

01162  
3  
205

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CALCULO DEL FLUJO A SUPERFICIE LIBRE

EN UNA CURVA VERTICAL

HÉCTOR LEONARDO CISNEROS ITURBE

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE  
POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER  
EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA  
( HIDRAULICA )

CIUDAD UNIVERSITARIA

México, D. F.

NOVIEMBRE, 1993

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN DE LA TESIS "CALCULO DEL FLUJO A SUPERFICIE LIBRE EN UNA CURVA VERTICAL" QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN INGENIERIA HIDRAULICA PRESENTA EL ALUMNO HECTOR LEONARDO CISNEROS ITURBE.

Para desalojar el volumen de agua sobrante de las presas es habitual la construcción de obras de excedencias. En algunas ocasiones, estas obras presentan una curva vertical que conduce el agua de un canal con fuerte pendiente a uno con pendiente suave o nula. En otras, puede existir al final una cubeta deflectora.

Cuando el agua se desplaza sobre el canal de pendiente fuerte fluye a grandes velocidades, lo que induce a una separación de las líneas de corriente del fondo del canal y a un descenso de la presión. Esto último puede provocar que se alcance la presión de vaporización del agua. Por otra parte, en la curva vertical aumenta la presión debido a la fuerza centrífuga.

Cuando se alcanza la presión de vapor se forman burbujas que viajan a lo largo de la estructura; las que pasan cerca del fondo y de las paredes del canal en una zona de mayor presión que la presión de vaporización, pueden producir fuerzas de succión capaces de dar lugar a erosiones en la estructura, originando la cavitación.

Para evaluar la posible ocurrencia de la cavitación sobre el fondo de las curvas verticales se requiere conocer las presiones cerca de su plantilla. En este trabajo se expone un método para calcular el flujo bidimensional no horizontal que toma en cuenta el componente rotacional del flujo, ya que este tipo de flujo se desarrolla en los codos verticales.

Se presenta la deducción de las ecuaciones que gobiernan el flujo, es decir, las ecuaciones de Euler y de continuidad en dos dimensiones, tanto en coordenadas cartesianas como en polares. Posteriormente se discute el método utilizado para resolver el problema. Se indica la forma en que se considera a la vorticidad del flujo para obtener las características hidráulicas del mismo, además el esquema de diferencias finitas utilizado.

# INDICE

<b>1. INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>2. ECUACIONES FUNDAMENTALES</b>	<b>4</b>
2.1 Ecuaciones de Navier - Stokes	4
2.2 Ecuaciones de Euler	8
2.3 Ecuación de continuidad	10
2.4 Sistema en coordenadas polares	11
2.4.1 Transformaciones	11
2.4.2 Ecuaciones de Euler	13
2.4.3 Ecuación de continuidad	18
<b>3. METODO DE SOLUCION</b>	<b>19</b>
3.1 La función corriente	20
3.2 Influencia de la vorticidad en las ecuaciones de Euler	25
3.3 Ecuaciones en diferencias finitas	30
3.4 Condiciones de frontera y condiciones iniciales	36
3.4.1 Frontera izquierda	36
3.4.2 Frontera derecha	37
3.4.3 Frontera inferior	37
3.4.4 Frontera superior	38
3.4.5 Condiciones iniciales	38
3.5 Cálculo de las presiones	39
3.5.1 Ecuaciones de Poisson	39
3.5.1.1 Forma en coordenadas cartesianas	39
3.5.1.2 Forma en coordenadas polares	41
3.5.2 Ecuaciones en diferencias finitas	45
3.5.3 Cálculo de la presión en la frontera inferior	46
3.6 Secuela de cálculo	47
<b>4. FLUJO DE AGUA EN UNA CURVA VERTICAL</b>	<b>50</b>
4.1 Flujo sobre una cubeta deflectora	51
4.2 Flujo sobre una estructura vertedora	52
4.3 Programa de cómputo	53
4.4 Ejemplo numérico	57
4.5 Resultados de la corrida del programa	59
4.6 Comparación con mediciones de un modelo físico	60
<b>5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>69</b>

## 1. INTRODUCCION

Para desalojar el volumen de agua sobrante de las presas es habitual la construcción de obras de excedencias, las cuales consisten en canales que conducen el agua a través de tramos de fuerte pendiente hacia el cauce del río. Estas estructuras se construyen lo mismo en vertedores en túnel como en cubetas deflectoras y en su diseño se debe procurar que las erosiones en el río provocadas por el flujo sean lo menor posibles y no afecten a otras estructuras.

En algunas ocasiones, el canal presenta una curva vertical que conduce el agua de un canal con fuerte pendiente a uno con pendiente suave o nula (fig 1.1a). En otras, la estructura final del vertedor es una cubeta deflectora que se encuentra inmediatamente después de la curva y que también es un segmento circular (fig 1.1b).

Cuando el agua se desplaza sobre el canal de pendiente fuerte fluye a grandes velocidades que inducen la separación de las líneas de

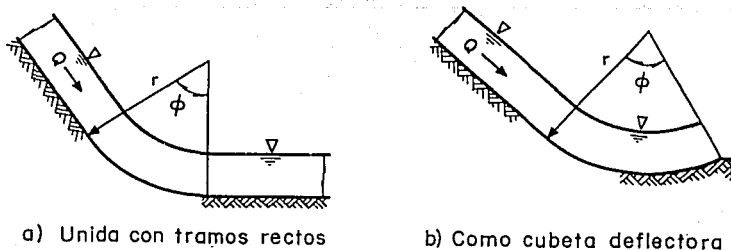


Fig 1.1. Curvas verticales

corriente del fondo del canal, lo que sumado al descenso de la presión, puede provocar que se alcance la presión de vaporización del agua. Este fenómeno se manifiesta con la generación de burbujas de vapor. Por su parte, a lo largo de la curva vertical se origina en el flujo una presión adicional a la existente provocada por la fuerza centrífuga.

Algunas de las burbujas que viajan a lo largo de la estructura pasan cerca del fondo y las paredes del canal y son arrastradas a una zona de mayor presión que la de vapor. Esto podría producir fuerzas de succión capaces de causar erosiones en la estructura. Esta clase de erosión se conoce comúnmente como cavitación.

Algunas de las presas en las que se desarrollan grandes velocidades y que presentan este problema son, por ejemplo, las de Infiernillo, localizada entre los estados de Michoacán y Guerrero, y Glen Canyon y Yellowtail en los Estados Unidos.

Para evaluar la posible ocurrencia de la cavitación sobre el fondo de las curvas verticales se requiere conocer el diagrama de presiones cerca de su plantilla. Para ello se han propuesto una gran cantidad de métodos (Canales, 1993) que utilizan un esquema unidimensional de cálculo y que se apoyan en varias hipótesis simplificadorias de los componentes que definen el flujo. En este trabajo se presenta un método basado en un esquema bidimensional no horizontal que toma en cuenta el componente rotacional del flujo, fundamental en el caso de codos verticales.

En el capítulo 2 se presenta la deducción de las ecuaciones que gobiernan el flujo, es decir, las ecuaciones de Euler y de continuidad en dos dimensiones, tanto en coordenadas cartesianas como en polares.

El capítulo 3 trata acerca del método utilizado para resolver el problema. Se indica la forma en que se considera a la vorticidad del flujo para obtener las características hidráulicas del mismo, además del esquema en diferencias finitas utilizado y de la secuela de cálculo del método.

Se incluyen en el capítulo cuarto varios ejemplos en donde puede usarse el método propuesto. Además se describen algunos aspectos del programa de cómputo elaborado, una aplicación del procedimiento y la comparación de los resultados de una corrida con pruebas de laboratorio.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones y recomendaciones.

## **2. ECUACIONES FUNDAMENTALES**

En este capítulo se presenta la deducción de las ecuaciones de Navier - Stokes, y a partir de ellas se llega a las ecuaciones de Euler. Además se desarrollan para flujo bidimensional en un sistema que tiene cierta inclinación con respecto a la horizontal. Se deduce también la ecuación que expresa el principio de continuidad para dos y tres dimensiones.

### **2.1 Ecuaciones de Navier - Stokes**

Para estudiar las condiciones de equilibrio dinámico de la porción de un fluido contenido en un volumen de control (fig 2.1) se parte de la segunda ley de Newton. Para ello se consideran tres fuerzas que se oponen al movimiento, que son las fuerzas de superficie (presión y tangenciales) y la fuerza de cuerpo (peso propio). La deducción de estas fuerzas se hace en el sentido del eje x, considerando que el flujo está impedido de desplazarse en la dirección del eje z.



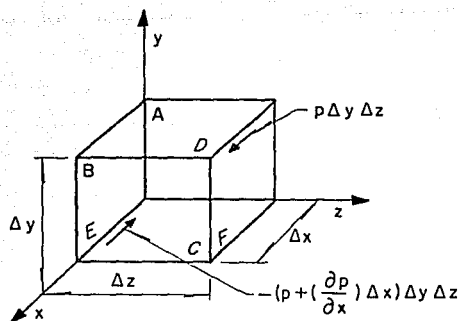


Fig 2.1 Volumen de control y empujes sobre las caras A y B

La primera de ellas está dada por los empujes en las caras del cuerpo debidos a la presión, que son normales a tales caras. Al multiplicar la presión en la cara A por el área de la misma, que es igual a  $\Delta z \Delta y$ , se

obtiene una fuerza que actúa sobre dicha cara. En la cara opuesta hay una fuerza debida a la presión, pero de sentido contrario igual a  $-[p + (\partial p / \partial x) \Delta x] \Delta y \Delta z$ . De este modo se obtiene entre las superficies A y B una diferencia de fuerzas igual a  $-(\partial p / \partial x) \Delta x \Delta y \Delta z$ .

La siguiente fuerza a considerar es la debida a la resistencia al movimiento en términos del esfuerzo tangencial de fricción  $\sigma$ , multiplicado por el área sobre la que actúa dicho esfuerzo. Las fuerzas tangenciales que intervienen en el volumen de control en la dirección del eje x (actúan sobre las caras C, D, E y F de la fig 2.2), aparecen en la suma siguiente

$$\sigma_{zx} \rho \Delta x \Delta z - \left[ \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial y} \Delta y \right] \rho \Delta x \Delta z + \sigma_{yx} \rho \Delta x \Delta y - \left[ \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial z} \Delta z \right] \rho \Delta x \Delta y$$

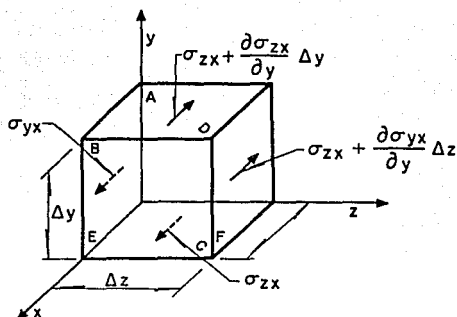


Fig 2.2 Volumen de control y esfuerzos sobre las caras C,D,E y F

y, simplificando

$$- \left[ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial y} \rho \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial z} \rho \Delta x \Delta y \Delta z \right]$$

En la fig 2.3 se observa al volumen inclinado un ángulo  $\phi$  con respecto a la horizontal. También sobre la porción en estudio se ejerce en el sentido del eje x la aceleración gravitacional X; esto constituye la fuerza de cuerpo de magnitud  $X \rho \Delta x \Delta y \Delta z$ , siendo  $\rho$  la masa del fluido por unidad de volumen.

La suma de estas fuerzas produce una aceleración sobre la masa del elemento. Dicha aceleración es igual al cambio en el tiempo del componente de la velocidad u en el sentido x. En efecto, la multiplicación de la aceleración por la masa del líquido resulta

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$

Según la segunda ley de Newton, se tiene que

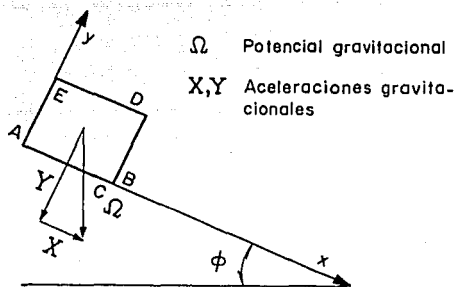


Fig 2.3 Volumen de control en un sistema inclinado un ángulo  $\phi$  con respecto a la horizontal

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + X \rho \Delta x \Delta y \Delta z - \left[ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial z} \right] \rho \Delta x \Delta y \Delta z \\
 = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] \rho \Delta x \Delta y \Delta z
 \end{aligned}$$

Después de dividir entre el volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$  y la densidad  $\rho$ , la ecuación dinámica queda

$$\boxed{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X - \left[ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial z} \right] = \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (2.1a)$$

En forma análoga puede obtenerse la ecuación del flujo en la dirección del eje  $y$ , donde  $Y$  corresponde a la aceleración gravitacional en el sentido del eje  $y$ ; en efecto

$$\boxed{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma - \left[ \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial z} \right] = \frac{\partial v}{\partial t}} \quad (2.1b)$$

Las ecs 2.1 son las ecuaciones de Navier - Stokes para las direcciones x y y. Estas ecuaciones se utilizan en cualquier fluido sobre el que actúen las fuerzas del campo gravitacional.

