Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

REPRESENTACION DE UNA SUPERFICIE CUBICA EN EL ESPACIO PROYECTIVO P^3K POR DIFERENTES TIPOS DE ECUACIONES. UN CALCULO ALGORITMICO DE LAS 27 LINEAS CONTENIDAS EN ESTA.

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

GERARDO SIERRA JUAREZ

México, D.F. Enero 1994

Agradezco a mi director de tesis
M. en C. RODOLFO SAN AGUSTIN CHI
y a mis sinodales
Dr. EMILIO LLUIS RIERA
Dr. ADALBERTO GARCIA MAYNEZ CERVANTES
M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA
Mat. ROMAN ALVAR SANCHEZ GARCIA

A MIS PADRES,
A MIS HERMANOS,
A MIS AMIGOS,
A MIS PROFESORES,
A LA UNAM.

AGRADEZCO A:

MI PADRE, POR EL CARIÑO RECIBIDO, COMPRENSION Y APOYO PARA PODER SER UN PROFESIONISTA.

MI MADRE, POR LOS CUIDADOS, ATENCIONES Y AMOR DADOS INCONDICIONALMENTE.

MI HERMANA LETICIA, POR DAR EL TOQUE FEMENINO A NUESTRA FAMILIA, MI SEGUNDA MADRE.

MI HERMANO GUILLERMO, POR SER EL QUE ME HA ABIERTO LOS CAMINOS, MI SEGUNDO PADRE.

MI HERMANO MIGUEL ANGEL, POR SER HUMANITARIO Y TRABAJAR PARA AYUDAR A VIVIR MEJOR EN ESTE MUNDO.

MI HERMANO ALEJANDRO, POR QUE NO TE DOBLEGAS ANTE NADA.

MIS TIAS Y PRIMOS, CELIA, ROSA, MARIO, EDUARDO, ROSA, HECTOR Y MI ABUELA VICTORIA POR TODO SU CARIÑO.

MIS AMIGOS Y PROFESORES, A LA UNAM Y A LA FUNDACION LORENA ALEJANDRA GALLARDO.

Y POR SUPUESTO A DIOS.

INDICE

INTRODUCCION

La teoría de las rectas sobre una superficie cúbica fue primero estudiada en una correspondencia entre los matemáticos británicos *Salmon* y *Cayley*, sus resultados fueron publicados en 1849 en el *Camb. and Dublin Math Journal*. La observación de que un número definido de rectas deberían de estar completamente contenidas en las superficies cúbicas es inicialmente hecha por *Cayley*, pero la determinación de el número fue primero hecha por *Salmon*.

La base para una teoría puramente geométrica de las superficies cúbicas fue desarrollada por *Steiner* en un corto pero extremadamente sustancioso artículo. Este contiene gran cantidad de teoremas sin demostraciones o a lo más la indicación del método de derivación, estudiado por *Cremona*.

Cayley describe las simetrías y las relaciones entre las 27 rectas, gran dificultad fue la primera experiencia en obtener una adecuada concepción de la configuración completa. La primera notación fue dada por *Cayley*, pero esta fue complicada. *Schläfli* fue quien inventó la notación que puede ser llamada del doble-seis; y esta notación ha quedado hasta el presente.

El trabajo presentado en esta tesis consiste en construir un algoritmo teórico, el cual obtenga las ecuaciones de las 27 rectas de un superficie cúbica dada, para lo cual primero presentamos tres capítulos previos al algoritmo.

En el primer capítulo damos definiciones y notaciones a utilizar en el desarollo de la teoría.

En el segundo capítulo presentamos una serie de proposiciones con el fin de dar una demostración constructiva de la existencia de las 27 rectas contenidas en la superficie.

En el tercer capítulo estudiamos las representaciones de una supercie cúbica por diferentes tipos de ecuaciones, con el objetivo de obtener explícitamente las ecuaciones de las rectas a partir de un par de triedros de *Steiner.*

En el cuarto capítulo mostramos el algoritmo teórico, justificando cada paso y construcción realizada en este.

En el quinto y último capítulo damos un ejemplo del algoritmo presentado en el capítulo cuatro.

Existen otras formas de dar este algoritmo pero se presentó aquella en la cual los cálculos se reducen a encontrar aproximaciones a raíces de polinomios en cualquier campo algebraicamente cerrado.

También se trato de ver sólo las propiedades geométricas de una superficie cúbica que nos ayudarán a mejorar y entender mejor el algoritmo, olvidándonos de las configuración de las 27 rectas de la superficie..

La demostración tradicional actualmente se puede encontrar en *Mumford, Algebraic Geometry I, Complex proyective varieties, p. 174.* la cual no es una demostración constructiva sino de existencia.

Capítulo 1: CERRADOS ALGEBRAICOS AFINES Y PROYECTIVOS

1.1 Definiciones

Comencemos por dar algunas definiciones básicas y la nomenclatura a utilizar.

Sea $\mathbf{K}$ un campo de característica cero y algebraicamente cerrado, entonces denotaremos por $\mathbf{S}$ como el anillo de polinomios en s-variables, es decir, el conjunto $\mathbf{K}[x_1,...,x_s]$. Definimos un multi-índice $\mathbf{I}=(i_1,...,i_s)$ como un vector en $\mathbf{N}^s$ y denotamos por $|\mathbf{I}| := \Sigma_{n=1}^{n=s} i_n$, así podemos escribir

$$\mathbf{x} := (x_1,...,x_s), \quad x^I := x_1^{i_1} \cdot ... \cdot x_s^{i_s}, \quad \alpha_I := \alpha_{(i_1,...,i_s)}.$$

Una vez definido un multi-índice podemos escribir el subconjunto $\mathbf{S}_d$ de $\mathbf{S}$ de polinomios homogéneos de grado d como el conjunto $\mathbf{S}_d = \{f \in \mathbf{S} : f(\mathbf{x}) = \Sigma_{|\mathbf{I}|=d}\, \alpha_I x^I\}$, de donde tenemos que $\mathbf{S} = \oplus_{d=1}^{\infty} \mathbf{S}_d$.

Una vez definida nuestra nomenclatura, podemos pasar a lo que es un cerrado algebraico afín y proyectivo.

Primero definimos la correspondencia $\mathbf{V}$:

$$\{\mathbf{J} \subseteq \mathbf{S} : \mathbf{J} \textit{ ES IDEAL DE } \mathbf{S}\} \xrightarrow{\mathbf{V}} \{\mathbf{X} \textit{ SUBCONJUNTO DE } \mathbf{K}^s\}$$

Por

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{J}),$$

donde

$$\mathbf{V}(\mathbf{J}) = \{p \in \mathbf{K}^s : f(p) = 0 \quad para\ cada\ f \in \mathbf{J}\}$$

DEFINICION 1.1.1: *Un subconjunto* $X \subset K^s$ *no vacío es una cerrado algebraico afín si* $X = V(J)$ *para algun ideal* J *de S.*

Notemos dos cosas importantes. La primera que **J** no es el ideal cero, ya que **X** esta propiamente contenido en $\mathbf{K}^s$ (el ideal cero genera a K^s) y además, como **X** es no vacío, **J** no puede contener una constante. La segunda es que todo ideal de **S** es finitamente generado esto es consecuencia del teorema fundamental de ***Hilbert*** y además de que los campos como anillos son noetherianos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE HILBERT: *Sea* A *un anillo. Si* A *es noetheriano, entonces* $A[x_1,\ldots,x_s]$ *es noetheriano.*

Ahora si $\mathbf{J} = \langle f_1,\ldots,f_r\rangle$ entonces

$$\mathbf{V}(\mathbf{J}) = \{p \in \mathbf{K}^s : \quad f_i(p) = 0, \forall i = 1,\ldots,r\}$$

Así que una cerrado algebraico afín es justamente un conjunto de puntos en $\mathbf{K}^s$ que satisfacen un número finito de polinomios.

Si $\mathbf{J} = \langle f\rangle$ es un ideal principal, entonces denotamos $\mathbf{V}(\mathbf{J}) = \mathbf{V}(f)$.

DEFINICION 1.1.2: *Un subconjunto* $\mathbf{X} \subset \mathbf{K}^s$ *es una hipersuperficie algebraica afín de grado m, si* $\mathbf{X} = \mathbf{V}(f)$ *para algún* $f \in \mathbf{S}$ *polinomio de grado m. En el caso* $s = 3$ *y* $m = 2$ *la llamaremos superficie algebraica afín cuadrática. Similarmente para los casos* $m = 3, m = 4, m = 5, \ldots$ *la llamaremos cúbica, cuártica, quíntica,..., etc.*

Como vimos anteriormente, f no puede ser constante.

Un polinomio $f \in \mathbf{S}$ tiene una única expresión $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_N$ donde $f_d \in \mathbf{S}_d$, $\forall d = 0, 1, \ldots, N$. A tal descomposición la llamaremos, descomposición homogénea de f.

DEFINICION 1.1.3: *Un ideal $\mathbf{J} \subset \mathbf{S}$ es homogéneo, si para cada $f \in \mathbf{S}$ la descomposición homogénea $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_N$ de f satisface que $f_i \in \mathbf{J}$ para toda $i = 0, 1, \ldots, N$.*

Usando de nuevo el teorema fundamental de ***Hilbert*** para $\mathbf{J}$, tenemos que este está finitamente generado por $f_{d_1}, \ldots, f_{d_r}$, donde la descomposición homogénea $f_{d_i} = f_{d_{i0}} + f_{d_{i1}} + \ldots + f_{d_{iM}}$ para cada $i = 1, \ldots, r$ y los $f_{d_{ij}}$ homogéneos de grado d_{ij}, por lo tanto $\mathbf{J} = \left\langle \cup_{i=1}^{i=r} \{f_{d_{i0}}, f_{d_{i1}}, \ldots, f_{d_{iM}}\} \right\rangle$ donde $M = M(i)$. De donde podemos suponer que $\mathbf{J}$ está generado solamente por polinomios homogéneos.

DEFINICION 1.1.4: *Sea $\mathbf{X} \subset \mathbf{P}^s\mathbf{K}$ el espacio proyectivo s-dimensional sobre $\mathbf{K}$, $\mathbf{X}$ es una cerrado algebraico proyectivo, si $\mathbf{X} = \mathbf{V}(\mathbf{J})$ para algún ideal $\mathbf{J} \neq \cup_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i$ homogéneo de $\mathbf{S}$.*

Pedimos que $\mathbf{J} \neq \cup_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i$ para que $\mathbf{V}(\mathbf{J})$ sea diferente de $\mathbf{X} \neq \mathbf{P}^s\mathbf{K}$ entonces si $\mathbf{J} = \langle f_{d_1}, \ldots, f_{d_r} \rangle$ tendremos que

$$\mathbf{V}(\mathbf{J}) = \{p \in \mathbf{P}^s\mathbf{K} : f_{d_i}(p) = 0, \forall i = 1, \ldots, r\},$$

entonces podemos ver que una cerrado algebraico proyectivo es precisamente un conjunto de puntos que satisface un número finito de polinomios homogéneos.

DEFINICION 1.1.5: *Un subconjunto $\mathbf{X} \subset \mathbf{P}^s\mathbf{K}$ es una hipersuperficie algebraica proyectiva de grado m, si $\mathbf{X} = \mathbf{V}(f)$ para algún polinomio $f \in \mathbf{S}_m$. En el caso $s = 3$ y $m = 2$ la llamaremos superficie algebraica proyectiva cuadrática. Similarmente para* *los casos* $m=3, m=4, m=5, \ldots,$ *la llamaremos cúbica, cuártica, quíntica, ..., etc.*

De ahora en adelante trabajaremos en el espacio proyectivo $\mathbf{P}^s\mathbf{K}$, a menos que se indique que estemos en el espacio afín.

1.2 Multiplicidad de contacto

Consideremos ahora la intersección de una hipersuperficie proyectiva $\mathbf{X} = \mathbf{V}(f)$ de grado m, con una recta l. Sean x^0 y y^0, dos puntos de l linealmente independientes. Un punto arbitrario de la recta l sera de la forma $\lambda x^0 + \mu y^0$, este se encontrará sobre la superfice $\mathbf{X}$ si, y sólo si $f(\lambda x^0 + \mu y^0) = 0$.

Es posible que $f(\lambda x^0 + \mu y^0) \equiv 0$, esto sucede si, y sólo si $l \subset \mathbf{X}$. Consideremos el caso en que l no esta contenida en $\mathbf{X}$.

Sea

$f(\lambda x^0 + \mu y^0) = \lambda^m f(x^0 + \frac{\mu}{\lambda} y^0) = \lambda^m \prod_{i=1}^{i=n} (c_i - \frac{\mu}{\lambda} d_i)^{s_i} = \prod_{i=1}^{i=n} (c_i\lambda - d_i\mu)^{s_i}$

con $\frac{c_i}{d_i} \neq \frac{c_j}{d_j}$ para $i \neq j$, donde $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$ y $\sum_{i=1}^{i=n} s_i = m$.

DEFINICION 1.2.1: *El número s_i es llamado la multiplicidad de contacto* $\mathbf{X}$ *y l en el punto P_i determinado por c_i y d_i, es decir, el punto $c_i x^0 + d_i y^0$.*

PROPOSICION 1.2.2: *La multiplicidad de contacto de* $\mathbf{X}$ *y l en P_i no depende de la elección de x^0 y y^0, ni del sistema de coordenadas.*

Demostración: Sean x' y y' puntos de la recta l, entonces

$$f(\lambda x' + \mu y') = \prod_{i=1}^{i=k} (c'_i\lambda + d'_i\mu)^{t_i},$$

donde suponemos que $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k$ y $\Sigma_{i=1}^{i=k} t_i = m$.

Ahora bien exiten escalares a_0, a_1, b_0 y b_1 en **K** tales que,

$$x_1 = a_0x^0 + b_0y^0,\ y_1 = a_1x^0 + b_1y^0,$$

sustituyendo obtenemos que

$$f(\lambda x' + \mu y') = f(\lambda(a_0x^0 + b_0y^0) + \mu(a_1x^0 + b_1y^0)),$$

factorizamos a x^0 y y^0

$$f((\lambda a_0 + \mu a_1)x^0 + (\lambda b_0 + \mu b_1)y^0)$$

$$= \Pi_{i=1}^{i=n}(c_i(\lambda a_0 + \mu a_1) + d_i(\lambda b_0 + \mu b_1))^{s_i}$$

$$= \Pi_{i=1}^{i=n}((c_ia_0 + d_ib_0)\lambda + (c_ia_1 + d_ib_1)\mu)^{s_i}$$

$$= \Pi_{i=1}^{i=k}(c_i'\lambda + d_i'\mu)^{t_i}$$

por lo tanto $t_i = s_i$ y $k = n$, es decir, la multiplicidad de contacto en P_i no depende de la elección de los puntos x^0 y y^0.

Sea $\mathbf{A} \in PSL(3,\mathbf{K})$ una tansformación proyectiva, es decir un cambio de coordenadas. La transformación **A** manda a **X** en la hipersuperficie $\mathbf{X}' = \mathbf{V}(f')$ con $f' = f \circ \mathbf{A}^{-1}$, esto es cierto ya que $x \in \mathbf{X}$ si, y sólo si $0 = f(x) = f \circ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}x) = f'(Ax)$ si, y sólo si $\mathbf{A}x \in \mathbf{X}'$. La recta $\lambda x^0 + \mu y^0$ es transformada en la recta $\lambda \mathbf{A}x^0 + \mu \mathbf{A}y^0$ bajo **A**, por lo tanto

$$f'(\lambda \mathbf{A}x^0 + \mu \mathbf{A}y^0) = f \circ \mathbf{A}^{-1}(\lambda \mathbf{A}x^0 + \mu \mathbf{A}y^0) = f(\lambda x^0 + \mu y^0),$$

esto implica que

$$f'(\lambda \mathbf{A}x^0 + \mu \mathbf{A}y^0) = \Pi_{i=1}^{i=n}(c_i\lambda - d_i\mu)^{s_i},$$

es decir, la multiplicidad de contacto $\mathbf{X}'$ y la recta $\lambda \mathbf{A}x^0 + \mu \mathbf{A}y^0$ en el punto $\mathbf{A}P_i$, es igual a la multiplicidad de contacto de **X** y la recta l en el punto P_i. ***l.q.q.d.***

Supongamos ahora que el punto x^0 esta en **X** , entonces la multiplicidad de contacto de **X** y l en el punto x^0 es igual a la máxima potencia de μ que puede ser factorizada de $f(x^0+\mu y^0)$.

Desarrollando en serie de Taylor.

$$f(x^0+\mu y^0)=f(x^0)+\mu\nabla f(x^0)y^0+\frac{\mu^2}{2!}hf(x^0)y^0+\frac{\mu^3}{3!}(\ldots)y^0+\ldots$$

donde $f(x^0)=0$, $\nabla f(x^0)$ es el vector gradiente de f y $hf(x^0)$ es la matriz hessiana de f, definida como $hf(x^0)_{ij}=f_{x_i x_j}(x^0)$

Existen dos casos posibles que se pueden presentar:

a) $\nabla f(x^0)=0$,

b) $\nabla f(x^0)\neq 0$.

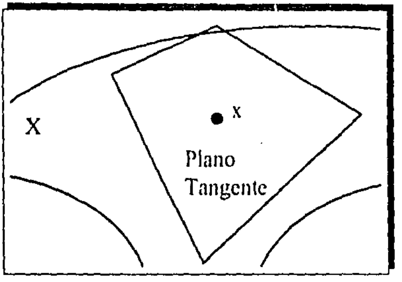
En el caso a), toda la recta l a tráves de x^0 corta a **X** con multiplicidad ≥ 2.

DEFINICION 1.2.3: *Llamaremos a x^0 un punto singular de* **X**, *en al caso de que* $\nabla f(x^0)=0$.

En el caso **b)**, l intersecta a **X** en x^0 con multiplicidad ≥ 2 si, y sólo si $\nabla f(x^0)y^0=0$, es decir, si, y sólo si y^0 esta en la hipersuperficie proyectiva de grado uno

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(x^0)x_0+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_s}(x^0)x_s=0$$

DEFINICION 1.2.4: *La hipersuperficie mencionada el caso* **b)** *es llamada el espacio tangente a* **X** *en x^0 el cual denotaremos por T_{x^0}***X**. *Para el caso $s=3$ la llamaremos plano tangente a* **X** *en x^0*.



Plano tangente a una hipersuperficie no singular en x.

DEFINICION: 1.2.5: *Una hipersuperficie proyectiva no singular es aquella cuyos puntos son no singulares.*

Capítulo 2: SUPERFICIES CUBICAS

2.1 SUPERFICIES CUBICAS

En nuestro estudio nos concentraremos en las superficies algebraicas proyectivas cúbicas no singulares, las cuales llamaremos por simplicidad superficies cúbicas, mientras no exista posible confusión de estar en el espacio afín o en el proyectivo.

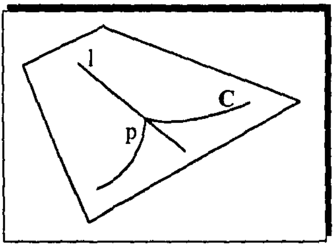
Como consecuencia de la no singularidad tenemos las siguientes proposiciones para una superficie cúbica $\mathbf{X}$ en $\mathbf{P}^3\mathbf{K}$.

LEMA 2.1.1: *Sea $p \in \mathbf{X} \subset \mathbf{P}^3\mathbf{K}$ un punto en una superficie cúbica. Si la intersección de $\mathbf{X}$ con el plano tangente $T_p\mathbf{X}$ es una curva cúbica plana $\mathbf{C} = \mathbf{X} \cap T_p\mathbf{X}$, entonces p es un punto singular de $\mathbf{C}$.*

Demostración: Sea $l \subset T_p\mathbf{X}$ una recta que pase por el punto p, esto implica que la multiplicidad de contacto de l en el punto p a la superficie cúbica es a lo menos dos, por lo tanto $f(x^0 + \mu y^0) = \mu^2(\mu - \alpha)$, donde $x^0 + \mu y^0$ es la ecuación de la recta l.

Ahora bien, esto significa que los puntos x^0 y $x^0 + \alpha y^0$ están en la superficie cúbica y en la recta l, la cual esta contenida en $T_p\mathbf{V}(f)$, por lo tanto si restringimos a f al plano tangente $T_p\mathbf{V}(f)$

tendremos que $f_{|T_pV(f)}(x^0+\mu y^0)\equiv f(x^0+\mu y^0)$, es decir la multiplicidad de contacto en el punto p de la recta l a la curva $\mathbf{C}$ es a lo menos dos, pero como esto se cumple para toda recta $l\subset T_p\mathbf{X}$ que pase por p, entonces toda recta en $T_p\mathbf{X}$ que pase por este punto es tangente a $\mathbf{C}$, lo cual sucede sólo en el caso de ser $p$un punto singular de la curva. *l.q.q.d.*



El punto $p\in \mathbf{C}=\mathbf{X}\cap T_p\mathbf{X}$ es singular en $\mathbf{C}$.

