

01173

1
de J



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**SIMULACION DE FLUJOS TURBULENTOS
CON PARTICULAS EN SUSPENSION**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

P R E S E N T A E L

ING. RUBEN AVILA RODRIGUEZ



MEXICO, D. F.

1993

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Simulación de flujos turbulentos con partículas en suspensión.

Autor: Rubén Avila Rodríguez

Resumen:

En este trabajo se presentan las bases teóricas y computacionales de la simulación numérica de flujos turbulentos que transportan en su interior partículas sólidas en suspensión.

Para determinar las características medias del flujo de gas, considerado como un continuo, se resuelven numéricamente las ecuaciones eulerianas de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía acopladas con un modelo de turbulencia de dos ecuaciones. El estudio considera que existe un acoplamiento entre las fases (gaseosa y sólida) en dos sentidos, por lo que las ecuaciones de conservación de la fase continua incluyen un término fuente el cual modela la influencia que las partículas sólidas tienen sobre el flujo de gas. El algoritmo utilizado en la solución de las ecuaciones de conservación de la fase continua es el de los volúmenes de control.

Para el cálculo de trayectorias e historias de temperatura de las partículas, se resuelven las ecuaciones lagrangianas de cantidad de movimiento y energía de partículas discretas consideradas como esferas.

La dispersión de partículas en el interior del flujo turbulento se determina mediante el uso del modelo de dispersión de partículas Lagrangiano-Estocástico-Determinístico (L-E-D), el cual considera que las fluctuaciones de velocidad y temperatura de los remolinos turbulentos en contacto con las partículas se calculan como función de las características medias y turbulentas del flujo (velocidad, temperatura, energía cinética turbulenta y rapidez de disipación de turbulencia). Las velocidades y temperaturas instantáneas del flujo se generan a partir de números aleatorios con distribución de probabilidad gaussiana. El modelo (L-E-D) tiene la característica de generar nuevos remolinos de turbulencia (dinámicos o térmicos) ya sea porque la partícula los atravieza o porque termina el tiempo de vida.

El procedimiento de cálculo que se presenta, evalúa un número significativamente grande de trayectorias de partículas (2,000 en este trabajo), las cuales son promediadas para obtener las características medias y turbulentas de la fase dispersa.

Se realiza el estudio de 3 casos de flujos turbulentos con partículas en suspensión, dos isotérmicos y uno que considera transferencia de calor. Los casos isotérmicos analizados corresponden al flujo de gas vertical ascendente en un canal y al flujo de gas vertical descendente en un chorro libre, los resultados de velocidad media y características turbulentas de ambas fases se comparan satisfactoriamente con datos experimentales publicados en la literatura. El flujo no isotérmico, corresponde al flujo de aire-partículas vertical ascendente, en el interior de un ducto que tiene su pared a diferente temperatura que el flujo. Para

este caso se comparan los resultados numéricos con datos experimentales que aparecen en la literatura y se presenta una discusión de las condiciones del flujo (número de Reynolds, tamaño de partícula, y número de partículas) que motivan un aumento o disminución del coeficiente de transferencia de calor. Se comprueba que los datos numéricos conducen a verificar cuantitativamente algunas de las características del flujo con partículas en suspensión que anteriormente únicamente se enunciaban en la literatura de manera cualitativa.

Vo. Bo.

Director de Tesis

Dr. Jaime Cervantes de Gortari
Jefe del Laboratorio de Energía Solar
del Instituto de Investigaciones en Materiales
U.N.A.M.

Profesor de la División de Estudios de Posgrado
de la Facultad de Ingeniería.

- 1.-INTRODUCCION.
 - 1.1.-ANTECEDENTES.
 - 1.2.-PROPOSITO.
 - 1.3.-DESCRIPCION DEL TRABAJO.
- 2.-ECUACIONES DE LA FASE CONTINUA.
 - 2.1.-CONSERVACION DE MASA.
 - 2.2.-CONSERVACION DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO.
 - 2.3.-CONSERVACION DE ENERGIA.
 - 2.4.-ECUACIONES DE CAPA LIMITE.
 - 2.5.-ECUACIONES DE CAPA LIMITE PARA FLUJOS AXIAL-SIMETRICOS.
 - 2.6.-ECUACIONES DE CONSERVACION PARA FLUJOS TURBULENTOS.
- 3.-MODELO DE TURBULENCIA $K-\epsilon$.
 - 3.1.-GENERALIDADES.
 - 3.2.-ECUACION DE TRANSPORTE DE LA ENERGIA CINETICA TURBULEN-
TA (K).
 - 3.2.1.-ECUACIONES DE TRANSPORTE DE LOS ESFUERZOS DE REYNOLDS.
 - 3.2.2.-MODELADO DE LA ECUACION DE LA ENERGIA CINETICA TURBU-
LENTA.
 - 3.3.-ECUACION DE TRANSPORTE DE LA DISIPACION DE ENERGIA CINE-
TICA TURBULENTA (ϵ).
 - 3.3.1.-MODELADO DE LA ECUACION DE DISIPACION DE ENERGIA CINE-
TICA TURBULENTA.
 - 3.4.-ECUACIONES DEL MODELO DE TURBULENCIA $K-\epsilon$.
 - 3.4.1.-ECUACIONES DEL MODELO DE TURBULENCIA $K-\epsilon$, PARA FLUJOS
BIDIMENSIONALES DE CAPA LIMITE.
- 4.- CONDICIONES DE FRONTERA DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACION Y
DETERMINACION DE LAS CONSTANTES DEL MODELO $K-\epsilon$
 - 4.1.-CONDICIONES DE FRONTERA CORRESPONDIENTES A PAREDES
SOLIDAS.
 - 4.1.1.-CONDICION DE FRONTERA PARA LA ECUACION DE CANTIDAD DE
MOVIMIENTO.
 - 4.1.2.-CONDICION DE FRONTERA PARA LA ECUACION DE LA ENERGIA.
 - 4.1.3.-CONDICION DE FRONTERA PARA LA ECUACION DE LA ENERGIA
CINETICA TURBULENTA.
 - 4.1.4.-CONDICION DE FRONTERA PARA LA ECUACION DE LA DISIPACION
DE ENERGIA CINETICA TURBULENTA.
 - 4.2.-CONDICIONES DE FRONTERA CORRESPONDIENTES A UNA CORRIENTE
LIBRE.
 - 4.3.-CONDICIONES DE FRONTERA CORRESPONDIENTES A UN EJE (PLANO)
DE SIMETRIA.
 - 4.4.-DETERMINACION DE LAS CONSTANTES DEL MODELO $K-\epsilon$.
- 5.-PROCEDIMIENTO DE SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACION DE
LA FASE CONTINUA.
 - 5.1.-FORMA GENERAL DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACION.
 - 5.2.-TRANSFORMACION DE COORDENADAS ($x-\omega$).
 - 5.3.-ECUACIONES DE CONSERVACION EN DIFERENCIAS FINITAS.
 - 5.4.-USO DE LAS FUNCIONES DE PARED.
 - 5.5.-PROCEDIMIENTO DE CALCULO.

6.-ECUACIONES DE LA FASE DISPERSA.

- 6.1.-ECUACION DE MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA RIGIDA.
- 6.2.-ECUACION DE BALANCE DE CALOR.
- 6.3.-MODELO DE DISPERSION DE PARTICULAS LAGRANGIANO - ESTOCASTICO - DETERMINISTICO (L E D).
- 6.4.-CARACTERISTICAS MEDIAS DE LA FASE DISPERSA Y TERMINOS FUENTE.

7.-RESULTADOS DE FLUJOS TURBULENTOS CON PARTICULAS EN SUSPENSION.

- 7.1.-FLUJO TURBULENTO CON PARTICULAS EN SUSPENSION EMERGIENDO EN UN CANAL VERTICAL.
- 7.2.-FLUJO TURBULENTO CON PARTICULAS EN SUSPENSION EN UN CHORRO REDONDO.
- 7.3.-TRANSFERENCIA DE CALOR EN FLUJOS CON PARTICULAS EN SUSPENSION EN EL INTERIOR DE UN DUCTO CIRCULAR VERTICAL.
 - 7.3.1.-SIMULACION DEL EXPERIMENTO ISOTERMICO DE JOHNNK Y HANRATTY EN LA REGION DE FLUJO COMPLETAMENTE DESARROLLADO.
 - 7.3.2.-SIMULACION DEL EXPERIMENTO NO ISOTERMICO DE JOHNNK Y HANRATTY EN LA REGION DE FLUJO COMPLETAMENTE DESARROLLADO.
 - 7.3.3.-SIMULACION DEL EXPERIMENTO DE JOHNNK Y HANRATTY EN LA REGION DE ENTRADA TERMICA.
 - 7.3.4.-SIMULACION DEL FLUJO TURBULENTO CON PARTICULAS EN SUSPENSION EN EL INTERIOR DE UN DUCTO VERTICAL.

8.-CONCLUSIONES.

.-NOMENCLATURA.

.-REFERENCIAS.

.-APENDICE A.- DERIVACION DE LAS ECUACIONES DE LOS ESFUERZOS TURBULENTOS (ESFUERZOS DE REYNOLDS)

.-APENDICE B.- LEY LOGARITMICA DE VELOCIDAD PARA FLUJOS TURBULENTOS CERCA DE UNA PARED SOLIDA.

.-APENDICE C.- LEY LOGARITMICA DE TEMPERATURA PARA FLUJOS TURBULENTOS CERCA DE UNA PARED SOLIDA.

.-APENDICE D.- CONDICION DE FRONTERA PARA LA ECUACION DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTO.

1.-INTRODUCCION

El Transporte de partículas sólidas o líquidas en el interior de un fluido en movimiento, es una manifestación de flujos en fases múltiples que se presenta con frecuencia en la naturaleza y en el ámbito industrial.

En la naturaleza, los flujos con partículas en suspensión se hacen presentes en fenómenos como:

- .-La difusión de productos contaminantes en la atmósfera, lagos, ríos y mares.
- .-La erosión del suelo por el aire y agua.
- .-El transporte de polen y arena por el viento.
- .-El movimiento de gotas de lluvia, copos de nieve y granizo en la atmósfera.
- .-El transporte de sedimentos en los ríos.
- .-El flujo de aire en el sistema respiratorio de los seres vivos.

En la industria los flujos con partículas se presentan en:

- .-Intercambiadores de calor.
- .-Sistemas de combustión.
- .-Transporte neumático de materiales.
- .-Separadores de ciclón.
- .-Aerosoles y sistemas contra incendio.
- .-Transporte de desechos en tuberías.
- .-Aspersión de semillas en la agricultura.

Debido a la importancia que estos flujos tienen en la vida diaria de la humanidad, existe una creciente necesidad por estudiarlos con el objeto de que sus manifestaciones sean comprendidas y controladas.

Los flujos con partículas en suspensión, están constituidos por una fase continua (gas o líquido) y una fase dispersa (partículas sólidas o líquidas). Estos flujos se caracterizan por la presencia de un intercambio de masa, momento y energía entre las fases. La magnitud de esta interacción depende de múltiples variables entre las que destacan; el tamaño, concentración y características termofísicas de las partículas, además de la velocidad, temperatura e intensidad de turbulencia del fluido.

El acoplamiento entre las fases ha sido tema de estudio de numerosas investigaciones, sin embargo, la evaluación de los parámetros de intercambio plantea serios problemas no sólo de naturaleza matemática sino de entendimiento de los fenómenos físicos involucrados.

Es de esperarse entonces, que en la medida que se tenga capacidad de comprender, evaluar y controlar la interacción entre las fases, se podrán ofrecer alternativas de solución a los problemas que cotidianamente enfrenta la ingeniería, como es el caso de

incrementar la eficiencia de gasificación y combustión del carbón pulverizado y de combustibles líquidos atomizados, disminuir la erosión en tuberías y aspas de turbinas, controlar la dispersión de contaminantes en la atmósfera, lagos, ríos y mares, disminuir la acumulación de partículas sólidas en los sistemas de refrigeración de las plantas generadoras de energía, etc..

El estudio de los flujos con partículas en suspensión requiere de investigación tanto teórica como experimental y de una estrecha relación entre ambas actividades. Aunque la presente contribución es teórica, el autor reconoce la importancia de llevar a cabo experimentos bien controlados con el objeto de probar y validar modelos y procedimientos numéricos. Por otro lado, sin un desarrollo teórico adecuado, el experimentalista siempre estará en la necesidad de realizar costosos experimentos cada vez que se presenten nuevos problemas de ingeniería.

El autor espera que el trabajo presentado ayude a fortalecer el conocimiento de los flujos con partículas en suspensión.

1.1.- ANTECEDENTES.

La razón por la cual han aparecido en la literatura diversas teorías, experimentos y modelos computacionales de simulación que permiten caracterizar el comportamiento de los flujos turbulentos con partículas en suspensión, es la necesidad que se tiene de comprenderlos y controlarlos.

Para hacer menos complicado el estudio de los flujos con partículas, con frecuencia se recurre a despreciar varios de los múltiples fenómenos de naturaleza compleja que están presentes.

Uno de estos fenómenos que se considera despreciable en flujos diluidos, es el intercambio de cantidad de movimiento y energía que se genera debido a la colisión entre partículas. En el presente estudio se considera que no existe interacción entre partículas y se supone que su movimiento y su historia de temperatura dependen únicamente de fuerzas aerodinámicas y flujos de calor por convección ref./1,2/.

En flujos diluidos, la difusividad (dinámica y térmica) de las partículas depende principalmente de los efectos que produce la turbulencia de la fase continua.

Debido a que en este estudio se resuelven mediante el uso de algoritmos numéricos, las ecuaciones de conservación de la fase continua y de las partículas, acopladas con un modelo de dispersión de partículas, el trabajo aquí presentado pertenece a la familia de los modelos computacionales de simulación. Una gran variedad de modelos computacionales para flujos diluidos con partículas en suspensión ha aparecido en la literatura. De acuerdo a la forma en que los modelos consideran la interacción

entre las fases, éstos se clasifican en:

.- Modelos con acoplamiento en un sólo sentido.

Si la relación de carga (flujo másico de partículas sobre flujo másico de la fase continua), es menor que 0.1 ref./2/, se considera que la presencia de las partículas no modifica los campos de velocidad y temperatura del fluido que las transporta. Sin embargo, la fase continua es la responsable del movimiento y temperatura de las partículas. Estos modelos requieren del conocimiento del campo de velocidades, temperaturas, presiones, etc., del fluido transportador, ya sea a partir de experimentos o mediante soluciones analíticas o numéricas. La trayectoria de las partículas se calcula al integrar su ecuación de movimiento conforme se desplazan en el interior del fluido. La historia de temperatura de las partículas se evalúa al integrar su ecuación de balance de calor. Ejemplos de estos modelos se pueden consultar en las refs./3,4,5,6/.

.- Modelos con acoplamiento en dos sentidos.

Si la relación de carga es mayor que 0.1, además de que el fluido transportador influye en la trayectoria y temperatura de las partículas, se considera que la nube de partículas modifica la velocidad media, temperatura media y estructura turbulenta de la fase continua. A esta interacción entre las fases se le conoce como acoplamiento en dos sentidos ("two-way coupling"). La forma en que estos modelos toman en cuenta la influencia de las partículas sobre el fluido, es a partir de considerar que la fase dispersa actúa como fuente (sumidero) de masa, momento y energía de la fase continua ref./1,2,7/.

Los modelos con acoplamiento en dos sentidos preferentemente evalúan los campos de velocidad, temperatura, presión y propiedades turbulentas de la fase continua, a partir de la solución numérica de sus ecuaciones de conservación (elípticas o parabólicas), formuladas en términos de variables primitivas (velocidad, presión, densidad, temperatura, etc.). Algunos programas de cómputo que son convencionales en el cálculo de flujos en una sola fase, han sido adaptados para generar el campo de flujo de la fase continua ref./8,9,10,11/.

Las ecuaciones de transporte de la fase dispersa y los efectos que tienen las partículas sobre las características térmicas y dinámicas de la fase continua (términos fuente), se formulan a partir de los siguientes métodos o enfoques ref./1,2,7/:

.-Método de los dos fluidos (enfoque Euleriano).

.-Método de las trayectorias (enfoque Lagrangiano).

El enfoque Euleriano considera que tanto el fluido como las partículas son medios continuos separados y que se rigen por sus propias ecuaciones de conservación, válidas en cada punto del

flujo. Sin embargo, debido a que en un punto del flujo únicamente una fase puede estar presente, en el enfoque Euleriano se define una concentración de volumen α que determina la fracción de un volumen de control ocupada por la fase dispersa.

$$\alpha = \frac{V_p}{V} \quad (1.1-1)$$

donde:

$\alpha []$ = fracción de volumen de la fase dispersa.

$V_p [m^3]$ = volumen ocupado por la fase dispersa.

$V [m^3]$ = volumen de control del fluido.

Para tomar en cuenta que ambas fases fluyen a través del mismo volumen de control, las ecuaciones de conservación de los dos fluidos se modifican ("pesan") por la fracción de volumen α .

Si no existe intercambio de masa entre las fases, las ecuaciones de continuidad para el fluido y las partículas se escriben como ref./2,7,12/:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\beta \rho u_j) = 0 \quad (1.1-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha \rho_p u_{pi}) = 0 \quad (1.1-3)$$

donde:

$u_j [m/s]$ = velocidad del fluido en la dirección j

$u_{pi} [m/s]$ = velocidad de la fase dispersa en la dirección i .

$\rho [kg/m^3]$ = densidad del fluido.

$\rho_p [kg/m^3]$ = densidad de las partículas.

$\beta []$ = fracción de volumen del fluido.

$$= 1 - \alpha$$

Las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento para cada fase se escriben como ref./7,12/:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\beta \rho u_i u_j) = -\beta \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\beta \tau_{ij}) + \beta \rho g_i + F_{pi} \quad (1.1-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha \rho_p u_{pi} u_{pj}) = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha \tau_{ij}^p) + \alpha \rho_p g_i - F_{pi} \quad (1.1-5)$$

donde:

F_{pi} [N/m³] = fuerza de interacción entre las fases por unidad de volumen, debido a la fuerza de arrastre entre las fases.

g (m/s²) = aceleración de la gravedad.

τ_{ij} [N/m²] = esfuerzos viscosos del fluido.

$$= \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j) \right)$$

τ_{ij}^p [N/m²] = esfuerzos viscosos de la fase dispersa.

$$= \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_{pi}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{pj}) \right)$$

donde:

μ [kg/(m s)] = viscosidad del fluido.

σ [] = número de Schmidt de las partículas.

$$\sigma = \frac{\nu}{D_p}$$

ν [m²/s] = viscosidad cinemática del fluido.

D_p [m²/s] = coeficiente de difusión de la fase dispersa.

Para flujos turbulentos, la viscosidad del fluido μ y el número de Schmidt σ , se sustituyen por las siguientes expresiones:

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t \quad (1.1-6)$$

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma + \sigma_t \quad (1.1-7)$$

donde:

μ_t [kg/ (m s)] = viscosidad turbulenta del flujo.

σ_t [] = número de Schmidt turbulento de las partículas.

$$\sigma_t = \frac{\nu_t}{D_{pt}}$$

ν_t [m²/s] = difusividad turbulenta del fluido

D_{pt} [m²/s] = coeficiente de difusión turbulenta de las partículas.

Para evaluar el término de la viscosidad turbulenta $\mu_t = \rho \nu_t$, se recurre con frecuencia en la literatura a utilizar el modelo de turbulencia de dos ecuaciones K- ϵ ref./7,12,13/, el cual será descrito en detalle en los capítulos 3 y 4 de este trabajo.

Para determinar la influencia que tiene la turbulencia del fluido sobre el movimiento de la fase dispersa, en el enfoque Euleriano, se evalúa un coeficiente de dispersión de las partículas. Este coeficiente de dispersión se modela a partir de suponer una analogía entre la difusión molecular y la dispersión turbulenta refs./12,13,14,15/. En la literatura han aparecido diferentes relaciones algebraicas que permiten evaluar el número de Schmidt de las partículas (σ_t), en el interior de un flujo turbulento. Las expresiones del número de Schmidt han sido derivadas teórica o experimentalmente ref./14,16,17,18,19,20/. Schönung /14/, por ejemplo, calcula el número de Schmidt a partir de la función de respuesta de una partícula en el interior de un flujo turbulento con campo de velocidades oscilatorio. Schönung supone que la frecuencia de la oscilación corresponde a la frecuencia de los remolinos turbulentos mas energéticos. Jischa ref./18/ determina la relación entre las difusividades turbulentas de ambos fluidos como función de sus densidades y la relación de tiempos característicos de la suspensión (número de Stokes). Mostafa y Elgobashi ref./16/, encontraron una expresión algebraica del número de Schmidt para partículas pesadas transportadas por un flujo con turbulencia

homogénea, a partir de la relación entre las escalas integrales de tiempo lagrangianas (partículas de fluido) y eulerianas (partículas pesadas). Lee y Wiesler ref./17/ modelaron el transporte de partículas en un flujo turbulento a partir de evaluar la capacidad que tienen partículas pesadas de responder al movimiento del fluido. Lee y Wiesler determinaron que la respuesta de las partículas depende de múltiples parámetros tales como: el tamaño de las partículas, relación de densidades de las dos fases, concentración de partículas y el nivel de turbulencia del fluido.

La fuerza de arrastre entre las fases F_{pi} que aparece en las ecuaciones (1.1-4) y (1.1-5), se determina utilizando correlaciones empíricas del coeficiente de arrastre de una partícula inmersa en una corriente ref./7,12,13,14/.

En flujos turbulentos bidimensionales, para cuantificar las variables u , v , p , u_p , v_p , α , β , es necesario resolver 6 ecuaciones (2 de continuidad, 4 de cantidad de movimiento) en conjunto con la expresión de la fracción de volumen del fluido β . Es decir, la solución de las ecuaciones de continuidad (1.1-2) y cantidad de movimiento (1.1-4) del fluido proporciona el campo de velocidades y presiones. Las velocidades de las partículas se obtienen a partir de la ecuación de cantidad de movimiento (1.1-5) y la fracción de volumen α se calcula al resolver la ecuación de continuidad (1.1-3).

En la literatura ref./21,22,23/ se han publicados diversos artículos en donde se reporta la capacidad que tiene el método de los dos fluidos de reproducir resultados experimentales. En flujos con geometría simple (ductos y chorros) se puede decir que este método proporciona resultados satisfactorios. Aunque el método de los dos fluidos, tiene la ventaja de utilizar métodos numéricos convencionales para el cálculo de flujos en una sola fase ref./11/, la aproximación de los términos convectivos a partir de diferencias finitas, introduce una marcada difusión numérica, esto trae en consecuencia que se requiera de mallas computacionales mas finas y de mayor tiempo de cómputo.

El enfoque Euleriano se complica cuando se pretende evaluar fenómenos físico - químicos que ocurren en la superficie de una partícula tal es el caso de evaporación, condensación, transferencia de calor, transferencia de cantidad de movimiento, combustión etc.

.-Método de las trayectorias (enfoque Lagrangiano).

Este enfoque considera al fluido como un continuo y evalúa las características de la fase dispersa mediante el cálculo de un gran número de trayectorias de partículas discretas que se desplazan en el interior del fluido.

Las historias de posición, velocidad, temperatura y masa de las partículas, se calculan al resolver las ecuaciones Lagrangianas de conservación de cantidad de movimiento, energía y masa de partículas individuales. Al igual que en el enfoque Euleriano, el método de las trayectorias considera que las partículas actúan como fuentes (sumideros) de masa, momento y energía de la fase continua.

Crowe et. al. ref./1/, fueron los pioneros en introducir el modelo computacional Lagrangiano conocido como PSI-CELL (Particle - Source in Cell). Aunque el modelo PSI-CELL se explica en detalle en la ref./1/, a continuación se enunciarán las características generales de este procedimiento ya que es la base del modelo que se presenta en este trabajo.

.-Solución numérica de las ecuaciones de balance de masa, momento y energía de la fase continua, considerando que no hay partículas presentes en el flujo.

.-Cálculo de trayectorias e historias de temperatura y masa de partículas discretas.

.-Determinación de las propiedades de la nube de partículas atravesando cada celda numérica.

.-Cálculo de los términos fuente (sumidero), de masa, momento y energía, de la fase continua.

.-Solución numérica de las ecuaciones de balance de masa, momento y energía de la fase continua considerando los términos fuente de interacción entre las fases.

.-Cálculo de nuevas trayectorias e historias de temperatura y masa de las partículas y reevaluación de nuevos términos fuente.

.-El proceso continúa hasta que el campo de velocidades, presión, temperaturas, turbulencia, etc. de la fase continua no cambia en las siguientes iteraciones.

El enfoque Lagrangiano tiene la ventaja de conservar la naturaleza parabólica de las ecuaciones de la fase dispersa (integración de marcha hacia adelante), a diferencia del enfoque Euleriano que requiere de la definición de condiciones de frontera necesarias para satisfacer la naturaleza elíptica del modelo ec.(1.1-5).

Una característica del enfoque Lagrangiano y por lo cual lo prefieren diversos investigadores ref./3,5,6,7,15,24-29/ para validar sus modelos de dispersión de partículas en flujos turbulentos, es que la nube de partículas está libre de difusión numérica.

La dispersión de partículas ocasionada por la turbulencia del fluido y su modelación dentro del marco del enfoque Lagrangiano,

se ha realizado en la literatura a partir de dos metodologías:

(i).- Método de la velocidad efectiva de difusión ("fuerza de difusión").

Esta técnica consiste en introducir en la ecuación de movimiento de las partículas una fuerza inducida por la turbulencia del flujo. Esta fuerza es proporcional al gradiente de la concentración de las partículas y a una viscosidad turbulenta efectiva de las partículas. En este método se requiere la definición del número de Schmidt de las partículas. La principal crítica en contra de este modelo es que físicamente no es posible que partículas aisladas "sientan" los gradientes de la concentración en un sistema disperso. Al igual que en el método de los dos fluidos, la selección apropiada del coeficiente de difusión de las partículas está en espera de que se comprenda con mayor profundidad tanto el fenómeno físico de la interacción turbulenta entre las fases como la descripción matemática de la turbulencia de partículas de fluido y de partículas pesadas ref./2,28/.

(ii).- Método de Montecarlo.

En este procedimiento el flujo turbulento de la fase continua se modela suponiendo que sus campos de velocidad y temperatura instantáneos están constituidos por una componente estacionaria (velocidad y temperatura media) y una componente no estacionaria de fluctuaciones aleatorias.

Este procedimiento no requiere de la evaluación explícita de un coeficiente de dispersión ya que supone que la dispersión de partículas depende directamente del campo instantáneo de flujo que rodea la nube de partículas. La magnitud de la dispersión depende entonces de las escalas de tiempo y longitud (Lagrangianas) de la turbulencia del fluido.

En el enfoque Lagrangiano no se tiene gran problema en definir las condiciones de frontera de las partículas, ya que al resolver sus ecuaciones parabólicas se introducen en forma relativamente simple, condiciones de rebote elástico y condiciones de pérdida de energía y masa de las partículas que se impactan en paredes sólidas.

En la literatura se pueden consultar diferentes modelos computacionales que utilizan el enfoque Lagrangiano para predecir la dispersión de partículas en flujos turbulentos con geometría simple. La diferencia principal entre estos modelos está en la forma de evaluar las escalas integrales de tiempo y longitud lagrangianas de los remolinos turbulentos en contacto con las partículas ref./24-29/.

El trabajo presentado en este estudio, utiliza el enfoque Lagrangiano y la metodología de Montecarlo ref./7,24/.

En la tabla 1 se representan en forma sinóptica los modelos utilizados en la actualidad para simular flujos turbulentos con partículas en suspensión.

TABLA 1

Simulación de flujos turbulentos con partículas en suspensión

- A.-Modelos con acoplamiento en un sólo sentido.
- .-Baja relación de carga de partículas < 0.1
 - .-Interacción fluido \Rightarrow partículas.
 - .-Las características de la fase gaseosa se conocen a partir de datos experimentales y soluciones analíticas o numéricas.
-
- B.-Modelos con acoplamiento en dos sentidos.
- .-Relación de carga de partículas > 0.1
 - .-Interacción partículas-fluido-partículas.
 - .-Existen términos fuente o sumidero de interacción entre las fases.
 - .-Los términos de interacción entre las fases se evalúan a partir de dos enfoques:
 - (i).-Método de los dos fluidos (enfoque Euleriano)
 - .-Fluido y partículas tratados como medios continuos separados.
 - .-La influencia que tiene la turbulencia del fluido sobre el movimiento de las partículas, se modela a partir de un coeficiente de dispersión (analogía entre difusión molecular y dispersión turbulenta).
 - .-La formulación del enfoque Euleriano se complica cuando se pretende evaluar fenómenos físico - químicos que ocurren en la superficie de una partícula.
 - (ii).-Método de las trayectorias (enfoque Lagrangiano)
 - .-La fase gaseosa se trata como un continuo, mientras la fase dispersa la constituyen partículas discretas que se desplazan en el interior del fluido.
 - .-La dispersión de partículas ocasionada por la turbulencia del fluido se modela a partir de dos enfoques:
 - *.-Método de la velocidad efectiva de difusión ("fuerza de difusión").
 - **.-Método de Montecarlo, modelo de dispersión Lagrangiano Estocástico determinístico (L-E-D).
-

1.2.-PROPOSITO

El propósito de este trabajo es presentar un modelo matemático y su adaptación a un esquema numérico, el cual permite simular el comportamiento de flujos turbulentos con partículas sólidas en suspensión.

El modelo puede utilizarse en la caracterización de flujos con partículas en tuberías rectas, flujos de capa límite y chorros. El procedimiento de cálculo no es apropiado para el análisis de situaciones en donde se presenten zonas de recirculación o regiones sin dirección dominante del flujo.

El motivo de seleccionar en este estudio a flujos de capa límite como medio transportador de partículas, es debido a que la solución numérica de las ecuaciones de conservación es relativamente sencilla y presenta la característica de que en cualquier localización del flujo, el procedimiento de integración (marcha hacia adelante) requiere del almacenamiento de información de únicamente dos posiciones; la que se está considerando y la que se va a calcular, esto permite generar mallas computacionales mas finas, tanto en la dirección transversal como en la longitudinal.

La información numérica detallada hace posible la obtención de soluciones independientes de la discretización y permite comparar adecuadamente cálculos numéricos con datos experimentales. Lo anterior sirve en consecuencia para lograr una mejor evaluación de los modelos físicos involucrados y para identificar la importancia relativa de cada uno de los términos que aparecen en las ecuaciones.

En el modelo matemático que se presenta, el intercambio de cantidad de movimiento y energía entre las fases se determina mediante la solución de las ecuaciones Eulerianas de conservación de masa, momento y energía de la fase continua y de las ecuaciones Lagrangianas de movimiento y balance de energía de partículas individuales ref./1,2/.

La dispersión de partículas transportadas por un fluido en movimiento turbulento se determina haciendo uso del modelo Lagrangiano - Estocástico - Determinístico (L-E-D), ref./7,24/. Este modelo calcula trayectorias y temperaturas individuales de partículas a partir de la evaluación de velocidades y temperaturas instantáneas del fluido.

Las velocidades y temperaturas instantáneas de la fase continua se determinan a través de la generación de números aleatorios con distribución de probabilidad gaussiana. Las características medias y turbulentas de la fase dispersa se obtienen al promediar un número estadísticamente significativo de trayectorias.

El presentar los detalles teóricos y computacionales necesarios para la simulación de la transferencia de calor en flujos turbulentos con partículas en suspensión, desde el punto de vista Euleriano-Lagrangiano, constituye a juicio del autor una importante aportación ya que la mayor parte del trabajo computacional que aparece en la literatura, se ha realizado haciendo énfasis en el estudio de la transferencia de cantidad de movimiento en este tipo de flujos.

El desarrollar un esquema numérico que resuelve de manera acoplada las ecuaciones parabólicas tanto del fluido (en espacio) como de las partículas (en tiempo), permite evaluar, a partir del procedimiento de marcha hacia adelante, las características térmicas y dinámicas de las dos fases, a una distancia en donde se considera que los efectos de entrada han desaparecido. Adicionalmente el esquema numérico permite realizar predicciones con resultados que son independientes del tamaño de la malla numérica, ya que en marcha hacia adelante el incremento en espacio puede ser tan pequeño como se requiera. Estas características del programa de cómputo, constituyen una aportación relevante al estudio de los flujos turbulentos con partículas en suspensión ya que permite realizar simulaciones a grandes distancias, situación que no es posible llevar a cabo con esquemas elípticos los cuales requieren de la discretización de todo el dominio en estudio con la consecuente limitante en la capacidad de memoria y tiempo de cómputo.

Es conveniente enfatizar que los argumentos teóricos y computacionales que se presentan en este estudio, constituyen la base para futuros trabajos de investigación ya que contando con la herramienta computacional aquí desarrollada, pueden abordarse sin dificultad temas como:

.-Estudio del fenómeno de erosión que producen las partículas (sólidas o líquidas) que se impactan sobre superficies sólidas (paredes de ductos, impulsores de bomba, álabes de turbina, etc.).

.-Dispersión de partículas sólidas emitidas a la atmósfera ya sea por una situación de accidente (explosión, incendio, etc.) o por una situación de rutina (contaminación ambiental).

.-Estudio de la combustión llevada a cabo con combustibles líquidos atomizados o combustibles sólidos pulverizados.

1.3.-DESCRIPCION DEL TRABAJO

El presente estudio está dividido en varios capítulos en los que se tratan las bases teóricas del procedimiento computacional desarrollado.

Después de este capítulo de introducción se presenta el modelo matemático utilizado para la simulación de la fase continua, es

decir; se muestran las ecuaciones parabólicas que rigen el comportamiento de flujos turbulentos en capa límite.

En el capítulo 3 se introduce el modelo de turbulencia K- ϵ utilizado para cerrar el sistema de ecuaciones de la fase continua. En el capítulo 4 se presentan las condiciones de frontera para los flujos analizados en este trabajo, (flujos en ductos, canales y chorros libres) y se describe la forma de evaluar las constantes que aparecen en el modelo de turbulencia K- ϵ .

En el capítulo 5 se presenta el algoritmo de solución de las ecuaciones parabólicas de la fase continua, el cual se basa en el método numérico de los volúmenes finitos de control descrito en detalle por Patankar ref./11/.

En el capítulo 6 se presentan las ecuaciones que rigen el comportamiento la fase dispersa, se muestra la ecuación de movimiento de una partícula y su ecuación de balance de energía. En este mismo capítulo se introduce el modelo de dispersión de partículas Lagrangiano - Estocástico - Determinístico (L-E-D) ref./24/, el cual es utilizado en este trabajo para calcular; trayectorias, velocidades, temperaturas y concentraciones de partículas. El modelo de dispersión (L-E-D) evalúa la interacción entre las fases a partir del cálculo de términos fuente que son introducidos en las ecuaciones de la fase continua. El modelo considera una interacción entre las fases en dos sentidos es decir; el fluido altera el comportamiento de las partículas y las partículas a su vez modifican las características del fluido.

En el capítulo 7 se presenta la simulación de diferentes flujos turbulentos con partículas en suspensión y se comparan los resultados numéricos con datos experimentales que aparecen en la literatura.

2.-ECUACIONES DE LA FASE CONTINUA

2.1.-CONSERVACION DE MASA.

La ecuación que describe el principio de conservación de la materia en un fluido en movimiento, puede consultarse en diversos libros de texto de mecánica de fluidos y transferencia de calor. Esta ecuación es una expresión general del principio de conservación de masa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.1-1)$$

donde: ρ [kg/m³] = densidad del fluido.

u, v, w [m/s] = velocidades instantáneas del fluido en las direcciones x, y, z .
 t [s] = tiempo.

2.2.-CONSERVACION DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

El principio de conservación de cantidad de movimiento de un fluido en la dirección x se escribe como :

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v u)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w u)}{\partial z} = S_x \quad (2.2-1)$$

El término S_x incluye las fuerzas de cuerpo y de superficie que actúan como fuente de cantidad de movimiento.

S_x tiene la forma:

$$S_x = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x + S_{mx}^p \quad (2.2-2)$$

donde: g_x [m/s²] = fuerza de cuerpo por unidad de masa en la dirección x .

p [N/m²] = presión

σ_{xx} [N/m²] = esfuerzo viscoso normal.

τ_{ij} [N/m²] = esfuerzos viscosos cortantes.

S_{mx}^p [(N/m³)] = término fuente de interacción
entre las fases en la dirección x.

En el presente estudio se supone que el efecto global del contacto entre las fases es proporcional a la diferencia de velocidades ref./1,2/, es decir:

$$S_{mx}^p = F_1 (u - u^p) \quad (2.2-3)$$

donde: u^p [m/s] = velocidad instantánea de la fase dispersa en la dirección x.

La forma de la función F_1 y el procedimiento para evaluar S_{mx}^p se discutirán en detalle en el capítulo 6.

La forma general de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección x es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v u)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w u)}{\partial z} = \\ = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x + S_{mx}^p \end{aligned} \quad (2.2-4)$$

Las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento en las otras direcciones son:

En la dirección y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v w)}{\partial z} = \\ = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho g_y + S_{my}^p \end{aligned} \quad (2.2-5)$$

En la dirección z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho w u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w w)}{\partial z} = \\ = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z + S_{mz}^p \end{aligned} \quad (2.2-6)$$

Para un fluido newtoniano los esfuerzos viscosos se relacionan a los gradientes de velocidad mediante las expresiones:

$$\sigma_{xx} = 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2-7a)$$

$$\sigma_{yy} = 2 \mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2-7b)$$

$$\sigma_{zz} = 2 \mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.2-7c)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.2-7d)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.2-7e)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.2-7f)$$

donde:

μ [kg/(m s)] = viscosidad dinámica del fluido.

En estas ecuaciones los efectos de compresibilidad se han despreciado.