## 2.2 Ecuaciones de Euler

Cuando la acción de la viscosidad sobre el volumen de control es despreciable, el tercer término de las ecs 2.1 desaparece, y en consecuencia se obtiene

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.2a)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.2b)$$

como la velocidad puede cambiar en el espacio y en el tiempo, se tiene que

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

al dividir esta ecuación entre dt

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Recordando que las derivadas totales de x y y con respecto al tiempo t son las velocidades u y v, respectivamente, resulta que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

al sustituir la ecuación anterior y su análoga para la velocidad v en las ecs 2.2, se encuentra

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.3a)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.3b)$$

Por su parte, se considera que las aceleraciones gravitacionales X y Y son las derivadas del potencial gravitacional  $\Omega$  con respecto a x y y, respectivamente. Además, este potencial se define como la aceleración de la gravedad g que actúa en un cuerpo en el sentido del eje y' hacia el centro de la tierra, se tiene que  $\Omega = -gy'$  (fig 2.3). Al descomponer la distancia y' en el sentido de los ejes x y y, las aceleraciones gravitacionales X y Y resultan

$$X = \frac{\partial}{\partial x} (gx \sin \phi) ; Y = \frac{\partial}{\partial y} (-gy \cos \phi)$$

Operando y sustituyendo en la ec 2.3 se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \phi \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \phi \quad (2.4b)$$

si la presión y la velocidad no cambian en el tiempo se tiene un flujo permanente, por lo que las ecs 2.4 quedan como

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \phi = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.5a)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \phi = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.5b)$$

Las ecs 2.3 y 2.4 corresponden a las ecuaciones de Euler. Las ecs 2.5 representan a las ecuaciones de Euler para flujo permanente y son útiles para deducir la ecuación de la energía. El segundo término del primer miembro permite descomponer la acción del campo gravitatorio según la inclinación que presente el flujo con respecto a un plano horizontal de referencia.

### 2.3 Ecuación de continuidad

Supóngase ahora que la velocidad en cada punto del volumen de control de la fig 2.1 puede expresarse vectorialmente como  $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ ; el flujo de masa que ingrese al volumen a través de la cara A será igual a  $[u\rho]\Delta y\Delta z$ , y el que salga por la cara B será  $[u\rho + (\partial(u\rho)/\partial x)\Delta x]\Delta y\Delta z$ . La diferencia del flujo de masa al pasar por el cuerpo en la dirección x será igual a  $[\partial(u\rho)/\partial x]\Delta x\Delta y\Delta z$ . Lo mismo puede decirse para la dirección de los ejes y y z, siendo las diferencias del flujo de masa iguales a  $[\partial(v\rho)/\partial y]\Delta x\Delta y\Delta z$  y  $[\partial(w\rho)/\partial z]\Delta x\Delta y\Delta z$ , respectivamente. Además, la cantidad de masa dentro del volumen de control también varía en el tiempo una cierta cantidad  $(\partial\rho/\partial t)\Delta t\Delta x\Delta y\Delta z$ .

Como las masas introducidas o extraídas al volumen de control son iguales a las diferencias de flujo de masa en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el cambio en la cantidad de masa dentro del volumen de control deberá ser igual a lo que transitó por el paralelepípedo en las tres direcciones. Así se puede establecer que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (u\rho) + \frac{\partial}{\partial y} (v\rho) + \frac{\partial}{\partial z} (w\rho) \right] \Delta t\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t\Delta x\Delta y\Delta z = 0$$

Si la ecuación anterior se divide entre el volumen de control y el intervalo  $\Delta t$  se tiene

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (u\rho) + \frac{\partial}{\partial y} (v\rho) + \frac{\partial}{\partial z} (w\rho) \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Si se considera que la masa específica no sufre cambios de un punto a otro, la ecuación anterior queda

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.6)$$

y si ahora la masa específica tampoco cambia con el tiempo ( $\partial\rho/\partial t = 0$ ), al dividir entre  $\rho$  resulta que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.7a)$$

Por último, si no existe flujo en la dirección del eje z, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.7b)$$

La ec 2.6 expresa el principio de continuidad en un flujo tridimensional cuando  $\rho$  varía con el tiempo, mientras que las ecs 2.7 lo hacen para  $\rho$  constante en flujos tri y bidimensional, respectivamente (flujos incompresibles).

## 2.4 Sistema en coordenadas polares

### 2.4.1 Transformaciones

Las ecs 2.4 y 2.7b se expresan en coordenadas polares (ver fig 2.4), para lo cual se usan las expresiones siguientes

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{angtan} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \text{ sen } \theta$$

De las ecuaciones anteriores se sabe que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \text{sen } \theta \quad (2.9)$$

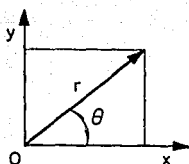


Fig 2.4 Equivalencia de los Sistemas Cartesiano y Polar

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\text{sen } \theta}{r} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\text{cos } \theta}{r} \quad (2.11)$$

Si se tiene una función  $F = F(x, y)$  en donde  $x = x(r, \theta)$  y  $y = y(r, \theta)$ , se tendrá que las derivadas de  $F$  respecto a  $x$  y  $y$  son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (2.13)$$

Al sustituir las ecs 2.8 y 2.10 en la 2.12 y las ecs 2.9 y 2.11 en la 2.13, las ecs 2.12 y 2.13 pueden operarse a cualquier función que tenga las mismas características que la función  $F$ , a saber

$$\frac{\partial}{\partial x} = \text{cos } \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{sen } \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \text{sen } \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\text{cos } \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.15)$$



Así mismo, de la fig 2.4 las velocidades  $u$  y  $v$  pueden escribirse en términos de las velocidades  $v_r$  y  $v_\theta$ , en efecto

$$u = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \quad (2.16)$$

$$v = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \quad (2.17)$$

o bien

$$v_r = u \cos \theta + v \sin \theta \quad (2.18)$$

$$v_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta \quad (2.19)$$

si se derivan las ecs 2.16 y 2.17 con respecto a  $r$  y  $\theta$  se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial v_r}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -v_r \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = v_r \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (2.23)$$

#### 2.4.2 Ecuaciones de Euler

Si ahora se sustituyen las ecs 2.14 y 2.15 en las ecs 2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho} \left[ \cos \theta \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + g \sin \phi = \frac{\partial u}{\partial t} + \\ u & \left[ \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + v \left[ \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \\ & -\frac{1}{\rho} \left[ \sin \theta \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] - g \cos \phi = \frac{\partial v}{\partial t} + \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$u \left[ \cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + v \left[ \sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \quad (2.25)$$

si se multiplica a la ec 2.24 por  $-\sin \theta$  y a la ec 2.25 por  $\cos \theta$ , al sumar miembro a miembro se tiene que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] - g \cos(\theta - \phi) &= -\sin \theta \cos \theta u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r} u \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ -\sin^2 \theta v \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} v \frac{\partial u}{\partial \theta} + \cos^2 \theta u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} u \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ + \sin \theta \cos \theta v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} v \frac{\partial v}{\partial \theta} &+ \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial t} \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por otra parte, los productos de las velocidades  $u$  y  $v$  por las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  respecto a  $r$  y  $\theta$  resultan ser

$$u \frac{\partial u}{\partial r} = (v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta) \left[ \cos \theta \frac{\partial v_r}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] \quad (2.27a)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial \theta} &= (v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta) \left[ -v_r \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \cos \theta \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.27b)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} = (v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta) \left[ \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] \quad (2.27c)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial \theta} &= (v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta) \left[ v_r \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.27d)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial r} = (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) \left[ \cos \theta \frac{\partial v_r}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] \quad (2.27e)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial \theta} = (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) \left[ -v_r \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \cos \theta \right]$$

$$- \operatorname{sen} \theta \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \quad (2.27f)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = (v_r \operatorname{sen} \theta + v_{\theta} \cos \theta) \left[ \operatorname{sen} \theta \frac{\partial v_r}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right] \quad (2.27g)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial \theta} = (v_r \operatorname{sen} \theta + v_{\theta} \cos \theta) \left[ v_r \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_{\theta} \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right] \quad (2.27h)$$

al sustituir las ecs 2.27 en la ec 2.26 y factorizar en  $v_r$  y  $v_{\theta}$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] - g \cos (\theta - \phi) = \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial t} \operatorname{sen} \theta \right] \\ v_r & \left[ \left( - \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta - \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta \right) \frac{\partial v_r}{\partial r} \right. \\ & + \left( \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \\ & + \left( \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta + \operatorname{sen}^4 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \right) \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \\ & + \left( - \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \\ & + \left( - \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta \right) \frac{v_r}{r} \\ & + \left( - \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta - \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta \right) \frac{v_{\theta}}{r} \left. \right] \\ + v_{\theta} & \left[ \left( \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \right) \frac{\partial v_r}{\partial r} \right. \\ & + \left( - \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ -\operatorname{sen}^3\theta \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta \right] \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \\
& + \left[ \operatorname{sen}^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta + \cos^4\theta \right] \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\
& + \left[ \operatorname{sen}^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta + \cos^4\theta \right] \frac{v_r}{r} \\
& + \left[ \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta - \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta - \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta \right] \frac{v_\theta}{r} \Big]
\end{aligned}$$

al simplificar la ecuación anterior y agrupando a las derivadas parciales con respecto al tiempo, según la ec 2.19, se llega a que

$$\boxed{
\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] - g \cos(\theta - \phi) = \\
& \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r}
\end{aligned}
} \tag{2.28a}$$

Si ahora se multiplica a la ec 2.24 por  $\cos\theta$  y a la 2.25 por  $\operatorname{sen}\theta$ , al sumar miembro a miembro

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] - g \operatorname{sen}(\theta - \phi) = \cos^2\theta u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{r} u \frac{\partial u}{\partial \theta} \\
& + \operatorname{sen}\theta \cos\theta v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r} v \frac{\partial u}{\partial \theta} + \operatorname{sen}\theta \cos\theta u \frac{\partial v}{\partial r} \\
& - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r} u \frac{\partial v}{\partial \theta} + \operatorname{sen}^2\theta v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{r} v \frac{\partial v}{\partial \theta} \\
& + \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \cos\theta + \frac{\partial v}{\partial t} \operatorname{sen}\theta \right]
\end{aligned}$$

Al sustituir las ecs 2.27 en la ecuación anterior y factorizar en  $v_r$  y

$v_\theta$ 

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] - g \sin(\theta - \phi) = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial t} \sin \theta \right] + \\
& v_r \left[ \left( \cos^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta \right) \frac{\partial v_r}{\partial r} \right. \\
& + \left( -\sin \theta \cos^3 \theta - \sin^3 \theta \cos \theta + \sin \theta \cos^3 \theta + \sin^3 \theta \cos \theta \right) \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \\
& + \left( -\sin \theta \cos^3 \theta + \sin \theta \cos^3 \theta - \sin^3 \theta \cos \theta + \sin^3 \theta \cos \theta \right) \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \\
& + \left( \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\
& + \left( \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) \frac{v_r}{r} \\
& + \left. \left( -\sin \theta \cos^3 \theta + \sin \theta \cos^3 \theta - \sin^3 \theta \cos \theta + \sin^3 \theta \cos \theta \right) \frac{v_\theta}{r} \right] \\
& + v_\theta \left[ \left( -\sin \theta \cos^3 \theta - \sin^3 \theta \cos \theta + \sin \theta \cos^3 \theta + \sin^3 \theta \cos \theta \right) \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right. \\
& + \left( \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \\
& + \left( \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta + \cos^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \\
& + \left( -\sin^3 \theta \cos \theta - \sin \theta \cos^3 \theta + \sin^3 \theta \cos \theta + \sin \theta \cos^3 \theta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\
& + \left( \sin^3 \theta \cos \theta - \sin^3 \theta \cos \theta + \sin \theta \cos^3 \theta - \sin \theta \cos^3 \theta \right) \frac{v_r}{r} \\
& + \left. \left( -\sin^4 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \cos^4 \theta \right) \frac{v_\theta}{r} \right]
\end{aligned}$$

Al simplificar se obtiene

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g \operatorname{sen}(\theta - \phi) = \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} \quad (2.28b)$$

Las ecs 2.28 son la versión en coordenadas polares de las ecs 2.4, útiles para obtener la ecuación de la energía.

#### 2.4.3 Ecuación de continuidad

Con base en las ecs 2.14 y 2.15, la 2.6 se puede escribir como

$$\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

al sustituir las ecs 2.20 a 2.23 en la ecuación anterior resulta

$$\begin{aligned} \cos \theta \left[ \cos \theta \frac{\partial v_r}{\partial r} - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \left[ -v_r \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right. \\ \left. - v_\theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \operatorname{sen} \theta \left[ \operatorname{sen} \theta \frac{\partial v_r}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] + \\ + \frac{\cos \theta}{r} \left[ v_r \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

si se realizan los productos y se simplifica

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2.29)$$

La ec 2.29 expresa el principio de continuidad en coordenadas polares para  $\rho$  constante, en un flujo incompresible bidimensional.

### 3. METODO DE SOLUCION

En la mayoría de los estudios de los flujos bidimensionales suele suponerse que el comportamiento de éstos es irrotacional. Esto significa que toda partícula en movimiento se desplaza sin girar en sentido alguno, Esta simplificación es útil cuando la magnitud del componente principal de la velocidad del flujo es notablemente mayor al perpendicular a él.