La siguiente proposición analiza las relaciones de las rectas contenidas en la superficie cúbica $\mathbf{X}$ y como es la intersección de un plano $\pi\subset \mathbf{P}^3\mathbf{K}$ con la superficie cúbica.

LEMA 2.1.2: *a) Sea π un plano en $\mathbf{P}^3\mathbf{K}$, entonces π intersecta a $\mathbf{X}$ en alguna de las siguientes curvas;*

i) Una cúbica irreducible,

ii) Una cónica más una recta,

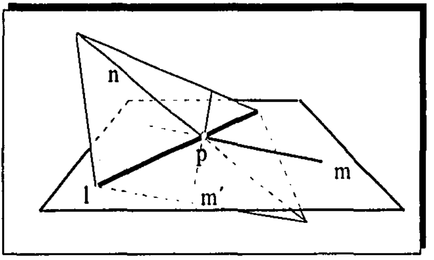
iii) Tres rectas distintas.

b) Existen a lo más tres rectas en $\mathbf{X}$ a través de algún punto p de $\mathbf{X}$; si hay dos o tres, ellas deben ser coplanares.

Demostración: a) Probaremos que una recta múltiple es imposible, para cual damos primero una demostración geométrica y después una demostración algebraica.

Supongamos que el plano π intersecta a **X** en una recta doble l más una recta simple m. Sea p el punto de intersección de esta dos rectas, entonces para toda recta distinta a l y m que este contenida en el plano π y que contenga al punto p, tiene multiplicidad de contacto tres con la superficie **X** en p, es decir $\pi = T_p\mathbf{X}$.

Sea n una recta arbitraria en $\mathbf{P}^3\mathbf{K}$ que pase por el punto p, por lo tanto el plano π' que contiene a l y a n, intersecta a **X** en la recta doble l mas otra recta simple m' y por el mismo argumento del párrafo anterior el plano π' es el plano tangente a **X** en el punto p, lo cual contradice la suposición de que la superficie **X** es no singular.



La curva $\pi \cap \mathbf{X}$ no contiene rectas dobles

Cabe mencionar que en el caso de que la superficie **X** fuera singular, entonces como los puntos de la recta l son puntos singulares de la curva $\pi \cap \mathbf{X}$, por lo tanto el plano π es tangente a la superficie X a lo largo de toda la recta l.

Una demostración algebraica es la siguiente:

Si $\pi:(T=0)$ y $l:(Z=0)\subset\pi$, es decir $l:(T=0,Z=0)$, entonces diremos que l es una recta doble de $\mathbf{X}\cap\pi$ si f es de la forma

$$f(X,Y,Z,T)=Z^2\mathbf{A}(X,Y,Z,T)+T\mathbf{B}(X,Y,Z,T)$$

donde $\mathbf{A}$ es una función lineal y $\mathbf{B}$ una función cuadrática.

Calculamos el gradiente de la ecuación de la superficie y buscamos cuando este se anula

$$\nabla_p f(X,Y,Z,T)=\left(\frac{\partial f}{\partial X},\frac{\partial f}{\partial Y},\frac{\partial f}{\partial Z},\frac{\partial f}{\partial T}\right)$$

Si calculamos las parciales obtenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial X}=Z^2\mathbf{A}_X+T\mathbf{B}_X,\quad \frac{\partial f}{\partial Y}=Z^2\mathbf{A}_Y+T\mathbf{B}_Y$$

$$\frac{\partial f}{\partial Z}=2Z\mathbf{A}+Z^2\mathbf{A}_T+T\mathbf{B}_T,\ \frac{\partial f}{\partial T}=Z^2\mathbf{A}_T+T\mathbf{B}_X+\mathbf{B}$$

Por lo tanto

$$\nabla_p f=(Z^2\mathbf{A}_X+T\mathbf{B}_X,Z^2\mathbf{A}_Y+T\mathbf{B}_Y,2Z\mathbf{A}+Z^2\mathbf{A}_T+T\mathbf{B}_T,Z^2\mathbf{A}_T+T\mathbf{B}_T+\mathbf{B})$$

y $\nabla_p f=0$ en $Z=T=\mathbf{B}=0$ es decir $\mathbf{B}(X,Y,0,0)=0$ (esto porque $\mathbf{B}$ no es constante) contradiciendo que $\mathbf{X}$ es una superficie no singular.

b) Sea $p\in\mathbf{X}$, entonces por el inciso ***a)*** la intersección $T_p\mathbf{X}$ con $\mathbf{X}$ es:

i) Una cúbica irreducible,

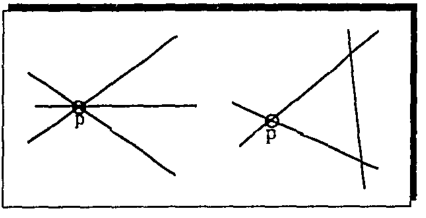
ii) Una cónica más una recta,

iii) Tres rectas distintas.

Para el caso *iii)*, Las tres rectas estan contenidas en la superficie y además son coplanares por encontrarse sobre el plano $T_p\mathbf{X}$. En el caso de que no concurran, entonces las tres rectas l_1, l_2 y l_3 concurren por pares en los puntos $\{P_{12}\} = l_1 \cap l_2$, $\{P_{23}\} = l_2 \cap l_3$ y $\{P_{13}\} = l_1 \cap l_3$, donde algúno de estos tres puntos es el punto p.

El plano $T_p\mathbf{X}$ es tangente a cada uno de los puntos P_{12}, P_{23} y P_{13}, ya que toda recta $l \in T_p\mathbf{X}$ que pase por alguno de los puntos P_{ij}, intersecta a $\mathbf{X}$ en el punto P_{ij} con multiplicidad de contacto dos (por ser singular) y en el punto Q con multiplicidad de contacto uno, donde $\{Q\} = l \cap l_{ij}$, por lo tanto los planos $T_p\mathbf{X}$ y $T_{P_{ij}}\mathbf{X}$ son los mismos, es decir el plano $T_p\mathbf{X}$ es un plano tritangente.

Al conjunto formado por tres planos tritangentes se le conoce por ***triedro de Steiner***.



Existen a lo más tres rectas de $\mathbf{X}$ a través de un punto $p \in \mathbf{X}$.

El caso de que las tres rectas concurran en el punto p, tendremos que este es un punto singular de la curva $\pi \cap \mathbf{X}$, por lo tanto el plano π es tangente a $\mathbf{X}$ en el punto p. ***l.q.q.d.***

DEFINICION 2.1.3: *La polar de una superficie cúbica* $\mathbf{X} = \mathrm{V}(f)$ *es una función*

$$f_1 : \mathbf{P}^3\mathbf{K} \times \mathbf{P}^3\mathbf{K} \to \mathbf{K}$$

definida por

$$f_1(X,Y,Z,T;X',Y',Z',T') = f_X X' + f_Y Y' + f_Z Z' + f_T T'$$

Observemos que si tenemos que $P = (X,Y,Z,T) \in \mathbf{X}$ y $P \neq Q$ con $Q = (X',Y',Z',T') \in \mathbf{X}$, entonces $f_1(P,Q) = f_1(Q,P) = 0$ si, y sólo si, $l_{PQ} \subset T_P\mathbf{X}$, donde l_{PQ} es la recta que pasa por P y Q.

La observación anterior resulta obvia si vemos que la función polar es la ecuación del plano tangente en el punto P, es decir $f_1(P;Q) = f_1(Q;P) = 0$ si, y sólo si, $Q \in T_P\mathbf{X}$ y $P \in T_Q\mathbf{X}$, por lo tanto la recta l_{PQ} es tangente a $\mathbf{X}$ en los puntos P y Q, es decir la multiplicidad de contacto de $\mathbf{X}$ con la recta es a lo menos dos en cada punto, esto implica que el grado del polinomio $f(x^0 + \mu y^0)$ donde $x^0, y^0 \in l$, es a lo menos cuatro, lo cual sucede sólo en el caso de que el polinomio sea el polinomio cero, es decir en el caso de que $l \subset \mathbf{X}$.

Otra observación es que la polar de f es lineal en sus últimas cuatro entradas

$$f_1(P, \lambda Q + R) = \lambda f_1(P,Q) + f_1(P,R)$$

donde $P,Q,R \in \mathbf{P}^3\mathbf{K}$ y $\lambda \in \mathbf{K}$.

LEMA 2.1.4: *Sea* $\mathbf{C} = \mathrm{V}(f)$ *una curva cúbica en* $\mathbf{P}^2\mathbf{K}$. *Si* $\mathbf{C}$ *es irreducible y singular, entonces* $\mathbf{C}$ *es una cúbica nodal o cuspidal.*

Demostración: Sea $\mathbf{C} = \mathrm{V}(f)$ un curva cúbica donde

$$
\begin{aligned}
f(X,Y,Z) = {} & a_{300}X^3 + a_{030}Y^3 + a_{003}Z^3 \\
& + a_{210}X^2Y + a_{201}X^2Z \\
& + a_{120}XY^2 + a_{021}Y^2Z \\
& + a_{102}XZ^2 + a_{012}YZ^2 \\
& + a_{111}XYZ
\end{aligned}
$$

y supongamos que $p = (0,0,1) \in \mathbf{C}$, esto implica que el coeficiente a_{003} es cero.

Una curva cúbica plana irreducible no puede tener más de un punto singular, porque si hay dos puntos singulares en **C**, entonces la recta que pasa por ellos, en cada uno de estos puntos tendría multiplicidad de contacto a lo menos dos, con la curva **C**, es decir, el polinomio $f(x^0 + \mu y^0)$ tendría cuatro raíces y por lo tanto la recta estaría completamente contenida en **C**, lo cual contradice la hipótesis de ser una curva irreducible.

Supongamos que p es el punto singular de **C**, por lo tanto $\nabla f(p) = 0$, es decir, $f_X(0,0,1) = 0$, $f_Y(0,0,1) = 0$, $f_Z(0,0,1) =$.

Calculemos $\nabla f(p)$

$$f_X = 3a_{300}X^2 + 2a_{210}XY + 2a_{201}XZ + a_{120}Y^2 + a_{102}Z^2 + a_{111}YZ\,,$$

$$f_Y = 3a_{030}Y^2 + a_{210}X^2 + 2a_{120}XY + 2a_{021}YZ + a_{012}Z^2 + a_{111}XZ\,,$$

$$f_Z = a_{201}X^2 + a_{021}Y^2 + 2a_{102}XZ + 2a_{012}YZ + a_{111}XY\,,$$

evaluando en $p = (0,0,1)$

$$f_X(0,0,1) = a_{102},\ f_Y(0,0,1) = a_{012},\ f_Z = (0,0,1) = 0$$

por lo tanto los coeficientes a_{102} y a_{012} son iguales a cero.

Ahora calculemos la matriz hessiana hf en p, donde

$$hf=\begin{pmatrix} f_{XX} & f_{XY} & f_{XZ} \\ f_{XY} & f_{YY} & f_{ZY} \\ f_{XZ} & f_{ZY} & f_{ZZ} \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} f_{XX} &= 6a_{300}X+2a_{210}Y+2a_{201}Z, \\ f_{YY} &= 6a_{030}Y+2a_{120}X+2a_{021}Z, \\ f_{ZZ} &= 2a_{102}X+2a_{012}Y, \\ f_{XY} &= 2a_{210}X+2a_{120}Y+a_{111}Z, \\ f_{XZ} &= 2a_{201}X+a_{111}Y, \\ f_{ZY} &= 2a_{021}Y+a_{111}X, \end{aligned}$$

sustituyendo en p

$$f_{XX}(p)=2a_{201},\ f_{YY}(p)=2a_{021},\ f_{XY}(p)=a_{111},$$

$$f_{ZZ}(p)=f_{XZ}(p)=f_{XZ}(p)=0,$$

obteniendo que

$$hf(0,0,1)=\begin{pmatrix} 2a_{201} & a_{111} & 0 \\ a_{111} & 2a_{021} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por

$$Hf(0,0,1)=\det\begin{pmatrix} 2a_{201} & a_{111} \\ a_{111} & 2a_{021} \end{pmatrix}=4a_{201}a_{021}-a_{111}^2$$

y lo llamaremos el hessiano de f.

Ahora bien

$$\begin{aligned} f(X,Y,Z)= {} & a_{300}X^3+a_{030}Y^3+a_{210}X^2Y+a_{201}X^2Z \\ & +a_{120}XY^2+a_{021}Y^2Z+a_{111}XYZ, \end{aligned}$$

entonces la mejor aproximación cuadrática a **C** en el punto p es la curva cuadrática $V(h'f)$, donde

$$h'f(X,Y,Z) = a_{201}X^2 + a_{111}XY + a_{021}Y^2$$

inducida por la matriz hessiana bajo la biyección natural

$$\mathbf{A}X^2 + \mathbf{B}XY + \mathbf{C}Y^2 + \mathbf{D}XZ + \mathbf{E}YZ + \mathbf{F}Z^2 \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2\mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & 2\mathbf{C} & \mathbf{E} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & 2\mathbf{F} \end{pmatrix}$$

entre los polinomios cuadráticos homogéneos y las formas bilineales simétricas sobre $\mathbf{K}^3$.

La curva $V(h'f)$ es reducible a un par de lineas L_1, L_2, con

$$L_1 : (2a_{201}X + (a_{111} - \sqrt{a_{111}^2 - 4a_{201}a_{021}}\,)Y = 0)\,,$$

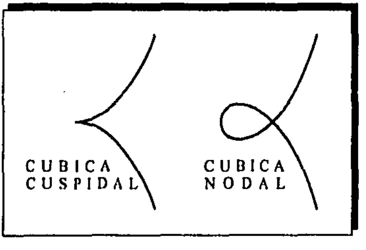
$$L_2 : (2a_{201}X + (a_{111} + \sqrt{a_{111}^2 - 4a_{201}a_{021}}\,)Y = 0)\,,$$

donde $a_{111}^2 - 4a_{201}a_{021} = -Hf(0,0,1)$.

Tenemos dos casos:

a) $Hf(0,0,1) = 0$ caso cuspidal,

b) $Hf(0,0,1) \neq 0$ caso nodal.



Tipo de curvas cúbicas singulares.

Caso *a)* Si $Hf(0,0,1)=0$, entonces $L_1=L_2$, decimos entonces que el punto p es un punto cuspide y **C** una cúbica cuspidal. Supongamos sin perdida de generalidad que la ecuación de L_1 es $(X=0)$, esto implica que $a_{111}=0$ y $a_{201}=1$, pero estamos suponiendo que

$$a_{111}^2-4a_{201}a_{021}=0$$

por lo tanto $a_{021}=0$, concluimos que:

$$f(X,Y,Z)=a_{300}X^3+a_{030}Y^3+a_{210}X^2Y+X^2Z+a_{120}XY^2$$

Sea $T\in PSL(3,\mathbf{K})$ una transformación proyectiva definida por:

$$T(X,Y,Z)=(X,Y,-a_{300}X-a_{210}Y),$$

aplicando el polinomio f a la transformación tenemos que

$$f(T(X,Y,Z))=a_{030}Y^3+X^2Y+a_{120}XY^2$$

observemos que el coeficiente a_{030} es diferente de cero, ya que de no ser así **C** sería reducible a:

$$f(T(X,Y,Z))=X(XZ-a_{120}Y^2)$$

contradiciendo nuestra suposición de ser **C** un curva irreducible. Por esta razón podemos definir la transformación

$$U(X,Y,Z)=(X,-\frac{a_{120}}{3a_{030}}X+Y,GX+HY+Z),$$

donde

$$G=a_{030}\left(\frac{a_{120}}{3a_{030}}\right)^3-a_{120}\left(\frac{a_{120}}{3a_{030}}\right)^2,$$

$$H=-3a_{030}\left(\frac{a_{120}}{3a_{030}}\right)^3+2a_{120}\left(\frac{a_{120}}{3a_{030}}\right),$$

con $U\in PSL(3,\mathbf{K})$, por lo tanto

$$f(U\circ T(X,Y,Z))=a_{030}Y^3+X^2Y,$$

De esta manera podemos suponer que la ecuación de una curva cúbica con la cuspide en el punto $(0,0,1)$ tiene como ecuación

$$f(X,Y,Z)=a_{030}Y^3+X^2Y.$$

Caso *b)* Si $Hf(0,0,1)\neq 0$, entonces $L_1\neq L_2$, decimos entonces que p es un punto nodo y **C** una cúbica nodal. Supongamos sin perdida de generalidad que la ecuación para L_1 es $(X=0)$, y para L_2 sea $(Y=0)$, esto implica que:

$$h'f(0,0,1)=XY$$

por lo tanto los coeficientes a_{201}, a_{021} son iguales a cero y $a_{111}=1$, obteniendo que la ecuación de **C** sera:

$$f(X,Y,Z)=a_{300}X^3+a_{030}Y^3+a_{210}X^2Y+a_{120}XY^2+XYZ$$

Sea $T\in PSL(3,\mathbf{K})$ una transformación proyectiva definida como

$$T(X,Y,Z)=(X,Y,-a_{210}X-a_{120}Y+Z)$$

evaluando el polinomio f en la transformación

$$f(T(X,Y,Z))=a_{300}X^3+a_{030}Y^3+XYZ$$

Por lo tanto podemos suponer que la ecuación de una curva cúbica nodal con el nodo en el punto $(0,0,1)$ tiene la ecuación

$$f(X,Y,Z)=a_{300}X^3+a_{030}Y^3+XYZ$$

donde los coeficientes a_{300}, a_{030} son diferentes de cero, ya que de otra manera la polinomio f seria factorizable en algúna de las siguientes formas:

$$f(X,Y,Z)=Y(a_{030}Y^2+XZ) \text{ si } a_{300}=0,$$
$$f(X,Y,Z)=X(a_{300}X^2+YZ) \text{ si } a_{030}=0. \qquad \textit{l.q.q.d.}$$

El siguiente teorema nos da una demostración de existencia de una recta contenida en una superficie cúbica mediante una construcción, la cual será la base para el algoritmo a construir en el siguiente capítulo.

PROPOSICION 2.1.5: *Existe a lo menos una recta en la superficie cúbica* **X**.

Demostración: Sea $p \in \mathbf{X} = V(f)$ y $\mathbf{C} = T_p\mathbf{X} \cap \mathbf{X}$ una curva cúbica plana que por el Lema 2.1.1 es singular en $p \in \mathbf{C}$. Podemos suponer que la curva **C** es irreducible, ya que de otra manera esta curva sería una cónica (reducible o irreducible) más una recta la cual se encuentra sobre la superficie y entonces habriamos terminado. Supongamos que la curva plana **C** es irreducible y por el Lema 2.1.4. ésta es una cúbica cuspidal o nodal.

Podemos elegir coordenadas (X, Y, Z, T) de $\mathbf{P}^3\mathbf{K}$ para que $T_p\mathbf{X} : (T=0), p=(0,0,1,0)$, y

$$\mathbf{C} : (X^2Z = RY^3) \text{ o } (XYZ = RX^3 + SY^3),\ \text{con } R,S \neq 0,$$

donde **C** es cuspidal o nodal dependiendo de la matriz de segundas derivadas (o matriz hessiana) de f en p.

Primer caso: Si la curva es una cúbica cuspidal, supongamos que:

$$f(X,Y,Z,T) = X^2Z - RY^3 + gT,$$

donde $g = g(X,Y,Z,T)$ es una forma cuadrática.

El punto $p = (0,0,1,0)$ vive en la superficie y por ser esta no singular, entonces el gradiente en este punto es diferente de cero.

Si calculamos el gradiente tenemos que

$$\nabla_p f = (2XZ + g_X T, 3Y + g_Y T, X^2 + g_T T, g + g_T T),$$

evaluando en $p = (0,0,1,0)$.

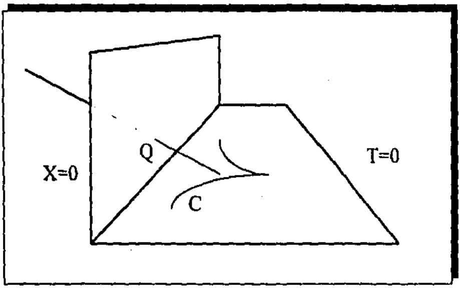
$$\nabla_p f = (0,0,0,g(0,0,1,0))$$

y por lo tanto $g(0,0,1,0) \neq 0$, es decir, si escribimos a g de la siguiente manera

$$g(X,Y,Z,T) = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DT^2 + EXY + FXZ$$
$$+GXT + HYZ + IYT + JZT$$

entonces C es diferente de cero.

