

20  
2ej.



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

## LEY DE FOURIER GENERALIZADA PARA FLUJO DE CALOR NO-ESTACIONARIO Y FRONTERAS VARIABLES

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

**F I S I C O**

P R E S E N T A

ALEJANDRO ESTRADA FLORES

CIUDAD UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE DE 1993

**TESIS CON FALLA DE ORIGEN**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## C O N T E N I D O

INTRODUCCION GENERAL	1
INTRODUCCION AL PRESENTE TRABAJO	4

I

### DISTRIBUCION DE TEMPERATURA Y DEPENDENCIA TEMPORAL EN SISTEMAS CON GEOMETRIA CILINDRICA

1.1 ECUACION DE DIFUSION:	
LA DEPENDENCIA ESPACIAL Y TEMPORAL	9
1.2 ECUACION DE DIFUSION INDEPENDIENTE DEL TIEMPO:	
UN PROBLEMA GEOMETRICO	11
1.3 LAS CONDICIONES A LA FRONTERA DEL PROBLEMA:	
LA EVALUACION DE LAS CONSTANTES	18
1.4 LAS CONDICIONES A LA FRONTERA DE UN PROBLEMA ALTERNATIVO:	
UNA SOLUCION EQUIVALENTE	27

## II

### LEY GENERALIZADA DE FOURIER PARA EL FLUJO DE CALOR EN SISTEMAS CON SIMETRIA CILINDRICA

2.1 LEY GENERALIZADA DE FOURIER:	
EL FLUJO DE CALOR TOTAL	33
2.2 EL EFECTO DE LAS FRONTERAS EN EL FLUJO DE CALOR:	
LA FUNCION EFECTO DE FRONTERA	39

## III

### FLUJO DE CALOR EN FRONTERAS VARIABLES

#### ■ PRIMERA PARTE ■

3.1 FLUJO DE CALOR EN VARIABLES RELATIVAS:	
VARIACION GEOMETRICA	51
3.2 LEY DE FOURIER EN SISTEMAS CON SUPERFICIE ISOTERMA:	
LA APROXIMACION CUASI-CONSTANTE PARA EL FLUJO DE CALOR LAMINAR	60

• SEGUNDA PARTE •

3.3 FORMA GENERAL DE DOS PARAMETROS CARACTERISTICOS:

LA INTENSIDAD DE TEMPERATURA

Y LA CONSTANTE DE TIEMPO

69

3.4 LA INTENSIDAD DE TEMPERATURA Y LA CONSTANTE DE TIEMPO:

LAS MODIFICACIONES EN CONDICIONES DE FLUJO LAMINAR

80

IV

PROBLEMAS DE OPTIMIZACION EN LA UTILIZACION  
DEL FLUJO DE CALOR

4.1 DESCRIPCION DEL PIRANOMETRO:

UNA CAVIDAD CILINDRICA DE LONGITUD VARIABLE

89

4.2 EL ALTO HORNO:

LA DISTRIBUCION DE TEMPERATURA EN LAS ESTUFAS

102

RESUMEN DE RESULTADOS

114

CONCLUSIONES

120

OBSERVACIONES

123

BIBLIOGRAFIA

124

## INTRODUCCION GENERAL

La importancia tecnológica del conocimiento de la transferencia de calor en dispositivos de uso industrial y la necesidad para analizar, cuantitativamente, problemas que involucren este proceso, se ha incrementado en nuestros días, tanto como la tecnología moderna se ha vuelto cada vez más compleja. Esto es debido a que en una gran mayoría, los procesos de ciencia e ingeniería involucran intercambio de energía a través del flujo de calor. Por ejemplo, el diseño de las máquinas de combustión interna requiere de un completo entendimiento de la transferencia de calor y por lo tanto de un detallado análisis de los procesos de combustión, transferencia y enfriamiento.

Desde el punto de vista de ingeniería, la determinación de la cantidad y la rapidez de transferencia de calor sujeta a una diferencia de temperatura dada, constituye el problema principal. Con el objeto de estimar el costo, la factibilidad y el tamaño de equipo necesario para transferir una cantidad de calor en un tiempo dado, se debe primero realizar un análisis detallado de la transferencia de calor dentro del sistema. Las dimensiones de calderas, calentadores, refrigeradores y cambiadores de calor, dependen no solamente de la cantidad de calor que deba ser transmitida, sino también, de la rapidez con que deba transferirse

el calor bajo las condiciones de frontera sobre el diseño del sistema en particular.

Un análisis metódico para el mejor diseño de los sistemas de transferencia de calor, dará como resultado un mínimo de pérdidas de energía y proporcionará la garantía para el ahorro energético.

Cuando el calor es transferido de un fluido a una pared, se forman incrustaciones debido a la operación continua y éstas reducen la rapidez del flujo de calor. Tal es el caso de las estufas de calentamiento del conjunto Alto Horno de la siderúrgica Lázaro Cárdenas en Michoacán, las cuales muestran serias deficiencias en el aprovechamiento máximo de energía, dando como resultado que en las paredes laterales se formen grietas por la absorción de una gran cantidad de calor debido a su mal diseño en la consideración del flujo calorífico.

Este ejemplo muestra que en ingeniería se encuentran problemas de transferencia de calor que no pueden resolverse por un simple análisis lineal de Fourier, sino que requieren un completo estudio basado en la ciencia de la transferencia de calor.

En la actualidad, es muy común encontrar mecanismos basados en las propiedades geométricas de las componentes de un sistema en general. Y son las simetrías geométricas quienes han facilitado en gran parte las innovaciones de nuevas técnicas, y es gracias a la complejidad que las necesidades exigen, por lo que no se ha tenido oportunidad de analizar con la severidad que la termodinámica y

la ciencia de la estabilidad requieren.

De aquí la importancia en analizar detalladamente el mecanismo de transferencia de calor tomando en consideración las propiedades geométricas del sistema por el cual se efectúa este proceso.

## INTRODUCCION AL PRESENTE TRABAJO

Como un caso particular de la problemática planteada en el inciso anterior, este trabajo está enfocado hacia el análisis de la transferencia de calor dentro de un sistema con propiedades de simetría cilíndrica, a lo largo del cual existe transporte de energía calorífica.

El objetivo principal de esta tesis es plantear una ecuación de transferencia de calor para analizar el efecto de fronteras y presentar la función de distribución de temperatura y flujo de calor en términos tales que incluyan las condiciones geométricas a la frontera, las cuales pueden ser consideradas como variables. La nueva ecuación representa un tipo de generalización de la ley de Fourier.

Una de las ventajas de la ley generalizada de Fourier con efectos de frontera, es que proporciona una solución aproximada para el caso de un cilindro con tapa superior isoterma. En lo particular, este problema no tiene solución analítica, pues si consideramos la distribución de temperatura por medio de la ecuación diferencial para la transferencia de calor, la solución no es única.

Gracias a que la ley generalizada de Fourier describe el papel que juegan las fronteras del sistema, es posible reducir el

problema de dos dimensiones a un problema unidimensional. Por lo tanto, la ley generalizada de Fourier permite encontrar la solución para los casos en el que el método tradicional falla, tal y como se presenta en los dos casos de aplicaciones de un Piranómetro y las estufas del conjunto Alto Horno.

El método de análisis a seguir es:

a) Dar la distribución de temperatura en el sistema considerando fronteras variables.

b) Conseguir la ley generalizada de Fourier con fronteras variables.

c) Considerar que el flujo de calor se suministra por la superficie superior isoterma de un cilindro.

Este método no es exclusivo para sistemas de simetría cilíndrica y puede aplicarse a condiciones a la frontera de cualquier geometría, por lo que es posible dar diferentes ecuaciones de Fourier con fronteras variables que dependan de las condiciones impuestas.

Las dos aplicaciones del cuarto capítulo, muestran un hecho básico que tiene como corolario la ley generalizada de Fourier, y que se refiere al análisis de las condiciones bajo las cuales el flujo de calor puede ser transmitido como un máximo aprovechable incluyendo la forma en que se debe transmitir.

Para este propósito, el trabajo se divide fundamentalmente en cuatro capítulos.

El tratamiento del análisis inicia en el capítulo |. Se

considera un sistema caracterizado por su simetría cilíndrica.

La función de distribución de temperatura  $T(r,z,t)$  en las coordenadas  $(r,z,t)$  dentro del sistema, se obtiene a partir de la ecuación de difusión, una vez que las condiciones a la frontera han sido establecidas. La distribución de temperatura es una función de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , los cuales contienen la información sobre las dimensiones geométricas y de los valores iniciales de la temperatura del sistema.

Es importante señalar que las condiciones a la frontera de las secciones 1.3 y 1.4, se han escogido con toda intención debido a que corresponden a casos reales, los cuales con mayor frecuencia se encuentran en la práctica.

En el capítulo II utilizamos la función de distribución de temperatura en la ley de Fourier para obtener el flujo de calor total dentro del sistema

El flujo de calor total es una función de la distribución de temperatura  $T$  y de las coordenadas  $r$  y  $z$  del sistema. En este caso hemos considerado que las cantidades  $\alpha$  y  $\beta$  representan parámetros fijos. Bajo estas condiciones se obtiene la ecuación generalizada de Fourier que muestra las modificaciones a la conocida ley de Fourier debido a la presencia de las fronteras.

A partir de la ley generalizada de Fourier se analizan diversos casos que muestran el comportamiento del flujo de calor en las vecindades de las fronteras.

Por otra parte, la variante en el capítulo III consiste en

que el flujo de calor con fronteras variables es equivalente a considerar  $\alpha$  y  $\beta$  como variables de estado.

En este mismo capítulo se analizan las dependencias relativas entre el flujo radial y longitudinal, y de esta manera es posible dar una presentación adecuada al flujo de calor laminar, que por lo visto, poco énfasis se ha hecho en la literatura sobre la manera de asegurar un flujo de este tipo.

También se supone un suministro de energía  $J$  constante y uniforme. Bajo el tratamiento de balance de energía, el flujo de calor aparece como función de la variable temporal, que de este modo se amplía la concepción de la ley de Fourier para incluir los aspectos de transitorio.

Con la ley generalizada de Fourier es posible analizar dos parámetros característicos de un sistema con diferencia de temperatura estacionaria: la intensidad de temperatura  $\Delta T$  y la constante de tiempo  $\tau$ . Este capítulo concluye mostrando una relación entre estas dos cantidades, que además se refieren a un procedimiento novedoso de analizar un sistema no estacionario de flujo de calor en dispositivos de cualquier clase.

Finalmente, en el capítulo IV se muestra un par de aplicaciones de los conceptos elaborados en los tres capítulos anteriores. El primero de ellos sobre el comportamiento de un Piranómetro, el cual experimentalmente manifiesta que la intensidad de temperatura y la constante de tiempo no son parámetros que permanecen constantes, sino que representan dos

cantidades que dependen de la longitud, al que se le conoce con el nombre de efecto cavidad, cuyo comportamiento gráfico se muestra en las figuras 4.3 y 4.4.

El efecto cavidad, hasta antes de este trabajo, no había sido explicado teóricamente. Sin embargo, con el formalismo considerado en los capítulos anteriores, es posible hacer una comparación Teórico-Experimental de estos parámetros, dando como resultado la descripción teórica de este efecto.

La segunda aplicación es sobre las estufas del Conjunto Alto Horno de la siderúrgica Lázaro Cárdenas, en donde la problemática principal consiste en las fisuras de las paredes interiores debido a la gran cantidad de energía calorífica que fluye en esa dirección, como resultado de un mal diseño en la forma de calentamiento. De los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, se muestra una comparación entre la distribución de temperatura dentro de las estufas y los datos reportados por la empresa. Además, se muestra la forma en que se debe modificar el diseño de calentamiento para evitar alteraciones en la estructura.

La última sección de la tesis se dedica a dar un resumen del formalismo aquí considerado y estimar una posible extensión para un futuro desarrollo del presente campo del ahorro de energía y de las aplicaciones tecnológicas del análisis de la transferencia de calor.

DISTRIBUCION DE TEMPERATURA Y DEPENDENCIA TEMPORAL  
EN SISTEMAS CON GEOMETRIA CILINDRICA

- 1.1 ECUACION DE DIFUSION: LA DEPENDENCIA ESPACIAL Y TEMPORAL
- 1.2 ECUACION DE DIFUSION INDEPENDIENTE DEL TIEMPO: UN PROBLEMA GEOMETRICO.
- 1.3 LAS CONDICIONES A LA FRONTERA DEL PROBLEMA: LA EVALUACION DE LAS CONSTANTES
- 1.4 LAS CONDICIONES A LA FRONTERA DE UN PROBLEMA ALTERNATIVO: UNA SOLUCION EQUIVALENTE.

## 1.1 ECUACION DE DIFUSION: LA DEPENDENCIA ESPACIAL Y TEMPORAL.

Consideremos un sistema termodinámico fuera de equilibrio térmico en el cual se analizará el flujo de calor. Para tal estudio, partiremos de la ecuación de difusión dependiente del tiempo

$$\nabla^2 U(x,y,z,t) = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t} \quad (1.1)$$

en donde  $U(x,y,z,t)$  es la función de distribución de temperatura y la constante  $\kappa$  es llamada la difusividad (Kelvin) o la conductividad termométrica (Maxwell).<sup>1</sup>

La ecuación de difusión se identifica como una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden. Uno de los métodos para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales es el conocido de separación de variables. La característica esencial de este método es el reemplazo de la ecuación diferencial parcial por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.<sup>2</sup>

Se supone ahora que en el sistema se ha establecido un estado estacionario cuya distribución de temperatura es  $T(x,y,z)$ . Por el método de separación de variables, proponemos como solución de (1.1) a la siguiente igualdad

$$U(x,y,z,t) = T(x,y,z) \Theta(t) \quad (1.2)$$

en donde  $T$  es un función que depende de las coordenadas espaciales  $(x, y, z)$  y  $\Theta$  sólo de la variable temporal  $t$ .

Para separar las variables espaciales de las temporales, sustituimos (1.2) en la ecuación de difusión (1.1) para obtener

$$\frac{\nabla^2 T(x, y, z)}{T(x, y, z)} = \frac{1}{\kappa \Theta(t)} \frac{d\Theta(t)}{dt} \quad (1.3)$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias se obtiene cuando ambos miembros de (1.3) se hacen igual a una constante  $-\gamma^2$ , llamada constante de separación. Este conjunto consta de dos ecuaciones diferenciales: una para las variables espaciales

$$\nabla^2 T(x, y, z) + \gamma^2 T(x, y, z) = 0 \quad (1.4)$$

y otra para la variable temporal

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} + \gamma^2 \kappa \Theta(t) = 0 \quad (1.5)$$

La ecuación (1.5) sólo depende del tiempo y tiene por solución

$$\Theta(t) = e^{-\gamma^2 \kappa t} \quad (1.6)$$

Por otra parte, a (1.4) se le conoce como la ecuación de difusión independiente del tiempo o de Poisson para sistemas estacionarios.<sup>3</sup>

La solución de (1.4) para  $T(x,y,z)$  es un problema de eigenvalores que depende de la geometría del sistema y de las condiciones a la frontera que especifique a un problema en particular.<sup>4</sup> Dicha solución se desarrollará en la siguiente sección, en la que se especificarán las condiciones geométricas.

## 1.2 ECUACION DE DIFUSION INDEPENDIENTE DEL TIEMPO: UN PROBLEMA GEOMETRICO.

Por el momento, vamos a concentrar nuestra atención a la ecuación de difusión independiente del tiempo (1.4).

Como ya se ha señalado, esta ecuación depende de la geometría del sistema que se está analizando con sus respectivas condiciones a la frontera. En esta sección, trataremos el caso geométrico y se dejará el análisis de las condiciones a la frontera para la próxima sección.

Se supone que nuestro sistema termodinámico es un cilindro circular recto, cuyo eje coincide con el eje  $z$  de un sistema coordenado.

Se considera, también, que el radio del cilindro es  $r_0$  y los extremos van de  $z = 0$  hasta  $z = L_0$ , como se ve en la figura (1.1).

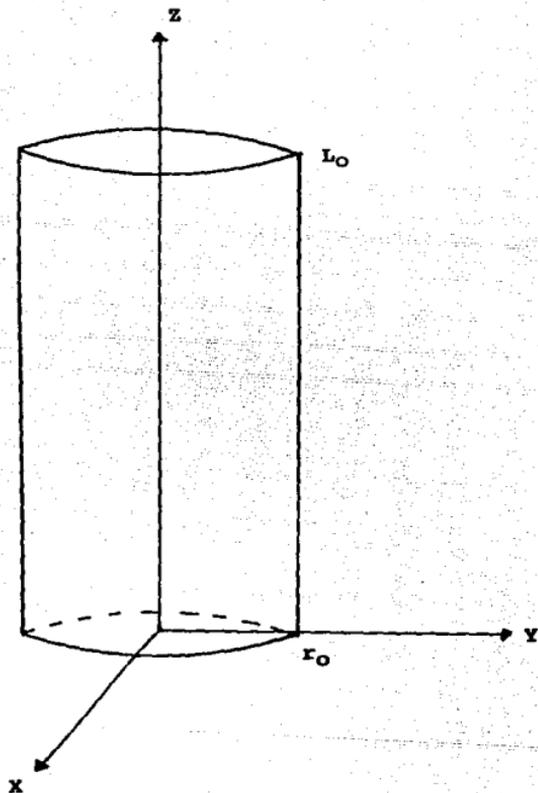


Figura 1.1: El eje del cilindro coincide con el eje  $z$  de un sistema coordenado. El radio es  $r_0$  y su altura  $L_0$ .

Debido a la simetría geométrica del problema, es conveniente tratarlo en un sistema de coordenadas cilíndricas. Por lo que la distribución de temperatura  $T$  será función de  $r, \theta$  y  $z$ .

Sin embargo, si consideramos al sistema con simetría axial, la temperatura no va a depender del ángulo alrededor del eje, sino que resultará ser una función tanto de  $r$  como de  $z$ . Es decir  $T = T(r, z)$ .

Una vez establecidas las condiciones de simetría del problema, escribimos la ecuación (1.4) de la forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \gamma^2 T = 0 \quad (1.7)$$

en donde por comodidad se ha escrito sólo  $T$  en lugar de  $T(r, z)$ . Se debe notar que el laplaciano se ha escrito en coordenadas cilíndricas para aprovechar las condiciones geométricas del sistema termodinámico.

Al igual que la relación (1.1), (1.7) es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden, la cual se resuelve por el mismo método de separación de variables utilizado antes.

Como  $T$  es una función que sólo depende de las variables  $r$  y  $z$ , proponemos la solución de la igualdad (1.7) de la siguiente forma

$$T(r, z) = R(r) Z(z) \quad (1.8)$$

en donde  $R$  es una función que depende únicamente de la variable  $r$  y  $Z$

de la variable z.

Para simplificar la notación, en algunas ocasiones escribiremos Z y R en lugar de Z(z) y R(r), respectivamente.

Para obtener el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, basta sustituir la función V(r,z), dada por (1.8), en la ecuación diferencial (1.7)

$$Z \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] R + R \frac{d^2 Z}{dz^2} + \gamma^2 R Z = 0$$

ahora bien, si dividimos entre R Z tenemos

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \gamma^2 = 0$$

A partir de la última igualdad, se obtienen las ecuaciones para cada una de las funciones. Es decir, una para R(r)

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] = -\alpha^2 \quad (1.9)$$

y otra para Z(z)

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \beta^2 \quad (1.10)$$

donde, al igual que  $r^2$ , las cantidades  $\alpha^2$  y  $\beta^2$  son las constantes de separación para las variables  $r$  y  $z$ , respectivamente, las cuales deben cumplir que  $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$ . Estas constantes serán evaluadas de acuerdo a las condiciones a la frontera del problema.<sup>5</sup>

Por otra parte, si multiplicamos la ecuación (1.9) por  $r^2$  y la escribimos de la forma

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + r^2 \alpha^2 R = 0$$

entonces, con el cambio de variable  $u = \alpha r$ , la ecuación anterior se puede escribir como

$$u^2 \frac{d^2 R}{du^2} + u \frac{dR}{du} + u^2 R = 0 \quad (1.11)$$

la cual presenta la forma de la ecuación de Bessel de orden cero.

La solución general para (1.11), es una función bien conocida dentro de los textos de física matemática y de funciones especiales.

Esta solución es de la forma

$$R(u) = A_1 J_0(u) + A_2 Y_0(u) \quad (1.12)$$

en donde  $J_0(u)$  y  $Y_0(u)$  son las funciones de Bessel de primera y segunda clase, respectivamente, ambas de orden cero.<sup>6</sup>

Por otro lado, si reagrupamos los términos de (1.10) y los escribimos en el miembro izquierdo de la igualdad, entonces llegaremos a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \beta^2 Z = 0$$

cuya solución general es la suma de dos funciones exponenciales<sup>5</sup>

$$Z(z) = B_1 e^{-\beta z} + B_2 e^{\beta z} \quad (1.13)$$

La mayoría de las constantes que aparecen en las soluciones (1.12) y (1.13), serán evaluadas en la siguiente sección cuando hablemos de las condiciones a la frontera. Sin embargo, podemos hacer algunas observaciones de carácter matemático que simplificarán este par de soluciones.