Con base en lo anterior, el estudio de flujos con curvatura se ha desarrollado con modelos teóricos en los que los efectos rotacionales del flujo se simplifican mediante ciertas consideraciones que, gracias al uso de datos de laboratorio, han sido tomados en cuenta a través de términos empíricos cuya eficacia depende de los problemas que pretenden resolver.

Sin embargo, las observaciones que se han hecho entorno a los fenómenos estudiados y los resultados que de dichos métodos se han obtenido,

revelan ciertas fallas cuando el problema analizado se aproxima a condiciones extremas en las que las hipótesis hechas en el planteamiento de los métodos pierden validez. Debido a lo anterior, para encontrar soluciones satisfactorias a esos problemas se requiere de métodos más apegados al funcionamiento real.

En este capítulo se presentan las ecuaciones con las que puede encontrarse la solución a un flujo bidimensional. En dichas ecuaciones se observa la influencia que ejerce la vorticidad, tanto en coordenadas cartesianas como polares.

### 3.1 La función corriente

En la mecánica de fluidos se dice que la función corriente de un flujo sirve para determinar el valor de las velocidades en un escurrimiento plano, en donde las partículas en movimiento tienen la propiedad de desplazarse sobre trayectorias tangentes a la velocidad. (Sánchez Bribiesca y Carmona, 1991).

Por su parte, para algunos tipos de flujo existe una función escalar  $\phi(x,y)$  tal que la velocidad  $v$  en cada punto es  $v = \text{grad } \phi$ , es decir

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Al calcular el rotacional de la velocidad ( $\text{rot } v$ ), con las ecuaciones anteriores se llega a que

$$\text{rot } v = \text{rot } (\text{grad } \phi) = 0$$

Esto significa que la existencia de un potencial de velocidades se limita a los casos de flujo irrotacional (Sotelo, 1974).

Si se considera la línea de corriente A de la fig 3.1, por definición se sabe que no hay flujo que la cruce, por lo que el régimen de flujo  $\psi$  a través de todas las líneas OA es el mismo. Por lo anterior se dice que  $\psi$  es una constante de la línea de corriente y puede ser encontrada como una función de  $x$  y  $y$ . Del mismo modo, el régimen de flujo entre el punto O y la línea B, ubicada muy cerca de la línea A, será  $\psi + d\psi$ .



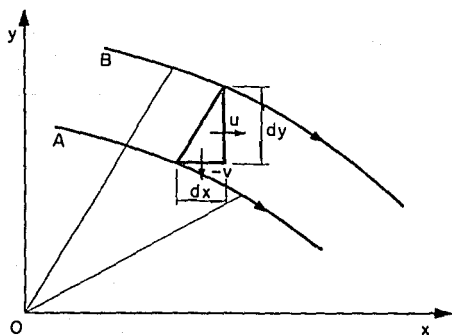


Fig 3.1 Líneas de corriente del flujo

A su vez, los regímenes de flujo que entran y salen del triángulo de la fig 3.1 son iguales si se toma en cuenta el principio de continuidad; en efecto

$$d\psi = -v dx + u dy \quad (3.1)$$

pero como  $d\psi$  es una función de  $x$  y  $y$ , la derivada total de  $d\psi$  resulta

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (3.2)$$

al comparar las ecs 3.1 y 3.2 se llega a que

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}} \quad (3.3)$$

Por otra parte, la rotacionalidad que tiene el punto  $P(x,y)$  de la fig 3.2 con respecto a un eje perpendicular al plano  $xy$  puede ser definida como la velocidad angular de dos elementos diferenciales lineales perpendiculares entre sí. En efecto, la partícula  $P(x,y)$  tiene

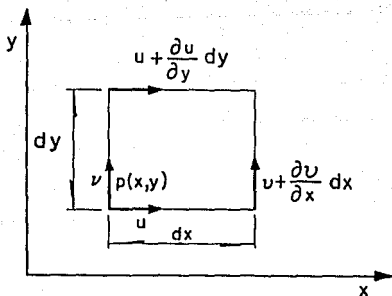


Fig 3.2 Rotacionalidad del punto P(x,y)

componentes de la velocidad  $u$  y  $v$  en el plano  $xy$ .

Si se define al rotacional de la velocidad  $v$  como vorticidad  $\omega$  y se le considera como positiva en el sentido contrario a las manecillas del reloj, la velocidad angular en la partícula P(x,y) resulta

$$\omega = \frac{\left[ v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right] - v}{dx} + \frac{u - \left[ u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right]}{dy}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}} \quad (3.4)$$

si se toma en cuenta a las ecs 3.3, la ec 3.4 puede también escribirse como

$$\omega = - \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] \quad (3.5)$$

o bien

$$\nabla_{xy}^2 \psi = -\omega$$

(3.6)

En la ec. 3.6 puede observarse que el Laplaciano de la función corriente es igual a la vorticidad del flujo cuando se considera que éste es rotacional. Nótese que si el flujo es irrotacional se obtiene la ecuación de Laplace que describe al flujo con potencial.

Ahora bien, atendiendo a las ecs. 2.16 y 2.17, en la ec. 3.4 se tendrá

$$\begin{aligned} \omega &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[ v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \right] - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \right] \\ &- \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[ v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \right] - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \right] \end{aligned}$$

derivando

$$\begin{aligned} \omega &= \cos \theta \left[ \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] \\ &- \frac{\sin \theta}{r} \left[ \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_r \cos \theta + \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - v_\theta \sin \theta \right] \\ &- \sin \theta \left[ \cos \theta \frac{\partial v_r}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] \\ &- \frac{\cos \theta}{r} \left[ \cos \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_r \sin \theta - \sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - v_\theta \cos \theta \right] \end{aligned}$$

al simplificar

$$\omega = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v_\theta$$

(3.7)

de manera semejante puede obtenerse a las velocidades en coordenadas polares con base en la función corriente. En efecto, si se sustituye a

las ecs 2.16 y 2.17 en las ecs 3.3 se tiene que

$$v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

y con base en las ecs 2.14 y 2.15, en las ecuaciones anteriores se llega a que

$$v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cos \theta + \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta \quad (3.8a)$$

$$v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta \quad (3.8b)$$

En las ecs 3.8 puede observarse que las velocidades en coordenadas polares resultan

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3.9a)$$

$$v_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.9b)$$

Al sustituir las ecs 3.9 en la 3.7 se tiene que

$$\omega = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad (3.10)$$

o bien

$$\nabla_{r\theta}^2 \psi = - \omega \quad (3.11)$$

Las ecs 3.6 y 3.11 sirven para expresar la vorticidad del flujo en términos de la función corriente en coordenadas cartesianas y polares, respectivamente.

### 3.2 Influencia de la vorticidad en las ecuaciones de Euler

Si se deriva parcialmente a la ec 2.4a respecto a  $y$  y la 2.4b respecto a  $x$ , se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$$

restando ambas ecuaciones

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} \right] + u \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right] + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0$$

atendiendo a la ec 2.7b

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} \right] + u \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right] = 0$$

al factorizar las derivadas con respecto al tiempo  $t$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] + u \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right] = 0$$

y según la ec. 3.4, la ecuación anterior resulta

$$u \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right] = -\frac{\partial \omega}{\partial t}$$

al agrupar las derivadas con respecto a  $x$  y  $y$  y dentro de los corchetes

$$u \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + v \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = - \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

y al tomar nuevamente en cuenta a la ec. 3.4

$$\boxed{u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = - \frac{\partial \omega}{\partial t}} \quad (3.12a)$$

en atención a las ecs. 3.3 se llega a que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = - \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (3.12b)$$

Por otro lado, al realizar las derivadas parciales de  $u\omega$  respecto a  $x$  y de  $v\omega$  respecto a  $y$

$$\frac{\partial}{\partial x} ( u \omega ) = u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} ( v \omega ) = v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial y}$$

despejando

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} ( u \omega ) - \omega \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} ( v \omega ) - \omega \frac{\partial v}{\partial y}$$

al sustituir en la ec. 3.12a y recordando a 2.7b

$$\frac{\partial}{\partial x} (u\omega) + \frac{\partial}{\partial y} (v\omega) = - \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (3.12c)$$

Por otra parte, si se multiplica la ec 2.28a por  $r$  se tiene que

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} - r g \sin(\theta - \phi) = v_{\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + v_r r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + v_r v_{\theta} + r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial t}$$

al derivar respecto a  $r$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial r} - g \sin(\theta - \phi) = v_{\theta} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \theta \partial r} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + r v_r \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \\ + r \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + v_r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + v_{\theta} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial t \partial r} \end{aligned} \quad (3.13a)$$

si se deriva la ec 2.28b con respecto a  $\theta$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta} - g \cos(\theta - \phi) = \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \\ + v_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial t \partial \theta} \end{aligned} \quad (3.13b)$$

al restar las ecs 3.13 entre sí y agrupando las derivadas parciales con respecto al tiempo según la ec 3.7

$$\begin{aligned} 0 = v_{\theta} \left[ \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_{\theta}}{r} \right] + \\ v_r \left[ r \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right] + \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} \left[ r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_{\theta} \right] + \frac{\partial \omega}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si ahora se deriva a la ec 3.7 con respecto a  $\theta$  y a  $r$  se tiene que

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r^2} \quad (3.16)$$

al multiplicarse 3.7 y 3.16 por  $r$  se tiene, respectivamente, que

$$r \omega = r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_{\theta} \quad (3.17)$$

$$r \frac{\partial \omega}{\partial r} = r \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \quad (3.18)$$

si a la ec 3.18 se suma la ec 3.7

$$\omega + r \frac{\partial \omega}{\partial r} = - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \quad (3.19)$$

si se sustituye a las ecuaciones 3.7, 3.15, 3.17 y 3.19 en 3.14, al agrupar se llega a que

$$0 = \omega \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \omega r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_{\theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + v_r \left[ r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \right] + r \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

factorizando y dividiendo entre  $r$

$$0 = \omega \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right] + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

y de la ec 2.29

$$\frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \quad (3.20a)$$

si se recuerda el valor de las velocidades  $v_{\theta}$  y  $v_r$  en términos de la



función corriente (ecs 3.9), despejando

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} \quad (3.20b)$$

Por otro lado, al derivar a  $v_{\theta} \omega$  con respecto a  $\theta$  y a  $v_r \omega$  con respecto a  $r$ , se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (v_{\theta} \omega) = v_{\theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (v_r \omega) = v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

despejando

$$v_{\theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (v_{\theta} \omega) - \omega \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta}$$

$$v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (v_r \omega) - \omega \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

al sustituir las dos ecs anteriores en 3.20a se llega a

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (v_{\theta} \omega) - \omega \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial r} (v_r \omega) - \omega \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] = - \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

reordenando

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_{\theta} \omega) + \frac{\partial}{\partial r} (v_r \omega) - \omega \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] = - \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

por su parte, la ec 2.29 también se puede escribir como

$$- \frac{v_r}{r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

que al sustituirse en la ecuación que la precede y reordenando resulta

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_{\theta} \omega) + \frac{\partial}{\partial r} (v_r \omega) + \omega \frac{v_r}{r} = - \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

$\frac{\partial \omega}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_{\theta} \omega) - \frac{\partial}{\partial r} (v_r \omega) - \frac{\omega v_r}{r}$	(3.20c)
---	---------

Las ecs 3.12 y 3.20 expresan en coordenadas cartesianas y coordenadas polares respectivamente, la relación que guardan la función corriente y la vorticidad de acuerdo con las ecuaciones de Euler (en dos direcciones perpendiculares).

Por su parte, con las ecs 3.5 y 3.12c se forma un sistema de ecuaciones en el que intervienen los valores de la función corriente, de la vorticidad y de las velocidades en un flujo bidimensional. Lo mismo puede decirse en relación a las ecs 3.7 y 3.20c para un sistema expresado en coordenadas polares.

Al resolver dichos sistemas, las presiones en el flujo pueden obtenerse a través de las ecuaciones de Euler. En otras palabras, una vez que se conozca el valor de las velocidades en un esquema bidimensional por medio de los sistemas mencionados, el valor de la presión en cualquier punto del flujo puede obtenerse mediante el uso de las ecuaciones de Euler.

### 3.3 Ecuaciones en diferencias finitas

En la Hidráulica es frecuente que para dar respuesta a algunos problemas se requiera resolver ecuaciones diferenciales parciales. En la mayoría de ellas no se puede obtener su solución por métodos analíticos, por lo que se recurre a soluciones aproximadas.

Se dice que el orden de una ecuación diferencial parcial es el mayor número de veces que se ha efectuado la derivación de uno de los términos de dicha ecuación con respecto a una o más de sus variables.

La ecuación diferencial parcial lineal de la función  $u = u(x, y)$  se define como

$$\sum_{n=0}^O \sum_{m=0}^P a_{nm}(x, y) \frac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial y^m} = g(x, y)$$

donde  $a_{nm}(x, y)$  y  $g(x, y)$  son funciones conocidas de  $x$  y  $y$ , y  $O$  y  $P$  son constantes enteras positivas. Cuando  $g(x, y) = 0$  la diferencial parcial además de lineal es homogénea.

Si la función  $u$  ó una de sus derivadas parciales aparece elevada a una potencia diferente a la unidad, la ecuación diferencial parcial no es lineal.

Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales son más complicadas de resolver que las ecuaciones diferenciales ordinarias; las ecuaciones que aquí se estudiarán son lineales de segundo orden, a saber

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D \frac{\partial f}{\partial x} + E \frac{\partial f}{\partial y} + F f + G = 0 \quad (3.21)$$

donde  $A, B, C, D, E, F$  y  $G$  son funciones de  $x$  y  $y$ , y  $f = f(x, y)$ .

