( 14 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypr								
7188	377110.5	43.4	13.1	1813	43366.1	70.4	32.9								
VPDF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF						
962004.2	770151.6	730974.7	3293292.2	489343.8	280807.8	36943.7	733207.8	730974.7	0.66944						
Archivo Par metros	r	r'	a	So	Isa	I	I	FAR							
param.txt	65	65	1	13.3	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0000	0.0441	0.0976	0.1302	177	0	549	372	177	0						
PB	G	AR	IncPS	CH	XCW										
43366.1	34630.6	54123.7	7255.6	54123.7	0.14352										

( 15 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypr								
7188	393753.3	43.4	13.2	1990	49013.6	70.8	33.5								
VPDF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF						
1034507.3	842351.7	794041.5	3442458.1	534731.9	307619.8	3695.6	838656.1	794041.5	0.67343						
Archivo Par metros	r	r'	a	So	Isa	I	I	FAR							
param.txt	65	65	1	13.9	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0000	0.0437	0.0905	0.1230	180	0	550	370	180	0						
PB	G	AR	IncPS	CH	XCW										
49013.6	37716.5	57165.0	7155.5	57165.0	0.14518										



## Proyección 1:

( 11 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR						
5991	291276.9	44.5	13.3	1305	28597.6	69.1	31.3						
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PAWF	PS	VACNP	OA	RF				
716603.7	543257.1	537713.9	2458318.4	347209.6	196047.5	82051.0	461206.0	537713.9	0.64571				
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR				
	param1.txt	65	65	1	11.5	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000				
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPr	SPsb				
-0.0025	0.0480	0.1257	0.1585	164	0	584	435	164	0				
PB	G	AR	IncPS	CH	XCN								
28597.6	24835.6	43768.1	6302.6	43768.1	-0.15026								

( 12 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR						
5976	305251.7	44.5	13.3	1469	33130.9	69.5	31.8						
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PAWF	PS	VACNP	OA	RF				
775438.9	602763.5	588395.9	2569075.3	387215.7	215547.8	65505.0	537258.5	588395.9	0.65809				
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR				
	param1.txt	65	65	1	12.0	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000				
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPr	SPsb				
0.0000	0.0440	0.1137	0.1463	167	0	602	435	167	0				
PB	G	AR	IncPS	CH	XCN								
33130.9	27560.0	46127.8	5776.9	46127.8	0.15111								

( 13 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR						
5976	318682.4	44.4	13.3	1636	37978.5	69.9	32.4						
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PAWF	PS	VACNP	OA	RF				
834859.1	663633.0	640931.9	2674519.0	427772.6	235860.4	42638.6	620994.4	640931.9	0.66742				
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR				
	param1.txt	65	65	1	12.6	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000				
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPr	SPsb				
0.0000	0.0416	0.1009	0.1340	170	5	609	439	170	0				
PB	G	AR	IncPS	CH	XCN								
37978.5	30312.6	48506.4	5224.3	48506.4	0.15221								

( 14 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR						
5976	331927.5	44.4	13.3	1801	43067.2	70.4	33.0						
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PAWF	PS	VACNP	OA	RF				
896088.1	726002.4	695433.9	2783715.0	468613.1	257389.4	13032.0	712970.5	695433.9	0.67384				
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR				
	param1.txt	65	65	1	13.3	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000				
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPr	SPsb				
0.0000	0.0412	0.0911	0.1246	174	10	621	447	174	0				
PB	G	AR	IncPS	CH	XCN								
43067.2	33079.6	50971.7	5018.7	50971.7	0.15356								

( 15 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR						
5976	345603.6	44.3	13.2	1965	48434.1	70.8	33.5						
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PAWF	PS	VACNP	OA	RF				
958946.7	789224.0	751216.3	2902444.6	509597.2	279626.8	0.0	813850.1	751216.3	0.67836				
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR				
	param1.txt	65	65	1	13.9	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000				
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPr	SPsb				
0.0000	0.0416	0.0840	0.1173	176	11	633	457	176	0				
PB	G	AR	IncPS	CH	XCN								
48434.1	35849.3	53505.5	4220.2	53505.5	0.15482								

## Proyección 2:

( 11 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
8830	370951.3	41.0	11.9	1306	28624.9	69.1	31.3								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACHP	OA	RF						
794942.7	584610.6	566656.6	3425170.5	361736.3	222874.3	109369.1	475241.5	566656.6	0.63837						
Archivo Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR							
param2.txt	65	65	1	11.5	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPr	SPab						
0.0195	0.0699	0.1263	0.1594	165	0	584	247	165	0						
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN										
28624.9	25961.8	46916.9	10164.6	46916.9	0.12648										

( 12 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
9002	395388.2	41.0	12.0	1471	33187.0	69.5	31.8								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACHP	OA	RF						
868050.0	654495.6	624366.6	3659429.2	405990.1	248505.5	99070.2	555425.4	624366.6	0.65024						
Archivo Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR							
param2.txt	65	65	1	12.0	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPr	SPab						
0.0000	0.0466	0.1149	0.1479	169	0	418	249	169	0						
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN										
33187.0	29005.1	49923.9	10030.0	49923.9	0.12627										

( 13 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
9002	413804.4	41.3	12.4	1640	38094.9	69.9	32.4								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACHP	OA	RF						
940742.8	727532.2	685259.5	383386.2	451732.1	275800.0	83303.1	644229.1	685259.5	0.65921						
Archivo Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR							
param2.txt	65	65	1	12.6	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPr	SPab						
0.0000	0.0463	0.1055	0.1384	173	0	413	240	173	0						
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN										
38094.9	32135.5	52787.5	9899.2	52787.5	0.12757										

( 14 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
9002	432949.8	41.6	12.7	1813	43366.1	70.4	32.9								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACHP	OA	RF						
1017201.4	803643.2	749369.3	4016557.0	498560.2	305083.0	61530.6	742112.6	749369.3	0.66531						
Archivo Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR							
param2.txt	65	65	1	13.3	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPr	SPab						
0.0000	0.0463	0.0976	0.1302	177	0	407	230	177	0						
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN										
43366.1	35338.1	55905.0	9976.9	55905.0	0.12913										

( 15 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
9002	452997.7	41.9	13.0	1990	49013.6	70.8	33.5								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACHP	OA	RF						
1097633.0	882922.6	816731.3	4211871.1	546437.1	336485.4	32957.1	849965.5	816731.3	0.66905						
Archivo Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR							
param2.txt	65	65	1	13.9	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPr	SPab						
0.0000	0.0461	0.0905	0.1230	180	0	407	227	180	0						
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN										
49013.6	38610.0	59282.5	10046.7	59282.5	0.13087										

## Proyección 3:

( 11 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR	PS	VACNP	QA	RF
7150	327639.9	43.1	12.9	1306	28624.9	69.1	31.3				
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF						
760078.6	567321.7	557487.9	2874858.8	357704.4	209617.3	95975.8	471345.9	557487.9	0.64184		
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR		
param.txt	65	65	1	11.5	0.0500	0.0500	0.0700	1.0000			
incP	incS	incR	incB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb		
0.0053	0.0552	0.1263	0.1594	165	0	584	381	165	0		
PB	G	AR	incPS	CN	XCN						
28624.9	18316.0	45857.5	6126.3	45857.5	0.13996						

( 12 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR	PS	VACNP	QA	RF
7188	345738.9	43.2	12.9	1471	33187.0	69.5	31.8				
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF						
826234.6	632622.8	612672.6	3027300.1	393253.0	239369.8	82425.2	550197.7	612672.6	0.64188		
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR		
param.txt	65	65	1	12.0	0.0500	0.0500	0.0700	1.0000			
incP	incS	incR	incB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb		
0.0000	0.0446	0.1149	0.1479	169	0	550	381	169	0		
PB	G	AR	incPS	CN	XCN						
33187.0	20069.2	49449.5	15079.3	49449.5	0.14303						

( 13 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR	PS	VACNP	QA	RF
7188	361162.3	43.3	13.0	1640	38094.9	69.9	32.4				
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF						
892623.9	700241.9	670500.3	3156073.4	429584.8	270857.1	62080.9	638161.0	670500.3	0.64069		
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR		
param.txt	65	65	1	12.6	0.0500	0.0500	0.0700	1.0000			
incP	incS	incR	incB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb		
0.0000	0.0442	0.1055	0.1384	173	0	554	381	173	0		
PB	G	AR	incPS	CN	XCN						
38094.9	21851.6	52987.4	14531.4	52987.4	0.14671						

