C 11184

RELACIONES VALUADAS DE PREFERENCIA EN LA TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO

Servio Tulio Guillén Burguete

TESIS DOCTORAL

Presentada a la División de Estudios de Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERÍA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Como requisito para obtener

el grado de

DOCTOR EN INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F. DICIEMBRE DE 1993

RESUMEN

La confianza en el resultado de las comparaciones de pares de alternativas con un modelo multicriterio de referencia ("bien comportado") es mínima cerca de la indiferencia y máxima para la dominancia. Se proponen dos relaciones valuadas sobre el conjunto de pares de alternativas, que se pueden interpretar como medidas de intensidad y de credibilidad de la preferencia entre dos opciones, respectivamente, donde el modelo de referencia es aditivo general; casos particulares de este modelo son el aditivo convencional y el de Morrison-Tversky, este en general no transitivo ni desacoplable por una función de valor. Los dos extremos de tales índices corresponden a la dominancia y los puntos medios a la indiferencia. Tales índices pueden obtenerse de un análisis de sensibilidad sobre el modelo de referencia y están relacionados por una transformación lineal.

ABSTRACT

The confidence in the outcomes of paired comparisons of alternatives with a ("well behaved") multi-criteria reference model is minimal near the indifference and maximal for dominance. Two binary indices on the set of ordered pairs of options are proposed, which could be interpreted as measures of intensity and credibility of preference between any two options, respectively, where the reference model is a general additive one; particular cases of such reference model are the conventional additive and the additive difference model of Morrison-Tversky, the latter in general nontransitive nor decomposable by a value function. The two extreme values of each index correspond to dominance and the middle one to indifference. Such indices can be obtained from a sensitivity analysis on the reference model and are related by a linear transformation.

1. INTRODUCCION

El objeto de esta disertación son las relaciones valuadas de preferencia en la toma de decisiones multicriterio, que califican el grado en que una alternativa es mejor que otra, y en particular, la elaboración de relaciones de este tipo tales que los dos extremos de la escala de evaluación correspondan exactamente con las dominancias de Pareto, en uno y otro sentido, respectivamente; por simetría el punto medio entre ambos extremos corresponde a la indiferencia. El interés por desarrollar estas relaciones, las cuales no han sido propuestas en la literatura, es que tales extremos son un máximo teórico de credibilidad o decidibilidad en que una alternativa multicriterio es mejor que otra, pues el resultado de la comparación es independiente del modelo de agregación de criterios. Los resultados a este respecto se encuentran en el *anexo B*, que es la última revisión de un artículo enviado al *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, editado por John Wiley & Sons, en donde se proponen dos relaciones valuadas de preferencia, denominadas índices de intensidad y de credibiliad de preferencia, respectivamente, las cuales están asociadas a un modelo aditivo general de referencia.

Los índices desarrollados se diferencian de sus antecesores, propuestos en forma independiente por Trejos (1991) y Bana e Costa y Vincke (1992), en que estos últimos usualmente no cumplen la condición paretiana mencionada, no son aplicables a modelos aditivos generales, en cuya categoría entra el de Morrison y Tversky (Tversky, 1969), y en que requieren información adicional del tomador de decisiones, consistente en intervalos de imprecisión sobre los pesos asignados a los distintos criterios, la cual no siempre puede ser proporcionada de manera confiable.

Para desarrollar el tema, en el *Cap 2* se presenta un marco conceptual de la toma de decisiones, en el que se introduce el concepto de espacio de consecuencias para analizar y comparar diversos casos de toma de decisiones, y el concepto de estructura de preferencia, en un sentido más amplio de lo usual, que incluye preferencias asociadas a modelos cuantitativos, funciones de eleccion y relaciones binarias. Por su importancia en la formulación del problema multicriterio, a las estructuras de preferencia asociadas a las funciones de elección y a las relaciones binarias se les dedican sendos capítulos, los *Caps 3* y *4*, respectivamente.

En el *Cap 5* se consideran las estructuras de preferencia multicriterio y sus propiedades que le son específicas, como las paretianas y las relacionadas con la compensatoriedad de los criterios. Se encuentra que cierta propiedad, con más requerimientos que la independencia entre criterios, que denominamos independencia total (*sec 5.3*), resulta ser condición necesaria y suficiente para que los criterios en que dos alternativas son indiferentes no juegen ningún papel y puedan ser ignorados en las comparaciones; esta neutralidad es usada implícitamente por algunos métodos multicriterio sin una justificación teórica. Se encuentra también que si dicha propiedad no se cumple la transitividad de la indiferencia no se puede asegurar debido a un fenómeno de naturaleza multicriterio, consistente en que la conjunción de ventajas "imperceptibles" en distintos criterios puede crear un efecto global de preferencia. Este fenómeno se puede explicar en términos de umbrales de percepción de la preferencia para los distintos criterios. El *Cap* 6 se dedica a aspectos prácticos de la ayuda a la decisión, en donde se describen los nuevos sistemas de ayuda a la decisón basados en los adelantos de la informática y las comunicaciones, y el *Cap 7* a las conclusiones. En el *Anexo A* se resumen los conceptos sobre las relaciones cartesianas y las propiedades que se manejan en este trabajo. Para facilitar las consultas cada capítulo contiene las repectivas referencias y en el *Anexo C* se da un listado de todas ellas.

A continuación, en *1.1* se muestra que la estructura clásica de preferencia es insuficiente para modelar preferencias en determinadas circunstancias, lo que lleva a la necesidad de estructuras de preferencia más complejas y en particular a las relaciones valuadas de preferencia, y en *1.2* se resume el estado actual del conocimiento sobre las relaciones valuadas de preferencia para el contexto multicriterio.

1.1 Insuficiencia de la estructura clásica de preferencia

Los modelos que representan las preferencias del tomador de decisiones o decisor tienen asociada una llamada estructura de preferencia. Así, la estructura clásica de preferencia es binaria y consiste en que las comparaciones por pares de alternativas solo pueden dar como resultado una preferencia estricta o una indiferencia. Esta estructura no considera grados intermedios entre la indiferencia y la preferencia que pudieran interpretarse como medidas de confianza, de intensidad de preferencia, de decidibilidad, etc., de que una alternativa es mejor que otra. La necesidad de estructuras de preferencia más amplias es clara en diversas situaciones, por ejemplo, cuando el decisor es una colectividad y la proporción de individuos que prefieren una alternativa sobre otra es más apropiada para describir las preferencias del grupo, que simplemente decir que más del 50% prefieren una a la otra. Esta necesidad se presenta también si hay imprecisión en la evaluación de las alternativas o cuando el decisor tiene dificultades para discriminar preferencialmente pares de alternativas o asignar valores que afectan parámetros del modelo preferencial.

Como posibilidades para ampliar la estructura clásica de preferencia se tienen:

(a) agregar a la estructura de preferencia clásica una relación asimétrica Q, llamada *preferencia débil*, la cual contiene a la preferencia estricta, P, o en general, agregar una sucesión de preferencias débiles anidadas, $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq Q_3 \supseteq \ldots \supseteq P$;

(b) considerar la relación de preferencia como una relación valuada sobre un conjunto totalmente ordenado Λ, típicamente alguno de los intervalos [0, 1] o [-1,1], la cual está dada por un índice binario ϕ: $\Lambda \times \Lambda \longrightarrow \Lambda$, donde los distintos valores de Λ corresponden con diversos grados de credibilidad, intensidad, etc. de la preferencia de una alternativa **x** sobre una alternativa **y**; los dos extremos de la escala corresponden con el máximo grado de la preferencia en un sentido y el opuesto, respectivamente; el grado de preferencia disminuye hacia el centro de la escala, que por simetría corresponde a la indiferencia.

El primer camino es frecuente en los métodos de relaciones binarias de sobreclasificación (Roy, 1985 y 1991), y el otro, que considera la relación de preferencia como una relación valuada, ha sido explorado en el marco de la teoría de utilidad monoatributo, suponiendo preferencias inexactas (Fishburn, 1970), y con el enfoque de la teoría de la elección probabilista, en que la preferencia consiste en una probabilidad de elección distribuida sobre un conjunto de alternativas (Fishburn, 1973; Suppes *et al.*, 1989). También se ha explorado representar la relación de preferencia como un subconjunto borroso (Roubens y Vincke, 1983), donde el valor de la función de pertenencia $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in [0,1]$ es el grado en que una alternativa **x** es mejor que otra **y** (usamos negritas para las alternativas, que en el caso multicriterio corresponden a vectores). Sobre el modelado de las preferencias con relaciones valuadas pueden consultarse también Roubens y Vincke (1984, 1985) y Doignon *et al.* (1986).

Los artículos hasta ahora mencionados no consideran las relaciones valuadas dentro de la problemática específica de una estructura de preferencia multicriterio. Como se ilustra en el *Anexo B*, para estas relaciones la multidimensionalidad es fundamental y demanda un enfoque radicalmente diferente al caso monocriterio.

1.2 *Resumen del estado actual del conocimiento*

El estado actual del conocimiento sobre las relaciones valuadas de preferencia en el contexto de la toma de decisiones multicriterio se puede resumir a través de las contribuciones de los siguientes autores.

Jacquet-Lagrèze (1982)

Jacquet-Lagrèze (1982) analiza en términos abstractos el proceso de agregación de preferencias multicriterio y después muestra que los métodos usuales caen en el mismo tipo de procedimiento de agregación básica, independientemente de que manejen datos ordinales o cardinales; para ello considera una estructura de preferencia basada en índices binarios, evaluados sobre escalas que pueden ser no numéricas, como la escala clásica ("indiferente", "preferido"), o numéricas, correspondientes a índices borrosos de credibilidad, $c(,)$, que toman valores en el intervalo [0,1]; en todos los casos la máxima credibilidad no necesariamente corresponde a la dominancia o dominancia de Pareto (se recuerda que una alternativa **x** *domina* a otra **y** si y solo si **x** es al menos tan buena como **y** para todo criterio, y es estrictamente mejor para al menos un criterio).

Fishburn (1982, 1984)

En un contexto de toma de decisiones bajo riesgo, donde el conjunto de alternativas, A, es un conjunto convexo de medidas de probabilidad, Fishburn (1982) generaliza la conocida teoría de utilidad lineal de von Neumann y Morgenstern (1967). Para modelar las preferencias, en vez de una función de utilidad usa una función binaria $i(,): A \times A \longrightarrow [-1,1]$ antisimétrica ($i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -i(\mathbf{y},\mathbf{x})$), que puede interpretarse como una medida de intensidad de preferencia. Demuestra que la propiedad de transitividad

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y}) + i(\mathbf{y},\mathbf{z}) = i(\mathbf{x},\mathbf{z}) \qquad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in A$$

implica la existencia de una función de utilidad u sobre A tal que

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})$$

situación en la cual su teoría se reduce a la teoría de utilidad tradicional. Posteriormente Fishburn (1984) aplica sus ideas al caso multicriterio y obtiene su teoría de utilidad no lineal multiatributo.

Trejos (1991); *Bana e Costa y Vincke* (1992)

Trejos (1991) y Bana e Costa y Vincke (1992) en forma independiente han propuesto índices binarios de credibilidad aplicables a modelos aditivos cuando hay imprecisión en la asignación de los pesos. La credibilidad $c(\mathbf{x},\mathbf{y})$ de que una alternativa $\mathbf{x}$ es mejor que una alternativa $\mathbf{y}$ es una cierta medida (el volumen o una determinada proyección) sobre la intersección de dos conjuntos, un *paralelepípedo de pesos admisibles*, que el decisor especifica dando un intervalo de indeterminación a cada peso $w_1,\ldots,w_n$, y el semiespacio de los vectores de peso $(p_1,\ldots,p_n)$ acordes con la proposición de que la alternativa $\mathbf{x}$ es al menos tan buena como la alternativa $\mathbf{y}$,

$$H^{+}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left\{p_i : \sum p_i(x_i - y_i) \geq 0\right\} \qquad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Si el paralelepípedo de pesos admisibles está totalmente contenido en el semiespacio $H^{+}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, entonces $c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$ y la credibilidad de que $\mathbf{x}$ es mejor que $\mathbf{y}$ alcanza su máximo, lo que no implica la dominancia de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{y}$. Estos índices cumplen la propiedad que Fishburn (1973) y Suppes *et al.* (1989) denominan de *transitividad estocástica moderada*

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq c(\mathbf{y},\mathbf{z}) \geq 0.5 \implies c(\mathbf{x},\mathbf{z}) \geq c(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

Para determinar estos índices, a diferencia de los que se proponen en el *Anexo B*, el decisor tiene que especificar el intervalo de variación del peso de cada criterio. Para esto es generalmente recomendable fijar un criterio de referencia, por ejemplo uno que se exprese en términos monetarios, y asignarle un valor fijo con intervalo de variación cero.

Referencias

Bana e Costa, C.; Vincke, Ph. (1992), "Comment prendre en compte l'imprécision des taux de substitution dans un modèle additif d'agrégation des préférences," Cahier du LAMSADE, en prensa

Bouyssou, D. (1986), "Some remarks on the notion on compensation in MCDM", "*European Journal of Operational Research*, 26, 1, 150-160

Doignon, J.; Monjardet, B.; Roubens, M.; Vincke, Ph. (1986), "Biorder families, valued relations and preference modelling", *Journal of Mathematical Psychology*, 30, 435-480

Fishburn, P. (1970), "Utility theory with inexact preferences and degrees of preference," *Synthese*, 21, 204-222

Fishburn, P. (1973), "Binary choice probabilities: on the varieties of stochastic transitivity," *Journal of Mathematical Psychology*, 10, 327-352

Fishburn, P. (1982), "Nontransitive measurable utility," *Journal of Mathematical Psychology*, 26, 31-67

Fishburn, P. (1984), "Multiattribute nonlinear utility theory," *Management Science*, 30, 11, 1301-1310

Jacquet-Lagrèze, E. (1982), "Binary preference indices: a new look on multicriteria aggregation procedures," *European Journal of Operational Research*, 10, 1, 26-32

Roy, B. (1985), "Méthodologie multicritère d'aide à la décision", *Economica*, Paris

Roy, B. (1991), "The outranking approach and the foundations of Electre methods", *Theory and Decisions*, 31, 1, 49-73

Roubens, M.; Vincke, Ph. (1983), "Linear fuzzy graphs", *Fuzzy Sets and Systems*, 10, 79-86

Roubens, M.; Vincke, Ph. (1984), "On families of semiorders and interval orders imbedded in a valued structure of preference: a survey," *Information Sciences*, 34, 187-198

Roubens, M.; Vincke, Ph. (1985), "Preference modeling," *Springer Verlag*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol 250

Suppes, P.; Krantz, D.; Luce, R.; Tversky, A. (1989), "Foundations of measurement", Vol 2, *Academic*, Nueva York

Trejos, M. (1991), "Método de relaciones binarias de sobreclasificación que usa una familia de funciones de utilidad," Tesis doctoral, *Facultad de Ingeniería*, Universidad Nacional Autónoma de México

Trejos, M.; Guillén, S. (1992), "Método multicriterio de ponderación por intervalos", *Instituto de Ingeniería*, No. 549

Tversky, A. (1969), "Intransitivity of preferences", *Psychological Review*, 76, 31-48

von Neumann, J.; Morgenstern, O. (1967), "Theory of games and economic behaviour", *Princeton University Press*, 3ª edición

27.08.93

2. ASPECTOS CONCEPTUALES DE LA TOMA DE DECISIONES

Toda actividad consciente individual o colectiva implica tomar decisiones. A pesar de las particularidades se puede distinguir una estructura común cuyos elementos esenciales son la previsión o estimación de las posibles consecuencias de las acciones y las preferencias sobre estas previsiones por parte de quien decide. A partir de esta estructura resultan problemas de toma de decisiones con denominaciones diversas dependiendo del número de criterios que intervienen en la decisión, de la forma en que se estiman las consecuencias de las acciones, de si la decisión es individual o en grupo, etc.

2.1 El concepto de decisión

Decidir es un proceso en que alguien, denominado *decisor*, que puede ser un individuo o un grupo de individuos, para cumplir determinados *objetivos* identifica y posiblemente diseña un conjunto de dos o más *cursos de acción alternativos*, *estima* las *consecuencias* que espera de cada uno de ellos, y los *estimados* resultantes los compara *preferencialmente* para seleccionar el curso de acción que se llevará a cabo. El estimado de las consecuencias de un curso de acción consiste entonces en la información relevante para la elección y describe lo que se esperaría sobre el logro de los distintos objetivos si el curso de acción considerado se llevara a cabo, e incluye riesgos, costos y uso de recursos que podrían afectar la elección.

Dos cursos de acción con el mismo estimado de consecuencias por definición no son distinguibles preferencialmente, por lo que no da lugar a confusión usar el mismo término, *opción* o *alternativa*, para referirse indistintamente a un curso de acción alternativo o al estimado de su consecuencia. Por brevedad los cursos de acción alternativos también se denominan *acciones alternativas* o simplemente *acciones*.

2.2 Estructuras de preferencia

Una *estructura de preferencia* es cualquier estructura matemática que representa un *sistema de preferencias* sobre los elementos de un conjunto dado. Entre las estructuras de preferencia deterministas (en el *Cap 3* se muestran estructuras de preferencia probabilistas) están, de lo general a lo particular, las funciones de elección, las relaciones binarias, los modelos algebraicos de preferencia y los ordenamientos.

2.2.1. Funciones de elección. Una *función de elección* sobre un conjunto A es una función $C: 2^A \longrightarrow 2^A$ que determina los elementos *elegidos* o *aceptados* $C(X) \subseteq X$, o equivalentemente, los elementos *rechazados* $X - C(X)$, de cada subconjunto $X \subseteq A$. $C(X)$ puede ser el conjunto vacío, ϕ, o *alternativa del estado actual* o *del statu quo*, en cuyo caso se dice también que *no hay elección*. Por basarse únicamente en el concepto de función de conjunto, la función de elección es la estructura de preferencia determinista más general y tiene como casos particulares las relaciones binarias y los ordenamientos, los cuales se consideran más adelante, y permite definir en forma compacta los siguientes conceptos importantes.

Un *problema de toma de decisiones* es un par $\langle A, C\rangle$, donde A es un conjunto de alternativas y C una función de elección sobre A; $C(A) \subseteq A$ es la *solución* de este problema. Un *principio de optimalidad* del problema de toma de decisiones $\langle A, C\rangle$, es un conjunto de condiciones necesarias y/o suficientes para que una alternativa sea elegida dentro de ciertos subconjuntos $X \subseteq A$ por la función de elección C. Un problema de toma de decisiones $\langle A, C\rangle$ en que se conocen el conjunto de alternativas y la función de elección es un *problema de optimación* (*generalizado*) y si se conoce el conjunto de alternativas pero no totalmente la función de elección se denomina *problema de elección*. Para resolver un problema de elección no necesariamente hay que reconstruir totalmente la función de elección, a veces se puede resolver explotando sus propiedades; como las que se consideran en *3.3*.

La forma más usual de representar las preferencias es mediante relaciones binarias, como se indica a continuación, pero hay que hacer notar que esto a veces no es posible y se tiene que recurrir a una función de elección porque la elección no se basa en comparaciones por pares; esto puede ocurrir en las decisiones de grupo mediante votaciones, cuando se aplica el criterio de elección minimax arrepentimiento o de Savage de teoría de juegos o al usar el método axiomático de Arrow - Reynaud (1986), aplicable a las decisiones multicriterio y a las decisiones en grupo.

2.2.2 Relaciones binarias. Son estructuras de preferencia sobre un conjunto A las siguientes:

a) un par <A,S>, donde S es una relación binaria reflexiva sobre A; **x**S**y** significa que la alternativa **x** es al menos tan preferida como la alternativa **y**; la relación S se denomina *preferencia débil*.

b) un cuarteto <A, I, P, R>, siendo I, P y R relaciones binarias sobre A, denominadas *indiferencia*, *preferencia fuerte* y relación de *incomparabilidad*, respectivamente, tales que para todo par de alternativas **x**, **y** ∈ A se satisface exactamente una:

xI**y**, "hay indiferencia entre **x** y **y**"
xP**y**, "**x** es preferido a **y**"
yP**x**, "**y** es preferido a **x**"
xR**y**, "hay incomparabilidad entre las alternativas **x** y **y**"

donde por su significado I es reflexiva y simétrica, P asimétrica y R simétrica e irreflexiva.

Las estructuras de preferencia a) y b) son equivalentes entre sí, donde S = P ∪ I (ver *Cap 4*), y son un caso particular de la función de elección (*Cap 3*). A su vez los ordenamientos (*Cap 4*) son relaciones binarias con determinadas propiedades y constituyen las estructuras de preferencia más elementales.

2.2.4 Modelos (algebraicos) de preferencia. Por su interés en este trabajo mencionamos únicamente los siguientes dos modelos algebraicos, los cuales modelan una relación de preferencia estricta sobre A, denotada como siempre por P:

a) modelo de *intensidad*:

$$\mathbf{x}\ P\ \mathbf{y} \Rightarrow (\Leftrightarrow) \qquad i(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0 \qquad \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in A$$

donde $i(,)$ es una función real sobre $A \times A$, llamada *función de intensidad*; esta función es única salvo transformaciones que preservan su signo (por lo que sin perder generalidad para garantizar la asimetría de P se puede suponer que esta función es *antisimétrica*: $i(\mathbf{y},\mathbf{x}) = -\ i(\mathbf{x},\mathbf{y})$);

b) *modelo de utilidad* (o de *valor*):

$$\mathbf{x}\ P\ \mathbf{y} \Rightarrow (\Leftrightarrow) \qquad u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) > 0 \qquad \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in A$$

donde $u()$ es una función real sobre A, llamada función de *utilidad* o de *valor*; esta función es única salvo transformaciones monótonas, por lo cual se dice también que u determina una *escala ordinal* de preferencias sobre las alternativas.

En cualquiera de los dos casos el modelo es *incompleto* si opera únicamente la implicación, $\Rightarrow$, y *completo* si opera la equivalencia, $\Leftrightarrow$ (no se considera un modelo de la forma $u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) > 0 \Rightarrow \mathbf{x}\ P\ \mathbf{y}$ porque $i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ no daría ninguna información sobre el resultado de comparar $\mathbf{x}$ con $\mathbf{y}$). Un modelo algebraico es *desacoplado* si las alternativas se comparan evaluando cada una de ellas por separado, por lo que es propiamente un modelo de *medición* (Krantz *et al.*, 1971); en caso contrario se dice que el modelo es *acoplado*. Todo modelo de utilidad es entonces desacoplado pero uno de intensidad no necesariamente lo es.

Un modelo de intensidad se reduce a uno de utilidad sii existe una función u sobre A tal que

$$sgn(i(\mathbf{x},\mathbf{y})) = sgn(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \qquad \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in A$$

donde $sgn()$ es la función signo ($sgn(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$), y en particular existe una función u sobre A tal que

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) \qquad \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in A$$

sii el modelo de intensidad cumple la propiedad de transitividad

$$i(x,y) + i(y,z) = i(x,z) \qquad \forall\, x,y,z \in A$$

(lo que se demuestra observando que dicha propiedad implica que para cualquier elemento de referencia $r \in A$ se cumple que para todo par de alternativas x,y, $i(x,y) = i(x,r) + i(r,y) = i(x,r) - i(y,r) = u(x) - u(y)$, donde $u(x) = i(x,r)\ \forall\, x \in A$.)