Para dar solución a este tipo de ecuaciones existen varios métodos en los que la eficacia y utilización de unos u otros depende de  $A, B$  y  $C$ , y de las condiciones iniciales y de frontera del problema a resolver.

Uno de los métodos más utilizados para obtener una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales parciales es el método de diferencias finitas, en el cual se sustituyen las derivadas parciales por cocientes de diferencias. El método se basa en la serie de Taylor de una función  $f$  de la variable  $z$ , en efecto

$$f(z+\Delta z) = f(z) + f'(z)\Delta z + f''(z)\frac{(\Delta z)^2}{2} + f'''(z)\frac{(\Delta z)^3}{6} + O(\Delta z^n) \quad (3.22)$$

donde  $O(\Delta z^n)$  es el error de truncado de la serie de Taylor de orden  $n$  (aquí,  $n = 4$ ), y  $\Delta z$  es un incremento de la variable  $z$ . Si se sustituyen  $z$  por  $x$  y  $\Delta z$  por  $\Delta x$ , y posteriormente  $z$  por  $x$  y  $\Delta z$  por  $-\Delta x$  se tiene que

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{(\Delta x)^2}{2} + f'''(x)\frac{(\Delta x)^3}{6} + O(\Delta x^4) \quad (3.23)$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{(\Delta x)^2}{2} - f'''(x)\frac{(\Delta x)^3}{6} + O(\Delta x^4) \quad (3.24)$$

Si en las ecs 3.23 y 3.24 no se toman en cuenta los términos de segundo orden en adelante y se desprecian los errores de truncado, al despejar las derivadas se obtiene que

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.25)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} \quad (3.26)$$

Si ahora se resta la ec 3.24 de la 3.23 y se despeja la derivada de primer orden, al despreciar los errores de truncado se tiene que

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2 \Delta x} \quad (3.27)$$

El numerador en las ecs 3.25, 3.26 y 3.27 corresponden a las diferencias finitas derecha, izquierda y central, respectivamente.

Al sumar las ecs 3.23 y 3.24, y descartando los errores por truncado y los términos de tercer orden en adelante, se tiene que

$$f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) = 2 f(x) + f''(x)(\Delta x)^2$$

si se despeja la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{f(x-\Delta x) - 2 f(x) + f(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (3.28)$$

La ec 3.28 representa una aproximación a la segunda derivada de  $f$ . Debe tenerse cuidado con el desarrollo de las aproximaciones cuando la función  $f$  depende de dos o más variables. Si  $f$  depende, por ejemplo, de

las variables  $x$  y  $y$ , la segunda derivada parcial de  $f$  con respecto a  $y$  resulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(x, y-\Delta y) - 2f(x, y) + f(x, y+\Delta y)}{(\Delta y)^2} \quad (3.29)$$

Con base en lo anterior y recordando que  $\psi$  es una función que depende de  $x$  y  $y$ , si se acepta que las ecuaciones del tipo  $\psi(x, y)$  puedan escribirse como  $\psi_{i,j}$ , donde  $i$  y  $j$  son subíndices con los que se ubica al punto del que se quiere conocer sus características, y que van creciendo al avanzar en el sentido de los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente, de la fig 3.3 y de la ec 3.5 resulta

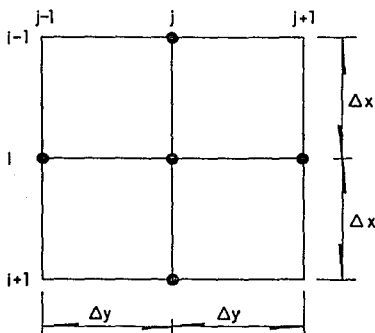


Fig 3.3 Posiciones de las variables de las ecuaciones en diferencias finitas

$$-\omega_{i,j}^{P+1} = \frac{\psi_{i-1,j}^{P+1} - 2\psi_{i,j}^{P+1} + \psi_{i+1,j}^{P+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j-1}^{P+1} - 2\psi_{i,j}^{P+1} + \psi_{i,j+1}^{P+1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.30)$$

donde el superíndice  $P+1$  indica el intervalo de tiempo en el que se resuelve la ecuación. Al despejar a  $\psi$

$$\begin{aligned}
 -\omega_{1,j}^{P+1} = & \left[ \frac{1}{\Delta x} \right]^2 \psi_{1-1,j}^{P+1} + \left[ \frac{1}{\Delta x} \right]^2 \psi_{1+1,j}^{P+1} - 2 \left[ \left[ \frac{1}{\Delta x} \right]^2 + \right. \\
 & \left. \left[ \frac{1}{\Delta y} \right]^2 \right] \psi_{1,j}^{P+1} + \left[ \frac{1}{\Delta y} \right]^2 \psi_{1,j-1}^{P+1} + \left[ \frac{1}{\Delta y} \right]^2 \psi_{1,j+1}^{P+1}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Por su parte, la ec 3.12c puede escribirse de diversas formas atendiendo al valor que adquieran las velocidades perpendiculares. En diversas publicaciones (véase por ejemplo Roache, 1982) se ha demostrado que la elección entre un esquema en diferencias hacia adelante o hacia atrás resulta en una mejor aproximación de la solución buscada. En efecto, la ec 3.12 resulta

$$\frac{\omega_{1,j}^{P+1} - \omega_{1,j}^P}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial x} (u\omega)_{1,j}^P + \frac{\partial}{\partial y} (v\omega)_{1,j}^P \tag{3.32}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x} (u\omega)_{1,j}^P = \begin{cases} \frac{(u\omega)_{1,j}^P - (u\omega)_{1,j-1}^P}{\Delta x} & \text{si } u_{1,j}^P > 0 \\ \frac{(u\omega)_{1,j+1}^P - (u\omega)_{1,j}^P}{\Delta x} & \text{si } u_{1,j}^P < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (v\omega)_{1,j}^P = \begin{cases} \frac{(v\omega)_{1,j}^P - (v\omega)_{1-1,j}^P}{\Delta y} & \text{si } v_{1,j}^P > 0 \\ \frac{(v\omega)_{1+1,j}^P - (v\omega)_{1,j}^P}{\Delta y} & \text{si } v_{1,j}^P < 0 \end{cases}$$

A estas aproximaciones de las derivadas también se les llama progresivas (Nakamura, 1992) Por su parte, la ec. 3.7 resulta

$$-\omega_{i,j}^{P+1} = \frac{\psi_{i-1,j}^{P+1} - 2\psi_{i,j}^{P+1} + \psi_{i+1,j}^{P+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r} \frac{\psi_{i+1,j}^{P+1} - \psi_{i-1,j}^{P+1}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{\psi_{i,j-1}^{P+1} - 2\psi_{i,j}^{P+1} + \psi_{i,j+1}^{P+1}}{(\Delta \theta)^2}$$

y agrupando

$$\begin{aligned} -\omega_{i,j}^{P+1} = & \left[ \left( \frac{1}{\Delta r} \right)^2 - \frac{1}{2\Delta r r_i} \right] \psi_{i-1,j}^{P+1} + \\ & \left[ \left( \frac{1}{\Delta r} \right)^2 - \frac{1}{2\Delta r r_i} \right] \psi_{i+1,j}^{P+1} - 2 \left[ \left( \frac{1}{\Delta r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r_i \Delta \theta} \right)^2 \right] \psi_{i,j}^{P+1} \\ & + \left[ \frac{1}{r_i \Delta \theta} \right]^2 \psi_{i,j-1}^{P+1} + \left[ \frac{1}{r_i \Delta \theta} \right]^2 \psi_{i,j+1}^{P+1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

A su vez, la ec 3.20c resulta

$$\frac{\omega_{i,j}^{P+1} - \omega_{i,j}^P}{\Delta t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \omega)_{i,j}^P - \frac{\partial}{\partial r} (v_r \omega)_{i,j}^P - \frac{v_r \omega}{r} \quad (3.34)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \omega)_{i,j}^P = \begin{cases} \frac{(v_\theta \omega)_{i,j}^P - (v_\theta \omega)_{i,j-1}^P}{\Delta \theta} & \text{si } v_\theta^P > 0 \\ \frac{(v_\theta \omega)_{i,j+1}^P - (v_\theta \omega)_{i,j}^P}{\Delta \theta} & \text{si } v_\theta^P < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (v_r \omega)_{i,j}^P = \begin{cases} \frac{(v_r \omega)_{i,j}^P - (v_r \omega)_{i-1,j}^P}{\Delta r} & \text{si } v_r^P > 0 \\ \frac{(v_r \omega)_{i+1,j}^P - (v_r \omega)_{i,j}^P}{\Delta r} & \text{si } v_r^P < 0 \end{cases}$$

Las ecs 3.31 y 3.35 junto con las condiciones iniciales y de frontera permiten conocer en cada tiempo (P+1) At los valores de las velocidades u y v así como el del rotacional.

### 3.4 Condiciones de frontera y condiciones iniciales

Para calcular el flujo de agua (no permanente) sobre alguna estructura hidráulica se requiere resolver un sistema de ecuaciones diferenciales junto con sus condiciones iniciales y de frontera. Así será posible obtener los valores de la función corriente y de la vorticidad en el flujo. Además, a partir de ellas se calcula el valor de la presión.

En la solución del sistema de ecuaciones es necesario establecer el valor que adoptarán las variables en las fronteras que limitan la zona en estudio, así como la magnitud que adquieren al inicio del cálculo. (A partir de este punto la palabra "tangencial" se referirá indistintamente a los valores de las variables orientadas en el sentido de los ejes y ó  $\theta$ , y "radial" a las variables en la dirección de los ejes x o r).

#### 3.4.1 Frontera izquierda

El valor que las velocidades tangenciales adquieren en la frontera izquierda varía en función de la profundidad a la que se encuentren, pudiendo seguir una ley de distribución exponencial. En esta frontera se considera que el valor de las velocidades radiales es nulo y que, como en todas las fronteras, el valor de la función de corriente es conocido.

El cálculo de la vorticidad en la frontera izquierda considera que

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

Esto significa que la vorticidad no cambia de valor entre la frontera y la sección transversal posterior a ella. Así las cosas, la vorticidad en la frontera izquierda se puede calcular mediante un esquema en diferencias finitas hacia adelante en coordenadas cartesianas como



$$\omega_{1,1}^{P+1} = \frac{\psi_{1,1}^{P+1} - 2\psi_{1,2}^{P+1} + \psi_{1,3}^{P+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{\psi_{1-1,1}^{P+1} - 2\psi_{1,1}^{P+1} + \psi_{1+1,1}^{P+1}}{(\Delta x)^2}$$

o en su defecto, en coordenadas polares como

$$\omega_{1,1}^{P+1} = \frac{\psi_{1,1}^{P+1} - 2\psi_{1,2}^{P+1} + \psi_{1,3}^{P+1}}{(r_1 \Delta\theta)^2} + \frac{\psi_{1-1,1}^{P+1} - 2\psi_{1,1}^{P+1} + \psi_{1+1,1}^{P+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\psi_{1+1,1}^{P+1} - \psi_{1-1,1}^{P+1}}{2 \Delta r}$$

### 3.4.2 Frontera derecha

En lo que respecta a las velocidades y a la función de corriente se pueden hacer las mismas consideraciones que para la frontera izquierda. Se puede considerar que el valor de la vorticidad en este lugar es igual al que se presente en la sección transversal anterior a ella, lo que significa que la vorticidad no cambia sustancialmente en esta zona del flujo.

### 3.4.3 Frontera inferior

Como en este sitio se tiene una pared, el valor de las velocidades radiales es igual a cero, pues no es posible un desplazamiento del agua a través de esta frontera. Por su parte, se considera que las velocidades tangenciales son iguales a cero pues junto a la pared no hay movimiento del agua (pared no deslizante).

En la frontera con el fondo del canal, la vorticidad se calcula para coordenadas cartesianas mediante la ecuación (Roache, 1982)

$$\omega_{1,j}^{P+1} = \frac{7\psi_{1,j}^{P+1} - 8\psi_{1-1,j}^{P+1} + \psi_{1-2,j}^{P+1}}{2(\Delta x)^2}$$

y para tramo curvo

$$\omega_{I,J}^{P+1} = \frac{7 \psi_{I,J}^{P+1} - 8 \psi_{I-1,J}^{P+1} + \psi_{I-2,J}^{P+1}}{2 (\Delta r)^2}$$

en donde  $\Delta x$  y  $\Delta r$  son los intervalos de longitud perpendiculares a la plantilla del canal e  $I$  representa la sección en la pared. Estas expresiones han sido utilizadas con éxito por diversos autores. Ellas se basan en una aproximación en series de Taylor de un polinomio de tercer orden de la función de corriente en la proximidad a la pared.

#### 3.4.4 Frontera superior

En esta frontera la velocidad tangencial puede variar de sección a sección, pero su magnitud será semejante en toda su longitud. La velocidad radical tiene valor nulo pues no es posible que se presenten desplazamientos verticales del agua que crucen la superficie libre.

Por su parte, el valor de la vorticidad en la frontera superior es semejante a la vorticidad en la proximidad del flujo inmediatamente inferior, por lo que se considera que su valor es el mismo.