2.3.-CONSERVACION DE ENERGIA.

El desarrollo de la ecuación que describe el principio de conservación de la energía en un fluido en movimiento, puede consultarse en diversos libros de texto de transferencia de calor ref./30,31,32,33/.

En este estudio se considera que la energía de un fluido en movimiento es modificada debido a los siguientes fenómenos físicos:

- .-Transporte de energía por el movimiento del fluido (transporte convectivo).
- .-Transporte molecular de energía (transporte difusivo).
- .-Fuerzas viscosas (disipación de energía).
- .-Fuerzas de presión.
- .-Fuerzas de cuerpo.
- .-Fuentes internas de energía (transferencia de calor debido a los gradientes de temperatura entre las fases).

Considerando lo anterior, la ecuación de la energía puede escribirse como ref./33/ :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial (\rho u (e + (V^2/2)))}{\partial x} - \frac{\partial (\rho v (e + (V^2/2)))}{\partial y} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \\
 & - \frac{\partial q_z}{\partial z} - \frac{\partial pu}{\partial x} - \frac{\partial pv}{\partial y} - \frac{\partial pw}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{yx} u + \sigma_{yy} v + \tau_{yz} w \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \sigma_{zz} w \right) + \\
 & + \rho \left(u g_x + v g_y + w g_z \right) + S_E^P = 0 \quad (2.3-1)
 \end{aligned}$$

donde :

e [(m/s)²] \equiv energía interna del fluido por unidad masa.

$(V^2/2)$ [(m/s)²] \equiv energía cinética del fluido por unidad de masa.

$v^2 = \bar{v} \cdot \bar{v} = u^2 + v^2 + w^2$ \equiv cuadrado del módulo del vector velocidad.

q [W/m²] \equiv flujo de calor por unidad de superficie que se transmite por conducción.

g_x, g_y, g_z [m/s²] \equiv fuerzas por unidad de masa en las direcciones x, y, z

S_E^P [W / m³] \equiv término fuente de interacción entre las fases.

En el presente estudio se supone que el intercambio de energía entre las fases es proporcional a la diferencia de temperaturas ref./1,2/, es decir:

$$S_E^P = F_2 (T - T^P) \quad (2.3-2)$$

donde: T [K] \equiv Temperatura del fluido.

La forma de la función F_2 y el procedimiento para evaluar S_E^P se discutirán en detalle en el capítulo 6.

Si la entalpía total del fluido se define como:

$$H = e + \frac{1}{2} v^2 + (p/\rho) = h + \frac{1}{2} v^2 \quad (2.3-3)$$

donde: $H [m^2/s^2] \equiv$ entalpía total.

$h [m^2/s^2] = e + (p/\rho) \equiv$ entalpía estática.

al sustituir la ecuación (2.3-3) en (2.3-2), se obtiene, la ecuación de la entalpía total :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho H)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u H)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v H)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w H)}{\partial z} &= \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{yx} u + \sigma_{yy} v + \tau_{yz} w \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \sigma_{zz} w \right) + \rho \left(u g_x + v g_y + w g_z \right) + S_E^P \end{aligned} \quad (2.3-4)$$

El transporte molecular de calor (q), es descrito por la ley de Fourier de conducción de calor:

$$q_x = - \frac{k}{c_p} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.3-5a)$$

$$q_y = - \frac{k}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.3-5b)$$

$$q_z = - \frac{k}{c_p} \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.3-5c)$$

donde: $k [W/(m K)] \equiv$ conductividad térmica del fluido.

$c_p [J/(kg K)] \equiv$ calor específico a presión constante.

En las ecuaciones 2.3-5 (a-c), se supone que el fluido se comporta como gas ideal, es decir :

$$h = e + p/\rho = c_v T + R T \quad (2.3-6)$$

donde: $\rho = p / (R T)$ ecuación de estado de un gas ideal.

$c_v [J/(kg k)] = c_p - R \equiv$ calor específico a volumen constante.

$R [m^2/(s^2 K)] \equiv$ constante universal del gas.

Por lo que:

$$h = (c_v + R) T = c_p T \quad (2.3-7)$$

Esta última ecuación se ha utilizado para la definición de las ecuaciones 2.3-5 (a-c).

En los párrafos anteriores se han formulado las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía en conjunto con la ecuación de estado para un gas ideal. Cualquier solución de este sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas (ρ , u , v , w , p , H) es posible si se consideran las condiciones iniciales y de frontera adecuadas. Sin embargo, debido a que las ecuaciones de conservación constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, acoplado, no lineal y de segundo orden, no es posible encontrar ninguna solución general mediante procedimientos analíticos.

La solución numérica del sistema antes formulado, representa un reto para la Dinámica de Fluidos Computacional (DFC), que es la disciplina que tiene por objeto desarrollar algoritmos, modelos y esquemas numéricos útiles para la solución de las ecuaciones generales de la dinámica de los fluidos.

Para calcular el campo de velocidades y temperaturas de la fase continua, en el presente estudio se resolvieron las ecuaciones parabólicas de la dinámica de los fluidos, mediante el algoritmo numérico de los volúmenes de control ref./11/.

El resolver las ecuaciones parabólicas de los flujos de capa límite, trae como consecuencia que los modelos físicos de turbulencia e interacción entre las fases sean más sencillos de comprender, desarrollar y evaluar ya que su expresión matemática se simplifica. Adicionalmente a juicio del autor, la validación del modelo de dispersión de partículas L-E-D ref./7,24/ y su

adaptación a un esquema numérico es más conveniente realizarla en flujos sencillos bien definidos y entendidos antes de proceder a cuantificar flujos más complejos.

En la siguiente sección se presentan las aproximaciones de flujos en capa límite, las cuales conducen a establecer las ecuaciones parabólicas de la fase continua.

2.4.- ECUACIONES DE CAPA LIMITE.

Las ecuaciones que modelan el comportamiento de flujos parabólicos, en estado estacionario y en dos dimensiones se presentan en esta sección haciendo uso de las aproximaciones de capa límite formuladas por Ludwig Prandtl en 1904. ref./30,31,32,33/.

Considerando estado estacionario y flujo en dos dimensiones:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (2.4-1)$$

Las aproximaciones de capa límite son:

$$u \gg v \quad (2.4-2a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.4-2b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{es decir} \quad p = p(x) \quad (2.4-2c)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \equiv \frac{d p}{d x} \quad (2.4-2d)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} \gg \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.4-2e)$$

$$q_y \gg q_x \quad (2.4-2f)$$

$$u \tau_{xy} \gg u \tau_{xx}, v \tau_{yy}, v \tau_{yx} \quad (2.4-2g)$$

Utilizando las expresiones anteriores, las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía pueden escribirse como:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.4-3)$$

Ecuación de cantidad de movimiento en x :

$$\frac{\partial (\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v u)}{\partial y} = - \frac{d p}{d x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho g_x + S_{mx}^p \quad (2.4-4)$$

Ecuación de cantidad de movimiento en y :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.4-5)$$

Ecuación de la energía :

$$\frac{\partial (\rho u H)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v H)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-q_y + \tau_{yx} u) + \rho u g_x + S_E^P \quad (2.4-6)$$

donde : $\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

Haciendo uso de la ecuación de continuidad ec.(2.4-3), la ecuación de la energía (2.4-6), se escribe:

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-q_y + \tau_{yx} u) + \rho u g_x + S_E^P \quad (2.4-7)$$

A partir de las definiciones :

entalpía total $H = c_p T + u^2/2$

número de Prandtl $Pr = \mu c_p / k$

flujo de calor $q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$

es posible escribir :

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (c_p T) + u \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{Pr}{\mu} q_y + u \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.4-8)$$

despejando q_y , se tiene :

$$-q_y = \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\mu}{Pr} u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{1}{Pr} u \tau_{yx} \quad (2.4-9)$$

sustituyendo la ecuación (2.4-9) en (2.4-7) :

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} (1 - \frac{1}{Pr}) + \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y}) + \rho u g_x + S_E^P \quad (2.4-10)$$

2.5.-ECUACIONES DE CAPA LIMITE PARA FLUJOS AXIAL-SIMETRICOS.

Debido a que en el presente estudio se realizó la simulación numérica de flujos con partículas en suspensión en el interior de ductos con sección transversal circular y en " chorros " redondos, las ecuaciones de conservación se formularon también en el sistema de coordenadas cilíndricas (r, z, Θ) .

Ecuación de continuidad :

$$\frac{\partial (r\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (r\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.5-1)$$

Ecuación de cantidad de movimiento en x :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{d p}{d x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} (r \mu \frac{\partial u}{\partial y}) + \rho g_x + S_{mx}^P \quad (2.5-2)$$

Ecuación de la energía :

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} (r (\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + u ((1 - \frac{1}{Pr}) \mu \frac{\partial u}{\partial y}))) + \rho u g_x + S_E^P \quad (2.5-3)$$

2.6.-ECUACIONES DE CONSERVACION PARA FLUJOS TURBULENTOS.

La turbulencia es un fenómeno que aparece la mayoría de las veces en los fluidos en movimiento que son de interés a la ingeniería, se manifiesta por la presencia de fluctuaciones aleatorias en espacio y tiempo de los campos de velocidad, presión, temperatura y densidad. Este fenómeno ha sido tema de múltiples investigaciones ya que, desde el trabajo de Reynolds ref./34/, se le ha intentado comprender, modelar y controlar, sin embargo; a la fecha constituye uno de los grandes problemas no resueltos de la física.

Tradicionalmente la turbulencia ha sido estudiada recurriendo a procedimientos estadísticos, los cuales han dado origen al problema de " cierre de las ecuaciones", ya que al hacer uso de estos métodos se llega a un sistema en el que existen más incógnitas que ecuaciones. La ingeniería en su intento por resolver los problemas que plantea la dinámica de los fluidos, ha elaborado "modelos de turbulencia" de los términos adicionales que aparecen en las ecuaciones.

Debido a que el modelado de los términos se basa en la experimentación, esta tendencia ha recibido el nombre de escuela fenomenológica. Este procedimiento de solución de las ecuaciones si bien ha dado soluciones a problemas prácticos, últimamente ha sido objeto de severas críticas por parte de los físicos teóricos ref./35/, quienes opinan que los trabajos de L. Prandtl, O. Reynolds, V. Karman, etc.. durante más de un siglo no han ofrecido una respuesta adecuada que conduzca a la comprensión de la turbulencia.

Recientemente ha surgido la escuela determinística que pretende estudiar la turbulencia resolviendo las ecuaciones de la dinámica de los fluidos de manera directa, es decir sin realizar promedios estadísticos, sin embargo, el día en que se lleven a cabo simulaciones útiles para ingeniería no se ve cercano dado que la capacidad de memoria y velocidad de cálculo que se requiere para evaluar los campos de velocidad, temperatura, presión, etc. de cada elemento de fluido en todo espacio y tiempo resulta ser excesivo por lo menos para la tecnología del presente siglo. Por otro lado, aún si se tuviera la capacidad de cálculo, la información detallada no sería de gran utilidad para la ingeniería ya que, la mayoría de las veces los diseños de dispositivos requieren de información promediada.

En este trabajo se han resuelto las ecuaciones de la dinámica de los fluidos promediadas en el tiempo de acuerdo a la formulación de O. Reynolds ref./33,35,36,37,38/. Debido a que es un procedimiento estadístico, la metodología de O. Reynolds, conduce a la generación de términos adicionales, los cuales son modelados mediante un modelo fenomenológico de turbulencia de segundo orden, el cual será discutido en detalle en el capítulo 3 .

Si los valores instantáneos de las características del fluido se descomponen en valores medios estacionarios y fluctuaciones transitorias, la velocidad, presión y entalpía total se escriben como:

$$u_i(x_i, t) = \bar{u}_i(x_i) + u_i'(x_i, t) \quad (2.6-1a)$$

$$p(x_i, t) = \bar{p}(x_i) + p'(x_i, t) \quad (2.6-1b)$$

$$H(x_i, t) = \bar{H}(x_i) + H'(x_i, t) \quad (2.6-1c)$$

donde:

$$u_i \text{ [m/s]} = \text{velocidad instantánea.}$$

$$\bar{u}_i \text{ [m/s]} = \text{velocidad media sin variación en el tiempo (estado estacionario).}$$

u'_i [m/s] = fluctuación de velocidad.

p [N/m²] = presión instantánea.

\bar{p} [N/m²] = presión media

p' [N/m²] = fluctuación de presión

H [m²/s²] = entalpía total instantánea

\bar{H} [m²/s²] = entalpía total media

H' [m²/s²] = fluctuación de entalpía total

En este estudio las fluctuaciones de densidad, viscosidad y conductividad térmica se consideran despreciables.

Los valores medios se obtienen al realizar un promedio estadístico en el tiempo de los valores instantáneos. El promedio en el tiempo se define como ref./33,36,37,38/:

$$\bar{u}_i = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} u_i dt \quad (2.6-2)$$

En la práctica " ∞ " significa, que el intervalo de tiempo τ es de mucho mayor magnitud que el recíproco de la frecuencia dominante en la señal captada por un anemómetro (hilo caliente o laser).

El valor medio de una fluctuación es por definición cero, es decir:

$$\bar{u}'_i = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} (u_i - \bar{u}_i) dt = 0 \quad (2.6-3)$$

Para que el promedio en el tiempo tenga validéz, las integrales en las dos ecuaciones anteriores tienen que ser independientes de t_0 , es decir, los valores medios de las características del fluido son independientes del tiempo (flujo medio estacionario):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0 \quad (2.6-4)$$

Adicionalmente se considera que :

$$\bar{u}_i = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \bar{u}_i dt = \bar{u}_i \quad (2.6-5)$$

El valor medio del producto de fluctuaciones no es cero, es decir:

$$\overline{u_i' u_i'} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} (u_i - \bar{u}_i) dt \neq 0 \quad (2.6-6)$$

El valor instantáneo de la entalpía total se escribe como:

$$H = \bar{H} + H' = \bar{h} + h' + 0.5 (\bar{u} + u')^2 \quad (2.6-7)$$

Sustituyendo esta expresión junto con las relaciones (2.6-1a-b) en las ecuaciones de conservación de la sección anterior ecs.(2.5-1-3) y tomando promedios en el tiempo, se obtienen las expresiones que modelan el comportamiento de los flujos turbulentos de capa límite, ref./39/ :

Ecuación de continuidad :

$$\frac{\partial (r^k \bar{\rho u})}{\partial x} + \frac{\partial (r^k \bar{\rho v})}{\partial y} = 0 \quad (2.6-8)$$

Ecuación de cantidad de movimiento en x :

$$\begin{aligned} \bar{\rho u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = & - \frac{d \bar{p}}{d x} + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial y} (r^k (\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'})) + \\ & + \bar{\rho} g_x + \bar{S}_{mx}^P \end{aligned} \quad (2.6-9)$$

Ecuación de la energía :

$$\begin{aligned} \bar{\rho u} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \bar{\rho v} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} = & \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial y} (r^k (\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} - \rho \overline{h'v'} + \\ & + \bar{u} ((1 - \frac{1}{Pr}) \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}))) + \bar{\rho u} g_x + \bar{S}_E^P \end{aligned} \quad (2.6-10)$$

donde:

$k = 1$ para flujos axial-simétricos.
 $k = 0$ para flujos en el plano cartesiano.

Las ecuaciones (2.6-8 a 2.6-10) constituyen un sistema "no cerrado" de ecuaciones ya que no existen suficientes ecuaciones para todas las incógnitas que aparecen :

\bar{p} = ecuación de continuidad

\bar{H} = ecuación de la energía

\bar{u} = ecuación de conservación de cant. de mov. en x

\bar{v} = ecuación de conservación de cant. de mov. en y

ρ = ecuación de estado.

$\overline{u'v'}$ = sin ecuación

$\overline{h'v'}$ = sin ecuación

En el presente estudio se modelan los términos turbulentos recurriendo a la escuela fenomenológica, es decir se utiliza un modelo de turbulencia surgido de la experimentación en flujos con condiciones controladas.

En los próximos capítulos se discutirán en detalle las bases teóricas que conducen a la formulación del modelo de turbulencia (K- ϵ) útil para cuantificar el término $\overline{u'v'}$ y del número de Prandtl turbulento que es utilizado en la evaluación de $\overline{h'v'}$.

3.-MODELO DE TURBULENCIA K- ϵ

3.1.-GENERALIDADES

La determinación del esfuerzo de Reynolds $\overline{\rho u'v'}$ que aparece en las ecuaciones mostradas en el capítulo anterior, es uno de los principales problemas que se tiene en el cálculo de flujos turbulentos. En los últimos 50 años se han desarrollado modelos de diferente complejidad con el propósito de describir la turbulencia implícita en los términos $\overline{\rho u'_i u'_j}$. Dependiendo del número de ecuaciones de transporte que el modelo requiera, se pueden clasificar en:

.-Modelos sin ecuaciones de transporte (longitud de mezcla de Prandtl) ref./40/.

.-Modelos de una ecuación ref./41,42/.

.-Modelos de dos ecuaciones ref./43/.

.-Modelos de los esfuerzos de Reynolds ($\overline{u'v'}$, $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$) ref./44/.

La complejidad y generalidad de uso de los modelos se incrementa con el número de ecuaciones utilizadas.

El modelo de turbulencia K- ϵ , pertenece a la familia de los modelos de dos ecuaciones ya que requiere de una ecuación para la velocidad característica de la turbulencia y otra para la longitud característica del movimiento turbulento ref./33/.

$K [m^2/s^2] \equiv$ energía cinética turbulenta = $0.5 (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$

$\epsilon [m^2/s^3] \equiv$ rapidez de disipación de K

El modelo K- ϵ hace uso del principio de la viscosidad turbulenta μ_t , el cual considera que en analogía a un flujo laminar, los esfuerzos inducidos por el movimiento turbulento son proporcionales a la velocidad de deformación del flujo medio es decir:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho K \delta_{ij} \quad (3.1-1)$$

El término adicional que contiene la energía cinética turbulenta K, se incluye con el objeto de que la suma de los tres esfuerzos normales (i=j) sea igual a 2K, si este término no se toma en consideración la suma de los esfuerzos normales resultaría ser igual a cero, debido a la ecuación de continuidad ref./33,48/.

A diferencia de la viscosidad molecular μ , la viscosidad turbulenta μ_t no es una propiedad del fluido sino que depende de la estructura turbulenta del fluido en movimiento, por lo que μ_t puede variar considerablemente en diferentes campos de flujo.

Mediante un análisis dimensional puede observarse que μ_t es proporcional a :

- la densidad del fluido ρ .
- una velocidad característica de la turbulencia V .
- una longitud característica de la turbulencia L .

Por lo que entonces:

$$\mu_t \propto \rho V L \quad (3.1-2)$$

En el modelo K- ϵ :

$$V \propto K^{1/2}$$
$$L \propto K^{3/2} / \epsilon$$

Los dos escalares K- ϵ son utilizados para caracterizar el movimiento turbulento del fluido.

Introduciendo la constante de proporcionalidad C_μ en la ec.(3.1-2) y considerando las dos últimas relaciones de proporcionalidad, la viscosidad turbulenta es determinada por:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{K^2}{\epsilon} \quad (3.1-3)$$

Para la evaluación de μ_t , se deben conocer previamente las distribuciones de K y ϵ en el interior del flujo, el campo escalar de estas dos variables turbulentas se calcula mediante la solución de sus ecuaciones de transporte. El factor adimensional C_μ es determinado mediante experimentación.

En las siguientes secciones se presentan las ecuaciones de transporte de las variables turbulentas K y ϵ .

3.2.-ECUACION DE TRANSPORTE DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTO (K)

En esta sección se formula la ecuación de la energía cinética turbulenta utilizada en el modelo K- ϵ . Para establecer la expresión utilizada en el modelo, es necesario en primer lugar derivar la forma exacta de K, esta expresión se obtiene a partir de la suma de las tres ecuaciones de transporte correspondientes a

cada uno de los esfuerzos turbulentos normales, $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$. En base a esto es recomendable en primer lugar conocer la expresión exacta de las ecuaciones de transporte de los esfuerzos de Reynolds. Estas ecuaciones se presentan en la siguiente sección.

3.2.1.-ECUACIONES DE TRANSPORTE DE LOS ESFUERZOS DE REYNOLDS

Las ecuaciones de transporte de los esfuerzos turbulentos o de Reynolds $\rho \overline{u'_i u'_j}$ forman la base para el desarrollo de aquellos modelos de turbulencia que no son puramente empíricos. En el apéndice A se presenta la derivación de las ecuaciones de los esfuerzos de Reynolds, haciendo uso de la notación tensorial y suponiendo, fluido incompresible y newtoniano.

Para el proceso de derivación de las ecuaciones de transporte de $\overline{u'_i u'_j}$ se consideran los pasos siguientes :

1.-Sustraer de la ecuación instantánea de cantidad de movimiento en la dirección i , la ecuación promediada en el tiempo de cantidad de movimiento en la misma dirección. El resultado es la ecuación de transporte para u'_i .

$$\frac{\partial (\overline{u}_i + u'_i)}{\partial t} - \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial u'_i}{\partial t}$$

2.-Multiplicar esta ecuación por u'_j .

$$u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t}$$

3.-Sustraer de la ecuación instantánea de cantidad de movimiento en la dirección j , la ecuación promediada en el tiempo de cantidad de movimiento en la misma dirección. El resultado es la ecuación de transporte para u'_j .

$$\frac{\partial (\overline{u}_j + u'_j)}{\partial t} - \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial t} = \frac{\partial u'_j}{\partial t}$$

4.-multiplicar esta ecuación por u'_i .

$$u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t}$$

5.-Sumar ambas ecuaciones.

$$u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t} = \frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial t}$$

6.-Promediar en el tiempo de acuerdo al procedimiento descrito en el capítulo 2.

$$\frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial t}$$

La ecuación de transporte de los esfuerzos de Reynolds, para flujos en estado estacionario se escribe (ver apéndice A) :

$$\begin{aligned} \overline{u'_k \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_k}} &= - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j u'_k})}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\overline{u'_j p'})}{\partial x_i} + \frac{\partial (\overline{u'_i p'})}{\partial x_j} \right) - \\ &\quad - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) + \\ &\quad + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2 \nu \frac{\partial \overline{u'_i} \partial \overline{u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} \end{aligned} \quad (3.2-1)$$

Donde el significado de los diferentes términos puede consultarse en el apéndice A.

El modelo de turbulencia utilizado en este trabajo, requiere de la formulación de la ecuación transporte de la energía cinética turbulenta K, que se obtiene al sumar las ecuaciones de transporte de los esfuerzos normales de Reynolds, es decir $i=j$.

En la ecuación (3.2-1) , la expresión del esfuerzo normal $\overline{u'_1}^2$ ($i=j=1$) es:

$$\begin{aligned} \overline{u'_k \frac{\partial u'_1{}^2}{\partial x_k}} &= - \frac{\partial \overline{u'_k u'_1{}^2}}{\partial x_k} - \frac{2 \partial \overline{u'_1 p'}}{\rho \partial x_1} - 2 \overline{u'_1 u'_k} \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_k} + \\ &\quad + \frac{2 p'}{\rho} \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_1}^2}{\partial x_k \partial x_k} - 2 \nu \frac{\partial \overline{u'_1} \partial \overline{u'_1}}{\partial x_k \partial x_k} \end{aligned} \quad (3.2-2)$$

De manera semejante se obtienen las ecuaciones para los esfuerzos normales $\bar{u}_2'^2$, $\bar{u}_3'^2$ es decir para $i=j=2$ e $i=j=3$.

La suma de estas ecuaciones dividida entre 2, proporciona la ecuación de transporte para la energía cinética de la turbulencia:

$$K = \frac{1}{2} (\bar{u}_1'^2 + \bar{u}_2'^2 + \bar{u}_3'^2) = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} \quad (3.2-3)$$

Al realizar la suma de los tres esfuerzos normales, desaparece el término "Presión-Deformación", debido a la ecuación de continuidad es decir:

$$\frac{\partial u_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3'}{\partial x_3} = 0 \quad (3.2-4)$$

La ecuación de transporte de la energía cinética de la turbulencia se expresa entonces como ref./33,39/:

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial K}{\partial x_k} = & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_k' \left(\frac{u_i' u_i'}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) \right) - \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \\ & + \nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_k \partial x_k} - \nu \frac{\partial u_1'}{\partial x_k} \frac{\partial u_1'}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.2-5)$$

A
B
C

D
E

Donde:

- A= Transporte convectivo de K debido al movimiento del fluido.
- B= Difusión de K debido a las Fluctuaciones de velocidad y presión.
- C= Producción de K debido a la interacción de los esfuerzos turbulentos con el gradiente de la velocidad media.
- D= Difusión de K debido a la acción de la viscosidad molecular (para grandes números de Reynolds, el transporte molecular es despreciable en relación al transporte turbulento).
- E= Transformación de la energía cinética turbulenta en energía interna del fluido. Este proceso es conocido como disipación ϵ .

Tomando en consideración las aproximaciones que conducen al modelado de flujos de capa límite (ver sección 2.4), la ecuación de la energía cinética turbulenta para flujos de capa límite en dos dimensiones se formula como ref./33/:

$$\bar{u} \frac{\partial K}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial K}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v' \left(\frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + p' \right)} \right) - \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \epsilon \quad (3.2-6)$$

En esta ecuación se ha considerado que la difusión de K debido a la viscosidad molecular es despreciable (grandes números de Reynolds).

3.2.2.-MODELADO DE LA ECUACION DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTA

Para determinar las características del movimiento turbulento del fluido, se resuelven las ecuaciones de transporte para \bar{u}_i , \bar{H} , K y ϵ , por lo que los términos de producción y difusión de energía que aparecen en la expresión exacta de K, ec.(3.2-5), deben ser modificados (o modelados) de tal manera que contengan únicamente las variables antes mencionadas. De esta forma se obtiene un sistema cerrado de ecuaciones.

En el término de producción de energía de la ec.(3.2-5), los esfuerzos de Reynolds $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ son desconocidos, sin embargo, al hacer uso del modelo de la viscosidad turbulenta ec.(3.1-1), este término de producción se escribe como:

$$P_K = - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \quad (3.2-7)$$

donde:

ν_t [m²/s] = viscosidad cinemática turbulenta.

utilizando la ecuación (3.1-3), se obtiene la expresión del término generación de energía cinética turbulenta, del modelo K- ϵ , es decir :

$$P_K = C_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \quad (3.2-8)$$

El término de difusión turbulenta de la ecuación 3.2-5 es modelado suponiendo que la difusión de K se lleva a cabo en la dirección del gradiente negativo de K.

$$-\overline{u'_k \left(\frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} = \frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_k} \quad (3.2-9)$$

Esto significa, que la energía cinética es transportada de regiones en donde existe una gran actividad turbulenta hacia zonas de menor intensidad de K. En la ecuación anterior se introdujo el coeficiente de intercambio ν_t/σ_K en donde σ_K es el número de Prandtl para K, el cual se considera constante en este trabajo.

Sustituyendo las ecs. (3.2-7) y (3.2-9) en la expresión exacta de K, ec.(3.2-5), se obtiene la ecuación de la energía cinética turbulenta, tal y como es utilizada en el modelo K- ϵ .

$$\overline{u_k \frac{\partial K}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_k} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \epsilon$$

| | | | |
|------------|----------|------------|------------|
| CONVECCION | DIFUSION | PRODUCCION | DISIPACION |
| | | | (3.2-10) |

Para flujo bidimensional en capa límite se tiene:

$$\overline{u} \frac{\partial K}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 - \epsilon \quad (3.2-11)$$

3.3.-ECUACION DE TRANSPORTE DE LA DISIPACION DE ENERGIA CINETICA TURBULENTA (ϵ).

Antes de desarrollar una ecuación de transporte para ϵ , es conveniente escribir nuevamente su definición ref./33,39,47/:

$$\epsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \quad (3.3-1)$$

que puede entenderse como una correlación de fluctuaciones de velocidades de deformación.

Una ecuación de transporte para esta correlación, puede ser derivada partiendo de la ecuación de movimiento de u'_i ec. (A.5).

Los pasos para establecer una ecuación para ϵ son :

- 1.-Derivar la ecuación de u'_i con respecto a x_1 .
- 2.-Multiplicar la expresión resultante por $2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_1}$
- 3.-Promediar en el tiempo de acuerdo al procedimiento descrito en el capítulo 2.

El resultado es la siguiente expresión general ref /33,47/:

$$\begin{aligned} \overline{u'_k} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} + \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_1} \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right) - \\ & \text{A} \qquad \qquad \qquad \text{B} \\ & - 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial u'_k}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_1}{\partial x_i} \frac{\partial u'_1}{\partial x_k} \right) - 2\nu u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_1 \partial x_k} - \\ & \qquad \qquad \qquad \text{C} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{D} \\ & - 2\nu \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \frac{\partial u'_k}{\partial x_1} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - 2\nu \left(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_1} \right)^2 \qquad \qquad \qquad (3.3-2) \\ & \qquad \qquad \qquad \text{E} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{F} \end{aligned}$$

Donde de manera semejante a la ecuación de K se tiene :

- A= Convección por el movimiento del fluido (velocidad media).
- B= Difusión debido al movimiento turbulento y molecular.
- C + D= Producción debido al movimiento medio del fluido.
- E= Producción inducida por la generación de remolinos turbulentos de menor escala.
- F= Destrucción debido a las fuerzas viscosas.

3.3.1.- MODELADO DE LA ECUACION DE DISIPACION DE ENERGIA CINETICA TURBULENTA.

Debido a que en la ecuación exacta de (ϵ) , aparecen nuevas incógnitas, ésta no puede ser utilizada de manera directa en el modelo K- ϵ . Las correlaciones deben ser modeladas utilizando expresiones, cuyas variables sean $\overline{u'_i}$, K y ϵ .

El modelado de la ecuación (3.3-2), presenta serias dificultades, ya que desafortunadamente hasta la fecha no ha sido posible medir

cada término de manera aislada. Es por esto que el modelo de la ecuación de ϵ , tiene suposiciones muchas veces de naturaleza especulativa.

Las suposiciones que permiten modelar cada término de la ecuación (3.3-2) se describen a continuación :

.-Producción debido al movimiento medio del fluido (C+D).

Al considerar cada uno de los términos de la ecuación de ϵ , puede suponerse que para grandes números de Reynolds, la producción de ϵ debido al movimiento medio del fluido es despreciable en relación a otros términos.

.-Producción debido a la generación de remolinos turbulentos de menor escala (E) y destrucción debido a las fuerzas viscosas (F). Estos dos términos tienden a un valor infinito cuando el número de Reynolds también tiende a infinito, sin embargo, la diferencia entre ambos permanece finita e independiente del número de Reynolds. Entonces los dos términos pueden ser modelados de manera conjunta y su representación es como sigue ref/33/:

$$E - F = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} P_K - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} \quad (3.3-3)$$

donde: $P_K [m^2/s^3]$ = producción de K, ver ec.(3.2-8)

$C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$ = constantes empíricas.

.-Difusión debido al movimiento turbulento y molecular (B).

El término de difusión es modelado suponiendo que la difusión de ϵ se lleva a cabo en la dirección del gradiente negativo de ϵ . Esto significa, que la disipación de energía cinética es transportada de regiones en donde existe una gran cantidad de disipación turbulenta hacia zonas de menor ϵ .

$$B = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right) \quad (3.3-4)$$

En la ecuación anterior se introdujo el coeficiente de intercambio ν_t/σ_ϵ , en donde σ_ϵ es el número de Prandtl para ϵ , el cual es una constante empírica adicional.

Al utilizar las suposiciones anteriores y sustituir las expresiones (3.3-3) y (3.3-4) en la ecuación exacta de ϵ , ec.(3.3-2), se obtiene la ecuación para la disipación de energía cinética turbulenta tal y como es utilizada en el modelo (K- ϵ).

$$\overline{u'_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x'_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right) + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} P_K - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} \quad (3.3-5)$$

3.4.-ECUACIONES DEL MODELO DE TURBULENCIA K- ϵ

Con las ecuaciones anteriores, el modelo de turbulencia utilizado en el presente trabajo, se formula como :

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \quad (3.4-1)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \quad (3.4-2)$$

$$\overline{u'_k \frac{\partial K}{\partial x'_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_k} \right) + P_K - \epsilon \quad (3.4-3)$$

$$\overline{u'_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x'_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right) + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} P_K - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} \quad (3.4-4)$$

$$P_K = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.4-5)$$

donde : C_μ , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$, σ_K , σ_ϵ , son constantes empíricas a ser determinadas por experimentos.

3.4.1.-ECUACIONES DEL MODELO DE TURBULENCIA K- ϵ , PARA FLUJOS BIDIMENSIONALES EN CAPA LIMITE.

En este trabajo se resuelven las ecuaciones de capa límite para flujos turbulentos bidimensionales, el modelo de turbulencia K- ϵ , para estos flujos consiste de las siguientes expresiones:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad (3.4-6)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \quad (3.4-7)$$

$$\bar{u} \frac{\partial K}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \epsilon + S_K^p \quad (3.4-8)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} + S_\epsilon^p \quad (3.4-9)$$

En las ecuaciones de K y ϵ se incluye el término fuente de interacción partícula - fluido, este término permite evaluar la influencia que las partículas tienen sobre las características turbulentas del fluido. En el capítulo 6 se presenta la forma en que el modelo de dispersión (L-E-D) considera los términos fuente del modelo K- ϵ .

4.-CONDICIONES DE FRONTERA DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACION Y DETERMINACION DE LAS CONSTANTES DEL MODELO K- ϵ

En este capítulo se establecen las condiciones de frontera necesarias para resolver el modelo matemático constituido por las siguientes ecuaciones :

- A).-Ecuación de continuidad.
- B).-Ecuación de cantidad de movimiento.
- C).-Ecuación de la energía.
- D).-Ecuación de la energía cinética turbulenta (K).
- E).-Ecuación de disipación de la energía turbulenta (ϵ).

Debido a que en el presente trabajo se lleva a cabo la solución numérica de flujos turbulentos con partículas en suspensión en ductos y en chorros libres, se identifican tres tipos de condiciones de frontera.

- .-Pared sólida.
- .-Corriente libre (turbulenta o laminar).
- .-Eje ó plano de simetría.

4.1-CONDICIONES DE FRONTERA CORRESPONDIENTES A PAREDES SOLIDAS

4.1.1.-CONDICION DE FRONTERA PARA LA ECUACION DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

La forma del modelo K- ϵ presentado en el capítulo 3 es válida únicamente para flujos completamente turbulentos, sin embargo, en la cercanía de paredes sólidas, el número de Reynolds local de la turbulencia ($K^{1/2}L/\nu$, donde $L \equiv K^{3/2}/\epsilon$), es pequeño por lo que los efectos de la viscosidad predominan sobre el movimiento turbulento, en esta región (subcapa viscosa), el modelo K- ϵ , no puede ser utilizado. De manera adicional, en esta zona los gradientes de las variables dependientes (\bar{u} , \bar{v} , \bar{H} , K, ϵ) son muy grandes, por lo que una buena aproximación de su comportamiento sólo puede lograrse al discretizar esta región con una malla numérica muy fina, incrementando con ello el costo de la solución y la capacidad de memoria de las computadoras requeridas.

En el presente estudio, la solución numérica de flujos turbulentos en regiones cercanas a paredes sólidas se ha realizado utilizando el método de la función de pared (The wall-function method). Con este procedimiento la integración de las ecuaciones de balance no se lleva a cabo hasta la pared, sino hasta un punto denominado y_c localizado en la región donde es válida la ley logarítmica de la pared. Esta ley describe con suficiente aproximación la distribución de la velocidad media en la zona adyacente a paredes sólidas.

Al utilizar el método de la función de pared, es necesario que un punto c (localizado a una distancia y_c de la pared) se encuentre lo suficientemente alejado de tal manera que el número de Reynolds de la turbulencia ($K^{1/2}L/\nu$) sea mucho mayor que la unidad, es decir que los efectos viscosos sean despreciables en relación a los efectos producidos por el movimiento turbulento.

La ecuación que establece la ley de variación de la velocidad media en la cercanía de una pared sólida, fue formulada por primera vez por Prandtl ref./45/, la expresión que se utiliza en este trabajo se deriva en detalle en el apéndice B.

La ecuación que representa la condición de frontera de la ecuación diferencial de cantidad de movimiento en la dirección x es:

$$\overline{u}_c = \overline{u}_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y_c}{\nu} \overline{u}_\tau \right) + B \right) \quad (4.1-1)$$

donde:

$\kappa = 1/A = 0.41 \equiv$ constante de Von Karman (empírica).

$B = 5.2 \equiv$ constante empírica.

4.1.2.-CONDICION DE FRONTERA PARA LA ECUACION DE LA ENERGIA.

En la sección anterior se presentó la expresión que rige el comportamiento de la velocidad media en flujos turbulentos en la cercanía de una pared sólida. En esta sección, se toman en cuenta consideraciones semejantes para establecer la distribución de temperatura media (y/o entalpía total) de un flujo turbulento en la región adyacente a una pared sólida lisa. En el apéndice C se puede consultar el desarrollo que conduce a la ley logarítmica de temperaturas y que se expresa como:

$$\overline{H}^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \ln y^+ + 3.8 \quad (4.1-2)$$

donde: \overline{H}^+ [] \equiv Temperatura adimensional.

Pr_t [] \equiv Número de Prandtl turbulento (valor empírico).

$= 0.86$

Esto constituye la condición de frontera para la ecuación de la entalpía total media, en flujos confinados por paredes sólidas.

4.1.3.-CONDICION DE FRONTERA PARA LA ECUACION DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTO.

La condición de frontera para la ecuación de la energía cinética turbulenta queda determinada al conocer la ley de variación de las fluctuaciones de velocidad en la región logarítmica.

El desarrollo de esta ley de variación se presenta en detalle en el apéndice D.