Sea $P_\alpha = (1,\alpha,R\alpha^3,0)$ una parámetrizacion de nuestra curva **C**, con $\alpha \in$ **K**. Sea $l_{P_\alpha Q}$ una recta de $\mathbf{P}^3\mathbf{K}$ a través de P_α que intersecta al plano $\pi : (X=0)$ en un punto $Q=(0;Y;Z;T)$. Esta recta estará contenida en la superficie **X** si, y sólo si $f(\lambda P_\alpha + \mu Q) \equiv 0$.



Recta $l_{P_\alpha Q}$ contenida en **X** atravesando a la curva **C** .

Si expandemos $f(\lambda P_\alpha + \mu Q)$ en serie de potencias tendremos que

$$f(\lambda P_\alpha + \mu Q) = \lambda^3 f(P_\alpha) + \lambda^2\mu f_1(P_\alpha;Q) + \lambda\mu^2 f_1(Q;P_\alpha) + \mu^3 f(Q),$$

donde f_1 es la polar de f y $f(P_\alpha)=0$, por lo tanto $f(\lambda P_\alpha + \mu Q) \equiv 0$ si, y sólo si, $f_1(P_\alpha,Q) = f_1(Q,P_\alpha) = f(Q) = 0$.

Ahora calculemos a f_1 la polar de f

$$f_1(X,Y,Z,T;X',Y',Z',T')=(2XZ+g_XT)X'+(-3RY^2+g_YT)Y'$$
$$+(X^2+g_ZT)Z'+(g+g_TT)T'$$

factorizando a T, tenemos

$$f_1(X,Y,Z,T;X',Y',Z',T')=2XZX'-3RY^2Y'+X^2Z'+gT'+g_1T,$$

donde $g_1=g_1(X,Y,Z,T;X',Y',Z',T')$ es la polar de g, siendo g_1 una forma bilíneal simétrica, es decir $g_1(P_\alpha;Q)=g_1(Q;P_\alpha)$.

Sustituimos $P_\alpha=(1,\alpha,R\alpha^3,0)$ y $Q=(0,Y,Z,T)$, obtenemos las cuatro ecuaciones que deben cumplir α y $Q=(0;Y;Z;T)$ para que la línea $l_{P_\alpha Q}$ este contenida en $\mathbf{X}$.

$$L=f_1(P_\alpha;Q)=-3R\alpha^2Y+Z+g(1,\alpha,R\alpha^3,0)T=0,$$

$$M=f_1(Q;P_\alpha)=-3R\alpha Y^2+g_1(1,\alpha,R\alpha^3,0;0,Y,Z,T)T=0,$$

$$N=f(Q)=-RY^3+g(0,Y,Z,T)T=0.$$

Probemos ahora que el sistema de ecuaciones $L=M=N=0$ tiene solución, es decir, si las superficies $\mathbf{V}(L)$, $\mathbf{V}(M)$ y $\mathbf{V}(N)$ de grados uno, dos y tres respectivamente, se intersectan en un punto $(\alpha:\eta:\zeta:\tau)\in\mathbf{P}^3\mathbf{K}$..

De la ecuación $L=0$ podemos despejar Z, es decir,

$$f_1(P_\alpha;Q)=0\Leftrightarrow Z=3R\alpha^2Y-g(1,\alpha,R\alpha^3,0)T$$

y la sustituimos en $M=0$, en donde

$$g(P_\alpha)=CR^2\alpha^6+HR\alpha^4+FR\alpha^3+B\alpha^2+E\alpha+A\in\mathbf{K}[\alpha]$$

es un polinomio de grado seis por ser $C\neq 0$.

$$M=-3R\alpha Y^2+g_1(P_\alpha;0,Y,3R\alpha^2Y-g(P_\alpha)T,T)T$$

Pero por linealidad de la polar g_1 en sus últimas cuatro coordenadas tendremos que:

$$M=b_0Y^2+b_1YT+b_2T^2,$$

donde

$$b_0 = -3R\alpha,$$

$$b_1 = g_1(P_\alpha; 0, 1, 3R\alpha^2, 0),$$

$$b_2 = g_1(P_\alpha; 0, 0, -g(P_\alpha), 1),$$

desarrollando los polinomios

$b_0 = -3R\alpha,$

$b_1 = 6CR^2\alpha^5 + 4HR\alpha^3 + 3FR\alpha^2 + 2B\alpha + E,$

$$b_2 = -2C^2\alpha^9 - 3CHR^2\alpha^7 - 3CFR^2\alpha^6 - (2BC + H^2)R\alpha^5$$
$$-2(CE + FH)R\alpha^4 - (2CAR + BH + F^2R - JR)\alpha^3 - (EH + BF)\alpha^2$$
$$-(AH + EF - I)\alpha - AF + G.$$

De manera ánaloga sustituyendo Z en la ecuación $N = 0$

$$N = -RY^3 + g(0, Y, 3R\alpha^2 Y - g(P\alpha)T, T)T,$$

lo cual podemos escribir de la siguiente manera

$$N = -RY^3 + g(Y(0, 1, 3R\alpha^2, 0) + T(0, 0, -g(P_\alpha), 1))T,$$

expandiendo en potencias de λ y μ,

$$N = c_0 Y^3 + c_1 Y^2 T + c_2 Y T^2 + c_3 T^3,$$

donde

$$c_0 = -R,$$

$$c_1 = g(0, 1, 3R\alpha^2, 0),$$

$$c_2 = g_1(0, 1, 3R\alpha^2, 0; 0, 0, -g(P_\alpha), 1),$$

$$c_3 = g(0, 0, -g(P_\alpha), 1),$$

desarrollando los polinomios en α,

$c_0 = -R,$

$$c_1 = 9CR^2\alpha^4 + 3HR\alpha^2 + B,$$

$$c_2 = -6C^2R^3\alpha^8 - 7CHR^2\alpha^6 - 6CFR^2\alpha^5 - (6BC + H^2)R\alpha^4$$
$$-(6CE + FH)R\alpha^3 - (6ACR - BH - 3JR)\alpha^2 - EH\alpha + I - AH,$$

$$c_3 = C^3R^4\alpha^{12} + 2C^2HR^3\alpha^{10} + 2C^2FR^3\alpha^9 + (2BC^2 + CH^2)R^2\alpha^8$$
$$+2(C^2E + CFH)R^2\alpha^7 + (CF^2R + 2AC^2R + 2BCH - CJR)R\alpha^6$$
$$+(2CEH + 2BCF)R\alpha^5 + (B^2C + 2ACHR + 2CEFR - HJR)\alpha^4$$
$$+(2ACFR + 2BCE - FJR)\alpha^3 + (CE^2 + 2ABC - BJ)\alpha^2$$
$$+(2ACE - EJ)\alpha + A^2C + D - AJ.$$

Ahora bien, las siguientes ecuaciones tienen un cero en común $(\eta : \tau) \in \mathbf{P}^1\mathbf{K}$,

$$M = b_0Y^2 + b_1YT + b_2T^2 = 0,$$
$$N = c_0Y^3 + c_1Y^2T + c_2YT^2 + c_3T^3 = 0$$

si, y sólo si el siguiente resultante es cero:

$$R_{27}(\alpha) = \det\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

El cual es un polinomio en α de grado 27, lo cual podemos probar si tomamos los términos principales de cada entrada y calculamos el determinante:

$$\det\begin{pmatrix} -3R\alpha & 6CR^2\alpha^5 & -2C^2R^3\alpha^9 & 0 & 0 \\ 0 & -3R\alpha & 6CR^2\alpha^5 & -2C^2R^3\alpha^9 & 0 \\ 0 & 0 & -3R\alpha & 6CR^2\alpha^5 & -2C^2R^3\alpha^9 \\ -R & 9CR^2\alpha^4 & -6C^2R^3\alpha^8 & C^3R^4\alpha^{12} & 0 \\ 0 & -R & 9CR^2\alpha^4 & -6C^2R^3\alpha^8 & C^3R^4\alpha^{12} \end{pmatrix}.$$

Obteniendo el polinomio $C^6R^{11}\alpha^{27}$ de grado 27 en α donde $C,R\neq 0$. Por lo tanto $R_{27}(\alpha)$ es un polinomio de grado 2.

Una vez obteniendo la raíz α_0, para este resolvamos el sistema:

$$b_0(\alpha_0)Y^2+b_1(\alpha_0)YT+b_2(\alpha_0)T^2=0\ ,$$

$$c_0(\alpha_0)Y^3+c_1(\alpha_0)Y^2T+c_2(\alpha_0)YT^2+c_3(\alpha_0)=0\ .$$

el cual tiene solución ya que su resultante es igual a cero. Sea $(\eta:\tau)$ un solución al sistema anterior, por lo tanto sustituyendo en la ecuación

$$Z=3R\alpha^2Y-g(1,\alpha,R\alpha^3,0)T$$

la cual es equivalente a la ecuación $L=f_1(P_\alpha;Q)=0$.

Definamos como $\varsigma=3R\alpha^2\eta-g(1,\alpha,R\alpha^3,0)\tau$, concluimos entonces que el punto $(\alpha:\eta:\varsigma:\tau)$ se encuentra en la intersección de las superficies $\mathbf{V}(L)$, $\mathbf{V}(M)$ y $\mathbf{V}(N)$, por lo tanto, la recta $l_{P_{\alpha_0}Q}$ que esta determinada por los puntos $(1;\alpha;R\alpha^3;0)$ y $(0;\eta;\zeta;\tau)$, esta completamente contenida en la superficie $\mathbf{X}$, por ser solución para el sistema $L=M=N=0$.

Segundo caso: Si la curva es una cúbica nodal, entonces supongamos que

$$f(X,Y,Z,T)=XYZ-RX^3-SY^3+gT,\ \text{con } R \text{ y } S\neq 0.$$

Por vivir el punto $p=(0,0,1,0)\in\mathbf{X}$, entonces $\nabla_p f\neq 0$, donde

$$\nabla_p f=(YZ-3RX^2+g_XT,XZ-3SY^2+g_YT,XY+g_ZT,g+g_TT),$$

evaluado en p

$$\nabla_p f = (0,0,0,g(0,0,1,0)) \neq 0 \Leftrightarrow C \neq 0\,.$$

De manera completamente analoga al caso anterior calculamos a f_1 la polar de f.

$$f_1 = (X,Y,Z,T;X',Y',Z',T') = (YZ-2RX^2)X' + (XZ-3SY^2)Y'$$

$$+XYZ' + gT' + g_1 T,$$

Sea $P_\alpha = (\alpha, \alpha^2, R+S\alpha^3, 0)$ una parámetrización de la curva **C** con $\alpha \neq 0, \infty$ y $Q = (0,Y,Z,T)$. Encontremos ahora la condiciones para que la recta $l_{P_\alpha Q}$ este contenida en **X.** Expandiendo $f(\lambda P_\alpha + \mu Q)$ en términos de la polar de f, obtenemos las ecuaciones:

$$L = f_1(P_\alpha;Q) = (-2S\alpha^4 + R\alpha)Y + \alpha^3 Z + g(\alpha,\alpha^2,R+S\alpha^3,0)T\,,$$

$$M = f_1(Q;P_\alpha) = YZ\alpha - 3SY^2\alpha^2 + g_1(\alpha,\alpha^2,R+S\alpha^3,0;0,Y,Z,T)T\,,$$

$$N = f(Q) = -SY^3 + g(0,Y,Z,T)T\,.$$

Resolvamos este sistema en $(\alpha;\eta;\zeta;\tau)$ despejando a Z de la ecuación $L=0$ y sustituyéndola en $M=0$.

$$Z = (2S\alpha - R\alpha^{-2})Y + g(P_\alpha)\alpha^{-3}T\,,$$

donde $g(P_\alpha) = CS^2\alpha^6 + HS\alpha^5 + (B+FS)\alpha^4 + (2CRS+E)\alpha^3$

$$+(A+HR)\alpha^2 + FR\alpha + CR^2\,,$$

es un polinomio de grado seis en $\mathbf{K}[\alpha]$, ya que $C \neq 0$, por lo tanto,

$$M = Y((2S\alpha - R\alpha^{-2})Y + g(P_\alpha)\alpha^{-3}T)\alpha - 3SY^2\alpha^2$$

$$+g_1(\alpha,\alpha^2,R+S\alpha^3,0;0,Y,(2S\alpha - R\alpha^{-2})Y + g(P_\alpha)\alpha^{-3}T,T)T\,,$$

pero por linealidad de las últimas cuatro cordenadas de g_1

$$M = b_0Y^2 + b_1YT + b_2T^2\,,$$

donde

$$b_0 = -(S\alpha^2 + R\alpha^{-1}),$$

$$b_1 = g(P_\alpha)\alpha^{-2} + g_1(P_\alpha; 0, 1, 2S\alpha - R\alpha^{-2}, 0),$$

$$b_2 = g_1(P_\alpha; 0, 0, g(P_\alpha)\alpha^{-3}, 1),$$

ahora, sí desarrollamos estos polinomios, tendremos que:

$b_0 = -S\alpha^2 - R\alpha^{-1}$,

$b_1 = 5CS^2\alpha^4 + 4HS\alpha^3 + 3(B+FS)\alpha^2 + (2E+4CRS)\alpha$

$\quad +A + HR - CR^2\alpha^{-2}$,

$b_2 = 2C^2S^3\alpha^6 + 3CHS^2\alpha^5(2BCS + H^2S + 3CFS^2)\alpha^4$

$\quad +(BH + 2CES + 2FHS + JS + 6C^2RS^2)\alpha^3$

$\quad +(I + BF + EH + 2ACS + F^2S + 6CHRS)\alpha^2$

$\quad +(EF + G + AH + 2BCR + H^2R + 6CFRS)\alpha$

$\quad +AF + 2CER + 2FHR + JR + 6C^2R^2S + (2ACR + F^2R + 3CHR^2)\alpha^{-1}$

$\quad +3CFR^2\alpha^{-2} + 2C^2R^3\alpha^{-3}$.

Para este caso tenemos que b_0, b_1 y b_2, son funciones racionales en α, es decir, $b_0, b_1, b_2 \in \mathbf{K}(\alpha)$.

Ahora sustituimos Z en la ecuación $N = 0$,

$$N = -SY^3 + g(0, Y, (2S\alpha - R\alpha^{-2})Y + g(P_\alpha)\alpha^{-3}T, T)T$$

lo cual equivale a:

$$N = -SY^3 + g(Y(0, 1, 2S\alpha - R\alpha^{-2}, 0) + T(0, 0, g(P_\alpha)\alpha^{-3}, 1))T,$$

expandiendo en potencias de λ y μ,

$$N = c_0Y^3 + c_1Y^2T + c_2YT^2 + c_3T^3$$

donde

$$c_0 = -S,$$

$$c_1 = g(0,1,2S\alpha - R\alpha^{-2},0),$$

$$c_2 = g_1(0,1,2S\alpha - R\alpha^{-2},0;0,0,g(P_\alpha)\alpha^{-3},1),$$

$$c_3 = g(0,0,g(P\alpha)\alpha^{-3},1).$$

Desarrollando éstas funciones racionales en α, tenemos que:

$$c_0 = -S,$$

$$c_1 = 4CS^2\alpha^2 + 2HS\alpha + B - 4CRS\alpha^{-1} - HR\alpha^{-2} + CR^2\alpha^{-4},$$

$$\begin{aligned}c_2 = {} & 4C^2S^3\alpha^4 + 5CHS^2\alpha^3 + (4BCS + H^2S + 4CFS^2)\alpha^2 \\ & +(BH + 4CES + FHS + 2JS + 6C^2RS^2)\alpha + 4CS(A + HR) + I + EH \\ & +(AH - 2BCR + H^2R + 2CFRS)\alpha^{-1} + (FHR - 2CER - JR)\alpha^{-2} \\ & -(2ACR + CHR^2)\alpha^{-3} - 2CF^2R^2\alpha^{-4} - 2C^2R^3\alpha^{-5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_3 = {} & C^3S^4\alpha^6 + 2C^2HS^3\alpha^5 + (2BC^2S^2 + CH^2S^2 + 2C^2FS^3)\alpha^4 \\ & +(2BCHS + 2C^2ES^2 + 2CFHS^2 + CJS^2 + 4C^3RS^3)\alpha^3 \\ & +(B^2C + 2BCFS + 2CEHS + HJS + S^2(2AC + F^2 + 6CHR))\alpha^2 \\ & +(2BCE + BJ + FJS + 2CS(EF + AH + 2BCR + H^2R + 3CFRS))\alpha \\ & +2ACFS + 4C^2ERS + 4CFHRS + 2CJRS + 6C^3R^2S^2 \\ & +(2ACE + AJ + 2BCFR + 2CEHR + HJR + 4AC^2RS \\ & +2CF^2RS + 6C^2HR^2S)\alpha^{-1} \\ & +(A^2C + 2CEFR + 2ACHR + FJR + 2BC^2R^2 + CH^2R^2 \\ & +6C^2FR^2S)\alpha^{-2} \\ & +(2ACFR + 2C^2ER^2 + 2CFHR^2 + CJR^2 + 4C^3R^3S)\alpha^{-3}.\end{aligned}$$

También en este caso las funciones $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{K}(\alpha)$.

Con el cambio de variable $\beta = \alpha^{-5}$, definimos a

$$b_0' = b_0(\beta),\ b_1' = b_1(\beta),\ b_2' = b_2(\beta),$$

$$c_0' = c_0(\beta),\ c_1' = c_1(\beta),\ c_2' = c_2(\beta),\ c_3' = c_3(\beta).$$

De la misma manera obtenemos un polinomio resultante $R_{27}(\beta)$, el cual es cero si, y sólo si las ecuaciones $M=0$, $N=0$ tienen un cero en común $(\eta;\tau)\in \mathbf{P}^3\mathbf{K}$.

$$R_{27}(\beta) = \det\begin{pmatrix} b_0' & b_1' & b_2' & 0 & 0 \\ 0 & b_0' & b_1' & b_2' & 0 \\ 0 & 0 & b_0' & b_1' & b_2' \\ c_0' & c_1' & c_2' & c_3' & 0 \\ 0 & c_0' & c_1' & c_2' & c_3' \end{pmatrix},$$

que de manera analoga al caso anterior este también es un polinomio resultante en β de grado 27. Por lo tanto obteniendo una raíz β_0, para este polinomio, resolvamos el sistema bajo la sustitución de $\alpha_0 = \beta_0^{-5}$, donde $\alpha_0 \neq 0,\infty$ implica que $\beta_0 \neq 0,\infty$:

$$b_0(\alpha_0)Y^2 + b_1(\alpha_0)YT + b_2(\alpha_0)T^2 = 0\ ,$$

$$c_0(\alpha_0)Y^3 + c_1(\alpha_0)Y^2T + c_2(\alpha_0)YT^2 + c_3(\alpha_0) = 0\ .$$

este sistema tiene solución ya que su resultante es igual a cero.

Sea $(\eta;\tau)$ un solución al sistema anterior, sustituyéndola en la ecuación:

$$Z = (2S\alpha - R\alpha^{-2})Y + g(P_\alpha)\alpha^{-3}T,$$

la cual es equivalente a la ecuación $f_1(P_\alpha, Q) = 0$.

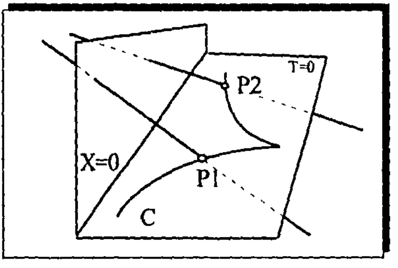
Definamos como $\varsigma = (2S\alpha - R\alpha^{-2})\eta + g(P_\alpha)\alpha^{-3}\tau$, conncluimos entonces que la recta $l_{P_\alpha Q}$ que esta determinada por los puntos $(\alpha;\alpha^2;R+S\alpha^3;0)$ y $(0;Y;Z;T)$, esta completamente contenida en la superficie $\mathbf{X}$, por ser solución para el sistema

$$f_1(P_\alpha, Q) = f_1(Q, P_\alpha) = f(Q) = 0. \qquad \textbf{\textit{l.q.q.d.}}$$

El siguiente corolario nos da la cantidad de rectas que se encuentran sobre una superficie cúbica no singular.

COROLARIO 2.1.6: *Existe exactamente 27 rectas contenidas en una superficie cúbica no singular.*

Demostración: En la demostración de la Proposición 2.1.5, se probó que existe un polinomio resultante $R_{27}(\alpha)$ o $R_{27}(\beta)$ según sea el caso, que tiene 27 raíces ya que $\alpha \neq 0, \infty$ y por la Proposición 2.1.2, la superficie no tiene rectas dobles, por lo tanto las raíces de $R_{27}(\alpha)$ son todas distintas. Pero cada raíz α_0 de éste corresponde un único punto P_{α_0} el cual determina una única recta diferente en la superficie, de donde existen exactamente 27 rectas contenidas en una superficie cúbica no singular. *l.q.q.d.*



Cada raíz α_1, α_2 del polinomio resultante R_{27} determina rectas diferentes l_{P_1Q} y l_{P_2Q} completamente contenidas en la superficie **X**.

