

18  
2ej.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES  
DE EINSTEIN EN SIMETRIA ESFERICA**

**T E S I S  
PARA OBTENER EL TITULO DE:  
F I S I C O  
QUE PRESENTA  
CARLOS P. CURIEL GARCIA**

**MEXICO, D. F.**

**DICIEMBRE 1993**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## ÍNDICE

<b>Agradecimientos</b> . . . . .	ii
<b>Indice</b> . . . . .	iv
<b>INTRODUCCIÓN</b> . . . . .	1
<b>I EL FORMALISMO ADM</b> . . . . .	7
<b>I.1 Introducción</b> . . . . .	7
<b>I.2 Tópicos Generales</b> . . . . .	7
<b>I.3 Ecuaciones de Einstein</b> . . . . .	12
a. <i>Ecuaciones de Restricción</i> , 12	
b. <i>Ecuaciones Dinámicas</i> , 13	
c. <i>Ecuaciones de Conservación</i> , 16	
<b>Referencias</b> . . . . .	20
<b>II SIMETRÍA ESFÉRICA</b> . . . . .	21
<b>II.1 Introducción</b> . . . . .	21
<b>II.2 La Métrica y la Curvatura Extrínseca</b> . . . . .	21
<b>II.3 Ecuaciones de Einstein</b> . . . . .	23
<b>II.4 Ecuaciones de Conservación</b> . . . . .	24
<b>II.5 Solución del Sistema de Ecuaciones</b> . . . . .	26
<b>Referencias</b> . . . . .	29
<b>III DIFERENCIAS FINITAS Y MÉTODOS NUMÉRICOS</b> . . . . .	30
<b>III.1 Introducción</b> . . . . .	30
<b>III.2 Construcción de Rejillas y Operadores</b> . . . . .	30

<b>III.3 Métodos Numéricos</b> . . . . .	<b>33</b>
a. <i>Las Ecuaciones de la Hipersuperficie Inicial</i> , 34	
b. <i>El Incremento Temporal</i> , 36	
c. <i>Las Ecuaciones de Evolución</i> , 38	
<b>III.4 Programa: CÓDIGO</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>Referencias</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>IV ONDA DE CHOQUE EN UNA SUPERNOVA</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>IV.1 Introducción</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>IV.2 Descripción del Sistema Físico</b> . . . . .	<b>46</b>
a. <i>Solución de Sedov</i> , 48	
b. <i>Solución Analítica</i> , 51	
<b>IV.3 En Busca de la Solución Numérica</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>Referencias</b> . . . . .	<b>56</b>
<b>V CONCLUSIONES</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>APÉNDICES</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>A. Definiciones y Notación</b> . . . . .	<b>61</b>
<b>B. Ecuaciones de Einstein. Caso <math>A \neq B</math></b> . . . . .	<b>63</b>
<b>C. Ecuaciones de Conservación. Caso <math>A \neq B</math></b> . . . . .	<b>68</b>
<b>D. Análisis Dimensional</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>E. Algoritmo Tridiagonal</b> . . . . .	<b>72</b>
<b>REFERENCIAS GENERALES</b> . . . . .	<b>74</b>

## INTRODUCCIÓN

En la década de los 50's, R. Arnowitt<sup>1</sup>, propone la descomposición del espacio-tiempo en espacio mas tiempo con el fin de realizar un análisis numérico de las ecuaciones de campo gravitacional. En la década de los 60's, R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner<sup>2</sup>, escriben matemáticamente el formalismo ADM ó  $(3 + 1)$  mostrando la posibilidad de describir al espacio-tiempo desde el punto de vista de un problema de Cauchy ó problema de valores iniciales. Esta manera de tratar las ecuaciones de campo gravitacional<sup>3</sup> se puede resumir así:\* supóngase que  $g_{ab}$  y sus derivadas  $\partial g_{ab}/\partial x^0$  son conocidas en todo punto de la hipersuperficie  $x^0 = ct_0$ , con  $t_0 = \text{constante}$ ; estas cantidades representan al conjunto de nuestros datos iniciales. Las ecuaciones de Einstein se pueden escribir como

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \kappa T_{ab} , \quad (1)$$

donde  $\kappa = 8\pi G/c^4$  es la constante gravitacional. Si estas ecuaciones nos permitieran encontrar expresiones para  $\partial^2 g_{ab}/(\partial x^0)^2$  en todo punto de la hipersuperficie  $x^0 = ct_0$ , entonces en principio podrían conocerse  $g_{ab}$  y  $\partial g_{ab}/\partial x^0$  en un tiempo posterior  $x^0 = ct_0 + c\delta t$ ; este proceso se podría continuar para toda  $x^i, x^0$ . Esto parecería razonable debido a que necesitamos diez segundas derivadas y hay diez ecuaciones de campo. Sin embargo, estudiando con detalle las ecuaciones (1), se observa que cuatro de ellas, las que incluyen a  $G_{a0}$ , no contienen derivadas de segundo orden en la dirección temporal, es decir, no brindan información de la

---

\* En este trabajo, las letras del alfabeto latino son utilizadas como índices, las del principio corren de 0 a 3 y las intermedias corren de 1 a 3. También se utiliza la convención de suma de Einstein para los índices repetidos.