La relación que representa la condición de frontera de la ecuación diferencial de la energía cinética turbulenta es:

$$K_c = \frac{\bar{u}^2}{C \mu^{1/2}} \quad (4.1-3)$$

4.1.4.-CONDICION DE FRONTERA PARA LA ECUACION DE DISIPACION DE ENERGIA CINETICA TURBULENTO.

En el desarrollo de la condición de frontera de K (apéndice D) se llegó a la conclusión de que en la región logarítmica, existe un equilibrio local es decir la producción de energía turbulenta es igual a la disipación de energía debido a los efectos viscosos, esta situación es utilizada para formular la condición de frontera para la ecuación de ϵ . Si la ecuación (D.10) se escribe en la forma (ver ec.(3.2-6)) :

$$-\frac{\bar{u}'}{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \epsilon \quad (4.1-4)$$

y el gradiente de la velocidad media se determina al derivar la ley logarítmica de la pared ec.(4.1-1), es decir:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\bar{u}}{\tau} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \left(\frac{y}{\nu} \frac{\bar{u}}{\tau} \right) \right) \quad (4.1-5)$$

Al llevar a cabo la derivación de la función y evaluarla en un punto y_c localizado en la región logarítmica se tiene:

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_c = \frac{\bar{u}_c}{\kappa y_c} \quad (4.1-6)$$

Sustituyendo (4.1-6) en (4.1-4), ϵ adquiere el siguiente valor (condición de frontera) :

$$\epsilon_c = \frac{\bar{u}_c^3}{\kappa y_c} \quad (4.1-7)$$

4.2.-CONDICIONES DE FRONTERA CORRESPONDIENTES A UNA CORRIENTE LIBRE

La condición de frontera de un flujo turbulento que se encuentra confinado en una corriente libre ó en un fluido sin movimiento, es difícil de establecer ya que es una superficie no estacionaria que separa dos regiones con diferentes característica turbulentas. En realidad el hablar de una región que separa los dos flujos no tiene significado ya que aún fuera de la frontera puede existir transporte turbulento, sin embargo en fronteras de este tipo, los cálculos se realizan hasta un punto cuya velocidad media es aproximadamente la de la corriente libre. Es decir la condición de frontera para la ecuación de cantidad de movimiento en x es ;

$$\bar{u} = \bar{u}_e \quad (4.2-1)$$

donde:

$$\bar{u}_e \text{ [m/s]} = \text{velocidad de la corriente libre}$$

En una corriente libre sin turbulencia, todas las cantidades turbulentas son nulas por lo que las condiciones de frontera de K y ϵ son :

$$K_e = \epsilon_e = 0. \quad (4.2-2)$$

donde el subíndice e se refiere a la corriente libre

Si la corriente libre es turbulenta, se considera que K y ϵ tienen el comportamiento de un flujo con turbulencia de malla (el nivel de energía turbulenta varía inversamente con la distancia a la malla), es decir; si en las ecuaciones (3.4-8) y (3.4-9), se desprecian los términos de difusión y producción se tiene:

$$\frac{d K_e}{d x} = - \frac{\epsilon_e}{u_e} \quad (4.2-3)$$

$$\frac{d \epsilon_e}{d x} = - C_{\epsilon 2} \epsilon_e^2 \frac{1}{K_e u_e} \quad (4.2-4)$$

4.3.-CONDICIONES DE FRONTERA CORRESPONDIENTES A UN EJE (PLANO) DE SIMETRIA

Este tipo de condición de frontera a diferencia de las dos anteriores (que son condiciones físicas) es una definición matemática, ya que en flujos simétricos es suficiente con calcular una mitad del campo o región de estudio.

En flujos simétricos \bar{u} , \bar{H} , K , ϵ , tienen valores simétricos en relación a un eje o a un plano, por lo que la derivada con

respecto a "y" ("y" es normal al eje de simetría) no tiene valor, es decir:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} = \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0. \quad (4.3-1)$$

4.4.-DETERMINACION DE LAS CONSTANTES DEL MODELO K- ϵ

El valor de las constantes empíricas (C_μ , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$, σ_k , σ_ϵ) que aparecen en el modelo de turbulencia K- ϵ presentado en el capítulo 3, será especificado en esta sección.

Mediciones del decaimiento de turbulencia generado por el paso de un fluido a través de una malla (grid turbulence), han establecido que para números de Reynolds grandes, el nivel de energía turbulenta varía inversamente con la distancia a la malla.

$$K \propto x^{-n} \quad (4.4-1)$$

En estos flujos los términos de difusión y producción de K y ϵ son nulos por lo que las ecuaciones (3.4-8) y (3.4-9) se reducen a:

$$\bar{u}_e \frac{dK}{dx} = -\epsilon \quad (4.4-2)$$

$$\bar{u}_e \frac{d\epsilon}{dx} = -C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} \quad (4.4-3)$$

donde :

\bar{u}_e [m/s] = velocidad del fluido antes de pasar por la malla.

El sistema de ecuaciones (4.4-2) y (4.4-3) posee una solución exacta de la forma :

$$K \propto x^{-1/(C_{\epsilon 2}-1)} \quad (4.4-4)$$

por lo que n de la ec. (4.4-1) adquiere el valor:

$$n = \frac{1}{C_{\epsilon 2} - 1} \quad (4.4-5)$$

Experimentalmente se ha observado que n adquiere valores entre 1 y 1.25, por lo que $C_{\epsilon 2}$, tiene valores entre 1.8 y 2.

El valor de C_μ utilizado en este trabajo se obtiene, al considerar la región de esfuerzo cortante constante adyacente a una pared sólida. En este flujo, el transporte convectivo de K es despreciable mientras que la producción y disipación se encuentran en equilibrio local (apéndice D), es decir :

$$-\overline{u'v'} \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2 \frac{d\bar{u}}{dy} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \epsilon \quad (4.4-6)$$

Experimentalmente se ha comprobado que las características turbulentas del flujo se relacionan mediante ref./46/:

$$\frac{\overline{u'v'}}{K} = 0.3 \quad (4.4-7)$$

Por lo que al utilizar la ec.(D.13), C_μ adquiere el valor:

$$C_\mu = \left(\frac{\overline{u'v'}}{K} \right)^2 = 0.09 \quad (4.4-8)$$

En la región cercana a una pared (capa límite logarítmica), la convección de ϵ es despreciable, por lo que la ecuación (3.4-9) se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) - C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} - \frac{\overline{u'v'}}{K} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} = 0 \quad (4.4-9)$$

Si en esta última relación, se sustituye la definición de la viscosidad turbulenta:

$$\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \quad (3.4-7)$$

y las condiciones que prevalecen en la región logarítmica;

$$\epsilon = -\overline{u'v'} \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (4.1-4)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\bar{u}_\tau}{\kappa y} \quad (4.1-6)$$

puede establecerse la relación entre las constantes $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$, σ_{ϵ} :

$$C_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\epsilon} (C_{\mu})^{1/2}} \quad (4.4-10)$$

Esta relación debe satisfacerse cuando se utilice el modelo en un flujo confinado por paredes sólidas.

Mediante el uso de las últimas relaciones y de la optimización por computadora ref./43/, las constantes que aparecen en el modelo de turbulencia K- ϵ para números de Reynolds grandes adquieren los siguientes valores:

| C_{μ} | $C_{\epsilon 1}$ | $C_{\epsilon 2}$ | σ_k | σ_{ϵ} |
|-----------|------------------|------------------|------------|---------------------|
| 0.09 | 1.44 | 1.92 | 1.0 | 1.3 |

5.-PROCEDIMIENTO DE SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACION DE LA FASE CONTINUA.

En este capítulo se describe brevemente el método numérico utilizado en el presente estudio, para integrar las ecuaciones de conservación de la fase gaseosa. El algoritmo numérico (método de los volúmenes de control), desarrollado por Patankar y Spalding ref./50/, y explicado en detalle por Patankar ref./11/ y por Scheuerer ref./33/, constituye la base de diversos programas de cómputo útiles para resolver las ecuaciones diferenciales, parabólicas, bidimensionales de los flujos turbulentos en una sola fase, ref./9/, ref./10/.

El procedimiento de solución es implícito y de marcha hacia adelante en la dirección preferencial del flujo, es decir que a partir de los valores conocidos de las características del flujo $\phi = \{ \bar{u}, \bar{H}, K, \epsilon \}$ a lo largo de una línea transversal al flujo localizada en la posición $x = \text{const.}$, se evalúan los valores de ϕ en una nueva línea localizada en la posición $x + \Delta x$, corriente abajo. Con los nuevos valores conocidos de ϕ , el procedimiento se repite para evaluar las características del flujo en la siguiente línea hacia adelante y así sucesivamente. Con esta técnica de solución no es necesario generar y almacenar en la computadora una malla numérica que represente todo el dominio en estudio.

La descripción del procedimiento de solución consiste de diversas secciones, a continuación se presenta la expresión general de las ecuaciones de conservación de la fase gaseosa, posteriormente se lleva a cabo la transformación de la ecuación general en un sistema de coordenadas (y, ω) . Finalmente la ecuación diferencial transformada se formula en un sistema de ecuaciones algebraicas en diferencias finitas.

5.1.-FORMA GENERAL DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACION.

Las ecuaciones parabólicas que modelan el comportamiento de un flujo turbulento incompresible en capa límite (ecs. (2.6-9), (2.6-10), (3.4-8) y (3.4-9)), pueden expresarse mediante la siguiente ecuación general:

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^k \frac{\mu_{eff}}{\text{Pr}_{eff}} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + S_{\phi} + S_{\phi}^p \quad (5.1-1)$$

donde:

$k = 1$ para flujos axial simétricos.

$k = 0$ para flujos en el plano cartesiano.

Las variables ϕ , $\frac{\mu_{eff}}{\text{Pr}_{eff}}$ y S_{ϕ} , tienen significado diferente dependiendo de la ecuación de conservación considerada, la

expresión para cada variable se presenta en la tabla 2. Para formular la ecuación (5.1-1), se utilizó la relación (3.4-6) y se recurrió al concepto de difusividad térmica turbulenta, el cual considera que en analogía con un flujo laminar, los flujos de calor por unidad de superficie, inducidos por el movimiento turbulento, son proporcionales a la variación de la entalpía estática en la dirección r , es decir:

$$-\rho \overline{h'v'} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \overline{h}}{\partial r} \quad (5.1-2)$$

donde:

Pr_t [] = número de Prandtl turbulento (valor empírico $Pr_t = 0.86$).

Los términos fuente $S_\phi^p = (S_{mx}^p, S_E^p, S_K^p, S_\epsilon^p)$ de la ecuación (5.1-1), representan el intercambio de momento, entalpía total, energía cinética turbulenta y disipación de energía turbulenta entre las fases. La expresión de estos términos se presenta en el capítulo 6.

Tabla 2

| ϕ | μ_{eff}/Pr_{eff} | S_ϕ |
|----------------|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| \overline{u} | $\mu + \mu_t$ | $-\frac{dp}{dx} + \rho g$ |
| \overline{H} | $\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}$ | $\frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} (r^k (\mu_{eff} (1 - \frac{1}{Pr_{eff}}) \frac{\partial \overline{u}^2/2}{\partial r})) + \rho \overline{u}g$ |
| K | $\frac{\mu_t}{\sigma_K}$ | $\mu_t \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial r} \right)^2 - \rho \epsilon$ |
| ϵ | $\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}$ | $C_{\epsilon 1} \mu_t \frac{\epsilon}{K} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial r} \right)^2 - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{K}$ |

5.2.-TRANSFORMACION DE COORDENADAS DE LA ECUACION GENERAL.

En esta sección se presenta la transformación de la ecuación general (5.1-1), al sistema de coordenadas (x_2, ω) propuesta por Patankar y Spalding ref./50/. Esta transformación se realiza debido a la conveniencia de mantener constantes las variables independientes a lo largo de las líneas que conforman la malla numérica ref./9/. En problemas de crecimiento de capa límite (flujo sobre superficies sólidas, chorros libres y redondos, etc.), este sistema de coordenadas es apropiado ya que permite que la malla numérica se vaya adaptando a la forma en que crece la capa límite.

La coordenada transversal ω representa una función de corriente adimensional que varía dentro del dominio de integración entre "0" (sobre una pared sólida) y "1" (corriente libre). La definición de ω y la correspondiente transformación de la ecuación general se presenta a continuación.

Sin pérdida de generalidad, la transformación se llevará a cabo considerando que la ecuación (5.1-1) se formula en coordenadas cartesianas ($k = 0$, $r = y$). Como paso inicial se transforman las coordenadas (x, y) a un sistema (x_1, ψ) , donde ψ es la representación de una función de corriente definida a través de:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho \bar{u} \quad (5.2-1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho \bar{v} \quad (5.2-2)$$

Utilizando la relación:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = 1 \quad (5.2-3)$$

se tiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \rho \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \quad (5.2-4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \quad (5.2-5)$$

Sustitución de estas expresiones en la ecuación general (5.1-1) resulta:

$$\bar{\rho} u \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \bar{\rho} u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{\rho} u \frac{\mu_{eff}}{\text{Pr}_{eff}} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \right) + S_{\phi} + S_{\phi}^P \quad (5.2-6)$$

La ecuación de continuidad se satisface automáticamente a partir de la definición de la función de corriente ψ , sin embargo, las variables independientes (x_1, ψ) no son constantes a lo largo de las líneas que conforman la malla numérica. Para lograr esto se define una coordenada transversal adimensional como:

$$\omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I} \quad (5.2-7)$$

donde:

ψ_E [kg/(m s)] = valor de la función de corriente en la frontera exterior.

ψ_I [kg/(m s)] = valor de la función de corriente en la frontera interior.

Los valores de ψ se evalúan a partir de la integración de la ecuación (5.2-1), es decir:

$$\psi = \psi_I + \int_0^y \bar{\rho} \bar{u} \, dy \quad (5.2-8)$$

En la ecuación (5.2-7), ω representa la relación del flujo másico por unidad de longitud que pasa desde la frontera interna (I) hasta un punto localizado en y , al flujo másico total por unidad de longitud que pasa desde la frontera interna (I) hasta la frontera externa (E). De acuerdo a su definición, ω varía en el intervalo de valores $0 < \omega < 1$.

En el presente estudio, la frontera interna se ha tomado como un eje de simetría, por lo que debido a las condiciones del flujo, se considera que a través de esta frontera no existe entrada (salida) de fluido hacia (desde) el dominio en estudio, es decir $\psi_I = 0$.

Para la frontera exterior, se consideran dos situaciones:

.- Una pared sólida; en donde ψ_E tiene un valor fijo,

correspondiente al flujo másico total del sistema.

.- Una frontera variable; en donde el valor de ψ_E se ajusta conforme la capa límite crece. Por ejemplo; para el flujo en un chorro; el valor de ψ_E depende de la cantidad de fluido que entra a través de la frontera exterior como consecuencia de la dispersión del chorro. Es conveniente enfatizar que las líneas de $\omega = \text{cte}$, no son líneas de corriente y puede decirse que mientras que el flujo másico ($\psi_E - \psi_I$) en la dirección x_1 aumenta, la coordenada transversal ω permanece constante.

La transformación de (x_1, ψ) al sistema de coordenadas (x_2, ω) , se lleva a cabo sin dificultad utilizando la relación:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 1 \quad (5.2-9)$$

por tanto se tiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \quad (5.2-10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \psi} = \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \psi} \quad (5.2-11)$$

La derivada de ω con respecto a x_2 a lo largo de una función de corriente $\psi = \text{cte}$, ec.(5.2-10) es :

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2} = - \frac{1}{(\psi_E - \psi_I)} \left(\frac{d \psi_I}{d x_2} + \omega \frac{\partial (\psi_E - \psi_I)}{\partial x_2} \right) \quad (5.2-12)$$

La variación de ω con respecto a ψ de la ec.(5.2-11), resulta ser:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \psi} = \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \quad (5.2-13)$$

Con ayuda de las ecuaciones (5.2-10 - 5.2-13), la ecuación general (5.2-6) se escribe como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + (a + b \omega) \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) + d \quad (5.2-14)$$

donde:

$$a = \frac{m_I}{(\psi_E - \psi_I)}$$

$$b = \frac{m_E - m_I}{(\psi_E - \psi_I)}$$

$$c = \frac{\mu_{eff}}{Pr_{eff}} \rho \bar{u} \frac{1}{(\psi_E - \psi_I)^2}$$

$$d = \frac{S_\phi}{\rho \bar{u}}$$

$$m_I = - \frac{d \psi_I}{d x_2}$$

$$m_E = - \frac{d \psi_E}{d x_2}$$

Puede observarse que los coeficientes a y b dependen únicamente de la coordenada x_2 , mientras que los coeficientes c y d, debido a su dependencia con \bar{u} , son función tanto de x_2 como de ω . Las variables m_I y m_E representan el flujo másico por unidad de superficie entrando por las fronteras (interna y externa) de la región de integración.

5.3.-ECUACIONES DE CONSERVACION EN DIFERENCIAS FINITAS.

Para resolver numéricamente la ecuación general (5.2-14), se discretiza el dominio en estudio utilizando una malla numérica en las variables $x_2 - \omega$. Los puntos de intersección de la malla corresponden a los puntos discretos en donde se evalúan las características de la fase gaseosa. Utilizando el método numérico de los volúmenes de control ref./50/, se desarrollan las ecuaciones algebraicas en diferencias finitas procurando que los principios de conservación se satisfagan en cada volumen.

Los volúmenes de control están definidos en la dirección longitudinal, entre las líneas de $x_2 = x_U$ ("upstream") y $x_2 = x_D$ ("downstream"). Durante el proceso de integración de marcha hacia adelante, los valores de la línea "upstream" son conocidos ya sea por ser el resultado de la última integración o por constituir las condiciones de entrada al dominio en estudio. En la dirección transversal ω , los volúmenes de control están limitados por superficies localizadas entre los puntos de intersección de la malla $x_2 - \omega$. Estos puntos son reconocidos mediante la variable "i", en la frontera interna $i = 1$ mientras que en la frontera externa $i = N$. De acuerdo a lo anterior las superficies de los volúmenes de control se localizan en los valores de ω , dados por las siguientes expresiones:

$$\omega_+ = \frac{1}{2} (\omega_i + \omega_{i+1}) \quad (5.3-1a)$$

$$\omega_- = \frac{1}{2} (\omega_i + \omega_{i-1}) \quad (5.3-1b)$$

Si por simplificación se realiza el cambio de variable $x = x_2$, y la ec. diferencial (5.2-14) se integra en un volumen de control se tiene:

$$\begin{aligned} & \left(\int \phi_D d\omega - \int \phi_U d\omega \right) / \Delta x + \left((a + b\omega) \phi \right)_+ - \\ & - \left((a + b\omega) \phi \right)_- - b \left(\int \phi d\omega \right)_M = \left(c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_+ - \\ & - \left(c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_- + \left(\int d d\omega \right)_M \end{aligned} \quad (5.3-2)$$

donde: $\Delta x = x_D - x_U$

El subíndice M indica que los términos que se encuentran dentro de los corchetes (), se integran desde x_U hasta x_D y que el valor de esta integración corresponde a la parte media del volumen de control en la dirección de x . En el procedimiento de Patankar y Spalding ref./50/, debido a que es un método implícito, se supone que los valores en la parte media del volumen son iguales a los de la línea x_D ("downstream"). La ventaja de utilizar un método implícito se manifiesta en mayor estabilidad numérica y mayor exactitud cuando se seleccionan grandes incrementos de Δx (marcha hacia adelante) ref./33/.

Para evaluar las integrales de la ec.(5.3-2), es necesario conocer los valores y gradientes de ϕ en las superficies de control localizadas en ω_+ y ω_- , para ello se supone que en la dirección de ω , en el interior de cada volumen de control, ϕ adquiere valores constantes. Considerando lo anterior, se pueden definir las siguientes expresiones:

$$\int \phi d\omega = \phi_i (\omega_+ - \omega_-) \quad (5.3-3a)$$

$$\phi_+ = \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_{i+1}) \quad (5.3-3b)$$

$$\phi_- = \frac{1}{2} (\phi_{i-1} + \phi_i) \quad (5.3-3c)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_+ = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} \quad (5.3-3d)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_- = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\omega_i - \omega_{i-1}} \quad (5.3-3e)$$

El tipo de discretización representado por las ecuaciones anteriores, se conoce con el nombre de "diferencias finitas centrales".

Sustituyendo las expresiones (5.3-3) en la expresión general (5.3-2) y multiplicando por 2 ($\psi_E - \psi_I$), el término convectivo (izquierda) de (5.3-2), se escribe como:

$$2 (P + G) \phi_i (\omega_+ - \omega_-) - 2P \phi_{i,U} (\omega_+ - \omega_-) + L_+ (\phi_i + \phi_{i+1}) - L_- (\phi_i + \phi_{i-1}) \quad (5.3-4)$$

donde:

$$P = (\psi_E - \psi_I) / \Delta x \quad (5.3-5a)$$

$$G = m_I - m_E \quad (5.3-5b)$$

$$L_+ = m_I - \omega_+ G \quad (5.3-5c)$$

$$L_- = m_I - \omega_- G \quad (5.3-5d)$$

El primer término difusivo de (5.3-2) se escribe como:

$$2 (\psi_E - \psi_I) \left(c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_+ = 2 (\psi_E - \psi_I) \left(\frac{\mu_{eff}}{Pr_{eff}} \rho \bar{u} \frac{1}{(\psi_E - \psi_I)^2} \right) \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} \right) \quad (5.3-6)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (5.2-1), (5.2-7) y de la siguiente definición:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_+ = \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{y_{i+1} - y_i} \quad (5.3-7)$$

la ecuación (5.3-6) queda como sigue:

$$2 (\psi_E - \psi_I) \left(c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_+ = 2 T_+ (\phi_{i+1} - \phi_i) \quad (5.3-8)$$

donde:

$$T_+ = \left(\frac{\mu_{eff}}{Pr_{eff}} \right)_+ \frac{1}{(Y_{i+1} - Y_i)} \quad (5.3-9)$$

De manera análoga, el segundo término difusivo de (5.3-2) se escribe como:

$$2 (\psi_E - \psi_I) \left(c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_- = 2 T_- (\phi_i - \phi_{i-1}) \quad (5.3-10)$$

donde:

$$T_- = \left(\frac{\mu_{eff}}{Pr_{eff}} \right)_- \frac{1}{(Y_i - Y_{i-1})} \quad (5.3-11)$$

La integral del término fuente de la ec. (5.3-2) es:

$$2 (\psi_E - \psi_I) \int_+ d\omega = 2 \int_+ S_\phi dy = 2 S_{\phi i} (Y_+ - Y_-) \quad (5.3-12)$$

Debido a criterios de estabilidad ref./10, 11, 33, 50/, el término fuente se divide en una componente "upstream" y otra "downstream", las cuales se relacionan entre sí mediante la siguiente expresión lineal:

$$S_{\phi i} (Y_+ - Y_-) = S_{Ui} + \frac{S_{Di}}{\phi_{Ui}} \phi_i \quad (5.3-13)$$

La estabilidad numérica del algoritmo de solución aumenta si S_{Ui} es positivo y S_{Di} es negativo ref./10, 11, 50/.

Si las expresiones (5.3-4), (5.3-8), (5.3-10), (5.3-12) y (5.3-13) se sustituyen en la ecuación (5.3-2), para un volumen de control que no pertenece a la frontera del dominio, es decir para cualquier "i" diferente de 1 y N, se tiene:

$$\phi_i = A_i \phi_{i+1} + B_i \phi_{i-1} + C_i \quad (5.3-14)$$

donde:

$$A_i = (2 T_+ - L_+) / D_i = A'_i / D_i \quad (5.3-15a)$$

$$B_i = (2 T_- + L_-) / D_i = B'_i / D_i \quad (5.3-15b)$$

$$C_i = (2P (\omega_+ - \omega_-) \phi_{iU} + 2S_{U1}) / D_i \quad (5.3-15c)$$

$$D_i = A'_i + B'_i + 2P (\omega_+ - \omega_-) - 2 S'_{Di} \quad (5.3-15d)$$

donde:
$$S'_{Di} = \frac{S_{Di}}{\phi_{Ui}}$$

Para un volumen de control localizado en la frontera interna ($i = 2$), la ec.(5.3-2), se escribe:

$$\begin{aligned} & 2 (P + G) \phi_2 \omega_{2.5} - 2P \phi_{2,U} \omega_{2.5} + L_+ (\phi_2 + \phi_3) - 2 L_- \phi_1 = \\ & = 2 T_+ (\phi_3 - \phi_2) - 2 T_- (\phi_2 - \phi_1) + 2 S_{U2} + 2 S'_{D2} \phi_2 \end{aligned} \quad (5.3-16)$$

En esta última expresión, las integrales de la ecuación (5.3-2) en la dirección de ω , se llevan a cabo para el primer volumen de control el cual está definido desde la superficie localizada en $\omega_- = 0$ (frontera interna), hasta la superficie $\omega_+ = \omega_{2.5}$, que se localiza entre ω_2 y ω_3 . El término $2 L_- \phi_1$ de la ec.(5.3-16), resulta de considerar que en el primer volumen, el valor de ϕ es constante desde la frontera interna $\omega_- = 0$ hasta $\omega_{2.5}$, es decir $\phi_1 = \phi_2$, ref./9/. Los coeficientes de la ecuación (5.3-14) para este volumen se escriben como:

$$A_2 = (2 T_{2.5} - L_{2.5}) / D_2 = A'_2 / D_2 \quad (5.3-17a)$$

$$B_2 = (2 T_1 + 2 m_1) / D_2 = B'_2 / D_2 \quad (5.3-17b)$$

$$C_2 = (2P \omega_{2.5} \phi_{2U} + S_{U2}) / D_2 \quad (5.3-17c)$$

$$D_2 = A'_2 + B'_2 + 2P \omega_{2.5} - 2 S'_{D2} \quad (5.3-17d)$$

Para un volumen de control localizado en la frontera externa ($i = N - 1 = Nm1$), la ec. (5.3-2) se escribe como:

$$\begin{aligned}
& 2 (P + G) \phi_{NM1} (1 - \omega_{NM1.5}) - 2 P \phi_{NM1,U} (1 - \omega_{NM1.5}) + \\
& + 2 L_+ \phi_N - L_- (\phi_{NM1} + \phi_{NM2}) = 2 T_+ (\phi_N - \phi_{NM1}) - \\
& - 2 T_- (\phi_{NM1} - \phi_{NM2}) + 2 S_{UNM1} + 2 S'_{DNM1} \phi_{NM1}
\end{aligned} \tag{5.3-18}$$

En este volumen de control, las integrales en la dirección ω , se llevan a cabo desde la superficie $\omega_- = \omega_{NM1.5}$, localizada entre ω_{NM2} y ω_{NM1} , hasta la superficie $\omega_+ = 1 = \omega_N$, que es la frontera externa. El término $2 L_+ \phi_N$ de la ec. (5.3-18) resulta de considerar el valor de ϕ constante desde $\omega_{NM1.5}$, hasta $\omega_+ = 1$, es decir $\phi_{NM1} = \phi_N$, ref./9/. Los coeficientes de la ecuación (5.3-14) para el volumen en la frontera externa se escriben como:

$$A_{NM1} = (2 T_N - 2 m_E) / D_{NM1} = A'_{NM1} / D_{NM1} \tag{5.3-19a}$$

$$B_{NM1} = (2 T_{NM1.5} + L_{NM1.5}) / D_{NM1} = B'_{NM1} / D_{NM1} \tag{5.3-19b}$$

$$C_{NM1} = (2 P \phi_{NM1,U} (1 - \omega_{NM1.5}) + 2 S_{UNM1}) / D_{NM1} \tag{5.3-19c}$$

$$D_{NM1} = A'_{NM1} + B'_{NM1} + 2 P (1 - \omega_{NM1.5}) - 2 S'_{DNM1} \tag{5.3-19d}$$

5.4.-USO DE LAS FUNCIONES DE PARED.

Tal como se explicó en el capítulo 4, si las fronteras del dominio son sólidas, existe una fuerte variación de ϕ en la vecindad del sólido, por lo que es necesario utilizar una malla numérica muy fina que permita determinar el comportamiento del fluido en la región cercana a la pared, lo que repercute en tiempo de cálculo y capacidad de memoria de la computadora a utilizarse.

Debido a que el algoritmo presentado en la sección anterior no integra las ecuaciones de balance hasta la frontera sólida, sino hasta un punto y_c localizado en la región donde es válida la ley logarítmica de la pared, es conveniente mostrar la manera en que la ley de la pared es utilizada en el algoritmo numérico.

Los términos $T_- (\phi_2 - \phi_1)$ de la ec. (5.3-16) y $T_+ (\phi_N - \phi_{NM1})$ de la ec. (5.3-18), representan tanto los flujos de cantidad de movimiento como de energía por unidad de superficie, provenientes de la pared interna y externa respectivamente, es decir si ϕ representa la velocidad media \bar{u} , estos términos se escriben como:

$$T_1 (\phi_2 - \phi_1) = (\mu + \mu_t)_1 \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{(Y_2 - Y_1)} \cong (\mu_{eff})_1 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_1 = \tau_{O1} \quad (5.4-1)$$

$$T_N (\phi_N - \phi_{NM1}) = (\mu + \mu_t)_N \frac{(\phi_N - \phi_{NM1})}{(Y_N - Y_{NM1})} \cong (\mu_{eff})_N \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_N = \tau_{OE} \quad (5.4-2)$$

donde:

$\tau_{O1} ()$ = esfuerzo cortante en la pared interna.

$\tau_{OE} ()$ = esfuerzo cortante en la pared externa.

Los valores de τ_{O1} , τ_{OE} , ϕ_2 , ϕ_{NM1} , T_1 y T_N se obtienen al utilizar la ley logarítmica de la pared, ec. (4.1-1).

Si ϕ representa la entalpía total \bar{H} , los términos difusivos se escriben como:

$$T_1 (\phi_2 - \phi_1) = \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{(Y_2 - Y_1)} \cong \left(\frac{\mu_{eff}}{Pr_{eff}} \right)_1 \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \right)_1 = q_{O1} \quad (5.4-3)$$

$$T_N (\phi_N - \phi_{NM1}) = \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{(\phi_N - \phi_{NM1})}{(Y_N - Y_{NM1})} \cong \left(\frac{\mu_{eff}}{Pr_{eff}} \right)_N \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \right)_N = q_{OE} \quad (5.4-4)$$

donde:

$q_{O1} ()$ = flujo de calor por unidad de superficie a través de la pared interna.

q_{OE} [] = flujo de calor por unidad de superficie a través de la pared externa.

Los valores de q_{O1} , q_{OE} , ϕ_2 , ϕ_{NM1} , T_1 y T_H se obtienen al utilizar la ley logarítmica de la pared, ec. (4.1-2).

Para las ecuaciones correspondientes a la energía cinética turbulenta (K) y a la disipación de energía turbulenta (ϵ), se considera que no existe flujo de estas cantidades a través de las fronteras sólidas es decir $T_1 = T_H = 0$. Sin embargo los valores de K y ϵ en los volúmenes de control $i = 2$ e $i = NM1$, es decir en la frontera (numérica) del dominio, están dados por las ecuaciones (4.1-3) y (4.1-7) respectivamente.

5.5.-PROCEDIMIENTO DE CALCULO.

Como se ha mencionado con anterioridad el procedimiento numérico es implícito y utiliza la técnica de marcha hacia adelante, es decir en cualquier posición axial las características medias de la fase continua se requieren para evaluar las propiedades del flujo en la siguiente localización axial. El procedimiento de cálculo es híbrido ya que combina en la dirección transversal las diferencias finitas centrales definidas por las ecs. (5.3-3) con una formulación "upwind" ref./9, 10, 11, 33, 50/. La discretización de las ecuaciones de conservación a partir del algoritmo de los volúmenes de control, conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales cuya matriz es tridiagonal. El sistema de ecuaciones lineales es resuelto utilizando el algoritmo de Thomas el cual es numéricamente estable cuando los elementos de la diagonal principal son dominantes ref./9, 10, 11/. Las ecuaciones de transporte se resuelven en el programa de cómputo en la siguiente secuencia: \bar{u} , K , ϵ , \bar{H} .

El procedimiento de cálculo en cada posición axial es como sigue:

.-Solución de las ecuaciones de conservación de la fase continua sin considerar partículas desde x hasta $x + \Delta x$.

.-Evaluación de trayectorias de partículas desde x hasta $x + \Delta x$ (determinación de la posición e historia de temperaturas de partículas).

.-Evaluación de las características medias de las partículas (velocidad, temperatura, energía cinética turbulenta, fracción de volumen, etc.) y términos fuente de interacción entre las fases.

.-Solución de las ecuaciones de conservación de la fase continua desde x hasta $x + \Delta x$, considerando los términos fuente de interacción.

--Iterar los pasos anteriores hasta que los campos de \bar{u} , \bar{H} , K y ϵ no presenten variaciones (en el procedimiento de cómputo se consideró como criterio de convergencia, que la norma de los vectores de los campos fuera menor que 10^{-5}).

.-Solución de las ecuaciones de conservación sin partículas desde $x + \Delta x$ hasta la siguiente posición axial.

Los resultados numéricos que se discuten en el capítulo 7 fueron obtenidos utilizando una malla numérica de 40 nodos en la dirección transversal y 2,500 pasos de integración en la dirección longitudinal, logrando con ello resultados independientes de la discretización. Las características medias de la fase dispersa se obtuvieron al realizar el promedio ("ensemble average") de 2,000 trayectorias de partículas.

El incremento en tiempo (Δt) utilizado en la solución de las ecuaciones de la fase dispersa (ver capítulo 6), se ajusta durante el procedimiento numérico de tal manera que se realizan al menos 5 incrementos en tiempo de cada trayectoria de partícula por cada Δx .

El tiempo de cómputo típico para la predicción de flujos turbulentos con partículas en suspensión (ver capítulo 7) es de 30,000 segundos de C.P.U. en una computadora CYBER 830.

Debido a que en este capítulo únicamente se presenta lo más relevante del método numérico utilizado para la solución de las ecuaciones de balance de la fase continua, los detalles relacionados con el cálculo del incremento Δx de cada paso de integración, la cantidad de flujo másico (m_I y m_E) entrando por las fronteras del dominio (simulación de "jets" emergiendo en una corriente de fluido) y la caída de presión en ductos, puede consultarse en la literatura ref./ 10, 11/.

6.-ECUACIONES DE LA FASE DISPERSA.

6.1.- ECUACION DE MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA RIGIDA

La expresión general de la ecuación de movimiento de una partícula tal como aparece en la ref./52/, es sumamente compleja, sin embargo para su formulación en este estudio se consideran despreciables los siguientes efectos ref./53/:

- .-Variación en tamaño y forma de la partícula ($m_p = \text{cte}$).
- .-Interacción partícula-partícula (distancia entre partículas mucho mayor que el radio de la esfera).
- .-Efecto de partículas vecinas sobre las fuerzas de arrastre.
- .-efectos de masa virtual o aparente (flujo no estacionario).
- .-La contribución del gradiente de presión media a la fuerza sobre las partículas (comparada con el arrastre viscoso).
- .-El efecto del movimiento relativo de rotación de la partícula (arrastre modificado).
- .-El efecto de la fuerza lateral que aparece debido al gradiente de velocidad del flujo en la vecindad de la partícula (efecto Saffman).
- .-El efecto de la fuerza de Basset (flujo no estacionario).

El estudio supone que la densidad de las partículas sólidas es mucho mayor que la densidad del fluido (gas), es decir:

$$\frac{\rho}{\rho_p} \ll 1.0 \quad (6.1-1)$$

por lo que el efecto de inercia de la partícula es de magnitud considerablemente mayor a los efectos que aparecen listados en el párrafo anterior.

Adicionalmente se supone que el tamaño de la partícula (esfera), es de mucho menor magnitud que la escala de longitud en donde ocurren cambios de las características medias del fluido.

$$\frac{d_p}{L} \ll 1.0 \quad (6.1-2)$$

donde:

d_p [m] = diámetro de la partícula

L [m] = longitud característica del fluido.

De acuerdo al análisis dimensional realizado por Maxey y Riley ref./52/, las dos expresiones anteriores limitan la importancia de varios de los términos que aparecen en la ecuación de movimiento de una partícula.