PROPOSICION 2.1.7: *Dada una recta l contenida en la superficie* **X**, *existen cinco pares de rectas (l_i, l'_i) de* **X** *tales que:*

i) l, l_i y l'_i son coplanares para $i = 1, \ldots, 5$;

ii) $(l_i \cup l'_i) \cap (l_j \cup l'_j) = \phi$ para $i \neq j$.

Demostración: i) Sea π es un plano de $\mathbf{P}^3\mathbf{K}$ que contiene a l, entonces la intersección del plano con **X** es la recta l más una cónica (la cual puede ser reducible o irreducible), esto se probó en la Lema 2.1.2. inciso *a)*.

Tenemos que probar que hay exactamente 5 planos π_i distintos con $l \subset \pi_i$ para los cuales ocurre el caso irreducible. También por el inciso *b)* del Lema 2.1.2 la cónica reducible no puede ser una recta doble.

Supongamos que la ecuación de l sea $(Z=0, T=0)$ y escribamos la ecuación de f de la siguiente forma:

$$f(X,Y,T,Z) = \mathbf{A}X^2 + \mathbf{B}XY + \mathbf{C}Y^2 + \mathbf{D}X + \mathbf{E}Y + \mathbf{F} \qquad (*)$$

donde $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E},\mathbf{F} \in \mathbf{K}[Z,T]$ con $\mathbf{A},\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ funciones lineales, $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ funciones cuadráticas y $\mathbf{F}$ una función cúbica. Para cada Z y T podemos considerar la ecuación **(*)** como la ecuación de una cónica en las variables X y Y, ésta es reducible si, y sólo si

$$\Delta = 4\mathbf{ACF}+\mathbf{BDE}-\mathbf{AE}^2-\mathbf{B}^2\mathbf{F}-\mathbf{CD}^2 = 0,$$

donde $\Delta = \Delta(Z,T)$ es función de Z y T por ser también **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **F**.

Ya que existe una biyección natural entre los polinomios cuadráticos homogéneos y las formas bilineales simétricas sobre $\mathbf{K}^3$ dadas por la formula.

$$\mathbf{A}X^2 + \mathbf{B}XY + \mathbf{C}Y^2 + \mathbf{D}XZ + \mathbf{E}YZ + \mathbf{F}Z^2 \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2\mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & 2\mathbf{C} & \mathbf{E} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & 2\mathbf{F} \end{pmatrix}$$

La forma cuadrática es degenerada si, y sólo si la matriz es singular

$$\det\begin{pmatrix} 2\mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & 2\mathbf{C} & \mathbf{E} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & 2\mathbf{F} \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(Z,T) = 0$$

Ahora bien cualquier plano π a través de $l:(Z=0,T=0)$ tiene la ecuación $\pi:(\mu Z=\lambda T)$; podemos suponer que $\mu\neq 0$, ya que de otra manera si $\mu=0$,entonces $\pi:(T=0)$, aplicando el siguiente cambio de coordenadas:

$$(X,Y,Z,T)\to(X,Y,T,Z)$$

y bajo este nuevo sistema de coordenadas, la ecuación de la recta l es la misma, pero la ecuación del plano es $\pi:(Z=0)$, por lo tanto podemos asumir siempre que $\mu=1$, así que $Z=\lambda T$.

Si restringimos la ecuación de f al plano π, es decir $f_{|\pi}$ es la ecuación que corresponde a al curva $\mathbf{X}\cap\pi$, tendremos que:

$$f_{|\pi}=\mathbf{A}(\lambda T,T)X^2+\mathbf{B}(\lambda T,T)XY+\mathbf{C}(\lambda T,T)Y^2$$

$$+\mathbf{D}(\lambda T,T)Z+\mathbf{E}(\lambda T,T)Y+\mathbf{F}(\lambda T,T),$$

ya que $Z=\lambda T$ pero como **A**,**B**,**C**,**D**,**E** y **F** son polinomios homogéneos, entonces podemos escribir a $f_{|\pi}$ de la siguiente manera

$$f_{|\pi}=T\mathbf{Q}(X,Y,T)$$

donde

$$\mathbf{Q}(X,Y,T)=\mathbf{A}(\lambda,1)X^2+\mathbf{B}(\lambda,1)XY+\mathbf{C}(\lambda,1)Y^2$$

$$+\mathbf{D}(\lambda,1)TX+\mathbf{E}(\lambda,1)TY+\mathbf{F}(\lambda,1)T^2,$$

esto porque

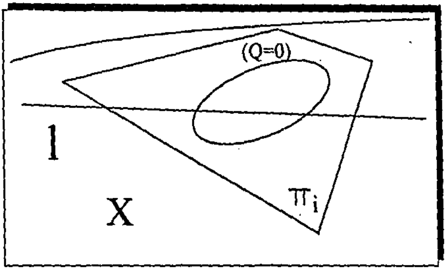
$$\mathbf{A}(\lambda T;T)=\mathbf{A}(\lambda,1)T,\ \mathbf{B}(\lambda T,T)=\mathbf{B}(\lambda,1)T,\ \mathbf{C}(\lambda T,T)=\mathbf{C}(\lambda,1)T,$$

$$\mathbf{D}(\lambda T,T)=\mathbf{D}(\lambda,1)T^2,\ \mathbf{E}(\lambda T,T)=\mathbf{E}(\lambda,1)T^2,\ \mathbf{F}(\lambda T,T)=\mathbf{F}(\lambda,1)T$$

son **A**, **B** y **C** polinomios de grado uno, **D** y **E** de grado dos y **F** de grado tres.

La curva $\pi\cap\mathbf{X}$ tiene por ecuación:

$$(T=0,\mathbf{Q}(X,Y,Z)=0).$$



El plano π corta a $\mathbf{X}$ en la recta $l : (Z = 0, T = 0)$ y en la cónica $(\mathbf{Q} = 0)$.

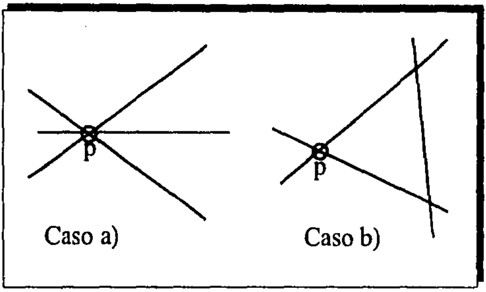
La cónica $(\mathbf{Q} = 0)$ es reducible si, y sólo si

$$
\begin{aligned}
\Delta(\lambda,1) = {} & 4\mathbf{A}(\lambda,1)\mathbf{C}(\lambda,1)\mathbf{F}(\lambda,1)+\mathbf{B}(\lambda,1)\mathbf{D}(\lambda,1)\mathbf{E}(\lambda,1) \\
& -\mathbf{A}(\lambda,1)\mathbf{E}(\lambda,1)^2-\mathbf{B}(\lambda,1)^2\mathbf{F}(\lambda,1) \\
& -\mathbf{C}(\lambda,1)\mathbf{D}(\lambda,1)^2 = 0
\end{aligned}
$$

Ahora $\Delta(\lambda,1) \in \mathbf{K}[\lambda]$ es homogéneo de grado 5, este tiene 5 raíces contando la multiplicidad y cada raíz determina un plano $\pi_i : (Z = \lambda_i T)$ que tiene la propiedad de que contiene a la recta $l : (Z = 0, T = 0)$ de la superficie, y la intersección $\mathbf{X} \cap \pi_i$ son tres rectas distintas. Para probar la proposición tenemos que ver que no tiene raíces múltiples, esto también es consecuencia de la singularidad de **X.**

Ahora demostraremos que $\Delta(\lambda,1)$ tiene solamente raíces simples, para eso supongamos que $(\lambda = 0)$ es raíz y sea $\pi : (Z = 0)$ el plano correspondiente a ésta raíz, basta probar que $\Delta(Z,T)$ no es divisible por Z^2. $\mathbf{X} \cap \pi$ es un conjunto de 3 rectas y dependiendo si ellas concurren, podemos arreglar las coordenadas para que las ecuaciones de las rectas sean las siguientes:

a) $l(T = 0)$, $l_1 : (X = 0)$, $l_1' : (Y = 0)$ si concurren las rectas;
b) $l(T = 0)$, $l_1 : (X = 0)$, $l_1' : (X = T)$ si no concurren las rectas.



Caso a) Supongamos que la ecuación para f sea

$$f = XYT + Zg,$$

con g una forma simétrica cuadrática y en términos de la expresión

$$f(X,Y,T,Z) = \mathbf{A}X^2 + \mathbf{B}XY + \mathbf{C}Y^2 + \mathbf{D}X + \mathbf{E}Y + \qquad (*)$$

debido a que $\mathbf{B} \in \mathbf{K}[Z,T]$ es lineal, entonces es de la forma $\mathbf{B} = \alpha Z + \beta T$, sustiyendo en (*)

$$f = \beta XYT + \mathbf{A}X^2 + \mathbf{C}Y^2 + \mathbf{D}X + \mathbf{E}Y + \mathbf{F} + \alpha XY\ ,$$

pero por hipótesis $f = XYT + Zg$, por lo tanto $\beta = 1$, lo cual implica que:

$$Zg = \mathbf{A}X^2 + \mathbf{C}Y^2 + \mathbf{D}X^2 + \mathbf{E}Y + \mathbf{F} + \alpha XYZ,$$

esto implica que Z divide a **A**,**C**,**D**,**E** y a **F**.

Así sustituyendo $\mathbf{B} = T + \alpha Z$ en la ecuación

$$\Delta(Z,T) = 4\mathbf{ACF} + \mathbf{BDE} - \mathbf{AE}^2 - \mathbf{B}^2\mathbf{F} - \mathbf{CD}^2$$

obtenemos

$$\Delta(Z,T) = 4\mathbf{ACF} - \mathbf{AE}^2 - \mathbf{CD}^2 + (T + \alpha Z)\mathbf{DE} - (T + \alpha Z)^2\mathbf{F}$$

desarrollando

$$\Delta(Z,T) = 4\mathbf{ACF} - \mathbf{AE}^2 - \mathbf{CD}^2 + T\mathbf{DE} + \alpha Z\mathbf{DE} - T^2\mathbf{F} - 2\alpha ZT\mathbf{F} - \alpha^2 Z^2\mathbf{F}$$

de donde concluímos que

$$\Delta(Z,T) \equiv -T^2\mathbf{F} \pmod{Z^2}$$

Basta con probar que $\mathbf{F}$ no es congruente a cero modulo Z^2.

El punto $p_0 = (0,0,0,1) \in \mathbf{X}$, la cual es una superficie no singular. Calculando el gradiente de f obtenemos:

$$\nabla_p f = (YT + Zg_X, XT + Zg_Y, Zg_T + g, XY + Zg_T)$$

Por estar p_0 en $\mathbf{X}$ tenemos que:

$$\nabla_{p_0} f = (0,0,g(p_0),0) \neq 0$$

por lo tanto, $g(0,0,0,1) \neq 0$, es decir, $\mathrm{coef}_{T^2}(g) \neq 0$, por lo tanto el término T^2Z de f tiene coeficiente diferente de cero.

En términos de la ecuación (*), $\mathbf{F}$ es un polinomio homogéneo de tercer grado en $\mathbf{K}[Z,T]$, por lo tanto el termino T^2Z del polinomio f pertenece a $\mathbf{F}$, es decir, $\mathbf{F}$ tiene un termino con coeficiente diferente de cero que no es divisible por Z^2, de donde concluimos que Z^2 no divide a $\mathbf{F}$, es decir Z es raíz simple de $\Delta(Z,T)$.

Caso b) Supongamos que la ecuación de f es de la forma

$$f = XT(X-T) + Zg$$

con g cuadrático y en términos de la expresión (*), por ser $\mathbf{A}$ lineal y $\mathbf{D}$ cuadrática en $\mathbf{K}[Z,T]$, entonces son de la forma $\mathbf{A} = aZ + bT$, $\mathbf{D} = \alpha Z^2 + \beta ZT + \gamma T^2$, si sustituimos en (*)

$$f = (aZ + bT)X^2 + \mathbf{B}XY + \mathbf{C}Y^2 + (\alpha Z^2 + \beta ZT + \gamma T^2)X + \mathbf{E}Y + \mathbf{F}$$

desarrollando,

$$f = bX^2T + \gamma XT^2 + \mathbf{B}XY + \mathbf{C}Y^2 + \mathbf{E}Y + \mathbf{F} + aZX^2 + \alpha XZ^2 + \beta XZT$$

pero por hipótesis, $f = X^2T - XT^2 + Zg$, por lo tanto $b = 1$, $\gamma = -1$, es decir, $\mathbf{A} = T + aZ$, $\mathbf{D} = -T^2 + \alpha Z^2 + \beta ZT$ y

$$Zg = \mathbf{B}XY + \mathbf{C}Y^2 + \mathbf{E}Y + \mathbf{F} + aZX^2 + \alpha XZ^2 + \beta XZT$$

concluyendo entonces que Z divide a **B**, **C**, **E** y a **F**.

Sutituyamos **A** y **D** en la ecuación $\Delta(Z,T)$

$$\Delta(Z,T)=4(T+aZ)\mathbf{CF}+\mathbf{B}(-T^2+\alpha Z^2+\beta ZT)\mathbf{E}$$

$$-(T+aZ)\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2\mathbf{F}-\mathbf{C}(-T^2+\alpha Z^2+\beta ZT)^2,$$

modulo Z^2 quedaría reducida la siguiente forma

$$\Delta(Z,T)\equiv-\mathbf{C}(-T^2+\alpha Z^2+\beta ZT)^2 \pmod{Z^2}$$

desarrollando tenemos

$$\Delta(Z,T)\equiv-T^4\mathbf{C}+2\beta ZT^3\mathbf{C} \pmod{Z^2}$$

como Z divide a $\mathbf{C}=\lambda Z+\mu T$, entonces

$$\Delta(Z,T)\equiv-T^4\mathbf{C} \pmod{Z^2}$$

y $\mu=0$.

Basta con demostrar que $\lambda\neq 0$, para que $\Delta(Z,T)$ no sea congruente a cero modulo Z^2.

Ahora bien

$$\nabla_p f(2XT-T^2+Zg_X, Zg_Y, Zg_T+g, X^2-2XT+Zg_T)$$

y como $p_0=(0,1,0,0)\in\mathbf{X}$, entonces $\nabla_{p_0}f=(0,0,g(p_0),0)\neq 0$ esto implica que $g(0,1,0,0)\neq 0$, es decir, $\mathrm{coef}_{Y^2}(g)\neq 0$.

Como hemos visto

$$Zg=\mathbf{B}XY+\mathbf{C}Y^2+\mathbf{E}Y+\mathbf{F}+aZX^2+\alpha XZ^2+\beta XZT,$$

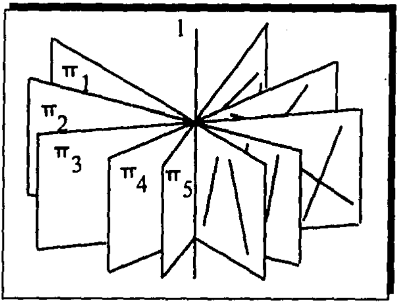
además

$$\mathbf{C}Y^2=\lambda ZY^2,$$

entonces

$$\lambda=\mathrm{coef}_{Y^2}(g), \text{ por lo tanto } \lambda\neq 0.$$

Concluímos entonces que Z^2 no divide a **C** y entonces Z es raíz simple de $\Delta(Z,T)$.



Cada una de las cinco raíces $\Delta(\lambda, 1)$ determinan planos distinto que contiene la recta l y ademas otro par de rectas en $\mathbf{X}$.

ii) Supongamos que existe

$$p \in (l_i \cup l_i') \cap (l_j \cup l_j') \text{ con } i \neq j.$$

Ahora bien $l_i \cup l_i' \subset \pi_i$ y $l_j \cup l_j' \subset \pi_j$, por lo tanto,

$$(l_i \cup l_i') \cap (l_j \cup l_j') \subset \pi_i \cap \pi_j = l,$$

es decir, $p \in l$.

Por la Lema 2.1.3 inciso *a)*, si existen tres rectas contenidas en $\mathbf{X}$ a través de un punto, ellas deben de ser coplanares. Sin perdida de generalidad supongamos que $p \in l_i$ y que $p \in l_j$, esto implica que las rectas l, l_i y l_j, contenidas en $\mathbf{X}$ y que pasan por el punto p, son coplanares, lo cual contradice la suposición de que $\pi_i \neq \pi_j$. ***l.q.q.d.***

Capítulo 3: LA ECUACION DE UNA SUPERFICIE CUBICA

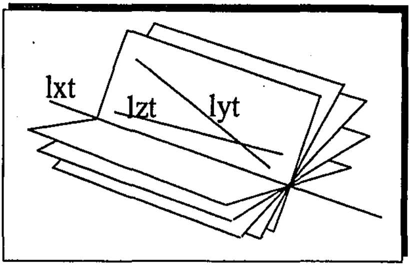
En este capítulo veremos formas de poder representar a una superficie por diferentes tipos de ecuaciones, una de ellas será de gran importancia para el algoritmo del Capítulo 2.

3.1 La ecuación de una superficie cúbica referida a dos triedos de Steiner

Considera una superficie cúbica no singular $\mathbf{X} = \mathrm{V}(f)$, donde

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{I}|=d} \alpha_I x^I$$

entonces por la Proposición 2.1.4. existe un recta contenida en la superficie y por la Proposición 2.1.6, tenemos que hay cinco planos distintos a través de esta recta, cuya otra intersección con la superficie consiste de otro par de rectas distintas. Supongamos que el punto $p = (0:0:0:1) \in S$, es decir, que $a_{0003} = 0$ y supongamos que la ecuación de la recta sea $l_{XT} : (X = 0, T = 0)$ así que $f(0, Y, Z, 0) \equiv 0$ por lo tanto los coeficientes a_{0300}, a_{0030}, a_{0210}, a_{0120} del polinomio f son cero.



Por la recta l_{xt} pasa cinco planos que intersectan a **X** en otro par de rectas

Ahora supongamos para nuestra ecuación, sin perdida de generalidad, que el plano $(T=0)$ que contiene a la recta l_{XT} corta a la superficie en las rectas $l_{YT}:(Y=0,T=0)$ y $l_{ZT}:(Z=0,T=0)$ y por las mismas razones los coeficientes $a_{3000}, a_{2010}, a_{1020}$ son cero así como a_{2100}, a_{1200} también, esto lo podemos suponer porque si el plano $(T=0)$ corta a la superficie en las rectas $(E=0)$ y $(F=0)$, es siempre posible encontrar una transformación proyectiva $\mathbf{T} \in PSL(3,\mathbf{K})$, que mande:

$$(X=0) \xrightarrow{\mathbf{T}} (X=0),$$

$$(E=0) \xrightarrow{\mathbf{T}} (Y=0),$$

$$(F=0) \xrightarrow{\mathbf{T}} (Z=0),$$

$$(T=0) \xrightarrow{\mathbf{T}} (T=0),$$

y por lo tanto la ecuación de la superficie es necesariamente de la siguiente forma:

$$f(X,Y,Z,T) = a_{2001}X^2T + a_{0201}Y^2T + a_{0021}Z^2T + a_{1002}XT^2 + a_{0102}YT^2$$

$$+a_{0012}ZT^2+a_{1110}XYZ+a_{1101}XYT+a_{1011}XZT+a_{0111}YZT$$

donde tenemos que $a_{1110}\neq 0$. Esto porque $p_0=(1,1,1,0)\in\pi$ y $p_0\notin l_{XT}\cup l_{YT}\cup l_{ZT}$. Además $\pi\cap\mathbf{X}=l_{XT}\cup l_{YT}\cup l_{ZT}$, por lo tanto $p_0\notin\mathbf{X}$, es decir, $f(p_0)\neq 0$, esto implica que a_{1110} sea diferente de cero.

