



33
2ej.
UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMAS MINIMAX
EN TEORIA DE GRAFICAS



T E S I

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

REBECA RIVERA ALVARADO



DIRECTOR DE TESIS:

DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ

MEXICO, D. F.

FEBRERO 1994



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

página

Agradecimientos.....	8
Cap. 1, Preliminares.....	10
Definiciones Preliminares.....	10
Abreviaturas.....	14
Notaciones.....	15
Cap. 2, Teorema de Menger.....	18
Teor. 2.1, Teorema de Menger.....	19
Teorema de Menger para una Gráfica Infinita.....	33
Conjetura Clásica de Erdős.....	36
Teor. 2.2, Teorema original de Menger.....	37
Teor. 2.3, Teorema de descomposición en cadenas.....	38
Teor. 2.4, Teorema de Menger--Whitney.....	41
Teor. 2.5, versión líneas local del Teorema de Menger...	43
Teor. 2.6, versión lineal global del Teorema de Menger..	44
Teor. 2.7, versión generalizada del Teorema de Menger...	45
Cap. 3, Teorema de Flujo Máximo--Cortadura Mínima..	48
Teor. 3.1, Teorema de Flujo Máximo--Cortadura Mínima....	51
Corolario 3.2, criterio del flujo máximo.....	61
Corolario 3.3, Teorema de Integridad.....	68

Cap. 4, Acoplamientos en Gráficas Bipartitas.....	69
Teor. 4.1, Teorema de König.....	71
Teor. 4.2, Teorema de König--Egerváry.....	77
Teor. 4.3, Teorema de Gallai para Gráficas Bipartitas..	80
Teor. 4.4, Teorema de König--Hal.....	84
Teor. 4.5, versión equivalente del Teorema de Hall.....	90
Teor. 4.6, Problema de Asignación Óptima.....	97
Teor. 4.7, criterio para que una Gráfica Bipartita posea un 1--factor.....	106
 Cap. 5, Factores en Gráficas Arbitrarias.....	 108
Teor. 5.1, Teorema del 1--factor de Tutte.....	109
Teor. 5.2, versión minimax del Teorema de Tutte.....	115
 Conclusiones.....	 119
 Referencias.....	 121

Magdita y Mauri, con su amor y dedicación ha sido posible mi desarrollo profesional; gracias por sus enseñanzas y por estar conmigo cuando los necesito, siempre los llevo en mi mente. Ustedes son los mejores Padres, los amo!!!

Pepe, Javy, Letty y Jaime, su ayuda, apoyo, consejos, ejemplos y logros de cada uno fueron mi estímulo para la realización de este trabajo. Gracias hermanos, los adoro!!!

Rebe y Abdy, mis amados B-Kos, por ser la luz y alegría, porque son el par de estrellas que guían mi camino. Les agradezco el darme fuerza y esperanza. Siempre los llevo dentro de mí ser y son mi mayor orgullo. Gracias hijos, por ser lo más bello en mi vida, los idolatro!!!

Abdón S., gracias por mis estrellas.

Agradezco profundamente a la Dra. Hortensia Galeana Sánchez la confianza que depositó en mí, su paciencia y acertada dirección de esta tesis; al mismo tiempo, le reitero mi amistad, admiración y respeto. Mil gracias!!!

Reiterando mi amistad, también agradezco a todas las personas que con su ayuda hicieron posible la realización de este trabajo. Especialmente a **Betty Rodríguez, Hugo Rincón, Laura Pastrana y Vicky Abrín**, porque ellos también me brindaron confianza y enriquecieron esta tesis.

INTRODUCCION

En muchos de los problemas que surgen en Matemáticas el objetivo es encontrar el máximo (mínimo) de una función. El tratar de resolver estos problemas de maximización ha dado innumerables algoritmos para cada caso en específico. Sin embargo, se han podido englobar ciertos resultados en lo que se conoce como los Teoremas minimax.

Un Teorema minimax, es un teorema donde se relaciona un máximo con un mínimo, es decir, un teorema en el cual se establece que el mínimo de una función es igual al máximo de otra. Esta tesis presenta los Teoremas minimax más importantes en Teoría de Gráficas.

Muchas de las condiciones necesarias y suficientes de Teoría de Gráficas pueden ser redefinidas como Teoremas minimax y viceversa. Frecuentemente se obtienen varias ventajas al redactar los teoremas en su forma minimax, una de estas, es el demostrar los teoremas a través de algoritmos; las demostraciones algorítmicas son en forma constructiva, de esta forma se demuestra el teorema, y al mismo tiempo se obtiene el resultado deseado. Esta es una parte que se hace resaltar en este trabajo.

Enseguida, como un ejemplo específico se da el Teorema de Menger y se redefine en su forma minimax. Este teorema establece una biyección entre la existencia del número de XY --trayectorias ajenas y el número de vértices que debe contener un XY --conjunto separador en una gráfica. Esto da una condi-

ción necesaria y suficiente para la existencia de tales XY--trayectorias ajenas. De esta forma, el Teorema de Menger se puede redefinir de la siguiente manera: el máximo número de XY--trayectorias ajenas en G es igual al mínimo número de vértices de G en un XY--conjunto separador. Así, este teorema esta en su forma minimax.

La organización de esta tesis es la siguiente:

En el Capítulo 1 se presentará una revisión general de los conceptos principales de Teoría de Gráficas que será utilizados durante el trabajo.

Se exhibirá la demostración del Teorema de Menger en forma algorítmica en el Capítulo 2; y se verán varios teoremas relacionados con este.

El Teorema de máximo Flujo--Cortadura Mínima será la parte principal en el Capítulo 3, dando su demostración también en forma algorítmica.

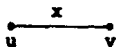
En el Capítulo 4 se trabajará con Gráficas Bipartitas, donde el teorema principal es el Teorema de König; se demostrarán en forma algorítmica el Teorema de Correspondencia Máxima y el de Asignación Optima.

Para finalizar se trabajará con 1--factores en el Capítulo 5, siendo la versión minimax del Teorema de Tutte, versión obtenida por Berge, el teorema principal sobre 1--factores.

1.- DEFINICIONES PRELIMINARES

Una gráfica G es un par de conjuntos $(V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto no vacío de elementos llamados **vértices**, y $A(G)$ es un conjunto de distintos pares no ordenados de diferentes elementos de $V(G)$ llamados **aristas**.

Para cada par $x = (u, v)$ de vértices que determinan una arista se dice que:



- 1) x une a u y a v ; a u y v también se les llaman **extremos** de la arista x
- 2) la arista x y el vértice u **inciden**
- 3) la arista x y el vértice v **inciden**
- 4) u y v son **vértices adyacentes** en G ; y se denota por: $u \text{ ady}_G v$

Se dice que u y v son **vértices no adyacentes** en G , si no hay una arista que los una; y se denota por: $u \text{ no ady}_G v$

Dos vértices tienen **aristas múltiples**, si hay más de una arista entre ellos.

Vértices adyacentes por pares (vértices no adyacentes por pares) son aquellos que dos a dos (no) son adyacentes.

Aristas adyacentes (aristas no adyacentes) son aquellas que (no) inciden en el mismo vértice.

Aristas adyacentes por pares (aristas no adyacentes por pares), son aquellas que dos a dos (no) son adyacentes.

Si $X \cap Y = \emptyset$, se dirá que los conjuntos X y Y son ajenos.

Gráficas ajenas son aquellas que no tienen vértices en común.

G es una **gráfica bipartita** si existe $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(G)$ tal que toda arista de G tenga un extremo en V_1 y el otro en V_2 , y donde $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Una **subgráfica** $H=(V(H), A(H))$ de una gráfica $G=(V(G), A(G))$, es aquella en que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Una **subgráfica** H de G es **inducida**, si $V(H) \subseteq V(G)$ tal que para todo par de vértices x & y si $x \text{ ady}_G y$ entonces $x \text{ ady}_H y$.

Camino es una sucesión alternada de vértices y aristas, que empieza y termina con vértices.

Trayectoria es un camino en el cual no se repiten vértices.

Un camino en el cual no se repiten aristas es un **paseo**.

Un **camino cerrado** es aquel que empieza y termina en el mismo vértice.

Un **ciclo** es un camino cerrado en el cual no se repiten vértices.

Dos trayectorias son **ajenas** (en vértices), si no tienen vértices en común.

Dos trayectorias son ajenas en aristas, si no tienen aristas en común.

Una XY--trayectoria ajena es aumentante; si dado un conjunto de XY--trayectorias ajenas, la XY--trayectoria ajena que se desea agragar es ajena a todo el conjunto dado.

Un XY--paseo es un paseo de alguna $x \in X$ a alguna $y \in Y$.

Una gráfica es conexa si hay una trayectoria que une a cada par de vértices de G , es decir, si G no se puede expresar como la unión de dos gráficas ajenas).

Una gráfica es desconexa si existe un par de vértices de G tal que no se puedan unir por alguna trayectoria.

Se dice que una gráfica se desconecta, si al eliminar un conjunto de vértices, esta gráfica se convierte en una gráfica desconexa.

Una gráfica es 1-conexa por aristas, si al quitar una arista la gráfica se desconecta.

La longitud de una trayectoria (paseo, ciclo, etcétera), es el número de vértices que se recorren a lo largo de la trayectoria (paseo, ciclo, etcétera).

Una digráfica D , consiste de un conjunto finito no vacío V , junto con una colección A de pares ordenados de distintos elementos de V .

A los elementos de V se les llaman vértices de la digráfica.

A los elementos de A se les llaman flechas ó arcos de D . Así, una flecha ó arco es una arista con dirección (una arista dirigida).

El grado de un vértice es el número de aristas que inciden en él. Así, en digráficas se tiene que el **ingrado** de un vértice es el número de flechas que llegan a él, y el **exgrado** de un vértice es el número de flechas que salen de este.

δ_G es el **mínimo grado** en G , es decir, es el grado menor entre todos los grados de los vértices de G .

Seguir una **dirección** (**dirección opuesta**) es seguir el **sentido** (**sentido opuesto**) de las flechas.

Seguir la **XY -dirección** es ir del conjunto X al conjunto Y , siguiendo el sentido de las flechas.

Una **matriz** es un arreglo de elementos dispuestos en renglones y columnas.

La **matriz de adyacencia** de una gráfica G es una matriz binaria, y se forma colocando al conjunto de vértices de G como los renglones y también como las columnas de la matriz; tal que a cada entrada de la matriz se le asignará un "uno", si los correspondientes vértices son adyacentes en G , y "cero" en otro caso, es decir:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ ady}_G v_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no ady}_G v_j \end{cases}$$

Para formar la **gráfica de líneas** $L(G)$, de una gráfica G , se considera por cada arista de G un vértice en $L(G)$, es decir, $V(L(G)) = A(G)$, y dos vértices en la gráfica de líneas son ad-

ABREVIATURAS

Se hace notar que "1" y "l" son diferentes: 1 es el número "uno", y l es la letra "ele".

Cap.	capítulo
c.s.q.d.	como se quería demostrar
Def.	definición
ej.	ejemplo
fig.	figura
máx.	máximo
mín.	mínimo
P.D.	por demostrar
s. a	sujeto a (las siguientes restricciones)
Teor.	Teorema

NOTACIONES

$\&$	y
$\therefore$	por lo tanto
$\forall$	para todo(a)
!	(esto es una) contradicción
[ñ]	véase como referencia a ñ
$\cdot \vdash$	tal que
$1 \leq k \leq n$	k toma valores (está) entre 1 y n
$\sim a$	no a, la negación de a
$i = \overline{1, n}$	i toma valores entre 1 y n, es decir, $i = 1, 2, 3, \dots, n$
$\Rightarrow$	condición de "necesidad"; entonces, implica
$\Leftarrow$	condición de "suficiencia"
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
" $\Rightarrow$ "	demostración de la "necesidad"
" $\Leftarrow$ "	demostración de la "suficiencia"
X	el conjunto X (denotando a los con-

	juntos con letras mayúsculas)
x	el elemnto x (denotando a los elementos con letras minúsculas)
$ A $	la cardinalidad del conjunto A , número de elementos en A
$a \in A$	a está en A , a pertenece a A , a es un elemento del conjunto A
$a \notin A$	a no es un elemento del conjunto A
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
$\emptyset$	el conjunto vacío, el conjunto que no posee elemento alguno
$q = \min \{q_1, q_2\}$	q toma el valor mínimo entre q_1 y q_2
$q = \max \{q_1, q_2\}$	q toma el valor máximo entre q_1 y q_2
$q = \begin{cases} q_1 & \text{si } a=b \\ q_2 & \text{si } a \neq b \end{cases}$	$q=q_1$ si $a=b$, y $q=q_2$ si $a \neq b$
$/$	tal que (usado al definir un conjunto)
$\{x/ x \in A\}$	el conjunto de las x tal que $x \in A$
$\sum_{i=1}^n x_i$	la sumatoria de las x_i , donde $i=\overline{1, n}$, es decir: $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

yacentes si y sólo si las correspondientes aristas son adyacentes en G .

Si se tienen dos conjuntos A y B relacionados de modo que al fijar un elemento de A quede determinado algún elemento de B , se dice que hay una relación entre el conjunto A y el conjunto B .

Si A tiene los elementos originales y B los elementos imágenes entonces, las relaciones en que todo elemento original tiene un elemento imagen y sólo uno, se llaman funciones.

$f : A \rightarrow B$, es decir que f es una función que va de A a B .

K_n es la gráfica completa de n vértices, es decir, es la gráfica con n vértices tal que todos sus vértices son adyacentes entre sí.

$\bar{X}$ es el complemento de el conjunto X , todo lo que no está en X ; también se denota por X^c .

$G - \{x, y\}$ es la gráfica G menos los vértices x & y .

$G - xy$ es la gráfica G menos la arista xy .

2.- TEOREMA DE Menger

La relación que existe entre las XY --trayectorias ajenas y los vértices que deben tener los conjuntos separadores en una gráfica, está dada por el Teorema de Menger, resultado - principal de este capítulo. Un de las pruebas de este teorema, la prueba de Ore, se hace en forma algorítmica.

Se generaliza este resultado para Gráficas Infinitas; y como una extensión, se enuncia la Conjetura Clásica de Erdős que establece una biyección entre un conjunto separador y las XY --trayectorias.

También en este capítulo se presentan teoremas relacionados con el Teorema de Menger; por mencionar algunos, uno de ellos trabaja con gráficas k --conexas por aristas, otro de ellos estudia trayectorias internamente ajenas entre dos vértices específicos.

Def. Sea G una gráfica ó digráfica:

Si $x, y \in G$, una xy --trayectoria, es una trayectoria (ó una trayectoria dirigida) de x a y en G .

Si X, Y son conjuntos de vértices, una XY --trayectoria, es una trayectoria (trayectoria dirigida) de alguna $x \in X$ a alguna $y \in Y$ pasando a través de ningún otro vértice de X ó Y (si $v \in X \cap Y \Rightarrow v$ por sí solo es una XY --trayectoria).

Si X, Y & Z son conjuntos de vértices, entonces Z separa a Y de X , es decir, Z es un XY --conjunto separador, si toda XY --trayectoria contiene un vértice de Z (en particular, X & Y son ambos XY --conjuntos separadores).

La versión del Teorema de Menger es la siguiente. Fué probada por el mismo Menger [18] en 1927.

Teor 2.1 Sea k un entero positivo, y sean X & Y conjuntos de vértices en una gráfica ó digráfica G . Existen k XY --trayectorias ajenas en $G \Leftrightarrow$ cada XY --conjunto separador contiene al menos k vértices (esto es, si y sólo si sigue habiendo una XY --trayectoria en G , cuando menos de k vértices son removidos).

Dm.

" $\Rightarrow$ " Si existen k XY --trayectorias ajenas, entonces cada conjunto separador debe contener al menos un vértice de cada una de estas trayectorias (por ser trayectorias ajenas).

Por lo tanto cada conjunto separador contiene al menos k vértices.

c.s.q.d.

" $\Leftarrow$ " Se darán dos pruebas de esta implicación. La primera es la más corta y simple que da Wodall; y aún sin haber un buen algoritmo para la construcción de tales trayectorias, la segunda prueba es algorítmica.

1ª prueba (Pym [23], 1969)

Se probará el resultado por inducción sobre $a(G)$, donde $a(G) = |V(G) \cup A(G)|$, es decir, la demostración por inducción se hará probando primero, que hay k XZ--trayectorias ajenas y que también hay k ZY--trayectorias ajenas, en base a esto se extenderá el resultado para tener las k XY--trayectorias ajenas (que es lo que se desea probar).

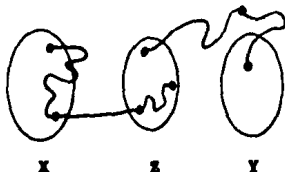
Supóngase sin pérdida de generalidad que hay un XY--conjunto separador con k vértices (incrementando el valor de k si esto fuera necesario).

Así, se tienen dos casos a considerar: si el XY--conjunto separador es distinto de X & Y , ó bien, si el XY--conjunto separador coincide con X ó Y .

Caso 1: Hay una XY--conjunto separador que será llamado Z tal que $Z \not\subset X$, $Z \not\subset Y$ & $|Z| = k$

Sea G_{XZ} (respectivamente G_{ZY}) la subgráfica de G tal que contenga a todos los vértices y aristas de todas las XZ--trayectorias (ZY--trayectorias) en G .

$G_{XZ} \cap G_{ZY} \subseteq Z$, pues Z es un conjunto separador, es decir, que toda XY--trayectoria contiene un vértice de Z ; y por definición, cada XY--trayectoria tiene un solo vértice de X y uno solo de Y :



Como Z es un conjunto separador mínimo y $Z \not\subseteq Y$, se tiene que $Z \not\subseteq Y$, pues Y también es un conjunto separador, pero Z es un conjunto separador mínimo (ya que $|Z| = k$).

Nótese que si $Y \subset Z$, es decir que para toda $w \in Y$ entonces $w \in Z$; ahora, decir que $Y \not\subseteq Z$ (la negación), es decir que existe $w \in Y$ tal que $w \notin Z$, es decir que existe w tal que $w \in Y - Z$.

De esta forma, existe un vértice $w \cdot \cdot \cdot w \in Y - Z$

Como $w \notin G_{XZ}$ entonces $a(G_{XZ}) < a(G)$; puesto que $G_{XZ} \subseteq G$ entonces se cumple que $a(G_{XZ}) \leq a(G)$; y con w se cumple la desigualdad estricta.

De esta manera, Z no está separado de X para algún conjunto con menos de k vértices en G_{XZ} , pues un XZ --conjunto separador en G_{XZ} es un XY --conjunto separador en G .

Por hipótesis de inducción, hay k XZ --trayectorias ajenas en G_{XZ} . Similarmente, hay k ZY --trayectorias ajenas en G_{ZY} .

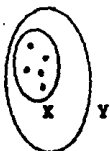
Como $|Z| = k$, estas trayectorias se pueden unir a través de los vértices de Z para formar k XY --trayectorias ajenas en G .

Por lo tanto, existen k XY --trayectorias ajenas en G .

Caso 2: Cada XY --conjunto separador de k vértices coincide con X ó Y .

Supóngase sin pérdida de generalidad que uno de estos XY --conjuntos separadores coincide con X entonces $|X| = k$.

1º) Si $X \subseteq Y$, entonces el resultado es inmediato, pues las k XY --trayectorias ajenas serán los mismos k vértices de X :

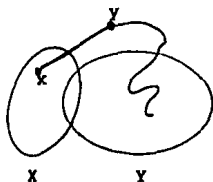


2º) Supóngase que existe $x \in X - Y$.

El conjunto $X - \{x\}$ no es un conjunto separador puesto que $X - \{x\} = k-1$, y por hipótesis de inducción cada conjunto separador tiene al menos k vértices.

Ahora, existe T una XY --trayectoria tal que $T \cap (X - \{x\})$ es igual al conjunto vacío.

Por otro lado, X es un XY --conjunto separador, por lo tanto $T \cap X \neq \emptyset$, por lo tanto $T \cap X = \{x\}$; así, la trayectoria T es el conjunto $\{x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$; y al hacer $y = x_1$ se tiene que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap X = \emptyset$; por lo tanto existe la arista $xy (=xx_1)$.



Así, hay una arista xy tal que $y \notin X$.

Sea $G' = G - xy$ tal que $a(G') < A(G)$.

Si cada conjunto separador XY en G' tiene al menos k vértices, entonces el resultado se sigue por hipótesis de inducción (pues cada XY --conjunto separador tiene al menos un vértice en cada una de las XY --trayectorias ajenas, así, existen k XY --trayectorias ajenas en G).

Nótese que si xy estuviera en una de las trayectorias ajenas que no fueran las k trayectorias ajenas, entonces G tendría $k+1$ trayectorias ajenas, pero de cualquier manera existen las k trayectorias ajenas en G .

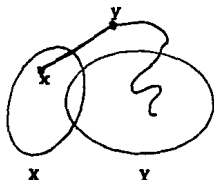
En otro caso, sea Z un conjunto separador en G' con $k-1$ vértices, entonces $Z \cup \{x\}$ & $Z \cup \{y\}$ son los conjuntos separadores en G .

2º) Supóngase que existe $x \in X-Y$.

El conjunto $X - \{x\}$ no es un conjunto separador puesto que $X - \{x\} = k-1$, y por hipótesis de inducción cada conjunto separador tiene al menos k vértices.