El sistema de ecuaciones que describe el movimiento tridimensional de las partículas en el sistema de coordenadas cartesianas rectangular es ref./54/.

$$m_p \frac{d u_p}{dt} = 0.5 C_{Dx} \rho (u - u_p) |u - u_p| A_p + m_p g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right) \quad (6.1-3)$$

$$m_p \frac{d v_p}{dt} = 0.5 C_{Dy} \rho (v - v_p) |v - v_p| A_p \quad (6.1-4)$$

$$m_p \frac{d w_p}{dt} = 0.5 C_{Dz} \rho (w - w_p) |w - w_p| A_p \quad (6.1-5)$$

donde:

u_p, v_p, w_p [m/s] = velocidad instantánea de la partícula en las direcciones x, y, z respectivamente.

$$m_p [\text{kg}] = \text{masa de la partícula} = \frac{\pi d_p^3 \rho_p}{6}$$

$$A_p [\text{m}^2] = \text{área frontal de la partícula} = \frac{\pi d_p^2}{4}$$

g [m/s²] = aceleración de la gravedad

C_{Di} [] = coeficiente de arrastre en las tres direcciones
 $= \frac{24 f}{Re_{pi}}$

Re_{pi} = número de Reynolds para una partícula esférica se define para cada una de las direcciones i (x, y, z) como:

$$Re_{px} = \frac{\rho |u - u_p| d_p}{\mu} \quad (6.1-6)$$

$$Re_{py} = \frac{\rho |v - v_p| d_p}{\mu} \quad (6.1-7)$$

$$Re_{pz} = \frac{\rho |w - w_p| d_p}{\mu} \quad (6.1-8)$$

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones (6.1-3) a (6.1-5), el sistema de ecuaciones que modela el movimiento tridimensional de una partícula en flujo turbulento es:

$$\frac{d u_p}{dt} = \frac{(u - u_p)}{\tau_p} + g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) \quad (6.1-9)$$

$$\frac{d v_p}{dt} = \frac{(v - v_p)}{\tau_p} \quad (6.1-10)$$

$$\frac{d w_p}{dt} = \frac{(w - w_p)}{\tau_p} \quad (6.1-11)$$

donde: τ_p [s] = tiempo característico de respuesta dinámica

$$\text{de una partícula} = \frac{m_p}{3\pi \mu f d_p}$$

$$f [] = 1 + 0.15 \bar{Re}_p^{0.687}$$

Esta expresión de f es válida para $\bar{Re}_p \leq 1000$

En el programa de cómputo el número de Reynolds del coeficiente f se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\overline{Re}_p = \frac{\rho d_p U}{\mu}$$

donde:

$$U \text{ [m/s]} = ((u-u_p)^2 + (v-v_p)^2 + (w-w_p)^2)^{1/2}$$

Debido a que en este trabajo se calcula la dispersión de partículas en ductos y chorros redondos, a continuación se presentan las ecuaciones de movimiento de una partícula en el sistema de coordenadas polar - cilíndrico ref./25/:

$$\frac{d u_p}{dt} = \frac{(u - u_p)}{\tau_p} + g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) \quad (6.1-12)$$

$$\frac{d v_p}{dt} = \frac{(v - v_p)}{\tau_p} + \frac{w_p^2}{r_p} \quad (6.1-13)$$

$$\frac{d w_p}{dt} = \frac{(w - w_p)}{\tau_p} - \frac{w_p v_p}{r_p} \quad (6.1-14)$$

donde:

u, u_p [m/s] = velocidades en la dirección axial.

v, v_p [m/s] = velocidades en la dirección radial.

w, w_p [m/s] = velocidades en la dirección angular.

$$w_p = r_p \frac{\partial \Theta}{\partial t}$$

r_p [m] = posición de la partícula en la dirección radial.

La trayectoria de partículas individuales se conoce al integrar las ecuaciones de movimiento formuladas en los párrafos anteriores. Si el intervalo en tiempo es pequeño y si las fuerzas que actúan sobre las partículas se mantienen constantes durante este incremento, se obtiene la siguiente forma explícita de la solución de las ecuaciones ref./1,7/:

.-Sistema cartesiano de coordenadas.

En la dirección x

$$u_p = u - (u - u_{p0}) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) - g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right)\right) \tau_p \quad (6.1-15)$$

En la dirección y

$$v_p = v - (v - v_{p0}) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) \quad (6.1-16)$$

En la dirección z

$$w_p = w - (w - w_{p0}) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) \quad (6.1-17)$$

donde:

$$u_{p0}, v_{p0}, w_{p0} = \text{velocidad inicial de la partícula en } \Delta t.$$

La posición de cada partícula a lo largo de su trayectoria se calcula a partir de las siguientes relaciones:

$$x_p = x_{p0} + \frac{\Delta t}{2} (u_p + u_{p0}) \quad (6.1-18)$$

$$y_p = y_{p0} + \frac{\Delta t}{2} (v_p + v_{p0}) \quad (6.1-19)$$

$$z_p = z_{p0} + \frac{\Delta t}{2} (w_p + w_{p0}) \quad (6.1-20)$$

donde:

$$x_{p0}, y_{p0}, z_{p0} = \text{posición inicial de las partículas.}$$

.-En el sistema de coordenadas polar - cilíndrico, la solución de las ecuaciones de movimiento se obtuvo integrando numéricamente las ecs. (6.1-13) y (6.1-14) utilizando el algoritmo de Runge -

Kutta de segundo orden. La forma explícita de esta solución se presenta a continuación.

En la dirección axial.

$$u_p = u - (u - u_{p0}) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) - g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right)\right) \tau_p \quad (6.1-21)$$

En la dirección radial.

$$v_p = v_{p0} + \frac{\Delta t}{2} \left(-\frac{v_{p0}}{\tau_p} + \frac{w_{p0}^2}{r_{p0}} - \frac{\bar{v}_p}{\tau_p} + \frac{\bar{w}_p^2}{r_{p0}} + 2v\right) \quad (6.1-22)$$

En la dirección angular.

$$w_p = w_{p0} + \frac{\Delta t}{2} \left(-\frac{w_{p0}}{\tau_p} - \frac{w_{p0} v_{p0}}{r_{p0}} - \frac{\bar{w}_p}{\tau_p} - \frac{\bar{w}_p \bar{v}_p}{r_{p0}} + 2w\right) \quad (6.1-23)$$

donde: $\bar{v}_p = v_{p0} + \Delta t \left(-\frac{v_{p0}}{\tau_p} + \frac{w_{p0}^2}{r_{p0}}\right)$

$$\bar{w}_p = w_{p0} + \Delta t \left(-\frac{w_{p0}}{\tau_p} - \frac{w_{p0} v_{p0}}{r_{p0}}\right)$$

La posición de las partículas en el sistema de coordenadas polar - cilíndrico se calcula a partir de:

$$x_p = x_{p0} + \frac{\Delta t}{2} (u_p + u_{p0}) \quad (6.1-24)$$

$$r_p = r_{p0} + \frac{\Delta t}{2} (v_p + v_{p0}) \quad (6.1-25)$$

$$\Theta_p = \Theta_{p0} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{w_p}{r_p} + \frac{w_{p0}}{r_{p0}}\right) \quad (6.1-26)$$

Para el cálculo de trayectorias de partículas en ductos con sección transversal circular, el algoritmo de Runge- Kutta es utilizado únicamente, para aquellas partículas que se encuentran cerca de la pared del ducto y que se espera la impacten. En el

resto del dominio del flujo, la velocidad de la fase dispersa se calcula haciendo uso de las ecuaciones (6.1-15) - (6.1-17).

La solución de las ecuaciones de movimiento de una partícula requiere del conocimiento de las condiciones iniciales, y de las características geométricas del dominio en estudio. Las condiciones iniciales de las partículas se especifican a la entrada del dominio, es decir se conoce lo siguiente:

.-Velocidades instantáneas o velocidades medias y características turbulentas.

.-Posición inicial de cada partícula (x_{p_0} , y_{p_0} , z_{p_0}).

Al tener contacto una partícula con una superficie sólida se considera lo siguiente:

.-Las partículas no pierden energía cinética (existe una reflexión elástica).

.-Las partículas abandonan la superficie con un ángulo igual al de incidencia.

.-La velocidad de las partículas, en el proceso de cálculo, se modifica únicamente en dirección y sentido.

El cálculo de un número significativo de trayectorias (2,000 para los casos analizados en este estudio) permite evaluar las características promedio de la fase dispersa.

6.2.-ECUACION DE BALANCE DE CALOR

Para estudiar la transferencia de calor entre una superficie sólida y un flujo turbulento con partículas en suspensión, se considera que el calor que reciben las partículas directamente de la pared es despreciable, por lo que la energía que reciben proviene en su totalidad de la energía que el fluido es capaz de tomar de la superficie.

Para formular la ecuación de balance de calor entre una partícula sólida y un fluido en movimiento turbulento se toma en cuenta lo siguiente:

.-No existe cambio de fase o reacción química.

.-El sistema pared-flujo tiene bajas temperaturas por lo que la transferencia de calor por Radiación es despreciable.

.-No existe movimiento de la partícula motivado por efectos térmicos (movimiento browniano).

.-No existen gradientes de temperatura en el interior de las partículas.

La ecuación de balance de calor para las partículas es ref./32/:

$$Q = A_p V_p C_p \frac{dT_p}{dt} \quad (6.2-1)$$

donde : $Q [W] =$ flujo de calor proveniente de la partícula

$$= - \bar{h} A_p (T_p - T) \quad (6.2-2)$$

donde:

$$V_p [m^3] = \text{volumen de la partícula} = \frac{\pi d_p^3}{6}$$

$C_p [J / kg K] =$ calor específico de la partícula.

$T_p [K] =$ temperatura instantánea de la partícula.

$A_p [m^2] =$ superficie de la partícula $= \pi d_p^2$

$\bar{h} [W / m^2 K] =$ coeficiente promedio de transferencia de calor entre una esfera y un fluido

$$= \frac{\bar{Nu} k}{d_p} \quad (6.2-3)$$

$\bar{Nu} =$ Número de Nusselt promedio entre una esfera y un fluido.

El número de Nusselt promedio varía como función del número de Reynolds de la partícula y el número de Prandtl, a continuación se presentan las correlaciones usadas en el presente estudio ref./55/:

$$A.- \quad 0 \leq \bar{Re}_p \leq 1$$

$$\bar{Nu} = 1 + (1 + Pe)^{1/3} \quad (6.2-4)$$

donde: $Pe =$ Número de Peclet $= \bar{Re}_p Pr$

$$B.- \quad 1 \leq \bar{Re}_p \leq 100 ; \quad 0.25 \leq Pr \leq 100$$

$$\bar{Nu} = \bar{Re}_p^{0.41} \left(1 + \frac{1}{Pe} \right)^{0.333} Pr^{0.333} + 1 \quad (6.2-5)$$

$$C.- \quad 100 \leq \overline{Re}_p \leq 2000 ; \quad 0.25 \leq Pr \leq 100$$

$$\overline{Nu} = 0.752 \overline{Re}_p^{-0.472} \left(1 + \frac{1}{Pe} \right)^{0.333} Pr^{0.333} + 1 \quad (6.2-6)$$

Integrando la ecuación de balance de energía en un pequeño intervalo de tiempo Δt y suponiendo que la temperatura del fluido (T) permanece constante durante el periodo de integración, se tiene:

$$T_p = (T_{Po} - T) \exp \left(- \frac{\Delta t}{\tau_{Pter}} \right) + T \quad (6.2-7)$$

donde: τ_{Pter} [s] = tiempo característico de respuesta térmica de una partícula.

$$= \frac{\rho_p d_p^2 C_p}{6 Nu k} \quad (6.2-8)$$

T_{Po} [s] = temperatura inicial de la partícula en Δt .

La transferencia total de energía que ocurre en Δt se expresa como:

$$E = \frac{\rho_p \pi d_p^3 C_p (T_{Po} - T)}{6} \left(1 - \exp \left(- \frac{\Delta t}{\tau_{Pter}} \right) \right) \quad (6.2-9)$$

donde: E [J] = Energía que intercambia la partícula con el fluido en Δt .

6.3.-MODELO DE DISPERSION DE PARTICULAS LAGRANGIANO- ESTOCASTICO- DETERMINISTICO (L-E-D).

A continuación se presenta el modelo de dispersión de partículas (L-E-D) ref./24/, el cual se basa en el método PSI-CELL explicado en detalle en las refs./1,2/.

Para utilizar el modelo de dispersión de partículas (L-E-D), es necesario conocer previamente las características de la fase

continua, es decir determinar los valores medios de velocidad, temperatura, energía cinética turbulenta y rapidez de disipación de energía turbulenta.

Con estos valores conocidos del fluido, el modelo (L-E-D) evalúa las escalas de longitud y tiempo de los grandes remolinos de la turbulencia (Large Eddies), el modelo de dispersión considera que estos remolinos son los que intercambian cantidad de movimiento y energía con las partículas, motivando la dispersión y el cambio de temperatura de la fase dispersa.

El modelo supone que la turbulencia del fluido es isotrópica y estacionaria, con una distribución de densidad de probabilidad gaussiana para las fluctuaciones de velocidad y temperatura. De acuerdo a la definición de la energía cinética turbulenta;

$$K = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

si la turbulencia es isotrópica:

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} \quad (6.3-1)$$

$$K = \frac{3}{2} \overline{u'^2} \quad (6.3-2)$$

por tanto:
$$urms = (\overline{u'^2})^{1/2} = \left(\frac{2K}{3}\right)^{1/2} \quad (6.3-3)$$

donde: $urms$ [m/s] = intensidad de turbulencia.

El modelo supone que la escala integral de tiempo lagrangiana del fluido (tiempo de vida de los remolinos que se encuentran en contacto con las partículas) es proporcional a la escala integral de tiempo euleriana refs./19,20/, es decir:

$$t_L = C_T t_E \quad (6.3-4)$$

donde: t_L [s] = escala de tiempo lagrangiana.

$$t_E [s] = \text{escala de tiempo euleriana} = \frac{K}{\epsilon} \quad (6.3-5)$$

En este trabajo; al igual que lo hizo Milojevic ref./24/ el valor de C_T se obtuvo al reproducir los resultados experimentales obtenidos por Snyder y Lumley ref./19/, relacionados con la dispersión de partículas sólidas de vidrio hueco, vidrio sólido, polen de maíz y cobre. Estos resultados y su comparación con los

datos de Snyder y Lumley, aparecen en la Fig. 1 . El valor de C_T optimizado numéricamente es 0.3.

Aunque este valor ha sido utilizado en el presente trabajo, a juicio del autor no es consistente con lo publicado por Wells y Stock ref./20/, Snyder y Lumley ref./19/ y por Corrsin ref./56/, en estos artículos se sugiere que las correlaciones lagrangianas y eulerianas tienen formas semejantes y difieren únicamente por sus escalas. Snyder y Lumley ref./19/, al interpretar la correlación de sus partículas pesadas como representativas de correlaciones eulerianas y sus resultados de partículas ligeras como representativas de correlaciones lagrangianas, asignan un valor para C_T (β en su artículo), igual a 3. Wells y Stock ref./20/, seleccionaron valores de C_T para cada tamaño de partícula, de tal manera que para partículas de $5 \mu\text{m}$. de diámetro el valor de C_T es 8.2, mientras que para partículas de $57 \mu\text{m}$. C_T adquiere el valor de 15.6. Esto es interesante discutirlo ya que

$$\text{si: } C_T = \frac{t_L}{t_E} \quad (6.3-6)$$

implica que $t_L > t_E$ y que t_L es mucho mayor para partículas pesadas. Esto se debe a que entre mayor sea el diámetro y densidad de la partícula su tiempo característico de respuesta es más grande y en consecuencia lo será también su correlación lagrangiana. Corrsin ref./56/, menciona que mientras una autocorrelación euleriana en tiempo involucra un nuevo elemento de fluido pasando por el punto de observación, una autocorrelación lagrangiana sigue un punto de fluido, por lo que espera de manera intuitiva que $t_L > t_E$. Es decir Corrsin considera que una partícula de fluido mantiene más tiempo su identidad (autocorrelación lagrangiana) que la correspondiente a dos partículas de fluido pasando por el mismo punto pero en distinto tiempo (autocorrelación euleriana).

Adicionalmente Saffman ref./36/ desarrolló una relación aproximada entre las escalas de tiempo eulerianas y lagrangianas de puntos de fluido, esta relación escrita de acuerdo a las variables utilizadas en el presente trabajo es:

$$C_T = 0.4 \frac{\bar{u}}{u_{rms}} \quad (6.3-7)$$

En esta expresión C_T debe ser mayor para flujos cuya turbulencia es generada por una malla (grid flows), ya que presentan menor

intensidad de turbulencia $urms$, por tanto mayor t_L .

Hinze ref./36/ menciona que en experimentos computacionales llevados a cabo con correlaciones eulerianas y lagrangianas $C_T \geq 1$. Desafortunadamente no todos los investigadores utilizan la misma definición de β ya que por ejemplo Hinze ref./36/ la define como:

$$\beta = \frac{L_L}{L_E} \quad (6.3-8)$$

donde:

L_L [m] = escala de longitud lagrangiana.

L_E [m] = escala de longitud euleriana.

mientras que como se mencionó con anterioridad Snyder y Lumley y Wells y Stock, la definen como la relación de escalas integrales de tiempo lagrangiana y euleriana.

Al hacer uso de:

$$t_L = 0.4 \frac{L_L}{urms} \quad (6.3-9)$$

$$t_E = \frac{L_L}{U} \quad (6.3-10)$$

donde: L_L [m] = escala integral de longitud euleriana.

U [m/s] = velocidad media del fluido.

Hinze determina un valor de β (relación de escalas de longitud) de 0.4 y el autor del presente trabajo calcula un valor para la relación de escalas de tiempo $C_T = 20$.

$$\text{donde} \quad C_T = 0.4 \frac{U}{urms} \quad (6.3-11)$$

El valor de C_T que Milojevic reporta y que fue el mismo que se utilizó para reproducir la Fig. 1, implica que la escala de tiempo euleriana es mayor que la correspondiente lagrangiana, lo que no es consistente con lo discutido en los párrafos anteriores.

Sin embargo, Saffman ref./20/ y Corrsin ref./56/ puntualizan que no existe razón para que exista una relación determinada entre las escalas de tiempo y que más aún debido a que no existe una relación matemática formal es conveniente desarrollar expresiones

teóricas que permitan evaluar las funciones estadísticas lagrangianas en función de las funciones estadísticas eulerianas.

Por lo anterior se concluye que el valor de $C_T=0.3$ que reproduce satisfactoriamente datos experimentales es utilizado en el presente trabajo sin temor a violar principios básicos de la naturaleza de la turbulencia.

El tamaño de la estructura turbulenta (eddy size), se determina de acuerdo a la siguiente relación:

$$L_L = \text{urms } t_L \quad (6.3-12)$$

Para definir esta escala de longitud, Milojevic ref./24/recurre al concepto de turbulencia homogénea estacionaria e isotrópica en un fluido con densidad constante es decir ref./56/:

$$(\text{urms})_L = (\text{urms})_E = \text{urms}$$

Las fluctuaciones de velocidad (u') y temperatura (T') del fluido se generan mediante números aleatorios, con distribución de probabilidad gaussiana y con una desviación standard igual a ref./57/:

$$\text{urms} = \left(\frac{2}{3} K \right)^{1/2} \quad (6.3-13)$$

$$\left(\overline{T'^2} \right)^{1/2} = \text{Trms} = \left(- \frac{2}{\epsilon \rho Pr_T} \frac{K \mu_t}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (6.3-14)$$

Los valores instantáneos de velocidad (u) y temperatura (T) del fluido se determinan mediante:

$$u = \bar{u} + u' \quad (6.3-15)$$

$$T = \bar{T} + T' \quad (6.3-16)$$

Las fluctuaciones generadas se mantienen constantes durante el tiempo de interacción partícula - remolino, este tiempo es calculado mediante la siguiente expresión:

$$t_{int} = \min (t_L , t_{transito}) \quad (6.3-17)$$

donde:

$t_{int} [s]$ = tiempo de interacción partícula - remolino.

$$t_{transito} [s] = \text{tiempo que tarda la partícula en cruzar un remolino turbulento.}$$

$$= \frac{L}{v_{rel}}$$

donde :

$v_{rel} [m/s]$ = velocidad relativa entre el fluido y la partícula.

$$= \max (|u-u_p| , |v-v_p| , |w-w_p|)$$

El tiempo de tránsito o el tiempo que tarda una partícula en cruzar un remolino turbulento, es una consecuencia del efecto conocido como trayectorias cruzadas, este efecto se presenta debido a la tendencia de partículas pesadas a cambiar continuamente de elemento de fluido vecino.

Es decir, una partícula pesada (velocidad terminal grande), influenciada por un campo de fuerza externo, emigra de un remolino (eddy) a otro con una rapidez mayor que la rapidez de decaimiento promedio de los remolinos. En el caso de una partícula ligera o de un elemento de fluido, este permanecerá en el interior del remolino hasta que decae. Como consecuencia, las partículas pesadas tienden a perder su correlación de velocidad con mayor rapidez que las partículas ligeras. La función de correlación de velocidad de las partículas está directamente relacionada a su coeficiente de dispersión ref./20/, por lo que las partículas pesadas se dispersan menos.

En la fig.1, se observa que las partículas pesadas del experimento de Snyder y Lumley se dispersan menos que las partículas ligeras, y tal como lo discute Snyder y Lumley esto es debido fundamentalmente al efecto de trayectorias cruzadas.

El modelo (L-E-D) supone que la interacción entre una partícula y un remolino turbulento concluye por dos razones:

- la partícula cruza el remolino.
- termina el tiempo de vida del remolino.

Una vez que cualquiera de estas dos condiciones se satisface, un nuevo remolino es generado dependiendo de las condiciones locales de K y ϵ . Es conveniente mencionar que el modelo que se presenta en este trabajo, considera como primera aproximación que las escalas de tiempo y longitud de los remolinos turbulentos de

velocidad son iguales a las escalas de los remolinos de temperatura.

Para simular la dispersión de partículas en flujos no homogéneos, el modelo considera que cuando una partícula entra a un nuevo volumen de control, las escalas de longitud y tiempo de los remolinos además de las fluctuaciones de velocidad y temperatura se corrigen a los valores locales de K y ϵ .

6.4.-CARACTERISTICAS MEDIAS DE LA FASE DISPERSA Y TERMINOS FUENTE.

Para determinar estadísticamente las características medias de velocidad, Temperatura y concentración de las partículas, y evaluar la interacción partícula - fluido, a partir de términos fuente que aparecen en las ecuaciones diferenciales de la fase continua (ver capítulo 2), el modelo de dispersión L-E-D requiere de un número significativamente grande de trayectorias de partículas.

Las propiedades de la fase dispersa se evalúan mediante un promedio de grupo (ensemble average), que es función de las trayectorias y número de partículas que atraviezan un volumen de control.

Las partículas se introducen al flujo en un número finito de puntos de arranque (isl), los cuales tienen cada uno de ellos un número determinado de trayectorias "j" de partículas.

El número de partículas en cada trayectoria "j" se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\dot{N}_j^p(\text{isl}) = \frac{\text{Fr}(\text{isl}) \dot{M}_p}{m_p N_{tr}(\text{isl})} \quad (6.4-1)$$

donde:

$\dot{N}_j^p(\text{isl})$ [1/s] = número de partículas por unidad de tiempo en la trayectoria j arrancando en la posición isl.

\dot{M}_p [kg/s] = gasto másico total de partículas.

$$= Q_f Z_L$$

Q_f [kg/s] = gasto másico total del fluido

Z_L [] = relación de gastos másicos partículas-fluido.

m_p [kg] = masa de una partícula = $\rho_p V_p$

$N_{t_p}(\text{isl}) []$ = número de trayectorias seleccionadas en cada posición de arranque isl.

= 1-5 para los casos estudiados.

$Fr(\text{isl}) []$ = fracción de gasto másico de partículas arrancando en la posición isl.

$$= \frac{(\Delta \text{Area}) (u_p) (\alpha) \rho_p}{M_p}$$

$\text{Area} [m^2]$ = incremento de área transversal al flujo de partículas en la posición de arranque isl.

$\alpha []$ = fracción de vacío o fracción de volumen en la posición de arranque isl.

$u_p [m/s]$ = velocidad de las partículas en la posición de arranque isl

.-NUMERO DE PARTICULAS EN EL INTERIOR DE UN VOLUMEN DE CONTROL.

$$n_p = \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} N_j^p \Delta t \quad (6.4-2)$$

donde:

$\Delta t [s]$ = incremento en tiempo.

$(t_2 - t_1) [s]$ = tiempo invertido por la partícula desde que entra hasta que sale del volumen de control.

.-FRACCION DE VACIO EN UN VOLUMEN DE CONTROL.

$$\alpha_p = \frac{1}{\Delta V} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} \frac{m_p}{\rho_p} N_j^p \Delta t \quad (6.4-3)$$

donde:

$\Delta V [m^3]$ = diferencial de volumen del fluido.

-COMPONENTES DE VELOCIDAD MEDIA DE LAS PARTICULAS EN UN VOLUMEN DE CONTROL.

$$U_p = \frac{1}{n_p} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} u_p N_j^p \Delta t \quad (6.4-4)$$

$$V_p = \frac{1}{n_p} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} v_p N_j^p \Delta t \quad (6.4-5)$$

$$W_p = \frac{1}{n_p} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} w_p N_j^p \Delta t \quad (6.4-6)$$

-TEMPERATURA MEDIA DE LAS PARTICULAS EN UN VOLUMEN DE CONTROL.

$$\bar{T}_p = \frac{1}{n_p} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} T_p N_j^p \Delta t \quad (6.4-7)$$

-ENERGIA CINETICA TURBULENTA DE LAS PARTICULAS EN UN VOLUMEN DE CONTROL.

$$K_p = \frac{1}{2} (u_p'^2 + v_p'^2 + w_p'^2)$$

$$K_p = \frac{1}{2 n_p} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} ((u_p^2 + v_p^2 + w_p^2) N_j^p \Delta t) - \frac{1}{2} (u_p^2 + v_p^2 + w_p^2) \quad (6.4-8)$$

donde: u_p', v_p', w_p' [m/s] = fluctuaciones de velocidad de las partículas.

.-TERMINO FUENTE DE LA ECUACION DE CONSERVACION DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN LA DIRECCION X.

$$S_{mx}^p = \frac{1}{\Delta V} \sum_j \int_{t_1}^{t_2} 3\pi \mu d_p f (u_p - u) N_j^p \Delta t \quad (6.4-9)$$

donde:

S_{mx}^p [N/m³] = fuerza de arrastre promedio por unidad de volumen, generada debido a la diferencia de velocidades entre las fases.

.-TERMINO FUENTE DE LA ECUACION DE CONSERVACION DE LA ENERGIA

$$S_E^p = \frac{1}{\Delta V} \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \rho_p V_p C_p (T_p - T) (1 - \exp(-t/\tau_{pter})) \frac{1}{\Delta t} N_j^p \Delta t \quad (6.4-10)$$

donde: S_E^p [W/m³] = energía promedio por unidad de volumen, generada debido a la diferencia de temperaturas entre las fases.

.-TERMINO FUENTE DE LA ECUACION DE ENERGIA CINETICA TURBULENTA.

El término fuente de la ecuación de K surge debido a la correlación que existe entre las fluctuaciones de la fuerza de arrastre $S_{u_i}^p$ y las fluctuaciones de velocidad del fluido u_i' . Las

fluctuaciones de la fuerza de arrastre se presentan, debido a la diferencia que existe entre las fluctuaciones de velocidad de las fases. A continuación se presenta la expresión del término fuente de K tal como lo considera el modelo L-E-D.

$$S_K^p = \overline{S_{u_i}^p u_i'} \quad (6.4-11)$$

donde:

S_K^p [m²/s³] = rapidez promedio con que se genera la energía cinética turbulenta dentro de un volumen de control.

Si $S_U^P = \frac{S_{mx}^P}{\rho} = [m/s^2]$ = fuerza promedio por unidad de masa actuando en el volumen de control en la dirección x, debido a la diferencia de velocidades entre las fases.

$$S_U^P = S_U^P + S_{U'} \quad (6.4-12)$$

$$S_V^P = S_V^P + S_{V'} \quad (6.4-13)$$

$$S_W^P = S_W^P + S_{W'} \quad (6.4-14)$$

donde:

$S_U^P [m/s^2]$ = fuerza instantánea por unidad de masa actuando en el volumen de control en la dirección de x.

$S_{U'} [m/s^2]$ = fuerza fluctuante por unidad de masa actuando en el volumen de control en la dirección de x

Los términos de las dos ecuaciones restantes, tienen el significado anterior, pero en las direcciones y, z.

$$S_{U_i}^P u_i' = (S_U^P - S_U^P) (u - \bar{u}) + (S_V^P - S_V^P) (v - \bar{v}) + (S_W^P - S_W^P) (w - \bar{w})$$

realizando el producto y tomando promedios en el tiempo (ver capítulo 2):

$$S_K^P = \overline{S_{U_i}^P u_i'} = \overline{S_U^P u} + \overline{S_V^P v} + \overline{S_W^P w} - (\overline{S_U^P \bar{u}} + \overline{S_V^P \bar{v}} + \overline{S_W^P \bar{w}})$$

donde la expresión para cada término se muestra a continuación:

$$\overline{S_U^P u} = \frac{1}{\Delta V} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} 3\pi r d_p f (u_p - u) u N_j^P \Delta t \quad (6.4-15)$$

$$\overline{S_v^p} = \frac{1}{\Delta V} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} 3\pi \nu d_p f (v_p - v) v \dot{N}_j^p \Delta t \quad (6.4-16)$$

$$\overline{S_w^p} = \frac{1}{\Delta V} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} 3\pi \nu d_p f (w_p - w) w \dot{N}_j^p \Delta t \quad (6.4-17)$$

$$S_u^p \bar{u} = \frac{\bar{u}}{\Delta V} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} 3\pi \nu d_p f (u_p - u) \dot{N}_j^p \Delta t \quad (6.4-18)$$

$$S_v^p \bar{v} = \frac{\bar{v}}{\Delta V} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} 3\pi \nu d_p f (v_p - v) \dot{N}_j^p \Delta t \quad (6.4-19)$$

$$S_w^p \bar{w} = \frac{\bar{w}}{\Delta V} \sum_j \sum_{t_1}^{t_2} 3\pi \nu d_p f (w_p - w) \dot{N}_j^p \Delta t \quad (6.4-20)$$

.-TERMINO FUENTE DE LA ECUACION DE DISIPACION DE ENERGIA TURBULENTO.

El término fuente de la ecuación de ϵ surge debido a la correlación que existe entre el gradiente de las fluctuaciones de la fuerza de arrastre $S_{u_i}^p$, y el gradiente de las fluctuaciones de velocidad del fluido u_i' .

$$S_\epsilon^p = \nu \frac{\partial S_{u_i}^p}{\partial x_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \quad (6.4-21)$$

donde:

S_ϵ^p [m²/s⁴] = rapidez promedio con que se produce disipación de energía cinética turbulenta dentro de un volumen de control.

Este término se modela en analogía con efectos de flotación ref./24/ y se considera que adquiere la forma:

$$S_f^p = \frac{C_3 \epsilon S_K^p}{K} \quad (6.4-22)$$

En este estudio se considera $C_3 = 0.7$

7.-RESULTADOS DE FLUJOS TURBULENTOS CON PARTICULAS EN SUSPENSION.

Para verificar la capacidad de predicción del modelo presentado en este trabajo, se seleccionaron tres tipos de flujos, los cuales han sido caracterizados experimentalmente por Manero et.al., ref./58/, Shuen et.al., ref./27/, ref./59/, y por Tsuji et.al., ref./60/, respectivamente.

Los resultados de los dos primeros flujos fueron analizados en el IV taller sobre predicciones de flujos en dos fases (Fourth workshop on two-phase flow predictions), ref./61/. El modelo también se utilizó para simular los 3 casos de prueba que se discutieron en el III taller de esta misma especialidad, ref./62/.

Los resultados del tercer flujo, se presentaron en la Conferencia internacional sobre la mecánica de flujos en dos fases (International conference on mechanics of two-phase flows), ref./63/.

7.1.-FLUJO TURBULENTO CON PARTICULAS EN SUSPENSION EMERGIENDO EN UN CANAL VERTICAL.

La caracterización de este flujo se llevó a cabo en un circuito experimental instalado en el Instituto de dinámica de fluidos de la universidad de Erlangen R.F.A. ref./58/. La sección de pruebas del experimento se muestra en la fig.2, en esta misma figura se indican las posiciones a lo largo del canal en las que se midieron (con anemómetro laser), las velocidades medias e intensidades de turbulencia de las dos fases. El flujo de aire hacia el canal vertical proviene de tres canales paralelos cuyas dimensiones aparecen en la fig.2. El aire en el canal central se cargó con partículas de vidrio, mientras que en los canales laterales se suministró aire limpio.

En el experimento, las partículas de vidrio tenían una distribución de tamaño variando desde 30 μm a 70 μm , con un diámetro de 50 μm ocurriendo con mayor frecuencia, ref./22/. En la simulación numérica de este experimento, se consideró un diámetro fijo de partículas igual a 50 μm .

En la tabla 3 se presentan las características generales de los flujo de aire y partículas, mientras que en la tabla 4 se muestran las condiciones de entrada consideradas para la realización de la simulación numérica. Puede observarse de la tabla 4 que Manero et.al. ref./58/, ajustaron el flujo de aire hacia la sección de pruebas, de tal manera que las distribuciones de velocidad media en los tres canales fueran las mismas.

TABLA 3

Características del flujo de aire y partículas

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| Densidad del aire | 1.1307 kg/m ³ |
| Viscosidad dinámica del aire | 18.6 x 10 ⁻⁶ kg/(m s) |
| Densidad de las partículas | 2780 kg/m ³ |
| Diámetro de las partículas | 50 µm. |
| Velocidad promedio del aire en el canal central y los canales exteriores. | 8.61 m/s |
| Velocidad promedio de las partículas | 9.58 m/s |
| Flujo total de aire | 0.059943 kg/s |
| Flujo total de partículas | 4.1928 x 10 ⁻⁵ kg/s |
| Flujo másico de partículas por unidad de superficie en el canal central | 0.0246 kg/(m ² s) |
| Relación de carga Z _L (flujo másico de partículas / flujo másico de aire en el canal central). | 0.00253 |
| Relación de carga Z _L (flujo másico de partículas / flujo másico total de aire). | 0.000699 |

TABLA 4

Condiciones de entrada hacia el canal vertical

| | Y | U_f | u'_f | U_p | u'_p | α |
|-----|-------|----------|---------|--------|---------|----------|
| | [mm] | [m/s] | [m/s] | [m/s] | [m/s] | [] |
| 1. | -12.0 | 7.81256 | 1.43531 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2. | -11.0 | 9.1475 | 1.13210 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 3. | -10.0 | 10.05119 | 0.77535 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 4. | -9.0 | 10.45056 | 0.56961 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 5. | -8.0 | 10.43298 | 0.57377 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 6. | -7.0 | 10.07640 | 0.72699 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 7. | -6.0 | 9.26562 | 0.96973 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 8. | -5.0 | 7.65984 | 1.41218 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 9. | -4.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 10. | -3.0 | 8.07922 | 1.51689 | 8.530 | 1.45945 | 0.780e-6 |
| 11. | -2.0 | 9.64361 | 1.03631 | 9.647 | 1.36726 | 0.914e-6 |
| 12. | -1.0 | 10.36623 | 0.80205 | 10.145 | 1.21679 | 0.964e-6 |
| 13. | 0. | 10.68124 | 0.73105 | 10.406 | 1.12564 | 0.100e-5 |
| 14. | 1.0 | 10.46951 | 0.74588 | 10.152 | 1.23929 | 0.995e-6 |
| 15. | 2.0 | 9.67625 | 1.00656 | 9.673 | 1.22791 | 0.978e-6 |
| 16. | 3.0 | 8.26820 | 1.41476 | 8.547 | 1.44763 | 0.778e-6 |
| 17. | 4.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 18. | 5.0 | 7.77578 | 1.41898 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 19. | 6.0 | 9.31061 | 1.07582 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 20. | 7.0 | 10.20590 | 0.73699 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 21. | 8.0 | 10.49594 | 0.59253 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 22. | 9.0 | 10.29184 | 0.73632 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 23. | 10.0 | 9.71238 | 0.97074 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 24. | 11.0 | 8.68123 | 1.28977 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 25. | 12.0 | 6.79828 | 1.53871 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

$$V_f(y) = 0.0$$

$$V_p(y) = 0.0$$

$$v'_p(y) = 0.3 \text{ m/s}$$

donde:

U_f, V_f [m/s] \equiv velocidades medias del fluido.

u'_f [m/s] \equiv urms del fluido.

U_p, V_p [m/s] \equiv velocidades medias de las partículas.

$u'_p, v'_p(y)$ [m/s] \equiv urms, vrms de las partículas.

α [] \equiv fracción de vacío o fracción de volumen de la fase dispersa (gasto volumétrico de las partículas / gasto volumétrico del aire).

En las figs. 3-7 se grafican los resultados numéricos y datos experimentales, de la velocidad media, urns y fracción de volumen de las dos fases, a lo largo del canal vertical.

En estas figuras se presenta únicamente la mitad de la geometría en estudio ya que el flujo además de ser bidimensional tiene simetría axial. El eje de las ordenadas representa el eje central del canal.

A continuación se discutirán los resultados obtenidos con el modelo y se hará referencia a las diferentes posiciones de x en las que se comparan los datos experimentales con los resultados numéricos.

$$x = 0.0 \text{ mm.}$$

En la posición $x = 0.0$ mm, de las figs. 3-7 se grafican las condiciones de entrada al canal vertical, por lo que los datos experimentales y numéricos son los mismos.

$$x = 20 \text{ mm.}$$

En la posición $x = 20$ mm de la fig. 3, puede observarse que los resultados numéricos, predicen un mezclado rápido de los tres flujos, esto es debido básicamente a la naturaleza parabólica de las ecuaciones diferenciales que se resuelven. El rápido mezclado de las tres corrientes de aire, trae como consecuencia que el valor calculado del nivel de turbulencia en la región central del canal sea mucho mayor que el valor experimental (fig.4). En relación a la velocidad media de las partículas (fig.5), puede observarse que los resultados numéricos son muy semejantes a los datos experimentales, excepto que la dispersión de partículas es mayor en la simulación que en el experimento, esto es debido a la fuerte intensidad de turbulencia de los remolinos del fluido que interaccionan con las partículas. Es interesante mencionar que el alto nivel calculado en la turbulencia del fluido tiene un fuerte efecto en el cálculo de la turbulencia de las partículas, ésto se observa en la fig.6, en donde la simulación proporciona valores mayores a los experimentales. En la fig.7 se observa que alrededor del eje central, la fracción volumétrica calculada (α), es mayor que la experimental.

$$x = 100 \text{ mm.}$$

En la posición $x = 100$ mm, de la fig.3, la velocidad media de la fase gaseosa, todavía manifiesta las consecuencias de un mezclado rápido de los chorros de aire muy cerca de la entrada del canal. Se observa, que la velocidad media calculada es uniforme en casi toda la sección transversal del canal, mientras que en el experimento, todavía los chorros no se mezclan totalmente, es decir existe una variación de la velocidad media del aire. En la fig.4 se observa que la causa de que se presente una velocidad media casi uniforme, es debido al alto nivel de turbulencia calculado principalmente en la región central. La velocidad media calculada de las partículas (fig. 5), es semejante a los datos experimentales especialmente alrededor del centro del canal, sin embargo en la simulación las partículas ya alcanzaron la pared del canal mientras que en el experimento no existen partículas en una

posición mayor a $y = 6.68$ mm (la pared del canal se localiza a $y = 12.5$ mm). En la fig. 6 se observa que las fluctuaciones de velocidad de las partículas (calculadas) son mayores a las experimentales, esto es debido al alto nivel de turbulencia de la fase gaseosa. La fracción de volumen calculada numéricamente es menor que el valor experimental en la región central del canal, esto es debido a que en la simulación se tiene mayor dispersión.