Obsérvese que usar un cierto modelo algebraico implica que la relación de preferencia cumple determinadas condiciones; así, el modelo de utilidad requiere que la preferencia sea transitiva y no así el modelo de intensidad. Esto lleva al concepto de *axiomatización* de un modelo algebraico de preferencia, que consiste en un conjunto de propiedades o axiomas necesario y suficiente para que un sistema de preferencias se pueda representar fielmente por dicho modelo. La axiomatización solamente se ha alcanzado en modelos de utilidad; en Fishburn (1989) puede encontrarse una interesante perspectiva de los resultados logrados al respecto en los últimos cincuenta años, donde se comenta una clase de axiomatización distinta a la mencionada, de interés en la teoría de decisiones en grupo e iniciada por Arrow, en la que se identifican grupos contradictorios de axiomas de elección, cada uno de los cuales es atractivo en lo individual.

2.3 Problemas multicriterio

En la literatura los términos *atributo*, *criterio* y *objetivo* no tienen un significado universalmente aceptado, se usan a veces como sinónimos, habiendo cierta confusión al respecto. Las definiciones que siguen modifican ligeramente las de French (1988, pp 105) para que el significado que se infiere de *problemas multicriterio* y *problemas multiobjetivo* coincida con el usual en la literatura y para contar con un término más general que los otros dos (*atributo*).

Convendremos que un *atributo* es un aspecto o propiedad de las alternativas que es relevante para la elección. Un *criterio* es un atributo que tiene asociada una estructura de preferencia *independiente (de los otros atributos)*, en el sentido que al mantener los otros atributos constantes la estructura de preferencia sobre las alternativas es exactamente la misma independientemente de los niveles o valores de los atributos que se mantuvieron constantes. Un problema de toma de decisiones es *multicriterio* si todos los atributos son criterios. En un problema multicriterio una alternativa *domina* a otra si es al menos tan buena como la segunda para todos los criterios y es estrictamente mejor para al menos uno de ellos. Un *objetivo* es un criterio cuya estructura de preferencia está determinada por una dirección de menos a más preferido sobre una determinada escala (objetiva o subjetiva).

Si un problema de toma de decisiones tiene un solo atributo, entonces (por definición de decisión) sobre este debe haber una estructura de preferencia, por lo que es un criterio, y el problema se denomina *monocriterio*. Los problemas de toma de decisiones *multiatributo*, *multicriterio* y *multiobjetivo* tienen dos o más atributos, criterios u objetivos, respectivamente, siendo todos de la misma especie. En estos términos puede decirse que por su complejidad no existe propiamente una teoría de toma de decisiones multiatributo.

Ejemplos: La temperatura y la humedad específica del aire determinan completamente la comodidad en el interior de un local, donde se supone que la velocidad del aire es nula; las preferencias sobre las temperaturas o sobre las humedades específicas desde el punto de vista de la comodidad no están definidas porque dependen del valor de la otra variable; por tanto ambas variables son atributos, no son criterios, y el problema es estrictamente multiatributo. La temperatura del cuerpo humano como indicador de salud no tiene una dirección de menos a más preferible, pero hay una estructura de preferencia porque ella es mejor cuanto más próxima se encuentra a un cierto valor (alrededor de 36.5 ^{o}C); en este caso la temperatura del cuerpo hunano es un criterio pero no un objetivo. Contar con más recursos económicos es generalmente un objetivo.

Un *perfil* (*de preferencias*) es un conjunto de estructuras de preferencia sobre un conjunto fijo de alternativas. En las decisiones en grupo cada estructura de preferencia de un perfil corresponde a un miembro del grupo y usualmente es un ordenamiento; en los problemas multicriterio cada estructura de preferencia del perfil corresponde a un criterio.

2.4 La estimación de consecuencias

El *espacio de consecuencias* de un problema de toma de decisiones es un conjunto tal que necesariamente uno y solo uno de sus elementos ocurre, cada uno de los cuales describe las consecuencias en el logro de los objetivos como resultado de llevar a cabo algún curso de acción, aunque las consecuencias correspondientes a un determinado curso de acción no necesariamente se conozcan con certeza. El espacio de consecuencias puede ser una relación cartesiana de dos o más factores, en particular un producto cartesiano o un espacio geométrico de varias dimensiones, donde cada factor es un atributo con una escala (objetiva o subjetiva) de dos o más niveles.

La estimación de consecuencias de un curso de acción es *determinista*, *probabilista* o *indeterminista*, según que el estimado de consecuencias correspondiente sea un elemento del espacio de consecuencias, una distribución de probabilidades sobre dicho espacio o un subconjunto del mismo, respectivamente. Estas formas de estimación se mencionan por orden decreciente en el conocimiento sobre el elemento del espacio de consecuencias que ocurriría si se llevara a cabo el curso de acción considerado. Los problemas de toma de decisiones se denominan *bajo certeza*, *bajo riesgo* o *bajo incertidumbre* según que todos los estimados de consecuencias sean deterministas, probabilistas o indeterministas, respectivamente. Puede mencionarse también la toma de decisiones *difusa*, en la cual cada estimado de consecuencias es un subconjunto difuso del espacio de consecuencias (Dubois y Prade, 1980).

Se observa que la estimación determinista es un caso límite de las otras y que solamente en la toma de decisiones bajo certeza los estimados de consecuencias para atributos distintos son siempre independientes. Por esta complejidad las teorías existentes de toma de decisiones multicriterio caen en la categoría de bajo certeza, excepto la llamada teoría de utilidad multiatributo (que en nuestra terminología se denominaría multicriterio en vez de multiatributo porque para cada dimensión hay una estructura de preferencia) , la cual es bajo riesgo pero elude las complicaciones de ciertas interdependencias entre las estructuras de preferencia de los criterios, suponiendo la llamada independencia en utilidad, y en sus aplicaciones se hace generalmente la hipótesis simplificatoria de que las consecuencias sobre los distintos criterios tienen distribuciones de probabilidad independientes (ver Keeney y Raiffa, 1976 y Keeney y Nair, 1976).

El esquema de toma de decisiones bajo certeza no excluye que se puedan considerar como atributos medidas de incertidumbre como variancias (de distribuciones de probabilidad) o probabilidades, por lo que dicho esquema es menos restrictivo de lo que podría parecer.

Estados del mundo y juegos

Una situación importante se presenta cuando las consecuencias de cada curso de acción están determinadas por el *estado del mundo* que ocurre, el cual no se conoce con certeza antes de tomar la decisión, ni es afectado por esta, y que pertenece a un conjunto conocido excluyente y exhaustivo, S, llamado de *estados de mundo*. Por tanto en esta situación se conoce una función o: $S \times A \longrightarrow C$, donde A es el conjunto de cursos de acción alternativos y C el espacio de consecuencias, tal que $o(\mathbf{s},\mathbf{x}) \in C$ especifica las consecuencias de llevar a cabo el curso de acción $\mathbf{x}$ dado que ocurre el estado del mundo $\mathbf{s}$. Se presentan dos casos según se disponga o no de una distribución de probabilidades sobre S para estimar el estado del mundo. En el primer caso resulta una toma de decisiones bajo riesgo en la que el estimado de las consecuencias de cada curso de acción $\mathbf{x}$ es la distribución de probabilidades que resulta de la función $o(\mathbf{x},.)$ cuando el segundo argumento tiene la distribución conocida sobre S; en este caso se puede suponer además una incertidumbre sobre la propia función o, llamada por Savage (1954) *incertidumbre residual*. En el segundo caso resulta una toma de decisiones bajo incertidumbre con estados del mundo, o *juego* (*con dos participantes*), en la que el estimado de las consecuencias del curso de acción $\mathbf{x}$ es simplemente el subconjunto de consecuencias $\{o(\mathbf{s},\mathbf{x}): \mathbf{s} \in S\}$.

En este último caso se puede usar una notación simétrica en la que cada curso de acción y cada estado del mundo se identifican con sus respectivos estimados de consecuencias, es decir, $\mathbf{x} \in A$ se identifica con $\{o(\mathbf{s},\mathbf{x}): \mathbf{s} \in S\} \subseteq C$ y $\mathbf{s} \in S$ se identifica con $\{o(\mathbf{s},\mathbf{x}): \mathbf{x} \in A\} \subseteq C$, respectivamente. El problema se puede pensar entonces como de dos jugadores que independientemente eligen, uno sobre A y el otro sobre S, después de lo cual las consecuencias para el primero, llamado el jugador de referencia, están dadas por $o(x,s) \in C$. Cuando todos los conjuntos son finitos y cada consecuencia en C es un número real, que se interpreta como una posible ganancia del jugador de referencia, entonces el juego se puede representar con una matriz, denominada *matriz de juegos*, en la que convencionalmente A es el conjunto de renglones y S el conjunto de columnas: el jugador de referencia elige un renglón y el otro una columna y como consecuencia el primero recibe una ganancia igual al correspondiente elemento de la matriz.

2.5 Modelos de preferencia bajo riesgo

En la toma de decisiones bajo riesgo las alternativas son distribuciones de probabilidad sobre un espacio de consecuencias. En estos casos para modelar las preferencias se cuenta con el *modelo de utilidad esperada*, el cual está totalmente determinado por una función real (medible) sobre el espacio de consecuencias, C, llamada *función de utilidad*, tal que se cumple el modelo de preferencia

$$\text{R preferido a S} \Rightarrow (\Leftrightarrow) \qquad E(u,R) - E(u,S) > 0 \qquad\qquad \forall\, R,S \in A$$

donde A es el conjunto de alternativas (distribuciones de probabilidad sobre C) y $E(u,R)$ es el *valor esperado* de la función u respecto de la distribución R, dado por

$$E(u,R) = \sum_{x \in C} u(x)\, R(x) \qquad\qquad C \text{ discreto}$$

$$E(u,R) = \int_{x \in C} u(x)\, dR(x) \qquad\qquad C \text{ continuo}$$

Si la función de utilidad existe entonces es única salvo trasformaciones lineales positivas ($u' = \alpha u + \beta$, $\alpha > 0$) y la mejor alternativa es la que hace máxima la utilidad esperada, es decir, que resuelve max $\{E(u,R) \mid R \in A\}$. Si se considera que la función de utilidad modela las preferencias sobre el conjunto de todas las loterías sobre C que dan probabilidad uno a un elemento de C (una *lotería* sobre C es una distribución de probabilidad sobre C que asocia pobabilidades no nulas solamente a un número finito de elementos de C), entonces la función de utilidad es una *función de valor* en el sentido que modela las preferencias sobre el espacio de consecuencias:

$$\mathbf{x} \text{ preferido a } \mathbf{y} \Rightarrow (\Leftrightarrow) \quad u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) > 0 \qquad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in C$$

Una función de valor se transforma en una de utilidad (si existe) mediante una trasformación monótona. Solamente en el contexto de la toma de decisiones bajo riesgo es necesario distinguir las funciones de utilidad de las de valor.

Cualquier función de utilidad u sobre C se puede extender al conjunto de alternativas A definiendo $u(\mathbf{R}) = E(u,\mathbf{R})$ para toda $\mathbf{R}$ en C, de modo que el modelo de preferencia toma la forma

$$\mathbf{R} \text{ preferido a } \mathbf{S} \Rightarrow (\Leftrightarrow) \quad u(\mathbf{R}) - u(\mathbf{S}) > 0 \qquad \forall\, \mathbf{R},\mathbf{S} \in A$$

(Nótese que una función que satisfaga este modelo no necesariamente es de utilidad, por lo que este último modelo es más general que el de utilidad esperada.)

La llamada teoría de utilidad se ocupa principalmente del conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que exista una función de utilidad y, con base en ellas, de los procedimientos prácticos para estimar dichas funciones.

La linealidad del operador de valor esperado, la convexidad de los conjuntos de funciones de distribución (sobre las consecuencias) y el carácter desacoplado del modelo de utilidad dan una estructura de preferencia bastante rígida en el sentido que da poco margen a desviaciones en las preferencias del decisor. Ello tiene la ventaja de que con relativamente pocas preguntas al decisor, si este las puede reponder, se obtiene una aproximación de la función de utilidad que permite identificar "la mejor" alternativa. De estudios psicológicos de la elección (Tversky, 1969) es aceptado que el modelo de utilidad esperada rara vez describe la elección de los individuos porque estos no cumplen las condiciones de "racionalidad" implicadas por el modelo; su uso entonces debe ser más bien normativo, lo que implica revisar las preferencias del decisor cada vez que estas violan el sistema de axiomas correspondiente.

El modelo de utilidad esperada fue propuesto originalmente por Bernoulli (Daniel, 1738) para explicar que la gente es adversa al riesgo al elegir entre alternativas con riesgos monetarios porque ella se fija no en su ingreso esperado sino en el valor esperado de una función del ingreso, denominada función de utilidad, la cual aumenta con tasas decrecientes y no linealmente con la cantidad de dinero. Inicialmente esta propiedad se interpretaba como una ley económica, de que la utilidad marginal del valor del dinero es decreciente, y la función de utilidad se asociaba a **diferencias en preferencia**, independientemente de la probabilidad o el riesgo. Esta interpretación fracasó en dar un sentido operacional a dicha función y poder expresarla numéricamente. La caracterización moderna de las funciones de utilidad y la axiomatización del modelo de utilidad esperada requieren la intervención explícita de las probabilidades, todo lo cual se inicia entre otros con Frisch (1926) y después se refina siguiendo diversas variantes con Ramsey (1931), von Neumann y Morgenstern (1944), Savage (1954), etc.. Por no resultar lo suficientemene realista, el modelo de utilidad esperada se generaliza posteriormente intentando esencialmente relajar el axioma de linealidad (el cual aparece en el siguiente teorema), pudiéndose mencionar el modelo de utilidad no lineal de Fishburn (1982), el cual luego aplica al caso multicriterio (Fishburn, 1984).

El siguiente teorema (Fishburn, 1970, pp 107) ilustra la axiomatización de un modelo de utilidad esperada y el tipo de propiedades que debe cumplir una relación de preferencia, P, para que pueda ser modelada con un modelo lineal de utilidad esperada, entre ellas el axioma de linealidad.

Teorema. Sea L el conjunto de todas las loterías sobre C, y P una relación de binaria sobre L. Existe una función real sobre C, u, que satisface

$$\mathrm{R\ P\ S} \Leftrightarrow \qquad \mathrm{E}(u,\mathrm{R}) - \mathrm{E}(u,\mathrm{S}) > 0 \qquad \forall\ \mathrm{R,S} \in \mathrm{A}$$

sii, para todo $\mathrm{R,S,T} \in L$,

(a) (axioma de orden débil) P es asimétrica y negativa transitiva

(b) (axioma de linealidad)

$$(\mathrm{RPS},\ 0 < \alpha < 1) \Rightarrow [\alpha\mathrm{R} + (1-\alpha)\mathrm{T}]\ \mathrm{P}\ [\alpha\mathrm{S} + (1-\alpha)\mathrm{T}]$$

(c) (axioma arquimediano)

$$(RPS,\ SPT) \Rightarrow [\alpha R + (1-\alpha)T]PS \text{ y } SP[\beta R + (1-\beta)T]$$

para algún $\alpha,\beta \in (0,1)$.

En este teorema P se interpreta como una relación de preferencia sobre C, es decir, RPS significa que la lotería R es preferida a la lotería S, y $\alpha R + (1-\alpha)T$ con $\alpha \in (0,1)$ es la lotería que a cada $X \subseteq C$ le asigna el número (la probabilidad) $\alpha R(X) + (1-\alpha)T(X)$.

Un conjunto de axiomas como el anterior, que garantiza la existencia de una función de utilidad, contiene implícitamente los principios metodológicos para medirla. Por otro lado, como las preferencias del decisor no cumplen generalmente de manera natural tales conjuntos de axiomas, en la práctica estos tienen carácter normativo.

2.6 Modelos de preferencia bajo incertidumbre

En la toma de decisiones bajo incertidumbre las alternativas son subconjuntos del espacio de consecuencias (no se dispone de distribuciones de probabilidad para estimar las consecuencias). Supóngase que el espacio de consecuencias es finito y formado por números reales que representan *ganancias* del decisor, de modo que si después de la elección ocurre la consecuencia $\alpha \in C \subseteq \mathbb{R}$, entonces el tomador de decisiones recibe un pago o ganancia α. La decisión tiene entonces un objetivo, hacer máximo el valor de dicho pago. Se tienen los siguientes criterios de optimalidad:

Maximin (pesimista). La mejor alternativa es la que hace máxima la mínima ganancia, es decir, la que resuelve

$$\max_{x \in A} \min \{x\}$$

Maximax (optimista). La mejor alternativa es la que hace máxima la máxima ganancia, es decir, la que resuelve

$$\max_{x \in A} \max \{x\}$$

Hurwicz. La mejor alternativa es la que hace máximo el valor de la combinación convexa de ganancias $[\alpha \min \{x\} + (1-\alpha) \max \{x\}]$, donde $\alpha \in$

(0,1), es decir, la que resuelve

$$\max_{x\in A} [\alpha \min \{x\} + (1-\alpha) \max \{x\}]$$

Laplace. La mejor alternativa es la que hace máxima la ganancia promedio, es decir, que resuelve

$$\max_{x\in A} \frac{1}{|x|} \sum x_k$$

donde $x_k \in x$ denota los elementos de la alternativa x.

Las estructuras de preferencia anteriores se pueden representar por el modelo de utilidad

$$x \text{ preferido a } y \Leftrightarrow \quad u(x) - u(y) > 0 \qquad \forall\ x,y \in A$$

donde

Criterio de optimalidad	**Función de utilidad** $u()$
Maximin (pesimista)	$\min \{x\}$
Maximáx (optimista)	$\max \{x\}$
Hurwicz	$\alpha \min \{x\} + (1-\alpha) \max \{x\}$
Laplace	$\frac{1}{\lvert x\rvert} \sum x_k$

lo cual asegura que estas estructuras cumplen una serie de propiedades, como que la preferencia es transitiva y que la elección cumple el *axioma de la alternativa irrelevante* o *rechazada* (el resultado de la elección no es alterado por la presencia de alternativas que no serán elegidas).

Las estructuras anteriores se presentan usualmente en el contexto más específico de un juego, en que cada alternativa es un renglón de una matriz (por tanto ahora todas las alternativas tienen el mismo número de posibles consecuencias) y cada estado del mundo corresponde con una columna de la misma matriz; como consecuencia el decisor gana lo que indica el elemento de la intersección del renglón y la columna elegidos. Se puede suponer que el estado del mundo lo determina otro jugador cuya actitud hacia el decisor puede suponerse neutral, cooperativa o antagonista, en función de lo cual dichas estructuras no son todas igualmente apropiadas para todos estos casos. Las estructuras consideradas no dependen de la correspondencia entre estados del mundo y consecuencias; son invariables bajo permutaciones de los elementos de cada renglón de la matriz de pagos, lo cual permite eliminaciones más estrictas del tipo de Pareto al comparar los renglones después de ordenar sus elementos. Esta propiedad y el axioma de la alternativa irrelevante no son cumplidos en general por la siguiente estructura de preferencia.

Arrepentimiento minimax o criterio de Savage. La mejor alternativa es la que hace mínimo el máximo arrepentimiento: es la alternativa $i \in A$ (renglón) que resuelve

$$\min_i \max_j r_{ij}$$

donde

$$r_{ij} = \max_m c_{mj} - c_{ij}$$

es el *arrepentimiento (máximo)* del decisor si elige la alterativa i siendo que resulta el estado del mundo j, pues se supone que el decisor compara la ganancia c_{ij} que recibe con la que podría haber tenido de haber sabido el verdadero estado del mundo, $\max_m c_{mj}$. La matriz correspondiente a r_{ij} se llama *matriz de arrepentimiento.*

Teorema 2.1. Si la ganancia máxima para todos los estados del mundo es la misma, es decir, existe una constante c tal que para todo estado del mundo j, $\max_i c_{ij} = c$, entonces la solución del arrepentimiento minimax coincide con la solución maximin.

Demostración. $\min_i \max_j(\max_m c_{mj} - c_{ij}) = \min_i \max_j(c - c_{ij}) =$

$$= \min_i(c - \min_j c_{ij}) = c - \max_i \min_j c_{ij} \blacksquare.$$

Ejemplo numérico

La matriz de juego que se muestra determina la matriz de arrepentimiento que aparece al lado.

Opciones	Estados del mundo s_1	s_2	s_3
w	- 950	0	1000
x	35	50	10
y	20	30	40
z	25	25	25

MATRIZ DE JUEGO (GANANCIAS)

Opciones	Estados del mundo s_1	s_2	s_3
w	985	50	0
x	0	0	990
y	15	20	960
z	10	25	975

MATRIZ DE ARREPENTIMIENTO

El orden de las alternativas para cada criterio de optimalidad se indica a continuación; como el criterio del arrepentimiento minimax no cumple el axioma de la alternativa irrelevante de Arrow, habría que especificar si el ordenamiento mostrado se obtiene eliminando o sin eliminar las alternativas según van entrando en la selección; en este ejemplo numérico no es necesario porque ambos ordenamientos coinciden.

Criterio de optimalidad		**Ordenamiento de las alternativas**
Maximin (pesimista)	$\min\{x\}$	zPyPxPw (25 > 20 > 10 > - 950)
Maximax (optimista)	$\max\{x\}$	wPxPyPz (1000 > 50 > 40 > 25
Hurwitz	$\alpha\min\{x\} + (1-\alpha)\max\{x\}$	xIyPwIz (30 > 25; t = 0.5)
Laplace	$\frac{1}{\lvert x \rvert} \sum x_k$	xPyPzPw (95 > 90 > 75 > 50)
Arrepentimiento minimax	$\min_i \max_j (\max_m c_{mj} - c_{ij})$	yPzPwPx (960 < 975 < 985 < 990)

2.7 Aplicación al análisis de conflictos y la negociación

La estructura de una matriz de juego y los criterios de optimalidad de la sección anterior pueden trasladarse a un problema de toma de decisiones en que el conjunto S de estados del mundo se interpreta ahora como un conjunto de *agentes* y cada elemento c_{ij} de la matriz, ahora restringido a tomar sus valores en el intrervalo [0,1], se interpreta como el *grado de satisfacción* asociado al agente j cuando se elige la alternativa i. En este nuevo contexto tiene sentido el siguiente criterio de optimalidad:

Criterio de Nash. La mejor alternativa es la que hace máximo el producto de los grados de satisfacción, es decir, la alternativa (renglón) $i \in A$ que resuelve

$$\max_{i} \left(\prod_{j} c_{ij} \right)$$

Nótese que este criterio hace máxima la satisfacción de cualquier agente cuando la satisfacción de los demás agentes se mantiene constante. Este criterio de optimalidad equivale a que la solución cumple las siguientes propiedades (Nash, 1950):

a) es un óptimo de Pareto (pasar a otra alternativa implica empeorar o al menos no mejorar el grado de satisfacción de uno o más agentes);
b) no se altera si el grado de satisfacción de un agente para todas las alternativas se multiplica por una constante positiva;
c) no depende del ordenamiento de los agentes y las alternativas en la matriz;
d) es independiente de las alternativas irrelevantes.

La propiedad b) evita comparaciones interpersonales y mediante multiplicaciones apropiadas permite normalizar a 1 el grado máximo de satisfacción de cada agente. Después de esta normalización por el *teorema 2.1* el criterio de Nash se reduce al de optimalidad maximin.

Gastel y Pealink (1992) generalizan los criterios de optimalidad anteriores al caso en que el conjunto de alternativas forma un continuo, representado por un intervalo cerrado, y consecuentemente las funciones de satisfacción son funciones continuas sobre dicho intervalo. En este caso el criterio de Nash se reduce también al de optimalidad maximin.