En primer lugar consideramos la ecuación (1.12). Esta ecuación presenta un punto singular regular en  $u = 0$ , es decir en  $r = 0$ , debido a la forma que presenta  $Y_0(u)$

$$Y_0(u) \approx \frac{2}{\pi} \ln u.$$

Si se toman valores de  $u$  próximos a cero, entonces  $Y_0$  tenderá a menos infinito. Es decir, si  $u \rightarrow 0$  entonces  $Y_0(u) \rightarrow -\infty$ , y la solución presentará una singularidad logarítmica en dicho punto.<sup>5</sup>

Con el objeto de evitar que esta singularidad aparezca en nuestra solución, es conveniente elegir  $Az = 0$  y se asegura que la solución sea finita en el intervalo de 0 a  $\infty$ . Por lo tanto, la solución  $R(u)$ , dada por la ecuación (1.12) se reduce a

$$R(u) = A_1 J_0(u) \quad (1.14)$$

Vamos a considerar ahora la ecuación (1.13). La elección de  $B_1 = 0$  o bien  $B_2 = 0$  estará determinada por las condiciones a la frontera. Por ejemplo, en el caso en que  $z$  varíe de 0 a  $\infty$ , entonces  $e^{\beta z} \rightarrow \infty$ . Por lo que debemos elegir  $B_2 = 0$  y de esta forma se asegura que la solución sea finita.

A partir de esta elección, la solución  $Z(z)$  dada por (1.13) se reduce a

$$Z(z) = B_1 e^{-\beta z} \quad (1.15)$$

Sin embargo, nuestro caso es de frontera finita y el argumento anterior no es válido. Por lo que la elección de la forma (1.15) es materia de conveniencia que adoptaremos con la finalidad de tener una solución bien comportada en los casos extremos que más adelante podrán discutirse.

### 1.3 LAS CONDICIONES A LA FRONTERA DEL PROBLEMA: LA EVALUACION DE LAS CONSTANTES.

En la sección 1.1, se consideró que el sistema termodinámico se caracteriza por las condiciones de simetría axial. Esto significa que la temperatura es una función de la altura y del radio. De esta manera, las condiciones a la frontera serán sobre las variables  $r$  y  $z$ , quienes son las que determinan la distribución de temperatura dentro de la cavidad cilíndrica.

Por simplicidad, se supone que la pared lateral del cilindro se mantiene a temperatura constante cero.<sup>\*7</sup>

Se va a considerar también, que en el centro de la tapa superior e inferior la temperatura es  $T_i$  y  $T_o$  respectivamente, como se muestra en la figura (1.2). Suponemos que  $T_i$  es mayor que  $T_o$ .

Debemos hacer referencia en que estas condiciones a la frontera se han escogido debido a que representan casos reales, los cuales se analizarán en el capítulo IV.

Suponemos que la temperatura en la pared lateral del cilindro es la mínima en el sistema. Por lo tanto,  $T_i$  y  $T_o$  son siempre positivas.

Ahora se procederá al cálculo de las constantes que aparecen en

\* Si la temperatura constante es  $V_o$ , podemos reducir esto al caso de temperatura cero haciendo un corrimiento del origen por  $-V_o$ . Lo cual significa que una vez realizados los cálculos, la temperatura real se obtiene sumando  $V_o$ .

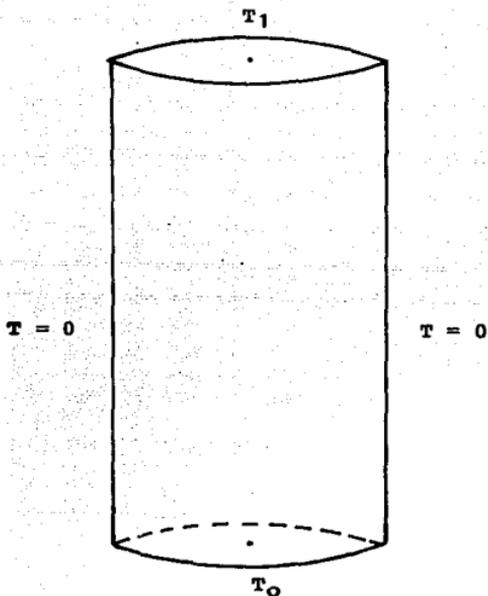


Figura 1.2: Se supone temperatura cero en la pared lateral del cilindro. Se considera que  $T_1$  y  $T_0$  son las temperaturas en el centro de la tapa superior e inferior, respectivamente.

las soluciones (1.14) y (1.15).

Primero se evaluarán  $B_1$  y  $\beta$ . En  $z = 0$  se tiene que la temperatura es  $T_0$ , por lo que de la ecuación (1.15) resulta  $Z(0) = B_1 e^{-\beta(0)} = T_0$ , entonces  $B_1 = T_0$ .

La temperatura en  $z = L_0$  es  $T_1$ , si se introduce este valor a la frontera se tiene, de (1.15), que  $Z(L_0) = T_0 e^{-\beta L_0} = T_1$ . Aquí se ha utilizado el resultado  $B_1 = T_0$  obtenido antes. Si se toma la última igualdad que aparece en  $Z(L_0)$ , con un simple desarrollo algebraico se obtiene el valor para  $\beta$ , es decir

$$\beta = -\frac{1}{L_0} \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) \quad (1.16)$$

Una vez que se han evaluado las constantes  $B_1$  y  $\beta$ , la solución (1.15) toma la forma

$$Z(z) = T_0 e^{-\beta z} \quad (1.17)$$

en donde  $\beta$  se calcula a partir de (1.16).

Por otro lado, las constantes  $A_1$  y  $\alpha$  se evalúan a partir de la solución para  $R(u)$ , ecuación (1.14).

Se considera primero la condición a la frontera para el caso en el que  $r = 0$ . En estas circunstancias, la variación de la temperatura ocurrirá a lo largo del eje del cilindro. Como ya se ha mencionado, en el eje del cilindro la distribución de temperatura está dada por  $Z(z)$  exclusivamente. Entonces, para la condición  $r = 0$  se requiere que

$A_1 = 1$ , además, para esta misma condición la función de Bessel  $J_0(\alpha_0) = 1$ .

Si la temperatura en las paredes laterales del cilindro es cero, entonces en la frontera  $r = r_0$ , la función  $R(\alpha r)$  se debe anular. Es decir, como consecuencia del valor en la frontera en  $r = r_0$  y por la forma en la que se ha considerado la distribución de temperatura dentro del cilindro, ecuación (1.8), es preciso que se cumpla la igualdad  $R(\alpha r_0) = J_0(\alpha r_0) = 0$ . Con esta relación se satisface la condición a la frontera en  $r = r_0$  para cualquier valor  $z$  en el intervalo de 0 a  $L_0$ .

En otras palabras, el requerimiento para que la temperatura se anule en la pared lateral del cilindro, significa que  $\alpha$  puede tomar sólo los siguientes valores especiales<sup>B</sup>

$$\alpha_m = \frac{\lambda_m}{r_0} \quad \text{con } m = 1, 2, 3, \dots$$

en donde  $\lambda_m$  son las raíces de  $J_0(\lambda_m) = 0$ .

En vista de que  $J_0(\alpha r_0) = 0$ , significa que  $\alpha r_0$  son las raíces de  $J_0$ . De acuerdo a la teoría sobre las funciones de Bessel, no se tienen raíces complejas ni repetidas. Además, el número de raíces reales es infinito. Otra característica sobre estas funciones, es que para cada raíz  $\lambda_m$ , le corresponde una negativa  $-\lambda_m$ .

En términos generales, la función  $J_n(u)$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$  no tiene raíces complejas, y tiene un número infinito de raíces reales simétricamente colocadas con respecto al punto  $u = 0$ , el

cual es por sí mismo un cero si  $n > 0$ . Todos los ceros de  $J_n(u)$  son simples, excepto en  $u = 0$ , el cual es un cero de orden  $n$  si  $n > 0$ , como se muestra en la figura (1.3).<sup>9</sup>

Las funciones de Bessel  $J_n(u)$  oscilan pero no son periódicas, excepto en el límite a medida que  $u \rightarrow \infty$ , pues su amplitud no es constante sino que disminuye asintóticamente como  $u^{-1/2}$ .<sup>5</sup>

En la solución de problemas de aplicación, se necesita información acerca de la localización de los ceros de las funciones de Bessel, y en particular se debe ser capaz para hacer cálculos aproximados de los valores de estos ceros.

La información que esto nos aporta, es que tenemos un número infinito de valores  $\lambda_m$  para los cuales  $J_0(\lambda_m) = 0$ . Esto trae como consecuencia que la distribución de temperatura, ecuación (1.8), se debe escribir como una suma infinita de términos sobre estas raíces, es decir

$$T(r, z) = T_0 e^{-\beta z} \sum_{m=1}^{\infty} J_0(\alpha_m r) \quad (1.18)$$

aquí se debe notar que en la ecuación (1.8) se ha utilizado la expresión para  $Z(z)$  dada por (1.17).

De acuerdo a la gráfica de la figura (1.3), donde se muestra  $J_0(u)$ , notamos que esta función toma valores positivos y negativos a lo largo de todo su dominio. Ahora bien, cabe hacer mención a la siguiente pregunta: ¿Qué significado físico podría aportar el cambio de signo de  $J_0(u)$  en la distribución de temperatura?

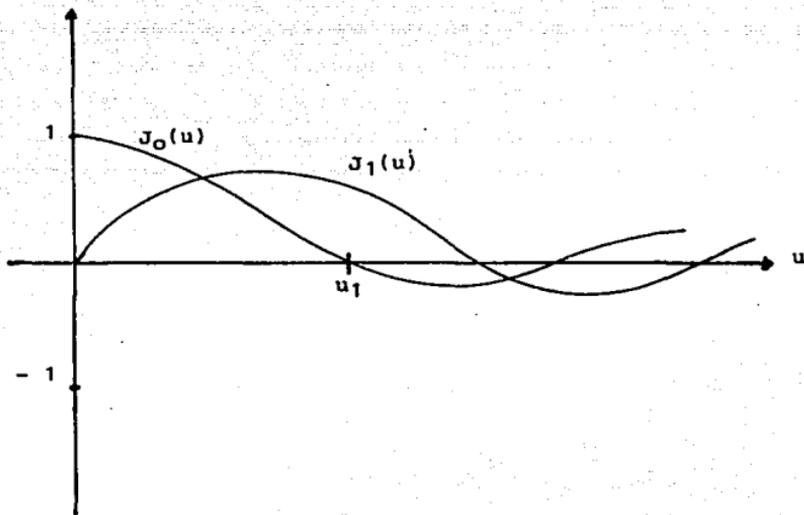


Figura 1.3: Funciones de Bessel de primera clase de orden  
cero y uno.

Para responder, debemos analizar cuidadosamente el comportamiento de la temperatura representada por la ecuación (1.18), ya que  $J_0(u)$  corresponde a los valores de  $T$  a lo largo del radio.

Si se considera todo el dominio de  $J_0(u)$  donde esta función toma tanto valores positivos como negativos, entonces por la relación (1.18), la temperatura también tomará valores positivos y negativos.

Por esta razón, para evitar que la distribución de temperatura tome valores negativos, se debe acotar el dominio de  $J_0(u)$  de tal modo que  $J_0$  sea siempre positiva para toda  $u$  dentro del nuevo intervalo.

Para satisfacer las condiciones anteriores, se tomará en cuenta sólo el intervalo de  $u = 0$  a la primera raíz  $u_1 = \lambda_1$ , en donde  $J_0$  es siempre positiva, como se muestra en la figura (1.3).

Este intervalo corresponde a las mismas condiciones impuestas por el problema, porque de acuerdo a la definición  $u = \alpha r$ , se tiene que para  $r = 0$   $u = 0$ , y por otro lado, para  $r = r_0$  corresponde  $u_1 = \alpha r_0 = \lambda_1$ , en donde  $\lambda_1$  es la primera raíz de  $J_0(u)$ , y tiene un valor de  $\lambda_1 = 2.405$ , del cual tenemos<sup>10</sup>

$$\alpha_1 = \frac{2.405}{r_0} \quad (1.19)$$

Por lo que la ecuación (1.18) se reduce al caso particular impuesto por las condiciones anteriores, de este modo, se va a considerar sólo la primera raíz de  $J_0(u)$ , la cual corresponde a  $m = 1$ . y así la función de distribución de temperatura (1.18) toma la forma particular

$$T(r, z) = T_0 J_0(\alpha_1 r) e^{-\beta z} \quad (1.20)$$

A partir de esta consideración sobre el dominio de  $J_0(u)$ , se garantiza que esta función es siempre positiva y, por lo tanto, es inmediato que de acuerdo a la ecuación (1.20), la distribución de temperatura también será positiva.

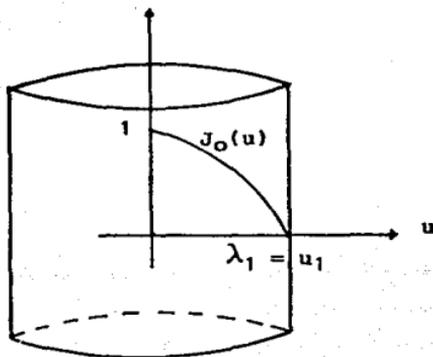
Sin embargo, existen otras raíces de  $J_0(u)$  entre las cuales esta función también es positiva. Por ejemplo, si se tomara como dominio el intervalo  $\lambda_n \leq u \leq \lambda_{n+1}$  de tal manera que  $J_0(u)$  fuera no negativa entonces, a  $\lambda_n$  le corresponde un radio  $r_n = \frac{\lambda_n}{\alpha}$  y a  $\lambda_{n+1}$  el radio  $r_{n+1} = \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha}$  ambos distintos de cero. Pero en este caso no se está considerando todo el cilindro, sino únicamente la región de éste que se encuentra entre el radio interior  $r_n$  y el exterior  $r_{n+1}$ .

Es posible representar esquemáticamente y a grandes rasgos el comportamiento de la distribución de temperatura dentro del cilindro.

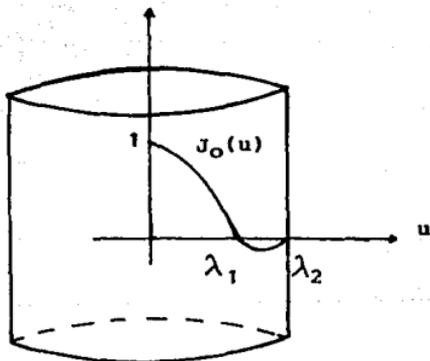
En la figura (1.4) se muestra la superposición de la función  $J_0(u)$  con nuestro sistema. Es importante observar que, de acuerdo a la forma en cómo decrece  $J_0(\alpha r)$ , la temperatura también será una función decreciente a medida que  $r$  tienda a  $r_0$  para anularse finalmente en  $r = r_0$ , figura (1.4a).

Por otra parte, en la figura (1.4b), se observa que no es posible tomar en cuenta otra raíz además de  $\lambda_1$ , debido a que introduce un valor negativo a la distribución de temperatura.

Una vez que han sido evaluadas las constantes que aparecen en las



a)



b)

Figura 1.4: a)  $J_0(u)$  es una función decreciente: es máxima en  $r = 0$  y se anula en  $r = r_0$ . b) Tomar en cuenta dos raíces de  $J_0(u)$ , se introduce un signo negativo a la temperatura, debido a que entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , por ejemplo,  $J_0(u)$  es menor que cero.

ecuaciones (1.14) y (1.15), se puede escribir la distribución de temperatura de acuerdo a la ecuación (1.20) como

$$T(r,z) = T_0 J_0(\alpha r) e^{-\beta z} \quad (1.21)$$

en donde por comodidad se reemplazó  $\alpha_1$  por  $\alpha$ . Las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  se calculan a partir de las ecuaciones (1.19) y (1.16), respectivamente.

El resultado dado por la ecuación (1.21) es la única solución que se puede establecer en condiciones de simetría axial y en las condiciones a la frontera determinadas en esta sección.

La ecuación (1.21) es la función de distribución de temperatura dentro del sistema. Esta relación determina la temperatura en cualquier punto dentro del cilindro, y a partir de ella y con la ley de Fourier, se obtiene el comportamiento del flujo de calor dentro de éste, que no será sino hasta el siguiente capítulo en que se determine su forma analítica.

#### 1.4 LAS CONDICIONES A LA FRONTERA DE UN PROBLEMA ALTERNATIVO: UNA SOLUCION EQUIVALENTE.

A continuación se determinará la solución de la distribución de temperatura para la misma cavidad cilíndrica en la que

alternativamente cambiamos las condiciones a la frontera del problema.

Consideremos ahora el problema en el que las condiciones a la frontera son que tanto la pared lateral como la base del cilindro se encuentran a temperatura constante cero, mientras que en la tapa superior varía como función de  $r$ , figura (1.5). El propósito es encontrar la función de distribución de temperatura en cualquier punto dentro del sistema.

Con el objeto de que la distribución de temperatura  $T(r, z)$  sea univaluada y se anule en  $z = 0$ , las funciones  $R(r)$  y  $Z(z)$  se deben escribir como

$$R(r) = A_1 J_0(\alpha r) \quad \text{y} \quad Z(z) = B_1 \text{Senh}(\beta_1 z) \quad (1.22)$$

El requerimiento para que la temperatura se anule en  $r = r_0$ , significa que  $\alpha$  puede tomar sólo el valor especial dado por la ecuación (1.19). Para el caso en el que  $r = 0$ , se trata de la distribución de temperatura en el eje del cilindro, la cual está dada por la función  $Z(z)$  únicamente, por lo que elegimos  $A_1 = 1$ .

Combinando estos resultados en la ecuación (1.8), encontramos que la distribución de temperatura dentro del cilindro viene dada por

$$T_1(r, z) = B_1 J_0(\alpha r) \text{Senh}(\beta_1 z) \quad (1.23)$$

Para evaluar las constantes que aparecen en la ecuación anterior, consideremos la condición a la frontera en la que  $r = 0$ . En este caso

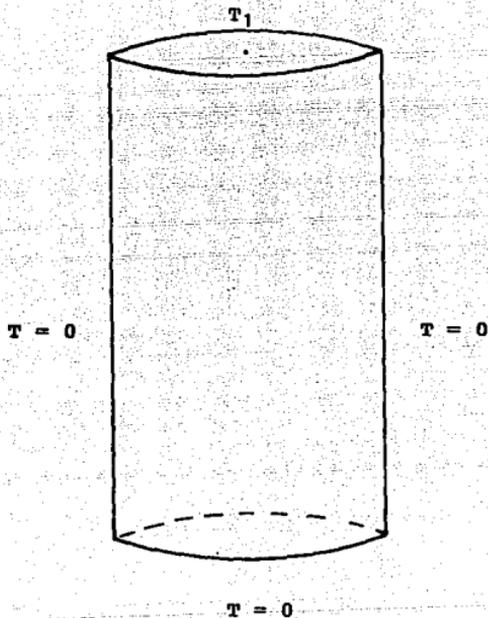


Figura 1.5: La temperatura de la tapa superior del cilindro varia como función del radio, mientras que la pared lateral y la tapa inferior permanecen a temperatura constante cero.

(1.23) toma la forma

$$T_1(0, z) = B_1 \text{Senh}(\beta_1 z)$$

la cual, si  $z = L_0$  se transforma en

$$T_1(0, L_0) = B_1 \text{Senh}(\beta_1 L_0) = T_1$$

en el que se ha tomado en cuenta que la temperatura en el centro de la tapa superior es  $T_1$ . De esta última igualdad se tiene que

$$B_1 = \frac{T_1}{\text{Senh}(\beta_1 L_0)} \quad (1.24)$$

Es importante observar que  $\beta_1$  queda evaluada por la condición que relaciona a las constantes de separación  $\alpha^2 - \beta_1^2 = \gamma^2$ , ya que por un lado  $\alpha$  queda determinada por (1.19), mientras que  $\gamma$  se evalúa a partir de la solución (1.6) de la ecuación temporal cuando definimos a

$$\tau = \frac{1}{\gamma^2 \kappa} \quad (1.25)$$

como la constante de tiempo, la cual indica el intervalo de tiempo en el que el sistema termodinámico reacciona ante una diferencia de temperatura. Dicha cantidad se evalúa experimentalmente. Al igual que  $\tau$ , la difusividad  $\kappa$  también se puede determinar experimentalmente y depende del medio a través del cual tenga lugar el flujo de calor.