#### 3.4.5 Condiciones iniciales

Para comenzar los cálculos deben conocerse también los valores iniciales de la función de corriente y de las velocidades. En efecto, con base en los valores de la función de corriente en las fronteras se encuentran los valores de  $\psi$  en el tramo en estudio, y a partir de ellos el valor de las velocidades según sea la versión en diferencias finitas de las ecs 3.3 ó 3.9.

Durante el proceso de cálculo estas variables cambiarán sucesivamente de valor, lo mismo que la vorticidad en cada uno de los puntos de la red de flujo. Por su parte, la vorticidad en toda la zona en estudio valdrá inicialmente cero. A través del proceso iterativo de cálculo, la vorticidad alcanzará un valor fijo que corresponderá a la convergencia del método. Sobre esto se abundará en el siguiente iniciso.

### 3.5 Cálculo de las presiones

#### 3.5.1 Ecuaciones de Poisson

##### 3.5.1.1 Forma en coordenadas cartesianas

Si se deriva a la ec 2.5a con respecto a  $x$  y a la ec 2.5b respecto a  $y$ , se tiene que

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left[ \frac{\partial v}{\partial y} \right]^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

al sumar

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla_{xy}^2 p &= \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial v}{\partial y} \right]^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &+ u \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

por su parte, con el uso de la ecuación 2.7b

$$u \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = u \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0$$

$$v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] = v \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0$$

De lo anterior, la ec 3.35 resulta

$$-\frac{1}{\rho} \nabla_{xy}^2 p = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial v}{\partial y} \right]^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.36)$$

Al elevar la ec 2.7b al cuadrado, se tiene que

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = 0$$

despejando

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}$$

al sustituir en la ec 3.36

$$-\frac{1}{\rho} \nabla_{xy}^2 p = - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

si ahora se consideran a las ecs 3.3 en la ecuación anterior

$$\frac{1}{\rho} \nabla_{xy}^2 p = 2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right)$$

de dividir entre la aceleración de la gravedad, resulta que

$$\frac{1}{\gamma} \nabla_{xy}^2 p = \frac{2}{g} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right)$$

y haciendo

$$S_{xy} = \frac{2}{g} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \quad (3.37)$$

$$h = \frac{p}{\gamma}$$

se llega a que

$$\nabla_{xy}^2 h = S_{xy} \quad (3.38)$$

La ec 3.38 es análoga a la ec 3.6, por lo que los valores de la presión  $h$  (en columna de agua) en un sistema cartesiano pueden calcularse siempre que se conozca el valor de la función  $S_{xy}$ , el cual depende del valor de la función de corriente ( $\psi$ ) en las proximidades del punto en estudio.

### 3.5.1.2 Forma en coordenadas polares

Al derivar la ec 2.28a con respecto a  $\theta$  y la 2.28b con respecto a  $r$ , si se considera que las velocidades son constantes en el tiempo se tiene que

$$-\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + g \operatorname{sen}(\theta - \phi) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \left[ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_r \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r \partial \theta} \quad (3.39)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} \right]^2 + v_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta^2}{r^2} \quad (3.40)$$

Si se divide a las ecs 3.39 y 2.28b entre  $r$ , y si en ésta se hace la misma consideración en cuanto al tiempo, al sumar ambas con la ec 3.40

$$-\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} \right] = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} \right]^2 + v_\theta \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} \right] + v_r \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \right] + \frac{v_r}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] + \frac{v_\theta}{r} \left[ -2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (3.41)$$

Por otra parte, si se deriva la ec 2.29 con respecto a  $\theta$  y se divide entre  $r$ , al ordenar se tiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (3.42)$$

y si la ec 2.29 se multiplica por  $r$  y se deriva con respecto a  $r$ , ordenando y dividiendo entre  $r$  resulta

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} = - \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (3.43)$$

al sustituir las ecs 3.42 y 3.43 en la 3.41, ordenar y operar se tiene que

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\rho} \nabla_{r\theta}^2 p = & \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} \right]^2 + \\ & \frac{v_r}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] - 2 \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \end{aligned}$$

si se despeja a  $-v_r/r$  de la ec 2.29, al ordenar se llega a

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\rho} \nabla_{r\theta}^2 p = & \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} \right]^2 + \\ & - \frac{2}{r} \left[ \frac{v_r^2}{2r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] \quad (3.44) \end{aligned}$$

Ahora bien, si se eleva al cuadrado a la ec 2.29, se tiene que

$$\left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} \right]^2 + 2 \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r^2}{r^2} + 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} \right) + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right]^2$$

y despejando

$$\left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)^2 = -2 \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r^2}{r^2} - 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} - 2 \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta}$$

al sustituir en la ec 3.44 y operar

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla_{r\theta}^2 p = & -2 \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r^2}{r^2} - 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} - 2 \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} \\ & + \frac{2 \partial v_\theta}{r \partial r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_r^2}{r^2} - 2 \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2 \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \end{aligned}$$

factorizando

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla_{r\theta}^2 p = & -2 \frac{v_r}{r} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} \right] - 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \left[ \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} \right] \\ & - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \left[ \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Por otra parte, derivando la ec 3.9a con respecto a r y a  $\theta$ , y a 3.9b respecto a r

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$$

al tomar en cuenta las expresiones anteriores y las ecs 3.9 en la ec 3.45 se tiene que

$$-\frac{1}{\rho} \nabla_{r\theta}^2 p = -2 \left[ \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right] \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right] - \right.$$

$$\left[ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right] \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left[ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right]$$

ordenando y dividiendo entre  $g$

$$-\frac{1}{\gamma} \nabla_{r\theta}^2 p = -\frac{2}{g} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right] \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{r} \left[ \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right] - \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right] \right\}$$

al hacer

$$S_{r\theta} = \frac{2}{g} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right] \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{r} \left[ \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right] - \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right] \right\} \quad (3.46)$$

resulta

$$\nabla_{r\theta}^2 h = S_{r\theta} \quad (3.47)$$

Al igual que la ec 3.38, con la 3.47 pueden calcularse las presiones (en columna de agua) si se conoce el valor de  $S_{r\theta}$  mediante los valores de la función de corriente ( $\psi$ ) ubicados en su proximidad, para un sistema en coordenadas polares.

Para el caso de una curva con un radio muy grande, la ec 3.46 se aproxima a la ec 3.37, conservándose los dos primeros términos del miembro derecho de la ec 3.46 debido a que los demás tienden a un valor nulo.

Las ecs 3.38 y 3.47 son las ecuaciones en la forma de Poisson de la ecuación de la presión para coordenadas cartesianas y polares,



respectivamente. Con ellas puede formarse un sistema de ecuaciones cuya solución es semejante a la de las ecs 3.6 y 3.11.

### 3.5.2 Ecuaciones en diferencias finitas

Para poder calcular las ecs 3.37 y 3.46 se usará un esquema en diferencias finitas de tipo central como el de las ecs 3.27, 3.28 y 3.29. En efecto, la ec 3.37 resulta

$$S_{xy} = \frac{2}{g} \left[ \left[ \frac{\psi_{1+1,j} - 2\psi_{1,j} + \psi_{1-1,j}}{(\Delta x)^2} \right] \left[ \frac{\psi_{1,j+1} - 2\psi_{1,j} + \psi_{1,j-1}}{(\Delta y)^2} \right] - \left[ \frac{\psi_{1+1,j+1} - \psi_{1+1,j-1} - \psi_{1-1,j+1} + \psi_{1-1,j-1}}{4 \Delta x \Delta y} \right]^2 \right] \quad (3.48)$$

Por su parte, la ec 3.46 puede escribirse como

$$S_{r\theta} = \frac{2}{g} \left[ \left[ \frac{\psi_{1+1,j} - 2\psi_{1,j} + \psi_{1-1,j}}{(\Delta r)^2} \right] \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\psi_{1,j+1} - 2\psi_{1,j} + \psi_{1,j-1}}{(\Delta y)^2} \right] - \left[ \frac{1}{r} \frac{\psi_{1+1,j+1} - \psi_{1+1,j-1} - \psi_{1-1,j+1} + \psi_{1-1,j-1}}{4 \Delta x \Delta y} \right]^2 + \frac{1}{r} \left[ \left[ \frac{2}{r} \frac{\psi_{1,j+1} - \psi_{1,j-1}}{2 \Delta \theta} \right] \left[ \frac{\psi_{1+1,j+1} - \psi_{1+1,j-1} - \psi_{1-1,j+1} + \psi_{1-1,j-1}}{4 r \Delta x \Delta y} \right] - \frac{1}{r} \left[ \frac{\psi_{1,j+1} - \psi_{1,j-1}}{2 r \Delta \theta} \right]^2 + \left[ \frac{\psi_{1+1,j} - \psi_{1-1,j}}{2 \Delta r} \right] \left[ \frac{\psi_{1+1,j} - 2\psi_{1,j} + \psi_{1-1,j}}{(\Delta r)^2} \right] \right] \right] \quad (3.49)$$

### 3.5.3 Cálculo de la presión en la frontera inferior

Debido a que la presión manométrica en la superficie del agua es igual a cero y que en las fronteras izquierda y derecha se considera igual a la presión hidrostática, sólo resta conocer el valor de la presión en la frontera inferior.

Si se considera que en esa frontera  $\partial u/\partial y = 0$ , la ec 2.5a para flujo permanente resulta

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \operatorname{sen} \phi = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x}$$

multiplicando por  $-1/g$  y considerando que  $h = p/\gamma$ , al ordenar se tiene

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \operatorname{sen} \phi - \frac{1}{2g} \frac{\partial u^2}{\partial x}$$

que puede escribirse en diferencias finitas como

$$\frac{h_{I,j} - h_{I-1,j}}{\Delta x} = \operatorname{sen} \phi + \frac{1}{2g} \frac{u_{I,j}^2 - u_{I-1,j}^2}{\Delta x}$$

pero como la velocidad vertical en la frontera es igual a cero, al multiplicar por  $\Delta x$  y reordenar resulta

$$h_{I,j} - h_{I-1,j} = \Delta x \operatorname{sen} \phi + \frac{1}{2g} u_{I-1,j}^2 \quad (3.50)$$

ecuación que puede integrarse al sistema de ecuaciones para el cálculo de la presión en los tramos rectos, referenciados con un sistema de coordenadas cartesianas.

Análogamente, al considerar que  $\partial v_r/\partial \theta = 0$ , la ec 2.28b resulta para flujo permanente

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g \sin(\theta - \phi) = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial r} - \frac{v_{\theta}^2}{r}$$

al multiplicarse por  $-1/g$  y considerando que  $h = p/\gamma$  se tiene que

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \sin(\theta - \phi) - \frac{1}{2g} \frac{\partial v_r^2}{\partial r} + \frac{v_{\theta}^2}{gr}$$

que en diferencias finitas resulta

$$\frac{h_{I,J} - h_{I-1,J}}{\Delta r} = \sin(\theta - \phi) - \frac{1}{2g} \frac{v_{rI,J}^2 - v_{rI-1,J}^2}{\Delta r} + \frac{v_{\theta I}^2}{gr}$$

pero en el fondo  $v_r = 0$ , por lo que al multiplicarse por  $\Delta r$

$$h_{I,J} - h_{I-1,J} = \Delta r \sin(\theta - \phi) + \frac{1}{2g} v_{rI-1,J}^2 \Delta r + \frac{\Delta r}{gr} v_{\theta I}^2 \quad (3.51)$$

ecuación que es análoga a la 3.50 para un sistema en coordenadas polares.

### 3.6 Secuela de cálculo

El cálculo de las variables de interés se realiza de la manera siguiente.

1. Se divide la zona del flujo a estudiar en intervalos horizontales ( $\Delta y$ ) y verticales ( $\Delta x$ ) para los tramos rectilíneos y en intervalos angulares ( $\Delta \theta$ ) y radiales ( $\Delta r$ ) en el tramo curvo.