evolución temporal del campo gravitacional, siendo estas ecuaciones las restricciones de nuestros datos iniciales. Esto nos deja únicamente con seis de las diez ecuaciones de Einstein que contienen las seis segundas derivadas  $\partial^2 g_{ij}/(\partial x^0)^2$ . La imposición de cuatro condiciones sobre el sistema de coordenadas hace posible determinar las segundas derivadas de  $g_{00}$ , completando con ello nuestro sistema de ecuaciones. Al plantear el problema de Cauchy de esta manera, las ecuaciones de restricción sólo deberán ser impuestas, *en principio*, sobre la hipersuperficie inicial, puesto que las identidades de Bianchi junto con las leyes de conservación de energía y momento nos aseguran que si las restricciones se satisfacen sobre la hipersuperficie inicial en  $x^0 = ct_0$ , entonces también se cumplen en  $x^0 = ct_0 + c\delta t$ . Sin embargo, en la práctica esto no es así, ya que al efectuar cálculos numéricos naturalmente se introducen errores, ya sea de redondeo ó debidos a la limitada precisión de las computadoras, que hacen necesario utilizar las ecuaciones de restricción como "correctores" de los resultados numéricos, es decir, no es sólo conveniente sino prácticamente necesario que las restricciones sean resueltas en cada hipersuperficie para asegurar que la solución numérica siempre se mantenga dentro de un límite aceptable de error.

Existe una vasta literatura referente a los fundamentos teóricos que nos permiten analizar la evolución del campo gravitacional y las variables que describen a la materia presente, es decir, el problema de Cauchy de la relatividad general. Entre los más relevantes, podemos mencionar los trabajos de York<sup>4</sup> y de Smarr y York<sup>5</sup>, en donde se encuentra el soporte teórico de los programas de computadora, denominados genéricamente como códigos, cuya finalidad es obtener soluciones numéricas del sistema de ecuaciones obtenido para diversos casos de interés físico. Podemos mencionar también algunos trabajos numéricos importantes en cosmología, gravitación e hidrodinámica, e.g., los datos

iniciales para cosmologías Tipo I fueron estudiados por Centrella y Matzner<sup>6</sup> en 1979, este conjunto de datos fué utilizado en la evolución de perturbaciones cosmológicas en un modelo vacío con simetría plana por Centrella y Smarr<sup>7</sup> en 1978 y por Centrella<sup>8</sup> en 1980. La condición de curvatura media constante en cada hipersuperficie fué utilizada por Piran<sup>9</sup> en 1980 para estudiar la evolución de perturbaciones en sistemas cilíndricos con materia. Nadejin, Novikov y Polnarev<sup>10,11</sup>, en 1978 y 1979, analizaron la evolución de perturbaciones intensas de densidad para formar primordialmente hoyos negros en cosmologías esféricas.

Evoluciones numéricas del colapso de un gas isotérmico girando axialmente fueron realizadas por Norman, Wilson y Barton<sup>12</sup>, también se encuentran los estudios numéricos concernientes al crecimiento de un hoyo negro no esférico, debidos a Hawley, Smarr y Wilson<sup>13,14</sup>. Además, se encuentra el trabajo acerca de la evolución de modelos cosmológicos planos e inhomogéneos elaborados por Centrella y Wilson<sup>15,16</sup>. En cuanto a métodos para resolver la ecuación de transporte para neutrinos, Wilson<sup>17</sup> propone dos métodos diferentes. La solución numérica de la ecuación de Boltzmann de la relatividad general, acoplada con las ecuaciones de Einstein, para partículas sin masa fué realizada por Mezzacapa y Matzner<sup>18</sup>, mientras que una generalización para incluir partículas masivas fué presentada por Harleston y Holcomb<sup>19</sup> y Harleston y Vishniac<sup>20</sup>.

El contenido de este trabajo está dividido como sigue: en el Capítulo I se expone el formalismo ADM en forma general, se escriben las ecuaciones de Einstein utilizando dicho formalismo y se consideran las ecuaciones que describen a las fuentes del campo gravitacional. En el Capítulo II se especializan las ecuaciones del Capítulo anterior al caso de simetría esférica. En el Capítulo III se discuten los métodos numéricos utilizados para implementar las ecuaciones

obtenidas en el Capítulo II de manera que puedan ser resueltas con la ayuda de una computadora, así mismo, se presenta una descripción de la estructura del programa desarrollado para la solución numérica del sistema de ecuaciones. En el Capítulo IV se presenta una posible aplicación del código: el estudio de la propagación de una onda de choque generada por una supernova. A pesar de que durante su fase adiabática este problema no es relativista, tiene la posibilidad de constituir una buena prueba para el código, ya que su solución analítica, conocida como "Solución de Sedov", ha sido ampliamente estudiada. Se presenta, en este Capítulo, además de algunos resultados numéricos obtenidos, un análisis de la solución analítica. Finalmente, en el Capítulo V se exponen las conclusiones de este trabajo.

Cabe mencionar que los procesos numéricos aquí descritos, son posibles en la actualidad gracias a la gran capacidad y alta velocidad de las computadoras modernas. En la práctica, deben considerarse con cuidado las fluctuaciones inherentes de los procesos numéricos, como son los errores de redondeo, así como los métodos disponibles para tratar numéricamente los términos de transporte y las fuentes, las condiciones de frontera, etc.