Resumiendo, si las condiciones de frontera se modifican de tal modo que en la pared lateral del cilindro y en la tapa inferior la temperatura sea cero, mientras que en la tapa superior varíe como función de  $r$ , entonces la distribución de temperatura en cualquier punto dentro de la cavidad cilíndrica está determinada por la relación

$$T_1(r, z) = \frac{T_1}{\text{Senh}(\beta_1 L_0)} J_0(\alpha r) \text{Senh}(\beta_1 z) \quad (1.26)$$

en donde  $\alpha$  está determinada por (1.19) y  $\beta_1$  se calcula a partir de la relación  $\alpha^2 - \beta_1^2 = \gamma^2$ .

Por otra parte, la forma particular de la solución (1.23) queda determinada por el requerimiento de que la temperatura se anule en  $z = 0$  para cualquier  $r$  arbitraria y en  $r = r_0$  para toda  $z$ . Entonces, para diferentes condiciones a la frontera, la función de distribución de temperatura tomará una forma distinta.

Sin embargo, la ecuación (1.23) representa una serie de Bessel-Fourier que es apropiada para un intervalo finito en  $r$ . Si  $r_0 \rightarrow \infty$ , la serie se transforma en una integral en una forma completamente análoga a la transformación de una serie de Fourier trigonométrica a una integral de Fourier.<sup>8</sup> Así, por ejemplo, si la temperatura es finita para  $z \geq 0$  y se anula para cuando  $z \rightarrow \infty$ , entonces la forma general de la solución para  $z \geq 0$  debe ser

$$T(r,z) = B_1 J_0(\alpha r) e^{-\beta z}$$

que es la función de distribución de temperatura determinada en la sección anterior. Por lo que se observa una equivalencia entre las funciones de distribución (1.21) y (1.23).

Una vez que se ha determinado la distribución de temperatura dentro del cilindro, en el siguiente capítulo se procederá a determinar la forma y el comportamiento de las líneas de flujo de calor en este sistema.

Se pretende encontrar la forma general de la ley de Fourier para el flujo de calor total en un cilindro de longitud variable, a partir de la cual se analiza el flujo en las fronteras geométricas del sistema termodinámico.

**LEY GENERALIZADA DE FOURIER PARA EL FLUJO DE CALOR  
EN SISTEMAS CON SIMETRIA CILINDRICA**

**2.1 LEY GENERALIZADA DE FOURIER: EL FLUJO DE CALOR TOTAL.**

**2.2 EL EFECTO DE LAS FRONTERAS EN EL FLUJO DE CALOR: LA FUNCION  
EFECTO DE FRONTERA.**

## 2.1 LEY GENERALIZADA DE FOURIER: EL FLUJO DE CALOR TOTAL.

El objetivo principal de esta sección consiste en determinar la forma analítica para el flujo de calor dentro de la cavidad cilíndrica, a partir de las funciones de distribución de temperatura obtenidas en el capítulo anterior y que están dadas por las ecuaciones (1.21) y (1.26).

Primero se determinará la ley generalizada de Fourier a partir de la función de distribución (1.21) y se procederá en forma análoga con la función (1.26).

Si consideramos la ecuación (1.21), podemos representar matemáticamente la variación de la temperatura  $T(r, z)$  con respecto a la de la tapa inferior en cualquier punto dentro del cilindro. La variación de la temperatura la determina la relación

$$T(r, z) - T_0 = T_0 (J_0(\alpha r) e^{-\beta z} - 1) \quad (2.1)$$

El flujo de calor total  $\bar{J}_T(r, z)$  dentro de la cavidad cilíndrica está determinado por la ley de Fourier

$$\bar{J}_T(r, z) = -k \nabla (T(r, z) - T_0) \quad (2.2)$$

en donde  $k$  es la conductividad térmica del medio.

De acuerdo a la simetría geométrica del sistema, el operador gradiente se escribe en coordenadas cilíndricas y de la ecuación (2.2) se tiene

$$\bar{J}_T = -k \left[ \frac{\partial}{\partial r} (T(r,z) - T_0) \hat{r} + \frac{\partial}{\partial z} (T(r,z) - T_0) \hat{z} \right] \quad (2.3)$$

en donde el término correspondiente al ángulo  $\theta$  se anula debido a la simetría establecida en el primer capítulo.

Es posible expresar el flujo de calor total en términos de sus magnitudes correspondientes en la dirección de  $r$ , dada por  $J_r(r,z)$  y en la dirección  $z$  por  $J_z(r,z)$ .

De esta manera la ecuación (2.3) se modifica en

$$\bar{J}_T(r,z) = J_r(r,z) \hat{r} + J_z(r,z) \hat{z} \quad (2.4)$$

en donde la magnitud del flujo de calor en la dirección  $r$  es

$$J_r(r,z) = -k \frac{\partial}{\partial r} (T(r,z) - T_0) \quad (2.5)$$

mientras que para  $z$  viene dada por

$$J_z(r,z) = -k \frac{\partial}{\partial z} (T(r,z) - T_0) \quad (2.6)$$

Una vez que se han expresado las formas de las componentes del flujo de calor en las direcciones r y z, resta determinar la forma analítica de este par de funciones. Con este propósito, partiremos de la ecuación (2.4) en la que sustituimos las componentes del flujo (2.5) y (2.6)

$$\bar{J}_T = -k \frac{\partial}{\partial r} (T(r,z) - T_0) \hat{r} - k \frac{\partial}{\partial z} (T(r,z) - T_0) \hat{z} \quad (2.7)$$

con la relación (2.1) la última igualdad se transforma en

$$\bar{J}_T = k \alpha T_0 e^{-\beta z} J_1(\alpha r) \hat{r} + k \beta T_0 e^{-\beta z} J_0(\alpha r) \hat{z} \quad (2.8)$$

en donde  $J_1(\alpha r)$  es la función de Bessel de primera clase de orden uno. Es importante señalar que la ecuación (2.8) no presenta la forma de la ley de Fourier debido a la ausencia del operador diferencia de temperatura. Con el objeto de llevarla a esta forma, utilizamos la ecuación (2.1) de la que se tiene

$$T_0 = \frac{T(r,z) - T_0}{J_0(\alpha r) e^{-\beta z} - 1} \quad (2.9)$$

Finalmente, al introducir el valor de (2.9) en la ecuación (2.8) obtenemos el flujo de calor total en cualquier punto dentro de la cavidad cilíndrica, esto es

$$\bar{J}_T(r, z) = k \frac{T(r, z) - T_0}{J_0(\alpha r) - e^{\beta z}} \left[ \alpha J_1(\alpha r) \hat{r} + \beta J_0(\alpha r) \hat{z} \right] \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) es la ley generalizada de Fourier para el flujo de calor en cavidades con simetría cilíndrica. Además, expresa las modificaciones a la ley de Fourier conocida debido a la presencia de las fronteras teniendo la facultad de analizar los casos límites más sencillos cuando varían los parámetros de tal manera que se obtiene la ley de Fourier para el flujo de calor.

De la relación (2.10) se observa claramente que el flujo de calor dentro de la cavidad tiene componentes a lo largo de la dirección radial como de  $z$ . Esta consecuencia radica en que la distribución de temperatura dentro del cilindro depende de las variables  $r$  y  $z$ , por lo tanto, habrá un gradiente de temperatura quien dará origen al flujo de calor en estas direcciones.

Tal y como se indicó al principio de este capítulo, se procederá a determinar la ley generalizada de Fourier para el caso en el que las condiciones a la frontera se modifican de acuerdo a la sección 1.4. De esta sección se tiene que la función de distribución de temperatura viene dada por

$$T_1(r, z) = T_2 J_0(\alpha r) \text{Senh}(\beta_1 z) \quad (2.11)$$

en donde  $T_2$  queda definida por la igualdad

$$T_2 = \frac{T_1}{\text{Senh}(\beta_1 L_0)} \quad (2.12)$$

y  $\alpha$  está determinada por (1.19) mientras que  $\beta_1$  de las relaciones  $\alpha^2 - \beta_1^2 = \gamma^2$  y (1.25).

El flujo de calor total  $\bar{J}_{1T}(r, z)$  dentro de la cavidad cilíndrica, queda determinada por la ley de Fourier

$$\bar{J}_{1T}(r, z) = -k \nabla (T_1(r, z)) \quad (2.13)$$

en la que de acuerdo a la simetría del sistema, el operador gradiente se escribe en coordenadas cilíndricas para que la ecuación (2.13) se transforme en

$$\bar{J}_{1T}(r, z) = -k \left[ \frac{\partial}{\partial r} (T_1(r, z)) \hat{r} + \frac{\partial}{\partial z} (T_1(r, z)) \hat{z} \right] \quad (2.14)$$

Si sustituimos la función de distribución (2.11) en (2.14), con un sencillo desarrollo matemático la expresión anterior toma la forma

$$\bar{J}_{1T}(r,z) = k \alpha T_2 \text{Senh}(\beta_1 z) J_1(\alpha r) \hat{r} - k \beta_1 T_2 \text{Cosh}(\beta_1 z) J_0(\alpha r) \hat{z}$$

que de acuerdo a la igualdad (2.12), la última expresión se transforma en

$$\bar{J}_{1T}(r,z) = k T_1(r,z) \left[ \alpha \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \hat{r} - \beta_1 \frac{\text{Cosh}(\beta_1 z)}{\text{Senh}(\beta_1 z)} \hat{z} \right] \quad (2.15)$$

Esta ecuación representa la ley generalizada de Fourier correspondiente a la función de distribución de temperatura (2.11).

De la relación (2.15) se observa también que las componentes del flujo de calor son a lo largo de las dos direcciones, debido a la forma que presenta la función de distribución de temperatura en términos de  $r$  y  $z$ .

En la siguiente sección se analizará el comportamiento del flujo de calor total correspondiente a las ecuaciones (2.10) y (2.15) para los casos especiales descritos a continuación.

## 2.2 EL EFECTO DE LAS FRONTERAS EN EL FLUJO DE CALOR: LA FUNCION EFECTO DE FRONTERA.

En esta sección se analizará el comportamiento del flujo de calor para los casos especiales en las regiones límites de la geometría del sistema.

Para llevar a cabo nuestros propósitos, partiremos de las ecuaciones de flujo de calor total en las que, por separado, se reducen a los casos especiales de acuerdo a las condiciones establecidas en cada uno.

A) Como un primer caso se analizará el comportamiento del flujo de calor total cuando  $r \rightarrow 0$ . Esta condición corresponde a una región cilíndrica en la vecindad del eje del sistema. Así, la ley generalizada de Fourier, ecuación (2.10), se transforma en

$$\bar{J}_1(z) = k \beta \frac{T(0, z) - T_0}{1 - e^{\beta z}} \wedge^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

mientras que para la misma condición de (2.15) tenemos

$$\bar{J}_{11}(z) = -k \beta_1 \Delta T_1(0, z) \left[ \frac{\text{Cosh}(\beta_1 z)}{\text{Senh}(\beta_1 z)} \right] \wedge^{\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

Estas ecuaciones muestran que no existe flujo de calor en la dirección radial, sino que la única componente es a lo largo del eje z. En otras palabras, en la vecindad del eje de la cavidad cilíndrica el flujo de calor es laminar. No obstante que en la superficie superior la temperatura sea función de la variable radial, en la vecindad del eje del sistema, el flujo de calor tiene una sólo componente.

Vamos a modificar las ecuaciones (2.16) y (2.17) con la intención de analizar el efecto de las fronteras en el flujo de calor.

Primero se describe el efecto producido en la ecuación (2.16), la que reescribimos de la forma

$$\vec{J}_T(z) = \left[ -k \frac{\Delta T(z)}{z} \hat{z} \right] \left[ \frac{-\beta z}{1 - e^{\beta z}} \right] \quad (2.18)$$

en donde  $\Delta T(z) = T(0,z) - T$  y la cantidad entre el paréntesis izquierdo es la ley de Fourier en su forma canónica.<sup>1</sup>

Para simplificar la ecuación (2.18), definimos la función  $E_f(z)$  como

$$E_f(z) = \frac{-\beta z}{1 - e^{\beta z}} \quad (2.19)$$

y así la relación (2.18) se transforma en

$$\bar{J}_r(z) = \left[ -k \frac{\Delta T(z)}{z} \hat{z} \right] E_r(z) \quad (2.20)$$

Es muy importante observar que a partir de la relación (2.20) se muestra que el flujo de calor está determinado por las modificaciones que introduce  $E_r(z)$  sobre la ley de Fourier. Los efectos que representa  $E_r(z)$  sobre el flujo de calor son los producidos por las fronteras del sistema. Es decir, para el caso en el que  $z \rightarrow 0$ , la función exponencial de (2.19) se desarrolla como

$$e^{\beta z} \approx 1 + \beta z$$

y de esta manera  $E_r(z) = 1$ . Por lo tanto, el flujo de calor se obtiene de (2.20)

$$\bar{J}_r(z) = -k \frac{\Delta T(z)}{z} \hat{z} \quad (2.21)$$

la cual coincide con la ley de Fourier canónica.

Por el contrario, para el caso en el que  $z$  sea grande, la función  $E_r(z)$  alcanzará su valor máximo y, por lo tanto, el flujo

de calor (2.20) presentará su máximo efecto.

Resumiendo, en el flujo de calor laminar hay efectos de frontera que se observa a través de la exponencial de la función  $E_f(z)$ . Sólo cuando  $z \rightarrow 0$  este efecto se anula y tomará su máximo valor cuando  $z$  es máxima. Por esta razón, a la función  $E_f(z)$  dada por la ecuación (2.19) la llamaremos Efecto de Frontera.

La gráfica del gradiente de temperatura  $\Delta T(z)$  se muestra en la figura (2.1). Se observa que el efecto de frontera  $E_f(z)$  es despreciable cuando  $z \rightarrow 0$ , en este caso el comportamiento lineal de  $\Delta T(z)$  lo describe la ley de Fourier canónica. Si  $z \rightarrow \infty$ , la curva tiende a un valor asintótico debido a la exponencial de  $E_f$ .

En esta figura se observa que cuando  $z \rightarrow 0$  el comportamiento del flujo de calor es lineal, tal y como lo predice la ley de Fourier canónica (2.21). Sin embargo, a medida que  $z$  aumenta, la curva tiende a un valor asintótico.

Ahora se va a describir el efecto producido en la ecuación (2.17). Esta relación la escribimos de la forma

$$\bar{J}_{11}(z) = \left[ -k \frac{\Delta T_1(z)}{z} \hat{z} \right] \left[ \frac{\beta_1 z \text{Cosh}(\beta_1 z)}{\text{Senh}(\beta_1 z)} \right] \quad (2.22)$$

Del mismo modo definimos a la función efecto de frontera  $E_{f1}(z)$  como

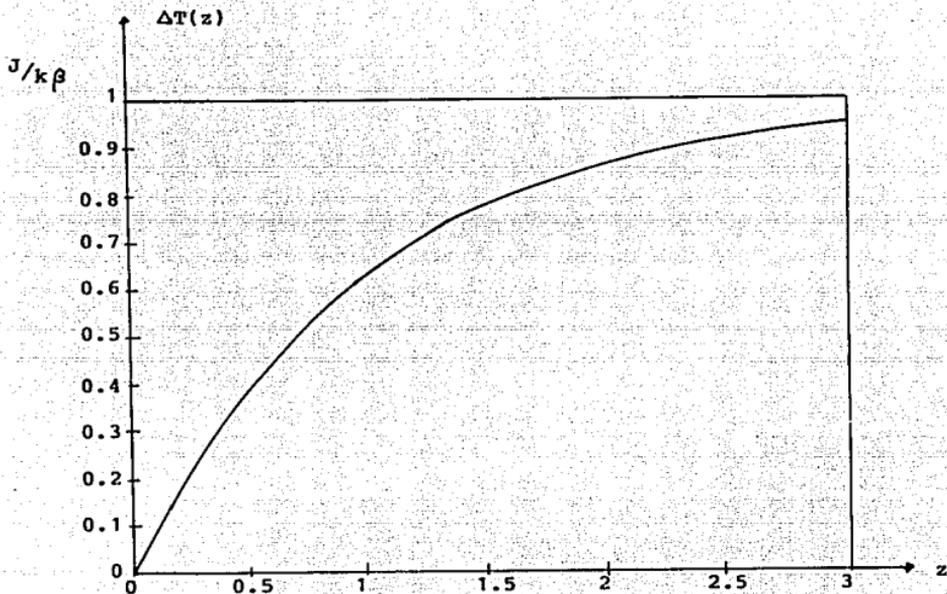


Figura 2.1: Cuando  $z \rightarrow 0$  el comportamiento lineal del gradiente de temperatura lo describe la ley de Fourier canónica, mientras que a medida en que aumenta  $z$  se manifiesta el efecto de frontera. La curva es descrita por la ecuación

$$\vec{J}_i(z) = k \beta \frac{\Delta T(z)}{1 - e^{-\beta z}} \hat{z}$$

$$E_{f_1}(z) = \frac{\beta_1 z \operatorname{Cosh}(\beta_1 z)}{\operatorname{Senh}(\beta_1 z)} \quad (2.23)$$

y entonces la relación (2.22) se simplifica y se escribe

$$\bar{J}_{1T}(z) = \left[ -k \frac{\Delta T_1(z)}{z} \hat{\phantom{z}} \right] E_{f_1}(z) \quad (2.24)$$

De un modo similar que la relación (2.20), la ecuación (2.24) muestra que el flujo de calor es modificado por la presencia de la función efecto de frontera, la cual, cuando  $z \rightarrow 0$ , es posible hacer aproximaciones sobre las funciones hiperbólicas<sup>10</sup> de tal manera que  $\operatorname{Cosh}(\beta_1 z) \approx 1$ , mientras que  $\operatorname{Senh}(\beta_1 z) \approx \beta_1 z$  y, por lo tanto,  $E_{f_1}(z) \approx 1$  y el flujo de calor (2.24) es reemplazado por la ley de Fourier canónica

$$\bar{J}_{1T}(z) = -k \frac{\Delta T_1(z)}{z} \hat{\phantom{z}} \quad (2.25)$$

El caso contrario ocurre cuando  $z$  sea máximo, en este límite

$$\frac{\operatorname{Senh}(\beta_1 z)}{\operatorname{Cosh}(\beta_1 z)} = \operatorname{Tanh}(\beta_1 z) \approx 1$$

y la función  $E_{f_1}(z)$  alcanza su valor máximo, entonces el flujo de calor (2.24) tiene su máximo efecto.

Por lo tanto, en el flujo de calor laminar dado por la ecuación (2.17), existe efecto de frontera a través de la función  $\text{Tanh}(\beta_1 z)$  contenida en  $E_{f_1}(z)$ . Este efecto de frontera se anula cuando  $z$  tiende a cero y es máximo para valores de  $z$  muy grandes.

El comportamiento del gradiente de temperatura  $\Delta T_1(z)$  de la ecuación (2.17) se muestra en la figura (2.2). En este caso la función  $\text{Tanh}(\beta_1 z)$  afecta a  $\Delta T_1(z)$  a través de la función efecto de frontera  $E_{f_1}(z)$ . Si  $z \rightarrow 0$ , el comportamiento lineal del flujo de calor lo describe la ley de Fourier canónica, mientras que si  $z$  aumenta la curva tiende a un valor asintótico.

B) Por otra parte, el comportamiento del flujo de calor total en la pared lateral de la cavidad, se obtiene con la condición en que  $r \rightarrow r_0$ . Por lo que la ecuación (2.10) toma la forma

$$\bar{J}_r(r_0, z) = k \alpha \frac{T_0}{e^{\beta z}} J_1(\alpha r_0) \hat{r} \quad (2.26)$$

Donde se observa que el flujo de calor sólo tiene componente en la dirección del radio, lo cual significa que el flujo de calor es ortogonal a la pared del cilindro. Resultado que era de esperarse debido a que la pared lateral constituye una superficie isoterma.