2. Se supone el valor de la vorticidad en toda la zona en estudio igual a cero.

$$\omega_{1,J}^1 = 0$$

3. El superíndice P de las ecuaciones 3.31 a 3.34 se hace igual a 1.

4. Se obtienen los valores de  $\psi_{i,j}^{P+1}$  con un sistema de ecuaciones basado en las ecs 3.31 y 3.33.

5. Las vorticidades en la frontera derecha se hacen iguales a las que haya en la sección inmediatamente aguas arriba y se encuentran los valores de la función de corriente en la frontera para la iteración P+1 con la ecuación

$$\omega_{i, \text{frontera derecha}}^{P+1} = \omega_{i,j}^{P+1}$$

6. Se calculan a las velocidades tangenciales y radiales con la versión en diferencias finitas de las ecs 3.3 y 3.9.

$$v_{i,j}^{P+1} = - \frac{\psi_{i+1,j}^{P+1} - \psi_{i-1,j}^{P+1}}{2 \Delta x} ; u_{i,j}^{P+1} = \frac{\psi_{i,j+1}^{P+1} - \psi_{i,j-1}^{P+1}}{2 \Delta y}$$

$$v_{\theta i,j}^{P+1} = - \frac{\psi_{i+1,j}^{P+1} - \psi_{i-1,j}^{P+1}}{2 \Delta r} ; v_{r i,j}^{P+1} = \frac{1}{r_i} \frac{\psi_{i,j+1}^{P+1} - \psi_{i,j-1}^{P+1}}{2 \Delta \theta}$$

7. Se obtiene el valor de la vorticidad  $\omega_{i,j}^{P+1}$  en la frontera inferior para tramo recto como (I se refiere a la frontera)

$$\omega_{i,j}^{P+1} = \frac{7 \psi_{i,j}^{P+1} - 8 \psi_{i-1,j}^{P+1} + \psi_{i-2,j}^{P+1}}{2 (\Delta x)^2}$$

y para tramo curvo

$$\omega_{i,j}^{P+1} = \frac{7 \psi_{i,j}^{P+1} - 8 \psi_{i-1,j}^{P+1} + \psi_{i-2,j}^{P+1}}{2 (\Delta r)^2}$$

En la frontera superior (L) el valor de la vorticidad se iguala a la vorticidad de la sección vertical inmediatamente inferior a ella.

$$\omega_{L,j}^{P+1} = \omega_{L-1,j}^{P+1}$$

8. Se obtiene el valor de la vorticidad en la frontera izquierda

(G) cuando se trata de tramos rectos mediante la ecuación

$$\omega_{1,G}^{P+1} = \frac{\psi_{1,G}^{P+1} - 2\psi_{1,G+1}^{P+1} + \psi_{1,G+2}^{P+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{\psi_{1-1,G}^{P+1} - 2\psi_{1,G}^{P+1} + \psi_{1+1,G}^{P+1}}{(\Delta x)^2}$$

y para tramos curvos con

$$\omega_{1,G}^{P+1} = \frac{\psi_{1,G}^{P+1} - 2\psi_{1,G+1}^{P+1} + \psi_{1,G+2}^{P+1}}{(r_1 \Delta \theta)^2} + \frac{\psi_{1-1,G}^{P+1} - 2\psi_{1,G}^{P+1} + \psi_{1+1,G}^{P+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\psi_{1+1,G}^{P+1} - \psi_{1-1,G}^{P+1}}{2 \Delta r}$$

9. Se asignan las variables con superíndice P+1 a las variables P.

10. Se usan las ecs 3.32 y 3.34 para obtener el valor de las vorticidades. Para tramos rectos

$$\omega_{1,j}^{P+1} = \omega_{1,j}^P + \frac{\partial}{\partial x} (u\omega)_{1,j}^P \Delta t + \frac{\partial}{\partial y} (v\omega)_{1,j}^P \Delta t$$

y para tramos curvos

$$\omega_{1,j}^{P+1} = \omega_{1,j}^P - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \omega)_{1,j}^P \Delta t - \frac{\partial}{\partial r} (v_r \omega)_{1,j}^P \Delta t - \frac{v_r \omega}{r} \Delta t$$

11. Se compara al valor absoluto de la diferencia de las vorticidades con superíndices P y P+1 con la tolerancia. Si la diferencia resulta mayor se regresa al paso 4. En caso contrario se continua con el paso 12.

$$\text{Si } \left| \omega_{1,j}^{P+1} - \omega_{1,j}^P \right| > \text{tol ir al paso 4}$$

12. Con los valores de la función de corriente y con las ecs 3.38, 3.47, 3.50 y 3.51 se obtiene el valor de las presiones en la zona estudiada.

#### 4. FLUJO DE AGUA EN UNA CURVA VERTICAL

Debido a la complejidad de su cálculo, usualmente no se toman en cuenta el tipo de flujo rotacional. Sin embargo, para conocer las características hidráulicas en algunos flujos a superficie libre como son aquellos que se presentan en canales con pendientes de plantilla mayores a nueve grados o bien en canales con curvatura, no se debe prescindir del rotacional en las ecuaciones de movimiento del agua, así como del componente de la velocidad en el sentido perpendicular al fondo del canal, según se ha observado en campo y laboratorio para estos tipos de canales.

El modelo matemático desarrollado y expuesto en los capítulos anteriores permite analizar las características de un flujo en un esquema bidimensional no horizontal. En otras palabras, se hace posible la obtención de las velocidades en la dirección paralela y en una dirección perpendicular a un flujo con curvas verticales, así como la presión en toda la zona.

La conjunción de las ecuaciones en coordenadas cartesianas y polares es útil en el estudio de diversos flujos, tales como el que se desarrolla en las curvas verticales de las obras de excedencias entre otras.

#### 4.1 Flujo sobre una curva vertical

Se han realizado múltiples esfuerzos por desarrollar modelos físicos y matemáticos para estudiar el fenómeno de la cavitación en curvas verticales y proponer diferentes alternativas para solucionar ese problema. Entre los modelos matemáticos, el uso de las ecuaciones de continuidad y de la energía ha proporcionado resultados pobres cuando se quiere conocer la evolución de las características hidráulicas de manera precisa, aún cuando a la ecuación de la energía se le ha agregado un término que corrige el efecto de la fuerza centrífuga provocada por la concavidad de la estructura.

Cuando entra en funcionamiento el vertedor de excedencias de una presa, el caudal de agua transita hacia un canal de fuerte pendiente, comunmente conocido como rápida. Dicho canal conduce el agua a estructuras de diversas formas cuya función consiste en disminuir la energía cinética del agua para atenuar su fuerza erosiva. En algunas presas esta disminución se logra mediante un canal que cambia la dirección del flujo de aquella que tiene la rápida, a una dirección con una pendiente menor o con pendiente nula.

Sin embargo, las altas velocidades que se producen en estas estructuras provocan efectos vorticosos que inducen la aparición del fenómeno de la cavitación en el fondo de los canales, sobre todo en la parte curva de la conducción y en la transición que hay entre ésta y el canal de baja pendiente. Como se sabe, el efecto erosivo de la cavitación produce grandes y costosos daños que pueden afectar o limitar el uso de estas estructuras y las que existan a su alrededor.

El uso del modelo matemático propuesto permite conocer las velocidades y presiones que se presenten a lo largo de la curva vertical y en los tramos rectos adyacentes. Esto hace posible que puedan modificarse en las simulaciones diferentes parámetros hidráulicos, operativos o estructurales que favorezcan la desaparición del fenómeno de la cavitación en estas obras.

Otra alternativa para entregar el agua que fluye en una obra de excedencias hacia un cauce es la construcción de una cubeta deflectora, que es una obra que al final de una rápida lanza el agua a un estanque de grandes dimensiones. Este tanque se debe ubicar lo más lejos posible de la cimentación de la presa para protegerla de una eventual falla estructural.

Las presiones que se presentan en la curva vertical de esta estructura se han determinado habitualmente con modelos unidimensionales del flujo con base en la ecuación de la energía, a la que se le agrega un término por curvatura para corregir los errores relativos a ella.

El esquema de cálculo presentado en este trabajo permite conocer con mayor precisión el valor de las presiones en la curva vertical, con lo que puede determinarse qué esfuerzos estructurales deben considerarse en el diseño de este tipo de estructuras.

#### 4.2 Flujo sobre una estructura vertedora

Como ya se dijo, para desalojar el volumen de agua sobrante de los embalses se construyen obras de excedencias que permiten la salida de un determinado caudal. Este gasto depende del desnivel (carga) que exista entre la superficie libre del agua y la cresta del vertedor, así como de la forma y ancho de ésta.

Para evitar que sobre estas estructuras se presenten fenómenos hidráulicos que perturben el flujo se han propuesto diversos perfiles del canal vertedor. Con esto se busca que el flujo de agua no ejerza presiones grandes sobre la estructura.

Sin embargo, el perfil del vertedor se diseña para un rango reducido de gastos, por lo que el funcionamiento de las estructuras no siempre es óptimo cuando los caudales vertidos no se encuentran en esos rangos. Además, los materiales y la construcción de estas obras influyen sobre la trayectoria del flujo, modificando el esquema teórico del mismo.

Debido a lo anterior, el paso del agua sobre la estructura experimenta separaciones y acercamientos de las líneas de flujo, lo que a su vez puede provocar el fenómeno de la vaporización del agua. La presencia de



burbujas de vapor en tramos aguas abajo de esta zona puede inducir el fenómeno de la cavitación.

Con el uso de un método de cálculo como el que se presenta en este trabajo es posible determinar la ocurrencia de fenómenos de esa naturaleza y proponer cambios estructurales y de operación que los eviten.

#### 4.3 Programa de cómputo

Con el fin de aplicar el método se elaboró un programa de computadora que sigue la secuencia de cálculo descrita en el inciso 3.6. El programa encuentra el valor de las características hidráulicas (presión y velocidad) en un canal que consta de tres tramos: una rápida o canal con fuerte pendiente al que sigue un tramo con curvatura vertical para finalizar en un canal con pendiente suave, nula o adversa.

Como en el estudio de los tramos rectos se utilizan ecuaciones en coordenadas cartesianas y en el codo se usan ecuaciones en coordenadas polares, en la unión de esos tramos existen puntos que pertenecen simultáneamente a un tramo recto y a la curva. Lo anterior hace necesario que en dichos puntos el planteamiento merezca un estudio especial que incluya los efectos provocados por los cambios de los sistemas coordenados.

Adicionalmente, el programa es capaz de considerar moléculas de cálculo del esquema de diferencias finitas de cualquier punto de la malla, sin importar la magnitud de los intervalos longitudinales en la dirección del flujo, tanto en los tramos rectos como en la curva. Esto no se hace en la dirección perpendicular al flujo porque ello aumentaría la complejidad del cálculo. En la curva, los intervalos longitudinales se ingresan en forma de ángulos; esos intervalos dependen de cada ángulo y del radio de curvatura que les corresponda. Sin embargo se recomienda que los intervalos verticales y horizontales tengan magnitudes similares para reducir los errores de aproximación.

Para resolver el sistema de ecuaciones derivados de las expresiones 3.31 y 3.33 se utiliza el método de sobrerrelajación (S.O.R.) (véase, por ejemplo, Smith, 1978), aprovechando que la matriz que se forma con

dichas ecuaciones es de tipo poroso. Tres son los sistemas de ecuaciones que se resuelven; el de la función corriente en toda la longitud y altura de la malla, el que hace lo propio para la misma función, pero exclusivamente en la frontera derecha de la malla y el que calcula los valores de la presión en toda la zona en estudio.

El programa está escrito en lenguaje FORTRAN y consta de un cuerpo principal y diez subrutinas. A continuación se describen las funciones de cada una de las partes del programa y se presenta un diagrama de bloques que indica la interacción entre las mismas.

VISCO.FOR es el cuerpo principal del programa de donde se llama a todas las subrutinas. En él se da congruencia al funcionamiento del programa y se calculan algunas variables. En el caso de las transiciones se hace una corrección por curvatura que también es obtenida en esta parte del programa.

LEER.FOR. En esta subrutina se hacen las lecturas de un archivo de datos que contiene los valores iniciales y de frontera que se utilizan a lo largo del programa. Se calculan además algunas variables de uso común entre subrutinas.

INICIA.FOR. Esta subrutina se utiliza para dar valores iniciales a algunas variables a usar durante el programa.

MOLE.FOR prepara las variables que intervienen en la determinación de los coeficientes de las moléculas de cálculo de todas las matrices, tomando en cuenta los cambios de longitud producidos por los diferentes intervalos longitudinales o angulares para cada sección de la estructura, según sea el caso.

PSI.FOR. Esta subrutina se encarga de formar la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones de Laplace de la función corriente.

SOR.FOR. Los sistemas de ecuaciones se resuelven en esta subrutina a través del método de sobrerrelajación. Cabe resaltar que todos los sistemas de ecuaciones que se resuelven en la subrutina realizan exclusivamente las operaciones de los coeficientes cuyo valor es diferente de cero.

PSIDER.FOR. Aquí se forma la matriz de coeficientes para conocer el valor de la función corriente en la frontera derecha de la zona en estudio.

VELOZ.FOR es la subrutina en la que se obtienen las velocidades paralelas y perpendiculares al flujo en función de los valores de la función corriente en cada uno de los puntos de la malla. En los tramos rectos se utilizan coordenadas cartesianas y en la curva coordenadas polares. El cálculo de las velocidades en las transiciones no representa ningún obstáculo que merezca una atención especial.

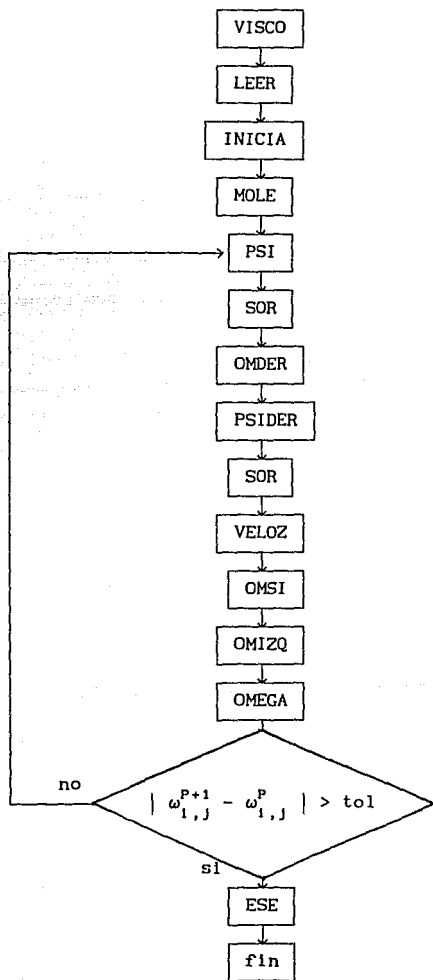
OMEGAS.FOR obtiene el valor de la vorticidad en todas las fronteras de la malla según la función corriente en el entorno. Se compone de las subrutinas OMIZQ.FOR, OMSI.FOR y OMDER.FOR

OMEGA.FOR obtiene el valor de la vorticidad en toda la malla con una función explícita que depende de las velocidades vertical y horizontal del flujo y del valor de la vorticidad en la iteración anterior.