2.8 Decisiones en grupo y decisiones multicritrerio

Las decisiones en grupo y las decisiones multicriterio tienen como problema central *agregar* las estructuras de preferencia de un perfil para obtener una estructura de preferencia "representativa" del mismo, y en particular identificar "la mejor alternativa". Diversos aspectos pueden trasladarse de un caso al otro, incluso existe un método, de

Arrow y Reynaud (1986), diseñado para aplicarse en ambas situaciones, el cual usa como información sobre el conjunto de alternativas únicamente el perfil correspondiente, por lo que, como es de esperar, a diferencia de otros métodos de toma de decisiones multicriterio, el procedimiento de agregación no requiere de escalas de medida sobre los atributos y consecuentemente no hace uso de un espacio de consecuencias.

Según Bunge (1980) solamente existen decisiones individuales, pues en las llamadas decisiones en grupo lo que ocurre es que cada uno de sus miembros toma la misma decisión y por tanto todos actúan consistentemente con ella. Sin ser tan restrictivos en el significado del término **decisión**, se reconoce que en las decisiones en grupo los estimados de las consecuencias y las preferencias sobre estos no son en general compartidos por todos los miembros, al menos en cierto momento (si lo fueran en vez de una decisión en grupo serían varias decisiones individuales idénticas). Cuando no se comparten estimados de consecuencias o preferencias sobre éstas, la decisión en grupo sólo se puede basar en el perfil de preferencias, en cuyo caso las condiciones de "racionalidad", como la transitividad de la preferencia (ver por ejemplo Fishburn, 1970b, 1980), son menos restrictivas que en las decisiones individuales.

Los problemas multicriterio de interés no tienen una solución trivial, es decir, no existe una alternativa que domina a todas las demás, por lo que el decisor se encuentra en el dilema de tener que sacrificar unos criterios para poder mejorar otros. Esta situación es similar a una decisión social o de grupo en cuanto a que los individuos tienen preferencias diferentes y para cualquier decisión que se tome la alternativa seleccionada no será la mejor para al menos uno de los miembros del grupo; en ambas situaciones se tiene que resolver un conflicto, entre objetivos de un individuo en un caso y entre preferencias de individuos en el otro. Otra similitud entre ambas clases de problemas es que la existencia de criterios cuya función es filtrar las alternativas que no cumplen determinadas condiciones mínimas correponde en las decisiones en grupo a la presencia de decisores con capacidad de veto.

Entre ambas clases de problemas hay sin embargo diferencias. La más importante es que en la toma de decisiones multicriterio tiene sentido plantear la **compensación** entre crierios y preguntar al decisor qué está dispuesto a perder de un criterio a cambio de ganar algo en otro, lo cual no tiene sentido en las decisiones en grupo. Por otro lado, en las decisiones en grupo ocuren fenómenos que no se dan en la decisión individual, esencialmente las interacciones entre los participantes, las cuales alteran el resultado del proceso, por lo que las llamadas técnicas grupales adquieren gran importancia práctica. Por esto las decisiones en grupo generalmente van precedidas de una etapa de intercomunicación entre los participantes, la cual puede seguir técnicas específicas como TKJ, tormenta de ideas, etc. Actualmente este tipo de técnicas se están refinando para ser usadas en redes de computadoras con el fin de que la comunicación entre los participantes sea lo más objetiva posible y se puedan eliminar influencias de tipo personal, generadas por liderazgos asociados al prestigio de los que intervienen o a su personalidad, pero no al conocimiento del problema.

Referencias

Arrow, K.; Reynaud H. (1986), *Social choice and multicriterion decision-making*, M.I.T. Press, Cambridge, U.S.A.

Bernoulli, D. (1738), "Specimen theoriae novae de mensura sortis," *Comment. Acad. Sci. Imper. Petropolitanae*, 5, 175-192. Traducción al inglés por L. Somer, "Exposition of a new theory on the measurement of risk," *Econometrica*, 22, 23-36 (1954)

Bunge, M. (1980), *Epistemología*, Ariel, México

Dubois, D.; Prade, H. (1980), *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, Academic Press, Nueva York

Fishburn, P. (1970) *Utility Theory for Decision Making* John Wiley & Sons, Inc

Fishburn, P. (1970b), "The irrationality of transitivity in social choice theory", *Behavioral Science*, 15, 119-123

Fishburn P. (1982) "Nontransitive measurable utility," *Journal of Mathematical Psychology* 26 pp 31-67

Fishburn P. (1984) "Multiattribute nonlinear utility theory," *Management Science*, 30, 11 pp 1301-1310

Fishburn P. (1989) "Foundations of decision analysis: along the way," *Management Science*, 35, 4 pp 387-405

French, S. (1988), *Decision theory*, Halsted Press-John Wiley & Sons, Nueva York

Frisch, R. (1926) "Sur un problème d'économie pure" *Norsk Matematisk Forenings Skrifter*, 16 1-40. Traducción al inglés en J. S. Chipman L. Hurwicz, M. Richter y H. Sonnenschein (Eds.), *Preferences, utility, and demand*, Harcourt Brace Jovanovich, Nueva York, 1971, 386-423

Gastel, M. van; Paelink, J. (1992) "Generalization of solution concepts in conflict and negotiation analysis," *Theory and Decision* 32, 65-76

Keeney, R.; Nair K. (1976) "Evaluating potential nuclear power plan sites en the Pacific Northwest using decision making," *IIASA*, Professional Paper No 76

Keeney, R.; Raiffa, H. (1976) *Decision with multiple objectives: preferences and value trade off*, John Wiley, Nueva York

Krantz, D.; Luce, R.; Suppes, P.; Tversky, A. (1971) *Foundations of measurement*, Vol 1, Academic Press, Nueva York.

Nash, J. (1950), "The bargaining problem," *Econometrica*, 18, 155-162

Ramsey F. (1931), "Truth and probability," en *The foundations of mathematics and other logical essays*, Routledge and Kegan Paul, Londres, 156-198. Reimpresión en H. Kyburg y E. Smokler (Eds.), *Studies in subjective probability*, John Willey & Sons, Inc., Nueva York, 1964, 61-92

Savage, L. (1954), "The foundations of statistics," John Willey & Sons, Inc., Nueva York

Tversky A. (1969), "Intransitivity of preferences", *Psychological Review*, 76, 31-48.

von Neumann, J.; Morgenstern, O. (1944) *Theory of games and economic behaviour*, Princeton University Press, Nueva York

3. REPRESENTACION DE PREFERENCIAS MEDIANTE FUNCIONES DE ELECCION

La idea de función de elección se origina en la teoría de la decisión en grupo (ver por ejemplo Fishburn, 1973), adoptando una forma apropiada para este caso pero no para representar estructuras de preferencia individuales. Esto posiblemente explica que el concepto de función de elección haya sido ignorado en la literatura de la teoría de la decisión individual, siendo hasta Makarov *et al.* (1987), libro desconocido en la literatura occidental, que se define este concepto de una manera sencilla y apropiada para representar estructuras de preferencia individuales (ver *2.2.1*), en especial las que no pueden expresarse mediante relaciones binarias, tales como las asociadas con criterios de arrepentimiento.

3.1 Operaciones con funciones de elección

Sean C_1, C_2, C funciones de elección sobre A; se definen las relaciones de *contensión*, $\subseteq$, y de *contensión estricta*, $\subset$, entre funciones de elección, y las operaciones de *composición*, *intersección* y *unión* entre funciones de elección (las cuales resultan conmutativas):

$$
\begin{array}{ll}
C_1 \subseteq C_2 \ \text{ sii } \ C_1(X) \subseteq C_2(X) & \forall\, X \subseteq A \\
C_1 \subset C_2 \ \text{ sii } \ C_1(X) \subset C_2(X) & \forall\, X \subseteq A \\
C = C_1\, C_2 \ \text{ sii } \ C(X) = C_1(C_2(X)) & \forall\, X \subseteq A \\
C = C_1 \cap C_2 \ \text{ sii } \ C(X) = C_1(X) \cap C_2(X) & \forall\, X \subseteq A \\
C = C_1 \cup C_2 \ \text{ sii } \ C(X) = C_1(X) \cup C_2(X) & \forall\, X \subseteq A
\end{array}
$$

3.2 Funciones de elección generadas por relaciones binarias

Una función de elección C es *generable por una relación binaria* sii existe una relación S sobre el conjunto A de alternativas tal que $C = C_S$ o bien $C = C^S$, donde

$$C^S(X) = \{x \in X:\ y\, S^{-} x \text{ para todo } y \in X\} \qquad \forall\, X \subseteq A$$

$$C_S(X) = \{x \in X:\ x\, S\, y \text{ para todo } y \in X\} \qquad \forall\, X \subseteq A$$

en cuyo caso C_S y C^S se denominan funciones de elección de las alternativas S-*no dominadas* y S-*dominantes*, o bien, *generadas por* S *en forma directa* e *inversa*, respectivamente. Toda relación binaria, Q, y su **dual** (ver anexo A), R, generan las mismas dos funciones de elección, $C_S = C^Q$, $C_Q = C^S$.

Es inmediato que la familia de todas las relaciones binarias $S \subseteq A \times A$ que generan en forma inversa (directa) una misma función de elección C^S (C_S) es cerrada respecto de la intersección (unión). Por tanto a cada función de elección C generable por una relación binaria le corresponde una relación binaria mínima S (máxima Q) tal que $C = C^S$ ($C = C_Q$), la cual está contenida en (contiene) todas las relaciones binarias que generan C en forma inversa (directa, respectivamente). Se puede demostrar que la intersección de dos funciones de elección generables por una relación binaria es también generable por una relación binaria y además que:

$$S \subseteq Q \text{ implica } C^S \subseteq C^Q; \qquad\qquad S \subset Q \text{ implica } C^S \subset C^Q.$$

Se pueden generar funciones de elección a partir de varias relaciones binarias. Así, a un conjunto de relaciones binarias $S_1,\ldots,S_n$ sobre A y una función booleana sobre A, $\psi(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, les corresponde una función de elección $C = C(S_1,\ldots,S_n, \psi)$ dada por

$$x \in C(X) \text{ sii } \psi(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) = 1$$

donde

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in C^{S_i}(X) \\ 0 \text{ si } x \notin C^{S_i}(X) \end{cases}$$

Se puede demostrar que toda función de elección C sobre un conjunto finito de alternativas puede ser generada de esta manera.

Una función de elección es *normal* sii para todo $X \subseteq A$ y cualquier cubierta $\{X_i \subseteq A;\ i \in I: X \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i\}$ de X

$$X - C(X) \subseteq X - \bigcap_{i\in I} C(X_i) \tag{3.1}$$

Esta propiedad significa que para cualquier cubierta de X los rechazados de X siempre serán rechazados de al menos un elemento de la cubierta.

El siguiente teorema caracteriza las funciones de elección que pueden generarse de una relación binaria:

Teorema. Una función de elección es generable por una relación binaria si y solo si es normal.

Demostración. $\Rightarrow$: C_S cumple esta condición porque si $x \in X - C(X)$ entonces $x \bar{S} y$ para algún $y \in X$ y por tanto $y \in X_i$, $x \notin C_S(X_i)$ para algún conjunto de la cubierta, de donde $x \notin \bigcap_{i \in I} C(X_i)$. $\Leftarrow$: Se va a demostrar que si C cumple (3.1) entonces $C = C_S$, donde

$$S = \bigcup_{X \subseteq A} [C(X) \times X]$$

Si $x \in C(X)$ entonces $x \, S \, y$ para todo $y \in X$, y por tanto $x \in C_S$, de donde $C(X) \subseteq C_S(X)$; $C_S \subseteq C$ se demuestra por contradicción: por (3.1), $x \notin C(X)$ implica $x \in X - \bigcap_{i \in I} C(X_i)$, y por tanto $x \notin C(X_i)$ para al menos un conjunto X_i de la cubierta; por el otro lado $x \in C_S(X)$ implica $x \, S \, y$ para todo $y \in X$, y por tanto existe una cubierta X_i ($i \in I$) de X tal que $x \in C(X_i)$ para toda i, llegando a una contradicción. ∎

3.3 Propiedades de las funciones de elección

Normalidad: $\forall X \subseteq A$ y cualquier cubierta $\{X_i \subseteq A;\ i \in I: X \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i\}$ de X

$$X - C(X) \subseteq X - \bigcap_{i \in I} C(X_i)$$

hereditaria: $X \subseteq X'$ implica $C(X') \cap X \subseteq C(X)$ $\quad \forall X, X' \subseteq A$

concordancia: $\bigcap_i C(X_i) \subseteq C(\bigcup_i X_i)$ $\quad \forall X_i \subseteq A$

independencia de las alternativas irrelevantes (o rechazadas):

$$C(X) \subseteq X' \subseteq X \text{ implica } C(X) = C(X') \qquad \forall X, X' \subseteq A$$

independencia del camino: $C(X \cup X') = C(C(X) \cup C(X'))$ $\quad \forall X, X' \subseteq A$

monotonía: $X \subseteq X'$ implica $C(X) \subseteq C(X')$ $\quad \forall X, X' \subseteq A$

cuasisumatoria: $C(X \cup X') = C(C(X\ ) \cup C(X'))$ $\quad \forall X, X' \subseteq A$

sumatoria: $C(X \cup X') = C(X) \cup C(X') \quad \forall X, X' \subseteq A$

multiplicación: $C(X \cap X') = C(X) \cap C(X') \quad \forall X, X' \subseteq A$

escalar general: existe una función real g sobre A tal que

$$C(X) = \{x \in X: g(x) \geq g(y) \ \forall y \in X\} \quad \forall X \subseteq A$$

escalar: existe una función real g sobre A inyectiva ($g(x) = g(y)$ implica $x = y$) tal que $C(X) = \{x \in X: g(x) \geq g(y) \ \forall y \in X\} \quad \forall X \subseteq A$

totalmente extremal: es la unión de funciones de elección escalares C_i:

$$C = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$$

paretiana: existen funciones reales sobre A, $g_1, \ldots, g_m$ tales que $\forall X \subseteq A$ $C(X)$ es el conjunto de *soluciones eficientes*, es decir,

$$C(X) = \{x: \text{no existe } y \in X \text{ tal que } g_i(y) \geq g_i(x) \ \forall i\} \quad \forall X \subseteq A$$

característica de un conjunto A: $C^{\chi}_{A}(X) = X \cap A \quad \forall X \subseteq A$

transitiva:

$$C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) = \phi,\ C(X_2 \cup X_3) = C(X_2) = \phi \Longrightarrow C(X_1 \cup X_3) = C(X_1) = \phi$$

acíclica: $C(X_k \cup X_{k+1}) = C(X_k) = \phi$ para $k = 1, \ldots, n-1 \Longrightarrow X_1 \neq X_n$

antistatu quo: $C(X) \neq \phi \ \forall X \neq \phi$

3.4 Ilustración de propiedades de las funciones de elección

Normalidad: en una competencia cuyos participantes forman el conjunto X, ningún perdedor (elemento de $X - C(X)$) podría ser ganador de todas las eliminatorias por subgrupos (estar en $\bigcap_{i \in I} C(X_i)$, siendo que todos los competidores en X están obligados a inscribirse en al menos un subgrupo $i \in I$ (o sea, $\{X_i; i \in I\}$ es una cubierta de X). Propiedad hereditaria: entre los elegidos de un subconjunto $X \subseteq X'$, $C(X)$, está todo aquel elemento que sería elegido de un conjunto que lo contenga. Concordancia: las alternativas elegidas de todos los conjuntos X_i también serán elegidas de la unión de los conjuntos. La independencia de las alternativas irrelevantes o rechazadas significa que la eliminación de alternativas que no serán elegidas no altera el resultado de la elección.

3.5 Relaciones entre propiedades de las funciones de elección

Se pueden demostrar las siguientes afirmaciones (Makarov, I. A., *et al*, 1987): (a) una función de elección es generable por una relación binaria si y solo si es normal; (b) una función de elección es normal si y solo si es hereditaria y cumple la condición de concordancia; (c) toda función normal que proviene de una relación binaria transitiva cumple la propiedad de la independencia de las alternativas irrelevantes; (d) si una relación S es transitiva (acíclica) entonces C_S es transitiva (acíclica, respectivamente); (e) si S es irreflexiva y C_S es una función de elección transitiva entonces S es transitiva; (f) toda función de elección sumatoria es transitiva; (g) toda función de elección es sumatoria sii es la función de elección característica de algún subconjunto $X \subseteq A$; (h) una función de elección es escalar general sii es generada por una relación binaria irreflexiva, transitiva y negativa transitiva; (i) toda función de elección escalar general es totalmente extremal; (j) una función de elección es totalmente extremal sii es antiestado actual, y cumple las condiciones hereditaria y de independencia de las alternativas irrelevantes; (k) una función es independiente del camino sii cumple las condiciones hereditaria y de independencia de las alternativas irrelevantes; (l) una función de elección es paretiana sii es generada por una relación binaria transitiva e irreflexiva; (m) una función de elección es paretiana sii es antiestado actual y cumple las condiciones hereditaria y de independencia de las alternativas irrelevantes; (n) la clase de las funciones que cumplen las condiciones hereditaria, concordancia y de independencia de las alternativas irrelevantes coinciden con las funciones de elección normales generadas por relaciones binarias transitivas e irreflexivas; (o) toda función sumatoria es normal y cumple la condición de independencia de las alternativas irrelevantes.

3.6 Estructura de elección probabilista (Suppes *et al*, 1989)

Una *estructura de elección probabilista* es un triplete $\langle A,M,P\rangle$, donde A es un conjunto de alternativas, M una familia de subconjuntos finitos no vacíos de A, y P es una función real con dominio $\{(a,B)\colon a \in B \in M\}$ tal que

$$P(a,B) \geq 0, \qquad \sum_{b\in B} P(b,B) = 1$$

P(a,B) se interpreta como la probabilidad de elegir a del conjunto B de alternativas y M está formado por todos los subconjuntos de alternativas cuyos elementos son comparables entre sí. La estructura de elección probabilista $<A,M,P>$ es *finita* sii el conjunto A es finito y es *cerrada* sii A es finito y $M = \{B \subseteq A: B \neq \phi\}$ (todas las alternativas son comparables entre sí). Un caso particular importante es el siguiente:

Una *estructura probabilista de comparaciones por pares* es una estructura de elección probabilista $<A,M,P>$ tal que M es una relación binaria reflexiva y simétrica sobre A. La estructura es *completa* sii $M = A \times A$.

3.7 Estructura de comparaciones por pares

Se propone la siguiente definición que agrupa la de Suppes *et al.* (1989, pág 388) para un contexto probabilista y la de Jacquet-Lagrèze (1982) para considerar índices de preferencia binarios:

Definición. $<A, M, \phi, \Lambda>$ es una *estructura de comparaciones por pares* sii:

(a) $M \subseteq A \times A$ es reflexiva y simétrica

(b) Λ es un conjunto ordenado, denominado *indicador de preferencias*, cuya cardinalidad es mayor que 1 y contiene un elemento λ_*, llamado *indiferencia*

(c) ϕ: $M \longrightarrow \Lambda$ es una función tal que para todo (x,y), $(x,x) \in M$:

reflexividad de la indiferencia: $\phi(x,x) = \lambda_*$

asimetría de la preferencia: $\phi(x,y) > \lambda_* \Longrightarrow \phi(y,x) \text{ no} > \lambda_*$

simetría de la indiferencia: $\phi(x,y) = \lambda_* \Longrightarrow \phi(y,x) = \lambda_*$

Si $(x,y) \in M$ se dice que las alternativas x,y son *comparables* y en caso contrario que *no son comparables*.

La relación binaria P_λ definida para cada $\lambda \geq \lambda_*$ por

$$xP_\lambda y \Longleftrightarrow \phi(x,y) \geq \lambda \qquad \forall\ (x,y) \in M \qquad\qquad \lambda \geq \lambda_*$$

se puede intepretar como una relación de preferencia determinada por un nivel dado λ de decidibilidad o discriminabilidad sobre la preferencia de x sobre y. Claramente, $\mu \geq \lambda \geq \lambda_*$ implica $P_\mu \subseteq P_\lambda$. Las primeras dos siguientes definiciones de transitividad se relacionan directamente con propiedades de transitividad de elementos de la familia P_λ, $\lambda \geq \lambda_*$; una estructura de comparaciones por pares <A, M, ϕ, Λ> es:

(a) *débilmente transitiva* sii

$$\phi(x,y) \geq \lambda_*,\ \phi(y,z) \geq \lambda_* \Longrightarrow \phi(x,z) \geq \lambda_*$$

o equivalentemente, sii P_{ϕ_*} es transitiva

(b) *moderadamente transitiva* sii

$$\phi(x,y) \geq \lambda_*,\ \phi(y,z) \geq \lambda_* \Longrightarrow \phi(x,z) \geq \min\ \{\phi(x,y),\ \phi(y,z)\}$$

o equivalentemente, sii

$$\phi(x,y) \geq \phi(y,z) \geq \lambda_* \Longrightarrow \phi(x,z) \geq \phi(y,z)\}$$

o equivalentemente, sii P_λ es transitiva $\forall\ \lambda \geq \lambda_*$

(c) *fuertemente transitiva* sii

$$\phi(x,y) \geq \lambda_*,\ \phi(y,z) \geq \lambda_* \Longrightarrow \phi(x,z) \geq \text{máx}\ \{\phi(x,y),\ \phi(y,z)\}$$

o equivalentemente,

$$\phi(x,y) \geq \phi(y,z) \geq \lambda_* \Longrightarrow \phi(x,z) \geq \phi(x,y)$$

(d) *estrictamente transitiva* sii es fuertemente transitiva y

$$\phi(x,y) > \lambda_*,\ \phi(y,z) > \lambda_* \Longrightarrow \phi(x,z) > \text{máx}\ \{\phi(x,y),\ \phi(y,z)\}$$

Es claro que

T. estricta $\Rightarrow$ T. fuerte $\Rightarrow$ T. moderada $\Rightarrow$ T. débil

Las anteriores consideraciones son aplicables a situaciones monocriterio y multicriterio. Debido a que la preferencia global induce preferencias sobre cada criterio (manteniendo constantes los niveles de los demás criterios), pero no al revés, al pasar de las preferencias sobre los criterios individuales a las preferencias globales ocurre un fenómeno similar al incremento de entropía cuando se pasa de un estado de mayor orden a uno de menor orden, donde orden se asocia con "racionalidad". Así, si las preferencias globales cumplen la transitividad moderada entonces necesariamente las preferencias sobre cada uno de los criterios individuales deben cumplir al menos esta propiedad; esto significa que hay que estar dispuesto a aceptar situaciones tales como que las preferencias sobre los criterios individuales sean estrictamente transitivas pero que las preferencias globales sean débilmente transitivas o incluso intransitivas. Las elecciones sociales son un caso típico de este fenómeno, donde personas perfectamente racionales en lo individual pueden ser intransitivas como grupo; la intransitividad también se presenta en torneos en los que en el desempeño de los competidores influyen varias cualidades independientes (un individuo puede alcanzar niveles altos en unas cualidades y no en otras).