Factorizando obtenemos la ecuación

$$f(X,Y,Z,T)=T^2P+TQ+XYZ$$

Donde suponemos que $a_{1110}=1$

$$P=P(x,y,z)=a_{1002}x+a_{0102}y+a_{0012}z$$

$$Q=Q(x,y,z)=a_{1002}x^2+a_{0201}y^2+a_{0021}z^2+a_{1101}xy+a_{1011}xz+a_{0111}yz$$

Otro plano conteniendo a la recta l_{XT} esta dado por $T+X=0$ y suponiendo que contiene a otro par de rectas de la superficie, estas rectas siendo respectivamemnte $(T+X=0,V=0)$ y $(T+X=0,W=0)$ donde V,W son polinomios lineales homogéneos en $\mathbf{K}[X,Y,Z]$

Entonces sustituyendo la ecuación del plano $T+X=0$ en la ecuación de la superficie

$$f(X,Y,Z,-X)=X^2P-XQ+XYZ$$

Pero como la intersección del plano con $X=0,V=0$ o $W=0$ son rectas en la superficie, entonces $f(X,Y,Z,-X)=XVW$ es decir el polinomio solo se anula si $X=0,V=0$ o $W=0$, de donde tenemos que

$$X^2P-XQ+XYZ=XVW.$$

Despejando Q

$$Q=XP+YZ-VW$$

La ecuación de la superficie es por lo tanto

$$T^2P+T(XP+YZ-VW)+XYZ=0$$

Que es equivalente a la ecuación

$$(T+X)(T+bY)(T+cZ)=T(T+X+qV)(T+X+rW)$$

En donde b,c,q,r son constantes cumpliendo la relación de $bc=qr$, y que también cumplen la relación

$$X+qV+rW-bY-cZ+bcP=0$$

Es sencillo demostrar esto ya que

$$(T+X)(T+bY)(T+cZ)=T^3+(bY+cZ+X)T^2$$

$$+(bXY+bcYZ+cXZ)T+bcXYZ$$

Y del otro lado de la ecuación tenemos

$$T(T+X+qV)(T+X+rW)=T^3+(qV+2X+rW)T^2$$

$$+(X^2+qVX+rWX+rqWV)T$$

Sustituyendo en

$$(T+X)(T+bY)(T+cZ)-T(T+X+qV)(T+X+rW)=0$$

Esto equivalente a

$$(bY+cZ-X-qV-rW)T^2+bcXYZ$$

$$+(bXY+bcYZ+cXZ-X^2-qVX-rWX-rqWV)T=0$$

Suponiendo que $X+qV+rW-bY-cZ+bcP=0$, entonces tenemos que al sustituir

$$bcPT^2+(bcXP+bcYZ-qrVW)T+bcXYZ=0$$

Además como $bc=qr$

$$T^2P+(XP+YZ-VW)T+XYZ=0$$

que es nuestra ecuación original.

Para ver la existencia de b,c,q,r que sastifacen que $bc=qr$ y que cumplan con la ecuación

$$X+qV+rW-bY-cZ+bcP=0$$

donde v,w,P son funciones lineales en x,y,z. Escribimos $b=\lambda q$, $c=\lambda^{-1}r$ y sustituimos en nuestra segunda ecuación

$$X+qV+rW-\lambda qY-\lambda^{-1}rZ+qrP\equiv$$

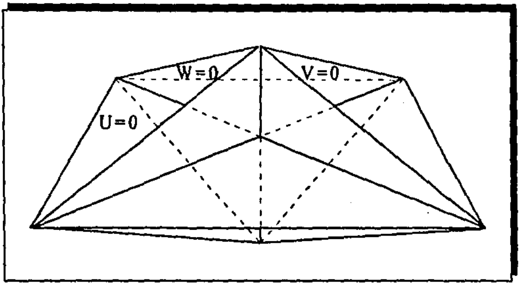
por lo tanto los coeficientes de esta ecuación deben de ser cero, obteniendo entonces el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered}
1+qcoef_x(V)+rcoef_x(W)+qrcoef_x(P)=0\\
-\lambda q+qcoef_y(V)+rcoef_y(W)+qrcoef_y(P)=0\\
-\lambda^{-1}r+qcoef_z(V)+rcoef_z(W)+qrcoef_z(P)=0
\end{gathered}$$

de las dos primeras ecuaciones podemos despejar a q y r en términos de λ y sustituir en la tercera ecuación, obteniendo una ecuación en λ de cuarto orden. Cada raíz de esta nos da una pareja q,r y por lo tanto también una pareja b,c que satisfacen las ecuaciones anteriores. De esta forma, en manera más general la ecuación de una superficie cúbica es reducible a la forma

$$\mathbf{UVW}=\mathbf{U'V'W'}$$

en que $\mathbf{U}=0,\mathbf{V}=0,\mathbf{W}=0,\mathbf{U'}=0,\mathbf{V'}=0,\mathbf{W'}=0$ son las ecuaciónes de seis planos los cuales son los planos de dos triedrosde ***Steiner***



Triedro de *Steiner*

Ahora asumamos esta forma y sea $\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{W}_0, \mathbf{U}'_0, \mathbf{V}'_0, \mathbf{W}'_0$ los valores de $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{U}', \mathbf{V}', \mathbf{W}'$ en un punto arbitrario (X_0, Y_0, Z_0, T_0) de la superficie que no esté sobre una recta de la superficie, definamos

$$u=\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{U}_0}, v=\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{V}_0}, w=\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{W}_0}, u'=\frac{\mathbf{U}'}{\mathbf{U}'_0}, v'=\frac{\mathbf{V}'}{\mathbf{V}'_0}, w'=\frac{\mathbf{W}'}{\mathbf{W}'_0}$$

y en virtud de que $\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{W}_0, \mathbf{U}'_0, \mathbf{V}'_0, \mathbf{W}'_0$, podremos suponer que la ecuación de la superficie sea $uvw = u'v'w'$. Los seis planos cuyas ecuaciones son $u=0, v=0, \cdots, w'=0$, deben ser expresados como combinación lineal de cuatro de ellos,es decir existen dos ecuaciones lineales que relacionan a los seis planos.

$$a_1u+b_1v+c_1w=a'_1u'+b'_1v'+c'_1w'$$

$$a_2u+b_2v+c_2w=a'_2u'+b'_2v'+c'_2w'$$

en donde $u=0, v=0, \cdots w'=0$ en el punto (X_0, Y_0, Z_0, T_0) son iguales a uno y por lo tanto las constantes satisafacen las siguientes condiciones

$$a_1+b_1+c_1=a_1'+b_1'+c_1',$$
$$a_2+b_2+c_2=a_2'+b_2'+c_2'.$$

Y por lo tanto tenemos que para toda σ

$$(a_1+\sigma a_2)+(b_1+\sigma b_2)+(c_1+\sigma c_2)=$$
$$(a_1'+\sigma a_2')+(b_1'+\sigma b_2')+(c_1'+\sigma c_2')$$

pero sólo se da en tres casos que

$$(a_1+\sigma a_2)(b_1+\sigma b_2)(c_1+\sigma c_2)=(a_1'+\sigma a_2')(b_1'+\sigma b_2')(c_1'+\sigma c_2') \qquad (*)$$

por ser un polinomio de grado tres en σ.

Definimos

$$A_i=a_1+\sigma_i a_2,\ B_i=b_1+\sigma_i b_2,\ C_i=c_1+\sigma_i c_2$$
$$A_i'=a_1'+\sigma_i a_2',\ B_i'=b_1'+\sigma_i b_2',\ C_i'=c_1'+\sigma_i c_2'$$

donde σ_i es una raíz de (*) para cada $i=1,2,3$, entonces se cumplen las ecuaciones $A_iB_iC_i=A_i'B_i'C_i'$ y

$$A_i+B_i+C_i=A_i'+B_i'+C_i'$$

lo cual nos permite escribir las ecuaciones de la superficie de la siguiente forma

$$A_iuB_ivC_iw=A_i'u'B_i'v'C_i'w',$$

ya que $uvw=u'v'w'$, donde además $A_iu, B_iv, C_iw, A_i'u', B_i'v'$ y $C_i'w'$ estan sujetos a cumplir una ecuación lineal

$$A_iu+B_iv+C_iw=A_i'u'+B_i'v'+C_i'w'$$

y esto para cada $i=1,2,3$.

Con estas ecuaciones nosotros podemos dar especificamente las ecuaciones de las rectas contenidas en la superficie, las cuales en la Corolario 2.1.6, se demostrarón que existen y que son 27.

En primer lugar la intersección de los planos $u=0, v=0, w=0$ con los planos $u'=0, v'=0, w'=0$ nos determinan rectas en la superficie, es decir, las 9 parejas de planos:

$$
\begin{array}{lll}
(u=0, u'=0), & (u=0, v'=0), & (u=0, w'=0), \\
(v=0, u'=0), & (v=0, v'=0), & (v=0, w'=0), \\
(w=0, u'=0), & (w=0, v'=0), & (w=0, w'=0).
\end{array}
$$

nos determinan 9 rectas que anulan a al ecuación

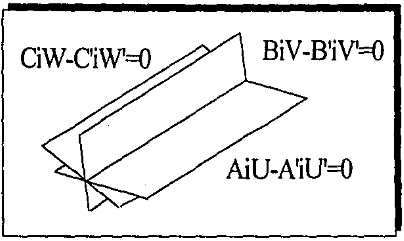
$$A_i u B_i v C_i w = A_i' u' B_i' v' C_i' w'$$

Los planos $u=0, v=0, w=0, u'=0, v'=$ y $w'=0$ son precisamente los ***triedros de Steiner*** $\mathbf{U}=0, \mathbf{V}=0, \mathbf{W}=0, \mathbf{U}'=0, \mathbf{V}'=$ y $\mathbf{W}'=0$ mencionados anteriormente.

La intersección de las siguientes 6 tercias de planos son rectas también que se anulan en la superficie

$$
\begin{array}{l}
(A_i u - A_i' u' = 0, B_i v - B_i' v' = 0, C_i w - C_i' w' = 0), \\
(A_i u - B_i' v' = 0, B_i v - A_i' u' = 0, C_i w - C_i' w' = 0), \\
(A_i u - C_i' w' = 0, B_i v - B_i' v' = 0, C_i w - A_i' u' = 0), \\
(A_i u - A_i' u' = 0, B_i v - C_i' w' = 0, C_i w - B_i' v' = 0), \\
(A_i u - B_i' v' = 0, B_i v - C_i' w' = 0, C_i w - A_i' u' = 0), \\
(A_i u - C_i' w' = 0, B_i v - A_i' u' = 0, C_i w - B_i' v' = 0).
\end{array}
$$

estas rectas son para cada $i=1,2,3$, por lo tanto tenemos 18 rectas más las nueve anteriores nos dan las ecuaciones de las 27 rectas en la superficie.



La intersección de una de las tercias de planos que se anulan en la superficie

3.2 La forma de Cremona de la ecuación de la superficie cúbica

Observando la identidad

$$(X+Y+Z)^3 = X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(Y+Z)(Z+X)(X+Y).$$

y sí definimos como

$$\begin{aligned}
\xi &= X_2 + X_3, & \xi' &= -(X_5 + X_6), \\
\eta &= X_3 + X_1, & \eta' &= -(X_6 + X_4), \\
\varsigma &= X_1 + X_2, & \varsigma' &= -(X_4 + X_5).
\end{aligned}$$

o lo que es equivalente

$$\begin{aligned}
2X_1 &= \eta + \varsigma + \xi & 2X_4 &= \xi' + \eta' + \varsigma' \\
2X_2 &= \xi + \varsigma + \eta & 2X_5 &= \eta' + \xi' + \varsigma' \\
2X_3 &= \xi + \eta + \varsigma & 2X_6 &= \varsigma' + \xi' + \eta'
\end{aligned}$$

suponiendo las ecuaciónes de ***Steiner*** para $\xi, \eta, \varsigma, \xi', \eta'$ y ς' tenemos que

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_5^3 + X_6^3 = 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 0$$

La demostración de estas dos igualdades se dan a continuación. Primero calculemos las potencias de las X_i con $i = 1, \ldots, 6$.

$$\begin{aligned}
8X_1^3 &= (\eta + \varsigma - \xi)^3 = \eta^3 + \varsigma^3 - \xi^3 + 3(\varsigma - \xi)(\eta - \xi)(\eta + \varsigma),\\
8X_2^3 &= (\varsigma - \eta + \xi)^3 = \varsigma^3 + \xi^3 - \eta^3 + 3(\varsigma + \xi)(\xi - \eta)(\varsigma - \eta),\\
8X_3^3 &= (\eta - \varsigma + \xi)^3 = \eta^3 - \varsigma^3 + \xi^3 + 3(\xi - \varsigma)(\eta + \xi)(\eta - \varsigma),\\
8X_4^3 &= (\xi' - \eta' - \varsigma')^3 = \xi'^3 - \eta'^3 - \varsigma'^3 + 3(\xi' - \varsigma')(\xi' - \eta')(\eta' + \varsigma'),\\
8X_5^3 &= (\eta' - \varsigma' - \xi')^3 = \eta'^3 - \varsigma'^3 - \xi'^3 + 3(\varsigma' + \xi')(\eta' - \xi')(\eta' - \varsigma'),\\
8X_6^3 &= (\varsigma' - \eta' - \xi')^3 = \varsigma'^3 - \eta'^3 - \xi'^3 + 3(\varsigma' - \xi')(\eta' + \xi')(\varsigma' - \eta'),
\end{aligned}$$

y sumando las 6 ecuaciones tenemos

$$8X_1^3 + 8X_2^3 + 8X_3^3 + 8X_4^3 + 8X_5^3 + 8X_6^3 = 0$$

ya que estamos suponiendo que la ecuación de la superficie está dada por las ecuaciones de ***Steiner***

$$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = \xi'^3 + \eta'^3 + \zeta'^3$$

$$\xi + \eta + \varsigma = \xi' + \eta' + \varsigma'$$

Por lo tanto la superficie cúbica puede suponerse que está dada por estas dos ecuaciones en las variables $X_1, X_2, \ldots, X_6$.

Capítulo 4: UN CALCULO ALGORITMICO DE LAS 27 RECTAS CONTENIDAS EN UNA SUPERFICIE CUBICA

En este Capítulo daremos un algoritmo teórico que calcula las 27 rectas contenidas en una superficie cúbica.

Teórico porque nos basamos en otros algoritmos los cuales sólo nos dan aproximaciones como por ejemplo, el algoritmo de Newton para aproximación de una raíz de un polinomio de grado mayor que cuatro.

Comenzaremos por dar el algoritmo y después algunas observaciones a éste.

4.1 Algoritmo

Entrada: Un polinomio homogéneo cúbico en $\mathbf{K}[X, Y, Z, T]$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|I|=3} \alpha_I x^I .$$

Salida: Las ecuaciones de las 27 rectas contenidas en $\mathbf{X} = \mathbf{V}(f)$.

Descripción del algoritmo

1. *Encontrar un punto* $P \in \mathbf{X}$.

   Para alguna $\lambda \in \mathbf{K}$, el punto $(1:1:1:\lambda)$ está en la superficie.

2. *Trasladar el punto P al punto* $(0:0:1:0)$.

3. *Arreglar coordenadas para que* $T_P\mathbf{X} : (T=0)$.

4. *Sea* $\mathrm{C} = \mathrm{X} \cap T_p\mathrm{X}$

   Definir:

   $R := a_{0300}, A := a_{2001}, B := a_{0201}, C := a_{0021}, D := a_{0003}, E := a_{1101}$

   $F := a_{1011}, G := a_{1002}, H := a_{0111}, I := a_{0102}, J := a_{0012}$.

   4.1. Sean

   $\{x_1, x_2, x_3\} = \mathbf{V}(X=0) \cap \mathbf{C}$ y $\{y_1, y_2, y_3\} = \mathbf{V}(Y=0) \cap \mathbf{C}$,

   La curva **C** *es reducible si alguna de las rectas generadas por la pareja de puntos:*

   $\{x_1,y_1\}$, $\{x_1,y_2\}$, $\{x_1,y_3\}$, $\{x_2,y_1\}$, $\{x_2,y_2\}$, $\{x_2,y_3\}$,

   $\{x_3,y_1\}$, $\{x_3,y_2\}$, $\{x_3,y_3\}$, $\{x_1,x_2\}$, $\{y_1,y_2\}$.

   esta contenida en la curva **C**.

   4.1.1. *Si es C irreducible, caso cuspidal*

   El hessiano en P es igual a cero

   Arreglar coordenadas para que:

   $f(X,Y,Z,0) = X^2Z - RY^3$

   Definir los siguientes polinomios en α*:*

   $b_0 := -3R\alpha,$

   $b_1 := 6CR^2\alpha^5 + 4HR\alpha^3 + 3FR\alpha^2 + 2B\alpha + E,$

$$\begin{aligned}
b_2 :=& -2C^2\alpha^9 - 3CHR^2\alpha^7 - 3CFR^2\alpha^6 - (2BC + H^2)R\alpha^5 \\
& -2(CE + FH)R\alpha^4 - 2(CAR + BH + F^2R - JR)\alpha^3 \\
& -(EH + BF)\alpha^2 - (AH + EF - I)\alpha - AF + G,
\end{aligned}$$

$$c_0 := -R,$$

$$c_1 := 9CR^2\alpha^4 + 3HR\alpha^2 + B,$$

$$\begin{aligned}
c_2 :=& -6C^2R^3\alpha^8 - 7CHR^2\alpha^6 - 6CFR^2\alpha^5 - (6BC + H^2)R\alpha^4 \\
& -(6CE + FH)R\alpha^3 - (6ACR - BH - 3JR)\alpha^2 \\
& -EH\alpha + I - AH,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 :=& C^3R^4\alpha^{12} + 2C^2HR^3\alpha^{10} + 2C^2FR^3\alpha^9 \\
& +(2BC^2 + CH^2)R^2\alpha^8 + 2(C^2E + CFH)R^2\alpha^7 \\
& +(CF^2R + 2AC^2R + 2BCH - CJR)R\alpha^6 \\
& +(2CEH + 2BCF)R\alpha^5 \\
& +(B^2C + 2ACHR + 2CEFR - HJR)\alpha^4 \\
& +(2ACFR + 2BCE - FJR)\alpha^3 + (CE^2 + 2ABC - BJ)\alpha^2 \\
& +(2ACE - EJ)\alpha + A^2C + D - AJ.
\end{aligned}$$

4.1.2. *Calcular un cero para $R_{27}(\alpha) \in \mathbf{K}[\alpha]$*

$$R_{27}(\alpha) := \det \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Este polinomio fue definido en la Proposición 2.1.5

4.1.2.1. *Encontrar una solución para el sistema:*

$$b_0Y^2 + b_1YT + b_2T^2 = 0$$

$$c_0Y^3 + c_1Y^2T + c_2YT^2 + c_3T^3 = 0$$

y denotarla por $(\eta : \tau)$

Despejar de la primera ecuación a Y y sustituir en la segunda para obtener una ecuación polinomial a resolver en T.

4.1.2.2. *Sustituir en* $\varsigma = 3R\alpha^2\eta - g(1,\alpha,R\alpha^3,0)\tau$, *con* α *una raíz de* $R_{27}(\alpha)$ *y donde*

$$g(1,\alpha,R\alpha^3,0) = CR^2\alpha^6 + HR\alpha^4 + FR\alpha^3 + B\alpha^2 + E\alpha + A$$

4.1.2.3. *La recta contenida en la superficie será*

$$l_{P_\alpha Q} : \{\lambda(1:\alpha:R\alpha^3:0) + \mu(0:\eta:\varsigma:\tau) : \lambda,\mu \in \mathbf{K}\}$$

4.2.1. *Si C es irreducible,* caso nodal

El hessiano en P es diferente de cero

Arreglar coordenadas para que:

$f(X,Y,Z,0) = XYZ - RX^3 - SY^3$

Definir las funciones racionales en α

$$b_0 := -S\alpha^2 - R\alpha^{-1},$$

$$b_1 := 5CS^2\alpha^4 + 4HS\alpha^3 + 3(B+FS)\alpha^2 + (2E+4CRS)\alpha + A + HR - CR^2\alpha^{-2},$$

$$\begin{aligned} b_2 := {} & 2C^2S^3\alpha^6 + 3CHS^2\alpha^5(2BCS + H^2S + 3CFS^2)\alpha^4 \\ & + (BH + 2CES + 2FHS + JS + 6C^2RS^2)\alpha^3 \\ & + (I + BF + EH + 2ACS + F^2S + 6CHRS)\alpha^2 \\ & + (EF + G + AH + 2BCR + H^2R + 6CFRS)\alpha \\ & + AF + 2CER + 2FHR + JR + 6C^2R^2S \\ & + (2ACR + F^2R + 3CHR^2)\alpha^{-1} \\ & + 3CFR^2\alpha^{-2} + 2C^2R^3\alpha^{-3}, \end{aligned}$$

$$c_0 := -S,$$

$$c_1 := 4CS^2\alpha^2 + 2HS\alpha + B - 4CRS\alpha^{-1} - HR\alpha^{-2} + CR^2\alpha^4,$$

$$
\begin{aligned}
c_2 := {} & 4C^2S^3\alpha^4 + 5CHS^2\alpha^3 + (4BCS + H^2S + 4CFS^2)\alpha^2 \\
& +(BH + 4CES + FHS + 2JS + 6C^2RS^2)\alpha + 4CS(A + HR) \\
& +I + EH \\
& +(AH - 2BCR + H^2R + 2CFRS)\alpha^{-1} \\
& +(FHR - 2CER - JR)\alpha^{-2} \\
& -(2ACR + CHR^2)\alpha^{-3} - 2CF^2R^2\alpha^{-4} - 2C^2R^3\alpha^{-5}, \\
c_3 := {} & C^3S^4\alpha^6 + 2C^2HS^3\alpha^5 + (2BC^2S^2 + CH^2S^2 + 2C^2FS^3)\alpha^4 \\
& +(2BCHS + 2C^2ES^2 + 2CFHS^2 + CJS^2 + 4C^3RS^3)\alpha^3 \\
& +(B^2C + 2BCFS + 2CEHS + HJS \\
& +S^2(2AC + F^2 + 6CHR))\alpha^2 \\
& +(2BCE + BJ + FJS \\
& +2CS(EF + AH + 2BCR + H^2R + 3CFRS))\alpha \\
& +2ACFS + 4C^2ERS + 4CFHRS + 2CJRS + 6C^3R^2S^2 \\
& +(2ACE + AJ + 2BCFR + 2CEHR + HJR + 4AC^2R \\
& +2CF^2RS + 6C^2HR^2S)\alpha^{-1} \\
& +(A^2C + 2CEFR + 2ACHR + FJR + 2BC^2R^2 + CH^2R^2 \\
& +6C^2FR^2S)\alpha^{-2} \\
& +(2ACFR + 2C^2ER^2 + 2CFHR^2 + CJR^2 + 4C^3R^3S)\alpha^{-3}.
\end{aligned}
$$

4.2.2. *Calcular un cero para $R_{27}(\alpha) \in \mathbf{K}(\alpha)$*

$$
R_{27}(\alpha) := \det \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}
$$

Este polinomio fue definido en la Proposición 2.1.5.