Ahora, existe T una XY --trayectoria tal que $T \cap (X - \{x\})$ es igual al conjunto vacío.

Por otro lado, X es un XY --conjunto separador, por lo tanto $T \cap X \neq \emptyset$, por lo tanto $T \cap X = \{x\}$; así, la trayectoria T es el conjunto $\{x=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$; y al hacer $y=x_1$ se tiene que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap X = \emptyset$; por lo tanto existe la arista $xy (=xx_1)$.



Así, hay una arista xy tal que $y \notin X$.

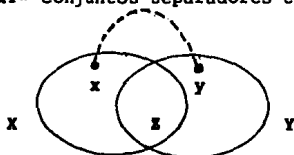
Sea $G' = G - xy$ tal que $a(G') < a(G)$.

Si cada conjunto separador XY en G' tiene al menos k vértices, entonces el resultado se sigue por hipótesis de inducción (pues cada XY --conjunto separador tiene al menos un vértice en cada una de las XY --trayectorias ajenas, así, existen k XY --trayectorias ajenas en G).

Nótese que si xy estuviera en una de las trayectorias ajenas que no fueran las k trayectorias ajenas, entonces G tendría $k+1$ trayectorias ajenas, pero de cualquier manera existen las k trayectorias ajenas en G .

En otro caso, sea Z un conjunto separador en G' con $k-1$ vértices, entonces $Z \cup \{x\}$ & $Z \cup \{y\}$ son los conjuntos separadores en G .

Por hipótesis del Teorema y de este caso dos (que cada conjunto separador tiene al menos k vértices) se tiene que: $|Z \cup \{x\}| = |Z \cup \{y\}| = k$, donde $Z \cup \{x\} = X$ & $Z \cup \{y\} = Y$ son los XY --conjuntos separadores con k vértices.



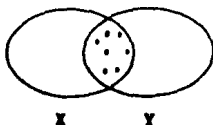
Nótese que en $X \cap Y = Z$, hay $k-1$ trayectorias.

Por lo tanto, existen k XY --trayectorias ajenas en G .

c.s.q.d.

2ª prueba (Ore [20], 1962)

Se probará el resultado cuando $X \cap Y = \emptyset$; es claro cuando $X \cap Y \neq \emptyset$, pues cada vértice de $X \cap Y$ es por sí mismo una XY --trayectoria:



Se presentará la prueba en forma de un algoritmo, éste empieza con un conjunto Π_1 que contiene l XY --trayectorias ajenas: $P_1, P_2, \dots, P_l$, para cualquier número l que sea un entero y no negativo (pues l podría ser cero, en caso de comenzar el algoritmo con cero trayectorias).

Pasos iterativos: construir recursivamente dos conjuntos de vértices S & T como lo indican los siguientes pasos:

(i) Poner a todos los vértices de X dentro de ambos conjuntos S & T .

(ii) Si $u \in S$ & $uv \in A(G) \rightarrow uv \notin \pi_1$ & $v \notin \pi_1 \rightarrow v \in S$, & $v \in T$.

(iii) Si $u \in S$ & $uv \in A(G) \rightarrow uv \notin \pi_1$ & $v \in \pi_1 \rightarrow v \in T$ (pero dejar a v en S , si v ya estaba previamente en S).

(iv) Si $u \in T$ & $vu \in \pi_1$ (esto es, que v precede a u cuando la trayectoria es recorrida de X a Y) $\rightarrow v \in S$ & $v \in T$.

Las construcciones de S & T continúan hasta no poder hacer los pasos iterativos.

Se tienen dos casos a considerar: si S contiene ó si no contiene algún vértice de Y :

caso 1: S contiene algún vértice de Y

Por la construcción de S , G contiene una sucesión recorrida al revés en π_1 , esto es: un Q XY -paseo (permitiendo vértices repetidos pero no aristas repetidas, por definición de paseo).

Este paseo Q solo se intersecta con las trayectorias de π_1 , consistiendo de elementos de al menos una arista, la cual atraviesa en la dirección opuesta de la XY -dirección de π_1 (ver figura 1).

Nótese que si G es una digráfica, entonces Q no es un paseo dirigido, pues recorre flechas que van de Y a X . En este caso, hay una manera obvia de extender π_1 dentro de π_{1+1} , es decir, de encontrar una nueva trayectoria ajena - aumentante (ver figura 2).

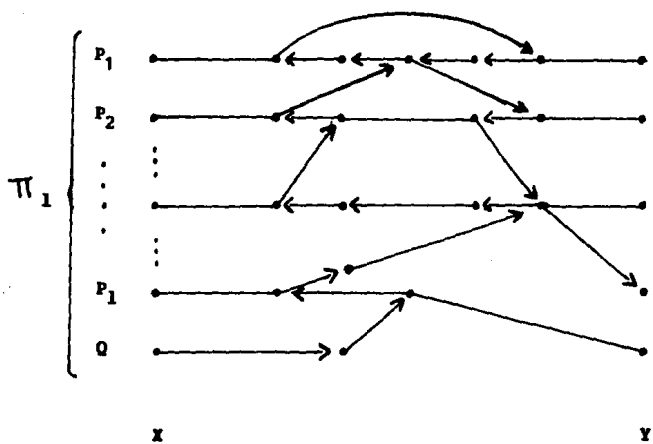


fig. 1

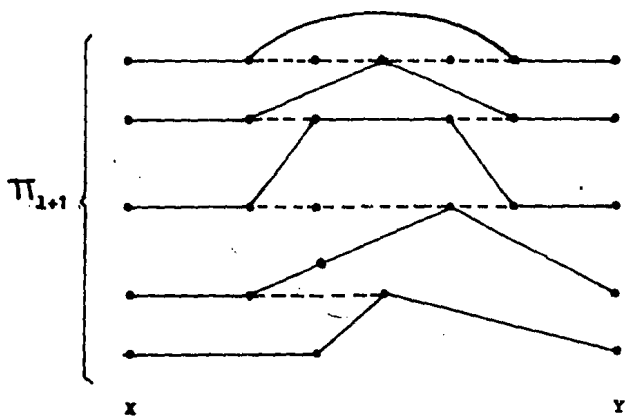


fig. 2

Haciendo esto, lo indicado en la figura dos (anular las flechas que se recorren en sentido contrario dentro del paseo), y regresando a los pasos iterativos con Π_{l+1} en lugar de Π_l , se termina por encontrar las XY--trayectorias ajenas.

caso 2: S no contiene algún vértice de Y.

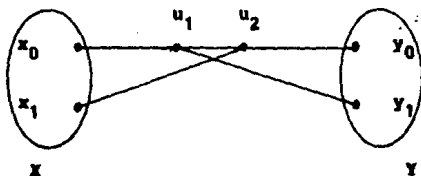
Sea v_l el último vértice a lo largo de P_l que esté en T, con $l = \overline{1, l}$. Este conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ es un XY--conjunto separador de l vértices, el cual muestra que no pueden existir $l+1$ trayectorias ajenas.

Por hipótesis del Teorema se tiene que $k=l$, y el algoritmo termina construyendo las k XY--trayectorias ajenas.

c.s.q.d.

Para ilustrar el algoritmo, se verán unos ejemplos.

Ej. 1 (abarcando el caso 1)



$$X = \{x_0, x_1\}$$

Sea $\Pi_1 = P_1 = \{x_0, u_1, u_2, y_0\}$, una trayectoria dada.

Aplicando los pasos algorítmicos:

$$(i) S_0 = \{x_0, x_1\} = T_0 = X$$

$$(ii) x_1 \in S_0 \text{ \& } x_1 u_2 \in A(G) \therefore x_1 u_2 \notin \Pi_1 \text{ \& } u_2 \notin \Pi_1, \text{ entonces}$$

ces $u_2 \in T_1$. Así, $S_1 = \{x_0, x_1\}$ & $T_1 = \{x_0, x_1, u_2\}$

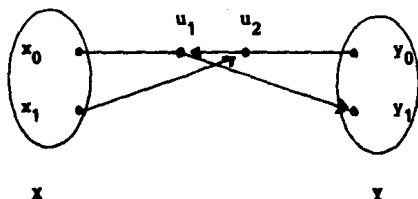
(iv) $u_2 \in T_1$ & $u_2 u_1 \in \Pi_1 \Rightarrow u_1 \in S_2$ & $u_1 \in T_2$, así:
 $S_2 = \{x_0, x_1, u_1\}$ & $T_2 = \{x_0, x_1, u_2, u_1\}$

(iv) $u_1 \in T_2$ & $x_0 u_1 \in \Pi_1 \Rightarrow x_0 \in S_3$ & $x_0 \in T_3$

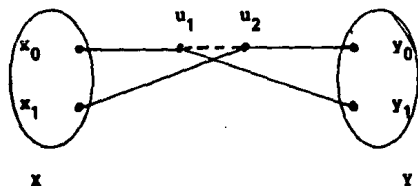
(ii) $u_1 \in S_2$ & $u_1 y_1 \in A(G)$.y. $u_1 y_1 \notin \Pi_1$ & $y_1 \in \Pi_1$
 $\Rightarrow y_1 \in T_3$ & $y_1 \in S_3$. Por lo tanto: $S_3 = \{x_0, x_1, u_1, y_1\}$ &
 $T_3 = \{x_0, x_1, u_2, u_1, y_1\}$

Ya no se pueden aplicar más pasos algorítmicos, por lo tanto: $S = S_3$ & $T = T_3$

Ahora se verá que se tiene en la gráfica, observando - además que $y_1 \in S$.



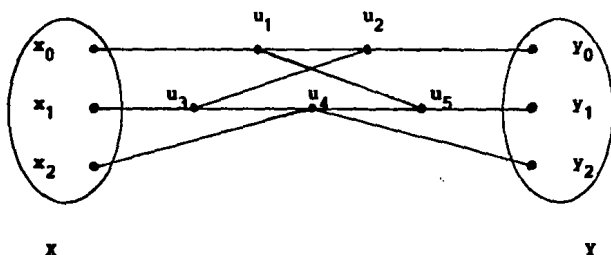
Para ir de x_1 a y_1 , se tiene el paseo $Q = \{x_1, u_2, u_1, y_1\}$. Así, siguiendo lo indicado en la figura dos, se borra la arista $u_1 u_2$ (que es la que va en sentido contrario); y se encuentra una trayectoria ajena aumentante:



Y se tiene que: $\Pi_{1+1} = \{P'_1, P'_2\} = \{(x_0, u_1, y_0), (x_1, u_2, y_0)\}$

Aunque no se conserven las trayectorias ajenas que se tenían (en el ejemplo anterior se vé: P_1), se encuentra una trayectoria aumentante (en ese ejemplo: $\{P'_1, P'_2\}$). Al borrar las aristas que van en sentido contrario en el paseo, las nuevas trayectorias ajenas quedan bien determinadas (se vé claramente cómo hay que tomarlas).

Ej. 2 (caso 2)



$$X = \{x_0, x_1, x_2\}$$

$$\text{Sea } \Pi_1 = \{P_1, P_2\} = \{(x_0, u_1, u_2, y_0), (x_1, u_3, u_4, u_5, y_1)\}$$

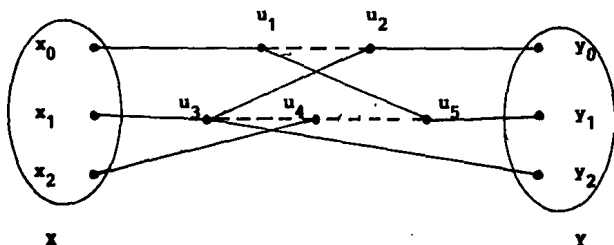
$$(i) \quad X = S_0 = \{x_0, x_1, x_2\} = T_0$$

$$(iii) \quad x_2 \in S_0 \text{ \& } x_2 u_4 \in A(G) \cdot \gamma \quad x_4 u_4 \notin \Pi_1 \text{ \& } u_4 \in \Pi_1 \\ \Rightarrow u_4 \in T_1. \text{ Así, } S_1 = \{x_0, x_1, x_2\} \text{ \& } T_1 = \{x_0, x_1, x_2, u_4\}$$

$$(iv) \quad u_4 \in T_1 \text{ \& } u_3 u_4 \in \Pi_1 \Rightarrow u_3 \in S_2 \text{ \& } u_3 \in T_2 \\ \Rightarrow S_2 = \{x_0, x_1, x_2, u_3\} \text{ \& } T_2 = \{x_0, x_1, x_2, u_4, u_3\}$$

Para ir de x_2 a y_2 se tiene el paseo $Q = \{x_2, u_4, u_3, u_2, u_1, u_5, u_4, y_2\}$.

Quitando las aristas: u_3u_4, u_1u_2 & u_4u_5 , se tiene gráficamente lo siguiente:



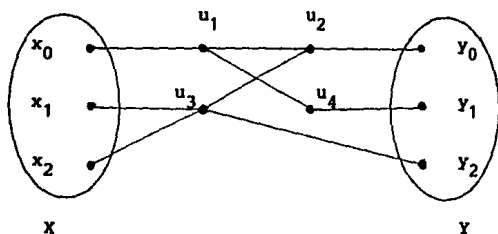
$$\Pi_{1+1} = \{P_1', P_2', P_3'\} = \{(x_0, u_1, u_5, y_1), (x_1, u_3, u_2, y_0), (x_2, u_4, y_2)\}$$

En T se encuentra vértice por vértice el paseo a seguir (T lo va indicando), solo hay que poner los vértices que van indicando los pasos algorítmicos aunque éstos ya estén repetidos (ver T_7 en el ejemplo dos). El paseo empezará con un vértice del conjunto X , con el cual se comienzan los pasos algorítmicos, pues a partir de este vértice se encontrará la XY --trayectoria ajena aumentante.

Ej. 3 (caso 2)

$$X = \{x_0, x_1, x_2\}$$

$$\text{Sea } \Pi_1 = \{P_1, P_2\} = \{(x_0, u_1, u_4, y_1), (x_1, u_3, u_2, y_0)\}$$

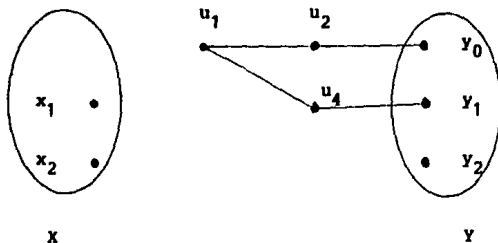


- (i) $S_0 = \{x_0, x_1, x_2\} = T_0 = X$
 (iii) $x_2 \in S_0$ & $x_2 u_3 \in A(G)$ $\therefore x_2 u_3 \notin \Pi_1$ & $u_3 \in \Pi_1$
 $\Rightarrow u_3 \in T_1$. Así, $S_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ & $T_1 = \{x_0, x_1, x_2, u_3\}$
 (iv) $u_3 \in T_1$ & $x_1 u_3 \in \Pi_1 \Rightarrow x_1 \in S_2$ & $x_1 \in T_2$. Así,
 $S_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$ & $T_2 = \{x_0, x_1, x_2, u_3\}$.
 Por lo tanto: $S = S_2$ & $T = T_2$

Encontrando el XY-conjunto separador:

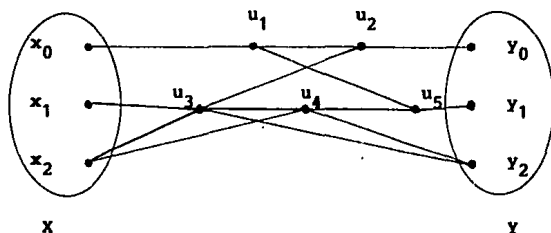
$x_0 \in P_1$ & x_0 es el último vértice de P_1 $\therefore x_0 \in T$
 $u_3 \in P_3$ & u_3 es el último vértice de P_2 $\therefore u_3 \in T$

Por lo tanto, $\{x_0, u_3\}$ es un conjunto separador de la gráfica, al quitar éstos vértices (con sus respectivas aristas) se vé que la gráfica está separada:



Así se tiene que Y está separado de X.

Ej. 4 (caso 2)



$$X = \{x_0, x_1, x_2\}$$

$$\text{Sea } \Pi_1 = \{P_1, P_2, P_3\} = \{(x_0, u_1, u_5, y_1), (x_1, u_3, u_2, y_0), (x_2, u_4, y_2)\}$$

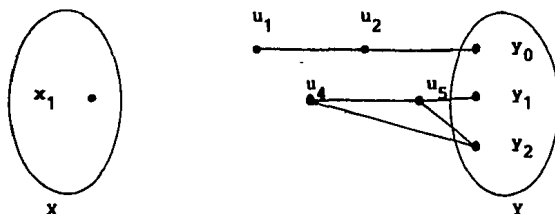
- (i) $S_0 = \{x_0, x_1, x_2\} = T_0 = X$
 (ii) $x_2 \in S_0$ & $x_2 u_3 \in A(G)$ $\cdot \cdot$ $x_2 u_3 \notin \Pi_1$ & $u_3 \in \Pi_1$
 $\Rightarrow u_3 \in T_1$. Así, $S_1 = \{x_0, x_1, x_2\}$ & $T_1 = \{x_0, x_1, x_2, u_3\}$
 (iv) $u_3 \in T_1$ & $x_1 u_3 \in \Pi_1 \Rightarrow x_1 \in T_2$ & $x_1 \in S_2$, entonces, $S = S_1$ & $T = T_1$

$x_0 \in P_1$ & x_0 es el último vértice de P_1 $\cdot \cdot$ $x_0 \in T$

$u_3 \in P_2$ & u_3 es el último vértice de P_2 $\cdot \cdot$ $u_3 \in T$

$x_2 \in P_3$ & x_2 es el último vértice de P_3 $\cdot \cdot$ $x_2 \in T$

Por lo tanto, $\{x_0, u_3, x_2\}$ es un XY--conjunto separador.



Y está separado de X , pues al quitar a Z (el conjunto separador), la gráfica se desconecta.

El caso 1 es para encontrar las XY --trayectorias ajenas aumentantes; y el caso 2 es para encontrar un XY --conjunto separador y así ver que no hay trayectorias ajenas que se puedan agragar.

Dejando por el momento las gráficas finitas, se verá - ahora la elegante prueba de Erdős para el Teorema de Menger, se seguirá teniendo a k finita, para dos conjuntos arbitrarios X & Y en una gráfica infinita, y se tomará como verdadero el resultado para gráficas finitas. Esto no es necesario si se adopta la segunda prueba de arriba, pues esta prueba se puede modificar para probar el resultado en una gráfica infinita (aunque por supuesto, el algoritmo no sea modificado).

La prueba inductiva de Pym trabaja solo para gráficas finitas, y el argumento de Erdős (hecho en 1931 ó 32, cuando él tenía cerca de 19 años y publicado por König [13], es de gran valor para ser incluido).

Dm. (del Teorema de Menger para una gráfica infinita G)

" $\Leftarrow$ " Esta implicación está soportada como antes (por la prueba anterior, pues con el algoritmo se encuentran las k XY --trayectorias ajenas)

c.s.q.d.

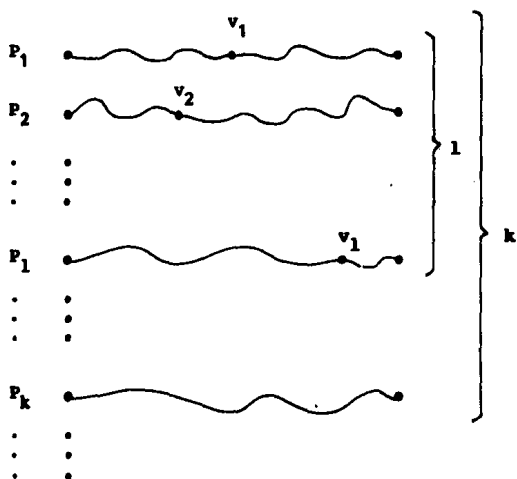
" $\Rightarrow$ " Supóngase que el resultado es falso; así, se tendrán a los más 1 XY --trayectorias ajenas, con $1 < k$. Sean $P_1, P_2, \dots, P_1$ tales trayectorias (esto es, hay k trayectorias ajenas, pero se supone que solo hay 1 trayectorias ajenas).

Nótese que una XY --trayectoria, como cualquier trayectoria con dos vértices finales debe ser de longitud finita, aún en una gráfica infinita.

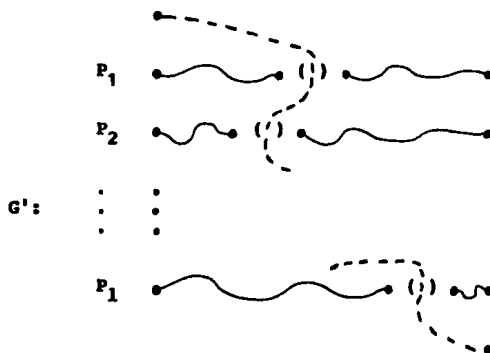
Supóngase que se quitan los vértices v_1 en P_1 , v_2 en P_2 , ... v_l en P_l ; como $1 < k$, sigue habiendo una XY --trayectoria en G . Sea $P(v_1, v_2, \dots, v_l)$ tal trayectoria, una trayectoria en función de los vértices $v_1, v_2, \dots, v_l$. Al quitar dichos -vértices, se rompen a los más l trayectorias (aunque en realidad se tienen k).