## Referencias

- 1.- Arnowitt, R. y Deser, S. 1959, *Phys. Rev.*, **113**, 745.
- 2.- Arnowitt, R., Deser, S. y Misner, C. W. 1962, en *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. Witten, L. (Wiley: New York), p.227.
- 3.- Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (John Wiley & Sons: New York).
- 4.- York, J. W. 1978, en *Sources of Gravitation Radiation*, ed. Smarr, L. L. (Cambridge University Press: Cambridge), p.83.
- 5.- Smarr, L. y York, J. W. 1978, *Phys. Rev. D*, **17**, 2529.
- 6.- Centrella, J. y Matzner, R. 1979, *Ap. J.*, **230**, 311.
- 7.- Centrella, J. y Smarr, L., 1978, no publicado, pero mencionado en Centrella y Wilson (1983).
- 8.- Centrella, J. 1980, *Phys. Rev. D*, **21**, 2776.
- 9.- Piran, T. 1980. *J. Comp. Phys.*, **35**, 254.

- 10.- Nadejin. D. K., Novikov, I. D. y Polnarev, A. G. 1978, *Soviet Astr.*, **22(2)**, 129.
- 11.- Novikov, I. D. y Polnarev, A. G. 1978, en *Sources of Gravitational Radiation*, ed. Smarr, L. L. (Cambridge University Press: Cambridge), p.173.
- 12.- Norman. M. L., Wilson, J. R. y Barton, R. T. 1980, *Ap. J.*, **239**, 968.
- 13.- Hawley. J. F., Smarr, L. L. y Wilson, J. R. 1984, *Ap. J.*, **277**, 296.
- 14.- Hawley. J. F., Smarr, L. L. y Wilson, J. R. 1984, *Ap. J. Sup.*, **55**, 211.
- 15.- Centrella. J. y Wilson, J. R. 1983, *Ap. J.*, **273**, 428.
- 16.- Centrella. J. y Wilson, J. R. 1984, *Ap. J.*, **54**, 229.
- 17.- Wilson J. R. 1986, en *Astrophysical Radiation Hydrodynamics*, ed. Winkler, K-H. A. y Norman, M. L. (D. Reidel Publishing Co.: Dordrecht), p.477.
- 18.- Mezzacappa, A. y Matzner, R. 1989, *Ap. J.*, **343**, 853.
- 19.- Harleston. H. y Holcomb, K. A. 1991, *Ap. J.* **372**, 225.
- 20.- Harleston. H. y Vishniac, E. T. 1992, *Phys. Rev. D15*, **45**, 4458.

## Capítulo I

### El Formalismo ADM

#### I.1 Introducción

En el formalismo ADM<sup>1</sup>, o  $3 + 1$ , el campo gravitacional se considera como la “historia temporal” de la geometría de una hipersuperficie espacialoide, es decir, se prescribe un sistema de referencia adecuado y las ecuaciones del campo gravitacional (ecuaciones de Einstein) se reformulan en términos de un problema de Cauchy<sup>2</sup>, también conocido como “problema de valores iniciales”. Una vez encontrada la solución de este problema de Cauchy, se integran las ecuaciones dinámicas a lo largo de las trayectorias del sistema de referencia elegido. Es necesario también tomar en cuenta las ecuaciones de valores iniciales, de evolución y la ecuación de estado que describe a las fuentes externas del campo gravitacional. A continuación se presentará una exposición detallada de este formalismo.

#### I.2 Tópicos Generales

Consideremos una variedad del espacio-tiempo  $V$ , una función escalar  $\tau$  y una métrica  $g_{ab}$ . Podemos construir un conjunto de hipersuperficies espacialoides de nivel  $\Sigma_\tau$  de la función escalar  $\tau$ ; este conjunto de hipersuperficies constituye una foliación  $\{\Sigma_\tau\}$  que cubre toda la variedad del espacio-tiempo. Las hipersuperficies de nivel no poseen puntos en común, es decir, la intersección es

nula entre ellas y se relacionan entre sí a través de la función escalar  $\tau$ , que es monótonamente creciente, con  $\tau = \text{constante}$  en cada hipersuperficie<sup>3</sup>.

Es posible describir la foliación del espacio-tiempo por medio de una uno-forma  $\Omega = \Omega_a \omega^a$ , donde  $\omega^a$  es una base general de formas; la base asociada de vectores se denota como  $e_a$ . Como esta uno-forma es cerrada, se tiene que  $d\Omega = 0$ , ó,  $\nabla_{[a}\Omega_{b]} = 0$ , donde  $\nabla$  es la derivada covariante en el espacio-tiempo. Así, localmente existe una función escalar  $\tau$ , tal que  $\Omega = d\tau$ , o bien,  $\Omega_a = \nabla_a \tau$ .