( 14 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR	PS	VACNP	QA	RF
7188	377110.5	43.4	13.1	1813	43366.1	70.4	32.9				
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF						
962004.2	770151.6	730974.7	3293292.2	466328.8	303822.7	34331.8	735819.8	730974.7	0.63795		
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR		
param.txt	65	65	1	13.3	0.0500	0.0500	0.0700	1.0000			
incP	incS	incR	incB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb		
0.0000	0.0441	0.0976	0.1302	177	0	549	372	177	0		
PB	G	AR	incPS	CN	XCN						
43366.1	23651.3	56759.1	14219.6	56759.1	0.15051						

( 15 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR	PS	VACNP	QA	RF
7188	393753.3	43.4	13.2	1990	49013.6	70.8	33.5				
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF						
1034507.3	842351.7	794041.5	3442458.1	503373.1	338978.6	0.0	844086.3	794041.5	0.63394		
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR		
param.txt	65	65	1	13.9	0.0500	0.0500	0.0700	1.0000			
incP	incS	incR	incB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb		
0.0000	0.0437	0.0905	0.1230	180	0	550	370	180	0		
PB	G	AR	incPS	CN	XCN						
49013.6	25462.1	60751.9	13888.3	60751.9	0.15429						

## Proyección 4:

( 11 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR										
7150	327639.9	43.1	12.8	1306	28624.9	69.1	31.3										
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF								
760078.6	567321.7	557487.9	2874858.8	357704.4	209617.3	95975.8	471345.9	557487.9	0.64164								
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR								
	param.txt	65	65	1	11.5	0.0500	0.0900	0.0700	1.0000								
Incp	Incs	Incr	Incb	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb								
0.0053	0.0552	0.1263	0.1594	165	0	584	381	165	0								
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN												
28624.9	32968.9	45857.5	8126.3	45857.5	0.13994												

( 12 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR										
7188	345738.9	43.2	12.9	1471	33187.0	69.5	31.8										
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF								
826234.6	632622.8	612672.6	3027300.1	407905.8	224717.0	82425.2	550197.7	612672.6	0.66578								
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR								
	param.txt	65	65	1	12.0	0.0500	0.0900	0.0700	1.0000								
Incp	Incs	Incr	Incb	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb								
0.0000	0.0446	0.1149	0.1479	169	0	550	381	169	0								
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN												
33187.0	37368.0	47776.1	426.5	47776.1	0.13819												

( 13 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR										
7188	361162.3	43.3	13.0	1640	38094.9	69.9	32.4										
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF								
892623.9	700241.9	670500.3	3156073.4	459862.9	240379.0	63754.3	636487.6	670500.3	0.68585								
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR								
	param.txt	65	65	1	12.6	0.0500	0.0900	0.0700	1.0000								
Incp	Incs	Incr	Incb	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb								
0.0000	0.0442	0.1055	0.1384	173	0	554	381	173	0								
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN												
38094.9	41901.9	49522.6	-68.2	49522.6	0.13712												

( 14 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR										
7188	377110.5	43.4	13.1	1813	43366.1	70.4	32.9										
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF								
962004.2	770151.6	730974.7	3293292.2	513192.5	256959.0	39587.3	730564.3	730974.7	0.70207								
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR								
	param.txt	65	65	1	13.3	0.0500	0.0900	0.0700	1.0000								
Incp	Incs	Incr	Incb	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb								
0.0000	0.0441	0.0976	0.1302	177	0	549	372	177	0								
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN												
43366.1	46548.5	51392.8	-246.5	51392.8	0.13628												

( 15 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR										
7188	393753.3	43.4	13.2	1990	49013.6	70.8	33.5										
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF								
1034507.3	842351.7	794041.5	3442458.1	567767.8	274584.0	9255.1	833096.6	794041.5	0.71504								
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR								
	param.txt	65	65	1	13.9	0.0500	0.0900	0.0700	1.0000								
Incp	Incs	Incr	Incb	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb								
0.0000	0.0437	0.0905	0.1230	180	0	550	370	180	0								
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN												
49013.6	51295.9	53386.3	-362.2	53386.3	0.13558												

## Proyección 5:

( 11 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
7150	327639.9	43.1	12.8	1306	28624.9	69.1	31.3								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF						
760078.6	567321.7	557487.9	287485.8	357704.4	209617.3	95975.8	471345.9	557487.9	0.64164						
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR						
paramb.txt	65	65	1	11.5	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0053	0.1008	0.1263	0.1624	165	0	584	381	165	0						
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN										
28624.9	25642.4	45857.5	8126.3	45857.5	0.13996										

( 12 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
7188	360655.5	43.2	12.9	1471	33273.5	69.5	31.8								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF						
843342.7	640312.8	619988.8	3177163.2	400579.4	239733.4	90115.1	550197.7	619988.8	0.64611						
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR						
paramb.txt	65	65	1	12.0	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0000	0.0781	0.1149	0.1531	169	0	550	381	169	0						
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN										
33273.5	28635.1	50260.3	15442.9	50260.3	0.13936										

( 13 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
7188	388826.5	43.3	13.0	1640	38369.2	69.9	32.4								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF						
927220.9	718459.5	687364.5	3431609.9	446201.3	272258.3	79487.8	638971.7	687364.5	0.64915						
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR						
paramb.txt	65	65	1	12.6	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0000	0.0761	0.1055	0.1453	173	0	554	381	173	0						
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN										
38369.2	31798.8	54503.0	15743.5	54503.0	0.14017										

( 14 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
7188	418410.1	43.4	13.1	1813	43946.0	70.4	32.9								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF						
1017068.2	801716.8	759689.9	3702347.5	494133.9	307583.0	63514.0	738202.8	759689.9	0.65044						
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR						
paramb.txt	65	65	1	13.3	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0000	0.0749	0.0976	0.1385	177	0	549	372	177	0						
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN										
43946.0	35110.7	59097.9	16266.6	59097.9	0.14124										

( 15 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR								
7188	449748.3	43.4	13.2	1990	50034.0	70.8	33.5								
VPBF	PA	PCP	VPSF	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF						
1113344.8	890337.3	837163.6	3994506.6	544405.5	345931.8	41362.4	848974.9	837163.6	0.65030						
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	I	I	FAR						
paramb.txt	65	65	1	13.9	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000							
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb						
0.0000	0.0733	0.0905	0.1323	180	0	550	370	180	0						
PB	G	AR	IncPS	CN	XCN										
50034.0	38599.2	64057.8	16818.0	64057.8	0.14243										

## Proyección 6:

( 11 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR							
7150	327639.9	43.1	12.8	1306	28624.9	69.1	31.3							
VPBF	PA	AR	PCP	VPSP	F	PAHF		PS	VACWP	QA	RF			
760078.6	567321.7	557487.9	2874858.8	357704.4	209617.3	95975.8	471345.9	557487.9	0.64164					
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	1	1	FAR					
	param.txt	65	65	1	11.5	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000					
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb					
0.0053	0.0198	0.1263	0.1364	165	0	584	381	165	0					
PB	G	AR	IncPS	CH	XCH									
28624.9	25642.4	45857.5	8126.3	45857.5	0.13996									

( 12 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR							
7188	334113.6	43.2	12.9	1471	33100.5	69.5	31.8							
VPBF	PA	AR	PCP	VPSP	F	PAHF		PS	VACWP	QA	RF			
811544.9	624932.9	605356.4	2913120.3	400579.4	224353.5	74735.2	550197.7	605356.4	0.66172					
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	1	1	FAR					
	param.txt	65	65	1	12.0	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000					
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb					
0.0000	0.0153	0.1149	0.1427	169	0	550	381	169	0					
PB	G	AR	IncPS	CH	XCH									
33100.5	28531.8	47134.7	62.9	47134.7	0.14107									

( 13 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR							
7188	339208.9	43.3	13.0	1640	37824.1	69.9	32.4							
VPBF	PA	AR	PCP	VPSP	F	PAHF		PS	VACWP	QA	RF			
842556.2	682619.7	654115.2	2942144.2	443145.4	239474.3	46773.5	635846.2	654115.2	0.67747					
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	1	1	FAR					
	param.txt	65	65	1	12.6	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000					
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb					
0.0000	0.0157	0.1055	0.1316	173	0	554	381	173	0					
PB	G	AR	IncPS	CH	XCH									
37824.1	31388.8	48355.2	-583.9	48355.2	0.14255									