De un modo similar, consideremos la ecuación (2.15), para la cual, cuando  $r \rightarrow r_0$  se tiene

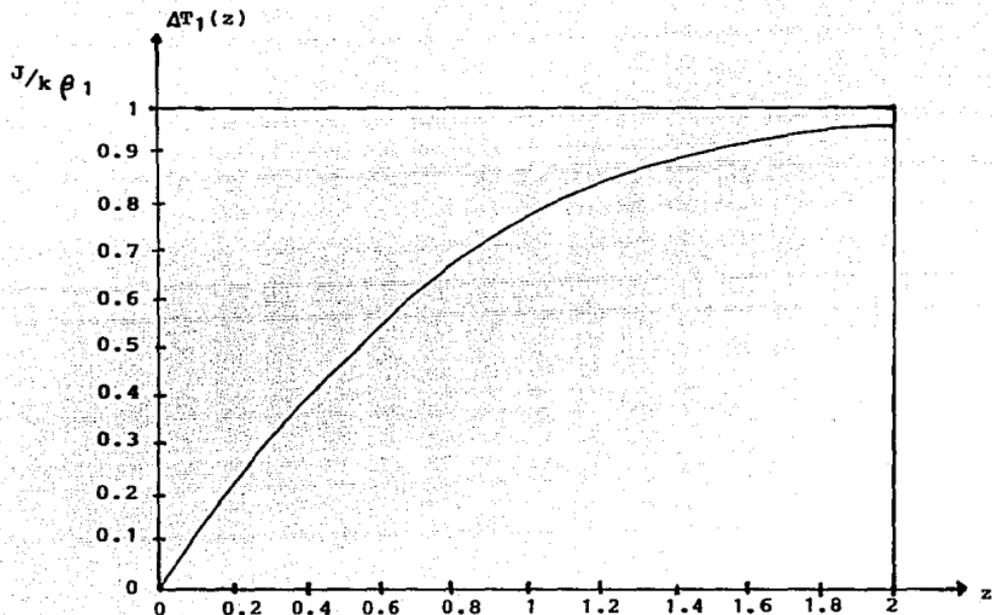


Figura 2.2: Si  $z \rightarrow 0$  el comportamiento lineal del gradiente de temperatura lo describe la ley de Fourier canónica. Cuando  $z$  tiende a infinito, el efecto de frontera hace que la curva tienda a un valor asintótico. La curva es descrita por la ecuación

$$\vec{J}_{1T}(z) = -k \beta_1 \frac{\Delta T_1(z)}{\text{Tanh}(\beta_1 z)} \hat{z}$$

$$\bar{J}_{1T}(r_0, z) = 0 \quad (2.27)$$

debido a que el gradiente de temperatura  $\Delta T_1(r_0, z) = 0$  y por lo tanto no hay flujo de calor.

Es importante analizar los casos en los que  $z \rightarrow 0$  y  $z \rightarrow L_0$ .

Consideremos primero que  $z \rightarrow 0$ . En estas circunstancias la función exponencial tiende a uno y la relación (2.26) se reescribe

$$\bar{J}_T(r_0, 0) = k \alpha T_0 J_1(\alpha r_0) \hat{r}$$

entonces el flujo de calor tiene un valor constante en la pared lateral del sistema, cuya única dirección es a lo largo del radio.

Si se supone que  $z \rightarrow L_0$  la relación (2.26) se escribe

$$\bar{J}_T(r_0, L_0) = k \alpha T_1 J_1(\alpha r_0) \hat{r}$$

y el flujo de calor en la superficie superior tiene un valor constante y su dirección es radial.

Los incisos anteriores son casos especiales cuando se han considerando los valores extremos para la variable  $r$ . De un modo similar, se analizará el flujo de calor total a partir de las ecuaciones (2.10) y (2.15) para los límites en que  $z \rightarrow 0$  y  $z \rightarrow L_0$ .

C) Consideremos que  $z \rightarrow 0$ . En la tapa inferior del cilindro el flujo de calor total, ecuación (2.10), viene dado por

$$\bar{J}_r(r,0) = k T_0 \left[ \alpha J_1(\alpha r) \hat{r} + \beta J_0(\alpha r) \hat{z} \right] \quad (2.28)$$

en donde se ha tomado en cuenta que  $T(r,0) - T_0 = T_0 (J_0(\alpha r) - 1)$ .

Por lo tanto, el flujo de calor tiene ambas componentes que corresponden a cada dirección.

Este caso es una consecuencia del hecho de que en la tapa inferior la temperatura no es constante, sino que varía como función de  $r$ , que de acuerdo a (1.21) está determinada por la relación  $T(r,0) = T_0 J_0(\alpha r)$ .

Por otra parte, de la relación (2.15) para el flujo de calor total, se tiene que si  $z \rightarrow 0$  entonces

$$\bar{J}_{1T}(r,z) = k \beta_1 \frac{T_1}{\text{Senh}(\beta_1 L_0)} \left[ \alpha z J_1(\alpha r) \hat{r} - J_0(\alpha r) \hat{z} \right]$$

en la que se muestra también que el flujo de calor tiene componentes en ambas direcciones.

D) El último de los límites por analizar es cuando  $z \rightarrow L_0$ .

Con la condición para la cual  $z \rightarrow L_0$  el flujo de calor total, dado por la ecuación (2.10), se escribe como

$$J_{Tt}(r, L_0) = k T_1 \left[ \alpha J_1(\alpha r) \frac{\hat{A}}{r} + \beta J_0(\alpha r) \frac{\hat{A}}{z} \right] \quad (2.29)$$

Análogamente, si  $z \rightarrow L_0$ , entonces de la relación (2.15) se tiene que

$$\bar{J}_{Tt}(r, L_0) = k T_1 J_0(\alpha r) \left[ \alpha \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \frac{\hat{A}}{r} - \beta_1 \text{Coth}(\beta_1 L_0) \frac{\hat{A}}{z} \right] \quad (2.30)$$

Por lo tanto, al igual que el inciso anterior, el flujo de calor determinado por las ecuaciones (2.29) y (2.30), tienen componentes en las dos direcciones como consecuencia de la dependencia radial de la temperatura en la superficie superior de ambos casos. Las ecuaciones (2.29) y (2.30) representan el flujo de calor que de la superficie superior se transmite hacia todo el sistema.

Finalmente, se debe hacer hincapié en que las dos direcciones del flujo de calor total, dado por la ley generalizada de Fourier ecuaciones (2.10) y (2.15), son una consecuencia inmediata de que en la superficie superior la temperatura es función de la variable radial, permitiendo de esta manera la existencia de un gradiente térmico en esta misma superficie, originando así el flujo de calor en la dirección radial.

En el siguiente capítulo replantearemos el problema original y se considerará una superficie isoterma, cuya distribución de temperatura será una aproximación de la ecuación (1.21), a partir de la cual, y en forma análoga a la sección 2.1, se obtiene la expresión analítica para el flujo de calor total dentro del cilindro, de la que se analizarán sus consecuencias para los casos de fronteras variables.

### III

## FLUJO DE CALOR EN FRONTERAS VARIABLES

### • PRIMERA PARTE •

- 3.1 FLUJO DE CALOR EN VARIABLES RELATIVAS: VARIACION GEOMETRICA.
- 3.2 LEY DE FOURIER EN SISTEMAS CON SUPERFICIE ISOTERMA: LA APROXIMACION CUASI-CONSTANTE PARA EL FLUJO DE CALOR LAMINAR.

### • SEGUNDA PARTE •

- 3.3 FORMA GENERAL DE DOS PARAMETROS CARACTERISTICOS: LA INTENSIDAD DE TEMPERATURA Y LA CONSTANTE DE TIEMPO.
- 3.4 LA INTENSIDAD DE TEMPERATURA Y LA CONSTANTE DE TIEMPO: LAS MODIFICACIONES EN CONDICIONES DE FLUJO LAMINAR.

### 3.1 FLUJO DE CALOR EN VARIABLES RELATIVAS: VARIACION GEOMETRICA.

En este capítulo se analizará la ley generalizada de Fourier para el flujo de calor dentro de la cavidad cilíndrica para los casos en que las fronteras geométricas tiendan a valores extremos con respecto a cada una de las dimensiones correspondientes a las variables del sistema termodinámico. Además se define analíticamente la forma general para la intensidad de temperatura ( $\Delta T$ ) como fuerza impulsora de calor y la constante de tiempo ( $\tau$ ), y se obtendrá una relación matemática entre ellos. Posteriormente las ecuaciones de estos parámetros se reducirán a casos particulares de acuerdo a las condiciones que previamente se establezcan.

El objetivo de la presente sección es determinar la relación que existe entre el flujo de calor total y la componente del flujo de calor que corresponde a algunas de las direcciones del sistema termodinámico cuando uno de los límites de la cavidad se extiende a valores mucho mayores con respecto al otro.

Para llevar a cabo nuestro propósito, se va a considerar la ley generalizada de Fourier que nos determina el flujo de calor total dentro de la cavidad cilíndrica, dada por la ecuación

$$\bar{J}_r(r, z) = k \frac{T(r, z) - T_0}{J_0(\alpha r) - e^{\beta z}} \left[ \alpha J_1(\alpha r) \hat{r} + \beta J_0(\alpha r) \hat{z} \right] \quad (3.1)$$

Como ya se comentó, la ecuación (3.1) expresa las componentes del flujo de calor en cada una de las direcciones del sistema.

Por otra parte, si deseamos calcular el flujo de calor en la superficie superior de la cavidad, basta sustituir el valor de  $z = L_0$ , que corresponde a esta superficie, en (3.1) para obtener

$$\bar{J}_r(r, L_0) = k T_1 \left[ \alpha J_1(\alpha r) \hat{r} + \beta J_0(\alpha r) \hat{z} \right] \quad (3.2)$$

Al igual que (3.1), la ecuación (3.2) muestra también las componentes del flujo de calor que corresponden a las direcciones  $\hat{r}$  y  $\hat{z}$  del sistema. El primer elemento del segundo miembro de (3.2), es el flujo de calor  $\bar{J}_r$  en la dirección del radio, mientras que el segundo elemento representa el flujo de calor  $\bar{J}_z$  a lo largo del eje de la cavidad cilíndrica.

Si los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  dados por

$$\alpha = \frac{\lambda_1}{r_0} = \frac{2.405}{r_0} \quad \text{y} \quad \beta = - \frac{1}{L_0} \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) \quad (3.3)$$

los sustituimos en la ecuación (3.2), entonces la magnitud del flujo de calor total se escribe como

$$|\bar{J}_T(r, L_0)|^2 = \left[ k T_1 \left( \frac{\lambda_1}{r_0} \right) J_1 \right]^2 + \left[ k T_1 \left( \frac{1}{L_0} \right) \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) J_0 \right]^2 \quad (3.4)$$

Vamos a suponer que mantenemos fijo un valor del radio, digamos  $r_1$ , entonces dividimos (3.4) entre  $|\bar{J}_T(r_1, L_0)|^2 \neq 0$  y con un sencillo desarrollo algebraico se transforma en

$$\frac{|\bar{J}_r|^2}{|\bar{J}_T(r_1, L_0)|^2} = 1 - \frac{\left[ k T_1 \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) J_0 \left( \frac{\lambda_1}{r_0} r_1 \right) \right]^2}{r_1^2 \left( \frac{L_0^2}{r_1^2} \right) |J_T(r_1, L_0)|^2} \quad (3.5)$$

en donde la magnitud del flujo de calor  $|\bar{J}_r|$  en la dirección del radio está expresada por

$$|\bar{J}_r|^2 = \left[ k T_1 \left( \frac{\lambda_1}{r_0} \right) J_1 \left( \frac{\lambda_1}{r_0} r_1 \right) \right]^2 \quad (3.6)$$

Finalmente, escribimos la ecuación (3.5) de la forma

$$\frac{|\bar{J}_r|^2}{|\bar{J}_T(r_1, L_0)|^2} = 1 - \frac{A^2}{\zeta^2} \quad (3.7)$$

en donde  $A^2$  es una constante definida por

$$A^2 = \frac{\left[ k T_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) J_0\left(\frac{\lambda_1}{r_0} r_1\right) \right]^2}{r_1^2 |\bar{J}_T(r_1, L_0)|^2} \quad (3.8)$$

mientras que

$$\zeta^2 = \frac{L_0^2}{r_1^2} \quad (3.9)$$

representa el cambio de variable, el cual aumenta a medida que  $L_0$  se incrementa con respecto a  $r_1$ .

De este modo, la ecuación (3.7) advierte que si la longitud de la cavidad aumenta mucho más rápido que el radio, entonces  $\zeta^2 \rightarrow \infty$  y, por lo tanto, el segundo elemento del miembro derecho de la ecuación (3.7) tiende a cero. Así, la relación entre el flujo de calor en la dirección del radio y el flujo de calor total tiende a uno.

Esto significa que cuando la longitud del cilindro sea mucho

mayor que el radio, el flujo de calor total tiene como única componente el flujo de calor radial, debido a que la componente del flujo de calor correspondiente al eje del sistema termodinámico tiende a cero.

La gráfica de la ecuación (3.7) se muestra en la figura (3.1). En la figura se observa que si  $L_0 \gg r_1$ , el flujo de calor en la dirección del radio corresponde al flujo de calor total dentro del sistema termodinámico.

Consideremos ahora la ecuación (2.15) y desarrollemos el mismo procedimiento que se hizo con (2.10).

De acuerdo a (2.15), el flujo de calor transmitido por la tapa superior del cilindro hacia la cavidad es determinado por la siguiente igualdad

$$\bar{J}_{11}(r, L_0) = k T_1 J_0(\alpha r) \left[ \alpha \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \frac{\Delta}{r} - \beta_1 \text{Coth}(\beta_1 L_0) \frac{\Delta}{2} \right]$$

El primer elemento del miembro derecho de la ecuación anterior corresponde al flujo de calor  $\bar{J}_{1r}$  en la dirección del radio, mientras que el segundo elemento representa el flujo de calor  $\bar{J}_{1z}$  a lo largo del eje del cilindro.

La magnitud del flujo de calor transmitido está dado por la siguiente igualdad

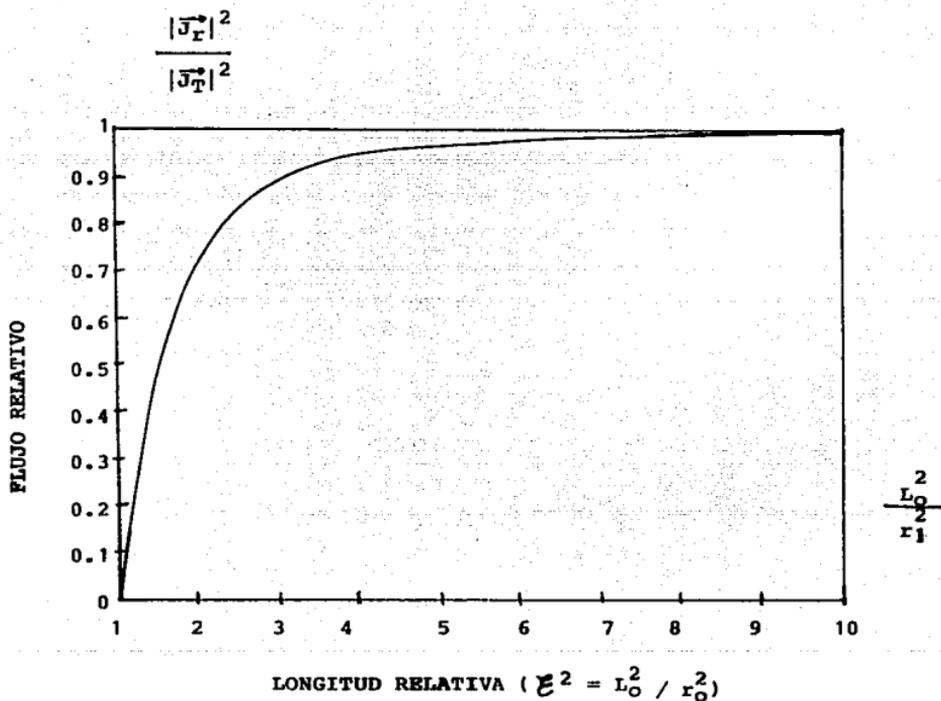


Figura 3.1: Relación entre el flujo de calor radial y el flujo total. Cuando  $L_0 \gg r_1$ , el flujo de calor total tiende a un valor correspondiente a la magnitud del flujo de calor en la dirección del radio. Para este caso la componente en la dirección a lo largo del eje del cilindro tiende a cero.

$$\|\bar{J}_{1T}(r, L_0)\|^2 = [k T_1 \alpha J_1]^2 + [k T_1 \beta_1 J_0 \text{Coth}(\beta_1 L_0)]^2 \quad (3.10)$$

Vamos a suponer que mantenemos fijo un valor del radio, digamos  $r_1$ . Al dividir la ecuación (3.10) entre  $\|\bar{J}_{1T}(r_1, L_0)\|^2 \neq 0$  y con un sencillo desarrollo algebraico tenemos

$$\frac{\|\bar{J}_{1z}\|^2}{\|\bar{J}_{1T}(r_1, L_0)\|^2} = 1 - \frac{[k T_1 \lambda_1 J_1(\alpha r_1)]^2}{L_0^2 \left(\frac{r_0^2}{L_0^2}\right) \|J_{1T}(r_1, L_0)\|^2} \quad (3.11)$$

en donde se ha utilizado la relación para  $\alpha$  dada por (1.19). y la magnitud del flujo de calor  $\|\bar{J}_{1z}\|^2$  en la dirección del eje de la cavidad es determinado por

$$\|\bar{J}_{1z}\|^2 = [k T_1 \beta_1 J_0(\alpha r_1) \text{Coth}(\beta_1 L_0)]^2 \quad (3.12)$$

La ecuación (3.11) toma la forma

$$\frac{\|\bar{J}_{1z}\|^2}{\|\bar{J}_{1T}(r_1, L_0)\|^2} = 1 - \frac{B^2}{\xi^2} \quad (3.13)$$

en donde la cantidad  $B^2$  se define como una constante la cual se determina por

$$B^2 = \frac{[k T_1 \lambda_1 J_1(\alpha r_1)]^2}{L_0^2 [J_{1T}(r_1, L_0)]^2} \quad (3.14)$$

mientras que

$$\xi^2 = \frac{r_0^2}{L_0^2} \quad (3.15)$$

representa el cambio de variable, el cual aumenta a medida que  $r_0$  se incrementa con respecto a  $L_0$ .

Análogamente a (3.7), la ecuación (3.13) muestra que si variamos  $r_0$  de tal modo que  $r_0 \gg L_0$ , entonces  $\xi^2 \rightarrow \infty$ , lo cual significa que si el radio de la cavidad es mucho mayor que su longitud, el segundo elemento del miembro derecho de (3.13) tiende a cero y, por lo tanto, el flujo de calor total dentro de la cavidad corresponde al flujo en la dirección del eje del sistema.

La gráfica de la ecuación (3.13) se muestra en la figura (3.2). En la figura se observa que si  $r_0 \gg L_0$ , entonces dentro del sistema el flujo de calor es laminar.

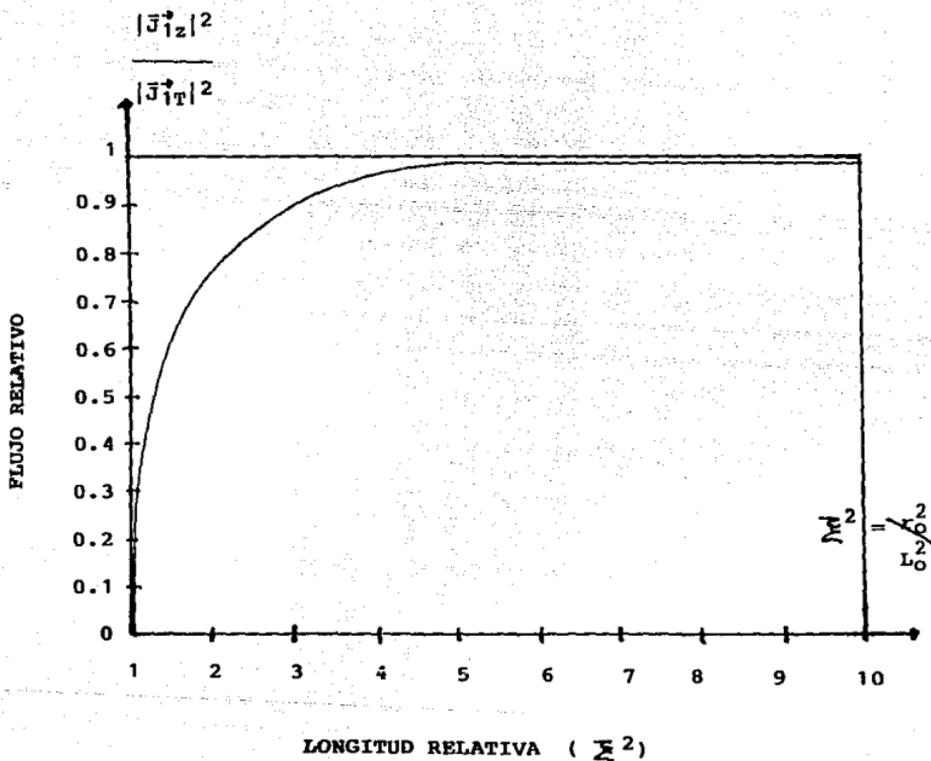


Figura 3.2: Relación entre el flujo de calor azimutal y el flujo total. Si  $r_0 \gg L_0$ , entonces el flujo de calor total es paralelo al eje de la cavidad cilíndrica.

### 3.2 LEY DE FOURIER EN SISTEMAS CON SUPERFICIE ISOTERMA: LA APROXIMACION CUASI-CONSTANTE PARA EL FLUJO DE CALOR LAMINAR.

El resultado central del segundo capítulo radica en considerar que, si en la superficie superior del cilindro la temperatura es función de la variable radial, entonces dentro de la cavidad cilíndrica el flujo de calor total está determinado por la ley generalizada de Fourier ecuación (3.1), la que contempla claramente las componentes del flujo en las direcciones de  $\hat{r}$  y  $\hat{z}$ .