4.2.2.1. *Encontrar una solución para el sistema:*

$M = b_0Y^2 + b_1YT + b_2T^2$

$N = c_0Y^3 + c_1Y^2T + c_2YT^2 + c_3T^3$

y denotar por $(\eta : \tau)$.

Despejar de la primera ecuación a Y y sustituir en la segunda para obtener una ecuación polinomial a resolver en T.

4.2.2.2. *Sustituir en* $\varsigma = (2S\alpha - R\alpha^{-2})\eta + g(P_\alpha)\alpha^{-3}\tau$, *con* α *es un raíz de* $R_{27}(\alpha)$ *y donde*

$$P_\alpha = (\alpha, \alpha^2, R + S\alpha^3, 0) \text{ y}$$

$$g(P_\alpha) = CS^2\alpha^6 + HS\alpha^5 + (B + FS)\alpha^4 + (2CRS + E)\alpha^3 + (A + HR)\alpha^2 + FR\alpha + CR^2$$

4.2.2.3. *La recta contenida en la superficie será*

$l_{P_\alpha Q} : \{\lambda(\alpha : \alpha^2 : R + S\alpha^3 : 0) + \mu(0 : \eta : \varsigma : \tau) : \lambda, \mu \in \mathbf{K}\}$

4.3.1. *Si* **C** *es reducible, entonces* **C**$= l \cup \{CONICA\}$.

Denotar por $l_{P_\alpha Q}$ *a la recta* l.

La recta l es alguna de las siguientes rectas generadas por:

$\{x_1,y_1\}$, $\{x_1,y_2\}$, $\{x_1,y_3\}$, $\{x_2,y_1\}$, $\{x_2,y_2\}$, $\{x_2,y_3\}$,

$\{x_3,y_1\}$, $\{x_3,y_2\}$, $\{x_3,y_3\}$, $\{x_1,x_2\}$, $\{y_1,y_2\}$,

donde

$\{x_1,x_2,x_3\} = \mathbf{V}(X = 0) \cap \mathbf{C}$ y $\{y_1,y_2,y_3\} = \mathbf{V}(Y = 0) \cap \mathbf{C}$.

5. *Transformar coordenadas para que* $l_{P_\alpha Q}$ *sea ahora la recta*

$$l : (Z = 0, T = 0)$$

Aquí volvemos a usar la notación de multi-índices para la ecuación de la superficie.

5.1. *Trasladar* P *al punto* $(0 : 0 : 0 : 1)$.

5.1.1. Arreglar coordenadas para que $l : (X = 0, T = 0)$

5.2. *Encontrar dos raíces* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *del polinomio*

$$\begin{aligned}\Delta(\varepsilon) = 4\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{C}(\varepsilon)\mathbf{F}(\varepsilon)+\mathbf{B}(\varepsilon)\mathbf{D}(\varepsilon)\mathbf{E}(\varepsilon)\\ -\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{E}(\varepsilon)^2-\mathbf{B}(\varepsilon)^2\mathbf{F}(\varepsilon)-\mathbf{C}(\varepsilon)\mathbf{D}(\varepsilon)^2\end{aligned}$$

donde

$$A(\varepsilon) := a_{0201}\varepsilon + a_{1200},$$

$$B(\varepsilon) := a_{0111}\varepsilon + a_{1110},$$

$$C(\varepsilon) := a_{0021}\varepsilon + a_{1020},$$

$$D(\varepsilon) := a_{0102}\varepsilon^2 + a_{1101}\varepsilon + a_{2100}\ ,$$

$$E(\varepsilon) := a_{0012}\varepsilon^2 + a_{1011}\varepsilon + a_{2010}\ ,$$

$$F(\varepsilon) := a_{0003}\varepsilon^3 + a_{1002}\varepsilon^2 + a_{2001}\varepsilon + a_{3000}\ .$$

El polinomio $\Delta(\varepsilon)$ es de grado cinco con todas sus raíces distintas.

5.3. *Denotar a los planos*

$$T-\varepsilon_1 X=0, T-\varepsilon_2 X=0$$

por π_1 *y* π_2.

Estos planos pasan por la recta $l : (X=0, T=0)$ e intersectan a la superficie en otro par de rectas.

6. *Arreglar coordenadas para que:*

6.1.1. *Sea* $(T=0)$ *la ecuación del plano* $\pi_1 : (T-\varepsilon_1 X=0)$.

6.1.2. *Sean*

$$l_{YT} : (Y=0, T=0), l_{ZT} : (Z=0, T=0)$$

las rectas contenidas en el plano $\pi_1 : (T=0)$ *que se encuentran también en la superficie.*

6.2.1. *Sea* $(T+X=0)$ *la ecuación del plano* $\pi_2 : (T-\varepsilon_2 X=0)$

6.2.2. *Sean*

$$l_1 : (T+X=0, V=0), l_2 : (T+X=0, W=0)$$

las rectas contenidas en el plano $\pi_2 : (T+X=0)$ *que se encuentran también en la superficie.*

Donde V y W son ecuaciones lineales en $\mathbf{K}[X,Y,Z,T]$.

6.3.1 *El punto* $P=(0:0:0:1)$ *este en la superficie.*

Esto significa que el coeficiente de T^3 en f sea cero, después de la transformaciones de los pasos 6.1.1. y 6.2.1.

7. *Multiplicar por* $\frac{1}{a_{1110}}$.

Se demostró que despues de aplicadas las transformaciones a_{1110} es diferente de cero.

8. *Encontrar una solución para* β, q, r *del sistema:*

$$1+q coef_x(V)+r coef_x(W)+qra_{1002}=0$$
$$-\beta q+q coef_y(V)+r coef_y(W)+qra_{0102}=0$$
$$-\beta^{-1}r+q coef_z(V)+r coef_z(W)+qra_{0012}=0$$

y definir $b:=\beta q, c:=\beta^{-1}r$.

Despejar de la primera ecuación a r, sustituirla en la segunda ecuación y de esta despejar a q en términos de β.

Sustituir en la tercera a q y a r las cuales son funciones de β y resolver en esta variable.

9. *Encontrar un punto*

$$p_0=(X_0,Y_0,Z_0,T_0)$$

en la superficie tal que:

$$p_0 \notin l_{XT}\cup l_{YT}\cup l_{ZT}\cup l_1\cup l_2$$

El punto $P=(0,0,0,1)\in \mathbf{X}-l_{XT}\cup l_{YT}\cup l_{ZT}\cup l_1\cup l$.

10. *Definir:*

$$u:=\frac{T+X}{T_0+X_0},\ v:=\frac{T+bY}{T_0+bY_0},\ w:=\frac{T+cZ}{T_0+cZ_0},$$

$$u' := \frac{T}{T_0},\ v' := \frac{T+X+qV}{T_0+X_0+qV(p_0)},\ w' := \frac{T+X+rW}{T_0+X_0+rW(p_O)}.$$

11. *Encontar escalares*

$$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, a_1', a_2', b_1', b_2', c_1', c_2'$$

tales que

$$a_1u+b_1v+c_1w = a_1'u'+b_1'v'+c_1'w'$$

$$a_2u+b_2v+c_2w = a_2'u'+b_2'v'+c_2'w'$$

Las ecuaciones u, v, w, u' son linealmente independientes en el espacio de las ecuaciones lineales en cuatro variables.

12. *Encontrar las tres raíces $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ del polinomio*

$$(a_1+\sigma a_2)(b_1+\sigma b_2)(c_1+\sigma c_2) = (a_1'+\sigma a_2')(b_1'+\sigma b_2')(c_1'+\sigma c_2')$$

y definir para $i = 1, 2, 3$

$$A_i := a_1+\sigma_i a_2, B_i := b_1+\sigma_i b_2, C_i := c_1+\sigma_i c_2$$

$$A_i' := a_1'+\sigma_i a_2', B_i' := b_1'+\sigma_i b_2', C_i' := c_1'+\sigma_i c_2'$$

13. *Las ecuaciones de nueve de las rectas serán:*

$$\begin{array}{lll}(u=0, u'=0), & (u=0, v'=0), & (u=0, w'=0),\\ (v=0, u'=0), & (v=0, v'=0), & (v=0, w'=0),\\ (w=0, u'=0), & (w=0, v'=0), & (w=0, w'=0).\end{array}$$

y para cada i, las ecuaciones de seis rectas serán:

$$\begin{array}{l}(A_iu-A_i'u'=0, B_iv-B_i'v'=0, C_iw-C_i'w'=0),\\ (A_iu-B_i'v'=0, B_iv-A_i'u'=0, C_iw-C_i'w'=0),\\ (A_iu-C_i'w'=0, B_iv-B_i'v'=0, C_iw-A_i'u'=0),\\ (A_iu-A_i'u'=0, B_iv-C_i'w'=0, C_iw-B_i'v'=0),\\ (A_iu-B_i'v'=0, B_iv-C_i'w'=0, C_iw-A_i'u'=0),\\ (A_iu-C_i'w'=0, B_iv-A_i'u'=0, C_iw-B_i'v'=0).\end{array}$$

por lo tanto suman en total veintisiete rectas contenidas en la superficie.

4.2 Comentarios al algoritmo

En esta sección trataremos de dar un comentario más amplio a los incisos importantes del algoritmo con el fin de que sea mas claro y se entiendan los pasos que se siguen.

Explicación del algoritmo

Paso 1) $f(1:1:1:\lambda)$ es un polinomio en λ de grado tres por lo tanto existe una raíz que anula a este polinomio.

Paso 4) La Proposición 2.1.4 da una demostración de la existencia de una recta en la superficie y dice como calcular la ecuación de ésta. Demuestra también que el coeficiente a_{0021} es diferente de cero.

Paso 5) La Proposición 2.1.5 prueba que para una recta contenida en la superficie del Paso 4 existen exactamente cinco planos conteniendo a la recta que intersectan a la superficie, además de la recta original, en otro par de rectas.

Paso 6.2.2) En el Capítulo 3 vimos que si evaluamos el punto $(X, Y, Z, -X)$ en la ecuación de la superficie $\mathbf{X} = \mathbf{V}(f)$ (donde el plano $(T+X=0)$ cumple con las condiciones del Paso 5) obtendremos las ecuaciones de los planos $V=0, W=0$.

Capítulo 5: UN EJEMPLO DEL ALGORITMO

Después de ver el algoritmo, veremos un ejemplo de como funciona este. El campo sobre el cual se dará el ejemplo es el campo de los numeros complejos $\mathbf{C}$.

Para que quede claro el ejemplo, incluimos cada paso de algoritmo con letras italicas.

5.1 Ejemplo

Sea f ***un polinomio homogéneo cúbico en*** $\mathbf{C}[X,Y,Z,T]$

$$f(X,Y,Z,T)=X^2Z-Y^3-\tfrac{1}{2}X^2T+\tfrac{1}{2}Y^2T+Z^2T+\tfrac{1}{2}T^3-\tfrac{3}{2}XYT-\tfrac{1}{2}XZT$$
$$+XT^2+\tfrac{1}{2}YZT-\tfrac{1}{2}YT^2-\tfrac{3}{2}ZT^2$$

Alplicación del algoritmo

1. ***Encontrar un punto*** $P\in\mathbf{X}$.

   El punto $P=(0:0:1:0)\in\mathbf{X}$.

2. ***Trasladar el punto*** P ***al punto*** $(0:0:1:0)$

   El punto P es el punto $(0:0:1:0)$.

3. ***Arreglar coordenadas para que*** $T_P\mathbf{X}:(T=0)$

Primero calcularemos $T_P\mathbf{X}$, para lo cual tenemos primero que calcular $\nabla f(P)$.

$f_X = 2XZ - XT - \frac{3}{2}YT - \frac{1}{2}ZT + T^2,$

$f_Y = -3Y^2 + YT - \frac{3}{2}XT + \frac{1}{2}ZT - \frac{1}{2}T^2,$

$f_Z = X^2 + 2ZT - \frac{1}{2}XT + \frac{1}{2}YT - 3ZT,$

$f_T = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + Z^2 + \frac{3}{2}T^2 - \frac{3}{2}XY - \frac{1}{2}XZ + 2XT + \frac{1}{2}YZ - YT - 3ZT,$

por lo tanto, $\nabla f(P) = (0:0:0:1)$, es decir, $T_P\mathbf{X} : (T=0)$, por lo cual no es necesario hacer un cambio de coordenadas.

4. ***Sea*** $\mathbf{C} = \mathbf{X} \cap T_P\mathbf{X}$

Definir:

$A := a_{2001},\ B := a_{0201},\ C := a_{0021},\ D := a_{0003},\ E := a_{1101},$

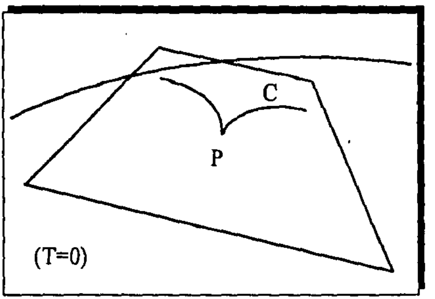
$F := a_{1011},\ G := a_{1002},\ H := a_{0111},\ I := a_{0102},\ J := a_{0012}.$

Para este caso tenemos que $\mathbf{C} = \mathbf{V}(f')$, donde

$$f'(X,Y,Z) := f(X,Y,Z,0) = X^2Z - Y^3$$

Definimos:

$$A := -\tfrac{1}{2},\ B := \tfrac{1}{2},\ C := 1,\ D := \tfrac{1}{2},\ E := -\tfrac{3}{2},$$
$$F := -\tfrac{1}{2},\ G := 1,\ H := \tfrac{1}{2},\ I := -\tfrac{1}{2},\ J := -\tfrac{3}{2}.$$



4.1. ***Sean***

$\{x_1,x_2,x_3\} = \mathbf{V}(X=0)\cap C$ *y* $\{y_1,y_2,y_3\} = \mathbf{V}(Y=0)\cap C$,

La curva C es reducible si alguna de las rectas generadas por la pareja de puntos:

$\{x_1,y_1\}$, $\{x_1,y_2\}$, $\{x_1,y_3\}$, $\{x_2,y_1\}$, $\{x_2,y_2\}$, $\{x_2,y_3\}$,

$\{x_3,y_1\}$, $\{x_3,y_2\}$, $\{x_3,y_3\}$, $\{x_1,x_2\}$, $\{y_1,y_2\}$,

esta contenida en la curva C.

Encontramos primero la interseccióñes de **C** con la recta $(X=0)$.

$f(0:Y:Z:0) = -Y^3$, lo cual implica que

$$x_1 = x_2 = x_3 = (X:0:0:0)$$

son los puntos de intersección de la recta con la curva.

La intersección de **C** con la recta $(Y=0)$, la encontramos observando que:

$$f(X,0,Z,0) = X^2Z,$$

es decir $y_1 = y_2 = (0:0:Z:0)$ y $y_3 = (X:0:0:0)$ son los puntos de intersección de la curva **C** con la recta.

Por lo tanto

$x_1 = x_2 = x_3 = y_3 = (X:0:0:0)$ y $y_1 = y_2 = (0:0:Z:0)$, entonces la única recta posible que generan este conjunto de puntos es la recta generada por los puntos$\{x_1,y_1\}$, la cual tiene por ecuación:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = 0,$$

es decir, la ecuación de la recta es $(Y=0)$, la cual no anula al polinomio $f'(X,Y,Z) = X^2Z - Y^3$, por lo tanto la curva **C** es irreducible.

4.1.1. Si es C irreducible, caso cuspidal

En este caso basta calcular hessiano de f en el punto P de la curva C.

El hessiano se define como:

$Hf(P) = 4a_{2010}a_{0210} - a_{1110}^2$

Para este caso $a_{2010} = 1$, $a_{0201} = 0$ y $a_{1110} = 0$, por lo tanto $Hf(P) = 0$, es decir C es una curva cuspidal y P un punto cuspide.

Arreglar coordenadas para que:

$f(X,Y,Z,0) = X^2Y - RY^3$

Observemos que $f(X,Y,Z,0) = X^2Z - Y^3$, por lo tanto, no es necesario arreglar coordenadas y ademas $R = 1$.

Definir los siguientes polinomios en α.

$b_0 := -3R\alpha,$

$b_1 := 6CR^2\alpha^5 + 4HR\alpha^3 + 3FR\alpha^2 + 2B\alpha + E,$

$$b_2 := -2C^2\alpha^9 - 3CHR^2\alpha^7 - 3CFR^2\alpha^6 - (2BC + H^2)R\alpha^5$$
$$-2(CE + FH)R\alpha^4 - 2(CAR + BH + F^2R - JR)\alpha^3$$
$$-(EH + BF)\alpha^2 - (AH + EF - I)\alpha - AF + G,$$

$c_0 := -R,$

$c_1 := 9CR^2\alpha^4 + 3HR\alpha^2 + B,$

$$c_2 := -6C^2R^3\alpha^8 - 7CHR^2\alpha^6 - 6CFR^2\alpha^5 - (6BC + H^2)R\alpha^4$$
$$-(6CE + FH)R\alpha^3 - (6ACR - BH - 3JR)\alpha^2$$
$$-EH\alpha + I - AH,$$

$$
\begin{aligned}
c_3 := {} & C^3R^4\alpha^{12}+2C^2HR^3\alpha^{10}+2C^2FR^3\alpha^9 \\
& +(2BC^2+CH^2)R^2\alpha^8+2(C^2E+CFH)R^2\alpha^7 \\
& +(CF^2R+2AC^2R+2BCH-CJR)R\alpha^6 \\
& +(2CEH+2BCF)R\alpha^5 \\
& +(B^2C+2ACHR+2CEFR-HJR)\alpha^4 \\
& +(2ACFR+2BCE-FJR)\alpha^3+(CE^2+2ABC-BJ)\alpha^2 \\
& +(2ACE-EJ)\alpha+A^2C+D-AJ,
\end{aligned}
$$

Definamos a los polinomios:

$$
\begin{aligned}
b_0 &:= -3\alpha, \\
b_1 &:= 6\alpha^5+2\alpha^3-\tfrac{3}{2}\alpha^2+\alpha-\tfrac{3}{2}, \\
b_2 &:= -2\alpha^9-\tfrac{3}{2}\alpha^7+\tfrac{3}{2}\alpha^6-\tfrac{5}{4}\alpha^5+\tfrac{7}{2}\alpha^4-3\alpha^3+\alpha^2 \\
&\qquad -\alpha+\tfrac{3}{4}, \\
c_0 &:= -1, \\
c_1 &:= 9\alpha^4+\tfrac{3}{2}\alpha^2+\tfrac{1}{2}, \\
c_2 &:= -6\alpha^8-\tfrac{7}{2}\alpha^6+3\alpha^5-\tfrac{13}{4}\alpha^4+\tfrac{37}{4}\alpha^3-\tfrac{5}{4}\alpha^2 \\
&\qquad +\tfrac{3}{4}\alpha-\tfrac{1}{4}, \\
c_3 &:= \alpha^{12}+\alpha^{10}-\alpha^9+\tfrac{5}{4}\alpha^8-\tfrac{7}{2}\alpha^7+\tfrac{5}{4}\alpha^6-2\alpha^5+2\alpha^4 \\
&\qquad -\tfrac{7}{4}\alpha^3+\tfrac{5}{2}\alpha^2-\tfrac{3}{4}\alpha.
\end{aligned}
$$

4.1.2 Calcular un cero para $R_{27}(\alpha) \in \mathbf{K}[\alpha]$.

$$
R_{27}(\alpha) := \det\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}
$$

Una raíz para este polinomio es $\alpha = 1$, ya que

$$R_{27}(1)=\det\begin{pmatrix} b_0(1) & b_1(1) & b_2(1) & 0 & 0 \\ 0 & b_0(1) & b_1(1) & b_2(1) & 0 \\ 0 & 0 & b_0(1) & b_1(1) & b_2(1) \\ c_0(1) & c_1(1) & c_2(1) & c_3(1) & 0 \\ 0 & c_0(1) & c_1(1) & c_2(1) & c_3(1) \end{pmatrix}=0$$

esto sucede, porque $b_2(1)=c_3(1)=0$, es decir, el determinante $R_{27}(1)$ tiene solo ceros en su ultima columna.