Hay muchas formas de elegir los vértices $v_1, v_2, \dots, v_l$, pero ésta elección es finita (puesto que la longitud de una trayectorias es finita).

Gráficamente se tendría lo siguiente:



Al quitar los vértices v_i (con $i = \overline{1, l}$), gráficamente se podría ver de la siguiente manera:



La trayectoria punteada es una XY--trayectoria en función de los vértices que se borran: $P(v_1, v_2, \dots, v_l)$

De esta forma, la subgráfica G' de G , es finita; y G' consiste de todos los vértices y aristas en $P_1, P_2, \dots, P_l$ y de todas las trayectorias $P(v_1, v_2, \dots, v_l)$.

Las combinaciones para elegir tales vértices es finita, así que G' será finita.

El conjunto Y no está separado de X para ningún conjunto de 1 ó menos vértices:

1º) Si se quita un vértice v_i en cada P_i , queda la trayectoria $P(v_1, v_2, \dots, v_l)$

2º) Si se quitan 1 ó menos vértices de alguna otra forma, sigue quedando alguna de las P_i trayectorias.

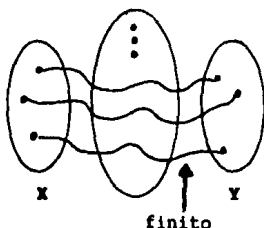
Por lo tanto, por el Teorema de Menger para gráficas finitas, hay $l+1$ trayectorias ajenas en G' , de aquí que también las hay en G , pues solo había 1 trayectorias ajenas en G .

De esta manera, los vértices $v_1, v_2, \dots, v_l$ forman una XY--conjunto separador en G' .

Así que cada conjunto separador en G contiene al menos k vértices.

c.s.q.d.

Es casi trivial la prueba del Teorema de Menger para un número k infinito:



Se puede tener un k infinito, pero siempre se podrá encontrar un número finito de trayectorias que separen a Y de X ; de ésta forma habrá un XY--conjunto separador finito.

La extensión que se quiciera probar está contenida en la siguiente conjetura clásica de Erdős:

Conjetura: Sean X & Y conjuntos arbitrarios de vértices en una gráfica infinita G . Entonces, G contiene un conjunto Π_1 de XY--trayectorias y un conjunto Z (XY--conjunto separador), que están en correspondencia uno a uno; es decir, que cada vértice de Z está en una única trayectoria de Π_1 , y cada trayectoria de Π_1 contiene un único vértice de Z .

Hasta donde se sabe, virtualmente no se sabe nada acerca de la solución a este problema (sin embargo, se puede consultar: McDiarmid [15]).

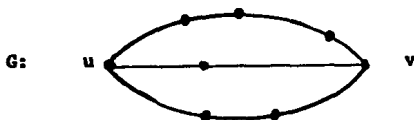
Se concluye este capítulo con una lista de Teoremas relacionados en gráficas (finitas).

El siguiente Teorema puede ser probado adaptándose a la segunda prueba del Teorema 2.1. Alternativamente se prueba fácilmente con las construcciones elementales de Teoría de Gráficas, observando que cada uno de los Teoremas 2.1 y 2.2 se implican uno al otro. Obsérvese además que el Teorema 2.1, al tener en vez de conjuntos de vértices X & Y , tendrá a los puntos u & v ; de ésta forma el Teorema 2.2 se transforma en el Teorema 2.1 (es como si al conjunto de vértices X se le comprimiera a un solo punto u , y el conjunto Y en el punto v).

Teor. 2.2 (Teorema original de Menger [18])

Sean u & v dos vértices de la gráfica ó digráfica G tal que u no $\text{ady}_G v$; existen k uv --trayectorias en G tal que son internamente ajenas dos a dos (es decir, son ajenas por pares, excepto por sus extremos, los vértices u & v), si y sólo si sigue habiendo una uv --trayectoria en G al quitar cualesquiera m vértices de $G - \{u, v\}$, donde $m < k$.

Con un ejemplo se puede ilustrar este Teorema 2.2.:



u no ady_G v

$k = 3$ uv--trayectorias internamente ajenas dos a dos.

$m(k) = 3$

Al quitar uno ó dos vértices de $G - \{u, v\}$, sigue habiendo una uv--trayectoria en G , y viceversa.

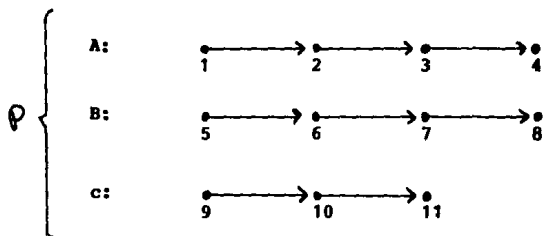
Def. Un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, es un conjunto con una relación entre algunos pares de elementos tal que cumplan las siguientes propiedades:

$a \leq a$	$\forall a$	Reflexividad
si $a \leq b$ & $b \leq a$	$\Rightarrow a = b$	Antisimetría
si $a \leq b$ & $b \leq c$	$\Rightarrow a \leq c$	Transitividad

Teor. 2.3 (Teorema de descomposición en cadenas de Dilworth). El número de elementos de la anticadena más grande (conjunto de elementos dos a dos incomparables) en un conjunto finito P parcialmente ordenado (de vértices), es igual al mínimo número de cadenas (subconjuntos totalmente ordenados) tal que su unión sea el mismo conjunto P .

Este Teorema probado por Dilworth [4] en 1950 se puede obtener aplicando el Teorema de Menger para una gráfica bipartita construida de una manera adecuada a partir de . Sin embargo es más fácil probarlo directamente, copiando la primera prueba del Teorema 2.1. Esto invierte el orden histórico, pues Perles [22] presentó tal prueba del Teorema de Dilworth en 1963, y Pym [23] lo modificó para probar el Teorema de Menger.

Un ejemplo del Teorema 2.3:



Las cadenas máximas en P son: $C_1 = \{A, B, C\}$; que son subconjuntos totalmente ordenados (es decir, sus elementos son comparables dos a dos, en la cadena A se puede decir que 1 está antes que 4, que 3 está después de 2, etc.)

Un conjunto parcialmente ordenado en P puede ser $C_2 = \{1, 6, 10\}$ (C_2 es una de las anticadenas más grandes, pues sus elementos son incomparables dos a dos, es decir, que no se puede decir nada respecto a 1 y 10, pues no se les puede comparar por estar en diferentes cadenas.

El mínimo número de cadenas en P tal que su unión es el mismo conjunto P es $|C_1| = 3$.

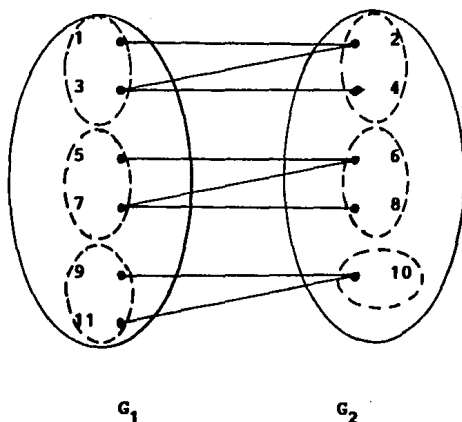
El número de elementos de la anticadena más grande en el conjunto P es $|C_2| = 3$, & $|C_1| = |C_2|$.

Nótese que cada cadena por ser una trayectoria dirigida, se puede descomponer en una gráfica bipartita.

La construcción de la gráfica bipartita de P en el ejemplo anterior, se puede ver en la siguiente figura.

De esta manera, se puede tener una gráfica bipartita: $G = (G_1, G_2)$.

G:



Si $G_1 = X$ & $G_2 = Y$, se puede aplicar el Teorema de Menger y se tendría que existen cinco XY --trayectorias ajenas $((1,2), (3,4), (5,6), (7,8), (9,10))$; y cada XY --conjunto separador (en este caso, los mismos conjuntos X & Y) tienen al menos cinco vértices.

El Teorema siguiente fué probado por Whitney [26] en 1932, y es una consecuencia del Teorema 2.2; para probar la "necesidad", no se debe olvidar que u & v pueden estar unidos por una arista de G .

Def. Una gráfica es k --conexa, si tiene al menos $k+1$ vértices, y si cada dos vértices distintos u & v están conectados por al menos k uv --trayectorias internamente ajenas dos a dos.

Teor. 2.4 (Teorema de Menger--Whitney)

Una gráfica con al menos $k+1$ vértices es k --conexa si y sólo si, ésta no se desconecta al quitar un subconjunto de m vértices, donde $m \leq k-1$ (es decir, al quitar $k-1$ ó menos vértices).

Dm.

" $\Rightarrow$ " Sea G una gráfica con al menos $k+1$ vértices tal que es k --conexa. Se procedera por Reducción al Absurdo (es decir, suponiendo falso el resultado y encontrando una contradicción).

Supóngase que G se desconecta al quitar $m(\leq k-1)$ vértices.

Sea $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ un subconjunto de vértices tal que $G-S$ es desconexa, entonces existen u & v en $G-S$ tal que no existe una uv --trayectoria en $G-S$.

Por el Teorema 2.2, u no $\text{ady}_G v$; y como G es k --conexa, existen k uv --trayectorias internamente ajenas dos a dos.

Aplicando el Teorema 2.2, sigue habiendo una uv --trayectoria en $G-S$! (ya que $G-S$ es desconexa).

Por lo tanto $G-S$ es conexa

c.s.q.d.

" $\Leftarrow$ " (i) si u no $\text{ady}_G v$

Sean u & v tal que u no $\text{ady}_G v$; como G no se desconecta al quitar un subconjunto de m vértices (con $m \leq k-1$), entonces sigue habiendo una uv --trayectoria en G al quitar menos de k vértices de $G - \{u, v\}$.

Por el Teorema 2.2, existen k uv --trayectorias en G tal que son internamente ajenas dos a dos; es decir, G es k --conexa.

(ii) si $u \text{ ady}_G v$

Sea $G' = G - uv$, nótese que por hipótesis, G' no se desconecta al quitar menos de $k-1$ vértices.

Sigue habiendo una uv --trayectoria en G' al quitar cualesquiera $\leq (k-1)$ vértices de $G' - \{u, v\}$.

Y como u no $\text{ady}_G v$ (y también por el Teorema 2.2), existen $k-1$ uv --trayectorias en G internamente ajenas dos a dos; por lo tanto, para todo par de vértices u & v de G , existen k uv --trayectorias internamente ajenas dos a dos.

Por lo tanto, G es k --conexa.

c.s.q.d.

Un ejemplo del Teorema 2.4:



$|V| = 5 = 4 + 1 \therefore k = 4$, es decir, esta gráfica es 5--conexa.

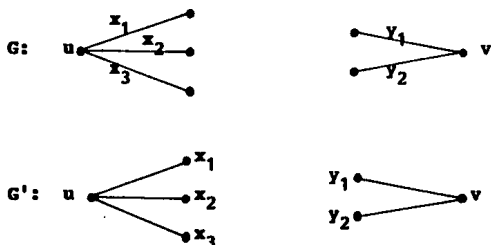
$$\leq k-1 = 3$$

Al quitar tres ó menos vértices, la gráfica sigue siendo conexa, y viceversa.

El siguiente resultado puede ser probado adaptándose a cualesquiera de las puebas del Teorema 2.1. También puede ser demostrado por las construcciones básicas de Teoría de Gráficas, al ser equivalentes ambos Teoremas: el de Menger y el de flujo máx.--cortadura mín. (en el sentido de que cada uno puede ser usado para probar el otro).

Este resultado también se sigue directamente del Teorema 2.2, al tomar G' como la gráfica de líneas de G unión los

vértices u & v , es decir, $G' = L(G) \cup \{u,v\} \cup \{ux/ x \text{ corresponde a una arista de } G, \text{ incidente en } u\} \cup \{vy/ y \text{ corresponde a una arista de } G, \text{ incidente en } v\}$:



Teor. 2.5 Si u & v son vértices en una gráfica ó digráfica G , entonces u está conectado a v por k trayectorias ajenas en aristas si y sólo si, u sigue estando conectado a v por una trayectoria al quitar cualesquiera m aristas, con $m \leq k-1$.

Un ejemplo de este Teorema:



$k = 4$ uv --trayectorias ajenas en aristas.

$m \leq k-1 = 3$; al quitar tres ó menos aristas de la gráfica, se sigue teniendo una uv --trayectorias, y viceversa.

Def. Una gráfica es k --conexa por aristas, si cada dos vértices distintos están conectados por al menos k trayectorias ajenas en aristas.

Teor. 2.6 Una gráfica G es k --conexa por aristas si y sólo si, esta no se puede desconectar al quitar un conjunto de m aristas, con $m \leq k-1$.

Dm.

" $\Rightarrow$ " Sea G una gráfica k --conexa por aristas. Entonces, para cualesquiera vértices distintos u & v de G , existen k trayectorias ajenas en aristas, entonces u sigue estando conectado a v por una trayectoria al quitar menos de $m \leq k-1$ aristas (ésto por el Teorema 2.5.).

c.s.q.d.

" $\Leftarrow$ " Sea G tal que G sigue siendo conexa al quitar un conjunto de m aristas (con $m \leq k-1$), entonces u sigue conectado a v por una trayectoria al quitar cualesquiera m aristas.

Por lo tanto, del Teorema 2.5 existen k uv --trayectorias ajenas en aristas.

Por lo tanto, G es k --conexa por aristas.

c.s.q.d.

Un ejemplo de este Teorema:



G es 2--conexa por aristas.

Al quitar $m = 1$ aristas, $G-u$ sigue siendo conexa, donde $u \in G$; y viceversa.

Teor. 2.7 Supóngase que X , Y , & Z son conjuntos de vértices (no necesariamente ajenos) en una gráfica ó digráfica G tal que Z es un XY --conjunto separador en G . Supóngase además, que para cualesquiera k vértices de Z que se quiten, sigue habiendo una XY --trayectoria en G . Entonces, existen k XY --trayectorias en G tal que son ajenas dos a dos en la intersección con Z (esto és, que para dos XY --trayectorias, éstas no tienen vértices en común de Z).

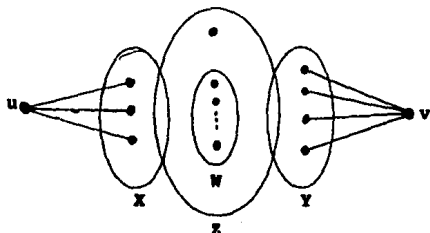
Este Teorema probado por Dirac [5] en 1963, se sigue aplicando el Teorema de Menger para una nueva gráfica G' , obtenida a partir de G : tomando k copias de cada uno de los vértices que no están en Z y una copia de cada uno de los vértices de Z , con aristas múltiples apropiadamente. Es claro que el Teorema 2.7 incluye al Teorema de Menger como un caso especial cuando $Z = V(G)$. Así, usando el Teorema de Menger para la gráfica modificada (G'), resulta que el Teorema 2.7 es estrictamente más fuerte que el Teorema de Menger, es decir, que el Teorema de Menger es un caso particular del Teorema 2.7 cuando $X=u$ & $Y=v$:



Esta propiedad de que un Teorema produzca resultados más fuertes que los cuyos mismos (auto--refinamiento), se expresa algunas veces diciendo que el Teorema se auto--refina. Justamente se ha visto que, en este sentido el Teorema de Menger es auto--refinable (se auto--refina por sí mismo); y también se podrá apreciar ésto en capítulos posteriores para el Teorema de Hall (Teorema 4.5), y para el Teorema de Tutte (Teorema 5.2).

Este Teorema también se puede demostrar al tomar la gráfica unida a dos vértices u & v tal que los vértices de X estén unidos a u y los de Y a v . Aplicando el Teorema de Menger y suponiendo que Z tiene exactamente k vértices, pues con k se separan a X & Y (si hay más vértices en Z , se quitan hasta tener k).

De ésta forma se tendría:



Z es un uv --conjunto separador, & $|W| = k$

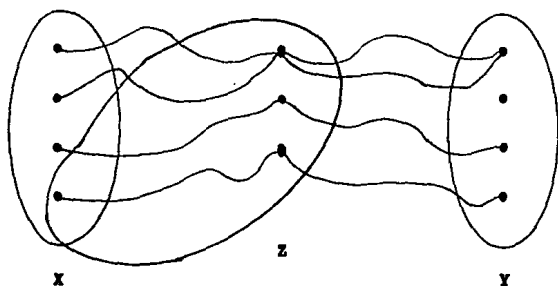
Para cualesquier k vértices de Z que se quiten, sigue habiendo una uv --trayectoria.

Entonces, por el Teorema 2.2, existen n uv --trayectorias en G tal que son internamente ajenas dos a dos en la intersección con Z (pues los vértices que se quitaron fueron de Z , donde $n > k$).

Así, existen k uv --trayectorias en G tal que son ajenas dos a dos en la intersección con Z .

Ejemplo del Teorema 2.7:

Teniendo la siguiente figura, se tiene que si se quitan $k=2$ vértices de Z , sigue habiendo una XY --trayectorias en G .



Por lo tanto, existen dos XY --trayectorias tal que son
ajenas dos a dos en la intersección con Z .

3.- TEOREMA DE FLUJO MAXIMO--CORTADURA MINIMA

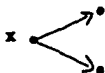
El valor del flujo máximo que se puede enviar a través de una gráfica entre dos vértices específicos es igual a la capacidad de la cortadura mínima; esto se establece en el -- Teorema de Flujo Máximo--Cortadura Mínima, parte principal en esta sección, y que se demostrará en forma algorítmica. -

Seguidamente se ven dos Corolarios: el primero da la restricción para saber cuando un flujo ya alcanzó su valor máximo, y el segundo es acerca de la integridad del flujo.

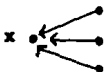
En este capítulo se seguirá la notación usada por Ford y Fulkerson [8]; teniendo las siguientes definiciones:

Sea D una digráfica, se denotará por:

$A(x)$ ("after x " = después de x), al conjunto de vértices para los cuales x está unido por un arco, es decir, el conjunto de vértices que son adyacentes a x , donde las flechas llegan a x :



$B(x)$ ("before x " = antes de x) al conjunto de vértices que están unidos a x por un arco, es decir, el conjunto de vértices que son adyacentes a x , donde las flechas llegan a x :



Se asignará a cada arco xy un número real no negativo $c(xy)$ que se llamará la **capacidad del arco xy** : así, c puede ser pensada como una función de valores reales sobre $A(D)$, donde $A(D)$ es el conjunto de arcos (flechas) de D .

Sean s & t dos vértices de D , llamados respectivamente la **fuerza** (vértice de ingrado cero), y el **pozo ó sumidero** (vértice de exgrado cero); un **flujo f** con valor $v(f)$ de s a t , es una función $f: A(D) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para todo vértice $x \in D$ se tiene lo siguiente:

$$F(x) = \sum_{y \in A(x)} f(xy) - \sum_{y \in B(x)} f(yx) = \begin{cases} v(f) & \text{si } x=s \\ 0 & \text{si } x \neq s \text{ ó } x \neq t \\ -v(f) & \text{si } x=t \end{cases}$$

Esto es, el flujo en un vértice x ($F(x)$), es igual a la suma del flujo que sale menos la suma del flujo que entra a ese vértice x (estas igualdades se podrán apreciar con más - detalle en los posteriores ejemplos).

También se debe cumplir que: $0 \leq f(xy) \leq c(xy)$, para todo arco $xy \in D$, es decir, $f(xy) \geq 0$, pues no se puede enviar un flujo negativo; y $f(xy) \leq c(xy)$, ya que el flujo que se - puede enviar no puede exceder la capacidad que se tenga en cada arco xy .

$F(x)$ es llamada la red del flujo que sale del vértice x . Se dirá que f & $c \in \mathbb{Z}$, si $F(xy)$ & $c(xy) \in \mathbb{Z}$, para todo - arco $xy \in D$.

Sean X & Y conjuntos de vértices de D tal que $X \cup Y = V(D)$ & $X \cap Y = \emptyset$, con $s \in X$ & $t \in Y$. Sea $\langle X, Y \rangle$ el conjunto de arcos que unen un vértice de X con uno de Y , así, este conjunto $\langle X, Y \rangle$ es llamado la cortadura en D que separa a s & t , y su capacidad es:

$$c(X, Y) = \sum_{xy \in \langle X, Y \rangle} c(xy), \text{ es decir, la suma de los flujos}$$

en los arcos xy que están en la cortadura $\langle X, Y \rangle$

Si S & T son conjuntos de vértices, se definirá $f(S, T)$ (el flujo que vá del conjunto S al conjunto T) así:

$$f(S, T) = \sum_{\substack{x \in S \\ \& y \in T \\ \rightarrow xy \in A(D)}} f(xy), \text{ es decir, es la suma de los flu-}$$

jos en los arcos $xy \in A(D)$ tal que $x \in S$ & $y \in T$.

El siguiente resultado se puede obtener a partir del Teorema de Menger como se mencionó en el capítulo previo (Teorema 2.5), sin embargo, se probará por el método algorítmico de Ford y Fulkerson.

Teor. 3.1 (Teorema de flujo máx.--cortadura mín.)

El valor del flujo máximo, $v(f)$, tomado sobre todos los flujos f de s a t , es igual a la capacidad de la cortadura mínima $c(X,Y)$ tomada sobre todas las cortaduras $\langle X,Y \rangle$ que separan a s & t .