3.8 Funciones de elección dinámicas o decisiones secuenciales

Hay una elección inical $Y_0 \subseteq X_0$ y después se elige sucesivamente de los subconjuntos $X_1 \subseteq A_1$, $X_2 \subseteq A_2, \ldots$ de manera que el subconjunto Y_i seleccionado de X_i depende solamente de la selección anterior $Y_{i-1} \subseteq X_{i-1}$, es decir, existe una *función de elección dinámica* $C(,) \subseteq X_i$ tal que

$$Y_i = C(X_i, Y_{i-1}) \qquad i=1,2,\ldots$$

Referencias

Fishburn, P. (1973), *The theory of social choice*, Princeton University Press, Princeton

Jacquet-Lagrèze, E. (1982), "Binary preference indices: a new look on multicriteria aggregation procedures," *European Journal of Operational Research*, 10, 1 pp 26-32

Makarov, I.; Vinogradskaya, T.; Rubchinsky, A.; Sokolov, V. (1987), *The theory of choice and decision making*, MIR Publishers, Moscú

Suppes, P.; Krantz, D.; Luce, R.; Tversky, A. (1989), *Foundations of measurement*, Vol 2, Academic Press, Nueva York

4. REPRESENTACION DE PREFERENCIAS MEDIANTE RELACIONES BINARIAS

Un caso especialmente importante, que incluye los enfoques de teoría de utilidad y de relaciones binarias de sobreclasificación, es cuando la función de elección puede ser generada por una relación binaria sobre el conjunto de alternativas, es decir, cuando el sistema de preferencias correspondiente se basa en comparaciones por pares (de alternativas) y puede representarse por una relación binaria. Para analizar las propiedades de un sistema de preferencias, modelado por una relación binaria, es conveniente descomponer dicha relación en sus partes simétrica y asimétrica. La parte asimétrica corresponde a la llamada preferencia estricta, respecto de la cual existen una clasificación y teoremas sobre la existencia de una función de valor o utilidad que la represente numéricamente. Se dan estructuras de preferencia que se requieren para considerar el caso multicriterio; sobre estas no existe una terminología universalmente aceptada ni una clasificación exhaustiva atendiendo a las propiedades de los ordenamientos que produce.

4.1 Partes simétrica y asimétrica de una relación binaria

Toda relación binaria S sobre un conjunto A determina tres relaciones sobre el mismo conjunto A, definidas por

$$I = \{(x,y):\ xSy,\ ySx\} = S \cap S^{-1}$$
$$P = \{(x,y):\ xSy,\ yS^{-}x\} = S \cap S'$$
$$R = \{(x,y):\ xS^{-}y,\ yS^{-}x\} = S^{-} \cap S'$$

La relación I es simétrica; se denomina *parte simétrica de* S o relación de *indiferencia*; P es asimétrica, se denomina *parte asimétrica de* S o relación de *preferencia*, y R, que es una relación simétrica, se denomina *parte no comparable* de S o relación de *incomparabilidad*.

Se puede demostrar que si I, P son las partes simétrica y asimétrica de S, respectivamente, entonces

1) $\{I,P\}$ es una partición de S: $S = I \cup P$, $I \cap P = \phi$

2) $\{I,P,R\}$ es una partición de $A \times A$

3) S reflexiva $\Leftrightarrow$ I reflexiva

S transitiva $\Leftrightarrow$ P e I transitivas

S completa y antisimétrica $\Leftrightarrow$ P débilmente conexa e I reflexiva

4) P determina S sii S es completa, en cuyo caso

$$S = \{(x,y):\ xP^{-}y \text{ o } yP^{-}x\} = P^{-} \cup P^{d}$$

$$I = \{(x,y):\ xP^{-}y,\ \ yP^{-}x\} = P^{-} \cap P^{d}$$

$$R = \phi$$

S transitiva $\Leftrightarrow$ P asimétrica, negativa transitiva ($\Rightarrow$ transitiva)

$\Longrightarrow$ I equivalencia

4.2 Estructura de preferencia basadas en relaciones binarias

En *2.2.2* se define una estructura de preferencias basada en relaciones binarias como un cuartero $\langle A,\ I,\ P,\ R\rangle$, donde A es un conjunto de alternativas e I, P, R relaciones binarias sobre A, con I reflexiva y simétrica, P asimétrica y R simétrica e irreflexiva, tal que para todo par de alternativas $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$ se satisface exactamente una: a) $\mathbf{x}I\mathbf{y}$, "hay indiferencia entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$"; b) $\mathbf{x}P\mathbf{y}$, "$\mathbf{x}$ es preferido a $\mathbf{y}$"; c) $\mathbf{y}P\mathbf{x}$, "$\mathbf{y}$ es preferido a $\mathbf{x}$"; d) $\mathbf{x}R\mathbf{y}$, "hay incomparabilidad entre las alternativas $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$".

Toda estructura de preferencias $\langle A,\ I,\ P,\ R\rangle$ determina una única relación S, dada por $S = P \cup I$, denominada *relación característica*, $S \subseteq A \times A$, la cual es reflexiva (porque I es reflexiva), y recíprocamente, toda relación reflexiva S caracteriza totalmente una estructura de preferencias $\langle A,\ I,\ P,\ R\rangle$, donde I, P y R son las partes simétrica, asimétrica y no comparable de S, respectivamente. $\mathbf{x}S\mathbf{y}$ significa que la alternativa $\mathbf{x}$ es al menos tan preferida como la alternactiva $\mathbf{y}$; por esto a S se le le llama también *preferencia en sentido amplio* o *preferencia débil*, para distinguirla de P, la relación de preferencia estricta.

Toda relación característica S determina una única función de elección normal, denominada *función de elección característica*, definida por

$$C_S(X) = \{x \in X: x \; S \; y \text{ para todo } y \in X\} \qquad \forall \; X \subseteq A$$

la cual por ser S reflexiva es también *reflexiva*, en el sentido que $C_S(\{x\}) = \{x\} \; \forall \; x \in A$. Recíprocamente, toda función de elección normal reflexiva sobre A determina una única relación binaria S reflexiva sobre A:

$$C_S(\{x,y\}) = \{z \in \{x,y\}: zSx, \; zSy \} = \begin{cases} \{x\} & \text{sii } xPy \\ \{y\} & \text{sii } yPx \\ \{x,y\} & \text{sii } xIy \\ \phi & \text{sii } xRy \end{cases} \qquad \forall \; x \neq y \in A$$

y de esta manera C_S determina las partes simétrica y asimétrica de S (y por tanto a S). Similarmente, la relación de preferencia P determina una única función de elección normal

$$C^P(X) = \{x \in X: y \; P^- x \text{ para todo } y \in X\} \qquad \forall \; X \subseteq A$$

la cual es también irreflexiva por ser P irreflexiva. Recíprocamente, toda función de elección normal y reflexiva sobre A determina una única relación P asimétrica sobre A:

$$C^P(\{x,y\}) = \{z \in \{x,y\}: xP^-z, \; yP^-z\} = \begin{cases} \{x\} & \text{sii } xPy \\ \{y\} & \text{sii } yPx \\ \{x,y\} & \text{sii } (xIy \text{ o } xRy) \end{cases} \qquad \forall \; x \neq y \in A$$

Obsérvese que las funciones de elección C_S y C^P coinciden y no habría que diferenciarlas, excepto cuando S no es conexa (o equivalentemente, cuando P no es débilmente conexa) ya que C^P no puede distinguir entre indiferencia y no comparabilidad. Este aspecto se relaciona con el hecho de que en los ordenamientos en *4.3*, por ser construidos usando exclusivamente una relación asimétrica P, no se pueden distinguir los casos de indiferencia, xIy, y de no comparabilidad xRy entre dos alternativas x,y, excepto para el orden lineal porque $R = \phi$ (P es débilmente conexa e I es la relación diagonal sobre I: $xIy \Leftrightarrow x = y$).

A continuación se definen algunas estructuras de preferencia, ocurriendo en muchos casos, a diferencia del *teorema 4.1*, que las propiedades de las relaciones que intervienen en cada estructura generalmente no son necesarias y suficientes para que se cumplan los modelos correspondientes.

4.3 Ordenamientos asociados a relaciones asimétricas

Se tienen las siguientes clases de ordenamientos (Fishburn, 1970):

Suborden:	acíclica
Orden parcial estricto:	irreflexiva y transitiva
Orden débil:	asimétrica y negativa transitiva
Orden lineal:	irreflexiva, transitiva y débilmente conexa

Se puede verificar que en todos estos ordenamientos la relación es asimétrica ($\Rightarrow$ irreflexiva) y que al descender se agregan condiciones:

$$\text{suborden} \Leftarrow \text{orden parcial estricto} \Leftarrow \text{orden débil} \Leftarrow \text{orden lineal}$$

Además, todo suborden está contenido en algún orden parcial estricto; todo orden parcial estricto está contenido en algún orden débil, y todo orden débil está contenido en algún orden lineal; en forma abreviada:

$$\text{suborden} \subseteq \text{orden parcial estricto} \subseteq \text{orden débil} \subseteq \text{orden lineal}$$

La primera afirmación resulta de que la cerradura transitiva de un suborden es un orden parcial estricto; por el teorema de Szpilrajn (1930) todo orden parcial estricto está contenido en algún orden lineal, el cual es un orden débil, de donde todo orden parcial estricto está contenido en algún orden débil. La última afirmación resulta del siguiente razonamiento: un orden débil es un orden parcial estricto, un orden parcial estricto está contenido en un orden lineal (Szpilrajn, 1930), por tanto un orden débil está contenido en algún orden lineal.

Teorema 4.1 Si P es una relación binaria sobre un conjunto A, el cual es numerable, entonces para cada uno de los casos que siguen existe una función real sobre A, g, la cual satisface para todo $x,y,z \in A$ las propiedades a la derecha:

1) P es un suborden sii $xPy \Longrightarrow g(x) > g(y)$

2) P es un orden parcial estricto si $\begin{cases} xPy \Longrightarrow g(x) > g(y) \\ xHy \Longleftrightarrow g(x) = g(y) \end{cases}$

3) P es un orden débil sii $xPy \Longleftrightarrow g(x) > g(y)$

4) P es un orden lineal sii $\begin{cases} xPy \Longleftrightarrow g(x) > g(y) \\ g(x) = g(y) \Longrightarrow x = y \end{cases}$

donde la relación H está definida a través de la relación Y por

$$xYy \text{ sii } xP^{-}y,\ yP^{-}x$$
$$xHy \text{ sii } (xYz \Longleftrightarrow yYz\ \forall\ z \in A)$$

xYy significa que **x,y** no están P-relacionados; Y es reflexiva y simétrica; **xHy** significa que **x,y** están P-relacionados con los mismos elementos de A; si P es transitiva entonces **xHy** significa que x y y P-dominan y son P-dominados por los mismos elementos de A; H es una relación de equivalencia. Puesto que P es asimétrica, se cumple la siguiente propiedad de tricotomía: para todo par de alternativas **x,y** se cumple exactamente una relación, **xPy**, **yPx** o **xYy**.

Para todo orden parcial estricto P, pero no para todo suborden, $HP \subseteq P$, $PH \subseteq P$ (es decir, $(xHy,\ yPz)$ o $(xPy,\ yHz) \Longrightarrow xPz$). Un ejemplo de orden parcial estricto que no es un orden débil es la relación de inclusión estricta sobre los subconjuntos de un conjunto con más de tres elementos. Cuando P es un orden parcial estricto Y no es necesariamente transitiva; sin embargo, un orden parcial estricto es un orden débil sii Y es transitiva. Para todo orden débil, pero no para todo orden parcial estricto, $YP \subseteq P$, $PY \subseteq P$ y además $P \cup Y$ es transitiva. Un orden débil es un orden lineal sii $xYy \Longleftrightarrow x = y$. Un ejemplo de orden lineal es > sobre $\mathbb{R}$. Si P es un orden débil sobre A, entonces P_o definida sobre A/Y por $aP_ob \Longleftrightarrow xPy$ para algún (y por tanto para todo) $x \in a$, $y \in b$, es un orden lineal.

La condición de A contable (numerable o finito) en el *teorema 4.1* se puede relajar como se observa en los siguientes teorémas:

Teorema 4.2 Si P es una relación asimétrica sobre un conjunto A y A/H es contable, entonces existe una función real sobre A, g, tal que para todo **x**,**y**,**z** $\in$ A se cumple la afirmación 2 del *teorema 4.1*:

2) P es un orden parcial estricto implica $\begin{cases} xPy \Longrightarrow g(x) > g(y) \\ xHy \Longleftrightarrow g(x) = g(y) \end{cases}$

Teorema 4.3 Si P es un orden débil sobre A, A/Y es contable o bien A/Y no es contable pero contiene un subconjunto de A/Y que es contable y cumple cierta condición de densidad, entonces existe una función real sobre A, g, tal que para todo **x**,**y** $\in$ A

$$xPy \Longleftrightarrow g(x) > g(y)$$

4.4 Algunas estructuras de preferencia (Vincke, 1992)

Preorden parcial. En esta estructura I es reflexiva y para todo **x**,**y**,**z** $\in$ A se cumple

$$\begin{array}{ll} xPy,\ yPz \Longrightarrow yPz & \text{es decir, P transitiva} \\ xIy,\ yIz \Longrightarrow yIz & \text{es decir, I transitiva} \\ xPy,\ yIz \Longrightarrow xPz & \text{es decir, } PI \subseteq P \\ xIy,\ yPz \Longrightarrow xPz & \text{es decir, } IP \subseteq P \end{array}$$

En este caso la relación característica S es reflexiva y transitiva, es un *preorden parcial*, y existe una función real sobre A tal que

$$\begin{cases} xPy \Longrightarrow g(x) > g(y) \\ xIy \Longrightarrow g(x) = g(y) \end{cases}$$

Orden parcial. Un *orden parcial* es una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica (definición tradicional) o equivalentemente, S es un orden parcial sii su parte asimétrica P es un orden parcial estricto y su parte simétrica, la indifencia I, es la relación diagonal ($xIy \Longleftrightarrow x = y$). Un ejemplo de orden parcial es la relación de inclusión sobre los subconjuntos de un conjunto con más de tres elementos. Dado un orden parcial siempre es posible reemplazar de al menos dos formas diferentes las incomparabilidades por "preferencias" de manera que resulte un **orden total** (Szpilrajn, 1930). Este resultado fundamental es la base del concepto de dimensión de un orden parcial (Dushnik y Miller, 1941; Golumbic, 1980). Para todo orden parcial existe una función real g sobre el conjunto de alternativas A tal que se cumple el modelo

$$\left.\begin{array}{l} xPy \Longrightarrow g(x) > g(y) \\ xIy \Longleftrightarrow x = y \end{array}\right\}$$

Preorden total (completo). Este caso ocurre cuando existe una función real g sobre el conjunto de alternativas A tal que se cumple el llamado *modelo tradicional*

$$\left.\begin{array}{l} xPy \Longleftrightarrow g(x) > g(y) \\ xIy \Longleftrightarrow g(x) = g(y) \end{array}\right\} \quad \forall\ x,y \in A$$

o equivalentemente,

$$xSy \Longleftrightarrow g(x) \geq g(y) \qquad \forall\ x,y \in A$$

Este modelo implica

$$\left.\begin{array}{l} \text{P transitiva y asimétrica} \\ \text{I transitiva y reflexiva} \\ \text{R vacía} \end{array}\right\}$$

Cuando el conjunto de alternativas A es finito o numerable estas condiciones son suficientes para que exista un modelo tradicional. Cuando A es infinito no numerable es necesario adicionar condiciones como las del *teorema 4.3*, que generalmente son satisfechas en las aplicaciones.

En el modelo tradicional P es un orden débil, I una relación de equivalencia, la relación característica S asociada es conexa reflexiva y transitiva, lo que constituye un llamado *preorden total* (o *completo*), y las alternativas se pueden ordenar de "mejor" a "peor" con eventuales empates.

Si el modelo además de $xSy \Leftrightarrow g(x) \geq g(y)$ $\forall\, x,y \in A$ cumple $g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$ (o equivalentemente, $xIy \Rightarrow x = y$) entonces la estructura de preferencias S es conexa, transitiva y antisimétrica y se llama *orden total*. En este caso P es un orden lineal (irreflexiva, transitiva y débilmente conexa).

Cuasiorden (modelo con umbral constante). Este caso ocurre cuando existe una función real g sobre el conjunto de alternativas A y un *umbral (de indiferencia)* $q \geq 0$ tal que se cumple el llamado *modelo con umbral de indiferencia*

$$\left.\begin{array}{l} xPy \Leftrightarrow g(x) - g(y) > q \\ xIy \Leftrightarrow |g(x) - g(y)| \leq q \end{array}\right\} \quad \forall\, x,y \in A$$

Este modelo implica:

$xPy,\ yIz,\ zPw \Rightarrow xPw$ es decir $PIP \subseteq P$
$xPy,\ yPz,\ zIw \Rightarrow xPw$ es decir $PPI \subseteq P$
R vacía

Cuando el conjunto de alternativas A es finito o numerable estas condiciones son suficientes para que exista un modelo con umbral de indiferencia. Cuando A es infinito no numerable es necesario adicionar condiciones de naturaleza topológica, que generalmente son satisfechas en las aplicaciones.

En una estructura de cuasiorden P es transitiva y la relación característica S cumple que $\forall\, x,y,z,w \in A$

xSy o ySx (S es conexa)
$xSy,\ zSw \Rightarrow xSw$ o zSy (S es de Ferrers)
$xSy,\ ySz \Rightarrow xSw$ o zSy (S es semitransitiva)

Orden de intervalo (modelo con umbral variable). Este caso ocurre cuando existe una función real g sobre el conjunto de alternativas A y una función no negativa de variable real, $q() \geq 0$, denominada *umbral de indiferencia*, tal que se cumple el llamado *modelo con umbral (de indiferencia) variable*

$$\left.\begin{array}{l} xPy \Leftrightarrow \quad g(x) - g(y) > q(g(y)) \\ xIy \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \leq g(y) + q(g(y)) \\ g(y) \leq g(x) + q(g(x)) \end{cases} \end{array}\right\} \quad \forall\ x,y \in A$$

Este modelo implica:

$$xPy,\ yIz,\ zPw \Rightarrow xPw \quad \text{es decir } PIP \subseteq P$$
$$R \text{ vacía}$$

Cuando el conjunto de alternativas A es finito o numerable estas condiciones son suficientes para que exista un modelo con umbral (de indiferencia) variable. Cuando A es infinito no numerable es necesario adicionar condiciones de naturaleza topológica, que generalmente son satisfechas en las aplicaciones.

La relación característica S asociada al modelo con umbral de indiferencia cumple que $\forall\ x,y,z,w \in A$

$$xSy \text{ o } ySx \quad \text{(S es conexa)}$$
$$xSy,\ zSw \Rightarrow xSw \text{ o } zSy \quad \text{(S es de Ferrers)}$$

Si la función de umbral $q()$ cumple la llamada *condición de coherencia*

$$g(x) > g(y) \Rightarrow g(x) + q(g(x)) > g(y) + q(g(y))$$

entonces existe una transformación de las funciones $g()$ y $q()$ de modo que se obtiene un modelo con umbral constante. Esto se da por ejemplo en el caso (frecuente) en que el umbral de indiferencia es un porcentaje del valor considerado, $q(g(x)) = \alpha\ g(x)$

Pseudo-orden (Roy y Vincke, 1984 y 1987). Este caso ocurre cuando existe una función real g sobre el conjunto de alternativas A y dos funciones no negativas de variable real, $q(),p() \geq 0$ denominadas *umbral de indiferencia* y *umbral de preferencia*, respectivamente, tal que se cumple el llamado *modelo con dos umbrales*

$$xPy \iff g(x) - g(y) > p(g(y))$$

$$xQy \iff g(y) + p(g(y)) \geq g(x) > g(y) + p(g(y))$$

$$xIy \iff \begin{cases} g(x) \leq g(y) + q(g(y)) \\ g(y) \leq g(x) + q(g(x)) \end{cases}$$

donde Q se denomina relación de *preferencia débil*, la cual según Roy, corresponde a una duda entre indiferencia y preferencia y no a una preferencia de menor intensidad. En este modelo R es vacía.

Las propiedades de las relaciones P, Q, I implicadas por este modelo dependen de ciertas condiciones de coherencia sobre los umbrales (Vincke 1980b y 1988). En particular se obtiene una *estructura de pseudo-orden* cuando al modelo de dos umbrales se le impone (Roy y Vincke, 1984 y 1987)

$$\begin{aligned} g(x) > g(y) &\iff g(x) + q(g(x)) > g(y) + q(g(y)) \\ &\iff g(x) + p(g(x)) > g(y) + p(g(y)) \end{aligned}$$

Referencias

Dushnik, B.; Miller, E. (1941), "Partial order sets," *American Journal of Mathematics*, 63, 600-610

Fishburn, P. (1970), *Utility theory for decision making*, John Wiley & Sons, Inc, Nueva York

Golumbic, M. (1980), *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, Academic Press, Nueva York

Roy, B.; Vincke, Ph. (1984), "Relational systems of preference with one or more pseudo-criteria: some new concepts and results," *Management Science*, 30, 11, 1323-1335

Roy, B.; Vincke, Ph. (1987), "Pseudo-orders: definition, properties and numerical representation," *Mathematical Social Sciences*, 14, 2, 263 - 274

Szpilrajn, E. (1930), "Sur l'extension de l'ordre partiel," *Fundamenta Mathematicae*, 16, 386-389

Vincke, Ph. (1980), "Vrais, quasi, pseudo et précritères dans un ensamble fini: propriétés et algorithmes," *Cahier du Lamsade No 27*, Université Paris-Dauphine

Vincke, Ph. (1988), "(P,Q,I) preference structures," en *Nonconventional preference relations in decision making*," J. Kacprzyk; M. Roubens (Eds), Springer Verlag

Vincke, Ph. (1992), *Multicriteria decision-aid*, John Wiley & Sons, Chichester

5. ESTRUCTURAS DE PREFERENCIA MULTICRITERIO

El problema de toma de decisiones multicriterio puede formularse en los términos más generales considerando una función de elección asociada a cada criterio y una función de elección agregada que determina las preferencias entre alternativas. Se considera el caso tradicional en el que ambas clases de preferencias están determinadas por comparaciones por pares y por tanto por relaciones binarias. Se analiza el problema de la compensatoriedad entre criterios.

5.1 El problema de toma de decisiones multicriterio

Un problema de toma de decisiones $\langle A, C\rangle$ es *multicriterio* si existen dos o más funciones de elección sobre el conjunto A de alternativas, $C_1,\ldots,C_n$, cumpliéndose la condición de Pareto de que si una alternativa es elegida por todos y cada uno de los criterios entonces ella es elegida por C, es decir,

$$C_1(X) \cap \cdots \cap C_n(X) \subseteq C(X) \qquad \forall\, X \subseteq A \tag{5-1}$$

Por tener asociada una función de elección C_i, cada índice $i \in \{1,\ldots,n\} \equiv K$ es un criterio; la función C se denomina función de elección *agregada*. El problema de *agregación* del conjunto K de criterios consiste en determinar C a partir de las funciones de elección C_i, las cuales se suponen conocidas. La condición de Pareto es obviamente insuficiente para determinar C, aunque eventualmente la intersección $C_1(A) \cap \cdots \cap C_n(A)$ cuando no es vacía puede dar la solución del problema específico que se esté considerando. La agregación de criterios requiere entonces de suposiciones adicionales sobre la estructura de preferencia C que no están contenidas en el conjunto de funciones C_i.

Interesa el caso en que el conjunto A de alternativas es un producto cartesiamo de n factores A_i, uno para cada atributo $i \in \{1,\ldots,n\}$ y en que:

a) la función de elección C_i de cada criterio es generada por una relación binaria S_i sobre el factor correspondiente, A_i

b) la función de elección agregada C es también generada por una relación binaria sobre A, denotada por S.

5.2 Estructura de preferencia multicriterio

Una estructura de preferencia <A, I, P, R> es *multiatributo* sii el conjunto de alternativas A es un producto cartesiano de n conjuntos no vacíos, $A_1,\ldots,A_n$. Como antes, $S = P \cup I$ es la relación característica de esta estructura de preferencia.