Vamos a modificar por un instante el planteamiento del problema inicial descrito en la sección 1.3 con el propósito de demostrar que existe una región cilíndrica dentro de la cavidad en la cual el flujo de calor es laminar.

Para determinar el cálculo de una nueva condición, se considera una cavidad cilíndrica de radio  $R_0$ . Se supone también, que dentro de la cavidad cilíndrica, la distribución de temperatura está dada, de acuerdo a los resultados obtenidos en el primer capítulo, por

$$T(r, z) = T_0 J_0(\alpha r) e^{-\beta z} \quad (3.16)$$

en donde claramente se observa la dependencia radial.

Además, el flujo de calor total dentro de este sistema, se

determina por la ley generalizada de Fourier, en la que se observa que las líneas de flujo constituyen un problema bidimensional, la cual está representada por la ecuación (3.1).

Por el momento el objetivo es determinar la condición bajo la cual la componente radial de la ley generalizada de Fourier sea próximo a cero.

Esta condición se obtiene a partir del comportamiento gráfico de la función  $J_1(\alpha r)$ , en la que se observa que para valores del argumento tales que  $\alpha r \ll 1$ , se tiene que  $J_1(\alpha r) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, para el caso en el que  $\alpha r \ll 1$ , la contribución radial al flujo de calor total se anula, y de esta manera, la ley generalizada de Fourier representa el flujo de calor en la dirección a lo largo del eje del sistema, es decir

$$\bar{J}_T(z) = k \beta \frac{T(z) - T_0}{1 - e^{-\beta z}} \hat{\Delta}$$

Nótese que en la última expresión se ha escrito  $T(z)$  en lugar de  $T(r, z)$ , la razón estima del mismo hecho en que para  $\alpha r \ll 1$ , la función de Bessel  $J_0$  tiende a uno y, por lo tanto, como resultado de la ecuación (3.16) se tiene

$$T(r, z) = T_0 J_0(\alpha r) e^{-\beta z} \approx T(z) = T_0 e^{-\beta z} \quad (3.17)$$

Debemos hacer hincapié en que la condición sobre el argumento  $\alpha r$  de la función de Bessel  $J_1$  nos determina la región dentro del cilindro en la cual el flujo de calor es laminar. La base de este argumento radica en las mismas características de la condición, debido a que si  $\alpha r \ll 1$ , entonces.

$$r \ll \frac{R_0}{2.405} \approx \frac{2}{5} R_0 \quad (3.18)$$

Por lo tanto, en la región cilíndrica de radio  $r_0$  menor que  $2/5 R_0$ , el flujo de calor es laminar, mientras que para radios mayores, el flujo tiene componentes radiales. Figura (3.3).

La aproximación dada por (3.17), muestra además, que en la tapa superior del cilindro de radio  $r_0$ , la temperatura puede ser considerada como una constante. De esta manera, se considerara necesario que para obtener el flujo de calor total en una sola dirección, la temperatura de la tapa superior de la cavidad cilíndrica debe permanecer constante a lo largo de toda la superficie, y de este modo, el problema de conducción de calor en dos dimensiones se transforma en un problema unidimensional.

Finalmente, la aproximación, que determina la región del flujo laminar dentro del sistema, la llamaremos aproximación cuasi-constante.

Ahora vamos a determinar cuáles serían las condiciones

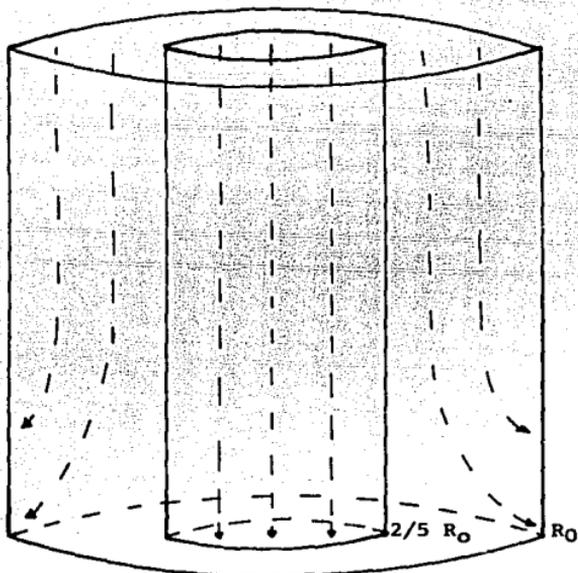


Figura 3.3: En la región cilíndrica de radio menor que  $2/5 R_0$  el flujo de calor es laminar. Para regiones de radio mayor existen componentes en las dos direcciones.

operacionales para un sistema termodinámico con simetría cilíndrica y con tapa superior a temperatura constante.

Con este propósito, resulta evidente que la pared lateral y la tapa superior del cilindro no deben estar en contacto térmico uno con otro (condición de aislamiento). De lo contrario, existirá un gradiente de temperatura entre ellos y por lo tanto un flujo de calor en la dirección del gradiente, que en este caso corresponde a la dirección del radio. De esta manera, habrá una transmisión de energía en forma de calor que evitará que en la tapa superior la temperatura permanezca constante.

Sin embargo, es posible impedir el contacto térmico a través de una pared adiabática, de tal manera que la tapa superior y la pared lateral del cilindro se encuentren aislados y, por lo tanto, evitar el flujo de calor y garantizar que la superficie superior sea una isoterma.

Es posible que en la práctica deba considerarse una pérdida de la energía transmitida en el punto de contacto tapa-superficie lateral del cilindro, debido a que el aislamiento perfecto no existe.

El gradiente generado por dichas pérdidas, puede ser muy grande debido a la presencia de una diferencia de temperatura en un pequeño anillo muy próximo a la frontera de la superficie lateral. En tal caso, para compensar las pérdidas, el suministro del correspondiente flujo de energía será la condición necesaria para mantener la superficie superior a temperatura constante.

Además de la condición de aislamiento mencionada antes, se requiere de un suministro uniforme de calor a lo largo de toda la tapa superior del cilindro. De esta forma se evita la dependencia de la temperatura en la dirección del radio.

Bajo estas condiciones, la función de distribución dada por la ecuación (3.17) se reduce al caso

$$T(z) = T_0 e^{-\beta z} \quad (3.19)$$

en donde claramente se observa la independencia radial.

La ecuación (3.19) no debe interpretarse como una aproximación matemática sobre la solución, sino como una condición física consecuencia de la constancia de la temperatura en la superficie.

A pesar del comentario anterior, aún se considera posible escribir la última relación como

$$T(z) = \epsilon T_0 e^{-\beta z}$$

en donde  $\epsilon$  es el factor que reditúa de la función  $J_0(u)$  como resultado de ser una función constante. Sin embargo, como

cualquier constante que sea factor de  $T_0$  seguirá representando la temperatura en la función de distribución, se mantiene escribiendo  $T_0$  y sin pérdida de generalidad hacemos  $c = 1$  y la consecuencia se muestra en la ecuación (3.19).

A partir de la solución (3.19), podemos representar matemáticamente la variación de la temperatura  $T(z)$  con respecto a la de la superficie inferior, tomando en cuenta que para esta superficie en  $z = 0$ , de la ecuación (3.19) se obtiene que la temperatura es  $T_0$ . La variación de la temperatura la damos por

$$T(z) - T_0 = T_0 (e^{-\beta z} - 1) \quad (3.20)$$

Por otra parte, el flujo de calor total dentro de la cavidad estará determinado por la ley de Fourier, en donde el operador gradiente actúa sobre (3.20), esto es

$$\bar{J}_T(z) = -k \nabla (T(z) - T_0) \quad (3.21)$$

Pese a la simetría del sistema termodinámico, el operador gradiente de la ecuación (3.21) se escribe en su forma más sencilla respecto a la variable  $z$

$$\bar{J}_T(z) = -k \frac{d}{dz} (T(z) - T_0) \frac{\Delta}{z} \quad (3.22)$$

Con el apoyo de (3.20), la relación (3.22) se transforma en

$$\bar{J}_T(z) = k \beta T_0 e^{-\beta z} \frac{\Delta}{z} \quad (3.23)$$

Utilizando el resultado de la relación (3.20) se tiene

$$T_0 = \frac{T(z) - T_0}{e^{-\beta z} - 1} \quad (3.24)$$

Finalmente, si se introduce el valor de (3.24) en la ecuación (3.23), obtenemos el flujo de calor total en cualquier punto dentro de la cavidad cilíndrica

$$\bar{J}_T(z) = k \beta \frac{T(z) - T_0}{1 - e^{\beta z}} \frac{\Delta}{z} \quad (3.25)$$

Este resultado nos indica que las líneas de flujo calorífico tienen una sola dirección y es a lo largo del eje del cilindro. En

contra punto al considerar que, si la temperatura de la superficie superior depende del radio, entonces el flujo de calor total es a lo largo de las dos direcciones.

Como en esta superficie la temperatura permanece constante, las líneas de flujo son paralelas al eje del sistema y entonces dentro de la cavidad cilíndrica el flujo de calor es laminar.

### 3.3 FORMA GENERAL DE DOS PARAMETROS CARACTERISTICOS: LA INTENSIDAD DE TEMPERATURA Y LA CONSTANTE DE TIEMPO.

El objetivo principal de esta sección es obtener la expresión general para la intensidad de temperatura y la constante de tiempo, parámetros que se caracterizan en sistemas no estacionarios. Además, se demostrará que estos parámetros dependen de las dimensiones geométricas del sistema.

Para llevar a cabo este objetivo, se considera que el sistema recibe una cantidad de calor  $J$  constante y uniforme.

El punto inicial del tratamiento es realizar un balance de energía<sup>11</sup> en el sistema termodinámico. Basado en el principio de conservación, el balance de energía es determinado mediante la relación

$$- J A + J_T A = - c \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} \quad (3.26)$$

El primer elemento del miembro izquierdo de (3.26) representa la energía que se suministra a la superficie superior del

cilindro, mientras que el segundo término es la energía que corresponde al flujo de calor total transmitido dentro del sistema. El miembro derecho de esta misma ecuación es el correspondiente al cambio de energía interna en el sistema termodinámico o la energía absorbida por el cilindro.

En la ecuación (3.26)  $c$  es la capacidad térmica del material de la tapa superior a volumen constante,  $J$  es la energía que ésta absorbe por unidad de área y tiempo,  $J_T$  es el flujo de calor total transmitido dentro del cilindro y  $A$  es el área de la superficie superior.

Si sustituimos el término correspondiente a la magnitud del flujo de calor total  $\bar{J}_T(r, z)$ , dado por la expresión (3.1), en la ecuación de balance (3.26), esta relación se transforma en

$$- J A + A k \frac{T(r, z, t) - T_0}{J_0(\alpha r) - e^{\beta z}} \left[ \alpha^2 J_1^2 + \beta^2 J_0^2 \right]^{1/2} = - c \frac{\delta T(r, z, t)}{\delta t} \quad (3.27)$$

en la que por comodidad se ha escrito  $J_1$  y  $J_0$  en lugar de  $J_1(\alpha r)$  y  $J_0(\alpha r)$ , respectivamente.

Con el objeto de facilitar los subsecuentes cálculos, vamos a definir las siguientes funciones

$$T(r, z, t) = T(r, z, t) - T_0 \quad \text{y} \quad \tau(r, z) = \frac{c}{A k} F(r, z) \quad (3.28)$$

en donde  $F(r, z)$  es una función definida por

$$F(r, z) = \frac{J_0(\alpha r) - e^{\beta z}}{[\alpha^2 J_1^2(\alpha r) + \beta^2 J_0^2(\alpha r)]^{1/2}} \quad (3.29)$$

entonces, la ecuación (3.27) se escribe

$$-\frac{J F(r, z)}{k} + T(r, z, t) = -\tau \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t}$$

o bien

$$U(r, z, t) = -\tau \frac{\partial U(r, z, t)}{\partial t} \quad (3.30)$$

en donde  $U(r, z, t)$  queda definida por la relación

$$U(r, z, t) = -\frac{J F(r, z)}{k} + T(r, z, t) \quad (3.31)$$

Si suponemos que  $J$  y los otros parámetros son independientes del tiempo, es posible integrar la ecuación (3.30) con la condición de que para un tiempo  $t = 0$ , la temperatura sea  $T_0$ , mientras que para un tiempo  $t$  arbitrario sea  $T(r, z, t)$ .

Sin embargo, estas condiciones se transformarán debido al cambio de variable (3.28) y (3.31).

En efecto, si suponemos que  $t = 0$ , entonces la temperatura es  $T_0$  y de acuerdo a (3.31),  $U(r, z, 0) = -J F(r, z) / k$ . Además, para un tiempo  $t$  arbitrario se obtiene la función  $U(r, z, t)$ .

El resultado de integrar la ecuación (3.30) y considerar los límites de integración desarrollados antes lo escribimos de la siguiente forma

$$-\frac{t}{\tau} \Bigg|_0^t = \ln U \Bigg|_{U(r, z, 0)}^{U(r, z, t)}$$

por lo que la evaluación nos conduce al resultado

$$U(r, z, t) = U(r, z, 0) e^{-t/\tau}$$

Con las definiciones (3.28) y (3.31), esta última igualdad se transforma en

$$T(r, z, t) = T_0 + \frac{J F(r, z)}{k} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.32)$$

Finalmente, recordando que  $F(r, z)$  fué definida por (3.29), la ecuación (3.32) toma la forma

$$T(r, z, t) = T_0 + \frac{J}{k} \frac{J_0(\alpha r) - e^{\beta z}}{[\alpha^2 J_1^2(\alpha r) + \beta^2 J_0^2(\alpha r)]^{1/2}} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.33)$$

Esta expresión representa la forma general de la distribución de temperatura dentro del cilindro en términos del flujo de calor que incide sobre el sistema.

Por otro lado, definimos a  $\tau(r, z)$  como la constante de tiempo cuya expresión muestra una dependencia con la longitud de la cavidad y el radio. La constante de tiempo se introdujo a través de la ecuación (3.28) y está dada por

$$\tau(r, z) = \frac{c}{A k} \frac{J_0(\alpha r) - e^{\beta z}}{[\alpha^2 J_1^2(\alpha r) + \beta^2 J_0^2(\alpha r)]^{1/2}} \quad (3.34)$$

en donde se ha utilizado el valor de  $F(r,z)$  dado por (3.29).

Ahora bien, de la ecuación (3.33), la intensidad de temperatura en el sistema es directamente proporcional a la diferencia  $\Delta T = T(r,z,t) - T_0$  y depende experimentalmente del tiempo.

Sin embargo, los estados estacionarios se obtienen cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\Delta T$  queda como función sólo de  $r$  y  $z$ , es decir

$$\Delta T(r,z) = \frac{J}{k} \frac{J_0(\alpha r) - e^{\beta z}}{[\alpha^2 J_1^2(\alpha r) + \beta^2 J_0^2(\alpha r)]^{1/2}} \quad (3.35)$$

De este modo, se ha logrado obtener las expresiones generales para la intensidad de temperatura, ecuación (3.35) y la constante de tiempo, (3.34). Este par de ecuaciones muestra claramente que los parámetros dependen de las dimensiones geométricas del sistema termodinámico. En efecto, si la longitud del cilindro y del radio varían, la intensidad de temperatura y la constante de tiempo también cambian como resultado de sus expresiones.<sup>11</sup>

Como es evidente, la intensidad de temperatura en condiciones de estado estacionario y la constante de tiempo son proporcionales.

De hecho, utilizando las expresiones (3.34) y (3.35) se tiene

$$\Delta T = \frac{J A}{c} \tau \quad (3.36)$$

lo cual representa la relación matemática entre la intensidad de temperatura y la constante de tiempo.<sup>11</sup>

Ahora desarrollaremos los mismos cálculos anteriores utilizando la ecuación (2.15).

Si sustituimos la magnitud del flujo de calor de la ecuación (2.15) en la ecuación de balance de energía (3.26) obtenemos

$$-J A + A k T_1(r, z, t) \left[ \left( \alpha \frac{J_1}{J_0} \right)^2 + \left( \beta_1 \frac{\text{Cosh}}{\text{Senh}} \right)^2 \right]^{1/2} = -c \frac{\partial T_1(r, z, t)}{\partial t} \quad (3.37)$$

en donde por comodidad se ha escrito sólo  $J_1$  y  $J_0$  en lugar de  $J_1(\alpha r)$  y de  $J_0(\alpha r)$ , respectivamente. Además,  $\text{Cosh}$  y  $\text{Senh}$  en lugar de  $\text{Cosh}(\beta_1 z)$  y  $\text{Senh}(\beta_1 z)$ .

De la misma manera, vamos a definir las siguientes funciones

$$T_1(r, z, t) = \bar{T}_1(r, z, t) \quad \text{y} \quad \tau_1(r, z) = \frac{-c}{A k} F_1(r, z) \quad (3.38)$$

en donde  $F_1(r, z)$  es una función definida por

$$F_1(r, z) = \frac{1}{\left[ \left( \alpha \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \right)^2 + \left( \beta_1 \frac{\text{Cosh}(\beta_1 z)}{\text{Senh}(\beta_1 z)} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.39)$$

De esta manera la ecuación (3.37) se transforma en

$$-\frac{J F_1(r, z)}{k} + T_1(r, z, t) = -\tau_1 \frac{\partial T_1(r, z, t)}{\partial t} \quad (3.40)$$

Sin embargo, la igualdad anterior puede ser transformada para obtener

$$U_1(r, z, t) = -\tau_1 \frac{\partial U_1(r, z, t)}{\partial t} \quad (3.41)$$

en donde  $U_1(r, z, t)$  es la función

$$U_1(r, z, t) = -\frac{J F_1(r, z)}{k} + T_1(r, z, t) \quad (3.42)$$

Si consideramos que  $J$  y los otros parámetros son independientes del tiempo, es posible integrar la ecuación (3.41)

bajo la suposición de que para  $t = 0$  la temperatura  $\Delta T = 0$ , mientras que para un tiempo arbitrario  $t$  la temperatura es  $T_1(r, z, t)$ .

Sin embargo, las consideraciones anteriores se modificarán debido al cambio de variable (3.38) y (3.42).

En efecto, si consideramos que  $t = 0$ , entonces la temperatura es cero y de acuerdo con (3.42),  $U_1(r, z, 0) = - \int F_1(r, z) / k$ . Por otro lado, para un tiempo  $t$ , se tiene la función  $U_1(r, z, t)$ .

Al integrar la ecuación (3.41) bajo las condiciones anteriores se tiene

$$-\frac{t}{\tau_1} \Bigg|_0^t = \ln U_1 \Bigg|_{U_1(r, z, 0)}^{U_1(r, z, t)}$$

Después de evaluar y de un sencillo desarrollo algebraico se obtiene

$$U_1(r, z, t) = U_1(r, z, 0) e^{-t/\tau_1}$$

A partir de las definiciones (3.38) y (3.42), la última igualdad se transforma en

$$T_1(r, z, t) = \frac{J F_1(r, z)}{k} (1 - e^{-t/\tau_1}) \quad (3.43)$$

Finalmente, recordando la forma analítica de  $F_1(r, z)$ , ecuación (3.39), podemos transformar la ecuación (3.43) y reescribirla como

$$T_1(r, z, t) = \frac{J}{k} \frac{(1 - e^{-t/\tau_1})}{\left[ \left( \alpha \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \right)^2 + \left( \beta_1 \frac{\text{Cosh}(\beta_1 z)}{\text{Senh}(\beta_1 z)} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.44)$$

La ecuación (3.44) representa la distribución de temperatura dentro del sistema en términos del flujo de calor que incide sobre el cilindro.

La constante de tiempo se introdujo a través de la ecuación (3.38), la cual al sustituir la expresión de (3.39) se modifica en

$$\tau_1(r, z) = \frac{c}{A k} \frac{1}{\left[ \left( \alpha \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \right)^2 + \left( \beta_1 \frac{\text{Cosh}(\beta_1 z)}{\text{Senh}(\beta_1 z)} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.45)$$

en donde se muestra una dependencia con las dimensiones

geométricas del sistema termodinámico.

La intensidad de temperatura en la cavidad es directamente proporcional a  $T_1(r, z, t)$  y depende experimentalmente del tiempo.

Sin embargo, los estados estacionarios<sup>11</sup> se obtienen cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $T_1(r, z)$  es una función sólo de  $r$  y  $z$ , en efecto

$$T_1(r, z) = \frac{J}{k} \frac{1}{\left[ \left( \alpha \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \right)^2 + \left( \beta_1 \frac{\text{Cosh}(\beta_1 z)}{\text{Senh}(\beta_1 z)} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.46)$$

Las ecuaciones (3.45) y (3.46) muestran claramente que estos parámetros dependen de las dimensiones geométricas del sistema.

Finalmente, utilizando las expresiones para la intensidad de temperatura en condiciones de estado estacionario y la constante de tiempo se tiene

$$\Delta T_1 = \frac{J A}{c} \tau_1 \quad (3.47)$$

expresión que determina la relación matemática entre estos dos parámetros.