Las bases de uno-formas y vectores son tales que la métrica del espacio-tiempo está dada por

$$\langle \omega^a, \omega^b \rangle = \omega^a \cdot \omega^b = g^{ab}, \quad (1.1a)$$

y

$$\langle e_a, e_b \rangle = e_a \cdot e_b = g_{ab}. \quad (1.1b)$$

Con la métrica del espacio-tiempo, se puede definir la norma  $\|\Omega\|$  en términos de una función escalar estrictamente positiva  $\alpha$ , conocida como la función de lapso, tal que

$$\|\Omega\|^2 = g^{ab}\Omega_a\Omega_b = -\alpha^{-2}, \quad (1.2)$$

donde el signo negativo indica que  $\Omega$  es temporaloide y que las hipersuperficies son espacialoides. De la ecuación (1.2) tenemos una uno-forma normalizada  $\omega^0$  asociada con  $\{\Sigma\}$  cuyos componentes estan dados por

$$(\omega^0)_a = \alpha \Omega_a, \quad (1.3a)$$

con

$$\|\omega^0\|^2 = -1; \quad (1.3b)$$

esta uno-forma unitaria satisfice

$$(\omega^0)_{[a} \nabla_b (\omega^0)_{c]} = 0 . \quad (1.3c)$$

El campo vectorial unitario normal de las hipersuperficies se puede escribir como  $\hat{n} = n^a e_a$ , donde

$$n^a = -g^{ab} (\omega^0)_b ; \quad (1.4)$$

el signo negativo indica que el vector  $\hat{n}$  está en la dirección creciente de  $\tau$ . Este vector satisfice

$$(\omega^0, \hat{n}) = (\omega^0)_a n^a = (\omega^0)_a [-g^{ab} (\omega^0)_b] = 1 . \quad (1.5)$$

Nótese que

$$n_a = -(\omega^0)_a = -\alpha \Omega_a , \quad (1.6)$$

por lo cual, usando la ecuación (1.3b), obtenemos

$$n_a n^a = -(\omega^0)_a [-g^{ab} (\omega^0)_b] = -1 , \quad (1.7)$$

esto es, el vector unitario es temporaloide.

El vector  $c\hat{n}$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz, se puede interpretar en forma natural como el campo de cuadrivelocidades de los observadores que estan instantáneamente en reposo en las hipersuperficies  $\Sigma$ . Estos observadores se conocen usualmente como *los observadores eulerianos*, de acuerdo con la terminología utilizada en la hidrodinámica de Newton<sup>4</sup>.

En cada hipersuperficie  $\Sigma$  se obtiene una métrica  $\gamma_{ab}$  inducida por la métrica  $g_{ab}$  de la variedad  $V$ . Esta 3-métrica está dada por

$$\gamma_{ab} = g_{ab} + n_a n_b . \quad (1.8)$$

La forma mixta de este tensor,  $\gamma_a^b$ , es el "tensor de proyección" sobre las hipersuperficies  $\Sigma$ .

La descripción de la variedad  $V$ , por medio de la foliación  $\{\Sigma\}$  y la 3-métrica  $\gamma_{ab}$ , es complementada con el tensor de curvatura extrínseca\*

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma_{ab}, \quad (1.9)$$

donde  $\mathcal{L}_n$  es la derivada de Lie† a lo largo del vector  $\hat{n}$ . Los tensores  $\gamma_{ab}$  y  $K_{ab}$  forman la parte de los datos de Cauchy,  $(\Sigma, \gamma_{ab}, K_{ab})$ , para resolver las ecuaciones de Einstein. La traza de  $K_{ab}$  se puede interpretar como la "velocidad" de la 3-métrica con respecto al tiempo propio local de los observadores eulerianos en cada hipersuperficie  $\Sigma$ .

Es posible definir un operador de derivada covariante,  $\mathbf{D}$ , sobre la hipersuperficie  $\Sigma$  por medio del tensor de proyección; e.g. para un escalar  $\psi$  definimos

$$D_a \psi = \gamma_a^b \nabla_b \psi; \quad (1.10a)$$

para un vector espacialoide,  $W^b$ , con  $(W^b n_b = 0)$ , se obtiene

$$D_a W^b = \gamma_a^c \gamma_c^b \nabla_c W^d. \quad (1.10b)$$

La generalización a tensores espaciales se obtiene en forma similar, es decir, proyectando todos los índices libres de la expresión. Así, puede demostrarse que

$$D_a \gamma_{bc} = 0, \quad (1.10c)$$

que es una propiedad heredada directamente de  $\nabla_a g^{bc} = 0$ , evidenciándose que el comportamiento del operador  $\mathbf{D}$  es independiente de  $\hat{n}$  y de los tensores

\* La condición de no torsión permite escribir esta definición para  $K_{ab}$ .

† Ver Apéndice A.

espaciales en los que opera. Es importante hacer incapié en el hecho de que el operador  $\mathbf{D}$  está bien definido, es decir, cumple la regla de Leibnitz, únicamente cuando actúa sobre objetos espaciales.

Con estas definiciones, podemos construir al tensor de Riemann sobre las hipersuperficies,  ${}^{(3)}R^d{}_{cba}$ , exigiendo que todo vector espacial,  $\mathbf{W}$ , cumpla con

$$D_{[a}D_b]W_c = \frac{1}{2} W_d {}^{(3)}R^d{}_{cba} ; \quad (1.11a)$$

es fácil ver que

$$\eta_d {}^{(3)}R^d{}_{cba} = 0 . \quad (1.11b)$$

El tensor de Ricci sobre la hipersuperficie,  ${}^{(3)}R_{ca}$ , se obtiene de la forma usual, contrayendo el primer índice con el tercero,

$${}^{(3)}R_{ca} = {}^{(3)}R^d{}_{cda} , \quad (1.11c)$$

mientras que para el escalar de curvatura en las hipersuperficies,  ${}^{(3)}R$ , se contraen los índices del tensor de Ricci