$x = 550$ mm.

En la posición $x = 550$ mm de la fig. 3, se observa que la velocidad media del gas calculada es menor al valor experimental, esto se debe probablemente a que las condiciones de entrada del gas en el experimento están mal especificadas, ya que como se puede ver de la fig.2, las placas que conforman las paredes laterales del canal central, tienen una terminación en punta con cierto ángulo, esto induce una velocidad transversal V_f hacia el centro del canal, y por tanto mayor cantidad de flujo de aire. Manero et.al. ref./58/, reportan como cero esta velocidad transversal (ver tabla 4), y por tanto en la simulación también se consideró este valor de entrada. En la fig. 4 se observa que las intensidades de turbulencia de la fase gaseosa medida y calculada, coinciden en la región cercana al centro del canal, sin embargo cerca de la pared, los experimentos reportan un valor considerablemente mayor de urms. La velocidad media calculada de las partículas (fig.5), es menor en toda la sección transversal a las velocidades experimentales, esto se debe a que las velocidades medias calculadas del fluido son inferiores a las experimentales, como se explicó con anterioridad. En la fig. 6, los cálculos indican que la intensidad de turbulencia de las partículas es menor que los valores experimentales, Sommerfeld et.al. ref./22/, atribuyen esta diferencia a errores en la medición o a la falta de algún término en la ecuación de movimiento de la partícula que considere la modificación del coeficiente de arrastre debido a la rotación de la partícula. Sommerfeld ref./22/, argumenta que una alta velocidad de rotación de las partículas incrementan su movilidad y en consecuencia su fluctuación de velocidad. En la fig.7 se observa que la fracción de volumen es casi uniforme en toda la sección transversal, sin embargo, en la simulación se inicia un proceso de concentración de partículas cerca de la pared. Esto se debe a que la alta intensidad de turbulencia del fluido cerca de la pared, induce una gran turbulencia a las partículas las cuales al emigrar hacia la pared, les es difícil abandonar esta región ya que se lo impiden los remolinos turbulentos.

$x = 1050$ mm.

En la posición $x = 1050$ mm de la fig.3 se observa que la velocidad del fluido calculada es menor a los datos experimentales, esto es debido a que en la simulación se especificó una cantidad menor del flujo de gas a la entrada del canal (como se mencionó con anterioridad). El comportamiento del flujo con partículas en suspensión en esta posición es prácticamente el mismo que en la

posición $x = 550$ mm, sin embargo como puede observarse en las figs. 4-6, los resultados son muy alentadores ya que al menos los resultados numéricos tienen la misma tendencia que los experimentos. En cuanto a la fracción de volumen (fig.7), se observa una marcada disminución de partículas en el centro del canal pero una alta concentración en la región cercana a la pared. Esto parece ser que es característico del modelo Lagrangiano Estocástico determinístico utilizado en este trabajo, y como lo mencionan Milojevic et.al. ref./21/, se recomienda realizar simulaciones en ductos de mayor longitud con el propósito de eliminar los efectos de entrada, asociados principalmente con la fluctuación transversal de la velocidad de las partículas. En la sección 7.3 se discuten las predicciones numéricas del flujo con partículas en suspensión en el interior de un ducto circular vertical en una posición localizada a 5m de la región de entrada, y se observa que el modelo lagrangiano- estocástico-determinístico no predice una acumulación de partículas cerca de la pared, sino que la fase dispersa se concentra en el centro del ducto. Debido a que no se cuenta con información experimental que esté libre de los efectos de entrada, en la actualidad no se ha determinado si en realidad éste es el comportamiento de las partículas o si es una deficiencia del modelo.

7.2.-FLUJO TURBULENTO CON PARTICULAS EN SUSPENSION EN UN CHORRO REDONDO.

En esta sección se presenta la simulación del experimento de Shuen y colaboradores refs./27,59/. El experimento consistió en inyectar en el interior de una sección de pruebas cuadrada de dimensiones $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ y de altura 2.5 m (fig. 8), un chorro de aire vertical descendente cargado con partículas. El chorro provenía de un ducto circular de diámetro $D = 10.9\text{ mm}$, el cual tenía una longitud de 90 diámetros misma que servía para desarrollar completamente el flujo turbulento de la suspensión.

Shuen y colaboradores, utilizaron partículas esféricas de vidrio ($\rho_p = 2620\text{ kg/m}^3$) con una distribución en tamaño variando desde $37\text{ }\mu\text{m}$ hasta $125.8\text{ }\mu\text{m}$, con un diámetro más frecuente de $79\text{ }\mu\text{m}$ ref./59/. En la simulación se consideró que las partículas tenían un diámetro constante igual a $79\text{ }\mu\text{m}$. Las características medias y turbulentas de las dos fases se midieron con anemómetro laser en tres posiciones diferentes por debajo de la descarga $x/D = 1$ (condiciones de entrada), $x/D = 20$, $x/D = 40$.

Las condiciones generales del flujo se resumen en la tabla 5, mientras que las condiciones de entrada de la fase gaseosa y de la fase sólida, se presentan en las tablas 6 y 7 respectivamente.

TABLA 5

Condiciones generales del flujo

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| Velocidad media del aire en la línea central del chorro (U_c) cargado con partículas en $x/D = 1$. | 26.1 m/s |
| Velocidad media de las partículas en la línea central del chorro (U_{pc}) en $x/D = 1$. | 24.1 m/s |
| Flujo másico de partículas por unidad de superficie en la línea central del chorro (G_c) en $x/D = 1$. | 6.06 kg/(m ² s) |
| Relación de carga Z_L (flujo másico de partículas / flujo másico de aire). | 0.2 |
| Diámetro del ducto a la salida | 10.9 mm |
| Temperatura del aire | 296.0 K |
| Presión | 97000.0 N/m ² |
| Densidad del aire | 1.178 kg/m ³ |

Tabla 6

Condiciones de entrada de la fase gaseosa
 $x/D = 1$

| r/x | U/U_c | u_{rms}/U_c | v_{rms}/U_c | $\overline{u'v'}/U_c^2$ |
|-------|---------|---------------|---------------|-------------------------|
| 0.0 | 1.0 | 0.085 | 0.032 | 0.00007 |
| 0.073 | 0.991 | 0.085 | 0.034 | 0.00037 |
| 0.165 | 0.979 | 0.086 | 0.037 | 0.00080 |
| 0.257 | 0.948 | 0.083 | 0.045 | 0.00114 |
| 0.349 | 0.878 | 0.088 | 0.050 | 0.00178 |
| 0.440 | 0.815 | 0.135 | 0.072 | 0.00428 |
| 0.514 | 0.570 | 0.159 | 0.116 | 0.01109 |
| 0.578 | 0.395 | 0.151 | 0.134 | 0.01020 |
| 0.624 | 0.213 | 0.128 | 0.117 | 0.00833 |
| 0.670 | 0.146 | 0.076 | 0.082 | 0.00477 |
| 0.716 | 0.035 | 0.049 | 0.054 | 0.00138 |

Tabla 7

Condiciones de entrada de la fase sólida
 $x/D = 1$

| r/x | U_p/U_{pc} | $urmsp/U_{pc}$ | $vrmsp/U_{pc}$ |
|-------|--------------|----------------|----------------|
| 0.0 | 1.0 | 0.083 | 0.027 |
| 0.184 | 0.985 | 0.088 | 0.031 |
| 0.321 | 0.927 | 0.088 | 0.037 |
| 0.413 | 0.882 | 0.095 | 0.049 |
| 0.477 | 0.818 | 0.116 | 0.059 |
| 0.523 | 0.621 | 0.151 | 0.092 |
| 0.569 | 0.437 | 0.124 | 0.105 |
| 0.615 | 0.305 | 0.107 | 0.096 |
| 0.661 | 0.185 | 0.095 | 0.090 |
| 0.706 | 0.129 | 0.079 | 0.083 |

| r/x | G/G_c |
|-------|---------|
| 0.0 | 1.0 |
| 0.073 | 0.981 |
| 0.165 | 0.930 |
| 0.257 | 0.862 |
| 0.349 | 0.815 |
| 0.440 | 0.725 |
| 0.514 | 0.485 |
| 0.578 | 0.170 |
| 0.624 | 0.101 |
| 0.670 | 0.002 |

donde:

$x = 10.9 \text{ mm}$

$U \text{ [m/s]}$ = velocidad media del fluido.

$urms, vrms \text{ [m/s]}$ = intensidades de turbulencia del gas.

$\overline{u'v'} \text{ [m}^2\text{/s}^2\text{]}$ = esfuerzo cortante turbulento.

$U_p \text{ [m/s]}$ = velocidad media de las partículas.

$urmsp, vrmsp \text{ [m/s]}$ = $urms, vrms$ de las partículas.

$G \text{ [kg/(s m}^2\text{)]}$ = flujo másico de partículas por unidad de superficie.

El valor de G se determina numéricamente a partir de evaluar el número de partículas por unidad de tiempo que atraviesa la superficie (normal al flujo) de los volúmenes de control.

Es conveniente mencionar que para la simulación de un chorro libre redondo, Launder y Spalding ref./43/, recomiendan modificar y evaluar las constantes C_μ y $C_{\epsilon 2}$ del modelo de turbulencia K- ϵ , a partir de las siguientes expresiones:

$$C_\mu = 0.09 - 0.04 f \quad (7.2-1)$$

$$C_{\epsilon 2} = 1.92 - 0.0667 f \quad (7.2-2)$$

donde:

$$f = \left| \frac{y}{2 U_c} \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} - \left| \frac{\partial U_c}{\partial x} \right| \right) \right|^{0.2} \quad (7.2-3)$$

y [m] = ancho del chorro en la dirección radial

En las figs. 9-11 se grafican para las posiciones $x/D = 1$, $x/D = 20$ y $x/D = 40$ respectivamente, los resultados numéricos y datos experimentales de la distribución radial de U , u_{rms} , v_{rms} y $u'v'$ de la fase gaseosa. En estas figuras, los valores se normalizan con respecto al valor de la velocidad media del gas en la línea central del chorro para la posición x/D correspondiente. En las figuras de esta sección se presenta la mitad de la geometría en estudio ya que el flujo es simétrico, por lo que entonces el eje de las ordenadas representa la línea central del chorro.

En las figs. 12-14, se grafican para las mismas posiciones de x/D mencionadas en el párrafo anterior, los valores numéricos y experimentales de U_p , u_{rmsp} , v_{rmsp} y G de la fase dispersa. Estos valores se normalizan también con respecto a los valores de U_{pc} y G_c que prevalecen en la posición x/D correspondiente.

En relación a la velocidad media de la fase gaseosa, en las figs. 10 y 11 se observa que los cálculos coinciden cercanamente con los datos experimentales, especialmente en la posición $x/D = 40$. Las intensidades de turbulencia de la fase gaseosa u_{rms} y v_{rms} siguen en casi toda la dirección radial la misma tendencia que los datos experimentales. Sin embargo, en la región central del chorro puede observarse que la intensidad de turbulencia u_{rms} calculada presenta un comportamiento opuesto a los experimentos, esta concavidad de u_{rms} en el centro es típica de la simulación en chorros libres, tal y como puede comprobarse de las predicciones numéricas que Milojevic, Desjonqueres, Wennerberg, Börner,

Berlemont y Avila presentaron en el III y IV taller sobre predicciones del flujo en dos fases refs./22,21/. Adicionalmente Shuen et.al. ref./26,59/, llevaron a cabo la simulación de este experimento y de 3 casos adicionales en los cuales se varió tanto la relación de carga como el tamaño de partículas y puede observarse que de manera sistemática se presenta una concavidad de urms en el centro del chorro. Este comportamiento de urms se atribuye a que los diversos autores antes mencionados, supusieron en sus cálculos una turbulencia isotrópica. En relación al esfuerzo cortante turbulento de la fase gaseosa $\overline{u'v'}$, se observa en las figs. 10 y 11 que la simulación proporciona un esfuerzo turbulento máximo inferior al valor experimental, este mismo comportamiento se observa en los cálculos de los participantes al III taller sobre predicciones del flujo en dos fases ref./21/. A juicio del autor la diferencia entre los valores calculados y experimentales de $\overline{u'v'}$ es que las condiciones de entrada en la simulación no se ajustaron adecuadamente a los experimentos tal y como puede observarse en la fig.9, es decir los datos de entrada al programa de cómputo fueron inferiores a los datos experimentales, esta diferencia se manifiesta de manera muy marcada en la posición $x/D = 20$, en donde se observa que no coinciden las predicciones de $\overline{u'v'}$ con los experimentos, sin embargo conforme se hacen menos importantes los efectos de entrada ($x/D = 40$), la comparación de los valores numéricos y experimentales de $\overline{u'v'}$ es mas satisfactoria.

La velocidad media de las partículas, se grafica en las figs. 13-14 en donde se observa que el valor calculado es mayor que los datos experimentales, este mismo comportamiento lo obtuvieron los participantes al IV taller sobre predicciones del flujo en dos fases ref./22/. En esta reunión se concluyó que una de las causas probables de que los valores numéricos fueran superiores a los experimentales es que la condición de entrada de la fluctuación de velocidad de las partículas en la dirección radial, se especificó muy inferior al valor real, ocasionando que en las simulaciones se presentara en la dirección axial una gran energía cinética y en consecuencia una alta velocidad. Una baja intensidad de turbulencia de las partículas en la dirección radial como condición de entrada a la sección de pruebas se manifiesta también en que la simulación predice una menor dispersión de partículas, tal y como se observa en las gráficas del flujo másico por unidad de superficie (G) de las figs. 13 y 14.

La intensidad de turbulencia de las partículas $urms$ y $vrms$, se presenta en las figs. 13-14. La componente axial de la fluctuación de velocidad es inferior a los datos experimentales en el eje del chorro, este mismo comportamiento lo tienen los cálculos de los participantes a las reuniones anteriormente señaladas ref./21,22/. Los cálculos de $urms$ pueden considerarse como no satisfactorios ya que no presentan ni siquiera la misma tendencia que los datos experimentales, sin embargo dada la complejidad del cálculo de las

características turbulentas de las partículas puede decirse que no es tan mala la comparación entre simulaciones y experimentos. En relación a la simulación de vrmsp, puede decirse que al menos sigue cierta tendencia semejante a los experimentos, sin embargo, los cálculos proporcionan valores considerablemente menores que los datos medidos. Una conclusión en cuanto a las características turbulentas de las partículas es que la simulación de urmsp y vrmsp no es satisfactoria cuando se compara con datos experimentales, esto indica que es necesario continuar el estudio y desarrollo de modelos de interacción partículas - remolinos turbulentos.

7.3.-TRANSFERENCIA DE CALOR EN FLUJOS CON PARTICULAS EN SUSPENSION EN EL INTERIOR DE UN DUCTO CIRCULAR VERTICAL.

En esta sección se presenta la simulación del experimento de Farfar y Depew ref./72/ quienes determinaron el coeficiente promedio de transferencia de calor (\bar{h}_{susp}) entre un flujo turbulento con partículas en suspensión y un ducto circular vertical con temperatura de pared constante. Farfar y Depew ref./72/, cuantificaron la influencia que sobre el coeficiente de transferencia de calor tienen los siguientes parámetros:

.-diámetro de partícula (d_p).

.-relación de carga (Z_L).

.-número de Reynolds de la suspensión ($Re_D = \frac{D U_{mf}}{\nu}$).

donde: D [m] = diámetro del ducto.

U_{mf} [m/s] = velocidad media de la fase gaseosa.

Diversos trabajos experimentales ref./68, 72, 75, 76, 77, 79, 80, 81, 82/, teóricos ref./73, 74, 78, 83/ y de recopilación de correlaciones empíricas ref./69/, han demostrado que en flujos turbulentos con partículas en suspensión en el interior de ductos, existe un aumento o disminución del coeficiente promedio de transferencia de calor dependiendo de la cantidad de sólidos presentes en el flujo. En la mayoría de los artículos citados se hace referencia a que la variación de \bar{h}_{susp} se debe principalmente a dos efectos, a).- aumento o disminución del coeficiente local de transferencia de calor por convección y b).- aumento de la capacidad calorífica de la suspensión. Si bien es cierto que estos dos fenómenos han sido bien identificados, la complejidad del comportamiento de \bar{h}_{susp} reportado en la literatura, permite decir que la transferencia de calor en estos flujos no ha sido

adecuadamente entendida ref./73/. La simulación del experimento de Farbar y Depew ref./72/, haciendo uso del modelo presentado en este trabajo permitirá ofrecer una idea clara de los fenómenos que motiván el aumento o disminución del coeficiente promedio de transferencia de calor \bar{h}_{susp} entre el ducto y la suspensión.

Para llevar a cabo la simulación de flujos turbulentos no isotérmicos con partículas en suspensión en el interior de ductos, se realizaron previamente diversos cálculos que permitieron validar el esquema numérico presentado en este trabajo. El proceso de validación consistió en la realización de las siguientes simulaciones.

7.3.1.-Simulación del experimento isotérmico de Johnk y Hanratty en la región de flujo completamente desarrollado.

En este experimento ref./65/, se midió en la región de flujo completamente desarrollado, la distribución de velocidad del flujo de aire limpio (sin partículas) en el interior de un ducto. En la fig. 15 se presentan los valores numéricos y experimentales de la velocidad adimensional u^+ graficada como función de la distancia adimensional y^+ para un número de Reynolds de 35,000. Los valores numéricos se determinaron en una posición localizada 5. m a partir de la entrada del ducto que tenía un diámetro interno de 0.078m. Johnk y Hanratty ref./65/, ajustaron sus datos de velocidad a una relación del tipo:

$$u^+ = A (y^+)^{1/n} \quad (7.3-1)$$

donde: $A = 8.66$
 $n = 7.0$

Como puede observarse la distribución de velocidad calculada coincide satisfactoriamente con los datos experimentales en la región $30 < y^+ < 630$. Sin embargo, en el centro del ducto mientras que los cálculos indican que la pendiente de la velocidad adimensional es cero, la ley de variación de Johnk y Hanratty, no manifiesta cambio alguno de su pendiente.

7.3.2.-Simulación del experimento no isotérmico de Johnk y Hanratty en la región de flujo completamente desarrollado.

En este experimento ref./65/, se midió en la región de flujo completamente desarrollado, la distribución de temperaturas del flujo de aire en el interior de un ducto calentado en su superficie. La región calentada del ducto se iniciaba después de un tramo de tubería de aproximadamente 5m de longitud ref./65/, es decir el flujo de aire se encontraba en condiciones de completo desarrollo en velocidad.

La sección de calentamiento tenía una longitud de 4.4 m y se calentó eléctricamente a razón de 250 W/m^2 . Las lecturas de

temperatura se tomaron a 3.5 m de distancia a partir de que se iniciaba el calentamiento. Johnk y Hanratty determinaron que la región de flujo completamente desarrollado en temperatura, daba inicio después de que el fluido recorría 1.8 m de distancia en el interior del ducto caliente.

Para llevar a cabo los cálculos, se consideró que el flujo de aire antes de entrar a la zona de calentamiento tenía una distribución de velocidades como la que aparece en la fig. 15.

Los datos experimentales de temperatura se ajustaron a una relación del tipo ref./65/:

$$T^+ = B (y^+)^{1/m} \quad (7.3-2)$$

donde:

para $Re_D = 35,000$

$$B = 6.0$$

$$m = 5.75$$

En la fig. 16 se presenta la gráfica de temperatura adimensional T^+ como función de la distancia adimensional y^+ en una posición localizada 3.5 m a partir del inicio del calentamiento. Como se observan los valores de T^+ calculados coinciden cercanamente con los datos experimentales en la región $30 < y^+ < 794$.

7.3.3.-Simulación del experimento de Johnk y Hanratty en la región de entrada térmica.

En este experimento ref./66/ se midieron en diferentes posiciones x/D (corriente abajo a partir del punto de inicio de calentamiento, $x/D = 0$), las distribuciones de temperatura del flujo de aire dentro de un ducto. Experimentalmente se comprobó que el flujo de aire al entrar a la región calentada tenía temperatura uniforme y presentaba condiciones de flujo completamente desarrollado en velocidad. En la fig. 17 se grafica la temperatura adimensional T^+ como función tanto de la distancia adimensional y^+ como de la posición x/D . En esta gráfica además de aparecer los datos experimentales de la ref./66/, y los valores numéricos obtenidos en este trabajo, se muestra la relación de Kader ref./67/, para flujo completamente desarrollado:

$$T^+ = Pr y^+ \exp(-\Gamma) + (2.12 \ln(1 + y^+) \frac{1.5(2 - y/ro)}{1 + 2(1 - y/ro)^2}) + \beta (Pr) \exp(-1/\Gamma) \quad (7.3-3)$$

donde:

$$\beta(\text{Pr}) = (3.85 \text{Pr}^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln \text{Pr} \quad (7.3-4)$$

$$\Gamma = \frac{10^{-2} (\text{Pr} y^+)^4}{1 + 5 y^+ \text{Pr}^3} \quad (7.3-5)$$

r_0 [m] = radio del ducto.

En la fig.17 se observa que los resultados numéricos no coinciden con los datos experimentales en la región de entrada térmica, principalmente cuando $x/D < 13.68$. En esta región, los valores numéricos de T son superiores a los datos experimentales, indicando una gran difusión de calor en la dirección radial, este comportamiento de la distribución de temperaturas, se debe principalmente a que el modelo matemático (ecuaciones de capa límite) considera que la variación de la temperatura del fluido en la dirección longitudinal es despreciable en relación a la variación de la temperatura en la dirección radial, sin embargo en la región de entrada térmica esto no es necesariamente cierto. Otra causa de la diferencia entre los valores numéricos y experimentales es el tipo de condición de frontera utilizado en la solución de la ecuación de la energía (ley logarítmica de la pared), la cual no necesariamente es válida en la región de entrada térmica.

En la región de flujo completamente desarrollado ($x/D > 44.7$) los cálculos numéricos coinciden satisfactoriamente con los datos experimentales y con la ecuación de Kader ref./67/.

Si bien es cierto que en la región de entrada térmica se presentaron diferencias entre los valores numéricos y experimentales (Fig. 17), estas diferencias son despreciables en relación a los errores que son introducidos por el modelo de dispersión de partículas cuando se simulan flujos con partículas en suspensión en el interior de ductos calentados.

Antes de incorporar partículas en el programa de cómputo, se realizaron cálculos con aire limpio para diferentes números de Reynolds. En la fig.18 se comparan los resultados numéricos para flujo completamente desarrollado con la relación empírica ref. /72, 30/:

$$\overline{\text{Nu}}_D = 0.021 \text{Re}_D^{0.8} \text{Pr}^{0.4} \quad (7.3-6)$$

$$\text{donde: } \overline{\text{Nu}}_D = \frac{\overline{h}_{\text{gas}} D}{k_f}$$

El coeficiente de transferencia de calor promedio por convección \bar{h}_{gas} , se evaluó como función de la diferencia de temperaturas media logarítmica ΔT_{lm} ref./32,30,31/.

7.3.4.-Simulación del flujo turbulento con partículas en suspensión en el interior de un ducto vertical (experimento de Tsuji et. al.).

En este experimento ref./60/, se midieron las velocidades del flujo de aire y de partículas sólidas en suspensión en el interior de un ducto vertical. El propósito de Tsuji et. al. fue estudiar el efecto que sobre la velocidad media y la intensidad de turbulencia de la fase gaseosa, tiene el tamaño de las partículas.

El experimento consistió en introducir partículas de plástico dentro de una corriente ascendente de aire, confinada en el interior de un ducto circular vertical. El diámetro del ducto fue de 0.03 m y la medición se llevó a cabo en una sección transversal, localizada a 5 m de distancia del punto de inyección de las partículas. Tsuji et. al. ref./60/, utilizaron 5 tipos de partículas de plástico, sin embargo en este trabajo se presenta únicamente la simulación para partículas esféricas de poliestireno ($\rho_p = 1020 \text{ kg/m}^3$) de diámetro medio de 200 μm y 500 μm .

En la fig. 19 se grafican las distribuciones radiales de la velocidad media longitudinal de la fase gaseosa y de la fase dispersa ($d_p = 200 \mu\text{m}$), para tres relaciones de carga (0.0, 0.5, 1.3) y $Re_0 = 2.1 \times 10^4$. Conviene mencionar que en cada una de las figuras que representan el experimento de Tsuji et. al. (figs. 19-24), el eje de las ordenadas representa el eje central del ducto, mientras que U_c es la velocidad de la fase gaseosa sobre este eje.

En la fig.22 se grafican las distribuciones de velocidad de las dos fases considerando partículas de 500 μm de diámetro, $Re_0 = 2.1 \times 10^4$ y diferentes relaciones de carga (0.0, 0.7, 2.1, 3.4).

En las figs.19 y 22, se observa que el punto de máxima velocidad se aparta del centro del ducto al aumentar la relación de carga, es decir, el perfil de velocidades adquiere una forma cóncava para relaciones de carga 1.3 ($d_p = 200 \mu\text{m}$) y 3.4 ($d_p = 500 \mu\text{m}$). Esta concavidad de la velocidad media del aire, fue reportada por Tsuji et. al. ref./60/. En este trabajo al igual que en el experimento de la ref./60/, se encontró que la distribución de velocidades para determinadas relaciones de carga es casi homogénea (perfil plano), ésto se observa especialmente en la fig. 22 para una relación de carga de 2.1.

En las figs. 20 y 23 se observa como las partículas alteran la intensidad de turbulencia del gas. Es interesante mencionar que conforme se aumenta la relación de carga, la intensidad de turbulencia disminuye, ocasionando que el perfil de velocidades tienda a ser parabólico (figs. 19 y 22). Sin embargo para $Z_L = 1.3$ ($d_p = 200 \mu\text{m}$) y $Z_L = 3.4$ ($d_p = 500 \mu\text{m}$) se observa en las figs. 20 y 23, un fuerte incremento de la intensidad de turbulencia a partir de la posición $r/r_0 \geq 0.5$, alcanzando incluso en la región logarítmica valores superiores a la turbulencia del gas limpio. El aumento en la turbulencia de la suspensión, ocasiona que el perfil de la velocidad media adquiera en el centro del ducto la forma cóncava antes mencionada pero al mismo tiempo sea uniforme en el resto de la sección. Este efecto de supresión y promoción de turbulencia en una misma sección transversal del ducto fue reportado también por Tsuji et. al. ref./60/.

En las figs. 19 y 22 se observan las siguientes características en el comportamiento de la velocidad de las partículas;

- la velocidad de la fase dispersa es casi uniforme para las partículas de $500 \mu\text{m}$, sin embargo las partículas de $200 \mu\text{m}$ tienen una distribución de velocidad muy semejante en forma a la del fluido que las transporta.
- la velocidad de las partículas es mayor al aumentar la relación de carga.
- la velocidad de las partículas es inferior a la velocidad del gas en la mayor parte de la sección transversal, sin embargo cerca de la pared, debido a la viscosidad del fluido, las partículas presentan mayor velocidad.
- en flujo vertical, entre más pequeño es el tamaño de la partícula, menor es la velocidad relativa entre las fases.
- el cambio de signo de la velocidad relativa se aproxima a la pared del ducto cuando existe una alta concentración de partículas, es decir (ver fig. 22):

mayor $Z_L \Rightarrow$ mayor velocidad de partículas \Rightarrow perfil plano de la velocidad del gas \Rightarrow cambio de signo de la vel. relativa se aproxima a la pared del ducto.

Cada una de las características del comportamiento de la fase dispersa anteriormente enunciadas, fueron reportadas por Tsuji et. al. ref./60/, por lo que resulta alentador que en el presente trabajo, se reproduzcan cualitativamente y cuantitativamente.

En las figs. 21 y 24 se presentan las distribuciones radiales de la fracción de vacío (α), para las partículas de $200 \mu\text{m}$ y $500 \mu\text{m}$ respectivamente. Desafortunadamente Tsuji et. al. ref./60/, no midieron α , por lo que no fue posible comparar los resultados numéricos con datos experimentales. En las figuras 21 y 24 se observa que la simulación predice que las partículas se concentran

en el centro y no en las paredes del ducto, por lo que se desmiente que el modelo de dispersión de partículas Lagrangiano - Estocástico-Determinístico, tenga la característica de acumular partículas en las paredes del ducto (ver sección 7.1) y además se confirma que simulaciones a corta distancia son fuertemente dependientes de las características del flujo a la entrada de la sección de pruebas.

En las 4 subsecciones anteriores se presentaron resultados numéricos de dos fenómenos aislados:

.-Transferencia de calor del flujo de gas ascendente en el interior de un ducto circular.

.-Modificación de la velocidad media e intensidad de turbulencia de una corriente de gas, debido a la presencia de sólidos en suspensión.

A continuación se acoplarán estos dos fenómenos para simular el experimento de Farbar y Depew ref./72/ y predecir el coeficiente promedio de transferencia de calor \bar{h}_{susp} . En la discusión del experimento de Tsuji et. al. ref./60/, se mencionó que las partículas modifican la intensidad de turbulencia del fluido, en consecuencia, cuando existe transferencia de calor, las partículas también tienen efecto sobre el coeficiente convectivo local de transferencia de calor. Es decir, el coeficiente convectivo local, es función de la variación del espesor de la subcapa viscosa que a su vez depende de la relación de carga y del tamaño de las partículas.

En diversos trabajos experimentales ref./72, 77, 79, 80/, se mencionó aunque sin comprobarlo, que para bajas concentraciones de partículas, se presenta el siguiente fenómeno:

Supresión de turbulencia \Rightarrow Incremento del espesor de la subcapa viscosa \Rightarrow reducción del coeficiente local de transferencia de calor.

En la literatura se ha mencionado también que para altas concentraciones, las partículas producen turbulencia lo que induce una reducción del espesor de la subcapa viscosa y un aumento del coeficiente de transferencia de calor ref./76/.

De acuerdo a lo expuesto en los dos párrafos anteriores, puede decirse que los resultados numéricos reproducen al menos lo correspondiente al comportamiento dinámico de la suspensión, es decir para bajas concentraciones de partículas se disminuye la turbulencia y para altas concentraciones aumenta el nivel de la intensidad turbulenta.

A continuación se presentan los resultados numéricos de la simulación del experimento de Farbar y Depew ref./72/ y se discute la influencia que sobre el coeficiente promedio de transferencia de calor tiene el tamaño de las partículas, la concentración de la

fase sólida y el Re_p de la suspensión.

Para llevar a cabo la simulación del experimento de Farbar y Depew, se considera lo siguiente ref./87/:

.-Densidad del fluido constante.

.-Propiedades del fluido independientes de la temperatura.

.-calor específico a presión constante.

.-viscosidad.

.-conductividad térmica.

.-Transferencia de calor por radiación despreciable, es decir, que la diferencia de temperatura entre las fases y la superficie del ducto es pequeña refs./73,74/.

.-Partículas con temperatura uniforme, $Bi \leq 0.1$ ref./32/.

$$Bi [] = \frac{\bar{h} r_p}{k_p} \quad (7.3-7)$$

donde:

r_p [m] = radio de la partícula.

k_p [W/(m K)] = conductividad térmica de la partícula.

\bar{h} [W/(m²K)] = coeficiente de transferencia de calor promedio entre una esfera y un fluido.

.-La energía que reciben las partículas proviene exclusivamente del fluido. Se desprecia la energía que reciben las partículas al golpear las paredes del ducto.

Para comparar los valores numérico de \bar{h}_{susp} con los datos experimentales de Farbar y Depew ref./72/, es conveniente establecer en este punto la forma en que se determinó en el presente trabajo, el coeficiente promedio de transferencia de calor de la suspensión.

En este trabajo se determina el coeficiente \bar{h}_{susp} como una función del calor transportado por la suspensión Q_{susp} y de la diferencia de temperaturas media logarítmica $\Delta T_{lm,susp}$ ref./82/:

$$Q_{susp} = \bar{h}_{susp} A_{transf} \Delta T_{lm,susp} \quad (7.3-8)$$

donde:

\bar{h}_{susp} [W/(m² K)] = coeficiente promedio de transferencia de calor de la suspensión.

A_{susp} [m²] = superficie de transferencia = $\pi D L$

D [m] = diámetro del ducto.

L [m] = longitud del ducto.

$\Delta T_{m,susp}$ [K] = diferencia de temperaturas media logaritmica de la suspensión.

$$\Delta T_{m,susp} = \frac{\Delta T_{bufo} - \Delta T_{buli}}{\ln (\Delta T_{bufo} / \Delta T_{buli})} \quad (7.3-9)$$

donde:

$$\Delta T_{buli} = T_s - T_{buli}$$

$$\Delta T_{bufo} = T_s - T_{bufo}$$

T_s [K] = temperatura de la superficie del ducto.

El calor que transporta la suspensión se evalúa a partir de las temperaturas de la mezcla a la entrada y a la salida del ducto.

$$Q_{susp} = (m_f c_p + m_p C_p) (T_{bufo} - T_{buli}) \quad (7.3-10)$$

donde: m_f [kg/s] = flujo másico de la fase gaseosa.

m_p [kg/s] = flujo másico de la fase sólida.

T_{buli} [K] = temperatura media de la mezcla a la entrada de la sección calentada.

$$T_{buli} = \frac{m_f C_p T_{mfi} + m_p C_p T_{mpi}}{m_f C_p + m_p C_p} \quad (7.3-11)$$

m_f [kg/s] = flujo másico de la fase gaseosa.

m_p [kg/s] = flujo másico de la fase sólida.

T_{buli} [K] = temperatura media de la mezcla a la entrada
de la sección calentada.

T_{bulo} [K] = temperatura media de la mezcla a la salida
de la sección calentada.

$$T_{bulo} = \frac{m_f C_p T_{mfo} + m_p C_p T_{mpo}}{m_f C_p + m_p C_p} \quad (7.3-12)$$

donde:

$$T_{mfi} = \frac{2}{U_{mf} r_o^2} \int_0^{r_o} u_i(r) T_i(r) r dr \quad (7.3-13)$$

$$T_{mpi} = \frac{2}{U_{mp} r_o^2} \int_0^{r_o} u_{pi}(r) T_{pi}(r) r dr \quad (7.3-14)$$

$$T_{mfo} = \frac{2}{U_{mf} r_o^2} \int_0^{r_o} u_o(r) T_o(r) r dr \quad (7.3-15)$$

$$T_{mpo} = \frac{2}{U_{mp} r_o^2} \int_0^{r_o} u_{po}(r) T_{po}(r) r dr \quad (7.3-16)$$

donde:

r_o [m] = radio del ducto.

T_{mfi} [K] = temperatura media de la fase gaseosa a la entrada de la sección calentada.

T_{mfo} [K] = temperatura media de la fase gaseosa a la salida de la sección calentada.

T_{mpi} [K] = temperatura media de la fase sólida a la entrada de la sección calentada.

T_{mpo} [K] = temperatura media de la fase sólida a la salida de la sección calentada.

$u_i(r)$ [m/s] = distribución de velocidad de la fase gaseosa a la entrada de la sección.

$u_o(r)$ [m/s] = distribución de velocidad de la fase gaseosa a la salida de la sección.

$u_{pi}(r)$ [m/s] = distribución de velocidad de la fase sólida a la entrada de la sección.

$u_{po}(r)$ [m/s] = distribución de velocidad de la fase sólida a la salida de la sección.

$T_i(r)$ [K] = distribución de temperaturas de la fase gaseosa en la sección de entrada.

$T_o(r)$ [K] = distribución de temperaturas de la fase gaseosa en la sección de salida.

$T_{pi}(r)$ [K] = distribución de temperaturas de la fase sólida en la sección de entrada.

$T_{po}(r)$ [K] = distribución de temperaturas de la fase sólida en la sección de salida.

U_{mf} [m/s] = velocidad media de la fase gaseosa.

$$U_{mf} = \frac{2}{r_o^2} \int_0^{r_o} u(r) r dr \quad (7.3-17)$$

U_{mp} [m/s] = velocidad media de la fase sólida

$$U_{mp} = \frac{2}{r_o^2} \int_0^{r_o} u_p(r) r dr \quad (7.3-18)$$

Las características geométricas y propiedades termofísicas del experimento de Farbar y Depew ref./72/, fueron las siguientes:

- .-Partículas de vidrio sólido de forma esférica.
- .-Densidad de las partículas 2,570 kg/m³.
- .-Calor específico de las partículas 799.63 J/(kg K)
- .-Densidad del aire 1.079 kg/m³
- .-Calor específico del aire 1008 J/(kg K)
- .-Longitud del ducto 0.806 m
- .-Diámetro interno del ducto 0.017 m
- .-Superficie de transferencia .043 m²

En las figs. 25-30 se comparan los resultados de la simulación con los datos experimentales de Farbar y Depew ref./72/. En estas figuras \bar{h}_{gas} es el coeficiente promedio de transferencia de calor para aire limpio evaluado al correspondiente Re_D . En las figs. 25-28 se observa que para valores de Z_L cercanos a 1, el efecto neto que producen las partículas es el de disminuir \bar{h}_{susp} . Esto se debe a que la fase dispersa disminuye la turbulencia de la fase gaseosa (ver sec. 7.3.4). Para este rango de Z_L , la capacidad calorífica de la mezcla tiene un efecto despreciable.