### 3.4 LA INTENSIDAD DE TEMPERATURA Y LA CONSTANTE DE TIEMPO: LAS MODIFICACIONES EN CONDICIONES DE FLUJO LAMINAR

En la sección anterior se encontró la forma general para la intensidad de temperatura y la constante de tiempo. Se demostró que estos parámetros dependen tanto de la longitud de la cavidad y del radio y se desarrolló una relación matemática entre ellos.

El siguiente propósito es simplificar las expresiones generales obtenidas para los dos parámetros de la sección anterior. Las ecuaciones que representan tanto la intensidad de temperatura como la constante de tiempo, serán aproximadas cuando se introduzca la condición que dentro del cilindro el flujo de calor total es laminar.

Vamos a suponer que la superficie de la tapa superior del cilindro se encuentra a temperatura constante. De acuerdo a los resultados obtenidos en la sección 3.2, la distribución de temperatura dentro del sistema es independiente de la variación radial y depende exclusivamente de  $z$ . Si la tapa superior es una isoterma, entonces dentro del sistema el flujo de calor es laminar, y por lo tanto, la variación en la dirección del radio será despreciable.

Vamos a considerar primero las aproximaciones sobre la constante de tiempo, ecuación (3.34), y de una forma análoga se modificará la intensidad de temperatura, ecuación (3.35).

En la sección anterior se encontró que la constante de tiempo tiene la forma

$$\tau(r, z) = \frac{c}{A k} \frac{J_0(\alpha r) - e^{\beta z}}{[\alpha^2 J_1^2(\alpha r) + \beta^2 J_0^2(\alpha r)]^{1/2}}$$

en donde claramente se muestra que depende de las dimensiones geométricas del cilindro a lo largo del radio y de su propio eje.

Sin embargo, si consideramos que dentro del sistema el flujo de calor es laminar, entonces la variación a lo largo del radio se considera despreciable y, por lo tanto, la constante de tiempo depende sólo de la longitud a lo largo del eje de simetría.

Además, de las condiciones establecidas en la sección 3.2, las funciones de Bessel de orden cero y uno tienden a los valores uno y cero, respectivamente.

Tomando en cuenta las condiciones anteriores, la constante de tiempo se transforma en una función sólo de  $z$ <sup>11,12</sup>

$$\tau(z) = \frac{c}{k \beta A} (1 - e^{\beta z}) \quad (3.48)$$

en donde se muestra que en condiciones de flujo laminar depende de

la longitud de la cavidad. La gráfica de la ecuación (3.48) se muestra en la figura (3.4).

Como consecuencia de ser una función exponencial, la constante de tiempo presenta un valor asintótico a medida que el argumento tiende al infinito. El valor asintótico de la ecuación (3.48) sobre esta tendencia es  $c / k\beta A$ .

Ahora vamos a considerar la ecuación para la intensidad de temperatura, ésta es dada por

$$\Delta T(r, z) = \frac{J}{k} \frac{J_0(\alpha r) - e^{-\beta z}}{[\alpha^2 J_1^2(\alpha r) + \beta^2 J_0^2(\alpha r)]^{1/2}}$$

Al igual que la constante de tiempo, la intensidad de temperatura muestra también una dependencia en las dimensiones geométricas del sistema.

Sin embargo, de forma análoga que en el caso de la constante de tiempo, se emplearán las aproximaciones sobre las funciones de Bessel para simplificar la intensidad de temperatura. Este hecho nos conduce a escribir la última igualdad como<sup>11,12</sup>

$$\Delta T(z) = \frac{J}{k \beta} (1 - e^{-\beta z}) \quad (3.49)$$

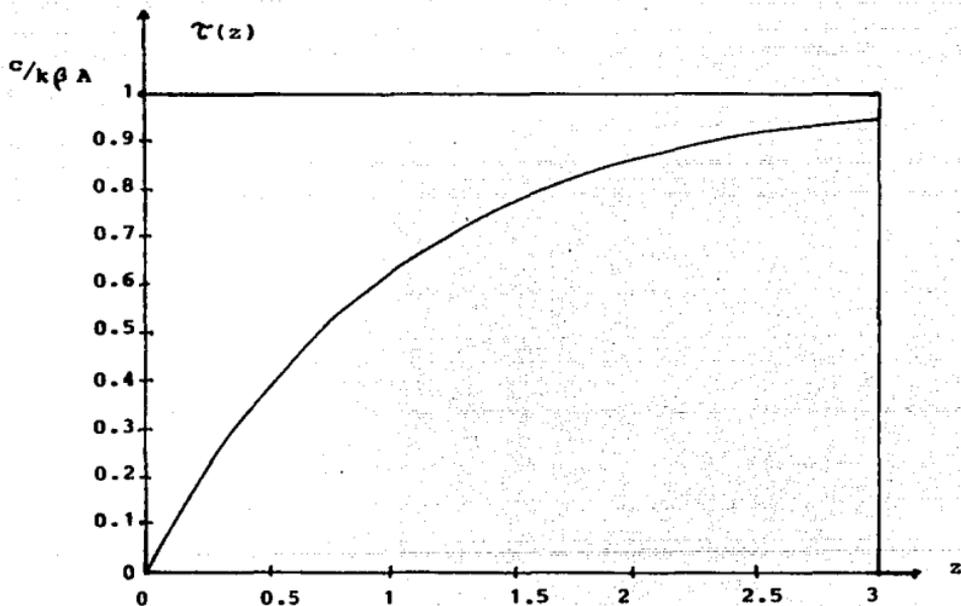


Figura 3.4: Gráfica de la constante de tiempo en términos de la longitud del cilindro. La relación que describe esta curva es

$$\tau(z) = \frac{c}{k \beta A} (1 - e^{-\beta z})$$

En donde se observa también, que en condiciones de flujo laminar, la intensidad de temperatura depende únicamente de la longitud del sistema. La gráfica de la ecuación (3.49) se muestra en la figura (3.5).

La ecuación (3.49) presenta también un valor asintótico cuando el argumento tiende a infinito. El valor asintótico para la intensidad de temperatura es  $J / k\beta$ .

A continuación, vamos a simplificar las ecuaciones para la intensidad de temperatura y la constante de tiempo, ecuaciones (3.46) y (3.45), respectivamente, bajo la suposición de que la tapa superior del cilindro es una isoterma.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la sección 3.2, la distribución de temperatura dentro del sistema es independiente de la variación radial y depende exclusivamente de la longitud  $z$ .

Por lo tanto, dentro del sistema termodinámico el flujo de calor es laminar, y así, la variación en la dirección del radio se considera despreciable.

Bajo estas condiciones, se hace una aproximación sobre las funciones de Bessel  $J_0(\alpha r)$  y  $J_1(\alpha r)$  de tal modo que tiendan a los valores de uno y cero, respectivamente.

Entonces, la constante de tiempo dada por la ecuación (3.45) se transforma en

$$\tau_1(z) = \frac{c}{k \beta_1 A} \text{Tanh}(\beta_1 z) \quad (3.50)$$

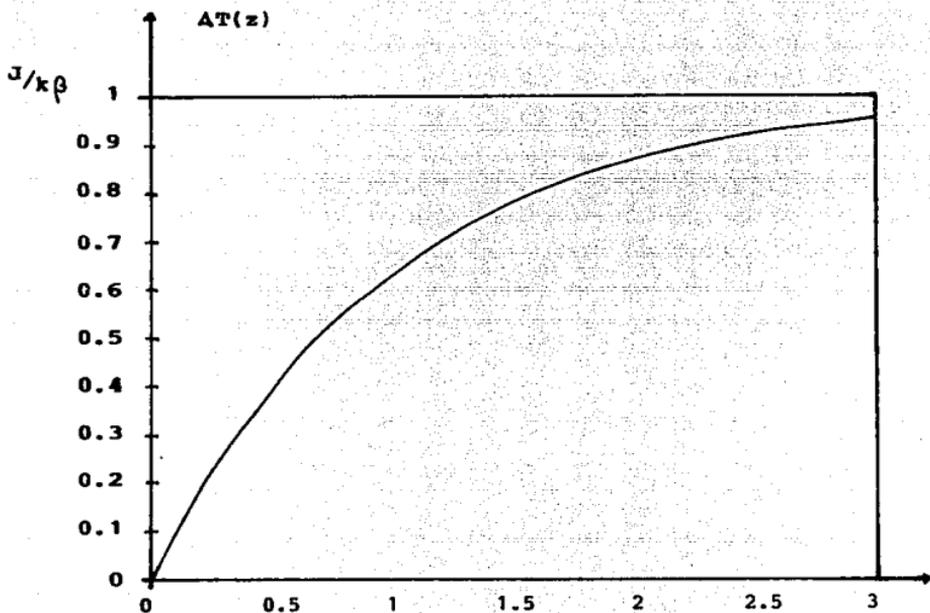


Figura 3.5: Gráfica de la intensidad de temperatura en términos de la longitud del sistema. La ecuación que describe este comportamiento es

$$\Delta T(z) = \frac{J}{k\beta} (1 - e^{-\beta z})$$

en donde se muestra que en condiciones de flujo laminar depende de la longitud. La gráfica de la ecuación (3.50) se muestra en la figura (3.6), en la que se observa un valor asintótico cuando  $z$  tiende al infinito, dado por  $c / k \beta_1 A$ .

Análogamente, la intensidad de temperatura, dada por la ecuación (3.46) bajo condiciones de flujo laminar se modifica para obtener

$$T_1(z) = \frac{J}{k \beta_1} \text{Tanh}(\beta_1 z) \quad (3.51)$$

que en condiciones de flujo laminar depende de la longitud. La gráfica de la ecuación (3.51) se presenta en la figura (3.7), en la cual se observa un valor asintótico dado por  $J / k \beta_1$ , para cuando  $z \rightarrow \infty$ .

De este modo, se han presentado los parámetros en forma general como función de  $r$  y  $z$ , para después, bajo condiciones de flujo laminar, se modifiquen y simplifiquen al caso de una sola variable.

Al hecho de que tanto la constante de tiempo como la intensidad de temperatura sean funciones de la longitud de la cavidad, se le da el nombre de efecto cavidad.<sup>12</sup>

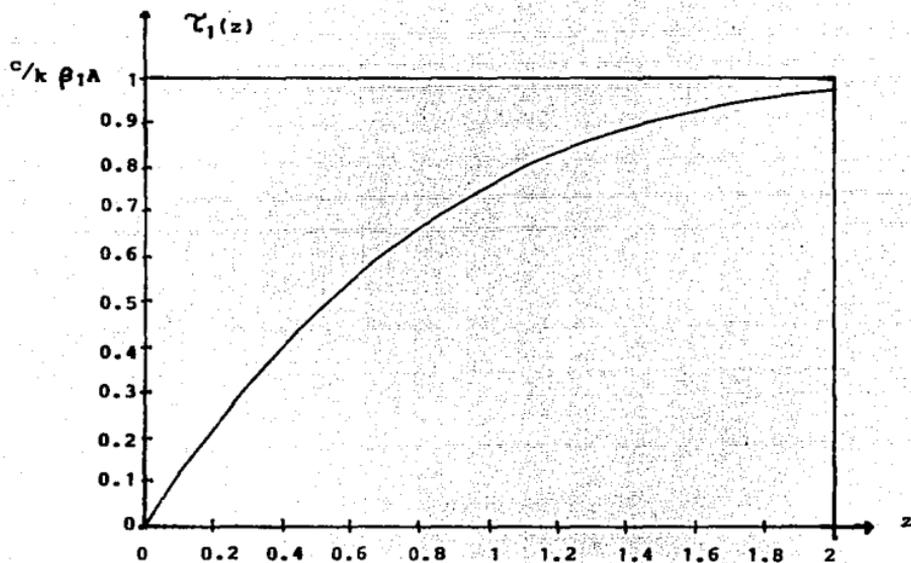


Figura 3.6: Relación entre la constante de tiempo y la longitud del sistema. La ecuación relacionada con esta curva es

$$\tau_1(z) = \frac{c}{k\beta_1A} \operatorname{Tanh}(\beta_1 z)$$

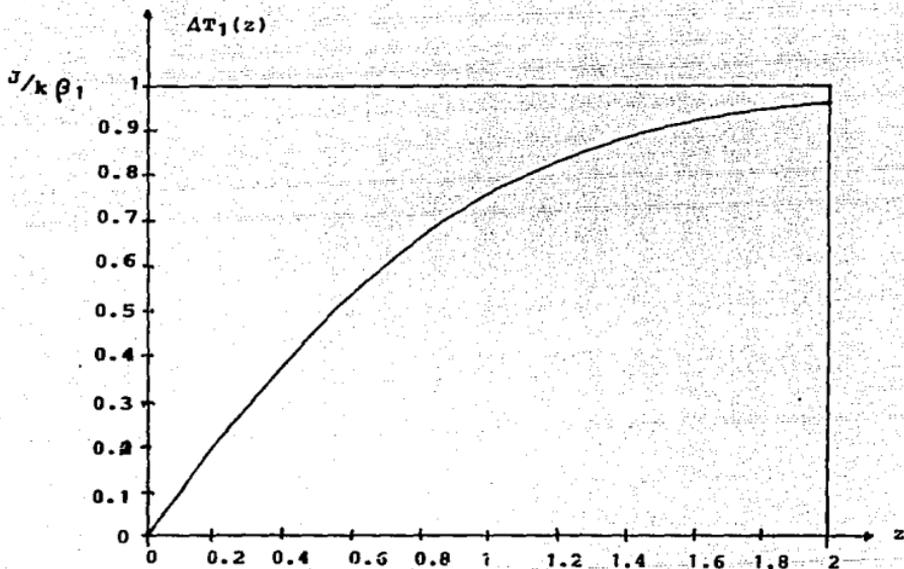


Figura 3.7: Relación entre la intensidad de temperatura y la longitud del cilindro. La relación que describe el comportamiento de esta curva es

$$\Delta T_1(z) = \frac{J}{k \beta_1} \text{Tanh} (\beta_1 z)$$

## IV

### PROBLEMAS DE OPTIMIZACION EN LA UTILIZACION DEL FLUJO DE CALOR

4.1 DESCRIPCION DEL PIRANOMETRO: UNA CAVIDAD CILINDRICA DE  
LONGITUD VARIABLE.

4.2 EL ALTO HORNO: LA DISTRIBUCION DE TEMPERATURA EN LAS ESTUFAS.

#### 4.1 DESCRIPCION DEL PIRANOMETRO: UNA CAVIDAD CILINDRICA DE LONGITUD VARIABLE.

Desde la aparición del primer transductor termoeléctrico en la medición de la radiación solar, se ha considerado que tanto la intensidad de temperatura y la constante de tiempo representan parámetros constantes en una termopila, sin que existiera una relación matemática entre ellos. Sin embargo, la experiencia con nuevos tipos de transductores demuestran que ambos parámetros dependen del tamaño de la cavidad sobre la cual está montada la termopila.

Crova en 1890 hizo un avance revolucionario en el campo de la medición de la radiación solar con la introducción de un sensor termoeléctrico en un Piranómetro.

Un Piranómetro como el de la figura (4.1), consiste de una termopila con simetría radial colocada sobre un sustrato de mica. La termopila se coloca dentro de un hemisferio de vidrio, con las uniones frías en contacto térmico con la masa del aparato y las uniones calientes sobre una cavidad cilíndrica de longitud variable que se encuentra llena de aire. La cavidad está encerrada en el fondo por medio de un pistón plano con cuerda. La longitud de la cavidad puede ser variada cuando se aplica una torca sobre los huecos esféricos del botón cónico, el cual es libre de girar respecto al cuerpo del dispositivo. Por otra parte, el pistón no

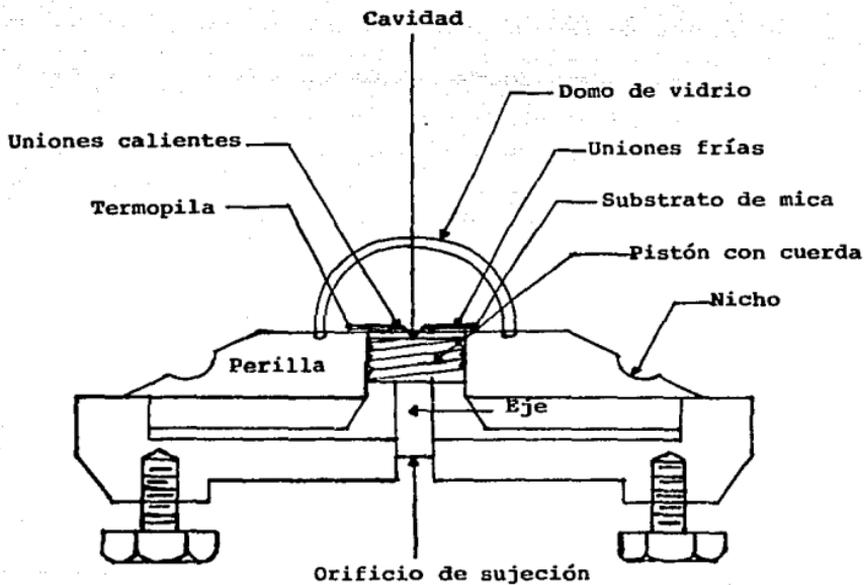


Figura 4.1: Piranómetro de longitud variable.

está dispuesto a rotar por sí mismo, debido al ajuste entallado de la cuerda y al hueco de sección recta de la parte media del dispositivo, que permite el movimiento de rotación y desplazamiento axial. De esta manera la distancia entre la termopila y el pistón es medida exactamente por medio de una escala circular gravada en la periferia visible del instrumento. La característica principal de este Piranómetro es la variabilidad de la intensidad de temperatura y la constante de tiempo, el cual es producido por los cambios del volumen de aire en la cavidad bajo la termopila.

Vamos a suponer que experimentalmente la temperatura de la termopila se mantiene constante por medio de una fuente de luz perfectamente caracterizada que incide sobre ella. En estas condiciones, la tapa superior del cilindro forma una isoterma.

Sin embargo, en la región cuando  $r \rightarrow r_0$ , existirá un gradiente de temperatura entre la termopila y la pared lateral del cilindro, como resultado de la diferencia de temperatura entre estas dos partes. Como se observa en la figura (4.2).

La región  $\Delta r$  donde se encuentra el gradiente, depende de la cantidad de energía que incida sobre la termopila; así, cuanto mayor sea la energía incidente,  $\Delta r$  disminuye pero no se anula. Este gradiente permitirá un flujo de calor en la dirección del radio.

Para nuestros propósitos, vamos a suponer que la energía incidente es de tal manera que la región donde existe el

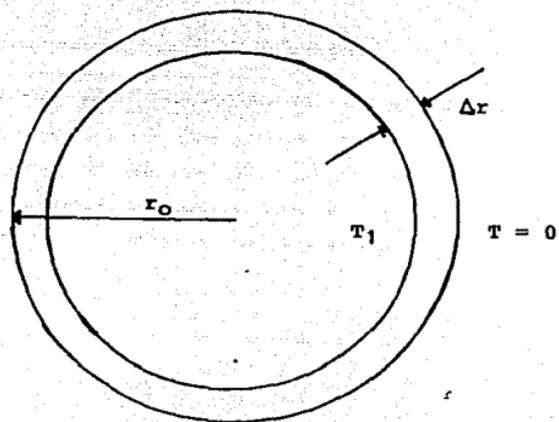


Figura 4.2: La temperatura de la termopila es  $T_1$  mientras que la de la pared lateral es cero, lo que ocasiona un gradiente en la región  $\Delta r$ .

gradiente la podemos despreciar y considerar, por lo tanto, que la termopila representa una superficie a temperatura constante. De este modo, la temperatura en la tapa superior será una función que depende de su altura y es independiente del radio.

Cuando experimentalmente se varía la longitud de la cavidad, se observa variación en la intensidad de temperatura y en la constante de tiempo. Los resultados experimentales<sup>11</sup> se muestran en la gráfica de la figura (4.3) y (4.4), respectivamente.

En condiciones de flujo laminar, la intensidad de temperatura  $\Delta T_1(z)$  es directamente proporcional a la longitud  $z$ , como lo asegura la ley de Fourier canónica. Sin embargo, las curvas de estos parámetros muestran un comportamiento lineal para valores en los que  $z \rightarrow 0$ , y cuando  $z \rightarrow \infty$ ,  $\Delta T_1(z)$  tiende a un valor asintótico, lo cual contradice a la ley de Fourier canónica.