ESE.FOR es la subrutina en la que se calcula el valor de la presión en la zona en estudio con base en la ecuación de la presión en la forma de Poisson y con la ecuación 2.28, la cual está en función de las velocidades obtenidas por el programa. A esta subrutina se ingresa una vez que el proceso iterativo ha terminado, es decir, cuando que se han alcanzado los valores de la vorticidad aceptables según la tolerancia propuesta.

Una de las ventajas que tiene el programa es que permite proponer diferentes geometrías de la cubeta deflectora, así como estudiar el fenómeno existente en cualquier zona de la estructura. Esto es, al tener la posibilidad de ingresar al programa el número de secciones y niveles de cálculo sin importar la zona de la estructura de que se trate, ni la magnitud de los intervalos longitudinales, y proponiendo el valor del radio de curvatura que se desee, se llega a conocer el valor de las características hidráulicas en puntos de interés, siempre que el manejo de la memoria de máquina sea el adecuado para el funcionamiento del modelo.

El programa también es capaz de analizar el fenómeno exclusivamente en el tramo con curvatura, para lo cual se hace nula la cantidad de secciones transversales antes y después de la cubeta deflectora.



#### 4.4 Ejemplo numérico

Para conocer los alcances del método se simuló el flujo de agua sobre una curva vertical como la de la fig 4.1 con las siguientes características (distancias en m, velocidades en m/s)

##### 1) Seccionamiento de la malla en estudio

Número de niveles (NN) (sin contar fronteras)	7
Número de secciones antes de la curva (NSA)	3
Número de secciones en la curva (NS) (incluyendo transiciones)	14
Número de secciones después de la curva (NSD)	3

##### 2) Dimensiones de la estructura y su seccionamiento

Magnitud de los intervalos en la dirección x (ó r) ( $\Delta x$ )	0.25
Magnitud de los intervalos en la dirección y ( $\Delta y$ )	0.50
Magnitud de los intervalos en la dirección $\theta$ (grados) ( $\Delta \theta$ )	2.00
Longitud del radio de curvatura en la S.L.A. (r)	14.00
Angulo de inclinación de la línea perpendicular al canal de pendiente suave con respecto a la horizontal (en grados) ( $\alpha$ )	270.00
Angulo de deflexión de la curva vertical (en grados) ( $\beta$ )	30.00

##### 3) Condiciones de frontera

Función corriente en la frontera superior	40
Función corriente en la frontera inferior	0
Velocidad vertical en la frontera superior	0
Velocidad vertical en la frontera inferior	0
Función corriente en las fronteras izquierda y derecha	
nivel 1	32.7395
nivel 2	25.9808
nivel 3	19.7642
nivel 4	14.1421
nivel 5	9.1856
nivel 6	5.0000
nivel 7	1.7678
Velocidad vertical en las fronteras izquierda y derecha	0.00
Velocidad horizontal en las fronteras izquierda y derecha	20.00

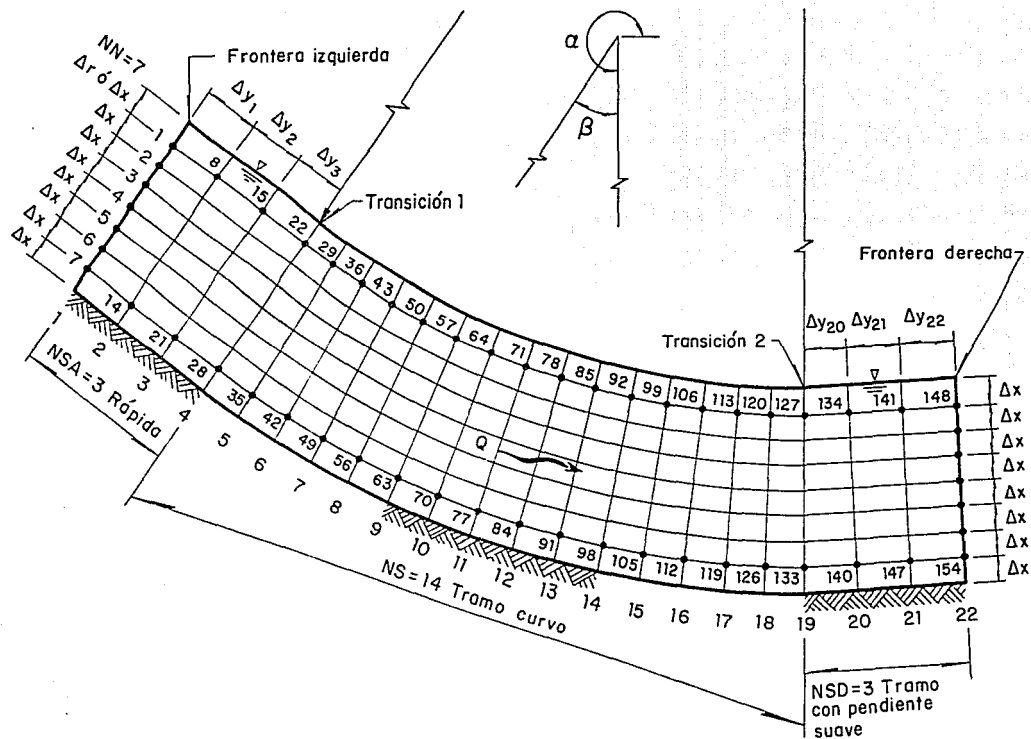


Fig 4.1 Acotaciones del flujo en la cubeta deflectora y sus proximidades

#### 4) Variables relativas al cálculo

Tolerancia	0.001
Coefficiente de relajación	1.2
Intervalo de tiempo (segundos)	0.005

5) Gasto unitario ( $m^3/s \cdot m$ ) 80.00

#### 4.5 Resultados de la corrida del programa

Los resultados del programa de cómputo se imprimen en un archivo que presenta los valores de las variables de interés en cada sección. Al inicio del mismo aparecen el número de iteraciones realizadas por el programa, el valor de la tolerancia considerado y el intervalo de tiempo que se usó. Estas variables son, como ya se dijo, las velocidades radial (V) y tangencial (U) y la presión (P) en el fondo del canal para punto de la malla. Se presentan también los valores de la función corriente (PSI) y de la vorticidad (W).

En el listado de resultados que se presenta a continuación puede verse que existen 20 secciones transversales (que resultan de la suma de NSA, NS y NSD) y 7 niveles por sección (de los que se excluye a las fronteras superior e inferior). Se especifica además cuáles son las secciones de interés como son las fronteras, las transiciones entre los tramos rectos y el tramo curvo, y el lugar en el que inicia cada tramo. Al final del listado aparecen los valores de las velocidades, de la vorticidad y de la función corriente (algunas de las cuales tienen valor nulo, como se aclaró en el apartado 3.4) en la frontera inferior.

Para encontrar el lugar en el que se ubican los valores obtenidos de cada variable para cada punto, se puede remitir a la fig 4.1, en la que se presentan algunos puntos de la malla para lograr una referencia rápida de los mismos.

La evolución de las características hidráulicas calculadas a lo largo de la curva vertical es de interés. En el caso de las velocidades V se observa que su distribución es semejante de una sección a otra, presentándose las máximas en los intervalos centrales de la curva (Inclinaciones 16 y 14, pág. 64).

Por su parte, las velocidades  $U$  calculadas desde la frontera izquierda hasta prácticamente la mitad de la curva vertical indican que el flujo es hacia la superficie libre del agua, mientras que en el resto de la curva y en el tramo recto aguas abajo es hacia la plantilla.

Las presiones que resultan de los cálculos muestran un aumento claro en las secciones de la curva y un descenso de la presión en el tramo recto posterior a ella. Al final del listado se presenta el diagrama de presiones al fondo del canal (pág. 67), cuyos valores se dibujaron en la fig 4.2.

#### 4.6 Comparación con mediciones de un modelo físico

En el Instituto de Ingeniería de la UNAM existen 3 modelos físicos de curvas verticales unidas con tramos rectos similares al de la fig 1.1a. Estos dispositivos experimentales tienen ángulos de deflexión de 22.5, 45.0 y 60.0 grados. En ellos se han hecho mediciones (Sánchez Briblesca *et al*, 1987) de la presión en toda la curva y de la velocidad en algunos puntos de interés, generalmente cercanos a la unión entre la curva y el tramo recto posterior a ella. En cada uno de ellos se midieron las características hidráulicas con diferentes gastos.

Se usaron los datos del modelo de 60 grados, con gasto de 61 lt/s y tirante de 4.5 cm para hacer una comparación con los resultados que arroja el modelo aquí desarrollado.

En la tabla 4.1 se presentan las velocidades tangenciales en la unión entre la curva y el tramo recto aguas abajo, y en la fig 4.3 las presiones en el fondo medidas y calculadas. De la comparación de estos resultados puede considerarse que el programa logra una aproximación aceptable de las características hidráulicas.

tirante (cm)	velocidad medida (m/s)	velocidad calculada (m/s)
3.375	6.36	6.29
2.250	6.30	6.16
1.125	6.21	6.02

Tabla 4.1 Comparación de las velocidades medidas y calculadas



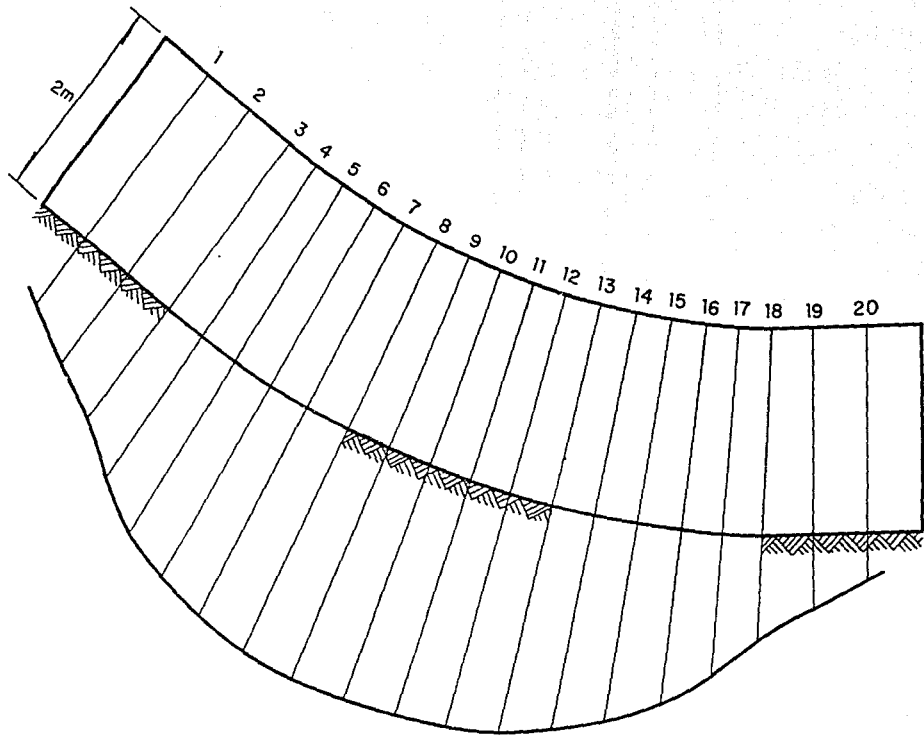


Fig 4.2 Diagrama de presiones en el fondo de la curva vertical

Punto	Función Corriente	Velocidad radial (m/s)	Velocidad tangencial (m/s)	Vorticidad	Presión (m)
Frontera izquierda					
1	32.74	.000	28.04	-7.898	.2500
2	25.98	.000	25.95	-8.447	.5000
3	19.76	.000	23.68	-9.233	.7500
4	14.14	.000	21.16	-10.361	1.0000
5	9.19	.000	18.28	-12.074	1.2500
6	5.00	.000	14.84	-15.059	1.5000
7	1.77	.000	10.00	-23.334	1.7500
Inclinación:		30.000			
Tramo inclinado					
8	32.74	-.033	28.04	-7.913	.3936
9	25.98	-.056	25.95	-8.459	.7719
10	19.77	-.066	23.67	-9.241	1.1227
11	14.15	-.065	21.15	-10.362	1.4357
12	9.19	-.054	18.28	-12.065	1.7007
13	5.01	-.035	14.83	-15.027	1.9043
14	1.77	-.012	10.01	-23.247	2.0254
Inclinación:		30.000			
15	32.71	-.133	28.15	-7.934	.5446
16	25.92	-.212	26.02	-8.474	1.0545
17	19.70	-.247	23.70	-9.254	1.5125
18	14.08	-.246	21.13	-10.375	1.9082
19	9.13	-.215	18.22	-12.076	2.2349
20	4.96	-.158	14.75	-15.030	2.4888
21	1.76	-.077	9.93	-23.086	2.6711
Inclinación:		30.000			
Transición 1					
22	32.61	-.208	28.46	-7.923	.7144
23	25.77	-.322	26.17	-8.476	1.3647
24	19.52	-.370	23.74	-9.271	1.9353
25	13.90	-.368	21.09	-10.409	2.4205
26	8.98	-.325	18.10	-12.135	2.8184
27	4.85	-.247	14.56	-15.134	3.1284
28	1.70	-.133	9.70	-23.008	3.3491
Inclinación:		30.000			