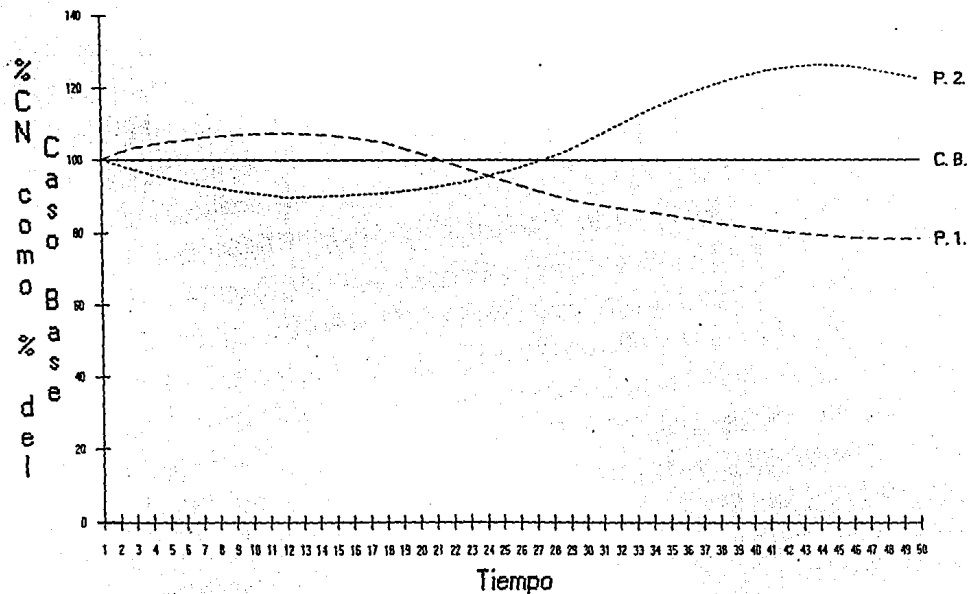
( 14 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR							
7188	344536.2	43.4	13.1	1813	42801.2	70.4	32.9							
VPBF	PA	AR	PCP	VPSP	F	PAHF		PS	VACWP	QA	RF			
914502.7	740411.1	703743.9	2977179.5	405065.2	255345.9	11700.5	728710.6	703743.9	0.68926					
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	1	1	FAR					
	param.txt	65	65	1	13.3	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000					
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb					
0.0000	0.0163	0.0976	0.1222	177	0	549	372	177	0					
PB	G	AR	IncPS	CH	XCH									
42801.2	34195.9	49697.0	-891.6	49697.0	0.14424									

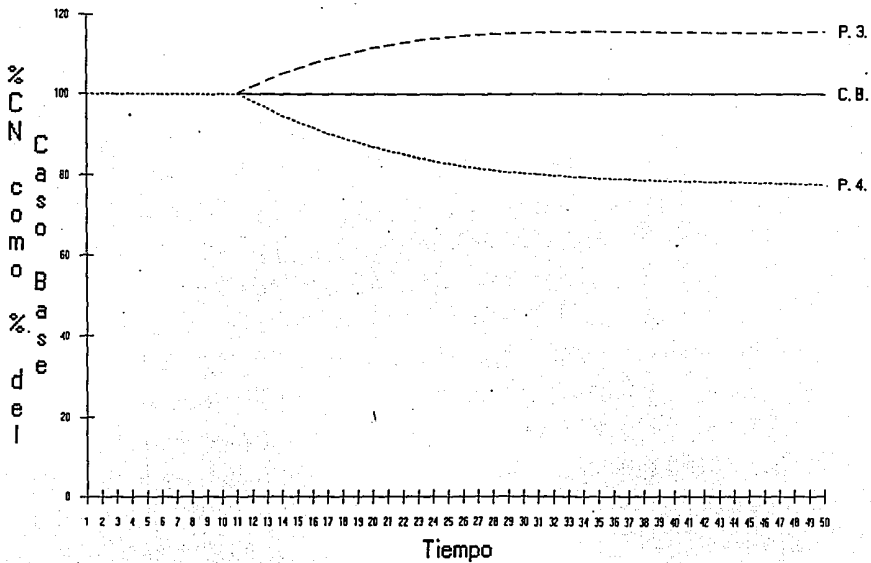
( 15 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypR							
7188	350162.1	43.4	13.2	1990	48032.4	70.8	33.5							
VPBF	PA	AR	PCP	VPSP	F	PAHF		PS	VACWP	QA	RF			
967367.7	798227.0	754078.6	3020599.7	526156.9	272070.1	0.0	829417.3	754078.6	0.69775					
Archivo	Par metros	r	r'	a	So	ISO	1	1	FAR					
	param.txt	65	65	1	13.9	0.0500	0.0700	0.0700	1.0000					
IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb					
0.0000	0.0167	0.0905	0.1140	180	0	550	370	180	0					
PB	G	AR	IncPS	CH	XCH									
48032.4	36940.0	51147.2	-1150.0	51147.2	0.14607									

## Proyección del % CN con desviaciones en las tasas de decremento

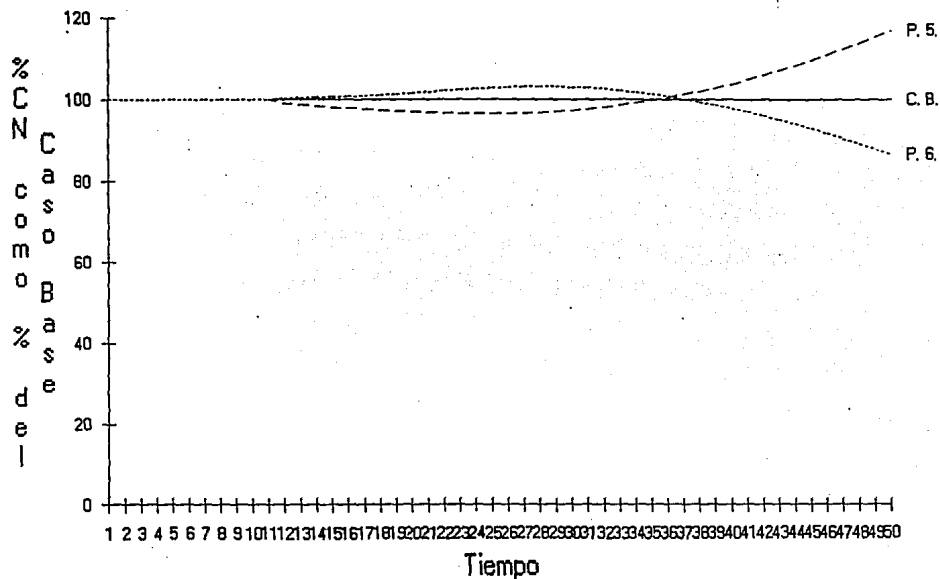


### Proyección del % CN con desviaciones en la tasa de interés





## Proyección del % CN con desviaciones en el incremento de salarios



Puesto que una desviación en la tasa proyectada de interés no modifica los salarios de la población, el impacto sobre el %CN es exactamente el mismo que sobre el costo normal en las proyecciones II y III.

Por otra parte, en el resto de las proyecciones se observa que durante los primeros años las desviaciones tienen sobre los %CN un efecto contrario al que tienen sobre los costos normales, aunque finalmente el efecto comienza a ser en el mismo sentido entre los 20 y 30 años después de que aparece la desviación.

Por ejemplo, en la Proyección V, un aumento de 2 puntos en las tasas de incremento de salarios, ocasiona primero una disminución del %CN hasta un 3.6% en el año 14 y luego lo hace crecer rápidamente hasta un 1.169 veces el %CN del Caso Base en el año 50.

De acuerdo con H. Winklevoss, este efecto sobre los %CN se debe a que los salarios totales se modifican en proporción directa al cambio en la tasa del incremento de salarios (o en las tasas de decremento), mientras que el efecto en el costo normal se ve retrasado. El atraso en la sensibilidad del costo normal, dice H. Winklevoss, se debe a que la pérdida o ganancia actuarial creada por la desviación, se disemina en años futuros en lugar de ser reconocida completamente en el año en que comienza la desviación.