Dm. (Ford y Fulkerson [7], 1956)

Se probará primero que $v(f) \leq c(X,Y)$ para todo flujo f , y para toda cortadura $\langle X,Y \rangle$, es decir, que la capacidad en cualquier cortadura no puede exceder al valor del flujo).

Sea f un flujo y $\langle X,Y \rangle$ una cortadura. Se verá que: $v(f) = f(X,Y) - f(Y,X)$, es decir, que el valor del flujo es igual a todos los flujos que salen (que van de X a Y), menos todos los flujos que entran (los que van de Y a X).

Nótese que: $\sum_{x \in X} F(x)$, es la suma de los flujos en la red para el vértice x .

$f(x, V(D))$ es el flujo que sale de x a los vértices de D .

$f(V(D), x)$ será el flujo que llega a x a partir de los vértices de D .

$$v(f) = \sum_{x \in X} F(x) = \sum_{x \in X} [f(x, V(D)) - f(V(D), x)]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x \in X} f(x, v(D)) - \sum_{x \in X} (v(D), x) \\
&= f(x, v(D)) - f(v(D), x); \text{ como } v(D) = X \cup Y, \\
&= f(x, X \cup Y) - f(X \cup Y, x); \text{ como en conjuntos se tiene que:} \\
&\quad X \cup Y = (X \cup Y) - (X \cap Y), \\
&= f(x, (X \cup Y) - (X \cap Y)) - f((X \cup Y) - (X \cap Y), x) \\
&= f(x, X) + f(x, Y) - f(x, X \cap Y) \\
&\quad - [f(X, X) + f(Y, X) - f(X \cap Y, X)]; \text{ como } X \cap Y = \emptyset \Rightarrow \\
&\quad \quad \quad f(X, X \cap Y) = f(X \cap Y, X) = 0, \\
&= f(x, X) + f(x, Y) - f(x, X) - f(Y, X) \\
&= f(x, Y) - f(Y, X)
\end{aligned}$$

Puesto que $f(X, Y) \leq c(X, Y)$ & $f(Y, X) \geq 0$, se tiene que:
 $v(f) = f(X, Y) - f(Y, X) \leq c(X, Y) - f(Y, X) \leq c(X, Y)$.

Por lo tanto, $v(f) \leq c(X, Y)$.

Se dará un algoritmo para la construcción del flujo y de la cortadura, cuando la función de capacidad es un entero. Si alguna de las capacidades no son enteras (que sean racionales) se pueden multiplicar todas las capacidades por el mínimo común denominador de estas fracciones, y así, proceder con el algoritmo.

Así, al suponer que las capacidades de los arcos son todas números enteros, el algoritmo empieza escogiendo un flujo f_v de valor v (por ejemplo, el flujo de valor cero, que en cada uno de sus arcos tiene flujo cero).

La idea del algoritmo es construir una cortadura, y exhibir un flujo que tome el valor de la capacidad en esa cortadura, del tal forma que el flujo sea máximo y la cortadura sea mínima.

Algoritmo: Formar recursivamente el conjunto de vértices X , de la siguiente manera:

(a) $s \in X$

(b) si $x \in X$, y se cumple que: $f_v(xy) < c(xy)$ ó $f_v(xy) > 0$
 $\Rightarrow y \in X$, y se pueden tener dos casos a considerar:

caso 1: si $t \in X$

Por la construcción de X , hay una trayectoria no dirigida P de s a t , donde $P = [s=x_0, a_1, x_1, a_2, \dots, a_n, x_n=t]$ tal que todo vértice $a_i \in P$, con $i = \overline{1, n}$; y se tiene:

(i) $a_i = x_{i-1}x_i \in D$, cuando $f_v(a_i) < c(a_i)$; es decir, una arista a_i que va en el sentido correcto de la trayectoria P y tal que su flujo sea menor que su capacidad.

(ii) $a_i = x_i x_{i-1} \in D$, cuando $f_v(a_i) > 0$; es decir, una arista a_i que va en sentido inverso a la trayectoria P y tal que tenga un flujo positivo.

De esta manera, se aumenta el flujo en una unidad para toda $a_i = x_{i-1}x_i$, y se decrementará el flujo en una unidad para toda arista $a_i = x_i x_{i-1}$; así, se obtendrá un nuevo flujo con valor $v+1$. Hacer estos cambios y regresar a los pasos iterativos con el nuevo flujo f_{v+1} .

caso 2: si $t \notin X$

Definir $Y = V(D) - X \Rightarrow t \in Y$, & $\langle X, Y \rangle$ es una cortadura que separa a s & t . Si $x \in X$ & $y \in Y$, entonces: - -
 $f_v(xy) = c(xy)$, si $xy \in A(D)$; & $f_v(yx) = 0$ si $yx \in A(D)$; pues de otro modo, y tendría que haberse puesto en X . De esto, se sigue que $f_v(X, Y) = c(X, Y)$ & $f_v(Y, X) = 0$. Así: - - -
 $v = v(f_v) = f_v(X, Y) - f_v(Y, X) = c(X, Y)$.

Y el algoritmo termina exhibiendo un flujo máximo y una cortadura mínima.

c.s.q.d.

Se dice que P es una trayectoria no dirigida de s a t , si es una trayectoria con flujo aumentante con respecto a f , es decir, si $f < c$ sobre todas las aristas que van en el sentido de P ; y si $f > 0$ sobre todas las aristas que van en sentido inverso a P .

Se verán unos ejemplos, pero antes se definirá la forma de trabajar sobre una red: cómo se indicarán el flujo y la capacidad, cómo se etiquetan (marcan) los vértices que se van usando en una trayectoria elegida por la cual se mandará el flujo, etc.

En cada arco xy hay un paréntesis con dos números, indicando el flujo y la capacidad respectivamente en ese arco: (f, c) .

Como lo indica el algoritmo, se van buscando trayectorias no dirigidas de s a t . Respecto a cada trayectoria de estas, se van a ir etiquetando cada uno de sus vértices de la siguiente manera: (ix, ξ) , donde x es el vértice anterior al que se está etiquetando en cada trayectoria; se le pondrá "+", si el arco va en el sentido de esa trayectoria, y "-", si el arco va en sentido contrario a la trayectoria: ξ es el mínimo flujo que se puede mandar a través de ese arco tal que también se pueda pasar por los arcos anteriores en esa trayectoria.

Al terminar la etiquetación, se aumentará el flujo sobre esa trayectoria; no olvidando que para las aristas en el sentido de la trayectoria se aumenta el flujo, y para las aristas que van en sentido contrario se decrementará el flujo.

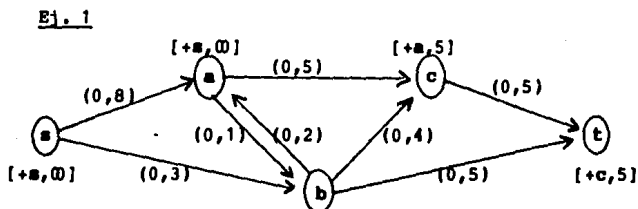
El algoritmo menciona que se incremente (ó bien, decremente) el flujo en una unidad, pero si es posible aumentarlo en más unidades, se ahorrará el pasar por esa trayectoria más de una vez ó no se tendrían que buscar más trayectorias no dirigidas.

Con paréntesis remarcados (más gruesos), se indicará que el correspondiente arco ya está saturado, es decir, que ya no se puede enviar flujo a través de él; salvo que se regrese - flujo.

Se continúa de esta forma hasta no poder incrementar el flujo (hasta no poder encontrar más trayectorias no dirigidas).

La última etiquetación indicará cómo se va a determinar la cortadura (con la observación de que esta última etiquetación no llegará hasta t); se pondrán en X a los vértices que se pudieron etiquetar y en Y los vértices que ya no se pudieron etiquetar; y se contruirá la cortadura $\langle X, Y \rangle = \{(x_i, x_j)\}$, donde, x_i es un vértice etiquetado, x_j es un vértice no etiquetado, y $(x_i, x_j) \in A(D)$.

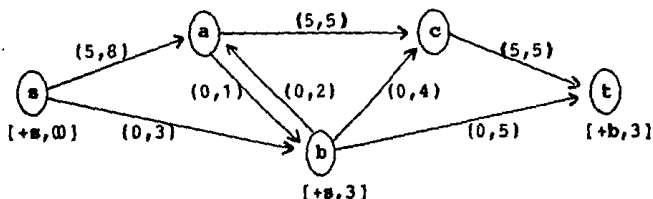
La capacidad de la cortadura, $c(X, Y)$, será la suma de las capacidades en los arcos de la cortadura $\langle X, Y \rangle$. Y el flujo máximo será el flujo total que llega a t (la suma de todos los flujos que llegan a t).



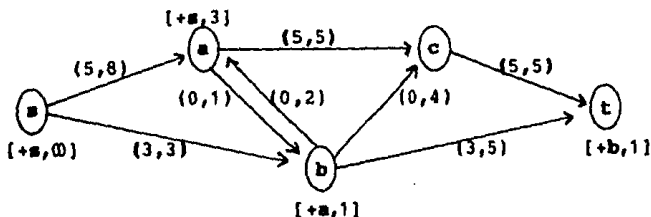
La etiqueta de s siempre será $[+s, \infty]$: $+s$, pues no hay vértices de donde etiquetarlo (es la fuente, y de aquí saldrá todo el flujo); y lleva el " ∞ " porque de s se puede mandar todo el flujo que se desee.

La trayectoria no dirigida que se eligió (puede ser cualquiera) es $P = \{s, a, c, t\}$, y el flujo que se puede enviar a través de ella es de cinco unidades (indicado en la etiqueta de t).

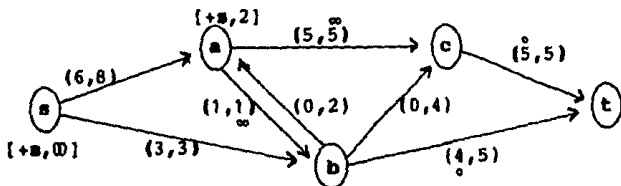
Se incrementa el flujo en 5 unidades a través de P , se borran etiquetas y se comienza de nuevo, buscando una nueva trayectoria no dirigida.



$P = \{s, b, t\}$, se aumenta el flujo en 3 unidades; se borran etiquetas y se busca una nueva trayectoria no dirigida.



$P = \{s, a, b, t\}$, se aumenta el flujo en una unidad.



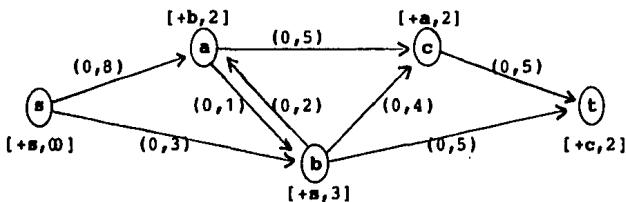
Ya no se puede seguir etiquetando, se ha terminado.

$v(f) = 5+4 = 9 =$ flujo máximo (indicado con "o")

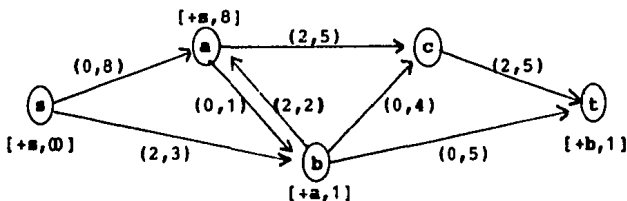
$X = \{s, a\}$ & $Y = A(D) - X = \{b, c, t\} \Rightarrow \langle X, Y \rangle = \{(s, b), (a, b), (a, c)\}$.

$c(X, Y) = 3+1+5 = 9 = v(f)$ (indicado en la red con "o")

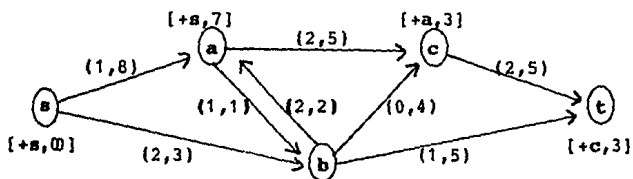
Ej. 2 (el mismo ejemplo uno, pero al tomar otras trayectorias no dirigidas se tienen etiquetas negativas).



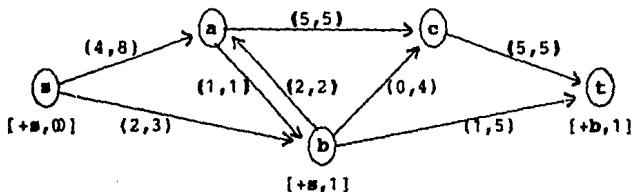
$P = \{s, b, c, a, t\}$, se incrementa el flujo en dos.



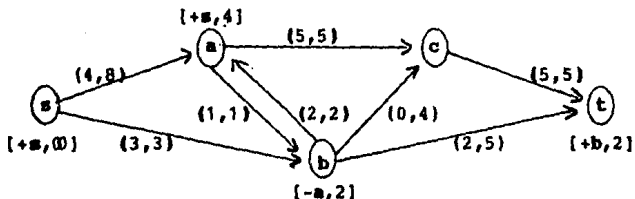
$P = \{s, a, b, t\}$, se incrementa el flujo en uno.



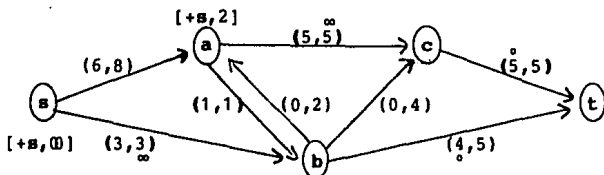
$P = \{s, a, c, t\}$, se incrementa el flujo en tres.



$P = \{s, b, t\}$, se incrementa en una unidad el flujo.



$P = \{s, a, b, t\}$, se incrementa el flujo en dos unidades para todos los arcos de P , excepto en el arco ba porque va en sentido contrario a la trayectoria P .

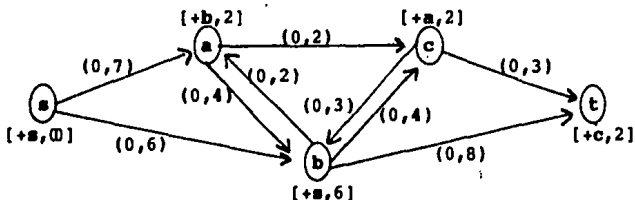


$v(f) = 5+4 = 9 = \text{flujo máximo}$ (indicado con " ∞ ")

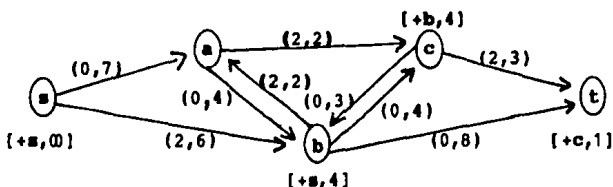
$X = \{s, a\}$ & $Y = \{b, c, t\} \Rightarrow \langle X, Y \rangle = \{(s, b), (a, b), (a, c), \}$.

$c(X, Y) = 3+1+5 = 9 = v(f)$ (indicado con " ∞ ")

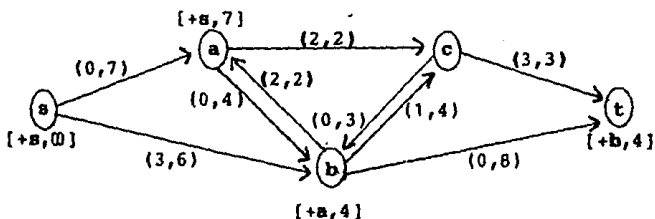
Ej. 3 (un ejemplo donde se usan etiquetas negativas, y también las hay para la construcción de la cortadura).



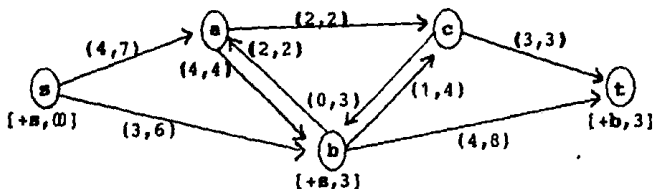
$P = \{s, b, a, c, t\}$, se incrementa el flujo en dos.



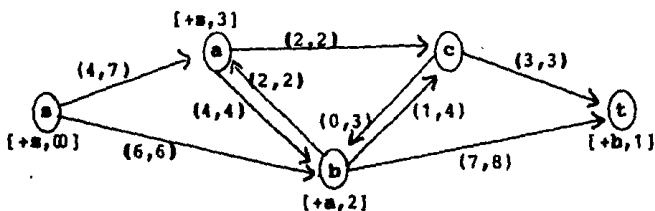
$P = \{s, b, c, t\}$, se incrementa el flujo en uno.



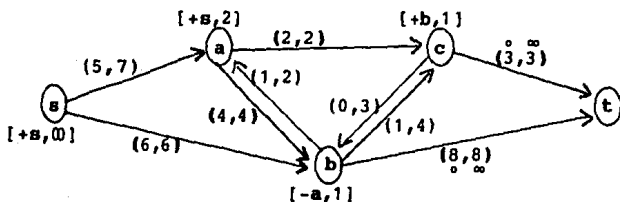
$P = \{s, a, b, t\}$, se incrementa en cuatro unidades el flujo.



$P = \{s, b, t\}$, se incrementa el flujo en tres.



$P = \{s, a, b, t\}$, se incrementa el flujo en uno a través de P , excepto en el arco ba (en el cual se decrementará el flujo en uno).



$v(f) = 3+8 = 11 = \text{flujo máximo}$ (indicado con " ∞ ").

$X = \{s, a, b, c\}, Y = \{t\} \Rightarrow \langle X, Y \rangle = \{(b, t), (c, t)\}$

$c(X, Y) = 8+3 = 11 = v(f)$ (indicado con " ∞ ").

Corolario 3.2 Un flujo f tiene valor máximo si y sólo si no hay una trayectoria no dirigida (aumentante) respecto a f .

Dm.

" $\Rightarrow$ " (Dm. por negación, es decir, si $p \Rightarrow q$ entonces, P.D. que $\sim q \Rightarrow \sim p$)

Supóngase que hay una trayectoria no dirigida P tal que $P = (s=x_0, a_1, x_1, \dots, a_n, x_n=t)$

(i) $0 = f(a_1) < c(a_1) \quad \forall a_i = (x_{i-1}, x_i)$; puesto que todavía está la trayectoria no dirigida P (entonces, se tiene la desigualdad estricta).

(ii) $f(a_1) > 0 \quad \forall a_i = (x_i, x_{i-1})$

P.D. f no es máximo.

Sean:

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \min. \{c(a_1) - f(a_1)\} & \forall a_i = (x_{i-1}, x_i) \\ 1 & \text{si } \{a_i \in P / a_i = (x_{i-1}, x_i)\} \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} \min. \{f(a_1)\} & \forall a_1 = (x_1, x_{i-1}) \\ 1 & \text{si } \{a_1 \in P / a_1 = (x_1, x_{i-1})\} = \emptyset \end{cases}$$

Sea $\varepsilon = \min. \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, y sea f^* un nuevo flujo.

$$f^*: A(D) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f^*(a) = f(a) \quad \forall a \notin P$$

$$f(a_1) = f(a_1) + \varepsilon, \quad \forall a_1 = (x_{i-1}, x_i) \in P$$

$$f(a_i) = f(a_i) - \varepsilon, \quad \forall a_i = (x_i, x_{i+1}) \in P$$

Se verá primero, que f^* es un flujo aumentante, al checar que efectivamente es un flujo.

1.- $f^*(a) \geq 0$, ya que se tiene a P (una trayectoria no dirigida)

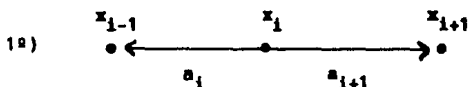
2.- Se checará que $f^*(X, V(D)) = f^*(V(D), X)$, que el flujo que sale del conjunto de vértices X es igual al flujo que entra a este mismo conjunto;

$$x \in \{V(D) - \{s, t\}\}:$$

$$\cdot \text{ Si } x \notin P, \quad f^*(X, V(D)) = f(X, V(D)) = f(V(D), X) = f^*(V(D), X)$$

$$\text{Por lo tanto, } f^*(X, V(D)) = f^*(V(D), X)$$

\cdot Si $x \in P$ tal que $x \neq s$ & $x \neq t$, se tendrán cuatro casos a considerar, según el sentido de los arcos:



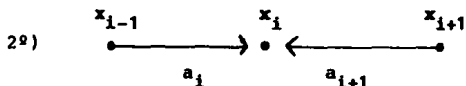
$$f^*(a_i) = f(a_i) - \varepsilon$$

$$f^*(a_{i+1}) = f(a_{i+1}) + \varepsilon$$

$$f^*(X, V(D)) = f[(X, V(D)) - \varepsilon + \varepsilon] = f(X, V(D))$$

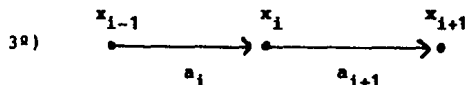
$$\text{y } f^*(V(D), X) = f(V(D), X)$$

$$\text{Por lo tanto, } f^*(V(D), X) = f^*(X, V(D))$$



$$\begin{aligned}
 f^*(X, V(D)) &= f(X, V(D)) \\
 \left. \begin{aligned} f(a_i) &= f(a_i) + \xi \\ f(a_{i+1}) &= f(a_{i+1}) - \xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow & \begin{aligned} f^*(V(D), X) &= f(V(D), X) + \xi - \xi \\ &= f(V(D), X) \end{aligned}
 \end{aligned}$$

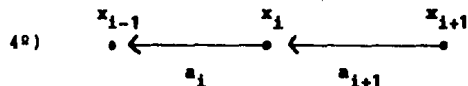
Por lo tanto, $f^*(V(D), X) = f^*(X, V(D))$



$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} f^*(a_i) &= f(a_i) + \xi \\ f^*(a_{i+1}) &= f(a_{i+1}) + \xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow & \begin{aligned} f^*(V(D), X) &= f(V(D), X) + \xi \\ f^*(X, V(D)) &= f(X, V(D)) + \xi \end{aligned}
 \end{aligned}$$

como $f(V(D), X) = f(X, V(D)) \Rightarrow f^*(V(D), X) = f^*(X, V(D))$

Por lo tanto, $f^*(V(D), X) = f^*(X, V(D))$



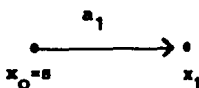
$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} f^*(a_i) &= f(a_i) - \xi \\ f^*(a_{i+1}) &= f(a_{i+1}) - \xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow & \begin{aligned} f^*(V(D), X) &= f(V(D), X) - \xi \\ f^*(X, V(D)) &= f(X, V(D)) - \xi \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^*(V(D), X) = f^*(X, V(D))$

Ahora se verá cómo queda el nuevo flujo: f^* es un flujo tal que $v(f^*) = f^*(s, V(D)) - f^*(V(D), s)$.