Toda estructura de preferencia multiatributo <A, I, P, R> induce sobre cada componente A_i, $i \in K$, del producto cartesiano una estructura de preferencia $<A_i, I_i, P_i, R_i>$ cuya relación característica S_i es la inducida por S,

$$x_iS_iy_i \text{ sii } (x_i, a)S(y_i, a) \qquad \forall\, a \in \mathop{\times}_{j\neq i} A_j$$

la cual es reflexiva (por ser S reflexiva), y donde por definición I_i, P_i y R_i son las partes simétrica, asimétrica y no comparable de S_i, respectivamente. Para cada criterio $i \in K$ estas relaciones se pueden determinar también de

$$x_iP_iy_i \text{ sii } (x_i, a)P(y_i, a_H) \qquad \forall\, a \in \mathop{\times}_{j\neq i} A_j$$

$$x_iI_iy_i \text{ sii } (x_i, a)I(y_i, a_H) \qquad \forall\, a \in \mathop{\times}_{j\neq i} A_j$$

$$x_iR_iy_i \text{ sii } (x_i, a)R(y_i, a_H) \qquad \forall\, a \in \mathop{\times}_{j\neq i} A_j$$

Para cada par alternativas $x,y \in A$ se definen los conjuntos

$$P(x,y) = \{i\in K:\ x_iP_iy_i\} \qquad \forall\, x,y \in A$$

$$P(y,x) = \{i\in K:\ y_iP_ix_i\} \qquad \forall\, x,y \in A$$

$$I(x,y) = \{i\in K:\ x_iI_iy_i\} \qquad \forall\, x,y \in A$$

$$R(x,y) = \{i\in K:\ x_iR_iy_i\} \qquad \forall\, x,y \in A$$

los cuales particionan el conjunto K de criterios, es decir,

$$K = P(x,y) + P(y,x) + I(x,y) + R(x,y)$$

y constituyen el llamado *perfil de preferencias sobre el par* x,y

5.3 Propiedades de las estructuras multicriterio

Sea $<A, I, P, R>$ una estructura de preferencia multiatributo. Por comodidad se usa la notación

$$A_J = \underset{j\in J}{\chi} A_j; \qquad J\neq\phi \qquad \forall\ J \subseteq K$$

Se definen las siguientes propiedades relacionadas con la independencia de criterios:

Un conjunto no vacío de criterios $J \neq \phi$ es:

(a) $J \subseteq K$ es *independiente* sii $\forall\ x,y \in A_J,\ a,b \in A_{K-J}$

$$(x,\ a)S(y,\ a) \Leftrightarrow (x,\ b)S(y,\ b)$$

(b) $J \subseteq K$ es *totalmente independiente** sii $\forall\ x,y \in A_J,\ a,a',b,b'\in A_{K-J}$

con $a_i I_i a'_i,\ b_i I_i b'_i\ \ \forall\ i \in K-J$,

$$(x,\ a)S(y,\ a') \Leftrightarrow (x,\ b)S(y,\ b')$$

En particular:

Un criterio $i \in K$ *es independiente* sii $\forall\ a,b \in A_M$, con $M = K - \{i\}$,

$$(x_i,\ a)S(y_i,\ a) \Leftrightarrow (x_i,\ b)S(y_i,\ b) \qquad \forall\ x_i,\ y_i\in A_i$$

Una estructura de preferencia multiatributo $<A, I, P, R>$ se denomina *multicriterio* sii cada uno de sus criterios es independiente y se denomina *independiente* (*totalmente independiente*) sii todo subconjunto no vacío de criterios es independiente (totalmente independiente, respectivamente).

La independencia de un conjunto de criterios equivale a que su relación característica S es condicionalmente independiente respecto del subconjunto de criterios considerado. Nótese que un conjunto de criterios totalmente independiente es necesariamente independiente, pero no al revés, y que los conceptos de independencia e independencia total coinciden cuando la indiferencia en cada uno de los criterios es antisimétrica ($x_i I_i y_i \Rightarrow x_i = y_i$).

Se observa que al comparar dos alternativas $x, y \in A$, el conjunto de criterios $I(x,y)$ en que ellas son indiferentes no juega ningún papel y puede ser ignorado siempre que el conjunto de criterios $K - I(x,y)$ sea totalmente independiente. Esto justifica decir que un subconjunto de criterios $L \subseteq K$ es *neutral* en una estructura de preferencia multicriterio $\langle A, I, P, R \rangle$ sii su complemento, $J = K - L$, es totalmente independiente. Una estructura de preferencia multicriterio es *independiente* (*totalmente independiente*) sii todo subconjunto de criterios es independiente (totalmente independiente, respectivamente).

Lema 5.1 Si $\langle A, I, P, R \rangle$ es una estructura de preferencia multicriterio entonces para cualquier conjunto de criterios $J \subseteq K$ y son equivalentes las afirmaciones:

1) $\forall\, x \in A_J,\ a, a' \in A_{K-J},\ [a_i I_i a'_i,\ \forall\, i \in K - J] \Longrightarrow (x, a) I (x, a')$

2) $\forall\, x \in A_J,\ a, a' \in A_{K-J},\ [a_i I_i a'_i,\ \forall\, i \in K - J] \Longrightarrow$ se excluyen

$$(x, a) P (x, a') \quad \text{y} \quad (x, a) R (x, a')$$

Además estas afirmaciones se cumplen si el conjunto de criterios J es totalmente independiente.

Demostración: La equivalencia resulta de que $(x, a) I (x, a')$ equivale a la negación de la preferencia $(x, a) P (x, a')$, la incomparabilidad $(x, a) R (x, a')$ y la preferencia $(x, a') P (x, a)$ (esta última es innecesario incluirla en el enunciado por la simetría de las indiferencias I_i). La independencia total del conjunto de índices $J \subseteq K$ implica que la parte simétrica de S cumple $(x, a) I (y, a') \Leftrightarrow (x, b) I (y, b')\ \forall\, x, y \in A_J$, $a, a', b, b' \in A_{K-J}$, con $a_i I_i a'_i$, $b_i I_i b'_i$ $\forall\, i \in K-J$; aplicando esto a $(x, a) I (x, a)$, $a_i I_i a_i$ $\forall\, i \in K-J$, que se cumplen por la reflexividad de las indiferencias, la condición $a_i I_i a'_i$ $\forall\, i \in K-J$ lleva a $(x, a) I (x, a) \Longrightarrow (x, a) I (x, a')$. ∎

La situación

$$(x,\ a)P(x,\ a') \text{ con } a_i I_i a'_i,\ i \in K - J,\ x \in A_J$$

(que viola la independencia total del conjunto J de criterios,) indica que el conjunto de criterios K - J no es neutral en la comparación de las alternativas (x, a), (x, a') $\in$ A; puede interpretarse como que la conjunción de ventajas "imperceptibles" en *distintos* criterios crea un efecto global de preferencia. Este fenómeno, de naturaleza multicriterio, se explica en términos de umbrales de percepción de la preferencia de forma similar a la intransitividad de la indiferencia monocriterio (que se manifiesta cuando se llega a percibir una preferencia entre las alternativas extremas de una sucesión en que cada alternativa se percibe indiferente a sus vecinas). Cuando esto ocurre la indiferencia global I resulta intransitiva.

Teorema 5.1 Si <A, I, P, R> es una estructura de preferencia multicriterio totalmente independiente, entonces se cumple cualquiera de las afirmaciones, las cuales son equivalentes

1) $x_i I_i y_i \ \forall\, i \in K \implies xIy \qquad \forall\, x,y \in A$

2) $\forall\, J \subseteq K,\ x \in A_J,\ a,a' \in A_{K-J}$, se excluyen las situaciones

$$(x,\ a)P(x,\ a') \ \text{ y } \ (x,\ a)R(x,\ a'),\ \text{con } a_i I_i a'_i,\ i \in K - J$$

Demostración: Inmediato del *lema 1*. ∎

Para las afirmaciones del *teorema 5.1* es necesaria la independencia total, pues en una estructura multicriterio es posible que entre dos alternativas $x,y \in A$ haya indiferencia respecto de todos los criterios, $x_i I_i y_i \ \forall\, i{\in}K$ ($\Leftrightarrow I(x,y) = K$), y al mismo tiempo que una sea preferida a la otra, xPy, o bien que ellas no sean comparables, xRy, como se muestra en el siguiente ejemplo, en el que $A_1 = \{a,b\}$, $A_2 = \{c,d\}$, donde las $|A|$ = 2x2 = 4 alternativas están relacionadas preferencialmente como sigue

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \mathrm{I} \begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a\\d\end{pmatrix} \mathrm{I} \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}}_{a\ \mathrm{I}_1 b}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \mathrm{I} \begin{pmatrix}a\\d\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} \mathrm{I} \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}}_{c\ \mathrm{I}_2 d}, \quad \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \mathrm{P} \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a\\d\end{pmatrix} \mathrm{R} \begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}$$

Nótese que la indiferencia global I es intransitiva:

$$\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \mathrm{I} \begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} \mathrm{I} \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} \text{ pero } \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \mathrm{P} \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}a\\d\end{pmatrix} \mathrm{I} \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} \mathrm{I} \begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} \text{ pero } \begin{pmatrix}a\\d\end{pmatrix} \mathrm{R} \begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}$$

Una estructura de preferencia multicriterio <A, I, P, R> es *monótona* si cumple la propiedad

monotonía: para todo $i \in K$ y para todo $x,y \in A$ tal que xPy

(*por la izquierda*) $\quad z_i P_i x_i \Rightarrow (z_i, (x_j)_{j\neq i})Py \qquad \forall\, z_i \in A_i$

(*por la derecha*) $\quad y_i P_i w_i \Rightarrow xP(w_i, (y_j)_{j\neq i}) \qquad \forall\, w_i \in A_i$

Teorema 5.2 Toda estructura de preferencia multicriterio <A, I, P, R> monótona satisface:

1) la relación de preferencia P_i de cada criterio i es transitiva
2) $x_i P_i y_i$ $\forall\, i \in K$ ($\Leftrightarrow P(x,y) = K$) implica xPy

Demostración: 1): Sean $x,y,z \in A_i$ tales que xP_iy, yP_iz y $a \in \times_{j\neq i} A_j$. Por la independencia de S para el criterio i, yP_iz implica $(y,a)P(z,a)$; aplicando la propiedad de monotonía por la izquierda al par de afirmaciones $(y,a)P(z,a)$, xP_iy resulta $(x,a)P(z,a)$, de donde xP_iz. 2): Por independencia $x_1P_1y_1 \Rightarrow (x_1,y_2,\ldots,y_n)P(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, de $x_2P_2y_2$ y monotonía se puede sustituir la y_2 del lado izquierdo por x_2 manteniéndose la relación P, y así sucesivamente hasta llegar a $(x_1,x_2,\ldots,x_n)P(y_1,y_2,\ldots y_n)$. ∎

Una estructura de preferencia multicriterio <A, I, P, R> cumple la propiedad de:

sustitubilidad: para todo $i \in K$ y para todo $x,y \in A$ tal que xPy

(por la izquierda)	$z_i I_i x_i \Rightarrow (z_i, (x_j)_{j\neq i})Py$	$\forall\ z_i \in A_i$
(por la derecha)	$y_i I_i w_i \Rightarrow xP(w_i, (y_j)_{j\neq i})$	$\forall\ w_i \in A_i$

sustitubilidad completa: para todo $i \in K$ y para todo $x,y \in A$ tal que xSy

(por la izquierda)	$z_i I_i x_i \Rightarrow (z_i, (x_j)_{j\neq i})Sy$	$\forall\ z_i \in A_i$
(por la derecha)	$y_i I_i w_i \Rightarrow xS(w_i, (y_j)_{j\neq i})$	$\forall\ w_i \in A_i$

Teorema 5.3 Si una estructura de preferencia multicriterio <A, I, P, R> cumple la propiedad de sustitubilidad completa entonces:

1) para todo $i \in K$ y para todo $x,y \in A$ tal que xIy

$$z_i I_i x_i \Rightarrow (z_i, (x_j)_{j\neq i})Iy \qquad \forall\ z_i \in A_i$$

$$y_i I_i w_i \Rightarrow xI(w_i, (y_j)_{j\neq i}) \qquad \forall\ w_i \in A_i$$

2) cumple la propiedad de sustitubilidad

3) $x_i I_i y_i \ \ \forall\ i \in K \implies xIy \qquad \forall\ x,y \in A$

Demostración: 1): xIy significa xSy, ySx, por lo que $z_i I_i x_i \Rightarrow (z_i, (x_j)_{j\neq i})Sy$, $yS(z_i, (x_j)_{j\neq i})$, es decir, $(z_i, (x_j)_{j\neq i})Iy$. 2): xPy significa xSy, $yS^{-}x$, por lo que $z_i I_i x_i \Rightarrow (z_i, (x_j)_{j\neq i})Py$, pues si además $yS(z_i, (x_j)_{j\neq i})$ sustituyendo $z_i I_i x_i$ se tendría ySx, que contradice $yS^{-}x$. 3): Sustituyendo $x_i I_i y_i$ $\forall\ i \in K$ en xIx las veces que se requiera, por 1) se llega a xIy. ∎

Es inmediato que la sustitubilidad completa equivale a la sustitubilidad más la propiedad 1) del *teorema 5.3*, y que cuando la estructura de preferencia multicriterio es completa ($R = \phi$) entonces la sustitubilidad y la sustitubilidad completa coinciden.

Teorema 5.4 Si una estructura de preferencia multicriterio <A, I, P, R> es independiente y cumple la propiedad de sustitubilidad completa, entonces es totalmente independiente

Demostración: 1) Sustituyendo $aI_{K-J}a'$ por la derecha en $(x, a)S(y, a')$, por la condición de independencia (A) y sustituyendo $bI_{K-J}b'$ por la derecha en $(x, b)S(y, b)$, respectivamente, se tiene $(x, a)S(y, a') \Leftrightarrow (x, a)S(y, a) \Leftrightarrow (x, b)S(y, b) \Leftrightarrow (x, b)S(y, b')$. ∎

Una alternativa x *domina* a una alternativa y, que se denota por xDy, sii $x_iS_iy_i$ $\forall$ $i \in K$, y $x_jP_jy_j$ para algún $j \in K$, o equivalentemente, sii $P(x,y) \neq \phi$, $P(y,x) = \phi$ y $R(x,y) = \phi$. Una alternativa es *eficaz* sii ninguna otra alternativa la domina. Si la relación de dominancia es vacía el conjunto de alternativas eficaces es todo el conjunto A. El siguiente teorema da las condiciones en que tiene sentido considerar alternativas eficaces.

Teorema 5.5 Si una estructura de preferencia multicriterio $\langle A, I, P, R\rangle$ monótona cumple la propiedad de sustitubilidad entonces

1) (ley de Pareto) $xDy \Rightarrow xPy$

2) para cada criterio $i \in K$ la indiferencia I_i es transitiva

y si además cumple la propiedad de sustitubilidad completa entonces

3) $x_iS_iy_i$ $\forall$ $i \in K \Rightarrow yP^-x$

Demostración: 1): Sea xDy; entonces $P(x,y) \neq \phi$, $P(y,x) = \phi$; por independencia de los criterios y usando monotonía las veces que se requiera, $(x_{P(x,y)}, y_{I(x,y)})Py$, y por sustitubilidad resulta xPy. 2): Por monotonía (B), P_i es transitiva, y por tanto la transitividad de I_i equivale a que $I_iP_i \subseteq P_i$, $P_iI_i \subseteq P_i$; para demostrar estas dos propiedades sean $x,y,z \in A_i$ tales que xI_iy, yP_iz y $w \in \chi_{j\neq i}A_j$; por la independencia del criterio i, yP_iz implica $(y,w)P(z,w)$; aplicando sustitubilidad al par de afirmaciones $(y,w)P(z,w)$, xI_iy resulta $(x,w)P(z,w)$, de donde por la independencia del criterio i, xP_iz, es decir, $I_iP_i \subseteq P_i$; similarmente, si xP_iy, yI_iz entonces por independencia, xP_iy implica $(x,w)P(y,w)$, y aplicando sustitubilidad al par de afirmaciones $(x,w)P(y,w)$, yI_iz resulta $(x,w)P(z,w)$, de donde por independencia, xP_iz, es decir, $P_iI_i \subseteq P_i$. 3): Si $x_iS_iy_i$ $\forall$ $i \in K$ entonces se tienen los siguientes casos: existe algún criterio $\imath$ para el cual $x_\imath P_\imath y_\imath$, en cuyo caso xDy y por 1) xPy, que implica yP^-x; si no existe tal criterio entonces $x_\imath I_\imath y_\imath$ $\forall$ $\imath\in$K, por lo que por 3) del *teorema 5.3* xIy, y por tanto yP^-x .∎

Una estructura de preferencia multicriterio <A, I, P, R> es de *criterios completos* si cumple la propiedad

D) *completez (de los criterios)*: $S_\imath$ es completa para todo $\imath\in$ K

Teorema 5.6 Si una estructura de preferencia multicriterio <A, I, P, R> es totalmente independiente, de criterios completos y cumple las propiedades de monotonía y sustitubilidad completa, entonces para todo $x,y \in$ A se cumple

1) xP$y \Rightarrow x_\imath P_\imath y_\imath$ para algún $\imath\in$ K

Demostración: 1): Por contradicción: si P(x,y) = ϕ y xPy entonces I(x,y) < K (porque si I(x,y) = K por 1) del *teorema 5.1*, que requiere la independencia total de la estructura de preferencia, se tendría xIy) y por tanto por completez de los criterios |R(x,y| = 0 y por tanto |K| = |P(y,x)| + |I(x,y)|, por lo que P(y,x) ≠ ϕ; en estas condiciones por las propiedades de independencia y monotonía, ($y_{P(y,x)}$, $x_{I(x,y)}$)Px, y aplicando sucesivamente la propiedad de sustitubilidad para los criterios $\imath\in$I(x,y) resulta yPx, que contradice que xPy.∎

En el enunciado del *teorema* anterior se puede sustituir "independencia total" por "independencia" ya que, por el *teorema 5.4*, la primera es implicada por la conjunción de la segunda con la sustitubilidad completa.

5.4 Estructuras de preferencia multicriterio no compensatorias

Sea una estructura de preferencia multicriterio <A, I, P, R> en que todos los criterios son completos (es decir, R(x,y) = ϕ para todo par de alternativas $x,y \in$ A) y que el conjunto de criterios I(x,y) es neutral en la comparación de las alternativas x,y. Al no intervenir los conjuntos I(x,y), R(x,y) en la comparación de las alternativas, es natural simplificar la definición de perfil de preferencias sobre el par

x,y, a los conjuntos $P(x,y)$, $P(y,x)$, y definir que dos pares de alternativas (x,y), $(z,w) \in A \times A$ tienen *el mismo perfil preferencial* sii $(x,y)M(z,w)$, donde M es una relación simétrica sobre $A \times A$ dada por

$$(x,y)M(z,w) \text{ sii } P(x,y) = P(z,w) \text{ y } P(y,x) = P(w,z)$$

Sobre los pares de subconjutos ajenos de criterios $\alpha, \beta \subseteq K$ se definen las relaciones binarias $>>$, "más importante que", $\gtrsim\gtrsim$ "al menos tan importante como" y $==$, "igualmente importante que", dadas por

$$\alpha >> \beta \text{ sii } \alpha \cap \beta = \phi,\ P(x,y) = \alpha,\ P(y,x) = \beta \Longrightarrow xPy$$
$$\alpha \gtrsim\gtrsim \beta \text{ sii } \alpha \cap \beta = \phi,\ P(x,y) = \alpha,\ P(y,x) = \beta \Longrightarrow xSy$$
$$\alpha == \beta \text{ sii } \alpha \cap \beta = \phi,\ P(x,y) = \alpha,\ P(y,x) = \beta \Longrightarrow xIy$$

Una estructura de preferencia multicriterio <A, I, P, R> es *no compensatoria* (Bouyssou, D, 1986) sii

$$(x,y)M(z,w) \Rightarrow \begin{cases} [xPy \Rightarrow wS^{-}z] \\ xIy \Rightarrow wP^{-}z,\ zP^{-}w \end{cases} \qquad \forall\ x,y,z,w \in A$$

o equivalentemente, sii

$$(x,y)M(z,w) \Rightarrow \begin{cases} xPy \Rightarrow zPw \text{ ó } zRw \\ xIy \Rightarrow zIw \text{ ó } zRw \end{cases} \qquad \forall\ x,y,z,w \in A$$

y es *totalmente no compensatoria* (Fishburn, 1976, la llama "no compensatoria") sii

$$(x,y)M(z,w) \Rightarrow [xSy \Rightarrow zSw] \qquad \forall\ x,y,z,w \in A$$

o equivalentemente, sii

$$(x,y)M(z,w) \Rightarrow \begin{cases} xPy \Rightarrow zPw \\ xIy \Rightarrow zIw \end{cases} \qquad \forall\ x,y,z,w \in A$$

Es inmediato que si una estructura de preferencia multicriterio es totalmente no compensatoria entonces es no compensatoria, y que ambos conceptos coinciden si la estructura es completa (no se dan las incomparabilidades). Si una estructura es no compensatoria, entonces es totalmente independiente. Una estructura es *compensatoria* sii no es no compensatoria.

Cuando una esructura de preferencia multicriterio es totalmente no compensatoria se produce una relación de importancia sobre subconjuntos ajenos de criterios. Fishburn (1976) demuestra:

Teorema 5.7 Una estructura de preferencia multicriterio $<A, I, P>$ completa ($R = \phi$) es totalmente no compensatoria sii $\phi == \phi$, $\{i\} >> \phi$ $\forall$ $i \in K$, y para todo α, $\beta \subseteq K$ tal que $\alpha \cap \beta = \phi$ se cumple exactamente uno, $\alpha >> \beta$, $\beta >> \alpha$ ó $\alpha == \beta$.

5.5 Diferencia neta de evaluación

Como antes $K = \{i,\dots,n\}$ es el conjunto de todos los criterios que intervienen y considérese un modelo general aditivo definido en el anexo B. Se define la *diferencia neta en la evaluación* de dos alternativas **x,y** *respecto de un subconjunto arbitrario de criterios* $I \subseteq K$ mediante

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y};I) = \sum_{i \in I} |p_i(x_i,y_i)| \qquad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ I \subseteq K$$

(que es una norma $l^{n'}$, donde n' es el número de elementos de I) donde cada $p_i(,)$ es una función cuasisimétrica,

$$p_i(x_i,y_i) = -\,p_i(y_i,x_i) \qquad \forall\ x_i,y_i \in A_i$$

En estos términos se puede definir un índice de credibilidad $c(,)$ por

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{d(\mathbf{x},\mathbf{y};P(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{d(\mathbf{x},\mathbf{y};K)} \qquad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

donde los conjuntos de criterios P (x,y), P(y,x) están dados por

$$P(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left\{i:\ \sum p_i(x_i,y_i) > 0\right\} \qquad \mathbf{x},\mathbf{y} \in A$$

$$P(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \left\{i:\ \sum p_i(x_i,y_i) < 0\right\} \qquad \mathbf{x},\mathbf{y} \in A$$

La diferencia neta *total* $d(\mathbf{x},\mathbf{y},K)$ en la evaluación de dos alternativas, $\mathbf{x},\mathbf{y}$, es la suma de las diferencias netas correspondientes a dos conjuntos ajenos de criterios, el conjunto en que $\mathbf{x}$ es mejor que $\mathbf{y}$, $P(\mathbf{x},\mathbf{y})$, y el conjunto $P(\mathbf{y},\mathbf{x})$ en que $\mathbf{y}$ es mejor que $\mathbf{x}$,

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y},K)= d(\mathbf{x},\mathbf{y},P(\mathbf{x},\mathbf{y})) + d(\mathbf{x},\mathbf{y},P(\mathbf{y},\mathbf{x}))$$

En esta situación $c(\mathbf{x},\mathbf{y})$ es la proporción en que el conjunto $P(\mathbf{x},\mathbf{y})$ de criterios en que $\mathbf{x}$ es mejor que $\mathbf{y}$ contribuye a la diferencia neta total entre las alternativas $\mathbf{x},\mathbf{y}$. Es claro que $\mathbf{x}$ domina a $\mathbf{y}$ en sentido de Pareto si y solo si $c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$

Referencias

Bouyssou, D. (1986), "Some remarks on the notion of compensation in MCDM," *European Journal of Operational Research*, 26, 1, 150-160

Fishburn, P. (1976), "Noncompensatory preferences," *Synthese*, 33, 393 - 403

6. ASPECTOS PRACTICOS DE LA AYUDA A LA DECISION

En la toma de decisiones ocurre lo que es frecuente en las ciencias aplicadas cuando se pasa de la teoría a la práctica: la teoría es insuficiente para resolver los problemas, y los modelos aunque útiles dan una imagen poco exacta de los que ocurre en la realidad, debiendo complementarlos con conocimiento empírico. Se da una breve reseña de algunos aspectos prácticos de la ayuda a la decisión individual y en grupo.