## CONCLUSIONES.

LOS SABIOS NO SE DETIENEN INERTES EN GEMIR SOBRE SUS DESGRACIAS SINO

QUE PREVIENEN INMEDIATAMENTE LOS ACCIDENTES QUE LOS HACIAN GEMIR.

SHAKESPEARE.

En términos de los propósitos con los que se desarrolló el presente trabajo, definidos en la sección III.3.1, consideramos que el trabajo ha sido terminado satisfactoriamente debido a las siguientes razones:

- a) Con la separación del sistema real en un modelo con 5 componentes relativamente independientes, se desarrolló el presente sistema de simulación con una estructura modular que puede facilitar el proceso de mantenimiento del mismo o su adaptación para usos particulares según las necesidades del usuario.
- b) El sistema trasladado a la computadora tiene un nivel aceptable de interactividad con el usuario, permitiéndole variar los parámetros que desee en determinado momento de cualquier simulación, sin perder por ello la capacidad de efectuar análisis de resultados parciales del mismo experimento, esto se logra mediante una opción que permite al usuario utilizar los resultados de una simulación generada previamente como datos de entrada para otra simulación.
- c) Durante las etapas de validación, el comportamiento de las variables y su sensibilidad ante cambios en los parámetros resultaron consistentes con lo planteado en la teoría por H. Winklevoss y por ello, consideramos que el sistema tiene un nivel adecuado de confiabilidad.

Sin embargo, cabe mencionar que el sistema de simulación presenta algunas desventajas serias desde nuestro punto de vista, en lo que se refiere a sus posibilidades de ser utilizado como una herramienta práctica en la vida real.

Por un lado, la definición de las variables de estado y de transición y la definición de los parámetros de proyección es tal vez demasiado general, para que el sistema pueda ser usado en la práctica tal como está formulado. Creemos que su utilidad en la vida real se limita a servir como punto de partida para el diseño de modelos y sistemas con un propósito diferente al nuestro.

Por otro lado, creemos que el componente Población, puede en cierto momento ocasionar algunos problemas a los usuarios del sistema, debido a que la formulación de éste permite y a la vez exige al usuario definir por completo la estructura y la evolución que tendrá la población en estudio. Esto podría servir como punto de partida para un trabajo adicional, para quien se interese en este componente del sistema, de tal forma que el usuario no se preocupe por el comportamiento de la población, es decir, más que para seleccionar algún comportamiento ideal de entre algunos predefinidos.

Sin embargo, a pesar de las desventajas mencionadas anteriormente, el sistema de simulación presenta algunas características importantes que pueden ser utilizadas en el ámbito académico como una herramienta de apoyo a la enseñanza de los estudiantes de la carrera, en diversas materias como lo son: Pensiones, Cálculo Actuarial de Modelos Dinámicos y Computación, donde en ocasiones se requiere de la simulación como medio para poder experimentar con algún caso real.

De cualquier forma, nuestra apreciación es que el trabajo posee algunos puntos importantes que pueden aprovecharse en futuros estudios tendientes a hacer más efectivo el papel del actuario en el proceso de financiamiento de los planes de pensiones.

## BIBLIOGRAFIA

[1] Rosado, Howland, Gurza, Suárez, Marquard, Guajardo y Fernández.

Aspectos actuariales de la teoría y práctica de los planes privados de pensiones en México.

Asociación Mexicana de Actuarios Consultores en Beneficio para Empleados, A.C., 1990.

[2] Jordan C. W.

Life Contingencies. Society of Actuaries, 1967.

[3] Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt.

Actuarial Mathematics. Society of Actuaries, 1986.

[4] Shannon Robert E.

Systems Simulation the art and science.

Prentice-Hall Inc. 1975.

[5] C. McMillan y R. F. González.

Análisis de Sistemas.

Ed. Trillas. 1981.

[6] Winklevoss Howard.

Pension Mathematics With Numerical Illustrations.

Homewood, Illinois, Richard D. Irwin Inc. 1977.

[7] McGill Dan.

Fundamentals of Private Pensions.

Homewood, Illinois, R. D. Irwin. 1965

[8] Winklevoss Howard y McGill Dan.

Public Pension Plans. Standards of Design, Funding and Reporting.

Homewood, Illinois, Dow Jones-Irwin, 1979.

## APENDICE I

A continuación se presentan algunos fragmentos de cada unidad del sistema.

Unit Actuarial;

{ Esta función debe ser definida por el usuario, es el parámetro FB (fórmula de beneficio) }

Funcion FB(xt,yt,nt:Integer; st:Real):Real;

Const

alfa=0.80;

cu =0.015;

k =0;

Begin

If (xt>=rmin) And (xt<=rmax) And (yt>=amin) Then

{ fórmula es una constante local de esta unidad }

Case formula Of

0:FB:=0;

{ Beneficio Cerrado }

1:FB:=k\*nt;

{ Porcentaje Nivelado de Compensación }

2:FB:=alfa\*st;

{ Crédito Unitario }

3:FB:=cu\*yt\*st;

{ Cerrado+cu }

4:FB:=k\*nt+cu\*yt\*st;

End

Else

FB:=0;

End;

{ La función definida por el usuario, regresa el número de personas que ingresan a la población activa a edad x. Habia es el número de personas de edad x-1 que iniciaron el año, Quedan es el número de las personas que llegarán al final del año con edad x y Sin\_Regreso es el número total de activos que saldrán en el año por retiro o separación sin beneficio. }

Funcion Ex(xt,Habia,Quedan,Sin\_Regreso:Integer):Integer;

Var

factor:Real;

total\_e,Ex\_prov:Integer;

Begin

Ex\_prov:=0;

{ total\_e:=Round(100\*exp(tiempo\*Ln(1.07)));}

{ If tiempo=1 Then

total\_e:=Round(100\*exp(25\*Ln(1.07)))

Else

If tiempo<=26 Then

total\_e:=Round(100\*exp(26\*Ln(1.07)))

Else

total\_e:=Round(100\*exp((51-tiempo+1)\*Ln(1.07)));

}

```

If tiempo<=11 Then
  total_e:=Round(100*exp(26*Ln(1.07)))
Else
  total_e:=Sin_Regreso;

( El tamaño de la población de activos se mantiene constante
a partir del año 12. )
Case xt Of
  18 : If tiempo<=11 Then
    Ex_prov := Round(total_e*0.12)
  Else
    { Este ajuste es para evitar la inexactitud
    que puede ocasionar el redondeo }
    Ex_prov := Sin_Regreso-2*Round(total_e*0.10) -
      1*Round(total_e*0.06) -
      4*Round(total_e*0.05) -
      2*Round(total_e*0.04) -
      3*Round(total_e*0.03) -
      5*Round(total_e*0.02) -
      15*Round(total_e*0.01);
  19..20: Ex_prov := Round(total_e*0.10);
  21 : Ex_prov := Round(total_e*0.05);
  22..25: Ex_prov := Round(total_e*0.05);
  26..27: Ex_prov := Round(total_e*0.04);
  28..30: Ex_prov := Round(total_e*0.03);
  31..35: Ex_prov := Round(total_e*0.02);
  36..44: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
  46..48: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
  51..52: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
  56 : Ex_prov := Round(total_e*0.01);
End;
If tiempo>11 Then
  Ex_prov := Ex_prov+(Habia-Quedan);
Ex := Ex_prov;
End;

( Regresa el VPBF de nt personas con edad actual xt, antigüedad yt
y sueldo total st )
Funcion VPBFxy(xt,yt,nt:Integer; st:Real):Real;
Var
  xr,k:Integer;
  Br,V,proba:Real;
Begin
  xr:=Xs(xt,yt);
  k :=xr-xt;
  Br:=Bs(xt,yt,nt,st,xr);
  V :=exp(k*Ln(1/(1+i)));
  proba :=1-nQAz(k,qT,xt);
  VPBFxy:=Br*FP(xr)*V*proba;
End;

```

{ Esta función la define el usuario. Debe calcular las variables VPBF, PA, PCP, VPSF y CN, donde Método es una constante local de esta unidad }  
 Procedure MF;

Var

x,y,z,e,xr:Integer;  
 VPB\_xy,PA\_xy,anual\_total:Real;

Begin

VPBF:=0; PA:=0; VPSF:=0; CN:=0; PCP:=0;

TextColor(1);

TextBackground(14);

Case Metodo Of

{ Método de Financiamiento de Crédito Unitario }

1:Begin (...)