$${}^{(3)}R = \gamma^{ac} {}^{(3)}R_{ca} = {}^{(3)}R^a{}_a . \quad (1.11d)$$

La relación de los datos de Cauchy con la curvatura del espacio-tiempo se puede expresar a través de la proyección del tensor de Riemann cuatridimensional sobre las hipersuperficies, lo cual conduce a las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Miniardi

$$\gamma_a{}^e \gamma_b{}^f \gamma_c{}^g \gamma_d{}^h R_{efgh} = {}^{(3)}R_{abcd} + K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{bc} \quad (1.12)$$

y

$$\gamma_a{}^e \gamma_b{}^f \gamma_c{}^g R_{efgh} n^h = D_b K_{ac} - D_a K_{bc} . \quad (1.13)$$

### I.3 Ecuaciones de Einstein

En el formalismo ADM, las ecuaciones de Einstein

$$G_{ab} = \kappa T_{ab} , \quad (1.14)$$

donde  $\kappa = 8\pi G/c^4$ , se separan en dos conjuntos de ecuaciones: el primer conjunto está formado por cuatro ecuaciones que no contienen a las segundas derivadas temporales, llamadas ecuaciones de restricción, mientras que en el segundo conjunto, están seis ecuaciones que sí contienen segundas derivadas temporales, es decir, las ecuaciones dinámicas.

#### I.3a Ecuaciones de Restricción

La ecuación de restricción de Hamilton se obtiene contrayendo dos veces las ecuaciones de Einstein con el vector normal  $\hat{n}$ , es decir,

$$n^c n^d G_{cd} = \kappa n^c n^d T_{cd} , \quad (1.15a)$$

mientras que las ecuaciones de restricción del flujo de momento se obtienen al proyectar las ecuaciones de Einstein sobre las hipersuperficies y contrayendo con  $\hat{n}$ :

$$n^c \gamma_a^b G_{bc} = \kappa n^c \gamma_a^b T_{bc} . \quad (1.15b)$$

Por otro lado, usando las ecuaciones (1.12) y (1.13) y el tensor de Einstein, el miembro izquierdo de las ecuaciones (1.15) se puede escribir como

$$2n^c n^b G_{cb} = {}^{(3)}R - K^a_b K^b_a + K^2 , \quad (1.16a)$$

y

$$n^c \gamma_a^b G_{bc} = D_b K_a^b - D_a K , \quad (1.16b)$$



donde  $K = \gamma^{ab}K_{ab} = g^{ab}K_{ab}$  es la traza del tensor de curvatura extrínseca.

Las fuentes del campo gravitacional se representan por medio del tensor de energía-esfuerzos,  $T_{ab}$ ; para los observadores en reposo en la hipersuperficie,  $T_{ab}$  representa un fluido imperfecto cuyas componentes están dadas por

$$T_{ab} = \rho_H n_a n_b + n_a S_b + n_b S_a + S_{ab}, \quad (1.17)$$

donde hemos definido la densidad Hamiltoniana,  $\rho_H$ , el vector de flujo de momento,  $S^a$ , y el tensor espacial de esfuerzos,  $S_{ab}$ , como

$$\rho_H = T_{cd} n^c n^d, \quad (1.18)$$

$$S_a = -\gamma_a^b T_{bc} n^c \quad (1.19)$$

y

$$S_{ab} = \gamma_a^c \gamma_b^d T_{cd}. \quad (1.20)$$

Con lo anterior, las ecuaciones de restricción, (1.15), se escriben finalmente como

$${}^{(3)}R - K^a_b K^b_a + K^2 = 2\kappa \rho_H \quad (1.21a)$$

y

$$D_b (K^b_a - \gamma^b_a K) = \kappa S_a. \quad (1.21b)$$

### 1.3b Ecuaciones Dinámicas

Como ya se ha dicho, un segundo conjunto de ecuaciones está formado por seis ecuaciones dinámicas de segundo orden. Estas serán utilizadas para evolucionar los datos iniciales en el problema de Cauchy en la dirección de  $t^a$ . La Figura 1 muestra que en general

$$t^a = \alpha n^a + \beta^a, \quad (1.22)$$

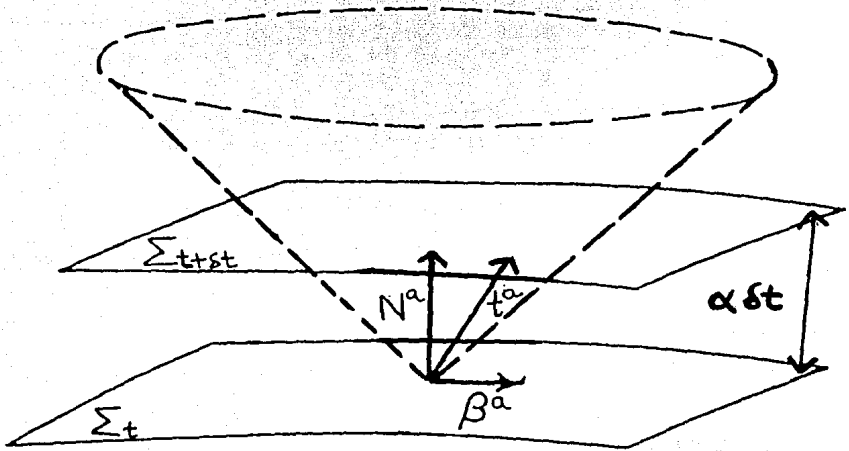


Fig. I.1.— Cinemática local del campo gravitacional usando la función de lapso  $\alpha$  y el vector de desplazamiento espacial  $\beta^a$ .