En las figs. 25 y 26, se observa que si la suspensión contiene partículas relativamente grandes ($d_p = 200 \mu m$), se presenta un

efecto reducido sobre el coeficiente de transferencia de calor conforme aumenta Z_L . Por otro lado en las figs. 27-30, se observa que si las partículas son relativamente pequeñas ($d_p < 140 \mu\text{m}$), el coeficiente de transferencia de calor se incrementa considerablemente cuando $Z_L > 2$. Farbar y Depew reportaron este

mismo comportamiento del coeficiente \bar{h} , es decir que la cantidad real de calor que se transmite hacia la suspensión disminuye rápidamente conforme aumenta el diámetro de las partículas por arriba de $70 \mu\text{m}$.

Para Farbar y Depew ref./72/, los datos experimentales con partículas de $200 \mu\text{m}$, fueron inesperados y se cuestionaron si estos mismos resultados se obtendrían en un ducto de longitud considerablemente mayor. Sin embargo, una explicación de los resultados obtenidos tanto en la simulación como en los experimentos es que el tamaño mayor de las partículas trae como consecuencia que se calienten menos (mayor tiempo característico de respuesta, mayor resistencia térmica por convección), por lo que las partículas en su recorrido por el ducto absorben menos energía y por tanto se manifiesta un menor efecto de la capacidad calorífica de la mezcla. Farbar y Morley ref./75/ reportaron que partículas pequeñas contribuyen más que las grandes al efecto de la capacidad calorífica, esto se verifica con la simulación llevada a cabo en el presente estudio.

En las figs. 25-30 se observa que las partículas de diámetro igual a $200 \mu\text{m}$, no tuvieron efecto en la transferencia de calor, mientras que partículas de diámetro menor o igual a $140 \mu\text{m}$ motivan un incremento del coeficiente convectivo promedio el cual varía linealmente con Z_L .

Los resultados numéricos coinciden al menos cualitativamente con los experimentos, particularmente cuando las partículas son pequeñas y tienen una gran movilidad en la dirección transversal ref./78/. La dispersión de partículas y su trayectoria aleatoria a lo largo de la sección transversal del ducto, se debe al encuentro de éstas con los remolinos turbulentos del fluido, esto trae en consecuencia que la temperatura de la fase dispersa presente un efecto de capacidad calorífica aumentada mayor. Las partículas de diámetro mayor, por el contrario, debido a su inercia, no se desplazan con facilidad en la dirección transversal y por tanto no reciben energía en la zona cercana a la pared y la transmiten al fluido en la parte central del flujo, haciendo de esta forma menos eficiente el efecto de capacidad calorífica aumentada.

En las figs. 28 y 30, se observa que los resultados numéricos de \bar{h}_{susp} para partículas de 70 y $140 \mu\text{m}$, son mucho mayores que los datos experimentales de Farbar y Depew principalmente en la región de $Z_L > 1$, probablemente esto se debe a que en el experimento se supone que las partículas tienen la misma temperatura que el

fluido a la entrada y a la salida de la sección de pruebas ref./77/, por lo que se presume que la ΔT_{lm} experimental es mayor a la que se obtuvo en la simulación.

Los resultados numéricos coinciden cualitativamente con los resultados analíticos obtenidos por Tien ref./74/, ya que para Z_L

< 1 (fig.30), no se presenta una disminución de \bar{h}_{susp} . En el trabajo de Tien ref./74/, las partículas fueron tan pequeñas que el efecto de disminución de turbulencia que ocurre a bajas concentraciones es despreciable en comparación con el efecto que produce la capacidad calorífica aumentada de la suspensión.

La transferencia de calor en flujos con partículas en suspensión depende directamente del número de Reynolds de la mezcla, ya que el Re_D puede ser considerado como una medida del tiempo de

residencia de las partículas en el interior del ducto calentado y tal como lo señalan Farbar y Morley ref./75/, entre menor sea el número de Reynolds, mayor será el tiempo de que disponen las partículas para absorber a través de su superficie el calor que el fluido les transmite. Este comportamiento se verificó a través de la simulación, y se representa en las figs. 26 y 28. En la fig. 26 se observa que para $Z_L < 1$, existe un efecto mayor de la capacidad

calorífica de la mezcla (mayor tiempo de residencia de las partículas) cuando $Re_D = 15,300$, es decir el coeficiente \bar{h}_{susp} no disminuye marcadamente por la modulación de la turbulencia. Por otro lado también se observa en la fig. 26, que para el $Re_D =$

26,500 (menor tiempo de residencia de las partículas), el efecto de aumento de la capacidad calorífica no es tan significativo, lo que ocasiona que la disminución de la turbulencia se manifieste en

una marcada disminución del coeficiente \bar{h}_{susp} . En la fig. 28 se

observa con mayor claridad la influencia que tiene el número de Reynolds sobre el coeficiente de transferencia de calor, ya que para la misma concentración de partículas ($Z_L < 1$), y para $Re_D =$

26,500 (tiempo de residencia de las partículas pequeño), se presenta una marcada disminución de \bar{h}_{susp} inducida por la

disminución de la turbulencia y el pequeño efecto de capacidad calorífica aumentada. Por el contrario para $Re_D = 15,300$, debido a que el tiempo de residencia de las partículas es mayor, no se

presenta disminución de \bar{h}_{susp} .

En las figs. 25, 27 y 29, se observa que la rapidez de crecimiento del coeficiente de transferencia de calor \bar{h}_{susp} conforme aumenta

Z_L , es mayor cuando el número de Reynolds es pequeño ($Re = 15,300$). Esto coincide cualitativamente con lo publicado por

Jepson et.al. ref./79/, quienes señalan que a grandes números de Reynolds, la subcapa viscosa es lo suficientemente delgada (alto nivel de turbulencia), que la introducción de sólidos a valores de Z_L mayores que 1, no produce un aumento considerable ni de la

turbulencia de la fase gaseosa ni del coeficiente \bar{h}_{susp} .

En la sección 7.3.4 se mencionó que los cálculos indican una alta concentración de partículas en la región central del ducto (figs. 21 y 24), esto mismo sucedió en la simulación del experimento de Farbar y Depew ref./72/ (la gráfica no se presenta ya que no existen datos experimentales). Si bien Farbar y Depew no midieron la concentración de partículas, sí diagnosticaron a partir del desgaste sufrido por los termopares instalados en el interior del ducto, que las partículas se concentran en el centro. Esto no coincide sin embargo con lo reportado por Boothroyd y Haque ref./80/ quienes encontraron que en su experimento las partículas se concentraban en la región cercana a las paredes del ducto. Boothroyd y Haque ref./80/, atribuyen este comportamiento a que probablemente tenían la presencia de una carga electrostática que desplazaba las partículas hacia las paredes del ducto.

La simulación del experimento de Farbar y Depew, permite hacer las siguientes conclusiones:

.-El coeficiente promedio de transferencia de calor \bar{h}_{susp} se incrementa cuando la relación de carga es superior a 1.

.-El coeficiente \bar{h}_{susp} es función de los siguientes parámetros:

- .-Tamaño de partícula.
- .-Concentración de partículas.
- .-Número de Reynolds.

.-Para valores de Z_L menores a 1 existe una combinación de efectos que modifican \bar{h}_{susp} . La turbulencia disminuye, el efecto de la capacidad calorífica aumentada es reducido, por tanto se produce una reducción neta del coeficiente \bar{h}_{susp} .

.- Partículas pequeñas ($d_p < 140 \mu m$), a bajas concentraciones ($Z_L < 1$), producen un incremento neto del coeficiente \bar{h}_{susp} . Es decir el efecto de capacidad calorífica aumentada supera el efecto de disminución de turbulencia.

.-La dispersión de partículas pequeñas debido a su interacción con los remolinos turbulentos, permite alcanzar una temperatura de mezcla más homogénea.

.-Entre mayor es el número de Reynolds de la mezcla, menor es el efecto de las partículas sobre el coeficiente \bar{h}_{susp} .

8.-CONCLUSIONES.

En este trabajo se han presentado las bases teóricas y computacionales para la simulación de flujos turbulentos con partículas en suspensión, utilizando un modelo con acoplamiento en dos sentidos, Euleriano-Lagrangiano.

Las características turbulentas de la fase continua, se evalúan utilizando un modelo de turbulencia de dos ecuaciones.

Los términos de interacción entre las fases se calculan utilizando el modelo de dispersión de partículas Lagrangiano - Estocástico - Determinístico.

Con el propósito de validar tanto los modelos utilizados como el esquema numérico desarrollado, en este trabajo se realizó la simulación de diferentes flujos turbulentos con partículas en suspensión de geometría simple y los resultados se compararon con datos experimentales.

Al realizar la comparación de las predicciones numéricas con los valores experimentales, se observó que al menos los resultados son alentadores para las velocidades medias de las dos fases, la concentración de volumen y el número de Nusselt, sin embargo; en relación a las características turbulentas, existe una marcada diferencia entre los valores experimentales y los resultados numéricos. Debido a ésto, una conclusión del presente estudio es la de reconocer que es indispensable la realización de investigación tanto teórica como experimental enfocada a la identificación, comprensión y modelación de los múltiples mecanismos de interacción entre las fases.

Como se discutió en la sección 6.3, un punto clave en la modelación de flujos turbulentos con partículas en suspensión es la determinación de las escalas lagrangianas de la turbulencia del fluido a partir de sus escalas eulerianas. En este trabajo se utilizó una relación lineal "simple" entre las escalas integrales eulerianas (tiempo y longitud) y sus respectivas escalas integrales lagrangianas. En relación a este punto, el autor reconoce que para elaborar modelos más sofisticados que conduzcan a mejores predicciones de las características turbulentas de las dos fases, es necesario comprender los diferentes enfoques teóricos que aparecen en la literatura, los cuales tratan de explicar los múltiples fenómenos físicos implícitos en la turbulencia y en el efecto que ésta tiene en la transferencia de calor y dispersión de partículas.

En la simulación numérica de los diferentes experimentos, se observó que las fluctuaciones turbulentas de la fase gaseosa, interaccionan fuertemente con las partículas (y viceversa). Esto ocasiona que tanto la trayectoria como la historia de temperaturas de partículas individuales se presente de forma completamente aleatoria.

En la simulación del experimento de Manero et. al. ref./58/, se cuantificó una alta concentración de partículas cerca de la pared del canal, ésto se debió a que el valor experimental de la intensidad de turbulencia de las partículas en la posición $x = 0.0$ m, propició un alto nivel de migración de las partículas hacia la región cercana a las paredes del canal, de donde les es difícil salir debido al alto nivel de turbulencia existente.

En el presente trabajo se demuestra que no es una característica del modelo de dispersión de partículas L-E-D, predecir acumulación de la fase sólida en las paredes de un ducto. Esto se concluye después de realizar predicciones numéricas a una distancia, en donde se considera que los efectos de entrada son despreciables (experimento de Tsuji et. al. ref./60/).

Las predicciones del experimento de Shuen et. al. refs./27,59/, son alentadoras ya que el cálculo de las velocidades medias e intensidades de turbulencia de la fase gaseosa, coinciden satisfactoriamente con los datos experimentales. Sin embargo, el esfuerzo cortante turbulento calculado es inferior al valor experimental, las razones de este comportamiento se explican en la secc. 7.2. La falta de coincidencia entre los cálculos y los datos experimentales de Shuen et. al. relacionados con la velocidad media y concentración de partículas, hace suponer que el valor medido de la intensidad de turbulencia de la fase dispersa en la dirección radial, fue muy inferior al valor real. A este respecto es conveniente enfatizar que la realización de experimentos bien controlados en donde se puedan aislar efectos y que sobre todo cuenten con mediciones confiables, es indispensable para la elaboración de modelos y esquemas numéricos de predicción.

En la simulación del experimento de Farbar y Depew ref./72/, los resultados obtenidos también son muy alentadores ya que se verificaron y cuantificaron diversas características del flujo, que habían sido identificadas de manera cualitativa por diversos investigadores (ver secc. 7.3), entre otras cosas se encontró que:

.-El coeficiente promedio de transferencia de calor \bar{h}_{susp} se incrementa cuando la relación de carga es superior a 1.

.-Para valores de Z_L menores a 1 existe una combinación de efectos que propician una reducción neta del coeficiente \bar{h}_{susp} .

.- Partículas pequeñas ($d_p < 140 \mu m$), a bajas concentraciones propician un incremento de \bar{h}_{susp} .

.-La dispersión de partículas permite alcanzar una temperatura de mezcla más homogénea.

.-Entre mayor es el número de Reynolds de la mezcla, menor es el efecto de las partículas sobre el coeficiente \bar{h}_{susp} .

.-Las partículas sólidas en suspensión se concentran en el centro del ducto.

El autor reconoce que a lo largo de este trabajo, se recurre con frecuencia a la formulación de las ecuaciones diferenciales requeridas para el análisis de los flujos turbulentos con partículas en suspensión, sin embargo; es el sentir del autor que la forma en que se presenta este documento, será una guía adecuada para estudiantes e investigadores que se inician en el modelado y simulación numérica de este tipo de flujos.

-NOMENCLATURA

| | |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A_p [m^2] | área frontal de una partícula. |
| A_{susp} [m^2] | superficie de transferencia = $\pi D L$ |
| Bi [] | número de Biot. |
| C_D [] | coeficiente de arrastre de las partículas. |
| C_μ , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$ | constantes del modelo de turbulencia K - ϵ |
| C_p [J / kg K] | calor específico de la partícula. |
| c_p [J / (kg K)] | calor específico de fluido a presión constante. |
| c_v [J / (kg K)] | calor específico de fluido a volumen constante. |
| D [m] | diámetro del ducto. |
| D_p [m^2/s] | coeficiente de difusión de la fase dispersa. |
| D_{pt} [m^2/s] | coeficiente de difusión turbulenta de las partículas. |
| d_p [m] | diámetro de las partículas. |
| E [J] | energía que intercambia la partícula con el fluido en Δt . |
| e [$(m/s)^2$] | energía interna del fluido por unidad de masa |
| F_{pi} [N/m^3] | fuerza de interacción entre las fases por unidad de volumen, debido a la fuerza de arrastre entre las fases. |
| $Fr(isl)$ [] | fracción de gasto másico de partículas arrancando en la posición isl. |
| G [$kg/(s m^2)$] | flujo másico de partículas por unidad de superficie. |
| g_x, g_y, g_z [m/s^2] | fuerzas por unidad de masa en las direcciones x, y, z |
| H [m^2/s^2] | entalpía total instantánea. |

| | |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| \bar{H} [m ² /s ²] | entalpía total media. |
| H' [m ² /s ²] | fluctuación de entalpía total |
| \bar{H}^+ [] | temperatura adimensional. |
| \bar{h} [W/m ² K] | coeficiente promedio de transferencia de calor entre una esfera y un fluido. |
| \bar{h}_{susp} [W/(m ² K)] | coeficiente promedio de transferencia de calor de la suspensión. |
| h [m ² /s ²] | entalpía estática. |
| isl | posición de arranque de las partículas. |
| K [m ² /s ²] | energía cinética turbulenta. |
| k [W/(m K)] | conductividad térmica del fluido. |
| k_t [W/m k] | conductividad térmica turbulenta |
| k_p [W/(m K)] | conductividad térmica de la partícula. |
| L [m] | longitud característica del fluido. |
| L_E [m] | escala de longitud euleriana. |
| L_L [m] | escala integral de longitud euleriana. |
| \dot{M}_p [kg/s] | gasto másico total de partículas. |
| \dot{m}_f [kg/s] | flujo másico de la fase gaseosa. |
| \dot{m}_p [kg/s] | flujo másico de la fase sólida. |
| N_j^p (isl) [1/s] | número de partículas por unidad de tiempo en la trayectoria j arrancando en la posición isl . |
| N_{tj} (isl) [] | número de trayectorias seleccionadas en cada posición de arranque isl . |
| \bar{Nu} [] | número de Nusselt promedio entre una esfera y un fluido. |
| Pr [] | número de Prandtl. |

| | |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Pr_t { } | número de Prandtl turbulento. |
| p [N/m^2] | presión instantánea. |
| \bar{p} [N/m^2] | presión media. |
| p' [N/m^2] | fluctuación de presión. |
| Q [W] | flujo de calor partícula-fluido. |
| Q_f [kg/s] | gasto másico total del fluido. |
| q [W/m^2] | flujo de calor por unidad de superficie que se transmite por conducción. |
| R [$m^2/(s^2K)$] | constante universal del gas. |
| Re { } | número de Reynolds. |
| r_p [m] | radio de la partícula. |
| r_o [m] | radio del ducto. |
| S_{mx}^D [N/m^3] | fuerza de arrastre promedio por unidad de volumen, generada por la diferencia de velocidades entre las fases. |
| S_E^D [W/m^3] | energía promedio por unidad de volumen, generada por la diferencia de temperaturas entre las fases. |
| S_K^D [m^2/s^3] | generación de energía cinética turbulenta dentro de un volumen de control. |
| S_ϵ^D [m^2/s^4] | generación de disipación de energía cinética turbulenta dentro de un volumen de control. |
| T [K] | temperatura instantánea del fluido. |
| T_p [K] | temperatura instantánea de la partícula. |
| T_{p0} [K] | temperatura inicial de la partícula. |
| T_s [K] | temperatura de la superficie del ducto. |

| | |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| T_{buli} [K] | temperatura media de la mezcla a la entrada de la sección calentada. |
| T_{bulo} [K] | temperatura media de la mezcla a la salida de la sección calentada. |
| T_{mfi} [K] | temperatura media de la fase gaseosa a la entrada de la sección calentada. |
| T_{mfo} [K] | temperatura media de la fase gaseosa a la salida de la sección calentada. |
| T_{mpi} [K] | temperatura media de la fase sólida a la entrada de la sección calentada. |
| T_{mpo} [K] | temperatura media de la fase sólida a la salida de la sección calentada. |
| t_L [s] | escala de tiempo lagrangiana del fluido. |
| t_E [s] | escala de tiempo euleriana del fluido. |
| t [s] | tiempo. |
| t_{int} [s] | tiempo de interacción partícula - remolino. |
| $t_{transito}$ [s] | tiempo que tarda la partícula en cruzar un remolino turbulento. |
| U_{fi} [m/s] | velocidades medias del fluido. |
| U_{mf} [m/s] | velocidad media de la fase gaseosa. |
| u_i [m/s] | velocidades instantáneas del fluido. |
| \bar{u}_i [m/s] | velocidades medias del fluido. |
| u'_i [m/s] | fluctuaciones de velocidad del fluido. |
| $urms$ [m/s] | intensidad de turbulencia del flujo. |
| U_{pi} [m/s] | velocidades medias de las partículas. |
| U_{mp} [m/s] | velocidad media de la fase sólida. |
| u_{pi} [m/s] | velocidad instantánea de la partícula en la dirección i . |

| | |
|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| u'_{pi} [m/s] | fluctuaciones de velocidad de las partículas. |
| $u'_{Po}, v'_{Po}, w'_{Po}$ | velocidad instantánea inicial de la partícula. |
| u_T [m/s] | velocidad de fricción. |
| u^+ [] | velocidad adimensional. |
| $\overline{u'v'}$ [m ² /s ²] | esfuerzo cortante turbulento. |
| $(V^2/2)$ [(m/s) ²] | energía cinética del fluido por unidad de masa. |
| $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$ | cuadrado del módulo del vector velocidad. |
| V_p [m ³] | volumen de la partícula. |
| V [m ³] | volumen de control del fluido. |
| v_{rel} [m/s] | velocidad relativa entre el fluido y una partícula. |
| x_{Po}, y_{Po}, z_{Po} | posición inicial de las partículas. |
| y^+ [] | distancia adimensional. |
| Z_L [] | relación de carga. |

.-Símbolos Griegos.

| | |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| α [] | fracción de volumen de la fase dispersa. |
| α_t [m ² /s] | difusividad térmica turbulenta. |
| β [] | fracción de volumen del fluido. |
| $\Delta Area$ [m ²] | incremento de área transversal al flujo de partículas en la posición de arranque isl. |
| Δt [s] | incremento en tiempo. |
| ΔV [m ³] | diferencial de volumen del fluido. |
| $\Delta T_{m_{susp}}$ [K] | diferencia de temperaturas media logarítmica de la suspensión. |
| ϵ [m ² /s ³] | rapidez de disipación de la energía cinética turbulenta. |

| | |
|------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| ψ_E [kg/(m s)] | función de corriente en la frontera exterior. |
| ψ_I [kg/(m s)] | función de corriente en la frontera interior. |
| κ | constante de Von Karman. |
| μ [kg/(m s)] | viscosidad del fluido. |
| μ_t [kg/(m s)] | viscosidad turbulenta del flujo. |
| ν [m ² /s] | viscosidad cinemática del fluido. |
| ν_t [m ² /s] | viscosidad cinemática turbulenta. |
| ρ [kg/m ³] | densidad del fluido. |
| ρ_p [kg/m ³] | densidad de las partículas. |
| σ [] | número de Schmidt de las partículas. |
| σ_t [] | número de Schmidt turbulento de las partículas. |
| $\sigma_K, \sigma_\epsilon$ | constantes del modelo de turbulencia K- ϵ |
| τ_{ij} [N/m ²] | esfuerzos viscosos del fluido. |
| τ_{ij}^p [N/m ²] | esfuerzos viscosos de la fase dispersa. |
| τ_p [s] | tiempo característico de respuesta dinámica de una partícula. |
| τ_{pter} [s] | tiempo característico de respuesta térmica de una partícula. |

.-REFERENCIAS

- 1.-C. T. Crowe, M. P. Sharma and D. E. Stock, "The particle source- in cell (PSI - CELL) model for gas-droplet flows", *Transact. of the ASME, Journal of Fluids Engineering*, pp. 325-332, June 1977.
- 2.-C. T. Crowe, "Review- Numerical models for dilute gas-particle flows", *Transact. of the ASME, Journal of Fluids Engineering*, vol. 104, pp. 297-303, September 1982.
- 3.-Y. Tsuji, Y. Morikawa, T. Tanaka, N. Nakatsukasa and M. Nakatani, "Numerical simulation of gas-solid two-phase flow in a two-dimensional horizontal channel", *Int. J. Multiphase flow*, vol. 13, No. 5, pp. 671-684, 1987.
- 4.-J. A. Laitone, "A numerical solution for gas particle-flows at high Reynolds numbers", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, pp. 465-471, September 1981.
- 5.-J-S. Shuen, L-D. Chen and G. M. Faeth, "Evaluation of a stochastic model of particle dispersion in a turbulent round jet", *AIChE Journal*, vol. 29, No. 1, pp. 167-170, January 1983.
- 6.-G. A. Kallio and M. W. Reeks, "A numerical simulation of particle deposition in turbulent boundary layers", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 15, No. 3, pp. 433-446, 1989.
- 7.-F. Durst, D. Milojevic, B. Schönung, "Eulerian and Lagrangian predictions of particulate two- phase flows: a numerical study", *Appl. Math. Modelling*, 1984 vol. 8, pp. 101-115, april 1984.
- 8.-A. D. Gosman and F. J. K. Ideriah, "TEACH-2E: A general computer program for two-dimensional, turbulent, recirculating flows", Department of Mechanical Engineering, Imperial College, London, June 1976.
- 9.- S. Wittig, W. Rodi, K. H. Sill, S. Eriksen, K. Rüd, G. Scheuerer, A. Schulz, "Gasturbinen-Schaufelkühlung- programmbeschreibung ALFA", Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe, Vorhaben Nr. 241, 1983.
- 10.- D. B. Spalding, "GENMIX- A general computer program for two-dimensional parabolic phenomena, Pergamon Press, Oxford 1977.
- 11.-S. V. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow", series in computational methods in mechanics and thermal sciences, Mc Graw Hill Company, 1980.
- 12.-C.P. Chen and P.E. Wood, "A turbulence closure model for dilute gas-particle flows", *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol. 63, pp. 349-360 april 1985.

13.-Zhou Lixing and Huang Xiaoqing, "Prediction of a confined plane particle-laden jet by turbulent two-phase model with a particle turbulent kinetic energy equation", Proceedings of the fourth workshop on two-phase flow predictions, pp. 125-134, Erlangen F.R.G., October 21-23, 1987.

14.-B. Schöning, "Numerische simulation teilchenbeladener vertikaler rohrströmungen", Ph.D. Thesis, University of Karlsruhe, 1983.

15.-A. Ormancey and J. Martinon, "Prediction of particle dispersion in turbulent flows", Physico Chemical Hydrodynamics, vol. 5, No. 3/4, pp. 229-244, 1984.

16.-A. A. Mostafa and S. E. Elghobashi, "On the dispersion of heavy particles in homogeneous turbulence", Physics and fluids June 1985.

17.-S. L. Lee and M. A. Wiesler, "Theory on transverse migration of particles in a turbulent two-phase suspension flow due to turbulent diffusion - I ", Int., J., Multiphase flow, vol. 13, No. 1, pp. 99-111, 1987.

18.-Michael Jischa, "A two-phase continuum model for turbulent flows, applied to a gas solid pipe flow", Proceedings of The International Conference on Mechanics of Two-Phase Flows, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, June 12-15, 1989.

19.-W. H. Snyder and J. L. Lumley, "Some measurements of particle velocity autocorrelation functions in a turbulent flow", J. Fluid Mech., vol. 48, part I, pp. 41-71, 1971.

20.-M. R. Wells and D. E. Stock, "The effects of crossing trajectories on the dispersion of particles in a turbulent flow", J. Fluid Mech., vol. 136, pp. 31-62, 1983.

21.-D. Milojevic and Thomas Börner, "Proceedings of the third workshop on two-phase flow predictions", Boris Kidric Institute of Nuclear Sciences-Vinca, Beograde, Yugoslavia, June 25-27, 1986.

22.-M. Sommerfeld and H. Zeisel, "Proceedings of the fourth workshop on two-phase flow predictions", Lehrstuhl für Strömungstechnik, Universität Erlangen-Nürnberg, F.R.G., October 21-23, 1987.

23.-S. L. Lee and F. Durst, "Proceedings of the International Conference on Mechanics of Two-Phase Flows", Institute of Applied Mechanics, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, R.O.C., June 12-15, 1989.

24.-D. Milojevic, "Lagrangian Stochastic-Deterministic model (LSD) for the prediction of turbulent fluid-particle flows", Second workshop on two-phase flow predictions, Lehrstuhl für

Strömungstechnik, Universität Erlangen-Nürnberg, F.R.G., May 1985.

25.-R. Weber, F. Boysan, W. H. Ayers and J. Swithenbank, "Simulation of dispersion of heavy particles in confined turbulent flows", AIChE Journal, vol. 30, No. 3, May 1984.

26.-J. S. Shuen, L. D. Chen and G. Faeth, "Predictions of the structure of turbulent, particle-laden round jets", AIAA Journal, vol. 21, No. 11, pp. 1483-1484, November 1983.

27.-J. S. Shuen, A. S. P. Solomon, Q-F. Zhang and G. M. Faeth, "Structure of particle-laden jets: Measurements and predictions", AIAA Journal, vol. 23, No. 3, March 1985.

28.-D. Wennerberg, "Lagrangian model for turbulent particle dispersion", Second workshop on two-phase flow predictions, Lehrstuhl für Strömungstechnik, Universität Erlangen-Nürnberg, F.R.G., May 1985.

29.-A. Berlemont and P. Desjonqueres, "The code PALAS for Particle Lagrangian Simulation in turbulent flows", Proceedings of the fourth workshop on two-phase flow predictions, Lehrstuhl für Strömungstechnik, Universität Erlangen-Nürnberg, F.R.G., October 21-23, 1987.

30.-W. M. Kays and M. E. Crawford, "Convective heat and mass transfer", Mc Graw-Hill, 1980.

31.-E. R. G. Eckert and R. M. Drake, "Analysis of heat and mass transfer", Int. Student Edition, Mc Graw-Hill, 1972.

32.-F. P. Incropera, D. P. Dewitt, "Fundamentals of heat and mass transfer", second edition, John Wiley and Sons, 1985.

33.-G. Scheuerer, "Einführung in die turbulenzmodellierung", Vorlesungs wintersemester 1984/ 1985, Technische Fakultät, Friedrich - Alexander - Universität, Erlangen Nürnberg.

34.-O. Reynolds, "An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinous, and of the law of resistance in parallel channels", Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 174, pp. 935-982, 1883.

35.-G. T. Chapman and M. Tobak, "Observations, theoretical ideas and modeling of turbulent flows- past, present and future", in Theoretical Approaches to Turbulence, edited by D. L. Dwoyer, M. Y. Hussaini and R. G. Voigt, Springer-Verlag, 1985.

36.-J. O. Hinze, "Turbulence. An introduction to its mechanism and theory", Mc Graw-Hill Book Co., Second edition, 1975.

- 37.-A. S. Monin and A. M. Yaglom, "Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence", Volume 1, MIT press, Cambridge, Mass., 1971.
- 38.-H. Tennekes and J. L. Lumley, "A first course in turbulence", The MIT Press, Cambridge, Mass., 1972.
- 39.-Cebeci T. and Smith A., "Analysis of turbulent boundary layers", Academic Press, New York, 1974.
- 40.-Prandtl L. "Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz" ZAMM 5,136 1925.
- 41.-Prandtl L., "Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz". Nachrichten von der Akad. der Wissenschaft in Göttingen, 1945.
- 42.-Nee, V.W. and Kovaszny, L.S.G., "The calculation of the incompressible turbulent boundary layer by a simple theory". Proc. of AFOSR/IFP, Conf. on Computation of Turbulent Boundary Layers, vol.1, Stanford Univ., 1968.
- 43.-B.E.Laundery D.B. Spalding, "The numerical computation of turbulent flows", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.3, pp. 269-289, 1974.
- 44.-B. E. Launder and D. B. Spalding, "Lectures in Mathematical Models of Turbulence, Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science and Technology, London, England, Academic Press, 1972.
- 45.-L. Prandtl "Zur turbulenten Strömung in Röhren und längs Platten", Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst, Göttingen, vol. 4, 1932.
- 46.-K. Hanjalic, B.E. Launder, "A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows", J. Fluid Mech. 1972, vol. 52 part 4.
- 47.-F. H. Harlow, P. I. Nakayama, "Transport of turbulence energy decay rate", Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA- 3854, January 1968.
- 48.-B.E. Launder, "An introduction to single - point closure methodology", Lectures presented at the VKI short course, "An introduction to the modelling of turbulence", University of Manchester Institute of Science, Mechanical Engineering Department, June 10-11, 1985.
- 49.-G. Scheuerer, "Numerische lösung der strömungs- mechanischen grundgleichungen", Vorlesungs wintersemester 1984/ 1985, Technische Facultät, Friedrich - Alexander- Universität, Erlangen Nürnberg.

- 50.-Patankar S.V., Spalding D.B., "Heat and Mass Transfer in Boundary Layers", Intertext, London, 1970.
- 51.-A. A. Tannehill and C. Fletcher, "Computational fluid mechanics and heat transfer", Series in computational methods in mechanics and thermal sciences, Mc Graw-Hill Co., 1980.
- 52.- Martin R. Maxey and James J. Riley, "Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow", Phys. Fluids, vol. 26, No. 4, April 1983.
- 53.-Graham B. Wallis, "One-dimensional two-phase flow", Mc. Graw Hill, Inc.1969.
- 54.-S. A. Morsi and A.J. Alexander, "An investigation of particle trajectories in two-phase flow systems", J. Fluid Mechanics, vol.55, part 2, pp. 193- 208 1972.
- 55.-R. Clift, J. R. Grace and M. E. Weber, "Bubbles, Drops and Particles (Academic, New York, 1978).
- 56.-S. Corrsin, "Estimates of the relations between eulerian and lagrangian scales in large Reynolds number turbulence", Journal of the atmospheric sciences, Vol. 20, march 1963, 115 - 119.
- 57.-B.E. Launder, "Heat and mass transport", Turbulence, edited by P. Bradshaw, Springer-Verlag, 1978.
- 58.-E. Manero, Th. Börner and F.Durst, "Particle dispersion in a confined jet flow", Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Universität Erlangen - Nürnberg, LSTM report 150/ E / 86.
- 59.-J-S. Shuen, A.S.P. Solomon, Q-F. Zhang and G. M. Faeth, "A theoretical and experimental study of turbulent particle - laden jets", NASA Contractor Report 168293, November 1983.
- 60.-Yutaka Tsuji, Yoshinobu Morikawa and Hiroshi Shiomi, "LDV measurements of an air-solid two-phase flow in a vertical pipe", J. Fluid Mech., vol. 139, pp. 417-434, 1984.
- 61.- Avila, R. and Cervantes de Gortari, J., "Numerical prediction of particle dispersed two-phase flows, using the LSD and SSF models", Proceedings of the fourth workshop on two-phase flow predictions, pp. 46-59, Erlangen F.R.G, October 21-23, 1987.
- 62.-Avila, R., "Lagrangian approach for the prediction of parabolic dispersed two-phase flows", Proceedings of the third workshop on two-phase flow predictions, pp. 17-20, Boris Kidric Institute of Nuclear Sciences, Beograd, Yugoslavia, June 25-27, 1986.
- 63.-Avila, R. and Cervantes, J., "Heat transfer predictions of turbulent particulate flows in a pipe", Special session on Advancement of numerical predictions in turbulent two-phase flows,

during the International Conference on Mechanics of two-phase flows, Taipei, Taiwan, June 12-15, 1989.

64.-E. M. Sparrow and S. V. Patankar, "Relationships among boundary conditions and Nusselt numbers for thermally developed duct flows", Technical notes, Journal of Heat Transfer, vol. 99, pp. 483-485, August 1977.

65.-R. E. Johnk and T. J. Hanratty, "Temperature profiles for turbulent flow of air in a pipe-I. The fully developed heat - transfer region", Chemical Engineering Science, vol. 17, pp. 867-879, 1962.

66.-R. E. Johnk and T. J. Hanratty, "Temperature profiles for turbulent flow of air in a pipe-II. The thermal entrance region", Chemical Engineering Science, vol. 17, pp. 881-892, 1962.

67.-B. A. Kader, "Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers", Shorter communications, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 24, No. 9, pp. 1541-1544, 1981.

68.-Stockburger, D., "Der Wärmeaustausch zwischen einer Rohrwand und einem turbulent strömenden Gas - Feststoff - Gemisch, (Heat transmission between a tube wall and a turbulently flowing gas-solids mixture (flying dust)", Düsseldorf: VDI Verlag, (VDI-Forschungsheft 518), 1966.

69.-R. Pfaffer, S. Rosseti and S. Lieblein, "Analysis and correlation of heat-transfer coefficient and friction factor data for dilute gas-solid suspensions", NASA Technical Note D - 3603, Washington, D.C., September 1966.

70.- K. Bremhorst and K. J. Bullock, "Spectral measurements of temperature and longitudinal velocity fluctuations in fully developed pipe flow", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 13, pp. 1313-1329, 1970.

71.-B. A. Kader, A. M. Yaglom, "Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, pp. 2329-2351, 1972.

72.-L. Farbar and C. A. Depew, "Heat transfer effects to gas - solids mixtures using solid spherical particles of uniform size", I and E C Fundamentals, vol. 2, No. 2, pp. 130-135, May 1963.

73.-K. S. Han, H. J. Sung, and M. K. Chung, "Analysis of heat transfer in a pipe carrying two-phase gas-particle suspension", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 34, No. 4, pp. 69-78, 1991.

74.-C. L. Tien, "Heat transfer by a turbulently flowing fluid-solids mixture in a pipe", Trans. ASME, Series C, J. Heat Transfer, 83, pp. 183-188, May 1961.

- 75.-L. Farbar and M. J. Morley, "Heat transfer to flowing gas-solids mixtures in a circular tube", Industrial and Engineering Chemistry, vol. 49, No. 7, July 1957.
- 76.-V. S. Nosov and N. I. Syromyatnikov, "Laws of heat loss for finely dispersed flows", Soviet physics - Doklady, vol.10, No. 7, January, 1966.
- 77.-G. T. Wilkinson and J. R. Norman, "Heat transfer to a suspension of solids in a gas", Trans. Instn Chem. Engrs, Vol. 45, 1967.
- 78.-A. A. Shrayber, "Turbulent heat transfer in pipe flows of gas-conveyed solids", Heat Transfer- Soviet Research, vol. 8, No.3, May-June 1976.
- 79.-G. Jepson, A. Poll, W. Smith, "Heat transfer from gas to wall in a gas/solids transport line", Trans. Instn Chem. Engrs, vol. 41, 1963.
- 80.-R. G. Boothroyd and H. Haque, "Fully developed heat transfer to a gaseous suspension of particles flowing turbulently in ducts of different size", Journal Mechanical Engineering Science, vol. 12, No. 3, 1970.
- 81.-R. G. Boothroyd and H. Haque, "Experimental investigation of heat transfer in the entrance region of a heated duct conveying fine particles", Trans. Instn Chem. Engrs, vol. 48, 1970.
- 82.-R. S. Kane, R. Pfeffer, "Heat transfer in gas-solids drag - reducing flow", Transac. ASME, Journal of Heat Transfer, vol. 107, August 1985.
- 83.-E. E. Michaelides, "Heat transfer in particulate flows", Int. J. Heat Mass Transfer, vol.29, No. 2, pp. 265-273, 1986.
- 84.-Kays, W. M., Moffat, R. J., 1975, "The Behaviour of Transpired Turbulent Boundary Layers", in Studies in Convection, ed. B.E. Launder, vol.1.
- 85.-Laufer J. "The structure of turbulence in fully developed pipe flow", National Bureau of Standards, report 1174, 1954.
- 86.-K. Bremhorst, T. B. Walker, "Spectral measurements of turbulent momentum transfer in fully developed pipe flow", J. Fluid Mech., 1973, vol. 61, part 1
- 87.- R. Avila and J. Cervantes, "Numerical calculation of the heat transfer coefficient in a turbulent particle pipe flow", Proceedings of the 6th International Symposium on Transport Phenomena (ISTP-6), May 9-13, 1993, Seoul, Korea.