End;

{ Método de Financiamiento a edad de entrada }

2:Begin (...)

End;

{ Método de Financiamiento Individual Nivelado }

3:Begin (...)

End;

{ Método de Financiamiento Colectivo Nivelado }

4:Begin (...)

End;

{ Método de Financiamiento Colectivo }

5:Begin

For x:=xmin\_act To xmax\_act Do

For y:=ymin\_act To ymax\_act Do

Begin

If Pxy[x,y]>0 Then

Begin

Gotoxy(col, renglon+2);

ClrEol;

Write("Valuando ",x:2,',y:2);

VPB\_xy:=VPBFxy(x,y,Pxy[x,y],Sxy[x,y]);

VPBF:=VPBF+VPB\_xy;

VPSF:=VPSF+VPSFxy(x,y,Sxy[x,y]);

PCP:=PCP+PCPxy(x,y,VPB\_xy);

If VPB\_xy>0 Then

Begin

e:=Maximo(x-y,x-tiempo+1); { edad a la instalación }

xr:=Xs(x,y);

If x=xr Then

PA\_xy:=VPB\_xy

Else

PA\_xy:=VPB\_xy\*saTzn(e,x-e)/saTzn(e,xr-e);

PA:=PA+PA\_xy;

End

End;

End;

{ Los retirados }

For x:=xmin\_ret To xmax\_ret Do



```

For y:=ymin_act To ymax_ret Do
  If Rxy[x,y]<>0 Then
    Begin
      VPB_xy:=VPBF*x(x,By[x,y]);
      VPBF:=VPBF+VPB_xy;
      PCP:=PCP+VPB_xy;
      PA:=PA+VPB_xy;
    End;
  If VPSF > 0 Then
    CN:=S*(VPBF-F)/VPSF
  Else
    CN:=0;
  If CN<0 Then { Para cuando F > VPBF }
    CN:=0;
  End;
End;
NormVideo;
End;
End.

```

Unit Parametros;

{ Lee y Valida los parámetros que se leen por pantalla }

Procedure LeeParamPant;

Var

h, error :Integer;

cad :String;

last\_int :Integer;

last\_real:Real;

Begin

- PonParam;

For h:=1 To numpar Do

Begin

error:=0;

Repeat

Gotoxy(1,25);

ClrEol;

TextColor(14+128);

Write(' <Enter> ');

NormVideo;

TextColor(11);

Write(para no modificar el valor de la pantalla );

Gotoxy(1,24);

ClrEol;

If error<>0 Then

Write(#7);

cad:="";

Case h Of

1:Begin

last\_real:=lp;

TextColor(12);

Write("Tasa de interés para la proyección, I('lp');

Write(lp:6:4.); );

TextColor(11);

Readln(cad);

Val(cad,lp,error);

If error=0 Then

If lp>=0 Then

Begin

Gotoxy(col,row);

Write(' I = ',lp:6:4);

End

Else

error:=1

Else

Begin

lp:=last\_real;

If (cad="") Then

error:=0;

End;

NormVideo;

```

End;
2:Begin
  last_real:=So;
  TextColor(12);
  Write('Sueldo para un participante nuevo de edad ');
  Write(xmin_act:2,' So(',So:6:4,') (miles de pesos): ');
  TextColor(11);
  Readln(cad);
  Val(cad,So,error);
  If error=0 Then
    If So>0 Then
      Begin
        Gotoxy(col,row+1);
        Write(' So = ',So:6:4);
      End
    Else
      error:=1
    End
  Else
    Begin
      So:=last_real;
      If cad="" Then
        error:=0;
      End;
    NormVideo;
  End;
3:Begin
  last_real:=ISo;
  TextColor(12);
  Write('Incremento anual de So, ISo(',ISo:6:4,') ');
  TextColor(11);
  Readln(cad);
  Val(cad,ISo,error);
  If error=0 Then
    If ISo>=0 Then
      Begin
        Gotoxy(col,row+2);
        Write('ISo = ',ISo:6:4);
      End
    Else
      error:=1
    End
  Else
    Begin
      ISo:=last_real;
      If cad="" Then
        error:=0;
      End;
    NormVideo;
  End;
4:Begin
  last_real:=FAR;
  TextColor(12);

```

```

Write('Factor de Aportaci3n Real aplicable al ');
Write('Costo Normal, FAR(',FAR:6:4,'); ');
TextColor(11);
Readln(cad);
Val(cad,FAR,error);
If error=0 Then
  If FAR>=0 Then
    Begin
      Gotoxy(col,row+3);
      Write('FAR = ',FAR:6:4);
    End
  Else
    error:=1
  Else
    Begin
      FAR:=last_real;
      If cad=" Then
        error:=0;
      End;
    NormVideo;
  End;
5:Begin
  last_int:=rmin;
  TextColor(12);
  Write('Edad m;nima de retiro r(',rmin:2,'); ');
  TextColor(11);
  Readln(cad);
  Val(cad,rmin,error);
  If error=0 Then
    If (rmin>=xmin_ret) And (rmin <= xmax_act+1) Then
      Begin
        Gotoxy(col+ancho,row);
        Write('r = ',rmin:4);
      End
    Else
      error:=1
    Else
      Begin
        rmin:=last_int;
        If cad=" Then
          error:=0;
        End;
      NormVideo;
    End;
6:Begin
  last_int:=rmax;
  TextColor(12);
  Write('Edad m;xima de retiro r'+#39+'(',rmax:2,'); ');
  TextColor(11);
  Readln(cad);
  Val(cad,rmax,error);

```

```

If error=0 Then
  If (rmax>=rmin) And (rmax <= xmax_act+1) Then
    Begin
      Gotoxy(col+ancho,row+1);
      Write('r'+#39,' ',rmax:4);
    End
  Else
    error:=1
  End
Else
  Begin
    rmax:=last_int;
    If cad="" Then
      error:=0;
    End;
  NormVideo;
End;
7:Begin
  last_int:=amin;
  TextColor(12);
  Write("Antigüedad mínima de retiro a('",amin:2,') ');
  TextColor(11);
  Readln(cad);
  Val(cad,amin,error);
  If error=0 Then
    If (amin>=ymin_act) And (amin <= ymax_act) Then
      Begin
        Gotoxy(col+ancho,row+2);
        Write("a = ",amin:4);
      End
    Else
      error:=1
    End
  End
  Begin
    amin:=last_int;
    If cad="" Then
      error:=0;
    End;
  NormVideo;
End;
8:Begin
  last_real:=i;
  TextColor(12);
  Write("Tasa de inter,s para la valuaci#n, i('",i:6:4,') ');
  TextColor(11);
  Readln(cad);
  Val(cad,i,error);
  If error=0 Then
    If i>=0 Then
      Begin
        Gotoxy(col+2*ancho,row);
        Write("i = ",i:6:4);
      End
    End
  End

```

```
End
Else
  error:=1
Else
  Begin
    i:=last_real;
    If cad="" Then
      error:=0;
    End;
    NormVideo;
  End;
End;
Until error=0;
End;
Gotoxy(1,24);
ClrEol;
Gotoxy(1,25);
ClrEol;
End;
End.□
```