con  $\beta^a n_a = 0$ , es decir  $\beta^a$  es un vector espacial, mientras que el vector  $N^a = \alpha n^a$  que une las hipersuperficies  $\Sigma$  no es único. El tiempo propio entre dos hipersuperficies está dado por  $\alpha \delta t$ . Smarr y York<sup>5</sup>, muestran que  $\alpha$  se puede interpretar como un potencial de aceleración de los observadores eulerianos.

Una propiedad de la derivada de Lie es  $\mathcal{L}_N = \alpha \mathcal{L}_n$  de modo que con la ecuación (1.22), el operador  $\mathcal{L}_t$  queda completamente definido. Con la expresión (1.9), las seis ecuaciones dinámicas de segundo orden, se pueden escribir como doce ecuaciones de primer orden para  $\gamma_{ab}$  y  $K_{ab}$ . Obteniendo

$$\mathcal{L}_t \gamma_{ab} = -2\alpha K_{ab} + \mathcal{L}_\beta \gamma_{ab}, \quad (1.23)$$

directamente de la ecuación (1.9) y, por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t K^a_b &= -\gamma^{ac} D_c D_b \alpha \\ &+ \alpha \left[ {}^{(3)}R^a_b + K^a_b K - \kappa \left( S^a_b - \frac{1}{2} \gamma^a_b S \right) - \frac{1}{2} \kappa \rho_{||} \gamma^a_b \right] \\ &+ \mathcal{L}_\beta K^a_b. \end{aligned} \quad (1.24)$$

La traza de la ecuación anterior es una expresión que proporciona información de la evolución temporal de  $K$ :

$$\mathcal{L}_t K = -\Delta \alpha + \alpha \left( K^a_b K^b_a + \frac{1}{2} \kappa \rho_\alpha \right) + \mathcal{L}_\beta K, \quad (1.25)$$

en la cual se utiliza la definición  $\Delta = \gamma^{ac} D_c D_a$  como el operador de Laplace covariante en las hipersuperficies  $\Sigma$ . Asimismo, se ha definido la densidad de lapso,  $\rho_\alpha \equiv \rho_{||} + S$ .

Considerando la ecuación (1.25) con cuidado, se observa que puede interpretarse, ya sea como una ecuación para  $\alpha$  ó bien, para  $K$ . En éste trabajo asumiremos que  $K$  será un dato inicial y en particular supondremos que  $K = K(t)$ , ésto significa que  $K = \text{constante}$  en cada hipersuperficie, es decir, todos los observadores eulerianos miden la misma constante de Hubble en la hipersuperficie considerada, entonces, en ausencia de inhomogeneidad y anisotropía, la métrica se reduce a la métrica Friedmann-Robertson-Walker comúnmente referida como FRW. Con ello la ecuación (1.25) resulta ser una ecuación elíptica que puede

resolverse para  $\alpha$ . Existen otras posibles elecciones sobre la  $K$ , por ejemplo,  $K = 0$ , que es llamada "condición de hipersuperficies maximales"<sup>6</sup>.

La ecuación (1.23) junto con la ecuación (1.25) forman un sistema de ecuaciones para  $\alpha$  y  $\beta^a$  que se ha desacoplado con la elección hecha sobre la  $K$ , permitiendo encontrar a la función de lapso de la ecuación (1.25), mientras que  $\beta^a$  se conocerá de la ecuación (1.23) cuya traza es una identidad geométrica.

#### 1.4 Ecuaciones de Conservación

La expresión del tensor energía-esfuerzos en el marco de referencia lagrangiano para un fluido perfecto está dada por

$$T^{ab} = \sigma U^a U^b + P g^{ab}, \quad (1.26a)$$

con

$$\sigma \equiv \rho + \rho \frac{\epsilon}{c^2} + \frac{P}{c^2}, \quad (1.26b)$$

como la entalpía relativista,  $\epsilon$  la energía interna específica por unidad de masa,  $P$  la presión isotrópica promedio y  $U^a$  la cuadrivelocidad de bulto del fluido. Haciendo uso de las ecuaciones (1.18-20), podemos obtener la densidad de Hamilton,  $\rho_H$ , el vector de flujo de momento,  $S_a$  y el tensor de esfuerzos,  $S_{ab}$ ; asimismo, podemos obtener la expresión explícita para la densidad de lapso,  $\rho_\alpha$ , de la definición establecida previamente. Así,

$$\rho_H = c^2 U(U\sigma) - P, \quad (1.27)$$

$$S_a = c(U\sigma)(Uv_a), \quad (1.28)$$

$$S^a_b = U(U\sigma)v^a v_b + \gamma^a_b P \quad (1.29)$$

y

$$\rho_a = c^2(U\sigma)(2U - U^{-1}) + 2P, \quad (1.30)$$

siendo  $v_a$  la velocidad espacial del fluido en el marco euleriano y  $U$  el "factor de Lorentz" entre los marcos euleriano y lagrangiano. El vector  $n_a$  (en el marco euleriano) está dado por la expresión