6.1 Estructuración de un problema de toma de decisiones

> "...haremos un mejor trabajo si, antes de empezar, preguntamos cuáles son nuestras metas y qué preguntas estamos tratando de contestar."
> Herbert Simon [1990, pp 13].

Estructurar un problema de toma de decisiones requiere:

(a) *formular el problema*: es decir, responder *¿cuál es el problema?*;

(b) *identificar los objetivos de la decisión*: ellos son las respuestas a preguntas del tipo ¿para qué ...?;

(c) *identificar y posiblemente diseñar cursos de acción alternativos*: estos son medios para lograr los objetivos y responden a preguntas del tipo ¿cómo lograr el objetivo ...?;

(d) *estimar consecuencias*: la respuesta a ¿qué ocurriría si se llevara a cabo el curso de acción ...? es el *estimado de la consecuencia* del curso de acción considerado;

(e) *comparar preferencialmente las alternativas*: la respuesta a ¿qué alternativa tiene asociado el mejor estimado de consecuencias? es la solución del problema.

En la toma de decisiones intervienen elementos de carácter eminentemente subjetivo, que son las preferencias del decisor sobre las distintas consecuencias de las alternativas, y también elementos que es deseable sean lo más objetivos posible, que son el conocimiento sobre las alternativas disponibles y sus posibles consecuencias.

El decisor puede requerir ayuda en situaciones tales como: a) es necesario un esfuerzo importante para identificar o diseñar las alernativas (Ozernoy, 1985); b) es claro de qué alternativas se dispone pero se dificulta estimar las correspondientes consecuencias; c) se sabe qué alternativas están disponibles y sus consecuencias, pero las preferencias del decisor no son suficientemente claras como para arribar a una decisión; d) se requiere de una formulación del problema y de una guía metodológica para racionalizar el proceso de toma de decisiones. En las dos primeras situaciones la ayuda es proporcionada por un especialista (arquitecto, contador, ingeniero, médico, urbanista, etc) o grupo de especialistas que aportan el conocimiento objetivo necesario para tomar la decisión. En las dos últimas la ayuda es proporcionada por un planificador o analista en investigación de operaciones conocedor de los métodos de toma de decisiones.

Elegir el método de toma de decisiones más apropiado para resolver un determinado problema es a su vez un problema de toma de decisiones; en esta elección se debe buscar que las preguntas que tiene que reponder el decisor tengan sentido para él y estimulen su creatividad para imaginar nuevos cursos de acción y su sensibilidad para percibir sus propias preferencias. La elección del método de toma de decisiones prácticamente no ha sido tocada en la literatura, aunque hay proyectos de investigación en esta dirección. En la práctica pueden ensayarse separadamente varios métodos para aprovechar de cada uno las conclusiones que se consideren mejor fundamentadas, como la eliminación de unas alternativas por parte de otras.

6.2 Sistemas de soporte a la decisión

Los *sistemas de soporte a la decisión*, conocidos por sus siglas en inglés, *DSS* (*Decision Support Systems*), son sistemas de información interactivos basados en computadora que disponen de herramientas para formular y analizar problemas de toma de decisiones (Sprague *et al*,

1982) . Estos sistemas pueden estar dirigidos a decisiones individuales o en grupo, y en este último caso contener programas para ayudar a cada miembro a decidir su posición respecto del problema en consideración.

(Es de mencionar la inconformidad de French (1992) por la proliferación en el mercado de paquetes de cómputo que se anuncian como DSS pero que no manejan aspectos preferenciales de la toma de decisiones y que se reducen a simples hojas de cálculo, manejadores de bases de datos o sistemas de información. Con cierto humor French argumenta que si todo lo que ayuda a tomar decisiones llevara el apelativo DSS, entonces un compilador de COBOL se podría anunciar como un DSS infinitamente configurable.)

Los sistemas de soporte a la decisión individual o *IDSS* (*Individual Decision Support Systems*) proporcionan al tomador de decisiones una guía metodológica y herramientas de manejo y presentación de información que le facilitan la formulación y análisis de problemas de toma de decisiones multicriterio. Los IDSS existentes se limitan a un determinado tipo de modelo de preferencia y no dan sugerencias sobre otros que podrían ser tanto o más apropiados considerando características específicas del problema, como la clase de información preferencial que el decisor puede proporcionar y la naturaleza matemática del conjunto de alternativas (conjunto finito, región continua, convexa, etc.). Para superar esta limitación se requerirá una visión global y objetiva de los métodos disponibles con sus ventajas y limitaciones, al margen de las rivalidades entre las diversas escuelas de toma de decisiones multicriterio.

Como ilustración de un IDSS se tiene el de Malakooti (1993), considerado como uno de los más avanzados dentro de la línea utilitarista, el cual es multicriterio, maneja problemas bajo certeza e incertidumbre y ayuda a agrupar y jerarquizar objetivos. Este sistema consta de seis módulos: a) entrada de datos, asignación de funciones de utilidad y estadística; b) exploración de alternativas para varias definiciones de dominancia e información parcial; c) ordenación de alternativas usando funciones de utilidad cuadráticas convexas/cóncavas; d) módulo de métodos interactivos para encontrar la mejor alternativa según funciones de utilidad cuasicóncavas, cuasiconvexas y otras formas no lineales; e) extensiones a problemas bajo incertidumbre para matrices de pago; f) extensiones a problemas multicriterio jerárquicos, incluyendo descomposición y agregación de criterios.

Un sistema de soporte a la decisión en grupo o *GDSS* (*Group Decision Support Systems*) es un IDSS en red que cuenta con un subsistema de comunicación que conecta a todos los partipantes y que puede incluir (Jelassi, 1987):

a) interacciones cara-a-cara, donde los participantes pueden verse los rostros y con ello percibir sus reacciones (es más del gusto europeo que del estadounidense) e interacciones no-cara-a-cara;

b) sesiones síncronas, es decir, la participación interactiva tiene lugar al mismo tiempo (como en un sistema de teleconferencia) y sesiones asíncronas, es decir, la participación interactiva tiene lugar en diferentes tiempos a la conveniencia de los participantes (usando correo electrónico, por ejemplo);

c) los participantes están en un salón o separados geográficamente.

Los GDSS combinan los últimos avances de la informática y las comunicaciones. En México una empresa trasnacional dispone de una sala de toma de decisiones en grupo equipada según la filosofía GDSS, y Telmex cuenta con una sala de teleconferencias, la cual ha sido usada en las negociaciones del TLC.

En las decisiones en grupo se presentan una serie de efectos sicológicos sobre los participantes que afectan el desempeño global del mismo. Algunos opinan que el anonimato puede fomentar la generación de alternativas creativas, aunque también actitudes de irresponsabilidad, y según otros el anonimato en este tipo de reuniones es prácticamente imposible debido al mutuo conocimiento de opiniones y actitudes. Los GDSS permiten un mayor control de estos aspectos, para lo cual es importante aprovechar la psicología de la toma de decisiones en organizaciones, tema que se toca brevemente más adelante.

Cuando existen fuertes desacuerdos en intereses o valores entre miembros del grupo (en las negociaciones de la empresa y el sindicato, por ejemplo) resulta una clase especial de GDSS, los *sistemas de soporte a la negociación* o *NSS* (*Negotiation Support Systems*), los cuales incluyen entre los participantes un *mediador*, quien ayuda en la generación de soluciones de compromiso porque las partes en conflicto le dan información confidencial que le permite detectar puntos de acuerdo. En Jelassi *et al.* (1989) se encuentra un panorama general de este tipo de sistemas y de los paquetes de computadora existentes en el mercado. Raiffa (1982) ofrece una interesante exposición de la teoría y la práctica de la negociación, cubriendo aspectos cuantitativos y cualitativos y dando abundantes ejemplos que lo hacen atractivo a abogados, árbitros laborales, administradores de negocios diplomáticos y otros profesionales.

6.3 Los modelos y la toma de decisiones en las organizaciones

Las decisiones organizacionales (y en realidad también las individuales) son afectadas por una serie de factores de tipo práctico difícil de encuadrar en un marco conceptual. Así por ejemplo, el tiempo de que disponen los encargados de decidir y la necesidad de responder oportunamente a las condiciones cambiantes exteriores dejan fuera de lugar en la mayoría de las veces una búsqueda exhaustiva de alternativas o estimaciones suficientemente confiables de las consecuencias de éstas; no puede negarse sin embargo que dentro de las limitaciones del caso es deseable aproximarse en lo posible al concepto idealizado de lo que es una decisión "racional". La teoría de decisiones y sus modelos, de hecho se usan en la toma de decisiones organizacionales, no en sustitución de los decisores, que son los responsables de ellas, sino como elementos de análisis y de racionalización, como consta en la gran cantidad de artículos de aplicación que continuamente se publican.

Algunas técnicas de decisión en grupo usan modelos multicriterio (por el momento aditivos por ser los más simples) con el propósito de guiar y centrar las discusiones del grupo alrededor de los factores relevantes, su importancia relativa, *asegurarse que se toman en cuenta las opiniones de todos los participantes*, etc., lo cual frecuentemente lleva a una visión compartida del *qué hacer*, pasando entonces el modelo y los valores de sus parámetros a un lugar secundario después de cumplir su función. Con estas técnicas se construye un espacio de consecuencias común para los participantes y, aún cuando no se llegue a un consenso, frecuentemente ellos adquieren un entendimiento claro de los factores involucrados y por qué diferentes miembros prefieren diferentes acciones (Watson, 1987, pp 114). Para algunos autores esta forma de aplicar los modelos a las decisiones organizacionales será cada vez más importante en el futuro porque ayuda a estructurar el debate y a evitar efectos negativos del "groupthink" (ver *6.4*). Además el modelo asegura al grupo que todos los asuntos importantes son considerados y da a cada uno la oportunidad de influir en la importancia asignada a cada asunto. Clough (1984) contiene una revisión de la teoría y la práctica de la toma de decisiones organizacional

Para muchos Simon es el más importante pensador de los últimos cuarenta años sobre la toma de decisiones en organizaciones; su idea más conocida, de la reacionalidad acotada (*bounded rationality*), resulta de su observación de que cuando un gerente toma decisiones administrativas típicamente no maximiza una función de utilidad sino que busca un curso de acción que le satisfaga y no tanto que sea óptimo (Simon, 1957, 1960). Simon sostiene que las organizaciones deberían diseñarse de modo que esta conducta no las apartara de sus metas, e introduce la idea de *decisión programada*. Con los avances de la informática, y sin que se la mencione explícitamente, esta idea ha sido puesta en práctica en diversas situaciones; así, la decisión de aprobar o rechazar solicitudes de tarjetas de crédito usando modelos multicriterio en computadora es práctica usual de algunos bancos europeos.

6.4 Psicología de la toma de decisiones en organizaciones

La psicología social ha hecho contribuciones valiosas al entendimiento desde el punto de vista psicológico de cómo se toman las decisiones en las organizaciones; al respecto se puede consultar Janis y Mann (1977). Janis (1972) identificó un fenómeno, que denominó "groupthink", el cual muestra la existencia de una verdadera psicopatología de las decisiones en grupo. Janis considera que si un grupo de toma de decisiones:

a) es altamente cohesivo;
b) se encuentra aislado de diversas influencias externas;
c) no dipone de procedimientos para evaluar sistemáticamente las alternativas;
d) está sujeto a un líder;
e) se encuentra en condiciones de alta tensión;

entonces hay una tendencia al acuerdo (concurrence-seeking tendency) que él llama "groupthink", cuyos síntomas incluyen: (a) una ilusión de invulnerabilidad del grupo al error; (b) una creencia común en la moralidad del grupo; (c) presión directa sobre los disidentes a alinearse. El "groupthink" puede llevar a una toma de decisiones deficiente porque favorece entre otras fallas la búsqueda incompleta de cursos alternativos de acción, omisión de datos relevantes y sesgos en el procesamiento de la información disponible. Aunque el concepto de "groupthink" se desarrolló del análisis de la manera en que se tomaron decisiones en grandes crisis políticas, como la de los misiles cubanos, este fenómeno ocurre en muchos otros contextos.

Los psicólogos sociales que estudian la toma de decisiones se interesan en particular en cómo las presiones sociales afectan las decisiones que toma un individuo. Dos de tales presiones, identificadas por Janis y Mann (1977), son: arrepentimiento anticipado, asociado a una tendencia a preocuparse de lo decepcionados que nosotros y otros se podrían sentir si tomamos una decisión equivocada, y segundo, amenazas o restricciones impuestas por otros. Estas son influencias importantes sobre el tomador de decisiones que deben ser consideradas cuando se prescribe cómo usar la teoría de la decisión en la toma de decisiones en grupo.

Una implicación de la psicología social en la práctica de la toma de decisiones organizacional es la conveniencia de incluir en las reuniones de toma de decisiones un facilitador que ayude a evitar los efectos negativos del "groupthink".

6.5 La técnica de decisiones en conferencia

Para ilustrar el uso del análisis de decisiones en las organizaciones consideramos la técnica de decisiones en conferencia, "decision conferencing" (Kraemer y King, 1983). La idea es tomar un grupo de personas responsables de una decisión, como el Consejo de Administración de una compañía, y llevarlo fuera de su lugar usual de trabajo por dos o tres días y dedicar el tiempo a resolver su problema. Un analista versado en las ideas de la teoría de decisiones actúa como facilitador y explora con el grupo opciones, metas e incertidumbres; el analista es capaz de ayudarlos a crear lo que Philips (1984) llama "una realidad social compartida". Esto se intenta expresar en un modelo, involucrando posiblemente una función de utilidad multiatributo o un árbol de decisiones, que es producido con la ayuda de programas de computadora apropiados. Reproducimos algunas observaciones de Philips (1984, p.44) sobre esta técnica:

"La experiencia con decisiones en conferencia sugiere que el proceso de confrontación ayuda a los participantes a ampliar sus perspectivas individuales sobre el problema, cambiar sus puntos de vista, inventar nuevas opciones aceptables para todos, en breve, a generar un modelo que claramente represente todas las perspectivas. Pero ni los procesos de confrontación pueden prevenir sesgos en el modelo a través de la influencia de una variable siempre presente, el *clima* de la organización. Un complejo profundo de normas, valores, expectativas, lo aceptable y lo inaceptable, influyen en las decisiones a través de la organización, frecuentemente de manera provechosa pero algunas veces de manera negativa. Es aquí que el papel del analista puede dar alguna corrección a los efectos negativos del clima. El analista experimentado que ha trabajado con diferentes organizaciones tiene en primer lugar la perspectiva y la independencia para detectar y contrarrestar muchos de los sesgos que el clima puede introducir. Segundo, un analista que tiene una inversión mínima en las consecuencias de la decisión y que ha trabajado sus propios problemas fuera de la compañía crea un territorio razonablemente neutral, minimizando así los efectos del clima de la compañía. Este clima neutral ayuda al grupo a mantener un punto de vista más balanceado del problema, haciéndolo más impermeable a manipulaciones por individuos particularmente persuasivos. Por ejemplo, cuando el analista detecta intentos de manipulación del grupo puede pedir que las opiniones se manifiesten más en la forma escrita que en la oral".

Así, en una conferencia de decisión no se intenta construir algún tipo de representación objetivamente exacta del problema y entonces aplicar técnicas matemáticas para determinar la solución óptima, como podría hacerse en algunas versiones del análisis de sistemas. El modelo construido es más bien usado como un vehículo para discutir asuntos entre las partes interesadas.

Referencias

French, S. (1992), "OK, so just what is a decision support system?," *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 1, 125 (Editorial)

Clough, D. (1984), *Decisions in Public and Private Sectors*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, Nuava York

Janis, L. (1972), *Victims of groupthink*, Houghton - Mifflin Company, Boston

Janis, L. (1981), *Groupthink*, Houghton - Mifflin Company, Boston

Janis, I.; Mann, L. (1977), *Decision making: a psychological analysis of conflict, choice, and commitment*, Free Press, Nueva York

Jelassi, M.; Beauclair R. (1987), "An integrated framework for group decision support systems design," *Information and Management*, 13 143 -153

Jelassi, M.; Foroughi (1989), "Negotiation Support Systems: an overview of design issues and existing software," *Decision Support Systems*, 5 167 -181

Kraemer, K.; King, J. (1983), *Computer supported conference rooms*, Irvine: Public Policy Research Organization, University of California

Malakooti, B. (1993), "A decision support system for discrete multi-criteria problems: certainty, uncertainty, and hierarchical," *Applied Mathematics and Computation*, 54, 131-166

Ozernoy, V. (1985), "Generating alternatives in multiple criteria decision making problems: a survey," en Y. Haimes y V. Chankong (Eds.), *Decision making with multiple objetives*, Springer-Verlag 322-330

Philips, L. (1984), "A theory of requisite decision models," *Acta Psychologica*, 56, 29-48

Raiffa, H. (1982), *The art & science of negotiation*, Belknap/Harvard, Cambridge, USA

Simon, H.(1957), *Administrative Behavior: a study of decision-making processes in administive organization*, Macmillan, Nueva York

Simon, H.(1960), *The new science of management decision*, Harper & Row, Nueva York

Simon, H.(1990), "Prediction and prescription in systems modeling," *Operations Research*, 38, 1, 7-14

Sprague, R.; Carlson, E. (1982), *Bulding effective decision support systems*, Englewood Cliffs, NJ; Prentice - Hall

Swap, W. (1984), *Destructive effects of groups on individuals* en W. S. Swap (ed), *Group Decision Making*, Beverly Hills, Sage Publictions

Watson, S.; Buede, D. (1987), *Decision synthesis*, Cambridge University Press

7. CONCLUSIONES

La conceptualización de la toma de decisiones propuesta en el *Cap 2*, permite ubicar en un mismo marco de referencia enfoques muy distintos, como el de Arrow-Raynaud, en el que el planteamiento del problema multicriterio es enteramente ordinal al considerar únicamente el perfil de preferencias asociado a los criterios, y el de Keeney-Raiffa, de teoría de utilidad multiatributo, que es cardinal y considera explícitamente el riesgo. Esto es posible gracias a dos conceptos, el de estructura de preferencia, que se maneja de una manera más amplia de lo usual para incluir preferencias especificadas por modelos cuantitativos o funciones de elección, y el concepto de espacio de consecuencias, no usado explícitamente en la literatura, que permite precisar los casos de decisiones bajo certeza, incertidumbre, riesgo, basadas en el perfil de preferencias, etc., respectivamente.

Las dos relaciones valuadas de preferencia que se proponen en el *Anexo B*, denominadas índices de intensidad y de credibiliad de preferencia, respectivamente, están asociadas a un modelo aditivo general de referencia y califican el grado en que una alternativa es mejor que otra. Estos índices tienen la propiedad de que los extremos de sus escalas corresponden biunívocamente con dominancias de Pareto, por lo que resultan independientes del modelo de agregación de criterios y por tanto son un máximo teórico de credibilidad o decidibilidad en que una alternativa multicriterio es mejor que otra. Por simetría los puntos medios de las escalas corresponden con la indiferencia entre alternativas. La aplicación de estos índices es en particular válida para modelos más realistas que el de utilidad y que han sido totalmente ignorados en las aplicaciones de toma de decisiones, como el de Morrison y Tversky.

Los índices que se proponen no son desde luego aplicables en decisiones en que el análisis del impacto de las alternativas sobre los distintos criterios se realiza en términos solamente cualitativos. Pero por otro lado, como es sabido, el modelo cuantitativo de preferencia multicriterio más usado a nivel nacional y mundial es sin lugar a dudas el aditivo, por lo que tales indicadores podrán tener un uso muy amplio. Así por ejemplo, para decidir la compra de equipos técnicamente complejos, que deben ser evaluados desde numerosos puntos de vista, ciertas dependencias de PEMEX y CFE a lo largo de los años han llegado a establecer procedimientos de evaluación de adquisiciones con base en modelos aditivos. En estos casos sus sistemas manuales y de cómputo requerirán solamente pequeños cambios para que incluyan las relaciones valuadas de preferencia propuestas, con lo cual habrá una mayor confianza en los resultados porque se podrán detectar las comparaciones dudosas que requieren una revisión más detallada.

En esta disertación se introduce una propiedad nueva, con más requerimientos que la independencia entre criterios, denominada independencia total (*sec 5.3*), la cual debe cumplirse para que al comparar dos alternativas, el conjunto de criterios en que ellas son indiferentes no juegue ningún papel, sea neutral en las comparaciones y pueda ser ignorado. Esta neutralidad es usada explícitamente por algunos métodos multicriterio sin una justificación teórica. Por otro lado, cuando no se cumple la independencia total no se puede asegurar la transitividad de la indiferencia y puede darse un fenómeno de naturaleza multicriterio, consistente en que la conjunción de ventajas "imperceptibles" en distintos criterios puede crear un efecto global de preferencia, fenómeno que se puede explicar en términos de umbrales de percepción de la preferencia para los distintos criterios.

Como líneas de investigación futuras, relacionadas con el tema de esta disertación, se tienen las siguientes:

Sobre el modelo de intensidad, que en general no es desacoplable, introducido en la *sec 2.2.4*, y que tiene como caso particular el conocido modelo de utilidad, se puede considerar el problema de su axiomatización, es decir, de encontrar un conjunto de propiedades que deben cumplir las preferencias del decisor para que ellas puedan representarse con este modelo. Esto no se ve tarea fácil porque el modelo además de poder representar preferencias no transitivas también es capaz de considerar que los criterios son compensatorios, no compensatorios o compensatorios localmente.

Una investigación basada en las relaciones de preferencia valuadas, en un contexto amplio como el de la *sec 3.7*, y que podría ampliar considerablemente el estado de conocimiento de la toma de decisiones multicriterio, es intentar unificar y contener como casos particulares a los dos enfoques más importantes actualmente, el utilitarista y el de relaciones binarias de sobreclasificación. Tal unificación se ve en principio posible por este camino, porque los modelos basados en preferencias valuadas pueden ser más realistas y llevar a una visión más general del modelado de las preferencias. Una primera etapa de esta investigación podría consistir en verificar la posibilidad teórica de la siguiente suposición, la cual se menciona en la literatura sin más apoyo que la intuición, y que podría llevar a entender mejor el proceso de aprendizaje del decisor en el conocimiento de sus propias preferencias: el enfoque de relaciones binarias de sobreclasificación admite que las preferencias sean poco claras para el decisor e incompletas, en el sentido que para algunos pares de alternativas no se sabe cuál es mejor, por lo que los modelos usados por este enfoque son más apropiados al inicio del aprendizaje. El enfoque utilitarista en cambio supone que el decisor logra discriminar perfectamente cuál es la mejor de dos alternativas cualesquiera y que es perfectamente racional, esencialmente transitivo en sus preferencias, por lo que al final del aprendizaje sus preferencias podrían ser representadas por un modelo utilitarista. Se intentaría describir el proceso de aprendizaje como una transformación, posiblemente continua, que lleve de un tipo de modelo al otro. Como ilustración de esta posibilidad puede verse la *sec 2.2.4*, donde se muestra que una función (binaria) de intensidad puede ser obtenida de una de utilidad.