Unit Poblacion;

```
{ Calcula las variables de transición de la población EP, SPT, SPR, SPsb, ER y SR. Además, calculas las variables pxy, sxy, rxy y bxy del año siguiente a partir de las del año corriente, es decir, realiza la proyección de la población de un año a otro. }
```

```
Procedure HazPoblacion;
```

```
Var
```

```
Sal_r_x_menos1, Entrada_r_xy, x, y :Integer;  
S_ent_r_xy, B_ent_r_xy, Slast, Blast:Real;  
Entrada_a_x, Sal_a_x1_T, Sal_a_x1_sb, Sal_a_x1_r,  
Sal_a_xy_menos_1, Habia_x, Quedan_x, Plast, Rlast:Integer;
```

```
Begin
```

```
SR:=0; EP:=0; ER:=0; SPT:=0; SPsb:=0; SPR:=0;  
{ Población Retirada, calcula ER, SR, rxy y bxy }
```

```
For x:=xmax_ret+1 DownTo xmin_ret Do
```

```
For y:=(x-xmin_act+1) DownTo ymin_ret Do
```

```
Begin
```

```
Gotoxy(col+26, renglon+2);
```

```
Write(x:3, ' ', y:3);
```

```
If (x>xmin_ret) And (y>ymin_ret) And (Rxy[x-1,y-1]>0) Then
```

```
{ los r(x-1) que salieron durante el año =  $r(x-1) \cdot Q(x-1)$  }
```

```
Sal_r_x_menos1:=Round(Rxy[x-1,y-1]*Qp[x-1])
```

```
Else
```

```
Sal_r_x_menos1:=0;
```

```
SR:=SR+Sal_r_x_menos1;
```

```
{ Los que se retiraron a edad xy }
```

```
If (x>=rmin) And (x<=rmax) And (y>=amin) And (Pxy[x-1,y-1]>0) Then
```

```
Begin
```

```
Entrada_r_xy:=Round(Pxy[x-1,y-1]*(1-QTp[x-1]));
```

```
If Entrada_r_xy>0 Then
```

```
S_ent_r_xy:=Sxy[x-1,y-1]*(1+ISp[x-1])*Entrada_r_xy/Pxy[x-1,y-1]
```

```
Else
```

```
S_ent_r_xy:=0;
```

```
B_ent_r_xy:=FB(x,y,Entrada_r_xy,S_ent_r_xy)
```

```
End
```

```
Else
```

```
Begin
```

```
Entrada_r_xy:=0;
```

```
S_ent_r_xy :=0;
```

```
B_ent_r_xy :=0;
```

```
End;
```

```
{ Calcula rxy y bxy }
```

```
If (x<>xmax_ret+1) And (y<>ymin_ret+1) Then
```

```
If (x>xmin_ret) And (y>ymin_ret+1) Then
```

```
Begin
```

```
Rxy[x,y]:=Rxy[x-1,y-1]-Sal_r_x_menos1+Entrada_r_xy;
```

```
If Rxy[x-1,y-1]=0 Then
```

```
Bxy[x,y]:=B_ent_r_xy
```

```
Else
```

```
Bxy[x,y]:=Bxy[x-1,y-1]/Rxy[x-1,y-1]'
```

```

(Rxy[x-1,y-1]-Sal_r_x_menos1)+B_ent_r_xy;
End
Else
Begin
· Rxy[x,y]:=Entrada_r_xy;
· Bxy[x,y]:=B_ent_r_xy;
End;
ER:=ER+Entrada_r_xy;
End;
{ Población activa, calcula SPT, SPsb, SPR, EP, pxy y sxy }
Perdidos:=0;
For x:=xmax_act DownTo rmax-1 Do
For y:=(x-xmin_act) DownTo ymin_act Do
Perdidos:=Perdidos+Pxy[x,y];
{ Todos los activos que se van a retirar sin beneficio, sirve
para pasarlo como parámetro a la función Ex }
For x:=xmax_act+1 DownTo xmin_act Do
Begin
{ El +1 es para no dejar de calcular las salidas de xmax_act,
porque siempre calculamos las salidas de edad x-1 }
{ Los que empezaron el año vivos a edad x-1 }
Habia_x:=0;
{ los de Habia_x que van a sobrevivir a edad x }
Quedan_x:=0;
For y:=(x-xmin_act+1) (ymax_act+1) DownTo ymin_act Do
Begin
Gotoxy(col+26, renglon+2);
Write(x:3, '.', y:3);
If (x>xmin_act) And (y>ymin_act) Then
Begin
Sal_a_x1_T:=Round(Pxy[x-1,y-1]*QTP[x-1]);
If (x>=rmax) And (y<=amin) Then
Sal_a_x1_sb:=Pxy[x-1,y-1]-Sal_a_x1_T
Else
Sal_a_x1_sb:=0;
If (x>=rmin) And (x<=rmax) And (y>=amin) Then
Sal_a_x1_r:=Pxy[x-1,y-1]-Sal_a_x1_T
Else
Sal_a_x1_r:=0;
SPT:=SPT+Sal_a_x1_T;
SPsb:=SPsb+Sal_a_x1_sb;
SPr:=SPr+Sal_a_x1_r;
Habia_x:=Habia_x+Pxy[x-1,y-1];
If (x<>xmax_act+1) And (y<>ymax_act+1) Then
Begin
{ C lculo de Pxy }
Pxy[x,y]:=Pxy[x-1,y-1]-(Sal_a_x1_T+Sal_a_x1_sb+Sal_a_x1_r);
{ C lculo de Sxy }
If Pxy[x-1,y-1]=0 Then
Sxy[x,y]:=0
Else

```





Unit Principal;

```
Const
{ Edades para los activos }
xmin_act=15;
xmax_act=70;
{ Edades para los retirados }
xmin_ret=55;
xmax_ret=100;
{ Antigüedades para los activos }
ymin_act=0;
ymax_act=xmax_act-xmin_act;
{ Antigüedades para los retirados }
ymin_ret=ymin_act+1;
ymax_ret=xmax_ret-xmin_act;
{ Hay 9 enteros para definir los 8 intervalos de edades de activos y
retirados }
edades_tabla=9;
interv_edad =edades_tabla-1;
{ Hay 8 enteros para definir los 7 intervalos de antigüedades de los
activos }
antig_tabla =8;
interv_antig=antig_tabla-1;
renglon=21;
col=1;
{ Número máximo de años que se pueden simular }
tope_t=100;
Type
edades_act=xmin_act..xmax_act;
antig_act =ymin_act..ymax_act;
edades_ret=xmin_ret..xmax_ret;
antig_ret =ymin_ret..ymax_ret;
activos =Array[edades_act,antig_act] Of Integer;
sueldos =Array[edades_act,antig_act] Of Real;
retirados =Array[edades_ret,antig_ret] Of Integer;
pensiones =Array[edades_ret,antig_ret] Of Real;
{ Contienen un valor por cada intervalo de edad }
hipotesis_corta=Array[1..interv_edad] Of Real;
{ Contienen un valor por cada edad }
hipotesis_act=Array[edades_act] Of Real;
hipotesis_ret=Array[edades_ret] Of Real;
tabla_x =Array[1..edades_tabla] Of Integer;
tabla_y =Array[1..antig_tabla] Of Integer;
Const
{ El -1 es para uniformizar que todos los intervalos sean ( ) }
xi:tabla_x=(xmin_act-1,25,30,35,40,45,50,55,xmax_act);
rk:tabla_x=(xmin_ret-1,60,65,70,75,80,85,90,xmax_ret);
yj:tabla_y=(ymin_act-1, 5,10,15,20,25,35,ymax_act);
Var { Parámetros }
{ Estructura del plan }
rmin,max,amin:Integer;
```

```

{ Hipótesis de proyección }
QTp,ISp:hipotesis_act;
Qp :hipotesis_ret;
Ip,FAR,ISo:Real;
{ Hipótesis de valuación }
qT,is:hipotesis_act;
q:hipotesis_ret;
i:Real;
{ Hipótesis cortas de proyección y valuación respectivamente }
QTp_corta,ISp_corta,Qp_corta,
qT_corta, is_corta, q_corta :hipotesis_corta;
{ Variables de Estado }
Pxy:activos;
Sxy:sueldos;
Rxy:retirados;
Bxy:pensiones;
P,R:Integer;
S,B:Real;
xprom_act, xprom_ret, yprom_act, yprom_ret:Real;
F,OA,RF,so:Real;
VPBF,PA,VPSF,PCP,CN,PCN:Real;
{ Variables de Transición }
{ De la población y de los activos del plan }
SPT,SPsb,SPr,EP,SR,ER:Integer;
Perdidos:Integer;
{ Donde DP=IncP, DS=IncS, DR=IncR, DB=IncB }
DP,DS,DR,DB:Real;
PB,G,AR:Real;
{ De la valuación, donde DPS = IncPS }
VACNP,PANF,PS,DPS:Real;
{ Para retomar la simulación, donde:
Fo=valor inicial de F y last sustituye al superíndice t-1 }
Fo,F1ast,PA1ast,CN1ast,AR1ast:Real;
{ Para controlar el tiempo }
tiempo:Integer;
{ Variables auxiliares para los cálculos de la valuación }
az:Array[edades_ret] Of Real;

r_zISz:Array[xmin_act..xmin_ret] Of Real;