Habrà que fijarse precisamente en la fuente s , pues es de allí donde se aumentará el flujo (si es que se puede incrementar). Se tienen dos casos a considerar:

caso 1:



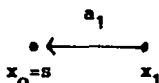
$$f^*(a_1) = f(a_1) + \xi$$

$$f^*(s, V(D)) = f(s, V(D)) + \xi \quad \& \quad f^*(V(D), s) = f(V(D), s),$$

$$\text{entonces } v(f^*) = f(s, V(D)) + \xi - f(V(D), s) = v(f) + \xi > v(f)$$

Por lo tanto, $v(f^*) > v(f)$

caso 2:



$$f^*(a_1) = f(a_1) - \xi$$

$$f^*(s, V(D)) = f(s, V(D)) \quad \& \quad f^*(V(D), s) = f(V(D), s) - \xi$$

$$\Rightarrow v(f^*) = f(s, V(D)) - [f(V(D), s) - \xi]$$

$$= f(s, V(D)) - f(V(D), s) + \xi > v(f)$$

Por lo tanto, $v(f^*) > v(f)$

Así, se ha probado que dado un flujo f en una red que tiene un trayectoria no dirigida, f no es máximo; es decir, si f es máximo entonces la red no tiene trayectorias no dirigidas.

c.s.q.d.

" $\Leftarrow$ " Sea f un flujo que no tiene trayectorias aumentantes.

P.D. f es máximo.

Sea $K = \langle X, Y \rangle$ y $X = \{s\} \cup \{z \in V(D) / \text{existe una trayectoria aumentante}\}$

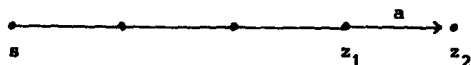
$t \notin X$, pues K es una cortadura que separa a s de t , por lo tanto $t \in Y$.

$$\text{P.D. (i) } f(a) = c(a) \quad \forall a \in \langle X, Y \rangle$$

$$(ii) \quad f(a) = 0 \quad \forall a \in \langle Y, X \rangle$$

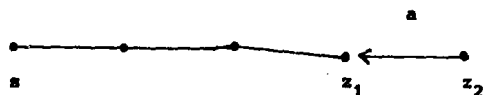
$$(i) \quad a = (z_1, z_2) \cdot \gamma \cdot z_1 \in X \text{ \& } z_2 \in Y$$

P es una trayectoria aumentante de s a z_1 :



Entonces $f(a) = c(a)$, ya que f no tiene trayectorias aumentantes, es decir, el arco a que sigue de P , está saturado.

$$(ii) \quad a = (z_2, z_1) \cdot \gamma \cdot z_1 \in X \text{ \& } z_2 \in Y$$



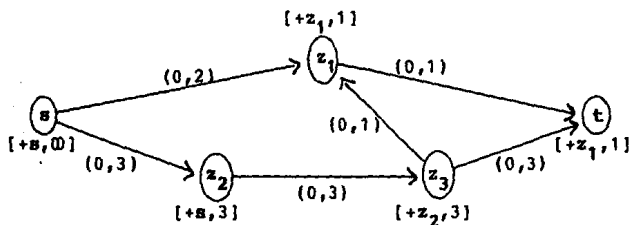
$$\text{Entonces, } f(a) = 0$$

El arco a que precede de P (trayectoria aumentante de s a z_1 está en sentido inverso a P), tiene flujo cero, pues el ir en sentido contrario respecto a P significa que no se puede regresar flujo por ese arco para mandarlo por otra trayectoria aumentante y esto se debe a que f es un flujo sin trayectorias aumentantes.

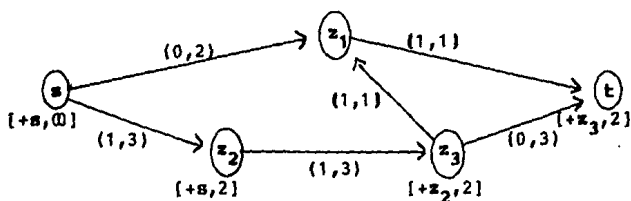
Por lo tanto, f es un flujo máximo

c.s.q.d.

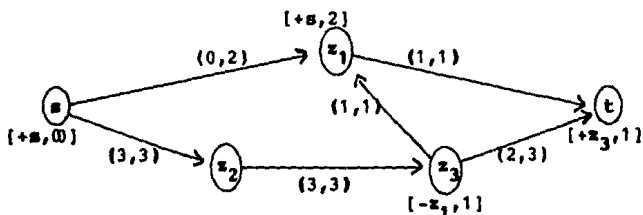
Se verá un ejemplo que ilustre este Corolario 3.2, aplicando el algoritmo a la siguiente red:



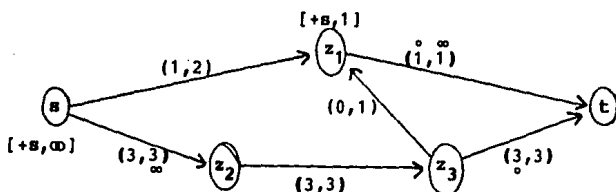
$P = \{s, z_2, z_3, z_1, t\}$, se incrementa el flujo en uno.



$P = \{s, z_2, z_3, t\}$, se incrementa el flujo en dos.



$P = \{s, z_1, z_3, t\}$, se incrementa el flujo en uno.



$v(f) = 1+3 = 4 =$ flujo máximo (indicado con "o")

$X = \{s, z_1\}$ & $Y = \{z_2, z_3, t\}$

Por lo tanto, $\langle X, Y \rangle = \{(s, z_2), (z_1, t)\}$

No se toma el arco (z_3, z_1) porque va en sentido contrario, puesto que: $\langle X, Y \rangle = \{(x, y) / x \in X \text{ \& } y \in Y\}$; y en este caso $z_1 \in X$ & $z_3 \in Y$.

Así, $c(X, Y) = 3+1 = 4 = v(f)$ (indicado con "o")

Con este ejemplo se verá que pasa en el Corolario 3.2:

(i) $a = (z_1, t)$ $\Rightarrow z_1 \in X$ & $t \in Y$

$P = \{s, z_1\}$ es una trayectoria aumentante de s a z_1 .

$f(a) = 1 = c(a)$, ya que no hay trayectorias aumentantes; este arco a es la continuación a la trayectoria P y a va en el sentido de P , es decir, a está saturado (esto es, su capacidad es igual a su flujo).

(ii) $a = (z_3, z_1)$, con $z_1 \in X$ & $z_3 \in Y$

$P = \{s, z_1\}$ es una trayectoria aumentante de s a z_1 ; a es el arco que es la continuación de P tal que a está en el sentido inverso respecto a P .

$f(a) = 0$, ya que no se puede regresar flujo a través de a para mandarlo por alguna otra trayectoria que continúe a partir de P y tal que el siguiente arco sea precisamente a , esto se debe a que no hay trayectorias aumentantes.

Corolario 3.3 (Teorema de Integridad)

Si c es un número entero, entonces existe un flujo f de valor máximo que también es un número entero.

La prueba a este Corolario, se sigue del mismo algoritmo, pues todas las capacidades que se manejan son números enteros, de ésta forma, se obtiene un flujo máximo que también será un número entero.

4.- ACOPLAMIENTOS EN GRAFICAS BIPARTITAS

Este capítulo presenta Teoremas minimax en Gráficas Bipartitas, el primer resultado sobresaliente es el Teorema de König, estableciendo que precisamente en Gráficas Bipartitas, el número de independencia por aristas ($\nu(G)$) es igual al número de cubrimiento por vértices ($\tau(G)$).

Seguidamente, trabajando con matríces se enuncia el Teorema de König--Egerváry; haciendo la observación de que éste, es una redefinición del Teorema de König, donde tal matriz (la matriz a trabajar) será la de adyacencia de la Gráfica Bipartita.

Otro resultado consecuente establece que en una Gráfica Bipartita, el número de cubrimiento por aristas (C_A) es igual al número de independencia por vértices (I_V), usando para su demostración el mismo Teorema de König y el de Gallai.

Se presenta el Teorema de König--Hall, el cual da una condición necesaria y suficiente para que una gráfica tenga un 1--factor. Se hace una extensión de este, se da una fórmula para encontrar $\nu(G)$, y se utiliza el algoritmo Húngaro.

Por último, se estudia el Problema de Asignación Optima y una de las condiciones para que una gráfica tenga un 1--factor.

Def. Sea G una gráfica:

El número de cubrimiento por vértices de G , $\tau(G)$, es el mínimo número de vértices de G tal que cada arista de G incide en al menos uno de ellos (es decir, que estos vértices cubran ó toquen a todas las aristas de G).

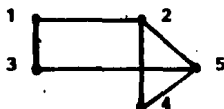
El número de cubrimiento por aristas de G , C_A , es el mínimo número de aristas de G tal que cubren a todos los vértices.

El número de independencia por vértices de G , I_V , es el máximo número de vértices de G tal que son adyacentes por pares.

Un acoplamiento en G , A , es un conjunto de aristas no adyacentes por pares de G .

El número de independencia por aristas de G , $\nu(G)$, es el máximo número de aristas en un acoplamiento (es decir, es el máximo número de aristas que no son adyacentes por pares).

Ej.



$$\tau(G) = \{5, 2, 1\}$$

$$C_A = \{(2, 5), (2, 4), (1, 3)\}$$

$$I_V = \{1, 5\}$$

$$A = \{(1, 3)\}$$

$$\nu(G) = \{(1, 3), (4, 5)\}$$

El resultado que sigue fué probado por König [12] en 1931, éste es justamente el Teorema de Menger aplicado a los conjuntos X & Y que particionan a la gráfica bipartita. Para su demostración se usará la prueba de Lovász, que se basa en la prueba elegante de Rado [25] para el Teorema de Hall en 1967.

Teor. 4.1 (Teorema de König)

Si G es una gráfica bipartita, entonces se cumple que: $\nu(G) = \tau(G)$.

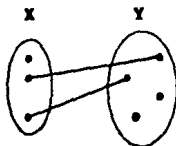
Dm. (Lovász [14], 1975)

Es claro que el máximo número de aristas en un acoplamiento no puede exceder al número de cubrimiento por vértices, es decir, que por cada arista en un acoplamiento, más aún en $\nu(G)$, se tiene un vértice de un cubrimiento por vértices).

Así, se tiene que $\nu(G) \leq \tau(G)$, esto se dá para toda gráfica (no necesariamente bipartita).

Para probar la igualdad, se usará inducción sobre el número de aristas de G .

Si la máxima valencia de G es uno:

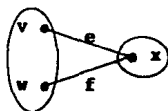


Entonces, $\nu(G) = \tau(G)$

Supóngase que algún vértice $x \in G$ tiene al menos dos aristas que inciden en él, sean e la arista tal que $x \text{ ady}_G v$ & f la arista tal que $x \text{ ady}_G w$:



es decir:



Si $\tau(G) = \tau(G-e)$ ó $\tau(G-f) = \tau(G)$, entonces el resultado se sigue por hipótesis de inducción.

P.D. que si $\tau(G-e) = \tau(G)$ ó $\tau(G-f) = \tau(G)$, entonces $\nu(G) = \tau(G)$.

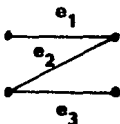
Supóngase que $\tau(G-e) = \tau(G)$

Por hipótesis de inducción, $\tau(G-e) = \nu(G-e)$

P.D. $\nu(G) = \tau(G)$

Supóngase que $\nu(G) \neq \tau(G)$, como $\nu(G) \leq \tau(G) \quad \forall G$,
 $\Rightarrow \nu(G) < \tau(G) = \tau(G-e) = \nu(G-e) \Rightarrow \nu(G) < \nu(G-e) !$

Nótese, que como $\nu(G)$ es el máximo número de aristas en un coplamiento, y al quitarle una arista a G , es decir, que al tener a $G' = G-e$, $\nu(G') = \nu(G-e)$ se decrementa ó a lo más queda igual a $\nu(G)$; gráficamente se vería así:



$$\nu(G) = 2$$

$$\nu(G') = \nu(G-e_1) = \nu(G-e_3) = 1 < \nu(G)$$

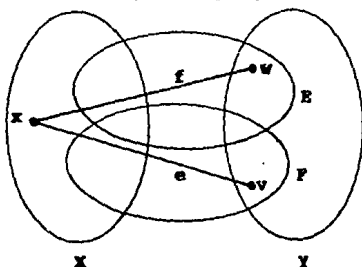
$$\nu(G') = \nu(G-e_2) = 2 = \nu(G)$$

Por lo tanto, $\nu(G) = \tau(G)$

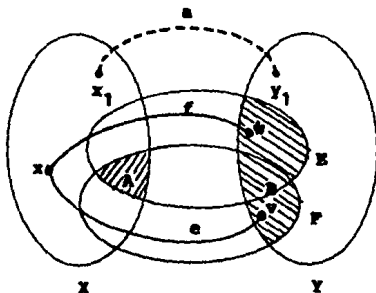
Supóngase que hay dos conjuntos E & F con $\tau(G)-1$ vértices que cubren a todas las aristas de G -e & G -f respectivamente.

Como $x \text{ ady}_G v$, es decir, $e=(x,v)$ & $x \text{ ady}_G w$, es decir, $f=(x,w)$, entonces $x \notin E$, $x \notin F$, $v \in F-E$ & $w \in E-F$, pues de no ser así, E ó F cubrirían a todas las aristas de G .

Sean X & Y dos conjuntos que particionan a G , con $x \in X$.



Nótese que : $|[(E \cap F) \cap X] \cup [(E \cap F) \cap Y]| \geq \tau(G)$
 & $|[(E \cup F \cup \{x\}) \cap X] \cup [(E \cap F) \cap Y]| \geq \tau(G)$, pues toda la parte de la izquierda en cada desigualdad cubre a todas las aristas de G , así que estas son mayor ó igual que $\tau(G)$, ya que $\tau(G)$ es el mínimo número de vértices que cubren a todas las aristas de G . Esto se puede ver en los siguientes conjuntos:



En este caso, como se cubren todas las aristas, también se da la desigualdad: $|C'| \geq \tau(G)$

Así, se tiene que $|C| \geq \tau(G)$ & $|C'| \geq \tau(G)$

Nótese que: $[(E \cap F) \cap X] + [(E \cap F) \cap Y] = E \cap F$, pues X & Y son la bipartición de G :



en M no hay vértices (solo aristas que pasan por allí, y que van de X a Y), donde M es la parte sombreada.

También se hace notar que: $[(E \cup F \cup \{x\}) \cap X] + \dots + [(E \cup F) \cap Y] = (E \cup F) + |\{x\}|$, pues X & Y son la bipartición de G) $= (E \cup F) + 1$

Así, sumando las desigualdades (escritas de nuevo) se tiene que:

$$\begin{aligned} & |[(E \cap F) \cap X] \cup [(E \cup F) \cap Y]| \geq \tau(G) \\ & \& |[(E \cup F \cup \{x\}) \cap X] \cup [(E \cap F) \cap Y]| \geq \tau(G) \end{aligned}$$

es decir, $|E \cap F| \geq \tau(G)$ & $|E \cup F| + 1 \geq \tau(G)$

Entonces, $|E \cap F| + |E \cup F| + 1 \geq 2\tau(G)$, se sabe que: $E \cup F = (E \cup F) - (E \cap F)$, entonces $|E \cap F| + |(E \cup F) - (E \cap F)| + 1 \geq 2\tau(G)$.

Por lo tanto $|E \cap F| + |E \cup F| - |E \cap F| + 1 \geq 2\tau(G)$, entonces $|E| + |F| + 1 \geq 2\tau(G)$.

Así, $|E| + |F| = 2\tau(G) - 1$, lo cual contradice la elección de E & F , puesto que: $|E| = \tau(G) - 1 = |F|$, entonces $|E| + |F| = 2[\tau(G) - 1] = 2\tau(G) - 2 < 2\tau(G) - 1 = |E| + |F|$!

Así que: $|E| + |F| \neq 2\tau(G) - 1$

Por lo tanto, $\nu(G) = \tau(G)$

c.s.q.d.

Se define una línea de una matriz como un renglón ó una columna de la matriz. En una matriz M se dice que una colección de líneas cubren a todos los elementos distintos de cero en M , si cada elemento distinto de cero está en una de las líneas. Dos elementos distintos de cero en M son llamados independientes, si no están en la misma línea.

La matriz de adyacencia es una matriz binaria (tal que sus elementos son ceros y unos); y en este caso también se puede pensar en la matriz de adyacencia, y cada elemento distinto de cero (que no necesariamente sean "unos", pues es para toda matriz) se puede pensar como una arista en la gráfica tal que tenga asignado un flujo, costo, etc.

Ej. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

M tiene tres elementos distintos de cero independientes; $\{a_{12}, a_{21}, a_{33}\}$; y tiene tres líneas que cubren a todos los elementos distintos de cero: $\{r_3, c_2, c_1\}$ ó $\{r_3, c_2, r_2\}$, donde: r_i = renglón i y c_i = columna i

Ej. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A tiene cuatro elementos distintos de cero independientes: $\{a_{13}, a_{21}, a_{24}, a_{45}\}$; y tiene cuatro líneas que cubren a todos los elementos distintos de cero: $\{r_2, r_4, c_3, c_6\}$.

Teor. 4.2 (Teorema de König--Egerváry, probado por König [12] & Egerváry [6] en 1931)

En cualquier matriz, el máximo número de elementos distintos de cero independientes es igual al mínimo número de líneas que cubren a todos los elementos distintos de cero.

Dm. Este Teorema 4.2 es precisamente la redefinición del Teorema 4.1, donde los renglones y las columnas de la matriz corresponden a los conjuntos que particionan a la gráfica bipartita.

Dada una matriz, se puede encontrar su gráfica correspondiente, y viceversa; donde esta matriz será la matriz de adyacencia (recordando que no necesariamente es binaria).

Un elemento distinto de cero en la matriz corresponde a una arista en la gráfica, una arista que incide en los vértices que están representados por el renglón y la columna de la matriz, es decir, si $m_{ij} \neq 0$ es un elemento de la matriz, entonces en su gráfica correspondiente hay una arista (i, j) , es decir, $i \text{ ady}_G j$. El número de elementos distintos de cero en la matriz corresponde al número de aristas en la gráfica.

El número de elementos distintos de cero independientes en la matriz corresponden a las aristas de un acoplamiento en la gráfica.

Así, el máximo número de elementos distintos de cero independientes en la matriz será el máximo número de aristas en un acoplamiento en la gráfica, $\nu(G)$, y el mínimo número de líneas que cubren a todos los elementos distintos de cero en la matriz será el mínimo número de vértices que cubren a todas las aristas, $\tau(G)$.

Por el Teorema 4.1, $\vee(G) = \tau(G)$. Por lo tanto, el máximo número de elementos distintos de cero independientes es igual al mínimo número de líneas que cubren a todos los elementos distintos de cero.

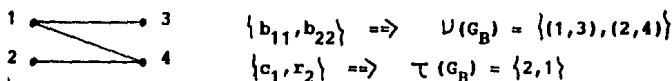
c.s.q.d

Ej.

$$B: \begin{matrix} & & 3 & & 4 \\ & 1 & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \\ & 2 & & & \end{matrix}$$

B tiene dos elementos distintos de cero independientes: $\{b_{11}, b_{22}\}$; y tiene dos líneas que cubren a todos los elementos distintos de cero: $\{c_1, r_2\}$.

Viendolo gráficamente se tiene lo siguiente:



Ej.