4.1.2.1. *Encontrar una solución para el sistema*

$$b_0Y^2+b_1YT+b_2T^2=0,$$

$$c_0Y^3+c_1Y^2T+c_2YT^2+c_3T^3=0$$

y denotarla por $(\eta:\tau)$.

Tenemos que:

$b_0(1)=-3$, $b_1(1)=6$, $c_0(1)=-1$, $c_1(1)=11$ y $c_2(1)=-\frac{5}{4}$.

Una intersección para las curvas

$$-3Y^2+6YT=0,$$

$$-Y^3+11Y^2T-\tfrac{5}{4}YT^2=0$$

es el punto $(0:1)$ el cual denotaremos por $(\eta:\tau)$.

4.1.2.2. *Sustituir en* $\varsigma=3R\alpha^2\eta-g(1,\alpha,R\alpha^3,0)\tau$, ***con*** α ***una*** $R_{27}(\alpha)$ ***y donde***

$$g(1,\alpha,R\alpha^3,0)=CR^2\alpha^6+HR\alpha^4+FR\alpha^3$$
$$+B\alpha^2+E\alpha+A$$

Tenemos que $\alpha=1$ es raíz del polinomio $R_{27}(\alpha)$, por lo tanto, $\varsigma=3\eta+g(1,1,1,0)\tau$, donde $g(1,1,1,0)=-\frac{1}{2}$, esto implica que $\varsigma=-\frac{1}{2}$.

4.1.2.3. La recta contenida en la superficie será

$$l_{P_\alpha Q} : \{\lambda(1 : \alpha : R\alpha^3 : 0) + \mu(0 : \eta : \varsigma : \tau) : \lambda, \mu \in \mathbf{K}\}$$

La recta contenida en la superficie es:

$$l_{P_1 Q} : \left\{\lambda(1 : 1 : 1 : 0) + \mu(0 : 0 : \tfrac{1}{2} : 1) : \lambda, \mu \in \mathbf{C}\right\},$$

es decir,

$$f(\lambda(1 : 1 : 1 : 0) + \mu(0 : 0 : \tfrac{1}{2} : 1)) \equiv 0$$

5. Transformar coodenadas para que $l_{P_\alpha Q}$ sea ahora la recta

$$l : (Z = 0, T = 0)$$

Sea $\mathbf{T}_1 : PSL(4, \mathbf{K}) \to PSL(4, \mathbf{K})$ un cambio de coordenadas definido como:

$$\mathbf{T}_1(X, Y, Z, T) = (X + Z, Y + Z, Z + \tfrac{1}{2}T, T).$$

Bajo este cambio de coordenadas la ecuación correspondiente a nuestra superficie en estas nuevas coordenadas será:

$$\begin{aligned} f(X, Y, Z, T) = {} & X(XZ + 2Z^2 + \tfrac{3}{4}T^2 - 2ZT) \\ & + Y(-Y^2 - 3YZ + \tfrac{1}{2}YT - 3Z^2 - \tfrac{1}{4}T^2) \\ & -\tfrac{3}{2}XYT, \end{aligned}$$

y la recta $l_{P_\alpha Q}$, tendra por ecuación a $(X = 0, Y = 0)$.

Ahora apliquemos a la nueva ecuación para la superficie y de la recta contenida en esta, el cambio de coordenadas:

$$\mathbf{T}_2 : PSL(4, \mathbf{K})\ PSL(4, \mathbf{K})$$

definido como $\mathbf{T}_2(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$, por lo tanto, la ecuaciónes en las nuevas coordenadas son:

$$\begin{aligned} f(X, Y, Z, T) = {} & Z(2X^2 + \tfrac{3}{4}Y^2 - 2XY + XZ) \\ & + T(-3X^2 - \tfrac{1}{4}Y^2 - T^2 - 3XT + \tfrac{1}{2}YT) \\ & -\tfrac{3}{2}YZT, \end{aligned}$$

y la ecuación para la recta contenida en la superficie es:

$$l : (Z = 0, T = 0)$$

5.1. Trasladar P al punto $(0 : 0 : 0 : 1)$.

5.1.1. Arreglar coordenadas para que $l : (T = 0, X = 0)$

Sea $\mathbf{T}_3 : PSL(4,\mathbf{K}) \to PSL(4,\mathbf{K})$ un cambio de coordenadas definido como:

$$\mathbf{T}_3(X,Y,Z,T) = (Z, Y + (1+\sqrt{3}\,i)T, X, T)$$

En el nuevo sistema de coordenadas la ecuación de la superficie es:

$$\begin{aligned} f(X,Y,Z,T) = & X(\tfrac{3}{4}Y^2 + XZ - 2YZ + 2Z^2) \\ & + T(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}iYT - \tfrac{1}{4}Y^2 - 3ZT - 3Z^2) \\ & + XT(-3T + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}iY - 2(1+\sqrt{3}\,i)Z). \end{aligned}$$

La cual se anula en la recta $l : (T = 0, X = 0)$ y en el punto $P = (0 : 0 : 0 : 1)$.

Apliquemos ahora la reflexión:

$\mathbf{T}_4 : PSL(4,\mathbf{K}) \to PSL(4,\mathbf{K})$

definida como:

$\mathbf{T}_4(X,Y,Z,T) = (T,Y,Z,X)$.

Por lo tanto, la ecuación de la superficie en las nuevas coordenadas es:

$$\begin{aligned} f(X,Y,Z,T) = & X(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}iXY - \tfrac{1}{4}Y^2 - 3XZ - 3Z^2) \\ & + T(\tfrac{3}{4}Y^2 + ZT - 2YZ + 2Z^2) \\ & + XT(-3X + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}iY - 2(1+\sqrt{3}\,i)Z), \end{aligned}$$

que cumple que $f(0 : 0 : 0 : 1) = 0$ además

$$l:(X=0,T=0)$$

es la ecuación de la recta.

5.2. Encontrar dos raíces ε_1, ε_2 ***del polinomio***

$$\Delta(\varepsilon)=4\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{C}(\varepsilon)\mathbf{F}(\varepsilon)+\mathbf{B}(\varepsilon)\mathbf{D}(\varepsilon)\mathbf{E}(\varepsilon)$$
$$-\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{E}(\varepsilon)^2-\mathbf{B}(\varepsilon)^2\mathbf{F}(\varepsilon)-\mathbf{C}(\varepsilon)\mathbf{D}(\varepsilon)^2$$

donde

$$A(\varepsilon):=a_{0201}\varepsilon+a_{1200},$$
$$B(\varepsilon):=a_{0111}\varepsilon+a_{1110},$$
$$C(\varepsilon):=a_{0021}\varepsilon+a_{1020},$$
$$D(\varepsilon):=a_{0102}\varepsilon^2+a_{1101}\varepsilon+a_{2100},$$
$$E(\varepsilon):=a_{0012}\varepsilon^2+a_{1011}\varepsilon+a_{2010},$$
$$F(\varepsilon):=a_{0003}\varepsilon^3+a_{1002}\varepsilon^2+a_{2001}\varepsilon+a_{3000}.$$

Definamos:

$$A(\varepsilon):=\tfrac{3}{4}\varepsilon-\tfrac{1}{4},$$
$$B(\varepsilon):=-2\varepsilon,$$
$$C(\varepsilon):=2\varepsilon-3,$$
$$D(\varepsilon):=\tfrac{3\sqrt{3}}{2}i\varepsilon-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$E(\varepsilon):=\varepsilon^2-2(1+\sqrt{3}\,i)\varepsilon-3,$$
$$F(\varepsilon):=-3\varepsilon.$$

Evaluemos en $\varepsilon=0$,

$$A(0)=-\tfrac{1}{4},$$
$$B(0)=0,$$
$$C(0)=-3,$$
$$D(0)=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$E(0)=-3,$$
$$F(0)=0.$$

por lo tanto, $\Delta(0)=0$, es decir, $\varepsilon=0$ es raíz de Δ.

Otra raíz es $\varepsilon=-1$, ya que

$$A(-1)=-1,$$
$$B(-1)=2,$$
$$C(-1)=-5,$$
$$D(-1)=-2\sqrt{3}\,i,$$
$$E(-1)=2\sqrt{3}\,i,$$
$$F(-1)=3.$$

y al calcular $\Delta(-1)$, obtenemos que también es cero.

Por lo tanto definamos $\varepsilon_1:=0$, $\varepsilon_2:=-1$, dos de las raíces del polinomio Δ.

5.3. Denotar a los planos

$$T-\varepsilon_1 X=0,\ T-\varepsilon_2 X=0$$

por π_1 ***y*** π_2.

Definamos $\pi_1:(T=0)$ y $\pi_2:(X+T=0)$.

6. Arreglar coordenadas para que:

6.1.1. Sea $(T=0)$ ***la ecuación del plano*** $\pi_1.(T-\varepsilon_1 X=0)$.

Tenemos que $\varepsilon_1=0$, por lo tanto no es necesario arreglo alguno de coordenadas.

6.1.2. Sean

$$l_{YT}:(Y=0,T=0),\ l_{ZT}:(Z=0,T=0)$$

las rectas contenidas en al plano $\pi_1:(T=0)$ ***que se encuentran también en la superficie.***

Para esta parte daremos el cambio de coordenadas en el inciso 6.2.2.

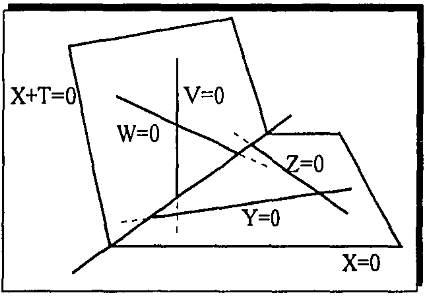
6.2.1. Sea $(T+X=0)$ ***la ecuación del plano*** $\pi_2:(X+T=0)$.

Analogamente aquí tenemos que $\varepsilon_2=-1$, por lo tanto tampoco es necesario hacer un cambio de coordenadas.

6.2.2.Sean

$l_1 : (T+X=0, V=0),\ l_2 : (T+X=0, W=0)$

las rectas contenidas en el plano $\pi_2 : (T+X=0)$ ***que se encuentran también en la superficie.***



Primeramente observemos la intersección de $\pi_1 : (T=0)$ con nuestra superficie es la siguiente:

$$f(X,Y,Z,T) = X(-\tfrac{1}{4}Y^2 - 3Z^2 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}iXY - 3XZ)$$

La cónica $C_1 : (-\frac{1}{4}Y^2 - 3Z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}iXY - 3XZ = 0)$ es reducible al par de rectas:

$L_1 : (-\frac{1}{4}Y - \frac{\sqrt{3}}{2}Z = 0),\ L_2 : (2\sqrt{3}X - iY + 2\sqrt{3}Z = 0)$.

Para encontrar la reducción anterior se analizó las siguientes intersecciones: $C_1 \cap (X=0)$ y $C_1 \cap (Y=0)$.

Las cuales son:

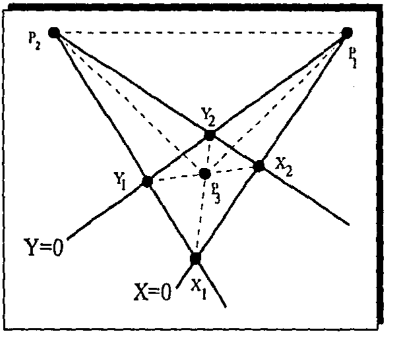
$C_1 \cap (X=0) = \{x_1 : (Y - 2\sqrt{3}\,iZ = 0),\ x_2 : (Y + 2\sqrt{3}\,iZ = 0)\}$

y

$C_2 \cap (Y=0) = \{y_1 : (Z=0),\ y_2 : (Z+X=0)\}$

Basta con ver cual de los vertices P_1, P_2, P_3 del triángulo diagonal esta en la curva C_1, donde

$$P_1 = \langle x_1, x_2 \rangle \cap \langle y_1, y_2 \rangle,$$
$$P_2 = \langle x_1, y_1 \rangle \cap \langle x_2, y_2 \rangle,$$
$$P_3 = \langle x_1, y_2 \rangle \cap \langle x_2, y_1 \rangle.$$



El punto $P_1 \in C_1$ y por lo tanto, $L_1 = \langle x_1, P_1 \rangle$ y $L_2 = \langle y_1, P_1 \rangle$, es decir,

$$f(X, Y, Z, 0) = X(-\tfrac{i}{4}Y - \tfrac{\sqrt{3}}{2}Z)(2\sqrt{3}\,X - iY + 2\sqrt{3}\,Z = 0).$$

Ahora veamos la intersección de $\pi_2 : (X + T = 0)$ con la superficie es la siguiente:

$$f(X, Y, Z, -X) = X(3X^2 - 2\sqrt{3}\,iXY - Y^2 + 2\sqrt{3}\,iXZ + 2YZ - 5Z^2)$$

La cónica:

$$C_2 : (3X^2 - 2\sqrt{3}\,iXY - Y^2 + 2\sqrt{3}\,iXZ + 2YZ - 5Z^2 = 0)$$

es reducible al par de rectas :

$$L_1' : (\sqrt{3}\,iX + Y - (1 + 2i)Z = 0),\ L_2' : (\sqrt{3}\,iX + Y - (1 - 2i)Z = 0).$$

De manera analoga para encontrar la reducción anterior analizamos la intesecciones $C_2 \cap (X = 0)$ y $C_2 \cap (Z = 0)$.

$$C_2 \cap (X=0) = \{x_1 : (Y-(1+2i)Z=0),\ x_2 : (Y-(1-2i)Z=0\}$$

y

$$C_2 \cap (Z=0) = \left\{z_1 : (Y+\sqrt{3}\,iX=0),\ z_2 : (Z=0)\right\}.$$

Y ahora observemos cual de los vertices P_1, P_2, P_3 esta sobre la cónica C_2, donde

$$P_1 = \langle x_1, x_2\rangle \cap \langle z_1, z_2\rangle,$$
$$P_2 = \langle x_1, z_1\rangle \cap \langle x_2, z_2\rangle,$$
$$P_3 = \langle x_1, z_2\rangle \cap \langle x_2, z_1\rangle.$$

El punto $P_2 \in C_2$ y entonces, $L'_1 = \langle x_1, P_2\rangle$ y $L'_2 = \langle x_2, P_2\rangle$, por lo tanto,

$$f(X,Y,Z,-X) = X(\sqrt{3}\,iX+Y-(1+2i)Z)(\sqrt{3}\,iX+Y-(1-2i)Z)$$

Ahora queremos cambiar de coordenadas para que las rectas contenidas en las superficie y en el plano $\pi_1 : (T=0)$, cuyas ecuaciones son:

$$L_1 : (-\tfrac{i}{4}Y - \tfrac{\sqrt{3}}{2}Z = 0, T=0)$$

y

$$L_2 : (2\sqrt{3}\,X - iY + 2\sqrt{3}\,Z = 0, T=0),$$

tengan por ecuaciones $(Y=0, T=0)$ y $(X=0, T=0)$ respectivamente.

Entonces queremos una transformación

$$\mathbf{T}_5 : PSL(4,\mathbf{K}) \to PSL(4,\mathbf{K})$$

que mande:

$$X \to X,$$
$$-\sqrt{3}\,iX + 2iY + \tfrac{i}{2}Z \to Y,$$
$$-\tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{\sqrt{3}}Y + \tfrac{1}{4\sqrt{3}}Z \to Z,$$
$$T \to T,$$

la cual esta definida por:

$$\mathbf{T}_5(X,Y,Z,T)=(X,-\sqrt{3}\,iX+2iY+\tfrac{i}{2}Z,-\tfrac{1}{2}X-\tfrac{1}{\sqrt{3}}Y+\tfrac{1}{4\sqrt{3}}Z,T)$$

Bajo esta transformación la nueva ecuación para nuestra superficie es:

$$f(X,Y,Z,T)=XYZ+T^2(-\tfrac{1}{2}X-\tfrac{1}{\sqrt{3}}Y+\tfrac{1}{4\sqrt{3}}Z)$$
$$+T((-\tfrac{7}{3}+\tfrac{4}{\sqrt{3}}i)Y^2-\tfrac{11}{6}YZ+(-\tfrac{7}{48}-\tfrac{i}{4\sqrt{3}})Z^2+\tfrac{3}{4}X^2+\tfrac{2}{\sqrt{3}}(2+i\sqrt{3})XY)$$

Observemos que bajo esta transformación las ecuaciones para L_1 y L_2 (a la cuales ahora las denotaremos por l_{YT}, l_{ZT} respectivamente) son $l_{YT}:(Y=0,T=0)$, $l_{ZT}:(Z=0,T=0)$, las de las rectas L_1' y L_2' (las cuales denotaremos por l_1, l_2 respectivamente) tendran por ecuaciones:

$l_1:(V=0,\ T+X=0)$ y $l_2:(W=0,T+X=0)$,

donde

$$V=(\frac{1}{2}+i)X+\frac{\sqrt{3}+(6+2\sqrt{3})i}{3}Y-\frac{\sqrt{3}-(6-2\sqrt{3})i}{12}Z,$$
$$W=-(\frac{1}{2}-i)X-\frac{\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})i}{3}Y+\frac{\sqrt{3}-(6+2\sqrt{3})i}{12}Z,$$

es decir, $f(X,Y,Z,0)=XYZ$ y $f(X,Y,Z,-X)=XVW$.

6.3.1 El punto $P=(0:0:0:1)$ este en la superficie.

La ecuación de la superficie ya cumple que $f(0,0,0,1)=0$

7. Multiplicar f por $\frac{1}{a_{1110}}$.

El coeficiente a_{1110} es igual a uno.

8. Encontrar una solución para β, q, r del sistema:

$$1+qcoef_x(V)+rcoef_x(W)+qra_{1002}=0$$
$$-\beta q+qcoef_y(V)+rcoef_y(W)+qra_{0102}=0$$
$$-\beta^{-1}r+qcoef_z(V)+rcoef_z(W)+qra_{0012}=0$$

y definir $b:=\beta q$, $c:=\beta^{-1}r$.