```

Program Simula;

{ Permite cambiar el archivo de parámetros y los parámetros que se leen por pantalla; en el primer caso manda leer el nuevo archivo de parámetros }

Procedure Cambiar\_Par;

```
Const
  Enter=#13;
Var
  Opcion:Char;
  Escape:Boolean;
Begin
  Gotoxy(col, renglon+2);
  TextColor(9);
  Write('Actualice parámetros al inicio de t ');
  NormVideo;
  PonParam;
  Escape:=False;
  While Not Escape Do
    Begin
      Gotoxy(1,24);
      ClrEol;
      TextColor(14+128);
      Write('<A>','.:22,<P>','.:23,<Enter>');
      TextColor(12);
      Gotoxy(4,24);
      Write('rchivo de Par metros. ');
      Gotoxy(29,24);
      Write('arámetros en Pantalla. ');
      Gotoxy(59,24);
      Write('continuar');
      NormVideo;
      Repeat
        Opcion:=ReadKey;
      Until Opcion In ['a','A','p','P','Enter'];
      Gotoxy(1,24);
      ClrEol;
      Case Opcion Of
        'a','A':Begin
          LeeParamDisco;
          Archivos_actuales;
          End;
        'p','P':LeeParamPant;
        Enter :Escape:=True;
      End;
    End;
  Gotoxy(col, renglon+2);
  Write('.:23);
End;
```

```
{ Llama a la función MF y calcula todas las demás variables de la  
Valuación Actuarial }
```

```
Procedure ValuacionAnual;
```

```
Begin  
Gotoxy(col, renglon+1);  
ClrEol;  
TextColor(9);  
Write("Valuación Actuarial al inicio de t");  
MF:  
PANF:=PA-F;  
If PANF<0 Then  
PANF:=0;  
PS:=PA-VACNP;  
If PS<0Then  
PS:=0;  
AR:=FAR*CN;  
If S<>0 Then  
PCN:=CN/S  
Else  
PCN:=0;  
If tiempo=1 Then  
DPS:=0  
Else  
DPS:=PANF-(1+i)*(PALast+CNlast-Flast-ARlast);  
OA:=OAplan;  
If OA<>0 Then  
RF:=F/OA  
Else  
RF:=0;  
Gotoxy(col, renglon+1);  
ClrEol;  
Write("Valuación Actuarial completa");  
NormVideo;  
Gotoxy(col, renglon+2);  
ClrEol;  
End;
```

```
{ Redefine las variables PA(t-1), F(t-1), CN(t-1), AR(t-1), calcula PB  
y G, hace las transiciones de la población y calcula el nuevo valor de  
F, So y VACNP para el inicio del año siguiente }
```

```
Procedure Transicion;
```

```
Var  
x,y:Integer;  
Begin  
Gotoxy(col, renglon+2);  
ClrEol;
```

```

TextColor(14);
Write('Transición t=',tiempo:2,' -> t=',tiempo+1,'...');
NormVideo;
PAIast:=PA; CNlast:=CN; FIast:=F; ARIast:=AR;
{ Se calcula PB }
PB:=0;
For x:=xmin_ret To xmax_ret Do
  For y:=ymin_ret To ymax_ret Do
    PB:=PB+Bxy[x,y];
HazPoblacion;
G:=(F+(1/2)*(AR-PB))*Ip;
If G<0 Then
  G:=0;
F:=F+AR-PB+G;
VACNP:=VACNP*(1+i)+CN;
So:=So*(1+ISo);
EscribeTrans;
End;

```

```

Begin
  ClrScr;
  NormVideo;
  Inicializa;
  HazLecturas;
  HazTablas;
  If Todo_listo Then
    Begin
      sigue:=True;
      LeeTiempo;
      Assign(salida,archivo_sal);
      Rewrite(salida);
      F:=Fo;
      Encabezado;
      CalculaPSRB;
      PonTiempoyPob;
      ValuacionAnual;
      While sigue Do
        Begin
          EscribeEdoyParam;
          If tiempo=prox_tope Then
            Almacena;
          If tiempo=tope_t Then
            sigue:=False;
          Else
            If tiempo=prox_tope Then
              Begin
                LeePeriodo;
                If prox_tope=tiempo Then
                  sigue:=False;

```

```
End;  
If sigue Then  
Begin  
Transicion;  
tiempo:=tiempo+1;  
BorraMens;  
PonTiempoyPob;  
If tiempo=prox_tope Then  
Begin  
cambiar_par;  
HazTablas;  
End;  
ValuacionAnual;  
End;  
End;  
Close(salida);  
ClrScr;  
End;  
NormVideo;  
End.
```

Unit Utilerias;

{ Lee y regresa el nombre de un archivo de datos que debe ser vacío o el nombre de un archivo que exista }

Function LeeArchValida(mensaje:String):String;

```
Var
  nom_arch :String;
  error_lec:Integer;
Begin
  Repeat
    Lee(mensaje,nom_arch,error_lec);
    If Not Existe(nom_arch) Then
      error_lec:=1;
  Until (error_lec=0);
  If nom_arch<>" Then
    LeeArchValida:=nom_arch
  Else
    LeeArchValida:="";
End;
```

{ Lee y regresa el nombre de un archivo de datos con una longitud máxima de Long. El nombre no necesariamente debe ser de uno que ya exista }

Function LeeArch(mensaje:String; long:Integer):String;

```
Var
  nom_arch :String;
  error_lec:Integer;
  c :Char;
Begin
  Repeat
    { El nombre debe empezar con una letra }
    Lee(mensaje,nom_arch,error_lec);
    If (nom_arch<>" ) And Not
      ((nom_arch[1]) In ['A'..'Z']+['a'..'z']) Then
      Begin
        error_lec:=1;
        Write(Chr(7));
      End;
    If (Existe(nom_arch)) And (nom_arch<>" ) Then
      Begin
        Aviso('Ya existe el archivo');
        Write('Quieres sobrescribir en ese archivo ? s/n ');
        c:=ReadKey;
        c:=UpCase(c);
        If (c='n') Or (c='N') Then
          error_lec:=1;
        End;
      Until (error_lec=0);
      If Length(nom_arch)<=long Then
        LeeArch:=nom_arch
      Else
        LeeArch:=copy(nom_arch,1,long);
      End;
  End;
End.
```



## APENDICE II

### Pantalla del Sistema

Este es un ejemplo del aspecto de la pantalla durante la ejecución del sistema, para la proyección I.

Activos	(pxy / sxy)	(5,10)	(10,15)	(15,20)	(20,25)	(25,35)	(35,55)
x / y	(-1,5)						
(14,25)	800 8984	25 272					
(25,30)	401 6890	130 174	13 158				
(30,35)	324 7670	187 3448	80 1171	9 120			
(35,40)	205 6606	161 4019	124 2469	78 1247	9 131		
(40,45)	165 7435	148 5114	147 3987	133 2862	70 1203	9 140	
(45,50)	132 7915	150 7032	160 5858	158 4569	129 2969	75 1342	
(50,55)	90 7138	114 7100	150 7399	154 5916	150 4542	174 3904	6 104
(55,70)	54 5605	114 10027	180 12742	204 11584	202 8807	381 12187	30 2806

Retirados (rx / bx)	Parámetros de Proyección	Condiciones de Retiro	Interés para la Valuación
(54,60)	0 0		
(60,65)	106 1914	r = 65	i = 0.0700
(65,70)	99 1698	r' = 65	
(70,75)	0 0	a = 1	
(75,80)	0 0		
(80,85)	0 0		
(85,90)	0 0	Activos: Pob2act.txt	Retirados:
(90,99)	0 0	Parámetros Param1.txt	Salida: Proyec1.txt

Año t = 3

Valuación Actuarial al inicio de t

Valuando 42,19

Simulando hasta t = 50

## Archivos de Entrada.

El formato para los archivos de la población activa, debe ser el siguiente:

En la primera línea, debe especificarse el valor inicial de  $F$ ,  $VACNP$ ,  $PA^{i-1}$ ,  $F^{i-1}$ ,  $CN^{i-1}$ , y  $AR^{i-1}$ , con una longitud de 10 caracteres; a partir de la segunda línea, se especifica el número de participantes activos, edad, antigüedad y sueldo total, con una longitud de 8 caracteres.