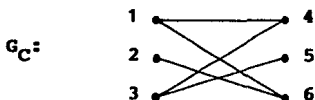
$$C: \begin{matrix} & & 4 & & 5 & & 6 \\ & 1 & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & 2 & & & & & \\ & 3 & & & & & \end{matrix}$$

C tiene tres elementos distintos de cero independientes: $\{c_{11}, c_{23}, c_{32}\}$.

Nótese que c_{11} también es un elemento distinto de cero, y aunque en su renglón y columna correspondientes aparecen otros elementos distintos de cero, c_{11} es independiente de c_{23} & c_{32} por no estar en la misma línea; es decir, el conjunto dado es un conjunto de elementos distintos de cero independientes.

Así, C tiene tres líneas que cubren a todos los elementos distintos de cero: $\{r_1, r_3, c_3\}$.

Gráficamente se tiene lo siguiente:



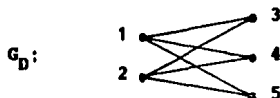
$$\{c_{11}, c_{23}, c_{32}\} \Rightarrow \nu(G_C) = \{(1,4), (2,6), (3,5)\}$$

$$\{r_1, r_3, c_3\} \Rightarrow \tau(G_C) = \{1, 2, 3\}.$$

Ej.

$$D: \begin{matrix} & & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

D tiene dos elementos distintos de cero independientes: $\{d_{11}, d_{22}\}$ (podrían ser otros elementos como: $\{d_{11}, d_{23}\}$), y tiene dos líneas que cubren a todos los elementos distintos de cero: $\{r_1, r_2\}$ (podrían ser las tres columnas, que también cubren a todos los elementos distintos de cero, pero se busca el mínimo número de líneas) Gráficamente se tiene lo siguiente:



$\{c_{11}, c_{22}\} \Rightarrow \nu(G_D) = \{(1,3), (2,4)\} =$ máximo número de aristas en un acoplamiento.

$\{r_1, r_2\} \Rightarrow \tau(G_D) = \{1, 2\} =$ mínimo número de vértices que cubren a todas las aristas.

Otra consecuencia del Teorema de König es el siguiente resultado.

Teor. 4.3 El número de cubrimiento por aristas en una gráfica bipartita es igual a su número de independencia por vértices, es decir, en una gráfica bipartita: $C_A = I_V$

Dm. Por el Teorema 4.1 se sabe que una gráfica bipartita cumple que: $\nu(G) = \tau(G)$. Sin embargo, Gallai ([11], Teorema 10.1) probó en 1959 que para toda gráfica, no necesariamente bipartita, la suma del número de cubrimiento por aristas y el número de independencia por aristas es igual a la suma del número de cubrimiento por vértices y el número de independencia por vértices; y esta suma es precisamente el número de vértices en la gráfica, es decir, que se cumple: .

$$C_A + \nu(G) = \tau(G) + I_V = |V(G)|.$$

Y como $\nu(G) = \tau(G)$ para gráfica bipartitas, entonces:
 $C_A = I_V.$

c.s.q.d.

Recordando unas definiciones y probando unos Teoremas, ayudarán a probar el Teorema de Gallai [2], que fué usado en la demostración anterior.

Un subconjunto I_V de V es un subconjunto independiente por vértices de G , si ningún par de vértices de I_V son adyacentes en G . Un subconjunto independiente por vértices I_V en G es máximo, si G no tiene un subconjunto independiente por vértices I'_V tal que $|I'_V| > |I_V|$.

Un subconjunto $\tau(G)$ de V tal que para toda arista de G al menos uno de sus vértices incide en $\tau(G)$, es llamado un cubrimiento por vértices de G .

Teor. 4.3a Un subconjunto $I_V \subseteq V(G)$ es un subconjunto independiente máximo por vértices de $G \iff V(G) - I_V$ es un cubrimiento mínimo por vértices de G .

Dm. Por definición, I_V es un subconjunto independiente máximo por vértices en G si y sólo si ninguna arista de G tiene ambos vértices en I_V , si y sólo si cada arista tiene al menos un vértice en $V(G) - I_V$, si y sólo si $V(G) - I_V$ es un cubrimiento mínimo por vértices de G .

c.s.q.d.

Teor. 4.3b Sea G una gráfica, entonces: $I_V + \tau(G)$ es igual a $V(G)$.

Dm. Sea I_V un subconjunto máximo independiente por vértices en G , y sea $\tau(G)$ un cubrimiento mínimo por vértices de G . Entonces, por el Teorema 4.3a se tiene que $V(G) - \tau(G)$ es un subconjunto independiente por vértices y $V(G) - I_V$ es un cubrimiento por vértices de G .

Por lo tanto, $V(G) - \tau(G) = |V(G) - \tau(G)| \leq I_V$, es decir, cualquier otro subconjunto independiente por vértices no puede ser mayor que el máximo subconjunto independiente por vértices (I_V).

Por otro lado, $V(G) - I_V = |V(G) - I_V| \geq \tau(G)$, es decir, cualquier otro cubrimiento por vértices no puede ser menor que el mínimo cubrimiento por vértices ($\tau(G)$).

Entonces, $V(G) - \tau(G) \leq I_V$ & $V(G) - I_V \geq \tau(G)$, entonces, $V(G) \leq I_V + \tau(G)$ & $V(G) \geq \tau(G) + I_V$, entonces $V(G) = I_V + \tau(G)$.

c.s.q.d.

Teor. 4.3c Sea G una gráfica, con $\delta_G > 0 \Rightarrow$
 $\nu(G) + C_A = V(G)$, donde $\delta_G =$ mínimo grado en la gráfica G .

Dm. Sea $\nu(G)$ un acoplamiento máximo en G y sea U el conjunto de vértices $\nu(G)$ --no saturados (es decir, U es el conjunto de vértices que no están saturados ó acoplados - por $\nu(G)$).

Como $\delta > 0$ & $\nu(G)$ es máximo, existe un conjunto E de $|U|$ aristas tal que cada una incide con un vértice de U .

Sea M el conjunto de aristas en un acoplamiento máximo.

$M \cup E$ es un cubrimiento por aristas de G , y como C_A es el mínimo cubrimiento por aristas de G entonces, $C_A \leq |M \cup E| = |M| + |E| = \nu(G) + [V(G) - 2\nu(G)]$ (pues, $|E| = V(G) - 2\tau(G)$, y esto es igual a todos los vértices de G menos los dos vértices de cada arista de $\nu(G)$ que es un acoplamiento máximo) $= V(G) - \nu(G)$

Por lo tanto, $C_A + \nu(G) \leq V(G) \dots\dots(1)$

Ahora, sea C_A un cubrimiento mínimo por aristas de G ; sea $H = G(C_A)$ y sea $\nu(G)$ un acoplamiento máximo en H .

Sea U el conjunto de vértices $\nu(G)$ --no saturados de H .

Como $\nu(G)$ es máximo, entonces $H(U)$ no tiene uniones, es decir, la gráfica formada por los vértices de U no tiene aristas, pues si las hubiera, los vértices correspondientes estarían acoplados por $\nu(G)$ y no estarían contemplados en U .

Así, $|U| \leq |C_A - \nu(G)| = C_A - \nu(G)$, es decir, los vértices $\nu(G)$ --no saturados, no pueden exceder al total de vértices (que están en C_A) menos los vértices que están en un acoplamiento máximo $\nu(G)$.

Por otro lado se tiene que: $|U| = V(G) - 2\nu(G)$, es decir, todos los vértices de G menos los dos vértices de cada arista en un acoplamiento máximo es igual a la cardinalidad del conjunto U .

Esto es, $V(G) - 2\nu(G) = |U| \leq C_A - \nu(G)$, entonces: $V(G) - 2\nu(G) \leq C_A - \nu(G)$.

Por lo tanto, $V(G) \leq C_A + \nu(G) \dots\dots(2)$

Combinando (1) y (2) se tiene lo siguiente:

$$C_A + \nu(G) \leq V(G) \leq C_A + \nu(G)$$

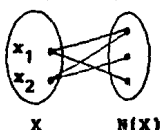
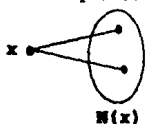
Por lo tanto, $C_A + \nu(G) = V(G)$

c.s.q.d.

Los Teoremas 4.3b y 4.3c son los dos Teoremas probados por Gallai, que al resumirlos se tiene lo siguiente:

$$I_v + \tau(G) = C_A = \nu(G) = V(G)$$

Si x es un vértice de una gráfica ó digráfica G , sea $N(x)$ el conjunto que denota a los vecinos de x ; y si X es un conjunto de vértices, $N(X) = \bigcup_{x \in X} N(x)$ = conjunto de vértices que son adyacentes a los vértices del conjunto X .



Así, $N(X) = \{y / xy \text{ es una arista (arco) de } G, \text{ para alguna } x \in X\}$.

Teor. 4.4 (Teorema de König--Hall)

Sea G una gráfica bipartita, con X & Y los conjuntos que la particionan. Entonces, G tiene un acoplamiento que cubre a todos los vértices de X $\Leftrightarrow$.. $|N(S)| \geq |S|$, para todo conjunto $S \subseteq X$.

Dm.

" $\Rightarrow$ " Supóngase que G tiene un acoplamiento A que satura a cada vértice de X , entonces, para todo conjunto $S \subseteq X$, $|N_G(S)| \geq |N_A(S)|$, por lo tanto, $|N_G(S)| \geq |N_A(S)| = |S|$

c.s.q.d.

" $\Leftarrow$ " Supóngase que para todo conjunto $S \subseteq X$, se cumple que: $|N_G(S)| \geq |S|$. Y supóngase además (para encontrar una contradicción) que no existe un acoplamiento en G que cubra a todos los vértices de X .

Sea A^* un acoplamiento máximo, por la suposición se sabe que existe $u \in X$ tal que u no está A^* --saturado.

Sea $Z = \{z \in V(G) / \text{existe una } u z \text{--trayectoria } A^* \text{--alternada}\}$

Se sabe que: Un acoplamiento A de G es máximo $\Leftrightarrow G$ no contiene trayectorias A --no saturadas (Teorema de Berge, [2]).

Así, todo vértice de Z está A^* --saturado.

Sean $S = Z \cap X$ & $T = Z \cap Y$



Ya que todo vértice de $S - \{u\}$ está A^* --saturado, y cada vértice de T está A^* --saturado, entonces cada vértice de $S - \{u\}$ está acoplado bajo A^* con algún vértice de T .

Entonces, $T \subseteq N(S)$, de hecho $T = N(S)$ ya que para cada vértice x vecino de S , hay una ux --trayectorias A^* --alternada.

Por lo tanto, $T = N(S) \Rightarrow |N(S)| = |T|$

Pero cada elemento de T está acoplado bajo A^* con uno de $S - \{u\}$.

Así, $|T| = |S - \{u\}| = |S| - 1$

Entonces, $|S| - 1 = |N(S)|$, con $S \subseteq X$!

Por lo tanto, G tiene un acoplamiento que cubre a todos los vértices de X .

c.s.q.d.

Def. Una trayectoria A^* --alternada es una trayectoria cuyas aristas están alternativamente en A^* y en $(A^*)^C$, donde $(A^*)^C$ es el complemento de A^* (lo que está fuera de A^*).

Teor. de Berge, [2] Un acoplamiento M en G es máximo $\Leftrightarrow G$ no contiene trayectorias M --aumentantes (trayectorias M --no saturadas).

Dm.

" $\Leftarrow$ " Sea M un acoplamiento máximo en G , y supóngase (para encontrar una contradicción) que G contiene una trayectoria M --aumentante, $T = \{v_0, v_1, \dots, v_{2m}, v_{2m+1}\}$

$$\text{Sea } M' = [M - \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), \dots, (v_{2m-1}, v_{2m})\}] \cup \{(v_0, v_1), (v_2, v_3), \dots, (v_{2m}, v_{2m+1})\}$$

M' es un acoplamiento en G y $|M'| \geq |M| + 1$

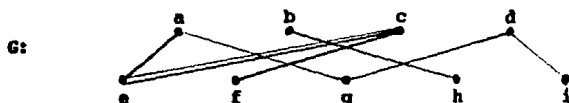
Entonces, M no es un acoplamiento máximo.

Por lo tanto, si G no contiene trayectorias M --aumentantes, entonces M es un acoplamiento máximo en G .

c.s.q.d.

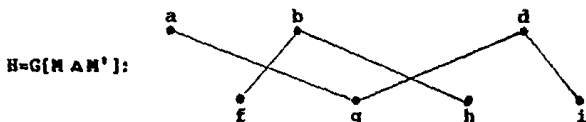
" $\Rightarrow$ " Supóngase que M no es un acoplamiento máximo, y sea M' un acoplamiento máximo en G , así $|M'| > |M|$

Sea $H = G[M \Delta M'] = (M - M') \cup (M' - M)$, donde $M \Delta M'$ denota la diferencia simétrica de M & M' (ver las siguientes figuras).



Acoplamiento M
Acoplamiento M'

Nótese que la arista (e,c) está doblemente marcada, no significa que G tenga aristas multiples (más de una arista entre dos vértices), si no que esta arista está en M y también está en M'



Cada vértice de H tiene grado uno ó dos en H , pues estos vértices inciden con a los más una arista de M y una de M' .

Así, cada componente (cada parte) de H está en un ciclo de longitud par (por ser una gráfica bipartita) con aristas alternativamente en M & M' :



Pero como $|M'| > |M|$, H contiene más aristas de M' que de M .

Por lo tanto, alguna trayectoria T , componente de H debe empezar y terminar con aristas de M' :



Los vértices inicial y final de T están M' --saturados en H , y están M --no saturados en G .

Así, T es una trayectoria M --aumentante en G .

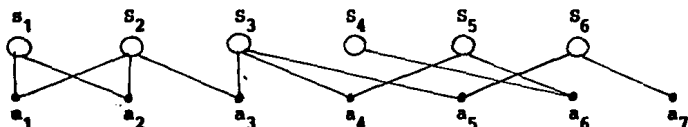
c.s.q.d.

Retomando el Teorema 4.2: sean $S_1, S_2, \dots, S_m$ subconjuntos finitos de vértices de G ; así, la matriz de adyacencia considerada en el caso del Teorema 4.4. tendrá por renglones y por columnas a los vértices restantes (ó viseversa); de tal manera que la bipartición de la gráfica sean los subconjuntos S_i , con $i = \overline{1, m}$ y la otra parte serán los vértices restantes.

Esta colección de S_i posee un sistema de representantes distintos, es decir, un conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de elementos distintos tal que $e_i \in S_i$, para toda i .

Así, con esta colección de S_i , este Teorema 4.4 es muy cercano al Teor. de Hall: Hay un sistema de representantes distintos para una familia de conjuntos $S_1, S_2, \dots, S_m \iff$ la unión de cualesquiera k de estos conjuntos contiene al menos k elementos, para toda k tal que $1 \leq k \leq m$.

Un ejemplo del Teorema de Hall se vé en la siguiente gráfica:



De esta forma, el Teorema 4.4 es precisamente una traslación dentro del lenguaje gráfico del Teorema de Hall [9] sobre representantes distintos de la familia de subconjuntos S_i , $i = \overline{1, m}$.

Es también una consecuencia del Teorema de König (Teorema 4.1). Así como el Teorema de König es precisamente el Teorema de Menger para gráficas bipartitas, de la misma manera se puede deducir el Teorema 4.4 del Teorema de Menger. Muchos resultados sobre sistemas de representantes pueden ser deducidos del Teorema de Menger, como lo mostró Perfect [21] en 1968, ó como lo mostraron Ford y Fulkerson [8] en 1962 pa-

ra el Teorema de flujo máximo--cortadura mínima. Todos estos resultados en Teoría Transversal pueden ser considerados como Teoremas minimax en Teoría de Gráficas. (Un transversal es un conjunto de objetos que intersectan a cada elemento de una familia de objetos, donde los objetos pueden ser trayectorias, ciclos, etc.)

Entre muchas de las pruebas directas del Teorema 4.4, en particular dos de ellas se destacan: la de Halmons y Vaughan [10] en 1950; y la de Rado [24] en 1967.

Así, el Teorema de Hall implica el Teorema de König--Hall (Teorema 4.4.). La familia de conjuntos S_i , con $i=1, \dots, m$ y los vértices en la gráfica representan a los conjuntos X & Y que particionan a G . En el sistema de representantes distintos para la familia de conjuntos S_i , cada conjunto S_i es adyacente al menos con uno de los vértices de Y , así, a través del sistema de representantes distintos se tiene un acoplamiento de G que cubre a todos los vértices de X . Como la unión de cualesquiera k de los conjuntos S_i contiene al menos k elementos, entonces, el número de vecinos de un subconjunto S de X debe tener al menos el número de vértices del subconjunto S , es decir, $|N(S)| \geq |S|$, para todo conjunto $S \subseteq X$.

De esta forma, el Teorema 4.4 es una consecuencia del Teorema de Hall, la cual es una versión minimax, y que trasladada dentro del contexto del Teoría de Gráfica es el Teorema 4.5.

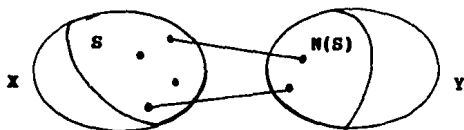
El siguiente resultado fué probado por Ore [19] en 1955, y se obtiene del Teorema de Hall, añadiendo suficientes vértices extra a G unidos a todos los vértices de X , hasta que se pueda aplicar el Teorema de Hall (ésto ilustra muchos aspectos de auto--refinamiento del Teorema de Hall). Sin embar-

go, para ilustrar que este Teorema 4.5 es del tipo minimax, se dará una prueba algorítmica (el método Húngaro), cuyo algoritmo es similar a los dos algoritmos vistos previamente.

Teor. 4.5 Sea G una gráfica bipartita, con bipartición (X, Y) . Entonces su número de independendencia por aristas, $\nu(G)$, es igual al mín $\left\{ |X| + N(S) - |S| \right\}$
 $S \subseteq X$

Dm. Es fácil ver que: $\nu(G) = \min_{S \subseteq X} (|X| + N(S) - |S|)$,

pues:



Si $N(S) - |S| \geq 0 \Rightarrow \nu(G) \leq |X| + \varepsilon$, donde,
 $\varepsilon = N(S) - |S| \geq 0$, se cumple la desigualdad pues $\nu(G)$ no puede tener más aristas en su acoplamiento que las que se puedan cubrir a través de X , pues $\nu(G)$ es un acoplamiento máximo.

Si $N(S) - |S| < 0 \Rightarrow N(S) < |S|$, así, los vértices de X que se pueden saturar son $|X| - M$, donde $M = |S| - N(S)$ que son los vértices de X que no se pueden saturar; así,
 $|X| - M = |X| - [|S| - N(S)] = |X| + N(S) - |S|$

Por lo tanto, $\nu(G) = \min_{S \subseteq X} (|X| + N(S) - |S|)$, pues de

nuevo, $\nu(G)$ es un acoplamiento máximo, y este no puede tener más aristas que las que se puedan cubrir a través de X .

Se usará el algoritmo Húngaro para demostrar la igualdad.

Algoritmo: Se comenzará con un acoplamiento M_1 de l aristas, para algún entero l no negativo. Formar recursivamente dos conjuntos de vértices $S \subseteq X$ & $T \subseteq Y$ de la siguiente manera:

- (i) Si $x \in X$ & x no está cubierto por $M_1 \Rightarrow x \in S$
- (ii) Si $x \in S$ & $x \text{ ady}_G y$ tal que $(x, y) \notin M_1 \Rightarrow y \in Y$
- (iii) Si $y \in T$ & $x \text{ ady}_{M_1} y \Rightarrow x \in S$

La construcción de S & T continua hasta no poder hacer ninguno de los pasos anteriores, y se tienen dos casos a considerar:

caso 1: Si $y \in T$ tal que $y \in Y$ & y no está cubierto por M_1 , existe $x \in X$ tal que x no está cubierto por M_1 ; y existe una trayectoria t conectando a x con y , consistiendo de un número impar de aristas tal que alternativamente están y no están en M_1 .

Intercambiar las aristas de $t \cap M_1$ por las de $t - M_1$, para formar un nuevo acoplamiento M_{1+1} con $l+1$ aristas. Regresar a los pasos iterativos con M_{1+1} en vez de M_1 .

caso 2: si para todo vértice $y \in T$, y está cubierto por M_1 .

S consiste de $|T|$ vértices de X que están acoplados con vértices de T , junto con los $|X| - 1$ vértices de X que no están cubiertos por M_1 ; y $N(S) = T$.

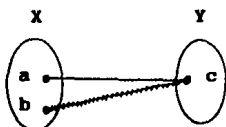
$$\text{Así, } |X| + |N(S)| - |S| = 1$$

De esta manera, el algoritmo termina con la construcción de un acoplamiento más grande.

c.s.q.d.

Se verán unos ejemplos para ilustrar cómo procede el algoritmo.

Ej. 1 (contemplando el caso 2)



$$S_1 = \{b\} \subseteq X$$

$$T_1 = \{c\} \subseteq Y$$

$$M_1 = M_1 = \{(b, c)\}$$

(i) $a \in X$ & a no está cubierto por $M_1 \Rightarrow a \in S_2$

Así, $S_2 = \{a, b\}$ & $T_2 = \{c\}$

caso 2: $c \in T_2$ & c está cubierto por M_1

S consiste de un vértice de X (pues $|T| = 1$) que está acoplado con un vértice de T , junto con un vértice de X (pues $|X| - 1 = 2 - 1 = 1$) que no está cubierto por M_1 ; y $N(S) = T = \{c\}$

$$\text{Por lo tanto } |X| + |N(S)| - |S| = 1$$

$$2 + 1 - 2 = 1 = 1$$

Es decir, hay $1 = 1$ arista que está en un acoplamiento (la misma arista que se tenía en el acoplamiento dado) y M_1 es un acoplamiento máximo en G .