Con el objeto de explicar el comportamiento experimental de estos parámetros, vamos a utilizar los resultados obtenidos en las secciones anteriores a un piranómetro cuya cavidad cilíndrica es de longitud variable, del que se obtiene teóricamente la forma de la variación de la intensidad de temperatura y de la constante de tiempo en función de la longitud y se demuestra que están relacionados matemáticamente por una expresión lineal simple.<sup>11</sup>

Si las condiciones a la frontera del piranómetro son que tanto la pared lateral del cilindro como la superficie inferior se mantengan a la misma temperatura, entonces nuestro sistema presenta la misma forma, en cuanto a las condiciones a la

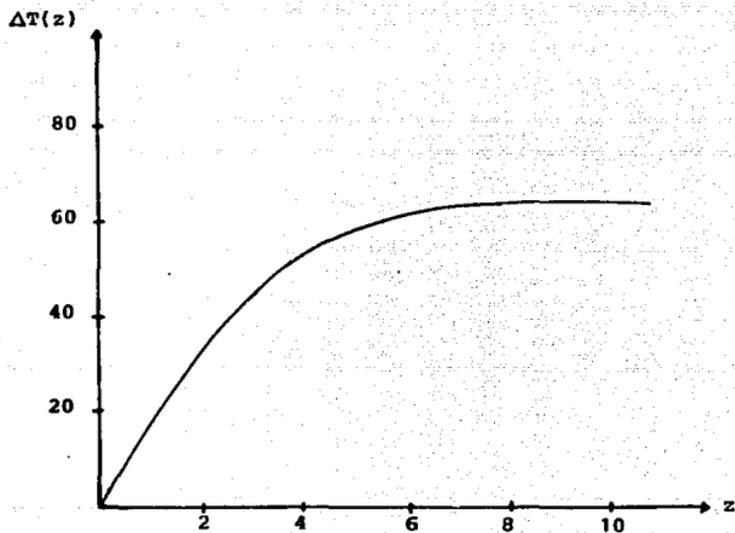


Figura 4.3: El comportamiento experimental de la intensidad de temperatura  $\Delta T(z)$  en función de la longitud de la cavidad.

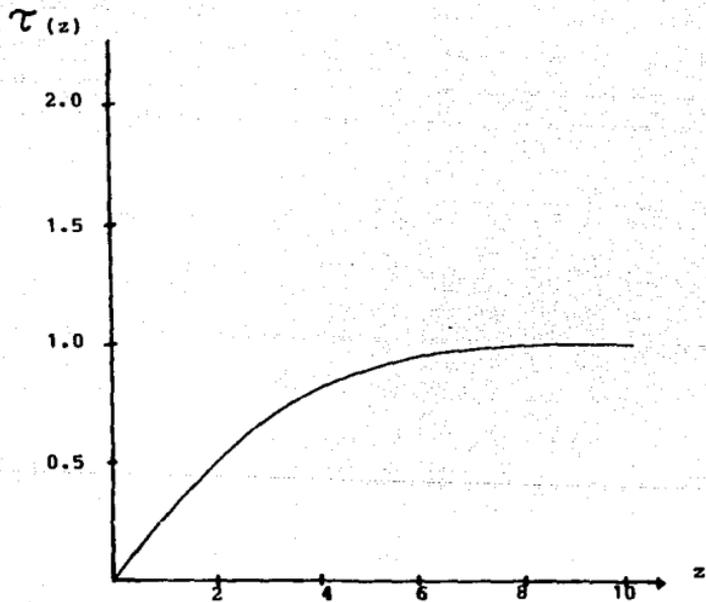


Figura 4.4: El comportamiento experimental de la constante de tiempo  $\tau(z)$  en función de la longitud de la cavidad.

frontera, que el problema descrito en la sección 1.4. Por consiguiente, la función de distribución de temperatura dentro de la cavidad cilíndrica en términos del flujo de energía incidente  $J$ , es dada por la ecuación (3.44), que representa una función en términos de las variables espaciales y temporales. Sin embargo, si dentro de la cavidad consideramos condiciones de flujo laminar, la ecuación (3.44) se transforma en

$$\Delta T_{1_{\max}}(L_0, t) = \frac{J}{k \beta_1} \text{Tanh}(\beta_1 L_0) (1 - e^{-t/\tau_1}) \quad (4.1)$$

en donde  $\Delta T_{1_{\max}}(L_0, t) = T_1(L_0, t) - T_0$  es la intensidad de temperatura máxima que el sistema puede alcanzar,  $T_0$  es la temperatura de la pared lateral y  $L_0$  es la longitud del cilindro.

Si introducimos una nueva constante  $g^{11}$  dada por

$$g = k \beta_1 A \quad (4.2)$$

entonces de la relación (4.1) se sigue que

$$\Delta T_{1_{\max}}(L_0, t) = \frac{J A}{g} \text{Tanh}(g/kA L_0) (1 - e^{-t/\tau_1}) \quad (4.3)$$

La constante de tiempo está dada por la ecuación (3.50), que en términos de la nueva constante  $g$  se transforma en

$$\tau_1(L_0) = \frac{c}{g} \operatorname{Tanh} \left( \frac{g}{kA} L_0 \right) \quad (4.4)$$

cuya gráfica, que se muestra en la figura (4.5), es idéntica a la curva experimental de la figura (4.4). Observe que la constante de tiempo tiende al valor asintótico  $c/g$ .

Por otra parte, cuando el sistema alcanza el estado estacionario, la intensidad de temperatura se obtiene a partir de la ecuación (4.3) para quedar en términos de  $g$ , es decir

$$\Delta T_{i_{\max}}(L_0) = \frac{JA}{g} \operatorname{Tanh} \left( \frac{g}{kA} L_0 \right) \quad (4.5)$$

La gráfica de la ecuación (4.5) se muestra en la figura (4.6). Note la comparación con la curva experimental de la figura (4.3). En la gráfica de la figura (4.6) se observa que la intensidad de temperatura tiende asintóticamente al valor  $JA/g$ .

Se puede observar que la ecuación (4.5) para la intensidad de temperatura  $\Delta T_i(L_0)$  representa la misma función para  $\Delta T_i(z)$  dada por (2.17), en donde se presentan las modificaciones de la ley de

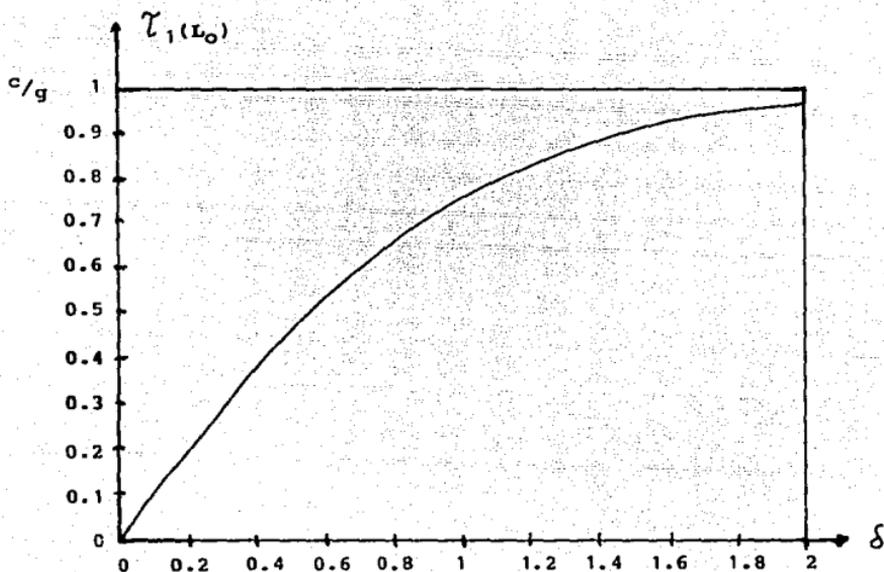


Figura 4.5: Relación teórica de la constante de tiempo en función de la longitud de la cavidad. La curva se obtiene de la relación

$$\tau_1(L_0) = \frac{c}{g} \operatorname{Tanh}(\delta)$$

en donde  $\delta = g L_0/k A$ .

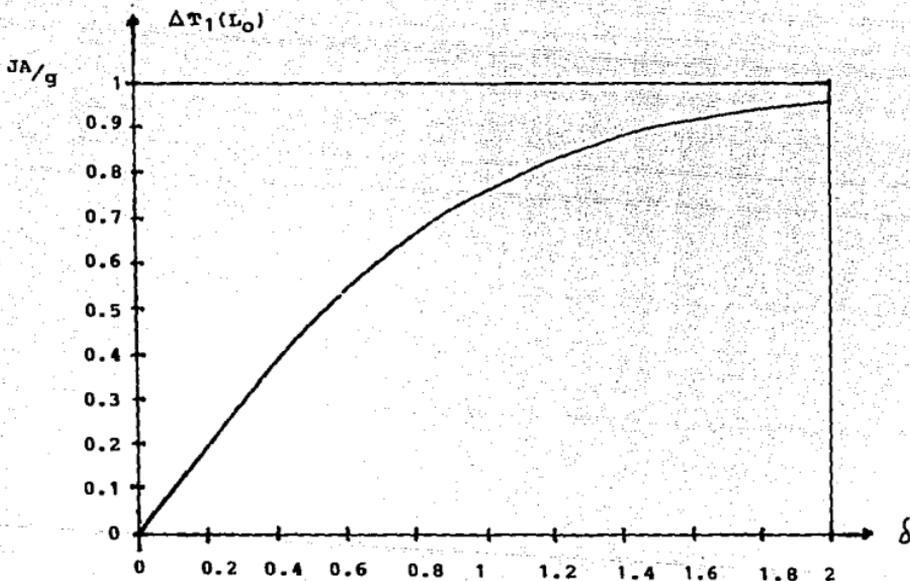


Figura 4.6: Gráfica teórica de la intensidad de temperatura en función de la longitud de la cavidad. La curva se obtiene de la relación

$$\Delta T_{1_{\max}}(L_0) = \frac{JA}{g} \operatorname{Tanh}(\delta)$$

en donde  $\delta = g L_0/k A$ .

Fourier canónica a través de la función efecto de frontera. Por lo tanto, el comportamiento asintótico de las curvas experimentales para la intensidad de temperatura y la constante de tiempo es debido a la presencia de la función efecto de frontera quien explica que cuando  $z \rightarrow 0$  el comportamiento de  $\Delta T_1(z)$  es directamente proporcional a  $z$ , y cuando  $z$  aumenta se tiene un valor asintótico.

Es importante señalar que si tanto la constante de tiempo, ecuación (4.4), como la intensidad de temperatura, ecuación (4.5), dependen de  $g$ , entonces cada uno de los parámetros depende del diseño del dispositivo. Sin embargo, en condiciones de estado estacionario, la intensidad de temperatura y la constante de tiempo son proporcionales, siendo la ecuación (3.47) la que los asocia, la cual es independiente de cualquier tipo de diseño de algún instrumento. La ecuación (3.47) representa una relación universal entre  $\tau_1$  y  $\Delta T_1$ .

Finalmente mostraremos otra expresión matemática que relaciona  $\tau$  con  $\Delta T$ . Esto se logra cuando consideramos que  $z$  alcanza su valor máximo ( $z \rightarrow \infty$ ), entonces la ecuación (4.5) se transforma en la siguiente expresión

$$\Delta T_{\text{máx}} = \frac{J A}{g} \quad (4.6)$$

donde se muestra que la cantidad de energía incidente  $J$  es proporcional a la máxima diferencia de temperatura  $\Delta T_{\text{máx}}$ .

Bajo las mismas condiciones en que  $z \rightarrow \infty$ , el tiempo característico dado por (4.4) se transforma en

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{c}{g} \quad (4.7)$$

y  $g$  representa una constante característica del diseño del piranómetro.<sup>11</sup>

Esta ecuación es una relación que permite evaluar la constante  $g$  si la longitud de la cavidad alcanza su máxima posición.

Por lo tanto, la ecuación que relaciona el tiempo característico con la intensidad de temperatura, se obtiene asociando las ecuaciones (3.47), (4.6) y (4.7), esto es

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_{\text{máx}}} = \frac{\tau}{\tau_{\text{máx}}} \quad (4.8)$$

que es una igualdad que permite observar una relación lineal entre  $\tau$  y  $\Delta T$ , que depende de las características del diseño del piranómetro.

## 4.2 EL ALTO HORNO: LA DISTRIBUCION DE TEMPERATURA EN LAS ESTUFAS.

México cuenta con yacimientos ferríferos en la costa occidental, muchos de ellos aún sin explorar. Desde el siglo pasado se conocen los yacimientos de mineral de hierro de " Las Truchas ", en el estado de Michoacán.

La Siderúrgica Lázaro Cárdenas Las Truchas, S. A. (SICARTSA), estudió y desarrolló el proyecto, construcción y operación de una planta siderúrgica junto al puerto Lázaro Cárdenas, cerca del yacimiento de Las Truchas.

El complejo siderúrgico de Lázaro Cárdenas está integrado, entre otros elementos, por el conjunto Alto Horno, equipo de proceso de la industria que puede producir fierro de alto carbono, silicio y manganeso para posteriormente convertirlo en acero.<sup>13</sup>

El diagrama de flujo del funcionamiento<sup>14</sup> del conjunto Alto Horno se muestra en la figura (4.7), que inicia cuando se hace fluir gas de Alto Horno y de coque, que es gas de carbón mineral, a través de un conducto (1) hasta ser depositado a la cámara de emparrillado (2) en donde aumentará la temperatura conforme ascienda hasta llegar a la cámara de combustión externa (3). Una vez que la mezcla alcance una temperatura de 1300°C aproximadamente, se deposita en otro conducto (4) que lo enviará a un mezclador (5). El mezclador tiene la capacidad de regular la temperatura deseada por medio de la combinación de aire frío y

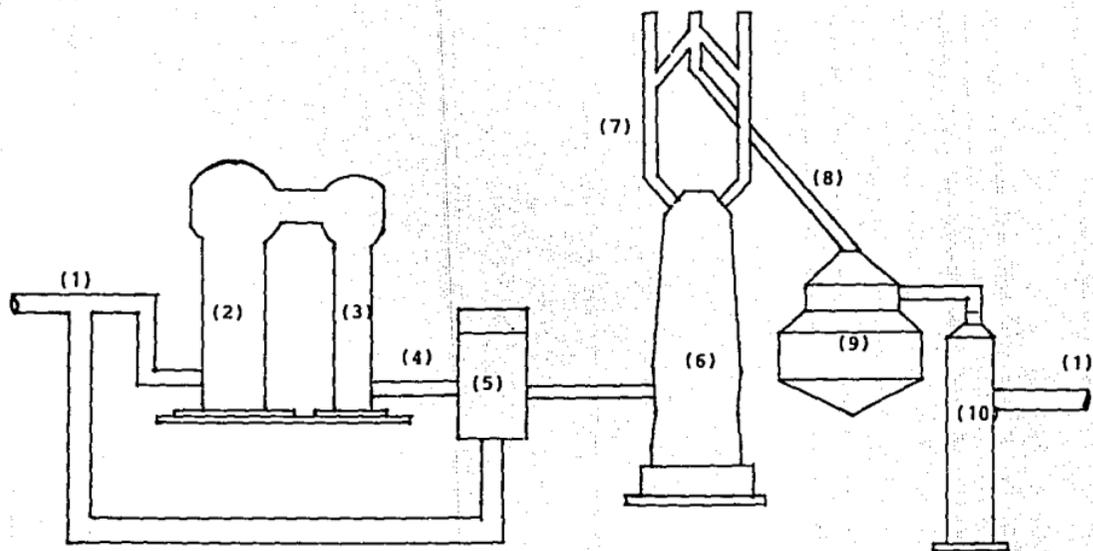


Figura 4.7: EL CONJUNTO ALTO HORNO

caliente. Cuando la mezcla tiene una temperatura que puede llegar a ser hasta  $1100^{\circ}\text{C}$  o más, es depositado en el Alto Horno (6) en el que se efectuará el proceso de fundición del mineral.

Los gases producto de la combustión del Alto Horno se conducen por medio de las antenas (7) y un conducto principal de bajada (8) hasta un colector de polvos (9). Estos entran a una presión de  $1.5 \text{ kg/cm}^2$  con un caudal de  $325,000 \text{ m}^3/\text{h}$  a una temperatura de  $270^{\circ}\text{C}$  y concentraciones de polvo de  $10 \text{ gr/m}^3$ . En la parte media se hace un cambio de dirección con el fin de separar las partículas pesadas, las que se precipitan hasta el fondo del colector. Los gases semlimpios entran a una torre lavadora Bischoff (10) donde por medio de agua a alta presión son enfriados y lavados en contra corriente, utilizando un volumen de agua de  $975 \text{ m}^3/\text{h}$  aproximadamente, y de este modo se usan los gases procedentes del Alto Horno que se trasladan al conducto (1) en donde inicia el ciclo.

El funcionamiento del conjunto Alto Horno está basado principalmente por la producción de aire caliente proveniente de una de las tres estufas.

Las estufas donde se calienta el aire de sople, utilizan una mezcla de gas de coque y gas de Alto Horno, la cual se efectúa en un mezclador que se encuentra antes de las estufas. El gas cuyo poder calorífico es de  $1,240 \text{ kcal/m}^3$  se manda a la cámara de combustión externa en volúmenes aproximados de  $42,500 \text{ m}^3/\text{h}$  de gas de Alto Horno y  $6,500 \text{ m}^3/\text{h}$  de gas de coque por estufa.

Al efectuarse la combustión, los gases residuales ascienden hasta pasar a la cámara de emparrillado donde cede el calor al refractario de alto sílice.

El Alto Horno de SICARTSA para su operación exige temperaturas de sople muy altas, ello implica la instalación de tres estufas, que desde el punto de vista comparativo con los Altos Hornos tradicionales, se determinó, para su mejor operación, que las estufas tendrían una cámara de combustión externa y una cámara de emparrillado, ambas con simetría cilíndrica. Como se muestra en la figura (4.8).

La cámara de combustión externa mide 40 m de alto y 4 m de diámetro, su coraza de acero al carbón tiene el revestimiento interno de refractarios de sílice sílico aluminoso zonificados.

Por su parte, la cámara de emparrillado tiene 43 m de altura por 8 m de diámetro. Al igual que la cámara de combustión externa, el revestimiento es a base de sílice.<sup>15</sup>

La selección de la cámara de combustión externa fué hecha por la conveniencia de evitar el esfuerzo térmico capaz de romper el muro refractario divisorio, el cual está instalado en la cámara de emparrillado.

En la cámara de combustión se queman los gases de Alto Horno y de coque, los gases residuales pasan a calentar la cámara de emparrillado de la estufa por donde circula el sople de aire caliente, el cual elevará la temperatura hasta 1400°C.

Los valores de la temperatura en función de la altura medidos

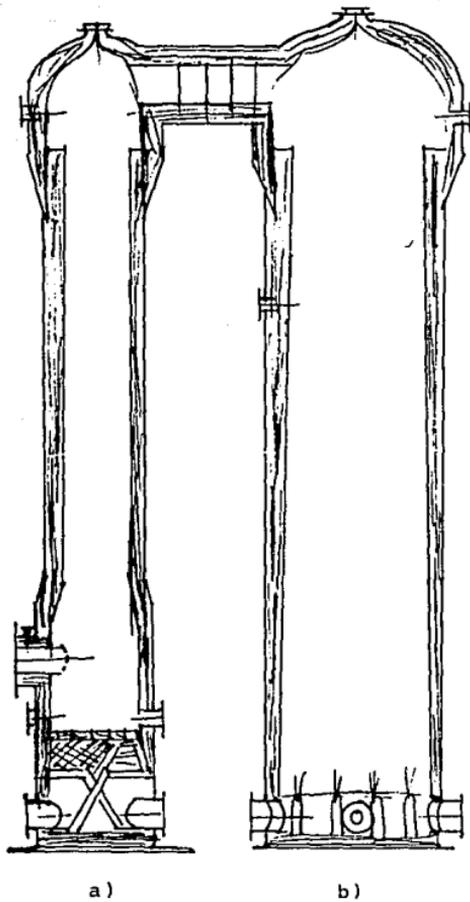


Figura 4.8: La estufa del Alto Horno. a) Cámara de combustión externa. b) Cámara de emparrillado.

dentro de la cámara de emparrillado reportados por SICARTSA, se muestran en la figura (4.9).<sup>13</sup>

Haciendo uso de la escala de la figura (4.9) y considerando la longitud real de la cámara de emparrillado, fué posible obtener la Tabla 1 de valores de temperatura en función de la longitud.

TABLA 1

z(m)	T(°C)
17.64	850
22.21	950
25.78	1050
29.39	1150
36.87	1400

Por la característica de los datos que se presentan en la figura (4.9), podemos comparar la cámara de emparrillado de dicha figura con el sistema que se analizó en la sección 1.3, por la analogía que presenta las condiciones a la frontera. Sin embargo, las condiciones a la frontera de la sección 1.3, requieren de una temperatura  $T_0$  en la superficie inferior de la cámara, esto es para  $z = 0$ , que en la figura (4.9) no se tiene.