Otros temas de futuras investigaciones podrían ser los siguientes:

a) investigar la aplicabilidad de los índices binarios de preferencia propuestos, al método de jerarquización analítica de Saty;
b) desarrollar índices de credibilidad e intensidad de preferencia para modelos de relaciones binarias sobreclasificación del tipo de los ELECTRE;
c) explorar la aplicabilidad de las relaciones valuadas de preferencia en los sistemas de soporte a la decisión.

ANEXO A. RELACIONES

A.1 Relaciones sobre un producto cartesiano

El *producto cartesiano* de los conjuntos no vacíos $A_1,\dots,A_n$, denotado por $A_1 x\dots x\ A_n$, o bien por $\chi_{i\in K} A_i$, donde $K = \{1,\dots,n\}$, es el formado por conjuntos ordenados de la forma $(a_1,\dots,a_n)$, $a_i \in A_i$, denominados *n*-adas:

$$A_1 x\dots x\ A_n = \{(a_1,\dots a_n):\ a_1 \in A_1,\dots,a_n \in A_n\}$$

El conjunto A_i es el i-ésimo *componente* de este producto cartesiano. Una *relación* es un subconjunto de un producto cartesiano. La *n*-ada $(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots a_n)$ de una relación o de un producto cartesiano se abrevia por $(x_i,(a_j)_{j\neq i})$. El conjunto ordenado de los i-ésimos componentes x_i, $i \in M \subseteq K$, de una *n*-ada, donde $|M| \leq n$, es un elemento de $\chi_{i\in M} A_i$ y eventualmente se representa por $(x_i)_{i\in M}$ o bien por x_M.

Una relación $S \subseteq A_1 x\dots x\ A_n$ es (*condicionalmente*) *independiente* respecto de un conjunto $M \subseteq K$ de componentes sii $\forall\ x,\ y \in \underset{j\in M}{\chi} A_j$ se cumple que si $(x,\ a)S(y,\ a)$ para algún $a \in \underset{j\in K-M}{\chi} A_j$, entonces $(x,\ b)S(y,\ b)$ $\forall\ b \in \underset{j\in K-M}{\chi} A_j$

La *relación inducida sobre* $\chi_{i\in M} A_i$, $M \subseteq K$, por $S \subseteq A_1 x\dots x\ A_n$, S_M, se define por

$$x_M S_M y_M \text{ sii } (x_M,\ a_{K-M})S(y_M,\ a_{K-M}) \qquad \forall\ a_{K-M}\in \underset{j\notin M}{\chi} A_j$$

En particular $S_K = S$. Una relación $S \subseteq A_1 x\dots x\ A_n$ es *independiente* si todo subconjunto de componentes $M \subseteq K$ es independiente, es decir, $\forall\ M\subseteq K$

$$(x_M,\ a_{K-M})S(y_M,\ a_{K-M}) \Leftrightarrow (x_M,\ b_{K-M})S(y_M,\ b_{K-M}) \qquad \forall\ x_M,\ y_M\in \underset{j\in M}{\chi} A_j$$

o equivalentemente, sii (Krantz *et al*, 1971, p 301) para todo $M \subseteq K \equiv \{1,\dots,n\}$ la relación inducida por S sobre $\chi_{i\in M} A_i$ para elecciones fijas

$a_i \in A_i$, $i \in K - M$, dada por

$$x_M S_M y_M \text{ sii } (x_M, a_{K-M}) S (y_M, a_{K-M}) \qquad a_{K-M} \in \mathop{\times}_{j \notin M} A_j$$

no es afectada por tales elecciones. Cuando S es independiente la relación S_M inducida sobre $\times_{i \in M} A_i$ hereda de S las siguientes propiedades (ver apartado *3*): simetría, asimetría, antisimetría, transitividad, negatividad transitiva, reflexividad, irreflexividad, conexidad, conexidad débil.

A.2 Algebra de relaciones binarias

En una relación *binaria* $R \subseteq A \times B$ los conjuntos A y B se llaman *dominio* y *codominio* de la relación, respectivamente; aRb es una abreviatura de $(a,b) \in R$. Cuando el dominio y el codominio coinciden se dice que la relación binaria es *sobre* (o *en*) este conjunto.

Sobre el producto cartesiano A x B se tiene la *relación universal* U = A x B, la *relación vacía* $\phi \subseteq A \times B$, las operaciones de *unión* e *intersección* de relaciones, que se definen por la unión, $\cup$, e intersección, $\cap$, de los respectivos conjuntos, y para cada $R \subseteq A \times B$ se define su relación *complemento*, $R^- = U - R \subseteq A \times B$ y su relación *inversa*, $R^{-1} = \{(b,a)\colon aRb\} \subseteq B \times A$. Si $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ entonces la *relación producto* $RS \subseteq A \times C$ y la *relación suma* $R + S \subseteq A \times C$ de las relaciones R y S se definen por

$$\textit{producto:} \qquad RS = \{(a,c)\colon \exists\, b \in B \text{ tal que } aRb \text{ y } bSc\}$$
$$\textit{suma:} \qquad R + S = \{(a,c)\colon \forall\, b \in B\ aRb \text{ y } bSc\}$$

las cuales no son en general conmutativas. Para las relaciones binarias sobre un conjunto A se define la *relación diagonal*, $\Delta = \{(a,a)\colon \forall\, a \in A\}$, la *relación dual* de $R \subseteq A \times A$, $R' = (R^-)^{-1} = (R^{-1})^-$, y las siguientes relaciones sobre A

$$R^1 = R, \quad R^k = R\,R^{k-1} \qquad \text{para } k = 2,3,\ldots$$
$$1\,R = R, \quad k\,R = (k-1)R + R \text{ para } k = 2,3,\ldots$$

Considerando dominios y codominios apropiados para las relaciones se pueden demostrar las siguientes propiedades (algunas demostraciones se encuentran en Chipman, 1965 y en Makarov *et al.*, 1987):

1) $R(ST) = (RS)T \equiv RST$ (asociatividad)

2) $R\,\phi = \phi, \quad \phi\, R = \phi$

3) $R\,\Delta = R; \quad \Delta\, R = R$

4) $(R \subseteq S,\ T \subseteq V) \Rightarrow RT \subseteq SV; \quad A \subseteq B \Rightarrow A^2 \subseteq B^2$

5) $(R \subseteq S,\ T \subseteq V) \Rightarrow R + T \subseteq S + V$

6) $R^{-1} \subseteq S^{-1} \Leftrightarrow R \subseteq S$

7) $R \subseteq S \Rightarrow TRV \subseteq TSV$ (homogeneidad)

8) $R(S \cup T) = RS \cup RT$, y en general para un número finito o contable de uniones $\left(\bigcup_i R_i\right)\left(\bigcup_i S_i\right) = \bigcup_i R_i S_i$

9) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$, $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

10) $R(S \cap T) = RS \cap RT$

11) $(R^{-1})^{-} = (R^{-})^{-1} \equiv R'$ (relación dual de R)

12) $(R')' = R; \quad (R \cup S)' = R' \cap S'; \quad (R \cap S)' = R' \cup S'$

13) $(RS)^{-1} = (R^{-1})(S^{-1})$, $(R + S)^{-1} = S^{-1} + R^{-1}$, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$

14) $(RS)^{-} = R^{-} + S^{-}$, $(R + S)^{-} = R^{-}S^{-}$

15) $(R \cup S) + (R \cup S) = 2R \cup 2S$

16) $(R \cap S)^2 = R^2 \cap S^2$

17) $\Delta^{-1} = \Delta$, $\phi^{-1} = \phi$, $U^{-1} = U$

Considerando R, S, T relaciones sobre A:

18) Son equivalentes entre sí: $RS \cap T \neq \phi$, $T^{-1}R \cap S^{-1} \neq \phi$, $ST^{-1} \cap R^{-1} \neq \phi$

19) $(R^{-})^2 \neq (R^2)^{-}$, $(R^2)^{-} = 2R^{-}$

20) $(R^2)^{-} \subseteq R^{-}$, $R \subseteq R^2 + R^{-}$

A.3 Relaciones binarias sobre un conjunto

En la tabla 1 se definen propiedades de relaciones binarias sobre un conjunto y se dan algunas implicaciones e incompatibilidades entre ellas (Canales *et al*, 1976). Algunas propiedades se pueden agrupar en dos clases:

Invariables bajo intersecciones:	Invariables bajo uniones:
transitiva (1) $R^2 \subseteq R$	negativa transitiva (2) $R \subseteq 2R$
irreflexiva (5) $R \subseteq \Delta^-$	reflexiva (8) $\Delta \subseteq R$
asimétrica (6) $R^{-1} \subseteq R^-$	completa o conexa (4) $R^- \subseteq R^{-1}$
antisimétrica (10) $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$	débilmente conexa (3) $\Delta^- \subseteq R \cup R^{-1}$
no trivial (15) $U \neq R$	no vacía (16) $R \neq \phi$

Se puede demostrar que:

1) las propiedades en la columna izquierda son invariables bajo intersecciones y las listadas en la columna derecha lo son bajo uniones;

2) una relación pertenece a una categoría de la columna izquierda sii su complemento pertenece a la correspondiente categoría de la derecha;

3) excepto la transitividad, si una relación cumple una propiedad del lado izquierdo entonces cualquiera de sus subconjuntos también la cumple, y excepto la negatividad transitiva, si una relación cumple una propiedad del lado derecho entonces cualquiera de sus subconjuntos también la cumple.

Consideramos con algún detalle los conceptos de relación de equivalencia y de relación acíclica.

Una relación de *equivalencia* es una relación binaria sobre un conjunto A que es reflexiva, simétrica y transitiva. Sea $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia sobre A. Dos elementos relacionados por dicha relación se llaman *equivalentes*. El conjunto de todos los elementos de A equivalentes a un cierto elemento de A, llamado *representante*, se denomina *clase de equivalencia* de dicho representante; por reflexibilidad cada representante pertenece a su clase de equivalencia y, por transitividad, todos los elementos de una clase de equivalencia son equivalentes entre sí, por lo que cualquiera de ellos puede servir igualmente de representante. Por tanto todo elemento del conjunto A pertenece a una y solo una clase de equivalencia y el conjunto de clases de equivalencia, llamado *conjunto cociente* (*módulo* R) de A, denotado por A/R, es entonces una partición de A, donde por definición una *partición* de un conjunto A es una colección de subconjuntos no vacíos de A, ajenos entre sí cuya unión es igual al conjunto A. Recíprocamente, toda partición determina una clase de equivalencia, en la cual dos elementos son equivalentes sii pertenecen al mismo subconjunto de la partición. Esto establece una correpondencia biunívoca entre las relaciones de equivalencia y las particiones de un conjunto cualquiera. La función q: $A \longrightarrow A/R$ que asocia a cada elemento $a \in A$ su clase de equivalencia, $q(a) = [a] \in A/R$, es la *función cociente* o *mapeo canónico* de la relación de equivalencia $R \subseteq A \times A$.

Cada función $f: A \longrightarrow B$ determina una relación de equivalencia sobre su dominio: dos elementos son equivalentes sii se mapean en el mismo elemento del contradominio; la partición correspondiente se llama *conjunto cociente módulo* f. Hay entonces una correspondencia biunívoca natural entre el conjunto cociente módulo f y la imagen de f, f(A).

Una relación binaria R es *acíclica* sii R^k es irreflexiva para todo entero $k > 0$, es decir:

R es irreflexiva: no contiene $xRx \quad \forall\, x \in A$

R^2 es irreflexiva: no contiene $xRyRx \quad \forall\, x,y \in A$ ($\Leftrightarrow$ R asimétrica)

......

R^k es irreflexiva: no contiene $xRy_1R\ldots y_{k-1}Rx \quad \forall\, x,y_i \in A$

......

o equivalentemente, sii la *cerradura transitiva* de R, definida por

$$R^t = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots .$$

es irreflexiva. La cerradura transitiva de una relación binaria R, R^t, es cerrada en el sentido que $(R^t)^t = R^t$, $R \subseteq R^t$, y transitiva porque R^t es transitiva, y de aquí la expresión "cerradura transitiva".

Referencias

Canales, R.; Guillén, S.; Morcos, J. (1976), "Toma de decisiones con objetivos múltiples: caso determinista," *Instituto de Ingeniería*, No.368, *Universidad Nacional Autónoma de México*

Chipman, J. (1965), *The foundations on utility*, en Readings in mathematical psychology, *John Wiley & Sons*, Nueva York

Krantz, D.; Luce, R.; Suppes, P.; Tversky, A. (1971) *Foundations of measurement*, Vol 1, Academic Press, Nueva York.

Makarov, I.; Vinogradskaya, T.; Rubchinsky, A.; Sokolov, V. (1987), *The theory of choice and decision making*, MIR Publishers, Moscú

ANEXO B:
BINARY PREFERENCE INDICES ASSOCIATED TO GENERAL ADDITIVE MODELS

Journal of Multi-Criteria Decision Analysis

92/92

Servio T. Guillén

National University of México

Instituto de Ingeniería, C. U., AP 70-472, Coyoacán 04510, México D.F.
Tel (525)548-9793; Fax (525)616-1514

RESUME

Due to the usually unprecise values of the parameters, the confidence in the outcomes of paired comparisons with a "well behaved" multi-criteria reference model is minimal near the indifference and maximal for dominance. Two binary indices on the set of ordered pairs of options are proposed, which could be interpreted as measures of intensity and credibility of preference between any two options, respectively, where the reference model is a general additive one, given by a sum of skew symmetric functions, one per criterion, defined on the set of ordered pairs of options (particular cases of such reference model are the conventional additive and the additive difference model of Morrison - Tversky, the last one in general non transitive neither decomposable by a value function). The two extreme values of each index correspond to dominance and the middle one to indifference, respectively. Such indices can be obtained from a sensitivity analysis on the reference model and are related by a linear transformation.

Key words: Binary preference indices, additive models, skew symmetry.

1. INTRODUCTION

A *linear multi-criteria utility function* on $\mathbb{R}^n$ is a real function of the form

$$u(x) = \sum w_i x_i \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n$$

where the vector of *weights* $w = (w_1, \ldots w_n) \in \mathbb{R}^n$ is a constant of nonzero components; $u(x)$ is called the *utility of alternative* x. The corresponding preference model relates the outcome of the preferential comparison of any pair of *alternatives* x,y with the respective difference of utilities $u(x) - u(y)$:

$$x \text{ preferred to } y \;\Leftrightarrow\; u(x) - u(y) > 0 \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$$

$$x \text{ indifferent to } y \;\Leftrightarrow\; u(x) - u(y) = 0 \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$$

Sometimes the utility difference $u(x) - u(y)$ is interpreted as an index of the intensity of the preference for x over y. In a multi-criteria situation such an interpretation is not appropriate because for a fixed positive utility difference, $u(x) - u(y) > 0$, between pairs of alternatives x,y, the differences $w_i(x_i - y_i)$ in the evaluations of the alternatives can be distributed in very different ways on the criteria. One extreme distribution is $w_i(x_i - y_i) \geq 0$ for all i and $w_j(x_j - y_j) > 0$ for some j, which means the dominance of x over y (x *dominates* y if and only if x is at least as good as y for every criterion, and strictly better for at least one) and corresponds to a maximum of the confidence we have that x is better than y, because this outcome depends only on the algebraic signs of the weights and not on their magnitudes. On the other hand, we have a less sure preference when the outcome is sensitive to small changes in the weights of the model, for example, when two criteria $1,2$ cancel each other, $w_1(x_1 - y_1) = - w_2(x_2 - y_2)$, but each is much more important than all the other criteria together,

$$\Big| \sum_{i \neq 1,2} w_i(x_i - y_i) \Big| << |w_1(x_1 - y_1)|$$

Because of this effect, due to the multidimensionality of the preference model and to the usual inaccuracy in assigning the weights, it is convenient to evaluate, by a sensitivity type analysis, the confidence in the outcome of paired comparisons, made with the given (linear) model of preferences, which help us to discriminate cases like the ones mentioned, and provide more information about the preferential comparison between pairs of alternatives than what is given by utility difference alone. As we will see, this can be done through binary functions, called *binary preference indices*, defined on the space of pairs of alternatives.

Binary preference indices were originally introduced to generalize procedures and theories related to modeling preferences. Jacquet-Lasgrèze (1982) shows, through the notion of binary preference index, that the aggregation methods of preferences, for ordinal and cardinal data, rely on the same type of basic aggregation procedure, which consists of building a multi-criteria binary preference index from a set of mono criterion binary preference indices. He considers binary preference indices evaluated in non-numerical scales ({"indifferent", "preferred"} scale, for example) and numerical ones, as for example his (fuzzy) credibility of preference index, $c(,)$, which takes values in the [0,1] interval, and where the maximum credibility does not necessarily corresponds to dominance.

In a different context, Fishburn (1982) generalized the well-known linear utility theory of von Neumann and Morgenstern (1944) through a binary index, $i(,)$, which models preferences under risk and could be interpreted as a measure of intensity of preference. Fishburn's paper does not consider explicitly a multi-criteria structure, and his binary preference index is skew symmetric and takes its values in the [-1,1] interval.

In this paper we adopt the terms mentioned: the *credibility of preference index*, $c(,)$, taking its values in the [0,1] interval, and the *intensity of preference index*, $i(,)$, taking its values in the [-1,1] interval. The extreme points of the two scales correspond to the maximum confidence in that one alternative is better than the other one (in particular, for the indices we are proposing the extreme points of these scales correspond to the dominance of each of the two preference orders) and by symmetry the middle points in both scales, 0 for the intensity scale, and 0.5 for the credibility scale, correspond to the indifference between the alternatives we are comparing. Under these conditions, to each intensity index $i(,)$ there corresponds a credibility index $c(,)$, and reciprocally, related both by the linear transformations

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0.5 + 0.5\; i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad\qquad i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2c(\mathbf{x},\mathbf{y}) - 1$$

Therefore, the skew symmetry of $i(,)$ and the following property of $c(,)$, called *symmetry with respect to 1*, are equivalents

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) + c(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad i(\mathbf{x},\mathbf{y}) + i(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 0$$

and for all pairs of alternatives $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ the transitivity property for $i(,)$

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq i(\mathbf{y},\mathbf{z}) \;\Rightarrow\; i(\mathbf{x},\mathbf{z}) \geq i(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

is equivalent to that which corresponds to $c(,)$,

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq c(\mathbf{y},\mathbf{z}) \;\Rightarrow\; c(\mathbf{x},\mathbf{z}) \geq c(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

Bana e Costa and Vincke (1992) and Trejos (1991), have independently proposed several binary indices of credibility which satisfy the above transitivity property when $\mathbf{y}$ is preferred to $\mathbf{z}$ ($c(\mathbf{y},\mathbf{z}) \geq 0.5$). They defined each credibility index $c(\mathbf{x},\mathbf{y})$ of the preference for $\mathbf{x}$ over $\mathbf{y}$ as a certain measure (the volume or certain projection) on the intersection of two sets, a *parallelepiped of admissible weights* (which the decision maker specifies giving an interval of indetermination for each weight $w_1,\ldots,w_n$), and the half-space

$$H^{+}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left\{ (p_1,\ldots p_n) : \sum p_i (x_i - y_i) \geq 0 \right\} \qquad\qquad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

of the vector of weights $(p_1,\ldots p_n)$ which are in accord with the proposition that alternative **x** is at least as good as alternative **y**. If the parallelepiped of admissible weights is totally contained in the half-space $H^{+}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, then $c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$ and the credibility that **x** is better than **y** reaches its maximum, but for the indices we are considering this does not mean the dominance of **x** over **y**.

The binary preference indices we are proposing in this paper also satisfy the above mentioned transitivity property, but these indices do not depend on additional parameters to the model's weights $w_1,\ldots,w_n$. Such indices are very easy to calculate, and to interpret by any decision maker familiarized with the use of linear multi-criteria decision models.

2. FORMULATION FOR THE LINEAR CASE

For each order pair of *alternatives* **x**,**y** such that

$$\sum w_i(x_i - y_i) > 0 \tag{1}$$

the value of the intensity $i(\mathbf{x},\mathbf{y})$ of preference for **x** over **y** is defined as the supremum of the set of the deviations per unit (or in percentage) of the weights $w_1,\ldots w_n$, maintaining inequality (1). In other words, supposing (1) is defined,

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup \Theta(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

where

$$\begin{aligned}\Theta &= \left\{\theta \in \mathbb{R}:\ \max_k|\delta_k/w_k| < \theta \ \Rightarrow\ \sum (w_i + \delta_i)(x_i - y_i) > 0 \qquad \forall\ \delta_i \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\theta \in \mathbb{R}:\ \sum (w_i + \delta_i)(x_i - y_i) \le 0 \ \Rightarrow\ \max_k|\delta_k/w_k| \ge \theta \qquad \forall\ \delta_i \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

From (1) the set Θ is not empty because it contains a neighborhood of 0. Then $i(\mathbf{x},\mathbf{y})$ is well defined and

$$i(x,y) = \inf_{\delta \in \mathbb{R}^n} \left\{ \max_k \; |\delta_k / w_k| : \sum (w_i + \delta_i)(x_i - y_i) \le 0 \right\} \tag{2}$$

Therefore, in geometrical term $i(x,y)$ is the distance of Tchebycheff, normalized with respect to the weights $(w_1,\ldots,w_n)$, between the half-space

$$H^{-}(x,y) = \left\{ (p_1,\ldots p_n) : \sum p_i (x_i - y_i) \le 0 \right\} \qquad x,y \in \mathbb{R}^n$$

and the point $(w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{R}^n$. This point is outside the set $H^{-}(x,y)$, which is a convex and nonempty set. Then $i(x,y)$ is the ratio $\lambda > 0$ of the closed ball in a normalized Tchebycheff's norm (this ball is a parallelepiped where the length of the n edges are in proportion with the n weights $w_1,\ldots,w_n$) centered in the point $(w_1,\ldots,w_n)$ and having $H^{-}(x,y)$ as a supporting half-space (see Figure 1).

Figure 1.