Punto	Función Corriente	Velocidad radial (m/s)	Velocidad tangencial (m/s)	Vorticidad	Presión (m)
Tramo curvo					
29	32.50	-.150	28.80	-7.890	1.0759
30	25.60	-.239	26.35	-8.466	1.9506
31	19.32	-.280	23.80	-9.281	2.6718
32	13.70	-.283	21.05	-10.444	3.2640
33	8.80	-.254	17.99	-12.207	3.7420
34	4.71	-.196	14.36	-15.280	4.1163
35	1.62	-.109	9.41	-23.123	4.3955
Inclinación:		28.000			
36	32.46	-.061	28.95	-7.879	1.3010
37	25.53	-.106	26.45	-8.460	2.3595
38	19.23	-.131	23.85	-9.283	3.2199
39	13.60	-.137	21.05	-10.458	3.9131
40	8.71	-.125	17.93	-12.241	4.4602
41	4.64	-.096	14.26	-15.353	4.8759
42	1.58	-.053	9.27	-23.188	5.1705
Inclinación:		26.000			
43	32.44	-.027	29.01	-7.875	1.4466
44	25.49	-.048	26.50	-8.457	2.6334
45	19.19	-.061	23.87	-9.284	3.5979
46	13.56	-.065	21.05	-10.464	4.3691
47	8.66	-.060	17.91	-12.257	4.9690
48	4.60	-.047	14.21	-15.389	5.4140
49	1.56	-.026	9.21	-23.220	5.7166
Inclinación:		24.000			
50	32.43	-.012	29.04	-7.873	1.5391
51	25.48	-.022	26.53	-8.455	2.8094
52	19.17	-.029	23.89	-9.284	3.8436
53	13.54	-.031	21.05	-10.467	4.6682
54	8.64	-.028	17.90	-12.264	5.3044
55	4.59	-.022	14.19	-15.406	5.7691
56	1.55	-.012	9.17	-23.236	6.0759
Inclinación:		22.000			

Punto	Función Corriente	Velocidad radial (m/s)	Velocidad tangencial (m/s)	Vorticidad	Presión (m)
57	32.43	-.005	29.06	-7.872	1.5944
58	25.47	-.010	26.54	-8.455	2.9150
59	19.16	-.013	23.89	-9.284	3.9914
60	13.53	-.014	21.05	-10.469	4.8484
61	8.63	-.013	17.89	-12.268	5.5063
62	4.58	-.010	14.17	-15.414	5.9819
63	1.55	-.006	9.16	-23.244	6.2893
	Inclinación:	20.000			
64	32.42	-.002	29.06	-7.871	1.6227
65	25.47	-.003	26.54	-8.454	2.9689
66	19.15	-.004	23.89	-9.284	4.0666
67	13.52	-.005	21.05	-10.469	4.9393
68	8.63	-.004	17.89	-12.269	5.6068
69	4.58	-.004	14.17	-15.418	6.0856
70	1.54	-.002	9.15	-23.249	6.3903
	Inclinación:	18.000			
71	32.42	.000	29.06	-7.870	1.6303
72	25.47	.001	26.54	-8.454	2.9830
73	19.15	.001	23.90	-9.283	4.0854
74	13.52	.001	21.05	-10.469	4.9604
75	8.63	.001	17.89	-12.269	5.6275
76	4.58	.001	14.17	-15.418	6.1031
77	1.54	.001	9.15	-23.251	6.4019
	Inclinación:	16.000			
78	32.42	.003	29.06	-7.870	1.6203
79	25.47	.005	26.54	-8.453	2.9631
80	19.16	.006	23.89	-9.282	4.0560
81	13.52	.007	21.05	-10.467	4.9217
82	8.63	.007	17.89	-12.267	5.5797
83	4.58	.006	14.17	-15.415	6.0465
84	1.54	.004	9.15	-23.240	6.3367
	Inclinación:	14.000			

Punto	Función Corriente	Velocidad radial (m/s)	Velocidad tangencial (m/s)	Vorticidad	Presión (m)
85	32.43	.006	29.06	-7.869	1.5929
86	25.47	.010	26.53	-8.451	2.9099
87	19.16	.013	23.89	-9.280	3.9792
88	13.53	.015	21.05	-10.464	4.8241
89	8.64	.015	17.89	-12.263	5.4645
90	4.58	.013	14.18	-15.407	5.9169
91	1.55	.009	9.16	-23.211	6.1959
	Inclinación:	12.000			
92	32.43	.011	29.04	-7.866	1.5457
93	25.48	.019	26.52	-8.449	2.8187
94	19.17	.025	23.88	-9.276	3.8486
95	13.54	.028	21.05	-10.459	4.6601
96	8.65	.028	17.89	-12.255	5.2734
97	4.59	.024	14.18	-15.393	5.7054
98	1.55	.016	9.18	-23.157	5.9703
	Inclinación:	10.000			
99	32.44	.020	29.02	-7.862	1.4734
100	25.49	.036	26.50	-8.443	2.6795
101	19.19	.046	23.87	-9.269	3.6508
102	13.56	.051	21.04	-10.450	4.4135
103	8.66	.050	17.90	-12.241	4.9888
104	4.61	.043	14.20	-15.367	5.3934
105	1.57	.029	9.22	-23.061	5.6413
	Inclinación:	8.000			
106	32.45	.037	28.97	-7.855	1.3670
107	25.52	.067	26.47	-8.434	2.4760
108	19.22	.086	23.85	-9.257	3.3640
109	13.59	.093	21.04	-10.434	4.0595
110	8.70	.090	17.91	-12.217	4.5838
111	4.64	.076	14.23	-15.324	4.9535
112	1.59	.051	9.28	-22.900	5.1813
	Inclinación:	6.000			

Punto	Función Corriente	Velocidad radial (m/s)	Velocidad tangencial (m/s)	Vorticidad	Presión (m)
113	32.47	.074	28.88	-7.838	1.2120
114	25.56	.128	26.40	-8.415	2.1837
115	19.27	.160	23.81	-9.235	2.9584
116	13.65	.171	21.03	-10.405	3.5655
117	8.76	.162	17.93	-12.176	4.0254
118	4.69	.135	14.28	-15.248	4.3523
119	1.62	.089	9.38	-22.633	4.5573
Inclinación:		4.000			
120	32.52	.162	28.71	-7.796	.9827
121	25.65	.258	26.28	-8.380	1.7665
122	19.38	.305	23.75	-9.199	2.3973
123	13.77	.313	21.02	-10.359	2.8982
124	8.87	.290	17.97	-12.107	3.2823
125	4.78	.239	14.37	-15.120	3.5587
126	1.68	.156	9.57	-22.197	3.7362
Inclinación:		2.000			
Transición 2					
127	32.64	.198	28.36	-7.782	.6177
128	25.82	.311	26.10	-8.356	1.1732
129	19.59	.362	23.68	-9.159	1.6515
130	13.98	.369	21.04	-10.297	2.0457
131	9.07	.339	18.07	-12.003	2.3518
132	4.95	.278	14.55	-14.913	2.5657
133	1.79	.182	9.90	-21.479	2.6820
Inclinación:		.000			
Tramo horizontal					
134	32.73	.122	28.05	-7.799	.4280
135	25.97	.192	25.94	-8.355	.8241
136	19.76	.222	23.63	-9.142	1.1725
137	14.16	.220	21.07	-10.260	1.4642
138	9.23	.193	18.16	-11.934	1.6923
139	5.08	.150	14.71	-14.767	1.8496
140	1.88	.101	10.16	-20.933	1.9276
Inclinación:		.000			

Punto	Función Corriente	Velocidad radial (m/s)	Velocidad tangencial (m/s)	Vorticidad	Presión (m)
141	32.76	.006	27.97	-7.818	.2357
142	26.01	.007	25.89	-8.369	.4592
143	19.81	-.001	23.62	-9.160	.6622
144	14.20	-.018	21.10	-10.280	.8398
145	9.26	-.045	18.21	-11.974	.9901
146	5.10	-.078	14.74	-14.880	1.1114
147	1.89	-.109	10.20	-20.390	1.1948

Inclinación: .000

Frontera derecha

148	32.74	.000	28.04	-7.818	.2500
149	25.98	.000	25.95	-8.369	.5000
150	19.76	.000	23.68	-9.160	.7500
151	14.14	.000	21.16	-10.280	1.0000
152	9.19	.000	18.28	-11.974	1.2500
153	5.00	.000	14.84	-14.880	1.5000
154	1.77	.000	10.00	-20.390	1.7500

FRONTERA INFERIOR

1	.00	.000	7.10	-5.286	2.0254
2	.00	.000	7.02	-5.266	2.7965
3	.00	.000	6.79	-5.215	3.4752
4	.00	.000	6.47	-5.159	4.5880
5	.00	.000	6.31	-5.133	5.3517
6	.00	.000	6.23	-5.120	5.8885
7	.00	.000	6.20	-5.114	6.2392
8	.00	.000	6.18	-5.112	6.4442
9	.00	.000	6.17	-5.111	6.5369
10	.00	.000	6.17	-5.110	6.5402
11	.00	.000	6.18	-5.111	6.4668
12	.00	.000	6.19	-5.112	6.3178
13	.00	.000	6.22	-5.115	6.0842
14	.00	.000	6.26	-5.120	5.7475
15	.00	.000	6.35	-5.129	5.2807
16	.00	.000	6.49	-5.145	4.6512
17	.00	.000	6.74	-5.176	3.8274
18	.00	.000	7.17	-5.235	2.6926
19	.00	.000	7.51	-5.286	1.9283
20	.00	.000	7.58	-5.299	1.1954

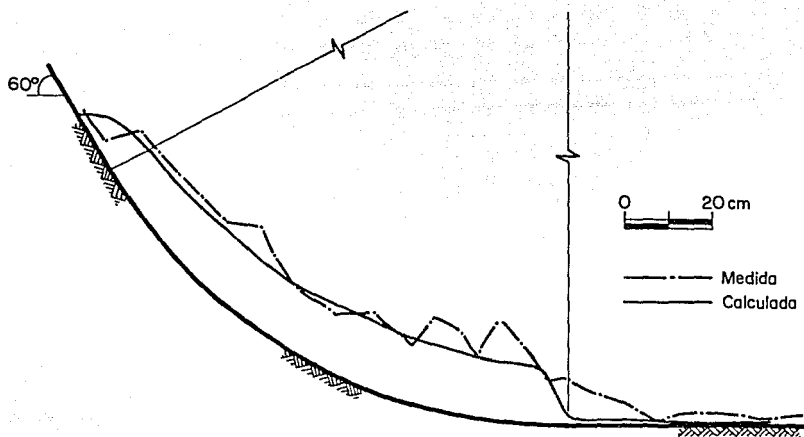


Fig 4.3 Comparación de presiones medidas y calculadas



## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con base en el análisis de los resultados puede decirse que

1. Con el método propuesto es posible calcular el flujo en conducciones a superficie libre con un esquema vertical en dos dimensiones.
2. El método permite conocer las presiones en el fondo de los canales tomando en cuenta al fenómeno de la vorticidad, lo que lo hace una herramienta útil en el diseño de curvas verticales, dando fundamentalmente una idea del diagrama de presiones de fondo.
3. Con el uso del programa de cálculo es posible conocer las características hidráulicas en canales con curvatura vertical o con pendientes mayores a los nueve grados, siempre que se tengan las dimensiones físicas de las estructuras en cuestión.

4. Mediante este procedimiento también puede conocerse el valor que adquiere la vorticidad en la proximidad de las posibles discontinuidades que puedan existir en un canal, tales como desalineamientos de la plantilla u obstáculos estructurales.
5. Aún cuando el método propuesto requiere de una adecuada selección y entrada de los parámetros de cálculo, con él se llega a la solución, útil para varios fines.
6. La inclusión de los efectos de la rugosidad de las paredes sobre el flujo pueden ser fácilmente consideradas en el cálculo a través de un término adicional en las ecuaciones en diferencias.

## REFERENCIAS

- Canales M., A. (1993), *Distribuciones de presiones en curvas verticales de vertedores*, Trabajo terminal para obtener el grado de Maestría en Ingeniería (Hidráulica), DEPMI - UNAM, México.
- Nakamura, S., (1992), *Métodos numéricos aplicados con Software*, Prentice Hall Hispanoamericana, S. A., México.
- Roache, P., J., (1982), *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, E. U. A.
- Sánchez Briblesca, J. L. y Carmona P., R., (1991) *Fundamentos de mecánica de fluidos para ingenieros hidráulicos*, Serie D - 31, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D. F.
- Sánchez Briblesca, J. L., Franco, V., Fuentes M., G. E. y Domínguez M., M. A., (1987), *Funcionamiento hidráulico de codos verticales en obras de excedencias (Tercer informe parcial)*, Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe interno, México.
- Smith, G. D. (1978), *Numerical solution of partial differential equations. Finite difference methods*, Oxford Press University, London, Gt. Britain.
- Sotelo A., G. (1974), *Hidráulica General vol 1*, Limusa, México.
- Streeter, V. L., y Wyle, B. E., (1988), *Mecánica de fluidos*, McGraw - Hill, México.
- Vennard, J., K. y Street, R., L., (1979), *Elementos de mecánica de fluidos*, C. E. C. S. A., México.