Con el objeto de evitar esta dificultad, vamos a considerar

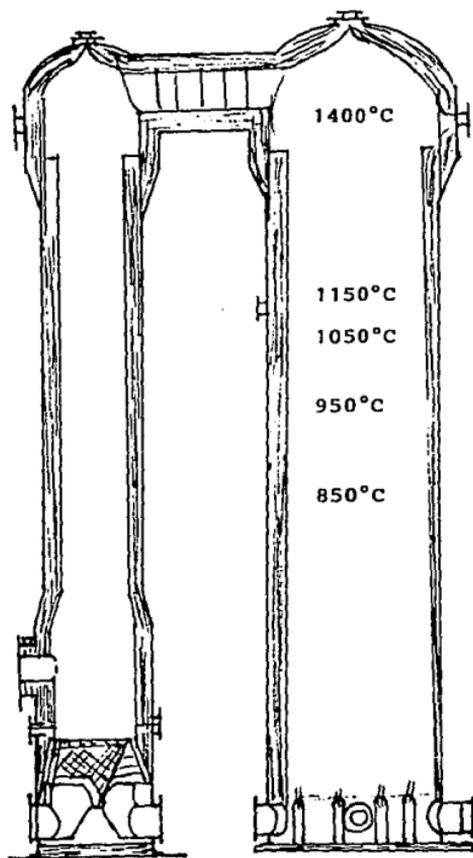


Figura 4.9: Distribución de temperatura en la cámara de emparrillado.

que el origen de nuestro sistema se localiza a una altura de 17.64 m. Es decir, se supone una traslación de la superficie inferior de la cavidad a una altura de 17.64 m, que a partir de entonces se considera como nuevo origen en  $z' = 0$ . Por lo que respecta a los demás puntos donde se localizan los otros valores experimentales de la temperatura, se medirá la distancia a partir del nuevo origen. De este modo la cavidad cilíndrica por analizar tiene una longitud de 19.23 m y las temperaturas en el centro de la tapa superior e inferior son  $1400^{\circ}\text{C}$  y  $850^{\circ}\text{C}$ , respectivamente, como lo muestra la figura (4.10). La Tabla 2 de valores presenta la nueva disposición del sistema.

Una vez llevado a cabo el propósito de coincidir las condiciones a la frontera del sistema de la sección 1.3 con la cámara de emparrillado, nos disponemos a hacer una comparación teórica con los datos experimentales de la Tabla 2.

TABLA 2

$z(\text{m})$	$T(^{\circ}\text{C})$
0	850
4.57	950
8.14	1050
11.75	1150
19.23	1400

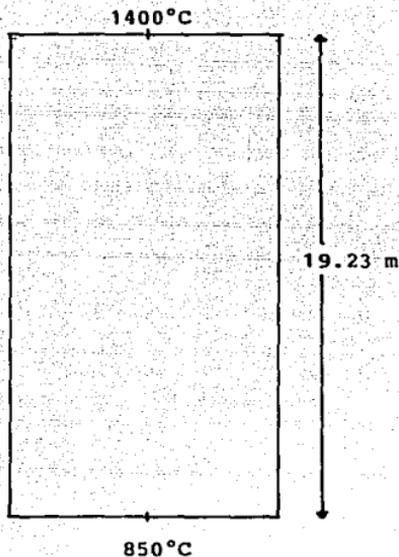


Figura 4.10: Al trasladar la superficie inferior a un nuevo origen  $z' = 0$  la cavidad cilíndrica se transforma en un sistema de longitud  $19.23\text{ m}$ . El centro de la tapa superior e inferior tienen temperatura de  $1400^{\circ}\text{C}$  y  $850^{\circ}\text{C}$ , respectivamente. La distancia donde se localizan los otros puntos de la temperatura se miden a partir de  $z' = 0$ .

Para realizar esta comparación, debemos primero calcular el parámetro  $\beta$  de la ecuación (1.16), el cual depende de los valores  $L_0$ ,  $T_0$  y  $T_1$  de la Tabla 2.

En efecto, a partir de la ecuación (1.16) y los datos de la Tabla 2, en donde  $L_0 = 19.23$  m;  $T_0 = 850^\circ\text{C}$  y  $T_1 = 1400^\circ\text{C}$ , se tiene que  $\beta = -0.026 \text{ m}^{-1}$ .

Ahora bien, si consideramos que los valores de la temperatura que se muestran en la tabla 2 corresponden a puntos situados en el eje de simetría cilíndrica de la cámara de emparrillado, en donde hemos visto que se trata de la región de flujo laminar, entonces podemos tomar en cuenta la ecuación (3.19) y sustituir los valores de  $T_0$ ,  $\beta$  y el correspondiente para  $z$  y hacer una comparación Teórica-Experimental. Esta comparación se muestra en la Tabla 3.

Es importante observar que los valores de la temperatura reportados por SICARTSA son próximos a los estimados por nuestros cálculos. De lo cual, podemos afirmar que en la región próxima al eje de simetría de la cámara de emparrillado existe flujo de calor en una sola dirección, que es uno de los resultados del capítulo anterior, en el que se encontró una región de flujo laminar. Los datos de la Tabla 3 se muestran en la gráfica de la figura (4.11).

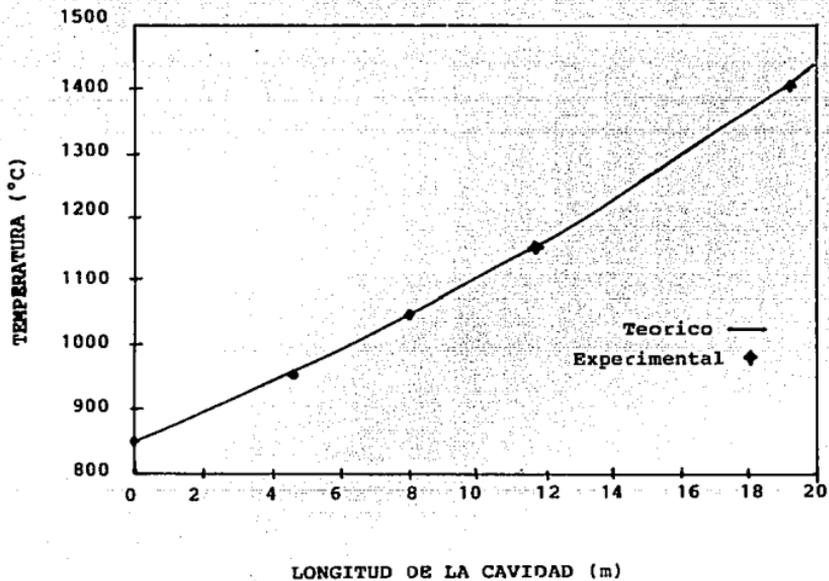


Figura 4.11: Comparación entre la curva experimental y teórica de la distribución de temperatura en la cámara de emparrillado.

TABLA 3

z(m)	T(°C)	
	Experimental	Teórico
0	850	850
4.57	950	950.2
8.14	1050	1050.3
11.75	1150	1153.7
19.23	1400	1400

Por el momento no es posible comparar la distribución de temperatura si se consideran variaciones a lo largo del radio de la cámara, debido a la falta de datos reportados por la siderúrgica.

## RESUMEN DE RESULTADOS

1.- Bajo condiciones de estado estacionario la ley de Fourier ordinaria se modifica de modo que tiene una presentación en dos direcciones ( $\hat{r}$  y  $\hat{z}$ ). Al mismo tiempo que muestra la dependencia con las condiciones a la frontera, quienes aparecen en forma explícita en el flujo de calor transmitido a través de un sistema

$$\bar{J}_T(r, z, r_0, L_0) = k \frac{T(r, z, r_0, L_0) - T_0}{J_0(2.4 \frac{r}{r_0}) - \left[ \frac{T_1}{T_0} \right]^{-\frac{z}{L_0}}} \left[ \left( \frac{2.4}{r_0} \right) J_1(2.4 \frac{r}{r_0}) \hat{r} + \right. \\ \left. + \left( -\frac{1}{L_0} \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) \right) J_0(2.4 \frac{r}{r_0}) \hat{z} \right] \quad (2.10)$$

en donde  $T(r, z, r_0, L_0)$  es de la forma

$$T(r, z, r_0, L_0) = T_0 J_0(2.4 \frac{r}{r_0}) \left[ \frac{T_1}{T_0} \right]^{\frac{z}{L_0}} \quad (1.21)$$

y representa la función de distribución de temperatura en cualquier punto dentro del cilindro, la cual se expresa también en términos de

las dimensiones geométricas del sistema.

La relación (2.10) es la ley generalizada de Fourier que tiene como límite, cuando  $r$  y  $z$  tienden a cero, a la ley de Fourier canónica, esta es

$$\bar{J}_T(z) = -k \frac{\Delta T}{z} \hat{z} \quad (2.18)$$

Si las condiciones a la frontera se modifican como en la sección 1.4, la distribución de temperatura es

$$T_1(r, z) = \frac{T_1}{\text{Senh}(\beta_1 L_0)} J_0\left(2.4 \frac{r}{r_0}\right) \text{Senh}(\beta_1 z) \quad (1.26)$$

y el flujo de calor total

$$\bar{J}_{1T}(r, z) = k \Delta T_1(r, z) \left[ \left( \frac{2.4}{r_0} \right) \frac{J_1\left(2.4 \frac{r}{r_0}\right)}{J_0\left(2.4 \frac{r}{r_0}\right)} \hat{r} - \beta_1 \frac{\text{Cosh}(\beta_1 z)}{\text{Senh}(\beta_1 z)} \hat{z} \right] \quad (2.15)$$

ecuación que tiene como límite a la ley de Fourier canónica si  $r$  y  $z$  tienden a cero.

2.-En base a la aproximación cuasi-constante se obtienen las conducciones de flujo laminar, en donde el gradiente de temperatura  $\Delta T(z)$  es modificado por los efectos de frontera del sistema

$$\bar{J}_T(z) = \left[ -k \frac{\Delta T(z)}{z} z \right] \left[ \frac{-\beta z}{1 - e^{-\beta z}} \right] \quad (2.18)$$

y para  $\Delta T_1(z)$  la descripción es por medio de

$$\bar{J}_{1T}(z) = \left[ -k \frac{\Delta T_1(z)}{z} z \right] \left[ \frac{\beta_1 z}{\text{Tanh}(\beta_1 z)} \right] \quad (2.22)$$

ecuaciones que muestran que el comportamiento del flujo no es inversamente proporcional a  $z$ , debido a la presencia de la función efecto de frontera.

3.- Si los parámetros  $r_0$  y  $L_0$  se consideran como variables de estado, entonces la ley generalizada de Fourier nos determina analíticamente el comportamiento del flujo de calor para los casos de

las frontera variables. Además, se determinan las condiciones bajo las cuales el flujo de calor en dos direcciones se reduce a un flujo laminar, como un caso limite en el que no hay componente radial.

A partir de la condición de flujo laminar se determina la forma en que se modifica la función de distribución de temperatura.

4.- Se transformó la ley generalizada de Fourier, ecuación (2.10), para considerar el flujo de calor como función de la variable temporal e incluir los aspectos de transitorio

$$J = k \frac{T(r, z, r_0, L_0, t) - T_0}{J_0(2.4 \frac{r}{r_0}) - \left[ \frac{T_1}{T_0} \right]^{-\frac{z}{L_0}}} \left[ \left( \frac{2.4}{r_0} \right)^2 J_1^2(2.4 \frac{r}{r_0}) + \left( -\frac{1}{L_0} \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) \right)^2 J_0(2.4 \frac{r}{r_0}) \right]^{1/2} (1 - e^{-t/\tau})^{-1}$$

Del análisis de esta ecuación sobresalen dos aspectos interesantes: la intensidad de temperatura  $\Delta T(r, z)$  y la constante de tiempo  $\tau(r, z)$  dependen de las dimensiones geométricas del sistema. Además, ambos parámetros son proporcionales entre sí y están relacionados mediante la ecuación

$$\Delta T = \frac{J A}{c} \tau \quad (3.36)$$

5.- Como aplicaciones del presente formalismo para observar su potencial en el análisis de sistemas y dispositivos, se consideran dos casos particulares:

Primero, el comportamiento de las curvas experimentales de la constante de tiempo y de la intensidad de temperatura de un piranómetro de longitud variable, coinciden con las curvas teóricas de estos mismos parámetros y están descritos, respectivamente, por las ecuaciones

$$\tau_1(L_0) = \frac{c}{g} \operatorname{Tanh} (g/kA L_0) \quad (4.4)$$

y

$$\Delta T_1(L_0) = \frac{J A}{g} \operatorname{Tanh} (g/kA L_0) \quad (4.5)$$

Estas ecuaciones muestran la dependencia lineal de  $\Delta T_1$  y  $\tau_1$  cuando el argumento tiende a cero, y explica la curvatura asintótica por medio de la función efecto de frontera  $E_f$  cuando el argumento

tiende a infinito.

Cabe mencionar que como la distribución de temperatura es constante a lo largo de toda la superficie de la termopila, entonces el flujo de calor es laminar dentro de la cavidad cilíndrica. Por lo tanto,  $\Delta T_1$  y  $\tau_1$  se describen sólo por la dependencia de la longitud, como se muestra en las ecuaciones anteriores. Es preciso señalar que de acuerdo a las características de las condiciones a la frontera que presenta el Piranómetro, éste se compara con el sistema que se describe y analiza en la sección 1.4.

Finalmente, en la segunda comparación se observó que los valores experimentales de la temperatura a lo largo del eje de simetría de las estufas de Conjunto Alto Horno, están contenidos en la curva teórica de la función de distribución de temperatura, dada por la ecuación

$$T(z) = T_0 e^{-\beta z} \quad (3.19)$$

lo cual demuestra el comportamiento de flujo laminar en el eje de simetría de la cavidad cilíndrica. Debemos señalar que por las condiciones de temperatura en las que opera el Alto Horno, se considera compatible con el problema descrito en la sección 1.3.

## CONCLUSIONES

Uno de los principales logros de este trabajo fué plantear la ley generalizada de Fourier en términos de la función de distribución de temperatura  $T$  dentro del sistema y de los parámetros geométricos  $r_0$  y  $L_0$  que lo identifican.

Gracias a esta nueva presentación para el flujo de calor  $\bar{J}_1(z)$ , se muestra la forma en como la relación que determina el flujo laminar está modificado a través de la función efecto de frontera  $E_f(z)$ , ecuación (2.19).

La ley generalizada de Fourier proporciona las propiedades del flujo de calor en sistemas con fronteras variables. Como consecuencia de ello, se muestra que en sistemas donde el radio es mucho mayor que su longitud, la componente radial del flujo tiende a cero y su comportamiento es laminar. Por el contrario, si la longitud del sistema es mucho mayor que el radio, el flujo de calor total tiende a ser a lo largo de la dirección radial, entonces la energía calorífica la absorbe la pared lateral del cilindro. Esto pone de manifiesto la importancia de un buen diseño y construcción de sistemas basados principalmente en las propiedades geométricas para lograr un máximo de energía a lo largo del medio.

Otro aspecto interesante que se logra con este trabajo, es la aproximación cuasi-constante, la cual determina las condiciones bajo las cuales se obtiene un flujo de calor unidimensional a pesar de que el sistema está definido en dos dimensiones. La importancia de dicha aproximación es que nos brinda un método para calcular una solución aproximada al problema de un cilindro con superficie superior isoterma, que como es de observarse dicha solución no puede obtenerse con los métodos tradicionales.

Por otra parte, cuando se utiliza la ley generalizada de Fourier en la ecuación para el balance de energía de un sistema, se incluyen los aspectos de transitorio y se observa que la intensidad de temperatura  $\Delta T$  y la constante de tiempo  $\tau$  no son parámetros que permanecen constantes, sino que dependen de las dimensiones geométricas del cilindro. Aquí se demuestra por primera vez en forma teórica que están relacionados a través de una expresión lineal simple.

La importancia de dar la ley generalizada de Fourier radica en su potencial de aplicación. De esta manera, para el caso de un Piranómetro de longitud variable, donde experimentalmente se muestra que la intensidad de temperatura y la constante de tiempo dependen de la longitud del sistema, es explicado teóricamente y se demuestra que dicho comportamiento es producido por los efectos de frontera. La función efecto de frontera describe el comportamiento lineal para  $L_0$  pequeñas y es asintótico si  $L_0 \rightarrow \infty$ .

Finalmente, para el caso de las estufas del conjunto Alto Horno, utilizando el método de análisis dado aquí, se sugiere que en el diseño de construcción se logre realizar una isoterma en la superficie superior de la cámara de emparrillado, y de esta manera asegurar que el flujo de calor transmitido sea a lo largo del eje de simetría y evitar al máximo las contribuciones radiales para lograr un mayor aprovechamiento de energía y conservar la estructura física de la estufa.

## OBSERVACIONES

1.- De la revisión bibliográfica no se obtuvo comparación con algún tratamiento que incluya el formalismo aquí considerado. Por lo que al parecer la formulación del efecto de frontera en el flujo de calor es un procedimiento novedoso.

2.- Se ha realizado el análisis del caso de un cilindro con superficie superior a temperatura constante, y queda pendiente el tratamiento más general en el que la superficie sea parcialmente isoterma.

3.- Otro punto importante para extender los conceptos de este formalismo es la modificación de las ecuaciones obtenidas aquí al introducir al modelo el término correspondiente a la convección.

4.- Una sugerencia interesante es considerar el transporte de energía de una interface isoterma a las paredes laterales para analizar las consecuencias del efecto de frontera en el flujo de calor dentro de ellas.

5.- Este trabajo deja la opción de extender el análisis de la distribución de temperatura y del flujo de calor a sistemas que presenten otras características en el diseño de la geometría, y queda abierta la posibilidad de resolver y comparar las soluciones resultantes con las que se obtienen bajo el presente estudio.

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- Widder, D. V.; The Heat Equation; Academic Press, Inc.; 1975.
- 2.- Spain, B.; Functions of Mathematical Physics; Van Nostrand Reinhold Company; 1970.
- 3.- Holman, J. P.; Heat Transfer; International Student Edition; 1976.
- 4.- Gould, S. H.; Variational Methods for Eigenvalue Problems; University of Toronto Press; 1971.
- 5.- Boyce, W. E. and DiPrima, R. C.; Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems; Wiley and Sons, Inc.; 1985.
- 6.- Magnus, W. and Oberhettinger, F.; Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics; Chelsea Publishing Company; 1949.

- 7.- Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.; Conduction of Heat in Solids; Oxford University Press; 1959.
- 8.- Jackson, J. D.; Classical Electrodynamics; Wiley and Sons, Inc.; 1975.
- 9.- Lebedev, N. N.; Special Functions and Their Applications; Dover Publication, Inc.; 1972.
- 10.- Mathews, J. and Walker, R. L.; Mathematical Methods of Physics; W. A. Benjamin, Inc.; 1970.
- 11.- Martínez-Guerrero, J. and Del Castillo, L. F.; Fast Response Thermopiles; Geof. Int., Vol. 28-1; 1989.
- 12.- Domínguez Espinos, O.; La relación de la constante de tiempo con la sensibilidad en termopilas y su empleo para la localización de la posición del Sol con un arreglo ortogonal piranométrico; Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, U.N.A.M.; 1987.
- 13.- González Vargas, F.; Técnica Sicartsa; Año 1; Núm.2; 1975.

14. - Conte, M.; Desing, Instalation and Commissioning of an Italimpianti Blast Furnace in Mexico; Societa Italiana Impianti, P. A.; 1977.
15. - Benites, M. M. y Guerrero, L. M.; Reconstrucción del Alto Horno en la Planta Siderúrgica Lázaro Cárdenas-Las Truchas, S. A. Subproyecto Refractarios; Tesis de Licenciatura, Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo; 1987.
16. - Schneider, P. J.; Conduction Heat Transfer; Addison-Wesley Publishing Company, Inc.; 1957.
17. - Carslaw, H. S.; Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids; Dover Publications; 1945.
18. - Kreith, F.; Principles of Heat Transfer; Harper International Edition; 1976.
19. - Obert, E. F. and Young, R. L.; Elements of Thermodynamics and Heat Transfer; International Student Edition; 1978.
20. - Preston, T.; The Theory of Heat; Macmillan and Company; 1929.

21. - Zemansky, M. W.; Heat and Thermodynamics; Mc Graw-Hill Book Company, Inc.; 1988.
22. - G. Tripathi, K. N. Shukla and R. N. Pandey; An integral equation approach to heat and mass transfer problem in an infinite cylinder; Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 16, pp. 985-990, 1973.
23. - Yao, L. S. and Chen, F. F.; A horizontal flow past a partially heated, infinite vertical cylinder; Journal of Heat Transfer, Vol. 103, pp. 546-551, August 1981.
24. - Lunardini, V. J.; Phase change around a circular cylinder; Journal of Heat Transfer, Vol. 103, pp. 598-600, August 1981.
25. - Goldman, A. and Kao, Y. C.; Numerical solution to a two-dimensional conduction problem using rectangular and cylinder body-fitted coordinate systems; Journal of Heat Transfer, Vol. 103, pp. 753-758, November 1981.
26. - Abramowitz, M. and Stegun, A. I.; Handbook of Mathematical Functions; Dover Publications, Inc.; 1965.