Resolvamos el sistema:

$$1+(\frac{1}{2}+i)q+(-\frac{1}{2}+i)r-\frac{1}{2}qr=0$$

$$-\beta q+(\frac{\sqrt{3}+(6+2\sqrt{3})i}{3})q-(\frac{\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})i}{3})r-\frac{1}{\sqrt{3}}qr=0$$

$$-\beta^{-1}r-(\frac{\sqrt{3}-(6-2\sqrt{3})i}{12})q+(\frac{\sqrt{3}-(6+2\sqrt{3})i}{12})r+\frac{1}{4\sqrt{3}}qr=0$$

De la primera ecuación despejamos a r y obtenemos que:

$$r=\frac{2+(1+2i)q}{1-2i+q},$$

sustituyéndola en la segunda ecuacion, de la cual despejamos a q,

$$q=\frac{(3-6i)\beta-24+2\sqrt{3}\pm\sqrt{((3-6i)\beta-24+2\sqrt{3})^2-4(3\beta-6i)(2\sqrt{3}+(12-4\sqrt{3}\,i))}}{-6\beta+12i},$$

por lo tanto,

$$r=\frac{-24+2\sqrt{3}-24i+4\sqrt{3}\,i+3\beta\pm(1+2i)\sqrt{((3-6i)\beta-24+2\sqrt{3})^2-4(3\beta-6i)(2\sqrt{3}+(12-4\sqrt{3}\,i))}}{-3\beta+6\beta i+2\sqrt{3}+12i\pm\sqrt{((3-6i)\beta-24+2\sqrt{3})^2-4(3\beta-6i)(2\sqrt{3}+(12-4\sqrt{3}\,i)}},$$

ya una vez obtenidos q y r en función de β, podemos sutituirlos en la tercera ecuación y así obtener al polinomio en β de grado cuatro:

$$\beta^4-\frac{2i(14+(10+i)\sqrt{3})}{6+(2+i)\sqrt{3}}\beta^3-\frac{4(23+12\sqrt{3})}{6+(2+i)\sqrt{3}}\beta^2+\frac{8(14i+(1+10i)\sqrt{3}}{6+(2+i)\sqrt{3}}\beta+\frac{16(6+(2-i)\sqrt{3})}{6+(2+i)\sqrt{3}}=0$$

el cual bajo la transformación:

$$\beta=x-\frac{1}{4}\left(-\frac{2i(14+(10+i)\sqrt{3})}{6+(2+i)\sqrt{3}}\right)$$

se reduce al polinomio $x^4-\mathbf{q}x^2+\mathbf{r}x+\mathbf{s}$, donde

$$\mathbf{q}=-\frac{7143+1968i+(4000+1144i)\sqrt{3}}{6(481+272\sqrt{3})},$$

$$\mathbf{r}=\frac{125256+130905i+(72724+76912i)\sqrt{3}}{132345+2824(3)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\mathbf{s}=\frac{36438213-43758048i+(21014720-25346096i)\sqrt{3}}{144(453313+26164\sqrt{3})},$$

para encontrar las raíces a este polinomio, antes se tiene que resolver el polinomio $k^3+2\mathbf{q}k^2+(\mathbf{q}^2-4\mathbf{s})k-\mathbf{r}^2=0$ y para resolverlo tenemos que sustituir

$$k=y-\frac{2\mathbf{q}}{3},$$

obteniendo entonces al polinomio $y^3+\mathbf{P}y+\mathbf{Q}$, donde

$$\mathbf{P}=\frac{1004425233215717775151+1006064464852654480032i+\mathrm{A}\sqrt{3}}{1296(2151548321199841+1242199275102088\sqrt{3})},$$

$$\mathbf{Q}=-\frac{69576578879759592560846080209339+14468451968199328678888450885344 0i-\mathrm{B}\sqrt{3}}{62208(3151352313792907720569836 33+1819434103799906392242831 28\sqrt{3})},$$

con

$$\mathbf{A}=577990925384832598544+580850839763569005 92i,$$

$$\mathbf{B}=-40170057134431609095883115435576 56$$
$$-83533647776883973510609822767200i$$

cuya solución es

$$y_1=\left(-\frac{\mathbf{Q}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\mathbf{Q}}{2}\right)^2+\left(\frac{\mathbf{P}}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\frac{\mathbf{Q}}{2}-\sqrt{\left(\frac{\mathbf{Q}}{2}\right)^2+\left(\frac{\mathbf{P}}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

y por lo tanto, una solución para $k^3+2\mathbf{q}k^2+(\mathbf{q}^2-4\mathbf{s})k-\mathbf{r}^2=0$ es:

$$k_1=y_1-\frac{2\mathbf{q}}{3}.$$

Definamos

$$\mathbf{m}:=\frac{1}{2}\left(k_1+\mathbf{q}+\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{k_1}}\right)\text{ y }\mathbf{l}:=\frac{1}{2}\left(k_1+\mathbf{q}-\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{k_1}}\right),$$

entonces, las soluciones a los polinomios

$$x^2+k_1x+\mathbf{l}=0,\ x^2+k_1x+\mathbf{m}=0,$$

corresponden a las soluciones del polinomio $x^4 - qx^2 + rx + s$.

Sea x_1 una solución al polinomio anterior esto implica que

$$\beta_1 = x_1 - \frac{1}{4}\left(-\frac{2i(14+(10+i)\sqrt{3})}{6+(2+i)\sqrt{3}}\right),$$

$$q_1 = \frac{(3-6i)\beta_1 - 24 + 2\sqrt{3} \pm \sqrt{((3-6i)\beta_1 - 24 + 2\sqrt{3})^2 - 4(3\beta_1 - 6i)(2\sqrt{3} + (12-4\sqrt{3}\, i))}}{-6\beta_1 + 12i},$$

$$r_1 = \frac{-24 + 2\sqrt{3} - 24i + 4\sqrt{3}\, i + 3\beta_1 \pm (1+2i)\sqrt{((3-6i)\beta_1 - 24 + 2\sqrt{3})^2 - 4(3\beta_1 - 6i)(2\sqrt{3} + (12-4\sqrt{3}\, i))}}{-3\beta_1 + 6\beta_1 i + 2\sqrt{3} + 12 \pm \sqrt{((3-6i)\beta_1 - 24 + 2\sqrt{3})^2 - 4(3\beta_1 - 6i)(2\sqrt{3} + (12-4\sqrt{3}\, i)}},$$

son solución para el sistema:

$$1 + (\frac{1}{2} + i)q + (-\frac{1}{2} + i)r - \frac{1}{2}qr = 0$$

$$-\beta q + (\frac{\sqrt{3} + (6+2\sqrt{3})i}{3})q - (\frac{\sqrt{3} + (6-2\sqrt{3})i}{3})r - \frac{1}{\sqrt{3}}qr = 0$$

$$-\beta^{-1} r - (\frac{\sqrt{3} - (6-2\sqrt{3})i}{12})q + (\frac{\sqrt{3} - (6+2\sqrt{3})i}{12})r + \frac{1}{4\sqrt{3}}qr = 0$$

y por ultimo definamos $b := \beta_1 q_1$, $c := \beta_1^{-1} r_1$, $q := q_1$ y $r := r_1$.

9. Encontrar un punto

$$p_0 = (X_0, Y_0, Z_0, T_0)$$

en la superficie tal que:

$$p_0 \notin l_{XT} \cup l_{YT} \cup l_{ZT} \cup l_1 \cup l_1.$$

El punto $P = (0:0:0:1) \notin l_{XT} \cup l_{YT} \cup l_{ZT} \cup l_1 \cup l_1$ y se encuentra en la superficie, por lo tanto, podemos tomar a p_0 como P, es decir, $X_0 = 0, Y_0 = 0, Z_0 = 0$ y $T_0 = 1$.

10. Definir:

$$u := \frac{T+X}{T_0+X_0},\ v := \frac{T+bY}{T_0+bY_0},\ w := \frac{T+cZ}{T_0+cZ_0},$$

$$u' := \frac{T}{T_0},\ v' := \frac{T+X+qV}{T_0+X_0+qV(p_0)},\ w' := \frac{T+X+rW}{T_0+X_0+rW(p_0)},$$

Definamos:

$$u := T+X,\ v := T+bY,\ w := T+cZ$$

$$u' := T,\ v' := T+X+qV,\ w' := T+X+rW$$

11. Encontrar escalares

$$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, a_1', a_2', b_1', b_2', c_1', c_2'$$

tales que

$$a_1u+b_1v+c_1w = a_1'u'+b_1'v'+c_1'w'$$

$$a_2u+b_2v+c_2w = a_2'u'+b_2'v'+c_2'w'$$

Las cuatro ecuaciones $u=T+X$, $v=T+bY$, $w=T+cZ$ y $u'=T$ son linealmente independientes en el espacio de las ecuaciones lineales en cuatro variables, por lo que siempre es posible encontrar dos soluciones al sisitema:

$$Au+Bv+Cw = Du'+Ev'+Fw'$$

que sean linealmente independientes.

Dos soluciones $(a_1,b_1,c_1,a_1',b_1',c_1')$ y $(a_2,b_2,c_2,a_2',b_2',c_2')$ para este sistema son:

$a_1 = 6bc((1+2i)q+(1-2i)r)$,

$b_1 = 4c(6iq+(1+2i)\sqrt{3}\,q+6ir+(1-2i)\sqrt{3}\,r)$,

$c_1 = ib(6q+(-2+i)\sqrt{3}\,q+6r+(2+i)\sqrt{3}\,r)$,

$a_1' = (6ib+(-1-2i)\sqrt{3}\,b+24ic+(4+8i)\sqrt{3}\,c+(6+12i)bc)q$
$\quad -i(-6b+(-2-i)\sqrt{3}\,b-24ic+(8+4i)\sqrt{3}\,c+(12+6i)bc)r$,

$b_1' = 1$,

$c_1' = -1$

y

$a_2 = 6ibc((-2+i)q+(2+i)r)$,

$b_2 = 4ic(-6q+(-2+i)\sqrt{3}\,q-6r+(2+i)\sqrt{3}\,r)$,

$c_2 = b(-6iq+(1+2i)\sqrt{3}\,q-6r+(1-2i)\sqrt{3}\,r)$,

$$a_2' = -(6ib + (-1-2i)\sqrt{3}\,b + 24ic + (4+8i)\sqrt{3}\,c + (6+12i)bc)q$$
$$+i(-6b + (-2-i)\sqrt{3}\,b - 24ic + (8+4i)\sqrt{3}\,c + (12+6i)bc)r,$$
$$b_2' = -1,$$
$$c_2' = 1.$$

12. Encontrar las tres raíces σ_1, σ_2, σ_3 del polinomio

$$(a_1 + \sigma a_2)(b_1 + \sigma b_2)(c_1 + \sigma c_2) = (a_1' + \sigma a_2')(b_1' + \sigma b_2')(c_1' + \sigma c_2')$$

***y definir par** $i = 1,2,3$*

$$A_i := a_1 + \sigma_i a_2, B_i := b_1 + \sigma_i b_2, C_i := c_1 + \sigma_i c_2$$
$$A_i' := a_1' + \sigma_i a_2', B_i' := b_1' + \sigma_i b_2', C_i' := c_1' + \sigma_i c_2'$$

Sustitiumos en la ecuación

$$(a_1 + \sigma a_2)(b_1 + \sigma b_2)(c_1 + \sigma c_2) = (a_1' + \sigma a_2')(b_1' + \sigma b_2')(c_1' + \sigma c_2')$$

los valores de $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, a_1', a_2', b_1', b_2', c_1'$ y c_2', encontrados en el inciso ***11***, desarrollamos y factorizamos el polinomio con respecto a σ, obteniendo la ecuación $A\sigma^3 + B\sigma^2 + C\sigma + D = 0$, donde

$$A = -\left\{6ib + (-1-2i)\sqrt{3}\,b + 24ic + (4+8i)\sqrt{3}\,c + (6+12i)bc\right\}q$$
$$+i\left\{-6b + (-2-i)\sqrt{3}\,b - 24c + (8+4i)\sqrt{3}\,c + (12+6i)bc\right\}r$$
$$+72b^2c^2\left\{(1+22i)q^3 + (51+54i)q^2r + (51-54i)qr^2 + (1-22i)r^3\right\},$$
$$B = 3\left\{6ibq + (-1-2i)\sqrt{3}\,bq + 24icq + (4+8i)\sqrt{3}\,cq + (6+12i)bc\right\}q$$
$$+(-72-1584i)b^2c^2q^3 + 6ibr + (-1+2i)\sqrt{3}\,br + 24icr$$
$$+(4+8i)\sqrt{3}\,cr + (6-12i)bcr + (-3672-3888i)b^2c^2q^2r$$
$$+(-3672+3888i)b^2c^2qr^2 + (-72+1584i)b^2c^2r^3,$$
$$C = -3\left\{6ib + (-1-2i)\sqrt{3}\,b + 24ic + (4+8i)\sqrt{3}\,c + (6+12i)bc)\right\}q$$
$$+3i\left\{-6b + (-2-i)\sqrt{3}\,b + 24ic + (4+8i)\sqrt{3}\,c + (12+6i)bc\right\}r$$
$$+216b^2c^2\left\{(1+22i)q^3 + (51+54i)q^2r + (51-54i)qr^2 + (1-22i)r^3\right\}$$

$$D=\left\{6ib+(-1-2i)\sqrt{3}\,b+24ic+(4+8i)\sqrt{3}\,c+(6+12i)bc\right\}q$$
$$-i\left\{-6b+(-2-i)\sqrt{3}\,b-24c+(8+4i)\sqrt{3}\,c+(12+6i)bc\right\}r$$
$$+72ib^2c^2\left\{(-22+i)q^3+(-54+51i)q^2r+(54+51i)qr^2+(22+i)r^3\right\}$$

Las soluciones a este polinomio las denotaremos por σ_1, σ_2 y σ_3, definamos

$$A_i := a_1+\sigma_i a_2, B_i := b_1+\sigma_i b_2, C_i := c_1+\sigma_i c_2$$
$$A_i' := a_1'+\sigma_i a_2', B_i' := b_1'+\sigma_i b_2', C_i' := c_1'+\sigma_i c_2'$$

13. Las ecuaciones de nueve de las rectas serán:

$$(u=0,u'=0),\quad (u=0,v'=0),\quad (u=0,w'=0),$$
$$(v=0,u'=0),\quad (v=0,v'=0),\quad (v=0,w'=0),$$
$$(w=0,u'=0),\quad (w=0,v'=0),\quad (w=0,w'=0).$$

y para cada i, las ecuaciones de seis rectas serán:

$$(A_iu-A_i'u'=0, B_iv-B_i'v'=0, C_iw-C_i'w'=0),$$
$$(A_iu-B_i'v'=0, B_iv-A_i'u'=0, C_iw-C_i'w'=0),$$
$$(A_iu-C_i'w'=0, B_iv-B_i'v'=0, C_iw-A_i'u'=0),$$
$$(A_iu-A_i'u'=0, B_iv-C_i'w'=0, C_iw-B_i'v'=0),$$
$$(A_iu-B_i'v'=0, B_iv-C_i'w'=0, C_iw-A_i'u'=0),$$
$$(A_iu-C_i'w'=0, B_iv-A_i'u'=0, C_iw-B_i'v'=0).$$

por lo tanto suman en total veintisiete rectas contenidas en la superficie.

Habíamos denotado por:

$$u := T+X,\ v := T+bY,\ w := T+cZ$$
$$u' := T,\ v' := T+X+qV,\ w' := T+X+rW$$

Observemos que las rectas

$$l_{XT} : (X=0, T=0), l_{YT} : (Y=0, T=0), l_{ZT} : (Z=0, T=0)$$

cooresponden a las rectas

$$(u=0,u'=0),(v=0,u'=0),(w=0,u'=0),$$

y las rectas

$$l_1 : (T+X=0, V=0), l_2 : (T+X=0, W=0)$$

son precisamente las rectas

$$(u=0, v'=0), (u=0, w'=0).$$

Otras cuatro rectas estan dadas por:

$$(T+bY=0, T+X+qV=0), (T+bY=0, T+X+rW=0)$$

$$(T+cZ=0, T+X+qV=0), (T+cZ=0, T+X+rW=0)$$

las cuales son las rectas

$$(v=0, v'=0), (v=0, w'=0), (w=0, v'=0), (w=0, w'=0),$$

es decir,

$$l_{XT} : (X=0, T=0), l_{YT} : (Y=0, T=0), l_{ZT} : (Z=0, T=0)$$

$$l_1 : (T+X=0, V=0), l_2 : (T+X=0, W=0)$$

$$(T+bY=0, T+X+qV=0), (T+bY=0, T+X+rW=0)$$

$$(T+cZ=0, T+X+qV=0), (T+cZ=0, T+X+rW=0)$$

son nueve de las rectas contenidas en las superficie, donde,

$$V=(\frac{1}{2}+i)X+\frac{\sqrt{3}+(6+2\sqrt{3})i}{3}Y-\frac{\sqrt{3}-(6-2\sqrt{3})i}{12}Z,$$

$$W=-(\frac{1}{2}-i)X-\frac{\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})i}{3}Y+\frac{\sqrt{3}-(6+2\sqrt{3})i}{12}Z.$$

El resto de las rectas estan dadas por los coeficientes

$$A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1, A_2, B_2, C_2, A'_2, B'_2, C'_2, A_3, B_3, C_3, A'_3, B'_3, C'_3$$

definidos en el inciso ***12***, estan dadas por las ecuaciones:

$$(A_i u - A'_i u' = 0, B_i v - B'_i v' = 0, C_i w - C'_i w' = 0),$$

$$(A_i u - B'_i v' = 0, B_i v - A'_i u' = 0, C_i w - C'_i w' = 0),$$

$$(A_i u - C'_i w' = 0, B_i v - B'_i v' = 0, C_i w - A'_i u' = 0),$$

$$(A_iu-A_i'u'=0, B_iv-C_i'w'=0, C_iw-B_i'v'=0),$$
$$(A_iu-B_i'v'=0, B_iv-C_i'w'=0, C_iw-A_i'u'=0),$$
$$(A_iu-C_i'w'=0, B_iv-A_i'u'=0, C_iw-B_i'v'=0).$$

para cada $i=1,2,3$, las cuales corresponden a las rectas:

$(A_iX+(A_i-A_i')T=0,$

$-B_i'((\frac{1}{2}+i)q+1)X-(B_i'\frac{\sqrt{3}+(6+2\sqrt{3})i}{3}q-B_ib)Y+B_i'\frac{\sqrt{3}-(6-2\sqrt{3})i}{12}qZ$
$+(B_i-B_i')T=0,$

$-C_i'(-(\frac{1}{2}-i)r+1)X+C_i'\frac{\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})i}{3}rY-(C_i'\frac{\sqrt{3}-(6+2\sqrt{3})i}{12}q-C_ic)Z$
$+(C_i-C_i')T=0),$

$((A_i-B_i'((\frac{1}{2}+i)q+1))X-B_i'\frac{\sqrt{3}+(6+2\sqrt{3})i}{3}qY+B_i'\frac{\sqrt{3}-(6-2\sqrt{3})i}{12}qZ$
$+(A_i-A_i')T=0,$

$-A_i'X+B_ibY+B_iT=0,$

$-C_i'(-(\frac{1}{2}-i)r+1)X+C_i'\frac{\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})i}{3}rY-(C_i'\frac{\sqrt{3}-(6-2\sqrt{3})i}{12}r-C_ic)Z$
$+(C_i-C_i')T=0),$

$((A_i-C_i'(-(\frac{1}{2}-i)r+1))X+C_i'\frac{\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})i}{3}rY-C_i'\frac{\sqrt{3}-(6+2\sqrt{3})i}{12}rZ$
$+(A_i-C_i')T=0,$

$-B_i'((\frac{1}{2}+i)q+1)X-(B_i'\frac{\sqrt{3}+(6+2\sqrt{3})i}{3}q-B_ib)Y+B_i'\frac{\sqrt{3}-(6-2\sqrt{3})i}{12}qZ$
$+(B_i-B_i')T=0,$

$-A_i'X+C_icZ+C_iT=0),$

$(A_iX+(A_i-A_i')T=0,$

$-C_i'(-(\frac{1}{2}-i)r+1)X+(C_i'\frac{\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})i}{3}r+C_ib)Y-C_i'\frac{\sqrt{3}-(6+2\sqrt{3})i}{12}rZ$
$+(B_i-C_i')T=0,$

$-B_i'((\frac{1}{2}+i)q+1)X-B_i'\frac{\sqrt{3}+(6+2\sqrt{3})i}{3}qY-(B_i'\frac{\sqrt{3}-(6-2\sqrt{3})i}{12}q-C_ic)Z$
$+(C_i-B_i')T=0),$

$$((A_i - B_i'((\tfrac{1}{2}+i)q+1))X - B_i'\frac{\sqrt{3}+(6+2\sqrt{3})i}{3}qY + B_i'\frac{\sqrt{3}-(6-2\sqrt{3})i}{12}qZ$$
$$+(A_i - A_i')T = 0,$$
$$-C_i'(-(\tfrac{1}{2}-i)r+1)X + (C_i'\frac{\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})i}{3}r + C_ib)Y - C_i'\frac{\sqrt{3}-(6+2\sqrt{3})i}{12}rZ$$
$$+(B_i - C_i')T = 0,$$
$$-A_i'X + C_icZ + C_iT = 0),$$
$$((A_i - C_i'(-(\tfrac{1}{2}-i)r+1))X + C_i'\frac{\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})i}{3}rY - C_i'\frac{\sqrt{3}-(6+2\sqrt{3})i}{12}rZ$$
$$+(A_i - C_i')T = 0,$$
$$-A_i'X + B_ibY + B_iT = 0,$$
$$-B_i'((\tfrac{1}{2}+i)q+1)X - B_i'\frac{\sqrt{3}+(6+2\sqrt{3})i}{3}qY - (B_i'\frac{\sqrt{3}-(6-2\sqrt{3})i}{12}q - C_ic)Z$$
$$+(C_i - B_i')T = 0),$$

para cada $i = 1,2,3$, las cuales suman 18 rectas, mas las nueve anteriores tenemos la veintisiete rectas contenidas en la superficie.

BIBLIOGRAFIA

BAKER, HENRY F. SOLID GEOMETRY VOL. III, "PRINCIPLES OF GEOMETRY", FREDERICK UNGAR PUBLISHING CO. NEW YORK, 1961.

HENDERSON, ARCHIBALD. "THE TWENTY SEVEN LINES UPON THE CUBIC SURFACE", HEFNER PUBLISHING CO. NEW YORK, 1911.

REID, MILES. "UNDERGRADUATE ALGEBRAIC GEOMETRY, CAMBRIDGE UNIVERSITY", 1988.

SALMON, GEORGE. "A TREATISE ON THE ANALYTIC GEOMETRY OF THREE DIMENSIONS" VOL. II, CHELSEA PUBLISHING COMPANY, NEW YORK, 1965.

SHAFAREVICH, IGOR ROSTISLAVICH. "BASIC ALGEBRAIC GEOMETRY". SPRINGER-VERLAG, 1974.