Ej. 2 (contemplando el caso 1, agragando aristas al acoplamiento que ya se tiene, es decir, encontrando un nuevo acoplamiento más grande).

(iii) $\{c,d\} \in T_1$; $a \text{ ady}_{M_2} c$ & $b \text{ ady}_{M_2} d \Rightarrow a \in S_2$
 $b \in S_2$

caso 2: $c \in T_1$ & $\{c,d\}$ están cubiertos por M_2

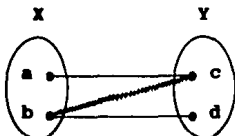
S consiste de dos vértices de X (pues $|T| = 2$) que están acoplados con los vértices de T , junto con los cero vértices de X (pues $|X| - 1 = 2 - 2 = 0$) que no están cubiertos por M_2 ; y $N(S) = T = \{b,d\}$

Por lo tanto, $|X| + |N(S)| - |S| = 1$

$$2 + 2 - 2 = 2 = 1$$

Es decir, hay $1 = 2$ aristas que están en el acoplamiento, y este acoplamiento M_2 es máximo en G .

Ej. 3 (Intercambiando aristas en un acoplamiento dado para encontrar un nuevo acoplamiento más grande, caso 1 . Es el mismo ejemplo dos, pero con otro acoplamiento dado).



$$S_1 = \{b\} \subseteq X$$

$$T_1 = \{c\} \subseteq Y$$

$$M_1 = \{(c,b)\}$$

(i) $a \in X$ & a no está cubierto por $M_1 \Rightarrow a \in S_2$.
 Así, $S_2 = \{a,b\}$ & $T_2 = \{c\}$

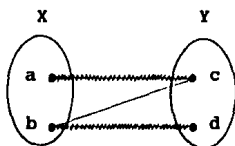
(ii) $\{a,b\} \in S_2$; $a \text{ ady}_G c$ & $b \text{ ady}_G d$ tal que (a,c) & $(b,d) \notin M_1 \Rightarrow c \in T_3$.

Por lo tanto, $S_3 = \{a,b\}$ & $T_3 = \{c,d\}$

caso 1: $d \in T$ tal que $d \in Y$ & d no está cubierto por M_1 . Existe $a \in X$ tal que a no está cubierto por M_1 , y hay una trayectoria que une a con d , $t = \{a, c, b, d\}$.

Intercambiando las aristas de $t \cap M_1$ por las de $t - M_1$ se tiene: $t \cap M_1 = \{(a, c), (c, b), (b, d)\} \cap \{(c, b)\} = M_1$, el acoplamiento dado; $t - M_1 = \{(a, c), (c, b), (b, d)\} - \{(c, b)\} = \{(a, c), (b, d)\} = M_2$, un nuevo acoplamiento más grande que M_1 .

Así, comenzando de nuevo y tomando a M_2 como el acoplamiento dado se tiene:



$$S_1 = \{a, b\}$$

$$T_1 = \{c, d\}$$

$$M_2 = \{(a, c), (b, d)\}$$

$$(ii) \quad b \in S_1 \text{ \& } b \text{ ady}_G c \text{ tal que } (b, c) \notin M_2 \Rightarrow c \in T_2$$

$$(iii) \quad \{c, d\} \in T_1; a \text{ ady}_{M_2} c \text{ \& } b \text{ ady}_{M_2} d \Rightarrow \{a, b\} \in S_2$$

caso 2: c & $d \in T_1$ & $\{c, d\}$ están cubiertos por M_2

S consiste de dos vértices de X (pues $|X| = 2$) que están acoplados con los vértices de T , junto con los cero vértices de X (pues $|X| - 1 = 2 - 2 = 0$) que no están cubiertos por M_2 ; y $N(S) = T = \{b, d\}$.

$$\text{Por lo tanto, } |X| + |N(S)| - |S| = 1$$

$$2 + 2 - 2 = 2 = 1$$

Es decir, hay $1 = 2$ aristas que están en el acoplamiento, y este acoplamiento M_2 es máximo en G .

El siguiente Teorema (4.6) es un Teorema minimax que puede ser considerado como una versión cuantitativa del Teorema de König (pues ahora no solo se tendrá un problema de asignamiento, porque ahora las aristas tendrán cierto "peso" asignado, y en este caso será la habilidad para realizar cierta tarea ó trabajo); de la misma manera que el Teorema de flujo máximo---cortadura mínima puede ser considerado una versión cuantitativa del Teorema de Menger (en el que aparte de encontrar trayectorias ajenas, Teorema de Menger, también es de interés mandar por estas trayectorias ajenas el máximo flujo posible, Teorema de flujo máximo--cortadura mínima). El punto esencial del siguiente Teorema es que su prueba dá un algoritmo efectivo para la solución del problema de asignamiento óptimo.

Supóngase que se tienen n trabajos: $t_1, t_2, \dots, t_n$ & n personas $p_1, p_2, \dots, p_n$ para asignarles tales trabajos; y supóngase que la destreza ó habilidad con que p_i realiza el trabajo t_j está dada por el número real α_{ij} .

El problema de asignamiento óptimo és acoplar las n personas a los n trabajos de tal forma que se maximicen las destrezas (al realizar los trabajos) sobre un acoplamiento, es decir, se quieren encontrar enteros no negativos x_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) que maximicen la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{ij}$$

sujeta a las restricciones:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \text{ tal que } j = \overline{1, n}$$

$$\& \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{tal que } i = \overline{1, n}$$

Estas restricciones fuerzan a que los enteros x_{ij} sean ceros ó unos, y los n enteros que son iguales a uno corresponden a las n aristas que acoplan a las n personas con los n trabajos.

Teor. 4.6 En el problema de asignamiento óptimo mencionado arriba, la suma de las destrezas sobre todos los acoplamientos es igual al valor mínimo de:

$$\sum_{i=1}^n y_i + \sum_{j=1}^n z_j \quad (1)$$

tomado sobre los conjuntos de números reales y_i & z_j tal que:

$$y_i + z_j \geq \alpha_{ij} \quad \forall i, j \quad (2)$$

Dm. Nótese primero, que dados cualesquiera números x_{ij} , y_i & z_j satisfaciendo las restricciones anteriores y que tales números existan), se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_{ij} &\leq \sum_{i,j} (y_i + z_j) x_{ij} \quad (\text{pues } \alpha_{ij} \leq y_i + z_j) \\ &= \sum_i y_i + \sum_j z_j \quad (\text{pues } \sum x_{ij} = 1, \\ &\quad \text{para toda } i \text{ y toda } j) \end{aligned}$$

Así se tiene:

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i,j} (y_i + z_j) x_{ij} = \sum_i y_i + \sum_j z_j \quad \dots (3)$$

Esto es suficiente para exhibir un conjunto de números para los cuales se siga la igualdad. Como en la prueba del Teorema de flujo máximo--contadura mínima (en que el interés es un flujo entero), se prestará la atención al caso cuando las destrezas α_{ij} son todas enteras.

El algoritmo empieza eligiendo conjuntos de números y_i tal que: $y_i = \max_j \alpha_{ij}$ para toda i & $z_j = 0$ para toda j .

Pasos iterativos: Considérese la gráfica bipartita G , en la cual hay una arista uniendo p_i con $t_j \iff y_i + z_j = \alpha_{ij}$

Aplicando el algoritmo Húngaro del Teorema 4.5 a la gráfica G . Se tienen dos casos a considerar:

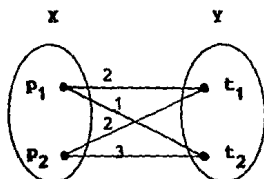
nuevo caso 1: El algoritmo Húngaro termina con un conjunto $S \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}$ tal que $|N(S)| < |S|$. Así, se puede decrementar el valor de y_i en una unidad para todo $p_i \in S$, e incrementar el valor de z_j en una unidad para toda $t_j \in N(S)$, sin violar la restricción (2); de esta forma, se está decrementando la expresión (1) en $|S| - N(S) > 0$. Después de hacer estos cambios, regrese a los pasos iterativos. (Como (3) muestra que (1) está acotado inferiormente, este nuevo caso 1 puede darse solamente un número finito de veces).

nuevo caso 2: El algoritmo Húngaro termina con un acoplamiento perfecto de G (un acoplamiento que cubre a todos los vértices, ya que los conjuntos que biparticionan a la gráfica tienen el mismo número de elementos). Se define $x_{ij} = 1$ si p_i está acoplado con t_j , y cero en otro caso. Entonces, la igualdad se da en (3). Así, el algoritmo termina encontrando un acoplamiento óptimo.

c.s.q.d.

Se verán unos ejemplos.

Ej. 1



$n = 2$ trabajos: $\{t_1, t_2\}$, $n = 2$ personas: $\{p_1, p_2\}$, y
 $\alpha_{11} = 2$, $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{21} = 2$, $\alpha_{22} = 3$.

Para este problema de asignamiento, se quieren acoplar a las dos personas con los dos trabajos, de tal forma que se maximicen las destrezas sobre uno de los acoplamientos, es decir, se quieren encontrar enteros no negativos x_{ij} (con $i, j = 1, 2$), tal que:

$$\max \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 x_{ij} = 1 \quad \text{para } j = 1, 2 \\ \sum_{j=1}^2 x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, 2 \end{array} \right.$$

Esto es, se quiere:

$$\max \{ \alpha_{11}x_{11} + \alpha_{12}x_{12} + \alpha_{21}x_{21} + \alpha_{22}x_{22} \}$$

$$\text{s.a. } \left\{ \begin{array}{ll} x_{1j} + x_{2j} = 1 & \text{para } j = 1, 2 \\ & \& \\ x_{i1} + x_{i2} = 1 & \text{para } i = 1, 2 \end{array} \right.$$

Esto és:

$$\max \{ \alpha_{11}x_{11} + \alpha_{12}x_{12} + \alpha_{21}x_{21} + \alpha_{22}x_{22} \}$$

$$\text{s.a. } \left\{ \begin{array}{ll} x_{11} + x_{21} = 1 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \\ & \& \\ x_{11} + x_{12} = 1 \\ x_{21} + x_{22} = 1 \end{array} \right.$$

En el Teorema 4.6 se menciona que es este problema de asignamiento óptimo, se tiene que las destrezas de todos los acoplamientos posibles (que en este caso son dos acoplamientos) es igual al siguiente valor:

$$\min \sum_{i=1}^2 y_i + \sum_{j=1}^2 z_j = \min \{ y_1 + z_1, y_1 + z_2, y_2 + z_1, y_2 + z_2 \} \quad \dots \dots (1)$$

tomado sobre los conjuntos de números reales y_i & z_j tal que $y_i + z_j \geq \alpha_{ij}$, $\forall i, j$

$$\text{Es decir, tomado sobre: } y_1 + z_1 \geq \alpha_{11}, y_1 + z_2 \geq \alpha_{12}, y_2 + z_1 \geq \alpha_{21} \text{ & } y_2 + z_2 \geq \alpha_{22} \quad \dots \dots (2)$$

Al seguir la demostración del Teorema se tiene que, dados cualesquier números x_{ij} , y_i & z_j satisfaciendo las restricciones anteriores se satisface lo siguiente:

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i,j} (y_i + z_j) x_{ij} = \sum_i y_i + \sum_j z_j \dots (3)$$

Como $\alpha_{ij} \leq y_i + z_j$, $\forall i, j$, se tendrán las siguientes posibilidades a considerar:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 2 \leq y_1 + z_1 = 2+0 = 0+2 = 1+1 \\ \alpha_{12} &= 1 \leq y_1 + z_2 = 1+0 = 0+1 \\ \alpha_{21} &= 2 \leq y_2 + z_1 = 2+0 = 0+2 = 1+1 \\ \alpha_{22} &= 3 \leq y_2 + z_2 = 3+0 = 0+3 = 2+1 = 1+2 \end{aligned}$$

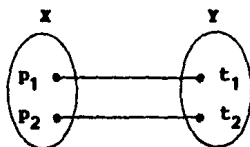
El algoritmo empieza eligiendo conjuntos de números $y_i + z_j$ para los cuales se satisface la expresión (2), puede decirse que $y_i = \max_j \alpha_{ij} \quad \forall i$, & $z_j = 0 \quad \forall j$

De esta manera, por lo desglosado arriba se tiene que:

$$y_i = \max_j \alpha_{ij} \quad \forall i = \max \{ \alpha_{i1}, \alpha_{i2} \} \quad \forall i$$

Así, $y_1 = \max \{ \alpha_{11}, \alpha_{12} \} = \max \{ 2, 1 \} = 2$;
 $y_2 = \max \{ \alpha_{21}, \alpha_{22} \} = \max \{ 2, 3 \} = 3$; & $z_1 = z_2 = 0$

Pasos iterativos: Considerese la gráfica bipartita G , en la cual hay una arista uniendo P_1 con t_1 ($\Rightarrow y_1 + z_1 = \alpha_{11}$, esto es, como $y_1 + z_1 = 2+0 = \alpha_{11}$, entonces p_1 ady $_G$ t_1 ; & también, como $y_2 + z_2 = 3+0 = \alpha_{22}$ entonces p_2 ady $_G$ t_2 ; ésto se puede ver gráficamente de la siguiente manera:



Aplicando el algoritmo Húngaro se tiene:

$$S_1 = \{p_1, p_2\} = X$$

$$T_1 = \{t_1, t_2\} = Y$$

$$M_1 = M_2 = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2)\}$$

caso 2: t_1 & $t_2 \in T_1$ & $\{t_1, t_2\}$ están cubiertos por M_2 , así, S consiste de dos vértices de X (pues $|T| = 2$) que están acoplados con los vértices de T , junto con los cero vértices de X (pues $|X| - 1 = 2 - 2 = 0$) que no están cubiertos por M_2 ; y $N(S) = T = \{t_1, t_2\}$

Por lo tanto, $|X| + |N(S)| - |S| = 1$

$$2 + 2 - 2 = 2 = 1$$

Es decir, hay 1=2 aristas que están en el acoplamiento M_2 y este acoplamiento es máximo en G .

Retomando el nuevo algoritmo modificado (la extensión del algoritmo Húngaro) que se usó en la demostración del Teorema 4.6 se tiene:

nuevo caso 2: El algoritmo Húngaro terminó con un acoplamiento perfecto de G . Se define $x_{11} = x_{22} = 1$, pues p_1 está acoplado con t_1 (a través de α_{11}), y p_2 está acoplado con t_2 (a través de α_{22}), y para los otros casos se tiene que: $x_{12} = x_{21} = 0$.

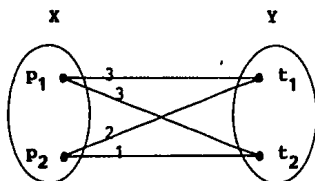
Así, la igualdad se sigue en (3) pues:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_{ij} &= \alpha_{11} x_{11} + \alpha_{12} x_{12} + \alpha_{21} x_{21} + \alpha_{22} x_{22} \\ &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Por otro lado: } \sum_{i,j} (y_i + z_j) x_{ij} &= \sum_i y_i + \sum_j z_j \\ &= (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \\ &= (2+3) + (0+0) = 5 \end{aligned}$$

Y por lo tanto, el acoplamiento $M_1 = M_2$ es un acoplamiento óptimo.

Ej. 2



$n=2$ trabajos: $\{t_1, t_2\}$

$n=2$ personas: $\{p_1, p_2\}$

$\alpha_{11}=3, \alpha_{12}=3, \alpha_{21}=2, \alpha_{22}=1$

Se quieren encontrar enteros no negativos x_{ij} (con $i, j = 1, 2$), tal que:

$$\max \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 x_{ij} = 1 \quad \text{para } j = 1, 2 \\ \sum_{j=1}^2 x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, 2 \end{array} \right.$$

Esto es, $\max \{ \alpha_{11}x_{11} + \alpha_{12}x_{12} + \alpha_{21}x_{21} + \alpha_{22}x_{22} \}$

$$\text{s.a.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} = 1 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \\ x_{11} + x_{12} = 1 \\ x_{21} + x_{22} = 1 \end{array} \right.$$

Como $\alpha_{ij} \leq y_i + z_j; \forall i, j$, se tienen las siguientes posibilidades:

$$\alpha_{11} = 3 \leq y_1 + z_1 = 3+0 = 0+3 = 2+1 = 1+2$$

$$\alpha_{12} = 3 \leq y_1 + z_2 = 3+0 = 0+3 = 2+1 = 1+2$$

$$\alpha_{21} = 2 \leq y_2 + z_1 = 2+0 = 0+2 = 1+1$$

$$\alpha_{22} = 1 \leq y_2 + z_2 = 1+0 = 0+1$$

El algoritmo empieza eligiendo conjuntos de números $y_i + z_j$ para los cuales se satisface lo anterior, y éstos pueden ser: $y_i = \max_j \alpha_{ij} \quad \forall i$, & $z_j = 0 \quad \forall j$.

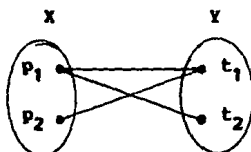
Es decir, $y_1 = \max \{ \alpha_{11}, \alpha_{12} \} \quad \forall i$

Así, $y_1 = \max \{ \alpha_{11}, \alpha_{12} \} = \max \{ 3, 3 \} = 3$,

$y_2 = \max \{ \alpha_{21}, \alpha_{22} \} = \max \{ 2, 1 \} = 2$; & $z_1 = z_2 = 0$

Pasos iterativos: Considérese la gráfica bipartita G , en la cual hay una arista uniendo a p_i con $t_j \Leftrightarrow y_i + z_j = \alpha_{ij}$

Por lo anterior, se tiene que, cómo $y_1 + z_1 = 3+0 = \alpha_{11} = \alpha_{12} \Rightarrow p_1 \text{ ady}_G t_1$ & $p_1 \text{ ady}_G t_2$, de la misma forma, cómo $y_2 + z_2 = 2+0 = \alpha_{22} \Rightarrow p_2 \text{ ady}_G t_1$. Y gráficamente se tendría lo siguiente:



Aplicando el algoritmo Húngaro:

$$S_1 = \{p_1, p_2\} = X$$

$$T_1 = \{t_1, t_2\} = Y$$

$$M_1 = M_2 = \{(p_1, t_2), (p_2, t_1)\}$$

caso 2: t_1 & $t_2 \in T_1$ & $\{t_1, t_2\}$ están cubiertos por M_2 , así, S consiste de dos vértices de X (pues $|T| = 2$) que

están acoplados con los vértices de T , junto con los cero vértices de X (pues $|X| - 1 = 2 - 2 = 0$) que no están acoplados por M_1 ; y $N(S) = T = \{t_1, t_2\}$

Por lo tanto $|X| + |N(S)| - |S| = 1$

$$2 + 2 - 2 = 2 = 1$$

Es decir, hay 1=2 aristas que están en el acoplamiento M_2 , y este acoplamiento es máximo en G , y $M_2 = \{(p_1, t_2), (p_2, t_1)\}$

Retomando al nuevo algoritmo modificado se tiene:

nuevo caso 2: El algoritmo Húngaro terminó con un acoplamiento perfecto de G . Se define $x_{12} = x_{21} = 1$, pues p_1 está acoplado con t_2 (a través de α_{12}), y p_2 está acoplado con t_1 (a través de α_{21}), y para los otros casos $x_{11} = x_{22} = 0$.

De esta forma, se cumple la igualdad en (3):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_{ij} &= \alpha_{11} x_{11} + \alpha_{12} x_{12} + \alpha_{21} x_{21} + \alpha_{22} x_{22} \\ &= 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3+2 = 5 \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que:

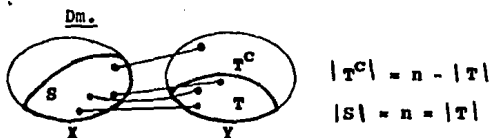
$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (y_i + z_j) x_{ij} &= \sum_i y_i + \sum_j z_j = (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \\ &= (3+2) + (0+0) = 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el acoplamiento $M_1 = M_2$ es un acoplamiento óptimo.

Un acoplamiento perfecto (ó acoplamiento óptimo) en una gráfica es llamado por lo general un 1--factor; y dos 1--factores se dice que son ajenos cuando no tienen aristas en común.

Para que una gráfica bipartita tenga un 1--factor, es evidentemente necesario que los dos conjuntos que la particionan tengan el mismo número de vértices. Cuando esto pasa, el Teorema 4.4 da una condición necesaria y suficiente para que la gráfica tenga un 1--factor; el Teorema 4.5 es una extensión de éste, al dar una fórmula para encontrar $\nu(G)$, el máximo número de aristas en un acoplamiento en G . Se puede preguntar acerca de diferentes tipos de extensión minimax, dada una fórmula para el máximo número de 1--factores ajenos, esto está dado por el siguiente Teorema, el cual da una condición para que una gráfica bipartita tenga un 1--factor.