The infimum in (2) is a positive value, $\lambda > 0$, which solves the equalities

$$|\delta_k / w_k| = \lambda \;\; \forall \; k \qquad\qquad \sum (w_i + \delta_i)(x_i - y_i) = 0$$

If we define the sets

$$I^{+}(x,y) = \left\{ i : \; w_i (x_i - y_i) > 0 \right\} \qquad x,y \in \mathbb{R}^n$$

$$I^{-}(x,y) = \left\{ i : \; w_i (x_i - y_i) < 0 \right\} \qquad x,y \in \mathbb{R}^n$$

then the value $\lambda = i(x,y)$ satisfies

$$0 = \sum_{i\in I^+} w_i(1 - \lambda)(x_i - y_i) + \sum_{i\in I^-} w_i(1 + \lambda)(x_i - y_i) =$$

$$= \sum w_i(x_i - y_i) - \lambda\Big[\sum_{i\in I^+} w_i(x_i - y_i) - \sum_{i\in I^-} w_i\lambda(x_i - y_i)\Big] =$$

$$= \sum w_i(x_i - y_i) - \lambda \sum |w_i(x_i - y_i)|$$

and then

$$i(x,y) = \frac{\sum w_i(x_i - y_i)}{\sum |w_i(x_i - y_i)|} \qquad x \neq y \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

By definition, $i(x,x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}^n$. In (3), condition (1) is omitted, and so $i(,)$ takes its values in the $[-1,1]$ interval, and $i(,)$ comes out as a skew symmetric binary index, $i(x,y) = - i(x,y)$. Clearly $i(x,y) = 1$ is equivalent to the dominance of x over y. The corresponding credibility index, $c(x,y) = 0.5 + 0.5i(x,y)$, is given by

$$c(x,y) = \frac{\sum_{i\in I^+(x,y)} w_i(x_i - y_i)}{\sum |w_i(x_i - y_i)|} \qquad x \neq y \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

and takes its values in the $[0,1]$ interval and satisfies $c(x,y) + c(y,x) = 1$. Clearly $c(x,y) = 1$ is equivalent to the dominance of x over y. The denominator in (4) is one unlike measure between the pair of alternatives x,y, called the *net difference in the evaluation* of the alternatives x,y, which is exactly the w-weighted distance in the l^n norm between x and y. In (4) the terms in the numerator are non-negatives. Then $c(x,y)$ is the proportion in which the set $I^+(x,y)$ of criteria, in agreement with the preference for x over y, contributes to the net difference in the evaluation of the alternatives x,y. Therefore, of the net evaluation difference between the alternatives x,y, the fraction $c(x,y)$ is in agreement with the preference for x over y, and the proportion $c(y,x)$ is in agreement with the preference for y

over $\mathbf{x}$.

The preference or indifference alone between two alternatives can be expressed equivalently in terms of the linear utility model or any one of the indices $i(,)$, $c(,)$:

$$\sum w_i(x_i - y_i) > 0 \Leftrightarrow i(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0 \Leftrightarrow c(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0.5$$

$$\sum w_i(x_i - y_i) = 0 \Leftrightarrow i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0.5$$

When there is no indifference between the pair of alternatives $\mathbf{x},\mathbf{y}$, such binary indices give more information about the preferences than the utility differences. Thus, $c(\mathbf{x},\mathbf{y}) \simeq 0.5$ (or any one of its equivalents, $c(\mathbf{y},\mathbf{x}) \simeq 0.5$, $i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \simeq 0$, $i(\mathbf{y},\mathbf{x}) \simeq 0$) means that there are not any one systematic dominance of one alternative over the other in all the criteria, and that the advantages of one alternative over the other in some criteria are roughly compensated by the disadvantages in the other criteria. In the other extreme, $c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$ (or any one of its equivalents, $c(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 0$, $i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$, $i(\mathbf{y},\mathbf{x}) = -1$) means that $\mathbf{x}$ dominates $\mathbf{y}$. In the last section of this paper, we give a numerical example which shows that for a given non zero utility difference between two alternatives, it is possible to have the two such extreme cases and also the intermediary ones.

Theorem. The binary intensity index $i(,)$ is *transitive in both directions*, that is,

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq i(\mathbf{y},\mathbf{z}) \Rightarrow \begin{cases} i(\mathbf{x},\mathbf{z}) \geq i(\mathbf{y},\mathbf{z}) \\ i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq i(\mathbf{x},\mathbf{z}) \end{cases} \qquad \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

The proof of this theorem is as follows. For convenience let

$$A = \sum w_i(x_i - y_i), \qquad B = \sum w_i(y_i - z_i)$$

$$A_i = \sum |w_i(x_i - y_i)|, \qquad B_i = \sum |w_i(y_i - z_i)|$$

Then $i(x,y) \geq i(y,z)$ is equivalent to $A/A_i \geq B/B_i$, and then equivalent to $B_i(A + B) \geq B(A_i + B_i)$, and to $(A + B)/\ (A_i + B_i) \geq B/B_i$, which implies

$$i(x,z) = \frac{\sum w_i(x_i - z_i)}{\sum |w_i(x_i - z_i)|} = \frac{\sum w_i(x_i - y_i) + \sum w_i(y_i - z_i)}{\sum |w_i(x_i - y_i) + \sum w_i(y_i - z_i)|} \geq$$

$$\geq \frac{\sum w_i(x_i - y_i) + \sum w_i(y_i - z_i)}{\sum |w_i(x_i - y_i)| + \sum |w_i(y_i - z_i)|} = \frac{A + B}{A_i + B_i} \geq \frac{B}{B_i} = i(y,z)$$

Because of the skew symmetry of $i(,)$, $i(x,y) \geq i(y,z)$ implies $i(z,y) \geq i(y,x)$. Considering what we have proved, $i(z,x) \geq i(y,x)$, and again because of the i's skew symmetry, $i(x,y) \geq i(x,z)$ $\blacksquare$.

The credibility index $c(,)$ is also transitive in both senses:

$$c(x,y) \geq c(y,z) \Rightarrow \begin{cases} c(x,z) \geq c(y,z) \\ c(x,y) \geq c(x,z) \end{cases} \qquad \forall\ x,y \in \mathbb{R}^n$$

We observe that the credibility indices considered by Bana e Costa and Vincke (1992) and Trejos (1991) are not transitives in both directions, they satisfy the following less restrictive conditions of transitivity

$$c(x,y) \geq c(y,z) \geq 0.5 \Rightarrow c(x,z) \geq c(y,z)$$
$$0.5 \geq c(x,y) \geq c(y,z) \Rightarrow c(x,y) \geq c(x,z)$$

(which are equivalent to each other because $c(x,y) + c(y,x) = 1$).

3. EXTENSION TO GENERAL ADDITIVE MODELS

The linear model we considered corresponds to a decomposable structure (Krantz *et al*, 1971, pp 317). Now, let the generally non decomposable structure given by the *skew symmetric additive model*

$$\mathbf{x} \text{ preferred to } \mathbf{y} \Leftrightarrow \sum p_i(x_i, y_i) > 0 \qquad \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \text{ indifferent to } \mathbf{y} \Leftrightarrow \sum p_i(x_i, y_i) = 0 \qquad \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

where p_i is a skew symmetric function for all i,

$$p_i(x_i, y_i) = -\, p_i(y_i, x_i)$$

and then also the function $\Psi(,)$ defined by

$$\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum p_i(x_i, y_i) \qquad \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

In a similar way to the linear case we define

$$I^{+}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left\{ i:\ \Psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0 \right\} \qquad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$I^{-}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left\{ i:\ \Psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) < 0 \right\} \qquad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

and the intensity index $i(\mathbf{x},\mathbf{y})$ is given by

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \qquad \text{iff} \qquad \sum |p_i(x_i, y_i)| = 0$$

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\sum p_i(x_i, y_i)}{\sum |p_i(x_i, y_i)|} \qquad \text{iff} \qquad \sum |p_i(x_i, y_i)| \neq 0$$

$i(,)$ takes its values in the $[-1,1]$ interval, and is a skew symmetric binary index. Clearly $i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$ is equivalent to the dominance of $\mathbf{x}$ over $\mathbf{y}$. The corresponding credibility index, $c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0.5 + 0.5i(\mathbf{x},\mathbf{y})$, is given by

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0.5 \qquad \text{iff} \qquad \sum |p_i(x_i,y_i)| = 0$$

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\sum\limits_{i\in I^+(\mathbf{x},\mathbf{y})} p_i(x_i,y_i)}{\sum |p_i(x_i,y_i)|} \quad \text{iff} \qquad \sum |p_i(x_i,y_i)| \neq 0$$

$c(,)$ takes its values in the $[0,1]$ interval, satisfies $c(\mathbf{x},\mathbf{y}) + c(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 1$, and $c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$ is equivalent to the dominance of $\mathbf{x}$ over $\mathbf{y}$. The denominator

$$\sum |p_i(x_i,y_i)|$$

is one unlike measure between pairs of alternatives, $\mathbf{x},\mathbf{y}$, called the *net difference in the evaluation* of the alternatives $\mathbf{x},\mathbf{y}$, which is the l^n norm of the vector with components $p_i(x_i,y_i)$, the difference in evaluation of the two alternatives for each criterion i. $c(\mathbf{x},\mathbf{y})$ is the proportion in which the set $I^+(\mathbf{x},\mathbf{y})$ of criteria, in agreement with the preference for $\mathbf{x}$ over $\mathbf{y}$, contributes to the net difference in the evaluation of the alternatives $\mathbf{x},\mathbf{y}$. Therefore, of the net evaluation difference between the alternatives $\mathbf{x},\mathbf{y}$, the fraction $c(\mathbf{x},\mathbf{y})$ is in agreement with the preference for $\mathbf{x}$ over $\mathbf{y}$, and the proportion $c(\mathbf{y},\mathbf{x})$ is in agreement with the preference for $\mathbf{y}$ over $\mathbf{x}$.

The preference and indifference between two alternatives can be expressed equivalently in terms of the reference model or any one of the indices $i(,)$, $c(,)$:

$$\sum p_i(x_i,y_i) > 0 \;\Leftrightarrow\; i(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0 \;\Leftrightarrow\; c(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0.5$$

$$\sum p_i(x_i,y_i) = 0 \;\Leftrightarrow\; i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \;\Leftrightarrow\; c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0.5$$

This index is a weak stochastic transitive structure (Suppes, P. *et al*, 1989, pp 389),

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y})\ i(\mathbf{y},\mathbf{z}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad i(\mathbf{x},\mathbf{z}) \geq 0$$

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y})\ i(\mathbf{y},\mathbf{z}) \geq 0.5 \quad \Rightarrow \quad c(\mathbf{x},\mathbf{z}) \geq 0.5,$$

iff the preference of the reference model is transitive. An important particular case is the *additive difference model* (Tverski, 1969),

$$\mathbf{x} \text{ preferred to } \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \sum p_i(u_i(x_i) - u_i(y_i)) > 0 \qquad \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \text{ indifferent to } \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \sum p_i(u_i(x_i) - u_i(y_i)) = 0 \qquad \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

where $p_i(-\delta) = -p_i(\delta)$ for all i. This model has been considered by Fhisburn (1980).

4. NUMERICAL EXAMPLE

Four alternatives **v**, **x**, **y**, **z** are evaluated with the linear model specified in Table I. In order to illustrate the use of the binary preference indices $i(,)$ $c(,)$, consider the pair of alternatives **v**, **y**. Directly from the data, $\mathbf{v} - \mathbf{y} = (3,\ -2,\ 1)$, and from definition (3), $i(\mathbf{v},\mathbf{y}) = (3 - 4 + 3)/(3 + 4 + 3) = 0.2$, and then the intensity of preference for **v** over **y** will be 20%. This means that if the weights w_1, w_2, w_3 are changed in this percentage, giving positive deviations to the criteria in which **y** is better than **v**, {2}, and negative deviations to the criteria in which **v** is better than **y**, {1,3}, in order to reverse the inequality

$$\sum w_i(v_i - y_i) > 0$$

then we will precisely arrive at the indifference between **v** and **y**, because the new weights are (1 -0.2, 2 + 0.4, 3 -0.6) = (0.8, 2.4, 2.4), and so $u'(\mathbf{v}) - u'(\mathbf{y}) = 2.4 - 4.8 + 2.4 = 0$. If the permissible variations of the weights are less than 20 %, it will be impossible of course to change the foregoing inequality. The corresponding credibility index has the value $c(\mathbf{v},\mathbf{y}) = 0.5 + (0.5)(0.2) = 0.6$, and then $c(\mathbf{y},\mathbf{v}) = 0.4$, which means that, of the net difference in the evaluation of the order pair of alternatives **v**,**y** (calculated as the w-weighted sum of the magnitudes of the evaluation differences between these alternatives for all the criteria), 60% correspond to the criteria in which **v** is better than **y** and 40% correspond to the criteria in which **y** is better than **v**.

Next, we will illustrate the kind of information provided by the binary preference indices $i(,)$ and $c(,)$ about the binary comparisons of alternatives, which are not provided by the utility differences alone. Comparing alternative **v** with the alternatives **x**, **y**, **z** through the linear model, we find that **v** is better than any one of the other alternatives by 2 units of utility, and that the last three are indifferent amongst themselves:

$$u(\mathbf{v}) = 600 > u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y}) = u(\mathbf{z}) = 598$$

The value of the utility difference does not permit discrimination between any preferences **vPx**, **vPy**, **vPz**. However, from the values of the preference index $i(,)$

$$i(\mathbf{v},\mathbf{x}) = 100/299 = 0.33\%; \qquad i(\mathbf{v},\mathbf{y}) = 20\%; \qquad i(\mathbf{v},\mathbf{z}) = 100\%$$

or equivalently, from the values of the credibility index $c(,)$

$$c(\mathbf{v},\mathbf{x}) = 50.0017\%; \qquad c(\mathbf{v},\mathbf{y}) = 60\%; \qquad c(\mathbf{v},\mathbf{z}) = 100\%$$

we observe that the preference of **v** over each of the alternatives **x**, **y**, **z** goes from the very weak preference **vPx**, near indifference, to the dominance of **v** over **z**.

Table I

ACKNOWLEDGEMENTS

This paper was partially supported by DGPA (IN300392). Thanks to the comments of Emilio Rosenblueth, Mayra Trejos, Juan Morcos and Arturo Fuentes.

REFERENCES

Bana e Costa, C and Vincke, Ph. (1991), "Comment prendre en compte l'imprécision des taux de substitution dans un modèle additif d'agrégation des préférences," *Cahier du LAMSADE*.

Fishburn, P. C. (1982) "Nontransitive measurable utility," *Journal of Mathematical Psychology*, 26, 31-67.

Jacquet-Lasgrèze, E. (1982), "Binary preference indices: a new look on multicriteria aggregation procedures," *European Journal of Operational Research*, v 10, n 1 pp 26-32.

Krantz D., Luce R., Suppes P., Tversky A. (1971), "Foundations of measurement", Vol 1, Academic Press, Nueva York.

Luce R., Krantz D., Suppes P., Tversky A. (1990), "Foundations of measurement", Vol 3, Academic Press, Nueva York.

Suppes P., Krantz D., Luce R., Tversky, A. (1989), "Foundations of measurement", Vol 2, Academic, Press Nueva York.

Trejos, M. (1991) "Método de relaciones binarias de sobreclasificación que usa una familia de funciones de utilidad," Tesis doctoral, *Facultad de Ingeniería*, Universidad Nacional Autónoma de México.

Tversky A. (1969), "Intransitivity of preferences", *Psychological Review* v 76, 31-48.

von Neumann, J., and Morgenstern, O. (1944) *Theory of games and economic behavior*, Princeton Univ. Press.

Table I. Alternatives and linear model

CRITERIA	ALTERNATIVES				WEIGHTS
		x	y	z	
1	10	97	97	100	1
2	10	249	102	99	2
3	10	1	99	100	3
u() =	60	598	598	598	

ANEXO C: REFERENCIAS

Arrow, K.; Raynaud H. (1986), *Social choice and multicriterion decision-making*, M.I.T. Press, Cambridge, U.S.A.

Bana e Costa, C.; Vincke, Ph. (1992), "Comment prendre en compte l'imprécision des taux de substitution dans un modèle additif d'agrégation des préférences," Cahier du LAMSADE, en prensa

Bernoulli, D. (1738), "Specimen theoriae novae de mensura sortis," *Comment. Acad. Sci. Imper. Petropolitanae*, 5, 175-192. Traducción al inglés por L. Somer, "Exposition of a new theory on the measurement of risk," *Econometrica*, 22, 23-36 (1954)

Bouyssou, D. (1986), "Some remarks on the notion on compensation in MCDM", "*European Journal of Operational Research*, 26, 1, 150-160

Bunge, M. (1980), *Epistemología*, Ariel, México

Canales, R.; Guillén, S.; Morcos, J. (1976), "Toma de decisiones con objetivos múltiples: caso determinista," *Instituto de Ingeniería*, No.368, *Universidad Nacional Autónoma de México*

Chipman, J. (1965), *The foundations on utility*, en Readings in mathematical psychology, *John Wiley & Sons*, Nueva York

Clough, D. (1984), *Decisions in Public and Private Sectors*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, Nuava York

Doignon, J.; Monjardet, B.; Roubens, M.; Vincke, Ph. (1986), "Biorder families, valued relations and preference modelling", *Journal of Mathematical Psychology*, 30, 435-480

Dubois, D.; Prade, H. (1980), *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, Academic Press, Nueva York

Dushnik, B.; Miller, E. (1941), "Partial order sets," *American Journal of Mathematics*, 63, 600-610

Fishburn, P. (1970) *Utility Theory for Decision Making* John Wiley & Sons, Inc

Fishburn, P. (1970), "Utility theory with inexact preferences and degrees of preference," *Synthese*, 21, 204-222

Fishburn, P. (1970), "The irrationality of transitivity in social choice theory", *Behavioral Science*, 15, 119-123

Fishburn, P. (1973), *The theory of social choice*, Princeton University Press, Princeton

Fishburn, P. (1973), "Binary choice probabilities: on the varieties of stochastic transitivity," *Journal of Mathematical Psychology*, 10, 327-352

Fishburn, P. (1976), "Noncompensatory preferences," *Synthese*, 33, 393 - 403

Fishburn, P. (1982), "Nontransitive measurable utility," *Journal of Mathematical Psychology*, 26, 31-67

Fishburn, P. (1984), "Multiattribute nonlinear utility theory," *Management Science*, 30, 11, 1301-1310

Fishburn P. (1989) "Foundations of decision analysis: along the way," *Management Science*, 35, 4 pp 387-405

French, S. (1988), *Decision theory*, Halsted Press-John Wiley & Sons, Nueva York

French, S. (1992), "OK, so just what is a decision support system?," *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 1, 125 (Editorial)

Frisch, R. (1926) "Sur un problème d'économie pure" *Norsk Matematisk Forenings Skrifter*, 16 1-40. Traducción al inglés en J. S. Chipman L.

Hurwicz, M. Richter y H. Sonnenschein (Eds.), *Preferences, utility, and demand*, Harcourt Brace Jovanovich, Nueva York, 1971, 386-423

Gastel, M. van; Paelink, J. (1992) "Generalization of solution concepts in conflict and negotiation analysis," *Theory and Decision* 32, 65-76

Golumbic, M. (1980), *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, Academic Press, Nueva York

Jacquet-Lagrèze, E. (1982), "Binary preference indices: a new look on multicriteria aggregation procedures," *European Journal of Operational Research*, 10, 1, 26-32

Janis, L. (1972), *Victims of groupthink*, Houghton - Mifflin Company, Boston

Janis, L. (1981), *Groupthink*, Houghton - Mifflin Company, Boston

Janis, I.; Mann, L. (1977), *Decision making: a psychological analysis of conflict, choice, and commitment*, Free Press, Nueva York

Jelassi, M.; Beauclair R. (1987), "An integrated framework for group decision support systems design," *Information and Management*, 13 143 -153

Jelassi, M.; Foroughi (1989), "Negotiation Support Systems: an overview of design issues and existing software," *Decision Support Systems*, 5 167 -181

Keeney, R.; Nair K. (1976) "Evaluating potential nuclear power plan sites en the Pacific Northwest using decision making," *IIASA*, Professional Paper No 76

Keeney, R.; Raiffa, H. (1976) *Decision with multiple objectives: preferences and value trade off*, John Wiley, Nueva York

Kraemer, K.; King, J. (1983), *Computer supported conference rooms*, Irvine: Public Policy Research Organization, University of California

Krantz, D.; Luce, R.; Suppes, P.; Tversky, A. (1971) *Foundations of measurement*, Vol 1, Academic Press, Nueva York.

Luce R., Krantz D., Suppes P., Tversky A. (1990), *Foundations of measurement*, Vol 3, Academic Press, Nueva York.

Makarov, I.; Vinogradskaya, T.; Rubchinsky, A.; Sokolov, V. (1987), *The theory of choice and decision making*, MIR Publishers, Moscú

Malakooti, B. (1993), "A decision support system for discrete multi-criteria problems: certainty, uncertainty, and hierarchical," *Applied Mathematics and Computation*, 54, 131-166

Nash, J. (1950), "The bargaining problem," *Econometrica*, 18, 155-162

Ozernoy, V. (1985), "Generating alternatives in multiple criteria decision making problems: a survey," en Y. Haimes y V. Chankong (Eds.), *Decision making with multiple objetives*, Springer-Verlag 322-330

Philips, L. (1984), "A theory of requisite decision models," *Acta Psychologica*, 56, 29-48

Raiffa, H. (1982), *The art & science of negotiation*, Belknap/Harvard, Cambridge, USA

Ramsey F. (1931), "Truth and probability," en *The foundations of mathematics and other logical essays*, Routledge and Kegan Paul, Londres, 156-198. Reimpresión en H. Kyburg y E. Smokler (Eds.), *Studies in subjective probability*, John Willey & Sons, Inc., Nueva York, 1964, 61-92

Roubens, M.; Vincke, Ph. (1983), "Linear fuzzy graphs", *Fuzzy Sets and Systems*, 10, 79-86

Roubens, M.; Vincke, Ph. (1984), "On families of semiorders and interval orders imbedded in a valued structure of preference: a survey," *Information Sciences*, 34, 187-198

Roubens, M.; Vincke, Ph. (1985), "Preference modeling," *Springer Verlag*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol 250

Roy, B. (1985), "Méthodologie multicritère d'aide à la décision", *Economica*, Paris

Roy, B. (1991), "The outranking approach and the foundations of Electre methods", *Theory and Decisions*, 31, 1, 49-73

Roy, B.; Vincke, Ph. (1984), "Relational systems of preference with one or more pseudo-criteria: some new concepts and results," *Management Science*, 30, 11, 1323-1335

Roy, B.; Vincke, Ph. (1987), "Pseudo-orders: definition, properties and numerical representation," *Mathematical Social Sciences*, 14, 2, 263 - 274

Savage, L. (1954), "The foundations of statistics," John Willey & Sons, Inc., Nueva York

Simon, H.(1957), *Administrative Behavior: a study of decision-making processes in administive organization*, Macmillan, Nueva York

Simon, H.(1960), *The new science of management decision*, Harper & Row, Nueva York

Simon, H.(1990), "Prediction and prescription in systems modeling," *Operations Research*, 38, 1, 7-14

Sprague, R.; Carlson, E. (1982), *Bulding effective decision support systems*, Englewood Cliffs, NJ; Prentice - Hall

Suppes, P.; Krantz, D.; Luce, R.; Tversky, A. (1989), "Foundations of measurement", Vol 2, *Academic*, Nueva York

Swap, W. (1984), *Destructive effects of groups on individuals* en W. S. Swap (ed), *Group Decision Making*, Beverly Hills, Sage Publictions

Szpilrajn, E. (1930), "Sur l'extension de l'ordre partiel," *Fundamenta Mathematicae*, 16, 386-389

Trejos, M. (1991), "Método de relaciones binarias de sobreclasificación que usa una familia de funciones de utilidad," Tesis doctoral, *Facultad de Ingeniería*, Universidad Nacional Autónoma de México

Trejos, M.; Guillén, S. (1992), "Método multicriterio de ponderación por intervalos", *Instituto de Ingeniería*, No. 549

Tversky, A. (1969), "Intransitivity of preferences", *Psychological Review*, 76, 31-48

Vincke, Ph. (1980), "Vrais, quasi, pseudo et précritères dans un ensamble fini: propriétés et algorithmes," *Cahier du Lamsade No 27*, Université Paris-Dauphine

Vincke, Ph. (1988), "(P,Q,I) preference structures," en *Nonconventional preference relations in decision making*," J. Kacprzyk; M. Roubens (Eds), Springer Verlag

Vincke, Ph. (1992), *Multicriteria decision-aid*, John Wiley & Sons, Chichester

von Neumann, J.; Morgenstern, O. (1967), "Theory of games and economic behaviour", *Princeton University Press*, 3ª edición

Watson, S.; Buede, D. (1987), *Decision synthesis*, Cambridge University Press