$$n_a = (-\alpha, 0, 0, 0). \quad (1.31)$$

Con la condición de normalización unitaria  $n_a n^a = -1$  y la ecuación (1.22) obtenemos

$$n^a = g^{ab} n_b = (\alpha^{-1}, -\alpha^{-1} \beta^i). \quad (1.32)$$

La cuadrivelocidad se encuentra normalizada por la expresión  $U^a U_a = -c^2$  y las componentes pueden escribirse de la siguiente manera

$$U^0 = cU\alpha^{-1} \quad (1.33a)$$

y

$$U^i = cU\alpha^{-1} V^i, \quad (1.33b)$$

con  $V^i$  la velocidad de transporte. Usando la definición del vector de flujo de momento,  $S^a$ , puede obtenerse

$$U = \left[ 1 + \frac{S_a S^a}{c^2 (cU\sigma)^2} \right]^{1/2}, \quad (1.34)$$

que será de gran utilidad en la determinación del conjunto de datos iniciales.

Las leyes de conservación para el fluido son la ley de conservación de bariones y la ley de conservación de energía-momento. La primera se puede escribir como

$$\nabla_a(\rho U^a) = 0 \quad (1.35)$$

y es comúnmente llamada ecuación de continuidad. La ley de conservación de la energía-momento está dada por la divergencia del tensor de energía-esfuerzos, es decir

$$\nabla_a T^{ab} = 0. \quad (1.36)$$

Con esta expresión podemos obtener una generalización de la "ecuación de continuidad",  $n_a \nabla_b T^{ab} = 0$ , para la densidad hamiltoniana

$$\mathcal{L}_t \rho_H + \alpha D_b S^b = \alpha (S^{bc} K_{bc} + \rho_H K) - 2 S^b D_b \alpha + \mathcal{L}_\beta \rho_H \quad (1.37)$$

y una generalización de la "ecuación de Euler",  $\gamma^a_c \nabla_b T^{bc} = 0$ , para el vector de flujo de momento,

$$\mathcal{L}_t S^a + \alpha D_b S^{ab} = \alpha (2K^{ab} S_b + S^a K) - S^{ab} D_b \alpha - \rho_H D^a \alpha + \mathcal{L}_\beta S^a. \quad (1.38)$$

Las ecuaciones de campo gravitacional proporcionan información de las fuentes de materia que generan a dicho campo. Sin embargo las ecuaciones de campo gravitacional no incluyen a la ecuación de estado de la materia que genera al campo, necesaria para determinar completamente la distribución y la dinámica de la materia. Es necesario entonces proporcionar además de las ecuaciones de conservación de bariones y de la energía y del momento, una ecuación de estado pertinente<sup>7</sup>, es decir, una relación constitutiva para las variables del fluido, e.g.  $P = P(\rho, s)$  ó  $P = P(\rho, T)$ . Para completar la descripción del fluido deberemos incluir la temperatura,  $T$ , y la entropía,  $s$ . La relación entre estas cantidades y las cantidades  $\rho$ ,  $\varepsilon$  y  $P$  está dada por la segunda ley de la termodinámica

$$T ds = c^2 dh - \left( \frac{1}{\rho} \right) dP, \quad (1.39)$$

donde  $h \equiv \sigma/\rho$  es la entalpía específica. Es necesaria además, una ecuación auxiliar para determinar la entropía ó la temperatura que no es más que una definición del calor específico a volumen constante

$$\varepsilon = C_V T. \quad (1.40)$$

Por último, se considera una ecuación de la forma  $P = P(\rho, \epsilon)$ ; en particular utilizamos la ecuación de estado para un proceso adiabático. Dicha elección se fundamenta por las características del problema a estudiar. Conviene definir las cantidades correspondientes a la densidad de masa  $D \equiv \rho U$ , y la densidad de energía  $E \equiv \epsilon \rho U$ . La ecuación de estado está dada entonces por

$$UP = (\Gamma - 1)E, \quad (1.41)$$

donde  $\Gamma$  es el índice adiabático, además, con la ecuación (1.26b), se encuentra

$$U\sigma = D + \Gamma \frac{E}{c^2}, \quad (1.42)$$

que es la entalpía relativista medida por los observadores eulerianos.

Hasta este punto, se ha descrito el formalismo 3 + 1 utilizado para escribir las ecuaciones de Einstein en términos de un problema de Cauchy, obteniéndose las ecuaciones de restricción y las ecuaciones dinámicas. Se presentaron las cantidades necesarias para describir las fuentes de campo gravitacional, que en nuestro caso están representadas por un fluido perfecto. Asimismo, se han considerado también las ecuaciones de conservación y la ecuación de estado que nos permiten "cerrar" el sistema de ecuaciones. Toda la exposición anterior se realiza sin alusión a una métrica específica, es decir, en forma totalmente general. En el siguiente Capítulo se llevará a cabo la especialización de estos resultados al caso de simetría esférica.