Como ejemplo, se presenta el archivo de la población inicial  $Pob0$ , con la que se realizaron las simulaciones del sistema:

### Archivo $Pob0.txt$

0	0	0	0	0	0	0
12	18	0	12.00			
10	19	0	10.00			
10	20	0	10.00			
6	21	0	6.70			
5	22	0	5.59			
5	23	0	5.59			
5	24	0	5.59			
5	25	0	5.59			
4	26	0	4.97			
4	27	0	4.97			
3	28	0	3.73			
3	29	0	3.73			
3	30	0	3.73			
2	31	0	2.75			
2	32	0	2.75			
2	33	0	2.75			
2	34	0	2.75			
2	35	0	2.75			
1	36	0	1.50			
1	37	0	1.50			
1	38	0	1.50			
1	39	0	1.50			
1	40	0	1.50			
1	41	0	1.65			
1	42	0	1.65			
1	43	0	1.65			
1	44	0	1.65			
1	46	0	1.73			
1	47	0	1.73			
1	48	0	1.73			

1	51	0	1.81
1	52	0	1.81
1	56	0	1.87

El formato para los archivos de la población retirada, es muy parecido al formato anterior:

A partir de la primera línea, se especifica el número de participantes retirados, edad, antigüedad y beneficio total que reciben del plan, igual con una longitud de 8 caracteres.

Como ejemplo, presentamos el archivo de la población retirada

Pobret:

Archivo Pobret.txt

6	65	9	140.37
6	66	14	158.86
5	66	15	135.78
5	67	16	129.32
4	67	19	108.52
3	67	25	82.16

El formato para los archivos de parámetros es el siguiente:

Cada línea corresponde a un parámetro y cada columna (de longitud de 8 caracteres) corresponde a un intervalo de edades.

Los parámetros deben seguir el siguiente orden:  $q_x$ ,  $q_x$ ,  $Q_x$ ,  $Q_x$ ,  $is_x$ .

Como ejemplo, presentamos el archivo de parámetros Param, con las tasas de decremento y tasas de incremento de salarios, utilizados en las simulaciones realizadas con el sistema:

Archivo Param.txt

0.24371	0.12629	0.07208	0.05948	0.04829	0.04585	0.04709	0.04800
0.01089	0.01741	0.02919	0.04749	0.07260	0.11230	0.15849	1.00000
0.24371	0.12629	0.07208	0.05948	0.04829	0.04585	0.04709	0.04800
0.01089	0.01741	0.02919	0.04749	0.07260	0.11230	0.15849	1.00000
0.07500	0.07200	0.06900	0.06700	0.06400	0.06200	0.05900	0.05500
0.07500	0.07200	0.06900	0.06700	0.06400	0.06200	0.05900	0.05500

## Archivos de Salida.

Como ejemplo se muestra una pequeña parte de Sim0.

Sim0.txt

Archivo de Población Activa: pob0.txt

Archivo de Retirados:

Fórmula de Beneficio: 0

Método de Financiamiento: 5

Valor inicial de

F	0.0
VACNP	0.0

Último valor de

PA	0.0
F	0.0
CN	0.0
AR	0.0

( 1 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypr
100	120.7	26.7	0.0	0	0.0	0.0	0.0

VPBF	PA	PCP	VP5F	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF
0.0	0.0	0.0	896.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000

Archivo Parametros	r	r'	a	So	iso	i	i	FAR
param.txt	65	65	50	1.0	0.0500	0.1000	0.1000	1.0000

IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb
0.8900	2.3214	0.0000	0.0000	0	0	103	14	0	0

PB	G	AR	IncPS	CN	XCN
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000

( 2 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypr
189	401.0	27.4	0.5	0	0.0	0.0	0.0

VPBF	PA	PCP	VP5F	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF
0.0	0.0	0.0	3253.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000

Archivo Parametros	r	r'	a	So	iso	i	i	FAR
param.txt	65	65	50	1.0	0.0500	0.1000	0.1000	1.0000

IncP	IncS	IncR	IncB	ER	SR	EP	SPT	SPR	SPsb
0.4444	0.7596	0.0000	0.0000	0	0	111	27	0	0

PB	G	AR	IncPS	CN	XCN
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000

( 3 )

P	S	xpa	yp	R	B	xpr	ypr
273	705.5	28.1	0.9	0	0.0	0.0	0.0

VPBF	PA	PCP	VP5F	F	PANF	PS	VACNP	OA	RF
0.0	0.0	0.0	5874.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0000

Archivo Parametros	r	r'	a	So	iso	i	i	FAR
param.txt	65	65	50	1.1	0.0500	0.1000	0.1000	1.0000

### APENDICE III

La porción del sistema correspondiente a la función Ex, se muestra para el caso de las Simulaciones Sim0, Sim1, Sim2. Caso Base y las 6 proyecciones.

Simulación Sim0:

```
Funcion Ex(xt,Habia,Quedan,Sin_Regreso:Integer):Integer;
Var
  factor:Real;
  total_e,Ex_prov:Integer;
Begin
  Ex_prov:=0;
  total_e:=Round(100*exp(tiempo*Ln(1.07)));
  Case xt Of
    18 :Ex_prov := Round(total_e*0.12);
    19..20: Ex_prov := Round(total_e*0.10);
    21 : Ex_prov := Round(total_e*0.06);
    22..25: Ex_prov := Round(total_e*0.05);
    26..27: Ex_prov := Round(total_e*0.04);
    28..30: Ex_prov := Round(total_e*0.03);
    31..35: Ex_prov := Round(total_e*0.02);
    36..44: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
    46..48: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
    51..52: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
    56 : Ex_prov := Round(total_e*0.01);
  End;
  Ex := Ex_prov;
End;
```

Simulación Sim1:

```
Funcion Ex(xt,Habia,Quedan,Sin_Regreso:Integer):Integer;
Var
  factor:Real;
  total_e,Ex_prov:Integer;
Begin
  Ex_prov:=0;
  If tiempo=1 Then
    total_e:=Round(100*exp(25*Ln(1.07)))
  Else
    If tiempo<=26 Then
      total_e:=Round(100*exp(26*Ln(1.07)))
    Else
      total_e:=Round(100*exp((51-tiempo+1)*Ln(1.07)));
    End;
  End;
  Case xt Of
    18 :Ex_prov := Round(total_e*0.12);
    19..20: Ex_prov := Round(total_e*0.10);
    21 : Ex_prov := Round(total_e*0.06);
    22..25: Ex_prov := Round(total_e*0.05);
    26..27: Ex_prov := Round(total_e*0.04);
```

```

28..30: Ex_prov := Round(total_e*0.03);
31..35: Ex_prov := Round(total_e*0.02);
36..44: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
46..48: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
51..52: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
56 : Ex_prov := Round(total_e*0.01);
End;
Ex := Ex_prov;
End;

```

Simulación Sim2, Caso Base y las 6 Proyecciones:

```

Funcion Ex(xt,Habia,Quedan,Sin_Regreso:Integer):Integer;
Var
factor:Real;
total_e,Ex_prov:Integer;
Begin
Ex_prov:=0;
If tiempo<=11 Then
total_e:=Round(100*exp(26*Ln(1.07)))
Else
total_e:=Sin_Regreso;
{ El tamaño de la población de activos se mantiene constante
a partir del año 12. }
Case xt Of
18 : If tiempo<=11 Then
Ex_prov := Round(total_e*0.12)
Else
( Este ajuste es para evitar la inexactitud
que puede ocasionar el redondeo )
Ex_prov := Sin_Regreso-2*Round(total_e*0.10) -
1*Round(total_e*0.06) -
4*Round(total_e*0.05) -
2*Round(total_e*0.04) -
3*Round(total_e*0.03) -
5*Round(total_e*0.02) -
15*Round(total_e*0.01);
19..20: Ex_prov := Round(total_e*0.10);
21 : Ex_prov := Round(total_e*0.06);
22..25: Ex_prov := Round(total_e*0.05);
26..27: Ex_prov := Round(total_e*0.04);
28..30: Ex_prov := Round(total_e*0.03);
31..35: Ex_prov := Round(total_e*0.02);
36..44: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
46..48: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
51..52: Ex_prov := Round(total_e*0.01);
56 : Ex_prov := Round(total_e*0.01);
End;
If tiempo>11 Then
Ex_prov := Ex_prov+(Habia-Quedan);
Ex := Ex_prov;
End;

```