.-APENDICE A

DERIVACION DE LAS ECUACIONES DE LOS ESFUERZOS TURBULENTOS (ESFUERZOS DE REYNOLDS).

A continuación se desarrollan los pasos establecidos en el capítulo 3 para derivar las ecuaciones de los esfuerzos de Reynolds $\rho \overline{u_i' u_j'}$. Como se mencionó en ese capítulo el fluido se considera que tiene las siguientes características:

.- Densidad constante.

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{A.1})$$

.- Newtoniano.

$$\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (\text{A.2})$$

.-La ecuación instantánea de cantidad de movimiento en la dirección i , se escribe como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left((\bar{u}_i + u_i')(u_k' + u_k') \right) = & - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) + \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

.-Ecuación de cantidad de movimiento en la dirección i , promediada en el tiempo.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{(u_i u_k + u_i' u_k')} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (\text{A.4})$$

donde:

$\nu [m^2/s] =$ viscosidad cinemática del fluido.

.-Restar la ecuación (A.4) de (A.3) resulta en la ecuación de transporte para u'_i , es decir:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} \quad (A.5)$$

.-Multiplicación de (A.5) por u'_j resulta en:

$$u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_j \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_j u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + u'_j u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} + u'_j \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} \quad (A.6)$$

.-De manera análoga puede derivarse la ecuación de transporte para u'_j multiplicada por u'_i .

$$u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t} + u'_i \bar{u}_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_i u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + u'_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k} + u'_i \frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_k} \quad (A.7)$$

.-Sumando las ecuaciones (A.6) y (A.7) y realizando el promedio estadístico en el tiempo, se obtienen las ecuaciones de transporte de los términos $\overline{u'_i u'_j}$:

$$\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_k \left(u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right)} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} = - \overline{u'_j \frac{\partial (p'/\rho)}{\partial x_i}} - \overline{u'_i \frac{\partial (p'/\rho)}{\partial x_j}} + \nu \left(\overline{u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k}} \right) \quad (A.8)$$

En (A.8) pueden aglomerarse términos si se toma en consideración lo siguiente:

$$I.- \quad \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t}$$

$$II.- \quad \overline{u'_k \left(u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right)} = \overline{u'_k \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_k}}$$

$$III.- \quad \frac{\partial \overline{(u'_i u'_j u'_k)}}{\partial x_k} = \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_j u'_k}{\partial x_k}} = \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}}$$

$$IV.- \quad \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{(u'_j p')}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{(u'_i p')}}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} + \overline{p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right)$$

$$V.- \quad \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \right) = \overline{u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}} + 2 \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k}}$$

Sustituyendo las relaciones (I-V) en (A.8), se obtiene la ecuación de transporte de los esfuerzos de Reynolds, la cual para flujos en estado estacionario se escribe como:

$$\overline{u'_k \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_k}} = - \frac{\partial \overline{(u'_i u'_j u'_k)}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{(u'_j p')}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{(u'_i p')}}{\partial x_j} \right) -$$

A

B

$$\begin{aligned}
& - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) + \\
& \qquad \qquad \qquad \text{C} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{D} \\
& + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2 \nu \frac{\partial \overline{u'_i} \partial u'_j}{\partial x_k \partial x_k} \qquad \qquad \qquad \text{(A.9)} \\
& \qquad \qquad \qquad \text{E} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{F}
\end{aligned}$$

Donde los diferentes términos pueden identificarse como :

A = Convección por el movimiento del fluido.

B = Transporte turbulento o difusión turbulenta (mediante las fluctuaciones de presión y velocidad).

C = Producción debido a la interacción con el flujo medio.

D = Correlación "Presión - Deformación" .

E = Difusión viscosa (molecular).

F = Disipación viscosa.

.-APENDICE B

LEY LOGARITMICA DE VELOCIDAD PARA FLUJO TURBULENTO CERCA DE UNA PARED SOLIDA.

La forma general de la ley logarítmica de la pared (de velocidad) se obtiene al considerar el movimiento turbulento de un fluido incompresible ($\rho = \text{cte}$), el cual se desplace en dirección paralela a

una superficie sólida ($\bar{v} = 0$) y que no presenta variación de la presión en la dirección del flujo ($dp/dx=0$). Con estas consideraciones, las ecuaciones de conservación para un flujo turbulento en capa límite ecs.(2.6-8, 2.6-9), se escriben como:

Ecuación de continuidad :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Ecuación de cantidad de movimiento en x :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{u'v'} \right) = 0 \quad (\text{B.2})$$

En la ecuación (B.2) se ha considerado además que no existen términos fuente y que las fuerzas de cuerpo son despreciables. En esta última expresión también puede observarse que la variación de cantidad de movimiento con respecto al tiempo y por unidad de superficie proveniente de la pared es una constante, en otras palabras, el esfuerzo cortante motivado por la acción de la viscosidad molecular y el movimiento turbulento es una constante en la dirección normal a la pared.

$$\tau_0 = \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{u'v'} = \text{cte} \quad (\text{B.3})$$

Para determinar la forma de la distribución de velocidad $\bar{u}(y)$, bajo las consideraciones arriba establecidas, se recurre al análisis dimensional, para lo cual se reconoce que las características del flujo a cierta distancia "y" de la pared dependen únicamente de :

- .- el esfuerzo cortante τ_0
- .- la distancia "y"
- .- la viscosidad cinemática ν

Si se define una escala de velocidad del fluido en la región cercana a la pared como:

$$\bar{u}_\tau = \left(\tau_0 / \rho \right)^{1/2} \quad (\text{B.4})$$

donde: \bar{u}_τ [m/s] = velocidad de fricción

y adicionalmente se combinan los parámetros y , \bar{u}_τ , ν en la relación adimensional:

$$y^+ = \left(\frac{\bar{u}_\tau y}{\nu} \right) \quad (\text{B.5})$$

donde: y^+ [] = distancia adimensional

A partir de las definiciones de \bar{u}_τ , y^+ puede decirse que la forma general de la distribución de la velocidad media en la región cercana a una pared sólida, satisface la expresión :

$$\bar{u}(y) = \bar{u}_\tau f(y^+) \quad (\text{B.6})$$

o equivalentemente :

$$u^+ = f(y^+) \quad (\text{B.7})$$

donde: u^+ [] = \bar{u} / \bar{u}_τ = velocidad adimensional.

La última expresión en la teoría de la turbulencia es conocida como la ley universal de la pared.

La forma de esta ley ha sido determinada para varias situaciones de flujo, sin embargo en el presente trabajo se ha utilizado la expresión de la ley de la pared válida para un flujo sobre una pared lisa.

La expresión para la función $f(y^+)$ puede ser encontrada de manera explícita para dos casos límite :

- .-para valores pequeños de y^+ (subcapa viscosa).
- .-para valores grandes de y^+ (región turbulenta).

Debido a que el último punto de integración en el procedimiento numérico utilizado se encuentra en la región turbulenta ($y_c^+ = u_\tau y_c / \nu > 30$), se encontrará la expresión de la distribución de velocidad en la región en donde el esfuerzo cortante (constante) es :

$$\tau_0 = -\rho \overline{u'v'} \quad (\text{B.8})$$

es decir el efecto de la viscosidad molecular es despreciable:

$$\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0$$

Recurriendo al análisis dimensional, se reconoce que el gradiente de la velocidad media en la región turbulenta, es independiente de la viscosidad ν y que es una función de los parámetros " y ", \bar{u}_τ , por lo que la relación :

$$\frac{d \bar{u}(y)}{d y} = A \frac{\bar{u}_\tau}{y} \quad (B.9)$$

debe satisfacerse.

donde : $A =$ es una constante adimensional.

La solución de la expresión anterior es:

$$\bar{u}(y) = A \bar{u}_\tau \ln y + A_1 \quad (B.10)$$

donde: $A_1 =$ constante de integración .

La región de fluido en la cual se satisface la ecuación anterior se le conoce como capa logarítmica o capa límite logarítmica.

Si se comparan las ecs. (B.6) y (B.10) se observa que la constante A_1 debe tener la forma:

$$A_1 = A \bar{u}_\tau \ln (\bar{u}_\tau / \nu) + \bar{u}_\tau B \quad (B.11)$$

donde : $B =$ es una constante adimensional.

Sustituyendo la ec. (B.11) en (B.10), se tiene:

$$\bar{u}(y) = A \bar{u}_\tau \ln(y) + A \bar{u}_\tau \ln (\bar{u}_\tau / \nu) + \bar{u}_\tau B$$

Esta expresión se escribe también como:

$$\bar{u}(y) = \bar{u}_\tau (A \ln y + B) \quad (B.12)$$

Esta misma ecuación puede escribirse para un punto y_c que se encuentra localizado en la región logarítmica ($y^+ > 30$) como :

$$\bar{u}_c = \bar{u}_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y_c}{\nu} \bar{u}_\tau \right) + B \right) \quad (B.13)$$

donde:

$\kappa = 1/A = 0.41 =$ constante de Von Karman (empírica).

$B = 5.2 =$ constante empírica.

La ecuación (B.13) representa la condición de frontera para la solución de la ecuación diferencial de cantidad de movimiento en la dirección x ec. (2.6-9).

.-APENDICE C.

LEY LOGARITMICA DE TEMPERATURA PARA FLUJO TURBULENTO CERCA DE UNA PARED SOLIDA.

Al igual que para el desarrollo de la ley logarítmica de velocidad, en este apéndice, se considera un flujo plano paralelo a una pared sólida ($\bar{v} = 0$), con gradiente de presión en la dirección longitudinal despreciable. Adicionalmente se considera un flujo de baja velocidad (No. de Eckert pequeño), con propiedades termofísicas constantes, sin términos fuente y fuerzas de cuerpo despreciables.

Si la ecuación de la entalpía total para un flujo turbulento ec.(2.6-10), se adimensionaliza tomando en cuenta las suposiciones anteriores y utilizando las siguientes variables adimensionales;

$$\bar{u}^* = \frac{\bar{u}}{u_e} \quad \bar{\rho}^* = \frac{\bar{\rho}}{\rho_e} \quad x^* = \frac{x}{L}$$

$$\bar{v}^* = \frac{\bar{v}}{u_e} \quad \bar{H}^* = \frac{\bar{H} - \bar{H}_e}{\bar{H}_s - \bar{H}_e} \quad y^* = \frac{y}{L}$$

$$\overline{h'v'}^* = \frac{\overline{h'v'}}{u_e (\bar{H}_s - \bar{H}_e)} \quad \overline{u'v'}^* = \frac{\overline{u'v'}}{u_e u_e}$$

(C.1)

donde el subíndice e, se refiere a un punto en particular, se llega a la expresión:

$$\bar{\rho}^* \bar{u}^* \frac{\partial \bar{H}^*}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial \bar{H}^*}{\partial y^*} - \bar{\rho}^* \overline{(h'v')}^* \right) + \bar{u}^* \left(\left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{E}{\text{Re}_L} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y^*} - E \bar{\rho}^* \overline{(u'v')}^* \right)$$

(C.2)

donde :

$Re_L [] =$ Número de Reynolds basado en la longitud

$$= \frac{\rho_e \bar{u}_e L}{\mu}$$

$$E [] = \text{Número de Eckert} = \frac{\bar{u}_e^{-2}}{c_p (T_s - T)}$$

Cerca de una pared sólida sin movimiento, la velocidad media es muy baja por lo que los términos que incluyen el número de Eckert son despreciables. Es conveniente hacer notar que para valores de Eckert pequeños es válida la siguiente expresión :

$$\frac{\partial H}{\partial y} \approx \frac{\partial h}{\partial y} \quad (C.3)$$

Si la entalpía total (temperatura) de la superficie, es constante en la dirección x ;

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} = 0 \quad (C.4)$$

Utilizando (C.3) y (C.4) la ecuación (C.2) se escribe en forma dimensional como:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{h'v'} \right) = 0 \quad (C.5)$$

Esta última expresión establece que la variación de la energía térmica con respecto al tiempo por unidad de superficie, proveniente de una pared es una constante, es decir que el flujo de energía por unidad de área motivado por la actividad molecular y el movimiento turbulento es constante en la dirección normal a la pared.

$$\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{h'v'} = -q_s = \text{cte.} \quad (C.6)$$

donde:

$q_s [\text{w/m}^2] =$ flujo de calor por unidad de área proveniente de la superficie.

Para modelar el término $\overline{\rho h'v'}$ se recurre al principio de la difusividad térmica turbulenta α_t , el cual considera que el flujo de calor inducido por el movimiento turbulento en cierta dirección, es proporcional al gradiente de la entalpía media en la misma dirección.

$$-\overline{\rho h'v'} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{d\bar{H}}{dy} \approx \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{d\bar{h}}{dy} \quad (C.7)$$

donde :

$$Pr_t [] = \text{Número de Prandtl turbulento} = \frac{\nu_t}{\alpha_t}$$

$$\alpha_t [m^2/s] = \text{Difusividad térmica turbulenta} = \frac{k_t}{\rho c_p}$$

$$k_t [W/m k] = \text{Conductividad térmica turbulenta}$$

En la sección 4.1.3 se hace referencia a que mediciones llevadas a cabo en la región dominada por los efectos turbulentos (región en donde la distribución de velocidades es logarítmica), la correlación cruzada de las fluctuaciones de velocidad ($\overline{u'v'}$) es igual al cuadrado de la velocidad de fricción, es decir.

$$\overline{u'v'} = u_\tau^2 \quad (C.8)$$

Por lo que al utilizar esta última expresión junto con las ecuaciones (3.4-6) y (B.4), en la ec.(C.7) se tiene:

$$-\overline{\rho h'v'} = \frac{\tau_o}{Pr_t} \frac{d\bar{H} / dy}{d\bar{u} / dy} \quad (C.9)$$

En la región turbulenta y para Números de Prandtl $.5 < Pr < 5$, la difusión de energía inducida por el movimiento molecular es pequeña en relación al transporte de energía motivada por las fluctuaciones de turbulencia. Por lo que el primer término de la izquierda de la ec.(C.6) se desprecia, quedando:

$$-\frac{\tau_o}{Pr_t} \frac{d\bar{H}}{dy} = q_B \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (C.10)$$

eliminando las diferenciales se escribe :

$$-\frac{\tau_0}{Pr_t} (\bar{H} - \bar{H}_B) = q_B \bar{u} \quad (C.11)$$

Al hacer uso de las definiciones de \bar{u}^+ y de \bar{u}_r , la última expresión se escribe como:

$$\bar{H}^+ = Pr_t \bar{u}^+ \quad (C.12)$$

donde :

$$\bar{H}^+ = \frac{(\bar{H} - \bar{H}_B) (\tau_B \rho)^{1/2}}{-q_B} \quad (C.13)$$

Si se sustituye en la ecuación (C.12), la distribución logarítmica de la velocidad media ec.(B.13), se tiene:

$$\bar{H}^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \ln y^+ + Pr_t B \quad (C.14)$$

Esta ecuación normalmente se escribe en la literatura considerando la temperatura adimensional \bar{T}^+ , es decir:

$$\bar{T}^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \ln y^+ + Pr_t B \quad (C.15)$$

donde:

$$\bar{T}^+ = \frac{\rho c_p (\bar{T} - \bar{T}_B) \bar{u}_r}{-q_B} \quad (C.16)$$

Esta última expresión se obtuvo al multiplicar y dividir la ec. (C.13) por $\tau_s^{1/2}$.

En este trabajo se ha utilizado un valor empírico del Pr_t , el cual corresponde a 0.86, ref./84/. La constante $Pr_t B$, de la ec.(C.15) se ha tomado igual a 3.8 ref./71/. Entonces la distribución de la temperatura media (entalpía total), en la región logarítmica cercana a una pared sólida es:

$$\bar{H}^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \ln y^+ + 3.8 \quad (C.17)$$

.-APENDICE D

CONDICION DE FRONTERA PARA LA ECUACION DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTO.

La condición de frontera de K puede ser definida al hacer uso del mismo análisis dimensional y consideraciones físicas que condujeron a la ley universal de la pared y al concepto de una capa límite logarítmica (ver apéndices B y C).

Las fluctuaciones de velocidad en el interior de la zona en donde el esfuerzo es constante ($\tau_0 = \text{cte}$), dependen entonces de los parámetros \bar{u}_τ , ν , y. Es decir su ley de variación quedará representada por el producto de la velocidad de fricción y de una función particular de la distancia adimensional $f(y^+)$. Para valores grandes de y^+ , es decir en la región en donde los efectos de la viscosidad son despreciables, el régimen estadístico de las fluctuaciones de velocidad no depende de la viscosidad ν , por lo que las funciones de la distancia adimensional $f(y^+)$ tienden a un valor constante conforme $y \rightarrow \infty$.

Para ilustrar lo anterior, se tomarán las fluctuaciones de velocidad u' , v' , w' , $u'v'$, en un punto, por lo que se tienen cuatro leyes de variación de la forma:

$$\sigma_u = (\bar{u}'^2)^{1/2} = \bar{u}_\tau f_1(y^+) \quad (D.1)$$

$$\sigma_v = (\bar{v}'^2)^{1/2} = \bar{u}_\tau f_2(y^+) \quad (D.2)$$

$$\sigma_w = (\bar{w}'^2)^{1/2} = \bar{u}_\tau f_3(y^+) \quad (D.3)$$

$$-\overline{u'v'} = \bar{u}_\tau^2 f_4(y^+) \quad (D.4)$$

Debido a que en el interior de la capa logarítmica $\tau_0 = -\rho \overline{u'v'}$, la función $f_4(y^+)$ es igual a la unidad (valor empírico), es decir:

$$f_4(y^+) = -\frac{\overline{u'v'}}{\bar{u}_\tau \bar{u}_\tau} = -\frac{\overline{u'v'}}{(\tau_0/\rho)} = -\frac{\bar{\rho} \overline{u'v'}}{\tau_0}$$

entonces :

$$f_4(y^+ \rightarrow \infty) = -\frac{\overline{u'v'}}{\overline{u}_\tau \overline{u}_\tau} = 1 = A_4 \quad (D.5)$$

Las otras funciones satisfacen :

$$f_1(y^+ \rightarrow \infty) = -\frac{(\overline{u'}^2)^{1/2}}{\overline{u}_\tau} = A_1 \quad (D.6)$$

$$f_2(y^+ \rightarrow \infty) = -\frac{(\overline{v'}^2)^{1/2}}{\overline{u}_\tau} = A_2 \quad (D.7)$$

$$f_3(y^+ \rightarrow \infty) = -\frac{(\overline{w'}^2)^{1/2}}{\overline{u}_\tau} = A_3 \quad (D.8)$$

La forma exacta de las funciones $f_1 \dots f_4$, no puede ser determinada teóricamente, sin embargo, a partir de datos experimentales ref./37,85,86/, se ha establecido el valor de las constantes en la región logarítmica .

$$A_1 = 2.3 \quad , \quad A_2 = 0.9 \quad , \quad A_3 = 1.7$$

Un aspecto de mucha importancia en la teoría de la turbulencia es el hecho de que en la región logarítmica los esfuerzos turbulentos normales $\overline{u'}^2$, $\overline{v'}^2$ y $\overline{w'}^2$, permanecen constantes, ésto se deduce de las ecuaciones (D.6-D.8) al considerar $\overline{u}_\tau = (\tau_0/\rho)^{1/2} = \text{cte}$. Esto implica necesariamente que la energía cinética turbulenta ($K=1/2 \{ \overline{u'}^2 + \overline{v'}^2 + \overline{w'}^2 \}$), sea una constante por lo que su variación en la dirección normal a la superficie sólida es cero, es decir :

$$\frac{\partial K}{\partial y} = 0 \quad (D.9)$$

Por lo que se concluye entonces que en la región en donde la ley de variación de la velocidad media es logarítmica ($y^+ > 30$), no existe difusión de energía turbulenta.

Al tomar en consideración lo anterior, la ecuación de la energía cinética turbulenta (K), ec.(3.4-8), puede ser formulada para un fluido incompresible, con movimiento turbulento completamente desarrollado, que se desplaza en dirección paralela a una superficie sólida, como :

$$\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \epsilon \quad (\text{D.10})$$

Esta expresión es de mucha importancia, ya que establece que en el interior de la región logarítmica, existe equilibrio local, por tanto; la producción de energía turbulenta es igual a la cantidad de energía disipada por los efectos viscosos.

A esta misma conclusión han llegado diversos trabajos experimentales, particularmente Laufer, ref./85/ establece que en la región logarítmica, las estructuras turbulentas en un flujo completamente desarrollado en el interior de un ducto están en equilibrio local.

Si en la ec.(D.10) se sustituye la ec.(3.4-7) :
queda :

$$\epsilon = c_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{D.11})$$

Por otro lado si en la ecuación (3.4-6) se sustituye la ec.(3.4-7) y se eleva al cuadrado, se tiene:

$$(-\overline{u'v'})^2 = c_\mu^2 \frac{K^4}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{D.12})$$

Sustituyendo (D.11) en (D.12) se llega a la relación :

$$(-\overline{u'v'})^2 = c_\mu K^2 \quad (\text{D.13})$$

Al sustituir la ec.(D.5), en (D.13), se llega a la conclusión de que en un punto y_c localizado en la región logarítmica, el valor de K (condición de frontera) es:

$$K_c = \frac{\bar{u}^2}{c_\mu^{1/2}} \quad (\text{D.14})$$

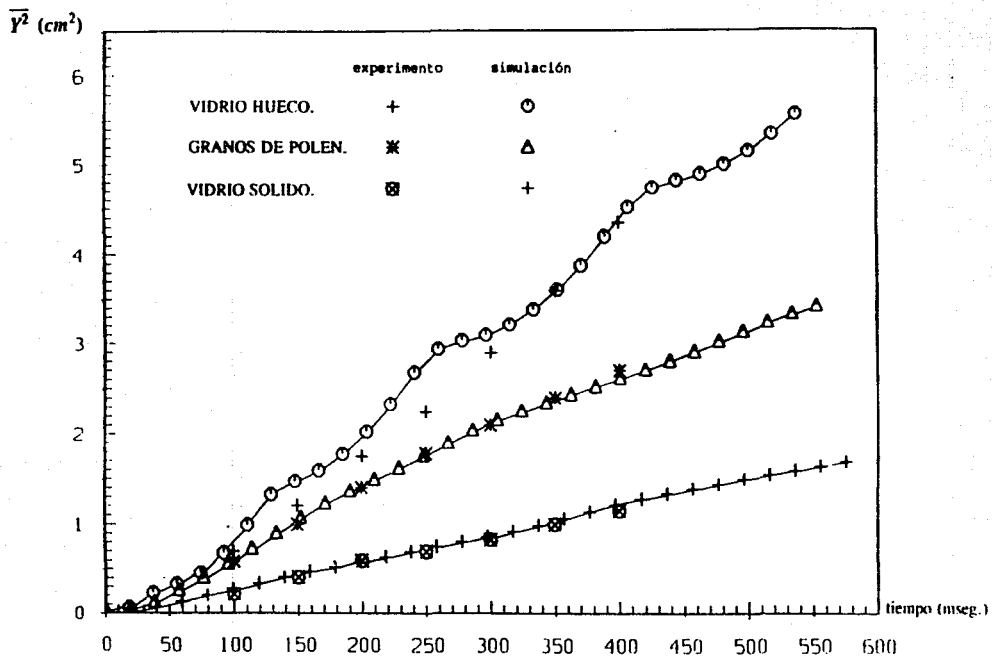


FIG.1 SIMULACION DEL EXPERIMENTO DE SNYDER Y LUMLEY REF./147

(vidrio hueco $d_p = 46.5 \mu\text{m}$, vidrio sólido $d_p = 87.0 \mu\text{m}$, granos de polen $d_p = 87.0 \mu\text{m}$).

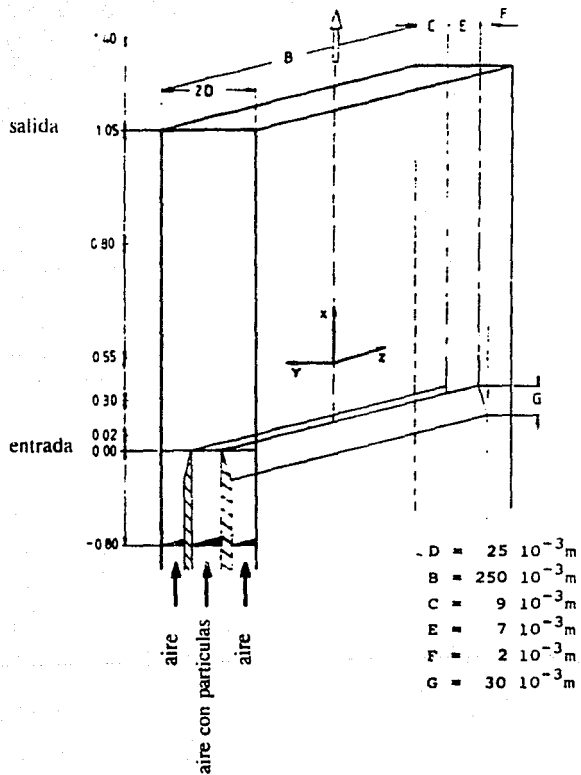


FIG.2 SECCION DE PRUEBAS DEL EXPERIMENTO DE MANERO ET.AL., REF./58/

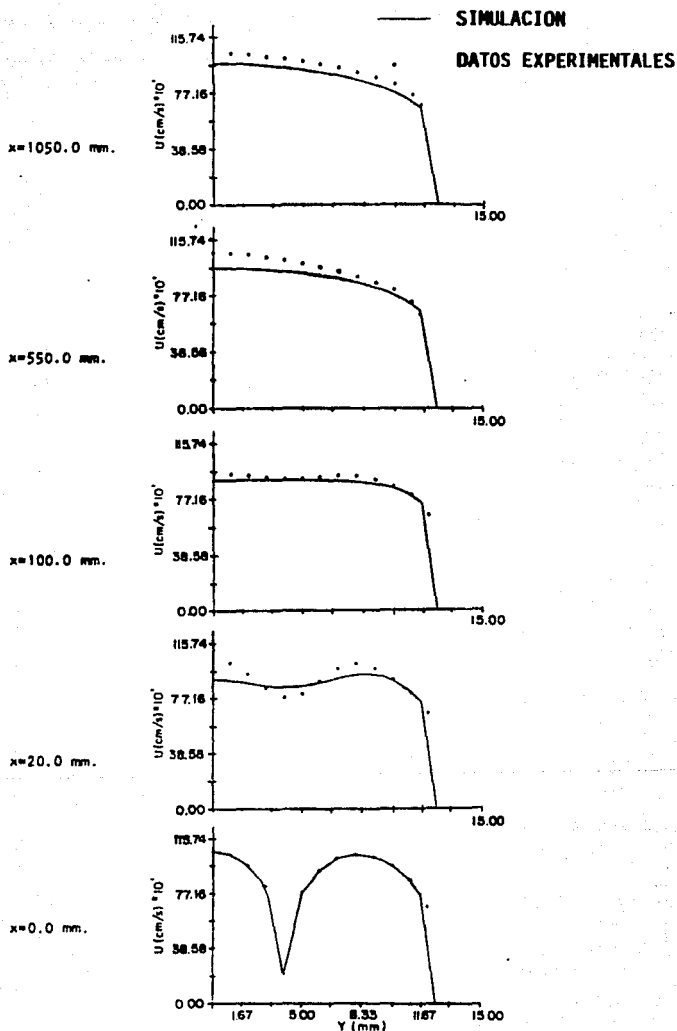


FIG.3 VARIACION DE LA VELOCIDAD MEDIA DE LA FASE GASEOSA A LO LARGO DEL CANAL.

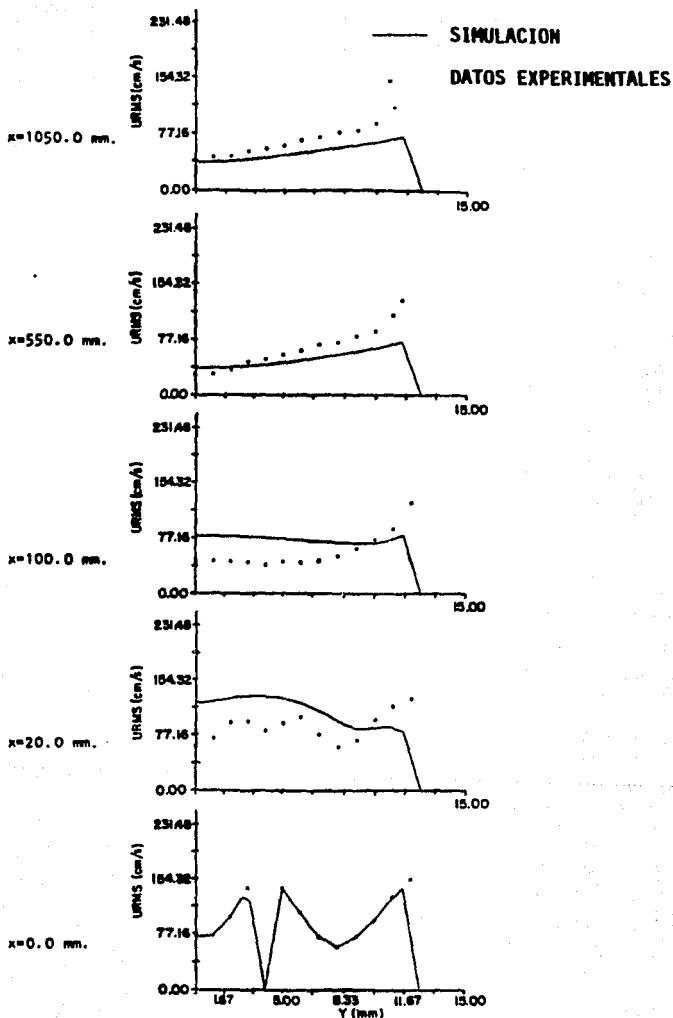


FIG.4 VARIACION DE URMS DE LA FASE GASEOSA A LO LARGO DEL CANAL.

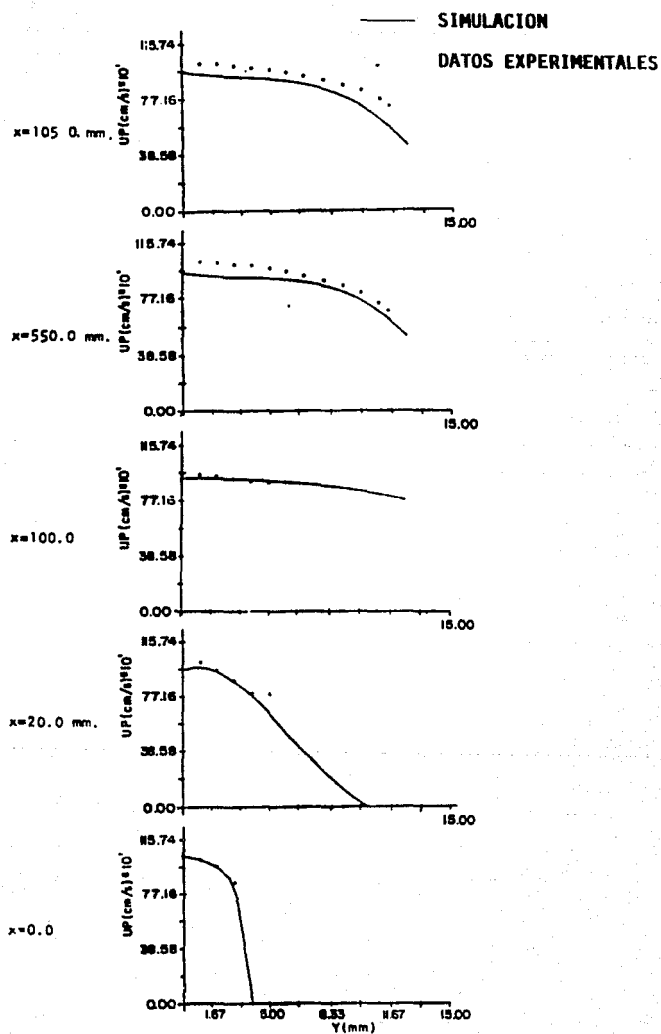


FIG.5 VARIACION DE LA VELOCIDAD MEDIA DE LA FASE SOLIDA A LO LARGO DEL CANAL.

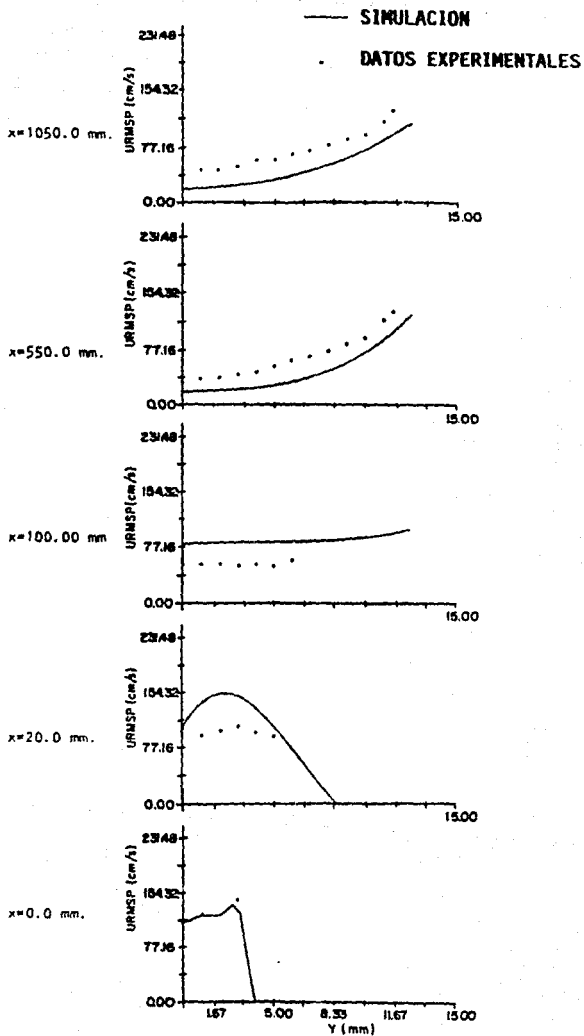


FIG.6 VARIACION DE URMS DE LA FASE SOLIDA A LO LARGO DEL CANAL.

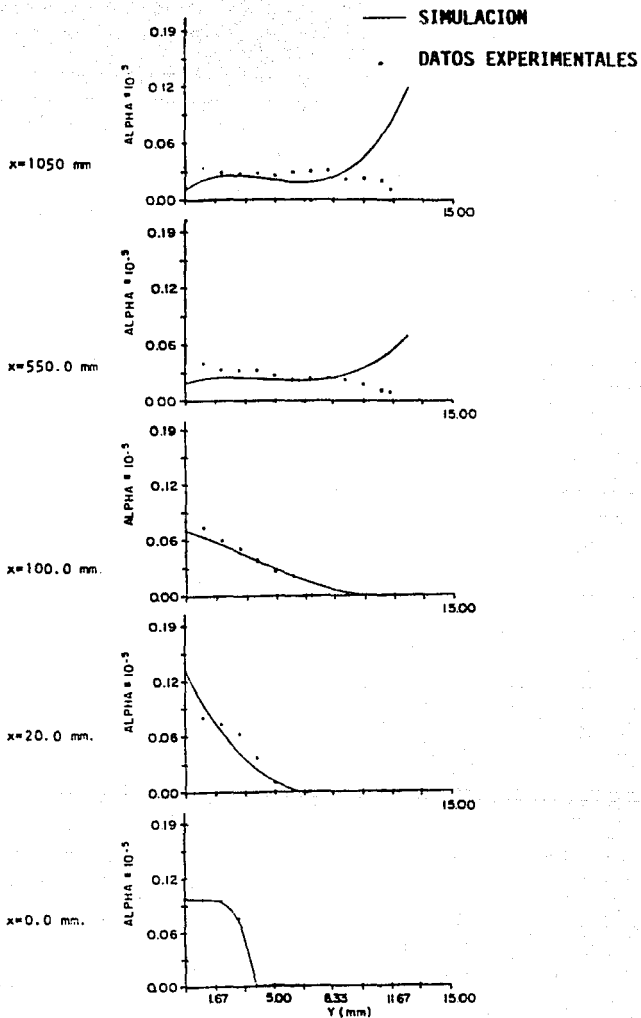


FIG.7 VARIACION DE LA FRACCION DE VOLUMEN DE LA FASE SOLIDA A LO LARGO DEL CANAL.

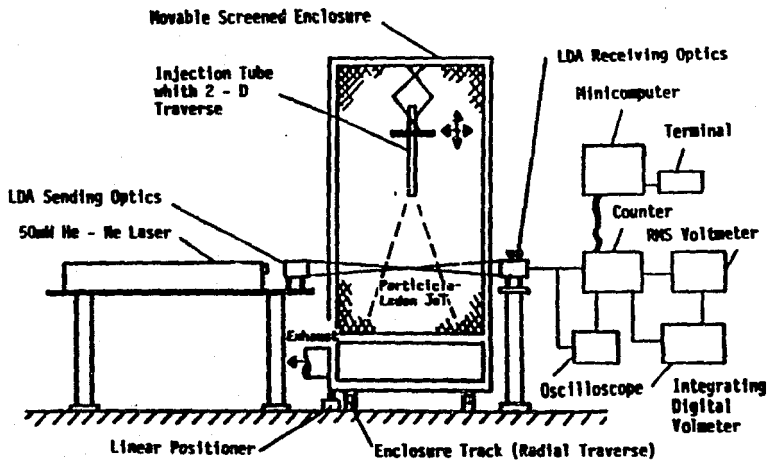


FIG.8 EXPERIMENTO DE SHUEN ET.AL., REF./271.