Teor. 4.7 Sea G una gráfica bipartita sobre los conjuntos X & Y que la particionan, tal que $|X| = n = |Y|$. Así, G contiene k 1--factores ajenos $\Leftrightarrow$ para todo par de subconjuntos $S \subseteq X$ & $T \subseteq Y$, el número de aristas en G de S a T es al menos: $k(|S| + |T| - n)$; donde el decir de S a T , es decir de las aristas que tienen un extremo en S y el otro en T .



Donde, T^C es el complemento de T

Para $k=1$, es decir para un 1--factor se tendría que; las aristas que van de S a T en un 1--factor serán: las aristas que van de S a T menos las aristas que van de S a T^C :

$$|S| - (n - |T|)$$

Ya que $|S|$ es el número de aristas que inciden en S ; y

$(n - |T|)$ son el número de aristas que inciden en S pero que su otro extremo no está en T .

Esto és, serán $|S| + (|T| - n)$ las aristas que van de S a T en un 1--factor.

Así, que las aristas que van de S a T en k 1--factores serán k veces este número, es decir: $K(|S| + |T| - n)$

c.s.q.d.

5.- FACTORES EN GRAFICAS ARBITRARIAS

El resultado más sobresaliente sobre factores es el Teorema del 1--factor de Tutte, que se establece cuando una gráfica contiene un 1--factor a través de sus componentes impares y viceversa. Se usa la prueba de Lovász, que presta su atención a las componentes impares, para su demostración.

Como punto final, se presenta un resultado obtenido por Berge, el cual es la versión minimax del Teorema de Tutte.

Sea G una gráfica no necesariamente bipartita, entonces, un 1--factor (acoplamiento perfecto, completo, máximo u óptimo) de G , es un acoplamiento que cubre a todos los vértices de G .

Si S es un conjunto de vértices de G , se denotará por $\Theta(G)$ ó bien por $\Theta(G-S)$ al número de componentes impares de $G-S$ (las componentes impares son componentes con un número impar de vértices).

El resultado más importante sobre factores es el siguiente Teorema. Fué probado por Tutte [25] en 1947.

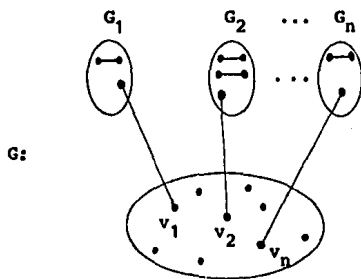
Teor. 5.1 (Teorema del 1--factor de Tutte)

Una gráfica G tiene un 1--factor si y sólo si $\Theta(G-S) \leq |S|$, para todo conjunto $S \subset V(G)$.

Dm.

" $\Rightarrow$ " Sea M un 1--factor de G .

componentes impares de $G-S$



componentes pares de $G-S$



Cada componente impar tiene un número impar de vértices, entonces existe $u_i \in G_i$ tal que no tienen correspondencia en la misma componente, así, estos vértices están en correspondencia con un vértice de S ; de esta forma, distintas componentes impares inducen ó llevan a vértices distintos en S .

Sean $G_1, G_2, \dots, G_n$ la componentes impares de $G-S$; puesto que G_i es impar, existen $u_i \in G_i$ que se corresponden bajo un acoplamiento M con $v_i \in S$.

Entonces: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq S$

$$\& \quad \Theta(G-S) = n = |\{v_1, v_2, \dots, v_n\}| \leq |S|$$

Por lo tanto, $\Theta(G-S) \leq |S|$

c.s.q.d.

" $\Leftarrow$ " P.D. que si G es una gráfica tal que para todo conjunto $S \subseteq V(G)$ se tiene que si $\Theta(G-S) \leq |S|$ entonces G tiene un 1--factor.

Supóngase que para todo conjunto $S \subseteq V(G)$ se tiene que: $\Theta(G-S) \leq |S|$, y que G no tiene un 1--factor (así se encontrará una contradicción).

Puesto que G no tiene un 1--factor, G es subgráfica generadora de G^* sin un acoplamiento perfecto, es decir, G es una subgráfica de expansión de una gráfica inducida G^* que tampoco tiene un acoplamiento perfecto.

Como $G-S$ es una subgráfica de expansión de G^*-S , es decir $G-S \subseteq G^*-S$ para todo conjunto $S \subseteq V$ entonces:

$$\Theta(G^*-S) \leq \Theta(G-S) \leq |S|$$

$$\text{Así, } \Theta(G^*-S) \leq |S| \quad \forall S \subseteq V(G^*) = V(G).$$

En particular, si $S = \emptyset$ se tiene que: $\Theta(G^*-\emptyset) = \Theta(G^*) \leq |\emptyset| \Rightarrow \Theta(G^*) = 0$, es decir, no existen componentes de orden impar de G^* .

Por lo tanto, G^* tiene un número par de vértices.

Sea $U = \{z \in V(G^*) / d_{G^*}(z) = p-1\}$

Si $U = V \Rightarrow G^* = K_{2n}$, es decir, G^* sería una gráfica completa con un número par de vértices y por lo tanto, G^* tendría un 1--factor.

Así, se puede suponer que $U \subset V(G^*)$, y se tendría que:
 $\Theta(G^*-U) \leq |U|$

Se probará que cada componente conexa de G^*-U es completa, es decir, que G^*-U es la unión de gráficas completas ajenas.

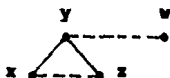
Supóngase lo contrario (para encontrar una contradicción): sea T una componente de G^*-U no completa, entonces, $|V(T)| \geq 3$

Así, existen x, y, z tal que $xy \in A(G^*)$, $yz \in A(G^*)$, pero $xz \notin A(G^*)$; gráficamente se tendría:



$x, y, z \in G^*-U$

En particular, como $y \notin U$, existe $w \in G^*-U$ tal que:
 $yw \in A(G^*)$, es decir, y no $\text{ady}_{G^*} w$:



Como G^* es una gráfica inducida que no contiene un acoplamiento perfecto, entonces $G^* + e$ tiene un acoplamiento perfecto para toda arista $e \in A(G^*)$.

Sean M_1 & M_2 los acoplamientos perfectos en $G^* + xz$ & $G^* + yw$ respectivamente, es decir, que M_1 es un acoplamiento perfecto de $G^* \cup \{xz\}$ & M_2 es un acoplamiento perfecto de $G^* \cup \{yw\}$.

Nótese que $xz \in M_1$, pues como G^* no tiene un acoplamiento perfecto entonces xz está necesariamente en M_1 . De la misma manera, $yw \in M_2$.

Sea $M_1 \Delta M_2 = (M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1) = (M_1 \cup M_2) - (M_1 \cap M_2)$ la diferencia simétrica de M_1 & M_2 .

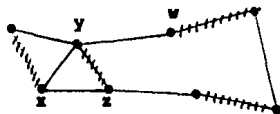
Denótese por H a la subgráfica de $G \cup \{xz, yw\}$ inducida por $M_1 \Delta M_2$, es decir, $H = G(M_1 \Delta M_2)$

Como $d_H(z) = 2$ para todo $z \in H$, H es la unión de ciclos de longitud par ajenos dos a dos (puesto que las aristas de M_1 alternan con las aristas de M_2).

Hay dos casos a considerar:

caso 1: Si xz & yw están en la misma componente C de H .

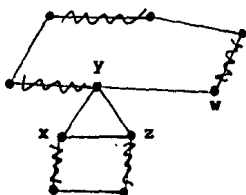
Por la simetría de x & z , se puede asumir que los vértices x, y, w & z están en este orden en C (al decir la simetría de x & y , quiere decir que no importa como se encuentre esta arista, es decir, que puede ser xz ó bien zx).



Así, las aristas de M_1 en la sucesión $y, w, \dots, z$ de C , junto con la arista yz y las aristas de M_2 que no están en la sucesión $y, w, \dots, z$ de C , constituyen un acoplamiento perfecto en G^* (este acoplamiento se vé marcado en las aristas con //).

Esto es una contradicción a la definición que se había dado de G^* (pues se suponía que G^* no tenía un acoplamiento perfecto).

caso 2: Si xz & yw están en diferentes componentes de H :



Si yw está en un ciclo C de H , entonces las aristas de M_1 en C junto con las aristas de M_2 que no están en C , constituyen un acoplamiento perfecto en G^* (se puede ver este - acoplamiento en la gráfica de arriba, está marcado en las - aristas con $\sim$).

De nuevo, esto contradice la definición de que G^* no tiene un acoplamiento perfecto.

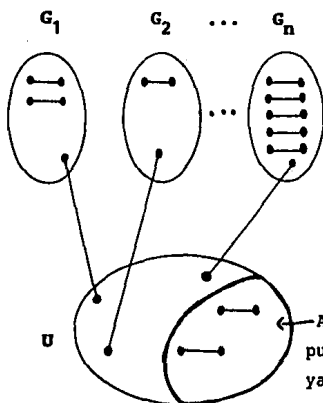
En ambos casos se llegó a una contradicción, así que, G^*-U sí es la unión de gráficas completas, es decir, que las componentes conexas de G^*-U son completas.

Como $\Theta(G^*-U) \leq |U|$, a lo más $|U|$ de las componentes impares de G^*-U son impares. Pero entonces, G^* tiene un acoplamiento perfecto: las componentes pares en las que sus vértices están acoplados entre sí; las componentes impares que - tienen un acoplamiento perfecto excepto por un vértice, y tal que este vértice está acoplado con un vértice de U ; y los vértices restantes de U que están acoplados entre sí. Ver la siguiente figura.

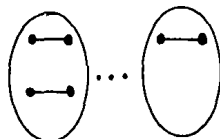
Como G^* se definió de tal manera que no tuviera un acoplamiento perfecto, se ha obtenido la contradicción deseada.

Así, en efecto G tiene un acoplamiento perfecto.

componentes impares de G^*-U



componentes pares de G^*-U



c.s.q.d.

Hay varias pruebas del Teorema 5.1, de las cuales en particular se destacan: la prueba de Anderson [8] en 1971, usando el Teorema de Hall; y la prueba de Lovász [14] en 1975 (la prueba anterior).

La versión minimax del Teorema 5.1 es el siguiente Teorema, y fué obtenida por Berge [1] en 1958. Este resultado implica el Teorema de Tutte, y se obtiene agragandole a G suficientes vértices extra, unidos a todos los vértices de G , unidos entre ellos, hasta poder aplicar el Teorema de Tutte; se puede consultar la elegante prueba de McCarthy [15] en 1973. (Esto ilustra un aspecto de la naturaleza de auto--refinamiento del Teorema de Tutte). Este resultado, también se obtiene

al modificar la prueba de Anderson para el Teorema de Tutte, usando el Teorema de Ore (Teorema 4.5), en donde Anderson usó el Teorema de Hall; pruebas de este tipo han sido producidas por Mader [17] y por el mismo Woodall [27], ambos en 1963. Es muy difícil dar una prueba algorítmica, pues los algoritmos que conoce Woodall para encontrar un acoplamiento más grande en una gráfica, son muy complicados (puede consultarse Edmonds [5]. 1965).

Teor. 5.2 El máximo número de aristas en un acoplamiento de una gráfica G es $\omega(G)$, donde:

$$\omega(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \frac{1}{2} \{ |V(G)| - \Theta(G-S) + |S| \}$$

Dm. Se usará el Teorema de Tutte para demostrar este resultado, es decir, se demostrará que el Teorema de Tutte implica el Teorema 5.2.

Sea $G^* = \bar{K}_n + G$, es decir, G^* se obtiene se G agregando n vértices dos a dos no adyacentes entre sí ($\bar{K}_n$), y cada uno de ellos adyacente a cada vértice de G . Así, $G \subset G^*$.

Siendo $n = \max_{S \subseteq V} \{ \Theta(G-S) - |S| \}$, se probará que n es el mínimo número de vértices tal que $\bar{K}_n + G$ tenga un 1--factor, es decir, que se cumpla el Teorema de Tutte (para poder aplicarlo y así demostrar el Teorema 5.2

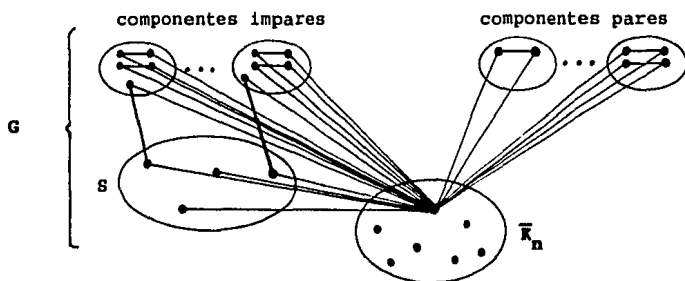
Se verá que G^* satisface el Teorema de Tutte:

$\bar{K}_n = V(G^*) - V(G)$, los vértices que se agregaron.

Sea $S \subset V(G^*)$

1º) Por la definición de G^* se tiene que, si $\bar{K}_n \not\subset S$, es

decir, si $|S| \geq \Theta(G-S)$, entonces el número de componentes de G^*-S es igual a uno, es decir, como cada vértice de $\bar{K}_n$ está unido a todos los vértices en G^* , al quitar cualesquiera vértices que no sea alguno de $\bar{K}_n$ siempre se tendrá una componente conexa).



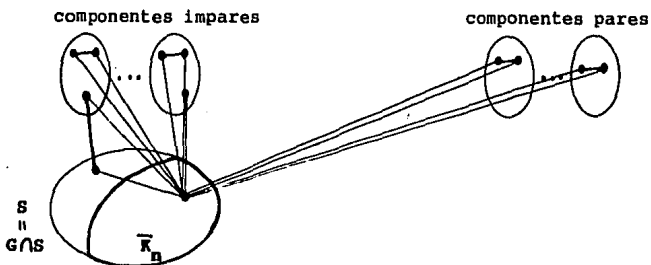
Por lo tanto, para todo conjunto $S \neq \emptyset$, $\Theta(G^*-S) \leq |S|$, esto es, que se satisface el Teorema de Tutte.

Si $S = \emptyset$, entonces el acoplamiento perfecto constaría de $1/2 |V(G)|$:



(no hay aristas entre las componentes, pues son conexas)

2º) Si $\bar{K}_n \subset S$, es decir, si $|S| < \Theta(G-S)$, se tiene que:



Donde: $\bar{K}_n \not\subset G$ & $\bar{K}_n \subset G^*$

Como $S \subset V(G)$, $\Theta(G^*-S) = \Theta(G-S) - |G \cap S| + |G \cap S|$
 $= [\Theta(G-S) - |S|] + |G \cap S|$, ya que
 $G \cap S = S$, en particular para
una S' se tiene que:

$$\leq \max_{S' \subset V(G)} \{ \Theta(G-S') - |S'| \} + |G \cap S|$$

$$= |\bar{K}_n| + |G \cap S| = |\bar{K}_n| + |S| = |S|$$

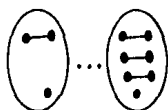
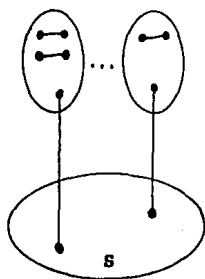
Por lo tanto, para todo conjunto $S \subset G^*$, $\Theta(G-S) \leq |S|$, es decir, se satisface la condición del Teorema de Tutte.

Así, por el Teorema de Tutte, G^* tiene un 1--factor.

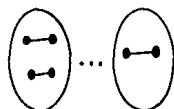
Como cada vértice de $\bar{K}_n$ está unido con cada vértice de G , en G se obtiene un 1--factor con: $1/2 \{ |V(G)| - [\Theta(G-S) - |S|] \}$ aristas, es decir, todos los vértices de G menos los que no están acoplados.

Solo falta checar que, en efecto ya no se puede tener un acoplamiento mayor.

componentes impares ($\Theta(G-S)$)



componentes pares.



(vértices que ya no
se pudieran saturar,
y que se saturan con
 x_n)

Los vértices que se saturarán en G son:

$$|V(G)| - [\Theta(G-S) - |S|]$$

Así, serían con: $1/2 \{ |V(G)| - \Theta(G-S) + |S| \}$ aristas.

El máximo número de aristas que se pueden tener en un 1--factor es a lo más el mínimo número de aristas en un acoplamiento (que cubran a todos los vértices):

$$\min_{S \subseteq V(G)} 1/2 \{ |V(G)| - \Theta(G-S) + |S| \}$$

c.s.q.d.

CONCLUSIONES

Los Teoremas minimax más importantes en Teoría de Gráficas son: el Teorema de Menger, el Teorema de Flujo Máximo--Cortadura Mínima, el Teorema de König y la versión minimax - del Teorema del 1--factor de Tutte; los cuales relacionan un máximo con un mínimo. Así, el Teorema de Menger relaciona el máximo número de XY--trayectorias ajenas con el mínimo número de vértices en un XY--conjunto separador.

El problema de Flujo Máximo--Cortadura Mínima, como su nombre lo dice, relaciona la máxima cantidad de flujo que se puede enviar de un origen a un destino, con la capacidad de la cortadura mínima.

El Teorema de König relaciona al máximo número de aristas en un acoplamiento con el mínimo número de vértices que cubren a todas las aristas en una Gráfica Bipartita.

Por último, la versión minimax del Teorema del 1--factor de Tutte, da una fórmula para encontrar el máximo número de aristas en un acoplamiento; tomando el mínimo de tal fórmula, que esta basada a través del número de vértices, las componentes impares y el cardinal de un subconjunto de vértices.

La importancia de presentar estos teoremas en su forma minimax, radica en su fácil manejo para encontrar el resultado; y el gran interés que surge a través de estos conceptos para la solución de problemas concretos, como lo son el problema de asignación y el problema de transporte, por mencionar algunos.

Concluyendo este trabajo, se han reunido algunos de los teoremas más importantes de Teoría de Gráficas, y se les ha unificado al redefinirlos en su forma minimax.

Como punto final, y como una propuesta a la continuación de esta tesis, se pueden seguir investigando teoremas y tratar de expresarlos en su forma minimax, con el fin de incrementar el número de Teoremas minimax y de esta forma, sería de mayor importancia el estudio de estos.

REFERENCIAS

1. C Berge, Sur le couplage maximum d'un graphe, C. R. Acad. Sci. Paris (A) 247 (1958), 258-259; MR20#7278.
2. Bondy and Murty, Graph Theory with Applications, The Macmillan Press LTD
3. R. P. Dilworth, A decomposition Theorem for partially ordered sets, Ann. of Math. (2) 51 (1950), 161-166; MR11-309.
4. G. A. Dirac, Extensions of Menger's theorem, J. London Math. Soc. 38(1963), 148-161; MR27#1939.
5. J Edmonds, Paths, trees and flowers, Canad. J. Math. 17 (1965), 449-476; MR31#2165.
6. E. Egerváry, Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól, Mat. Fiz. Lapok 38(1931), 16-28.
7. L. R. Ford and D. R. Fulkerson, Maximal flow through a network, Canad. J. Math. 8(1956), 399-404; MR1856.
8. L. R. Ford and D. R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton, 1962; MR28#2917.
9. P. Hall, On representatives of subsets, J. London Math. Soc. 10(1935), 26-30.
10. P. R. Halmos and H. E. Vaughan, The marriage problem, Amer. J. Math. 72(1950), 214-215; MR11-423.
11. F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969; MR41#1566.
12. D. König, Graphok és matrixok, Mat. Fiz. Lapok 38(1931), 116-119.

13. D. König, Über trennende Knotenpunkte in Graphen (nebst Anwendungen auf Determinanten und Matrizen), Acta Litt. Sci. Szeged 6(1933), 155-179.
14. L. Lovász, Three short proofs in graph theory, J. Combinatorial Theory (B) 19(1975), 269-271; MR53#211.
15. P. J. McCarthy, Matchings in graphs, Bull. Austral. Math. Soc, 9(1973), 141-143; MR48#2001.
16. C. McDiarmid. On separated separating sets and Menger's theorem, in Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference (ed. C. St. J. A. Nash-Williams and J. Sheehan). Congressus Numerantium XV, Utilitas Mathematica, Winnipeg. 1975, pp. 455-459.
17. W. Mader. 1-Faktoren von Graphen, Math. Ann. 201(1973), 269-282; MR50#1207.
18. K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, Fund. Math. 10(1927), 96--115.
19. O. Ore, Graphs and matching theorems, Duke Math. J. 22 (1955), 625-639; MR17-394.
20. O. Ore Theory of Graphs. Amer. Math. Soc, Colloq. Publ. XXXVIII, American Mathematical Society, Providence. Rhode Island, 1962; MR27#720.
21. H. Perfect, Applications of Menger's graph theorem, J. Math. Anal. Appl. 22(1968), 96-111; MR37#93.
22. M. A. Perles, A proof of Dilworth's decomposition Theorem for partially ordered sets, Israel J. Math. 1(1963), 105-107; MR29#5758.
23. J. S. Pym, A proof of Menger's theorem, Monatsh. Math. 73(1969), 81-83; MR39#1352.

24. R. Rado, Note on the transfinite case of Hall's theorem on representatives, J. London Math. Soc. 42(1967), 321-324; MR35#2758.
25. W. T. Tutte, The factorization of linear graphs, J. London Math. Soc. 22(1947), 107-111; MR9-297.
26. H. Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs, Amer. J. Math. 54(1932), 150-168.
27. D. R. Woodall, The binding number of a graph and its Anderson number, J. Combinatorial Theory (B) 15(1963), 225-255; MR48#5915.