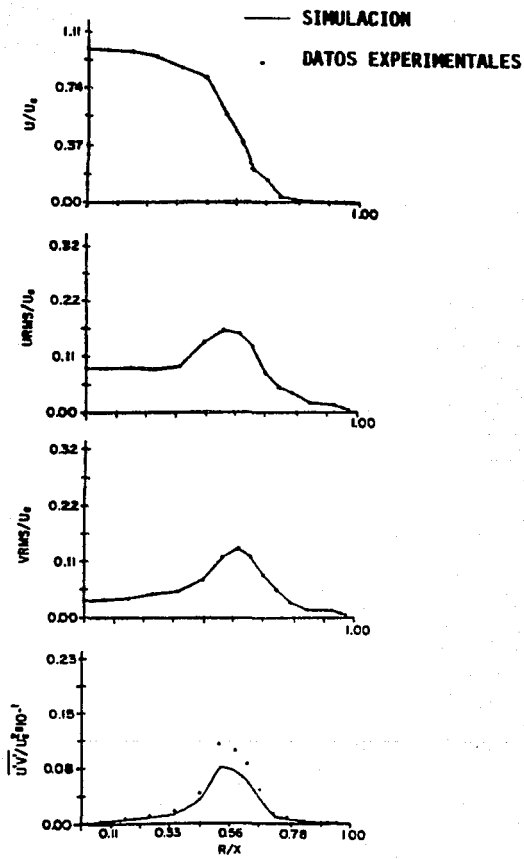


FIG.9 VARIACION RADIAL DE LA VELOCIDAD MEDIA Y CARACTERISTICAS TURBULENTAS DE LA FASE GASEOSA (X/D= 1).

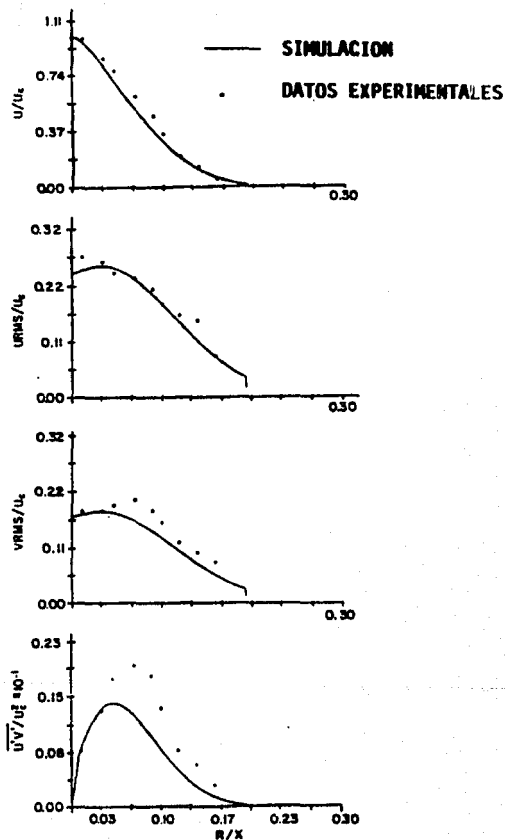


FIG.10 VARIACION RADIAL DE LA VELOCIDAD MEDIA Y CARACTERISTICAS TURBULENTAS DE LA FASE GASEOSA ($X/D = 30$).

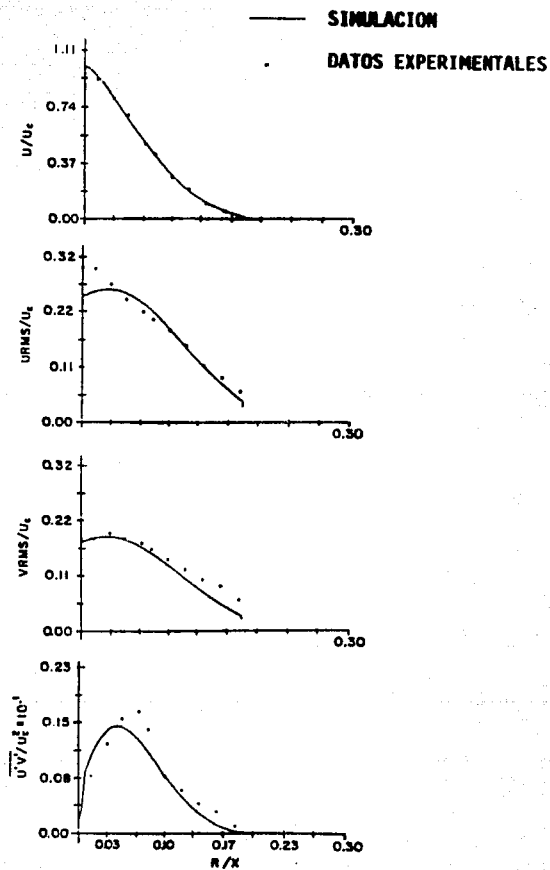


FIG.11 VARIACION RADIAL DE LA VELOCIDAD MEDIA Y CARACTERISTICAS TURBULENTAS DE LA FASE GASEOSA ($X/D = 40$).

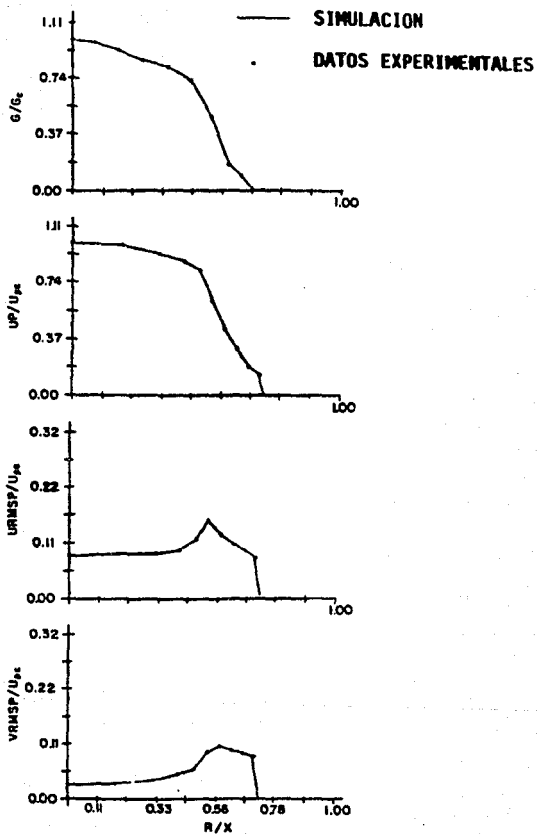


FIG.12 VARIACION RADIAL DE LA VELOCIDAD MEDIA Y CARACTERISTICAS TURBULENTAS DE LA FASE SOLIDA ($X/D = 1$).

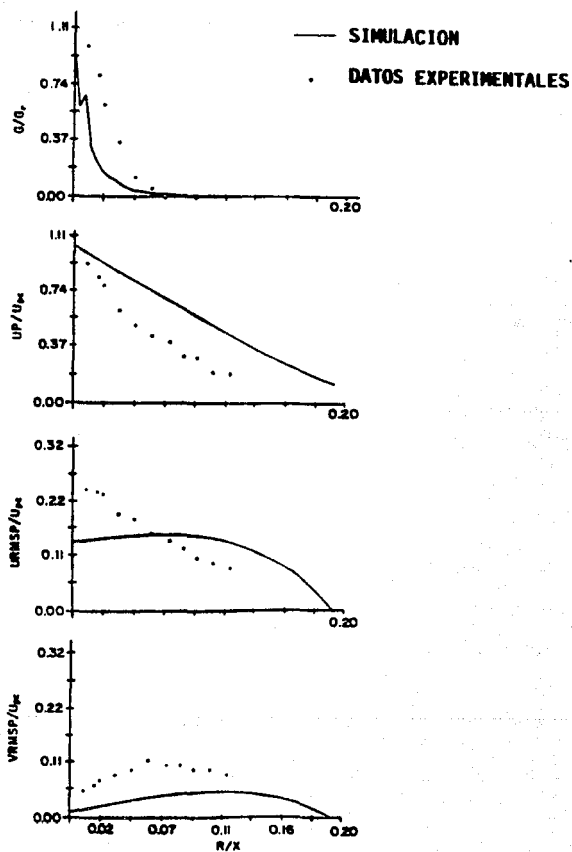


FIG.13 VARIACION RADIAL DE LA VELOCIDAD MEDIA Y CARACTERISTICAS TURBULENTAS DE LA FASE SOLIDA (X/D = 20).

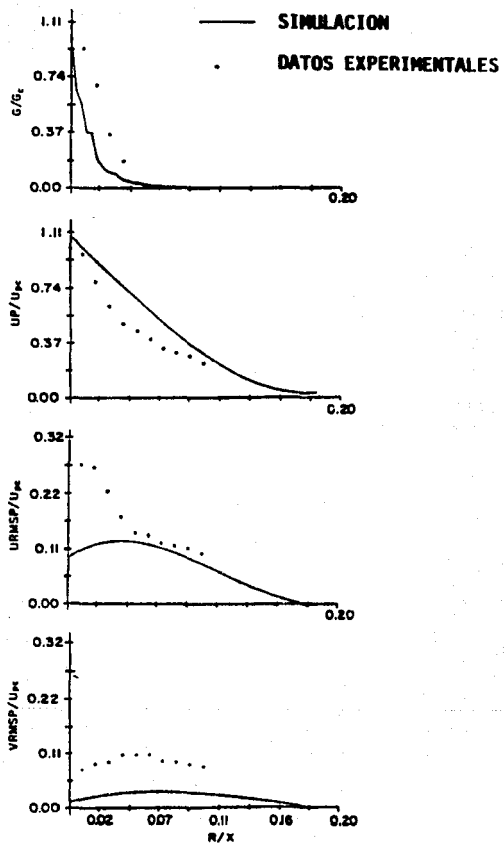


FIG.14 VARIACION RADIAL DE LA VELOCIDAD MEDIA Y CARACTERISTICAS TURBULENTAS DE LA FASE SOLIDA ($X/D= 40$).

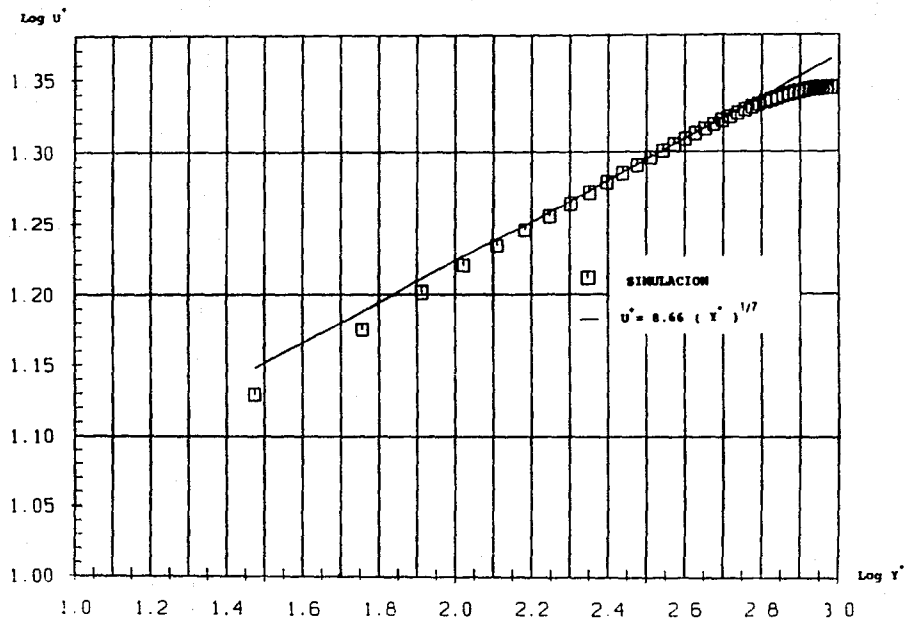


FIG. 15 DISTRIBUCION RADIAL DE LA VELOCIDAD ADIMENSIONAL. $Re = 35,000$
(REGION DE COMPLETO DESARROLLO EN VELOCIDAD).

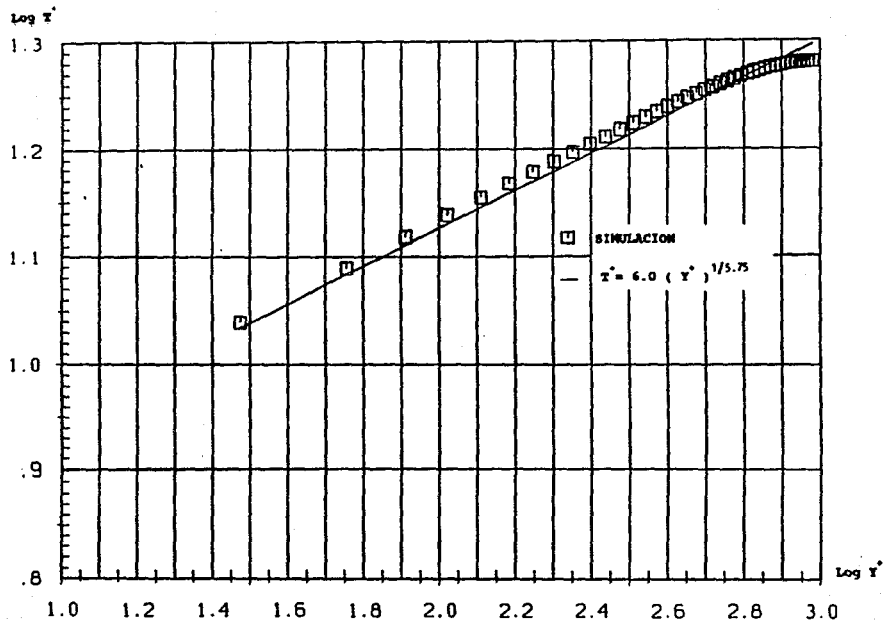


FIG.16 DISTRIBUCION RADIAL DE LA TEMPERATURA ADIMENSIONAL, $Re = 35,000$
 (REGION DE COMPLETO DESARROLLO EN TEMPERATURA).

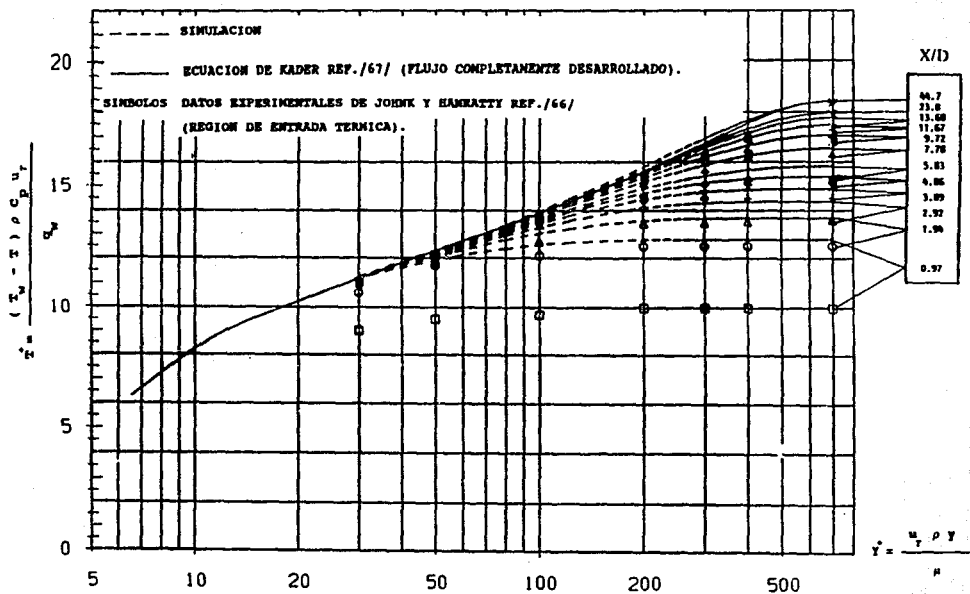


FIG.17 PERFILES DE LA TEMPERATURA ADIMENSIONAL, $Re = 24,900$
 (REGION DE ENTRADA TERMICA).

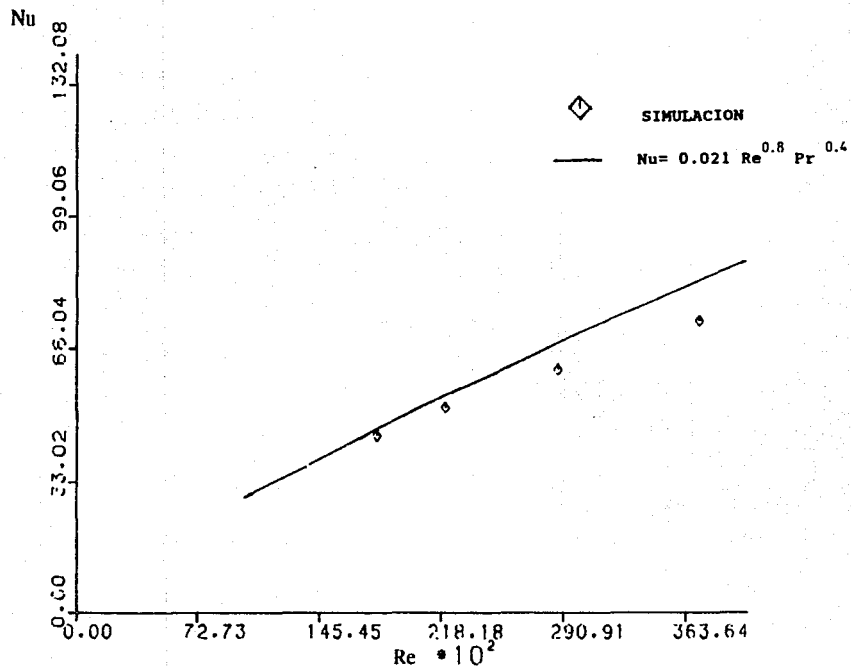


FIG.18 NUMERO DE NUSSOLT vs. NUMERO DE REYNOLDS
(REGION DE FLUJO COMPLETAMENTE DESARROLLADO).

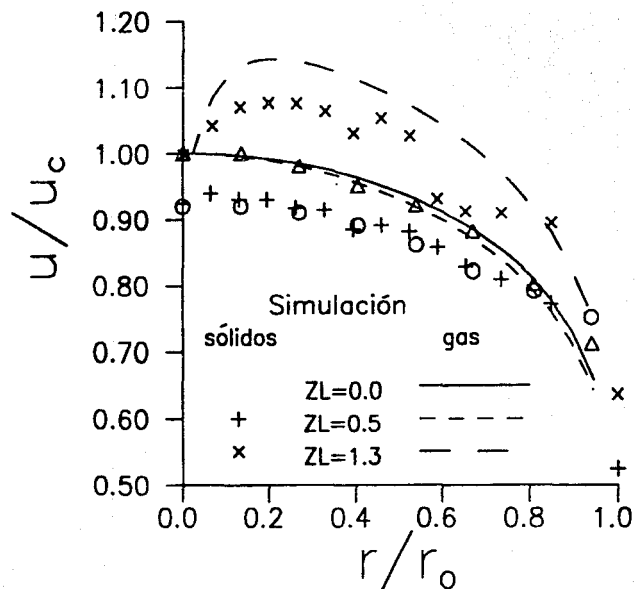


Fig.19 Velocidad media de la fase continua y de la fase sólida para diversas relaciones ZL.

(Experimento de Tsuji et. al., $d_p = 200 \text{ E}-06 \text{ m}$, $Re_p = 2.1E04$, $ZL=1.3$, Δ gas, O sólidos).

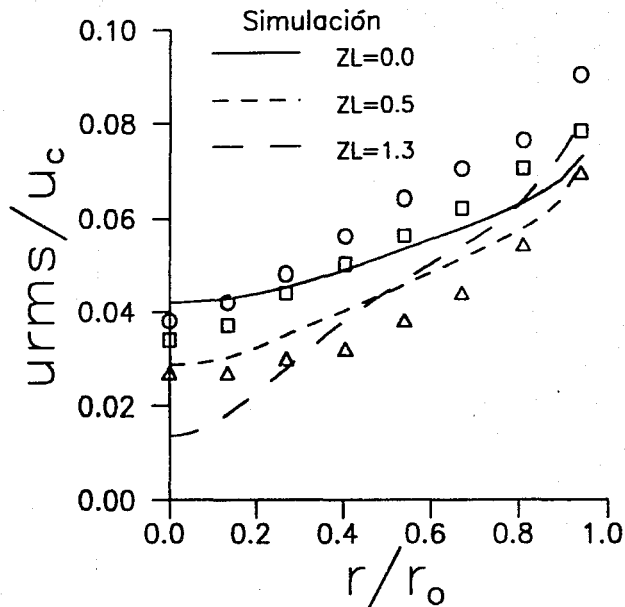


Fig.20 Distribución u_{rms} de la fase continua, para diversas relaciones ZL.
 (Experimento de Tsuji et. al., $d_p = 200 \text{ E-06 m}$
 $Re_p = 2.1 \text{ E04}$, O ZL=0.0, □ ZL=0.5, Δ ZL=1.3)

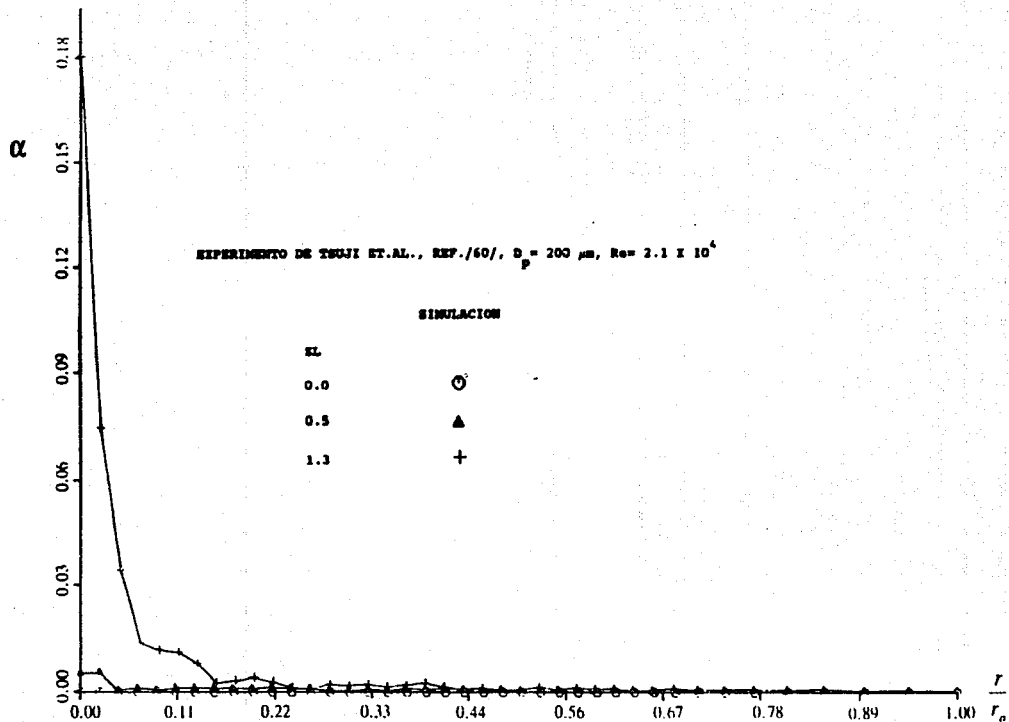


FIG.21 DISTRIBUCION RADIAL DE LA FRACCION DE VOLUMEN DE LAS PARTICULAS. EN LA POSICION $X = 5.0 \text{ m}$.

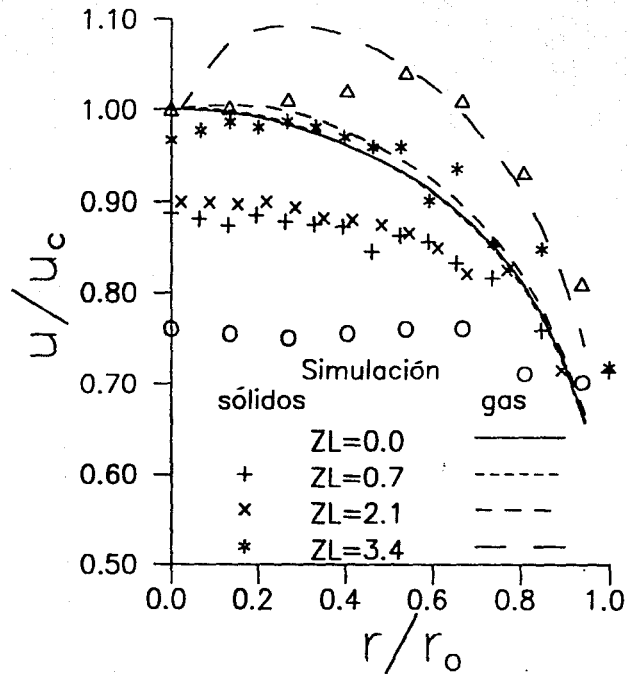


Fig.22 Velocidad media de la fase continua y de la fase s3lida para diversas relaciones ZL .
 (Experimento de Tsuji et. al., $d_p = 500 \text{ E-06 m}$, $Re_0 = 2.1 \text{ E04}$, $ZL=3.4$, Δ gas, \circ s3lidos).

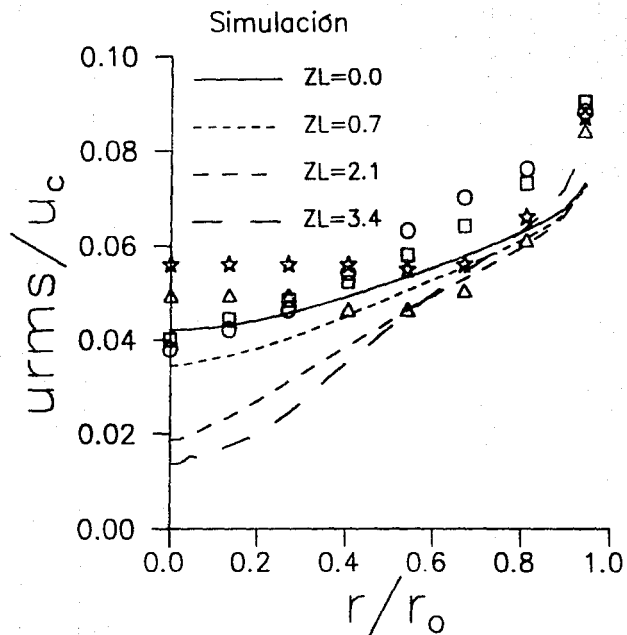


Fig.23 Distribución u_{rms} de la fase continua, para diversas relaciones ZL .

(Experimento de Tsuji et. al., $d_p = 500 \text{ E}-06 \text{ m}$, $Re_D = 2.1 \text{ E}04$, \circ $ZL=0.0$, \square $ZL=0.7$, \triangle $ZL=2.1$, \star $ZL=3.4$)

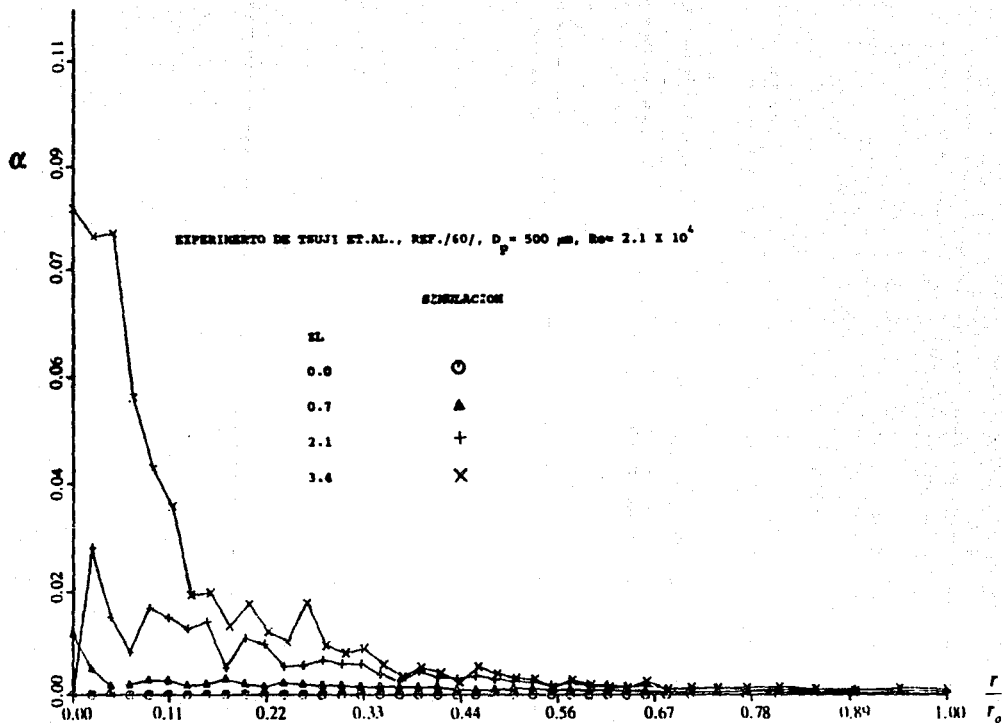


FIG.24 DISTRIBUCION RADIAL DE LA FRACCION DE VOLUMEN DE LAS PARTICULAS, EN LA POSICION $X = 5.0 \text{ m}$.

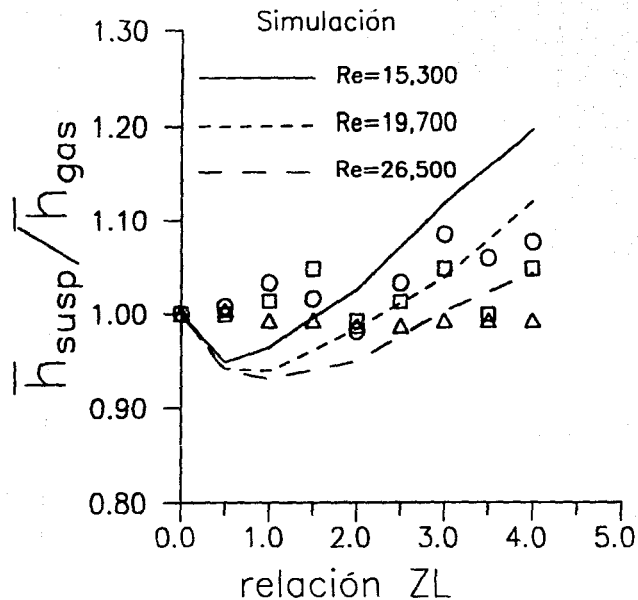


Fig.25 Relación de coeficientes convectivos vs. relación de carga ZL, para varios Re.
 (Experimento de Farbar y Depew, $d_p = 200 \text{ E}-06 \text{ m}$,
 O Re=15,300, □ Re=19,700, △ Re=26,500)

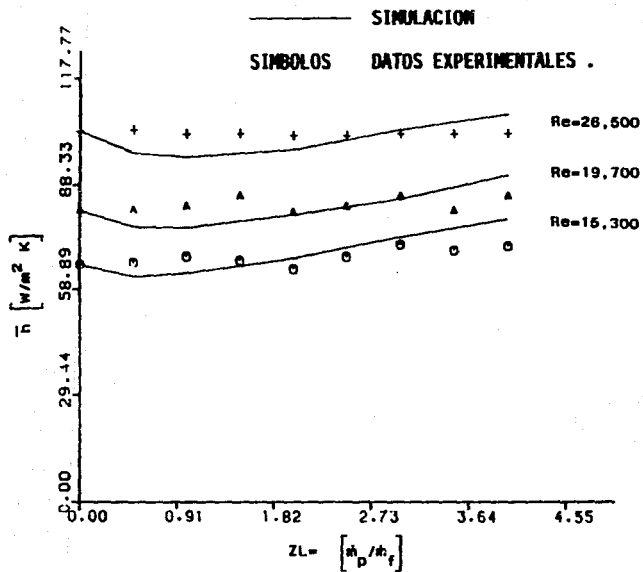


FIG.26 COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR vs. RELACION DE CARGA DE SOLIDOS.

(EXPERIMENTO DE FARBAR Y DEPEW, REF./72/, $D_p = 200 \mu\text{m}$).

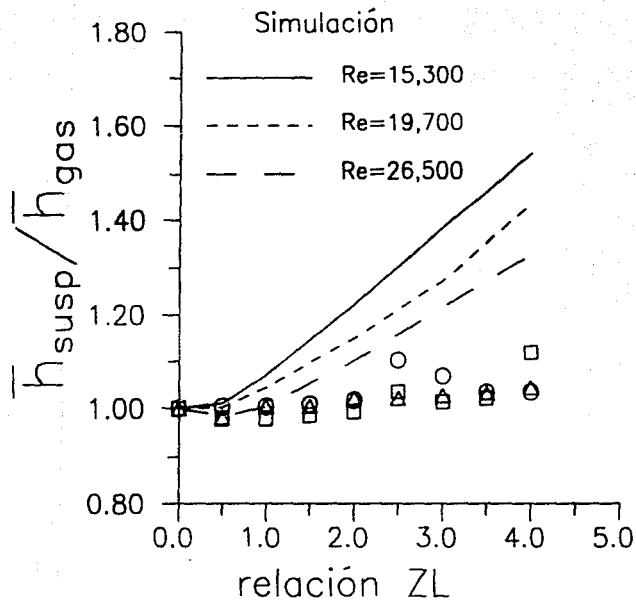


Fig.27 Relación de coeficientes convectivos vs. relación de carga ZL , para varios Re .
 (Experimento de Farbar y Depew, $d_p = 140 \text{ E-06 m}$,
 $\circ Re=15,300$, $\square Re=19,700$, $\triangle Re=26,500$)

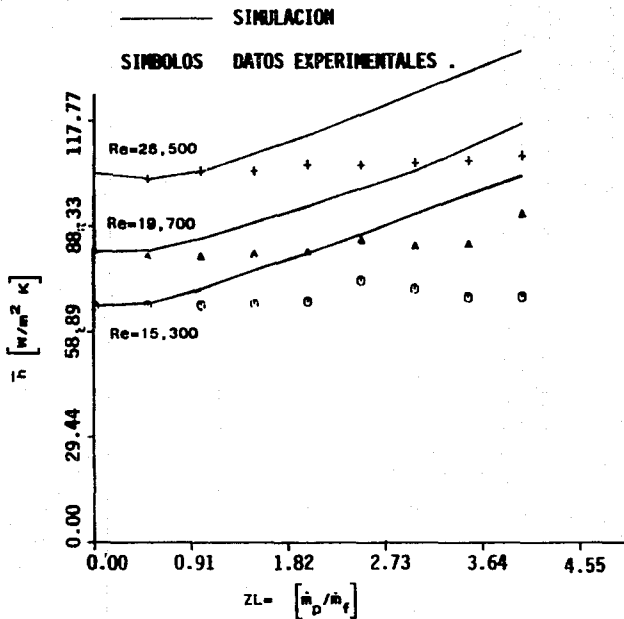


FIG.28 COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR vs. RELACION DE CARGA DE SOLIDOS.

(EXPERIMENTO DE FARBAR Y DEGEN, REF./72/, $D_p = 140 \mu\text{m}$).

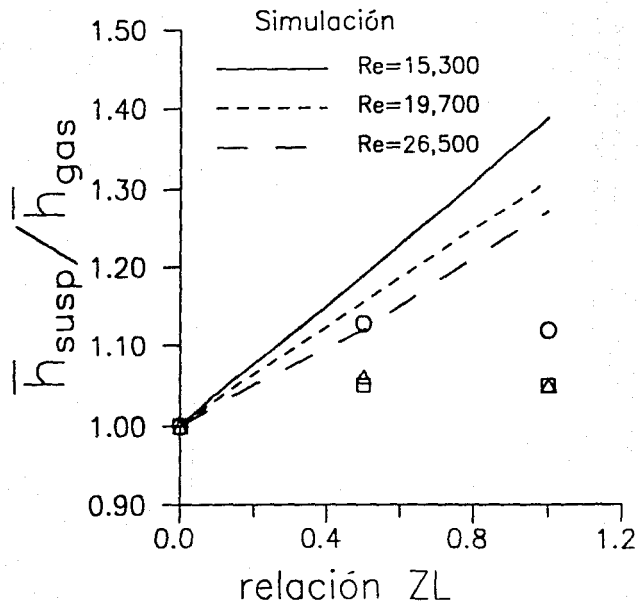


Fig.29 Relación de coeficientes convectivos vs. relación de carga ZL, para varios Re.
 (Experimento de Farbar y Depew, $d_p = 70 \text{ E}-06 \text{ m}$.
 O Re=15,300. □ Re=19,700. △ Re=26,500)

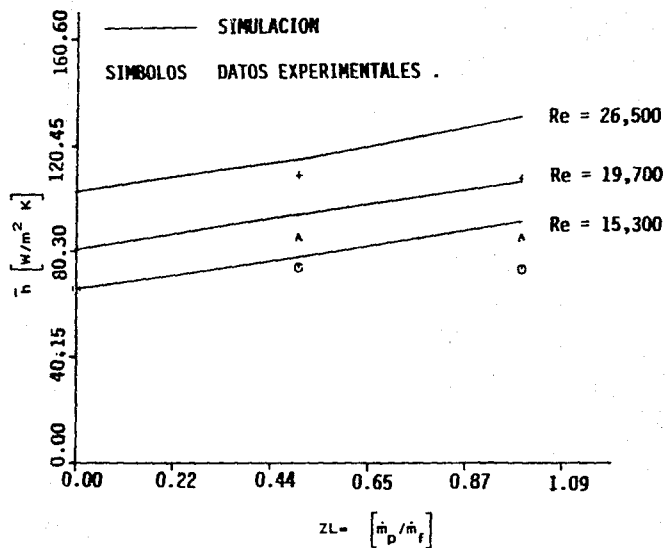


FIG.30 COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR vs. RELACION DE CARGA DE SOLIDOS.

(EXPERIMENTO DE FARBAR Y DEPW, REF./72/, $D_p = 70 \mu m$).