## Referencias

- 1.- Arnowitt, R., Deser, S. y Misner, C. W. 1962, en *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. Witten, L. (Wiley: New York), p.227.
- 2.- Chouquet-Bruhat, Y. 1962, en *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. Witten, L. (Wiley: New York), p.169.
- 3.- York, J. W. 1979, en *Sources of Gravitational Radiation*, ed. Smarr, L. L. (Cambridge U. Press: Cambridge), p.83.
- 4.- Harleston, H. 1990, Tesis Doctoral, Universidad de Texas en Austin.
- 5.- Smarr, L. y York, J. W. 1978, *Phys. Rev. D*, **17**, 2529.
- 6.- Harleston, H. y Vishniac, E. T. 1992, *Phys. Rev. D***15**, **45**, 4458.
- 7.- Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. 1973, *Teoría Clásica de los Campos*, (Reverté Editores: España).



## Capítulo II

### Simetría Esférica

#### II.1 Introducción

Continuamos ahora con la especialización de las ecuaciones que fueron obtenidas en el Capítulo anterior para el caso de simetría esférica. Partiendo de la forma más general para la métrica en simetría esférica se construirá el vector normal, mientras que con los símbolos de Christoffel correspondientes se obtendrá el tensor de curvatura extrínseca. Posteriormente se escribirán las expresiones explícitas de las ecuaciones de restricción, la ecuación de lapso y las ecuaciones de conservación para el caso de un fluido perfecto. Finalmente, se presenta una síntesis del procedimiento seguido para resolver nuestro sistema de ecuaciones.

#### II.2 La Métrica y la Curvatura Extrínseca

Consideraremos que la métrica es sólo una función de la coordenada radial  $r$  y la coordenada temporal  $t$ . Utilizando las cantidades definidas en el formalismo ADM, el intervalo más general en simetría esférica se puede escribir como<sup>1</sup>

$$ds^2 = - \left( \alpha^2 - \beta^2 A^2 \right) c^2 dt^2 + 2A^2 \beta c dt dr + A^2 dr^2 + B^2 r^2 \left( d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right) . \quad (2.1)$$

El determinante de la métrica es entonces

$$\sqrt{-g} = \alpha AB^2 r^2 \text{sen } \theta \equiv \alpha \sqrt{\gamma} , \quad (2.2)$$

donde  $\sqrt{\gamma}$  es el determinante de la 3-métrica  $\gamma_{ab}$  obtenida de la ecuación (1.8) y de la definición (1.31). En la expresión (2.1),  $\beta$  es la única componente distinta de cero del vector de desplazamiento, es decir,

$$\beta^a = (0, \beta, 0, 0); \quad (2.3)$$

con ello, de la ecuación (1.32), el vector normal está dado por

$$n^a = (\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}\beta, 0, 0). \quad (2.4)$$

Con los símbolos de Christoffel obtenidos a partir de la 3-métrica y la ecuación (2.4), el tensor de curvatura extrínseca  $K^a_b = \gamma^{ad}n^c(3)\Gamma_{cdb}$  puede conocerse, resultando

$$K^a_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta\Delta_A A^{-2} & -\Delta_A A^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta_B B^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta_B B^{-2} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

con

$$\Delta_A \equiv \frac{A^2}{\alpha} \left( \frac{\dot{A}}{A} - \beta \frac{A'}{A} - \beta' \right), \quad (2.6)$$

$$\Delta_B \equiv \frac{B^2}{\alpha} \left( \frac{\dot{B}}{B} - \beta \frac{B'}{B} - \frac{\beta}{r} \right), \quad (2.7)$$

donde  $' = \frac{\partial}{\partial r}$  y  $\dot{\phantom{x}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ . En el Apéndice A se encuentran definiciones y notación comprendida en este trabajo. De la ecuación (2.5) obtenemos

$$K = K^a_a = -(\Delta_A A^{-2} + 2\Delta_B B^{-2}). \quad (2.8)$$

Es conveniente introducir una variable de curvatura definida como<sup>2</sup>

$$K^* = K^1_1 - \frac{1}{3}K = -\frac{2}{3}(\Delta_A A^{-2} - \Delta_B B^{-2}). \quad (2.9)$$

Las elecciones hechas sobre el tensor métrico, las coordenadas y el uso del formalismo ADM determinan objetos geométricos explícitamente, los cuales se utilizan para expresar las ecuaciones de Einstein. En adelante, utilizaremos la "norma isotrópica" es decir, supondremos que  $A = B$ , con lo cual las ecuaciones se simplifican considerablemente sin mayor pérdida de generalidad.\*

### II.3 Ecuaciones de Einstein

En el Capítulo anterior se mostraron las ecuaciones de Einstein divididas en dos conjuntos llamados ecuaciones de restricción y ecuaciones dinámicas, formando un sistema de 10 ecuaciones. Sin embargo, en simetría esférica estas ecuaciones se reducen a la ecuación de restricción de Hamilton, la ecuación de restricción de momento correspondiente a la coordenada radial, siendo las otras dos idénticamente cero, la ecuación de lapso y dos ecuaciones auxiliares obtenidas a partir de las definiciones de la curvatura extrínseca.

La ecuación de restricción de Hamilton, (1.21a), en simetría esférica, es entonces

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{A}) \right) = \frac{1}{4} (\sqrt{A})^5 \left[ \frac{1}{3} K^2 - \frac{3}{4} (K^*)^2 - \kappa \rho_H \right]; \quad (2.10)$$

mientras que la ecuación de restricción de momento radial, (1.21b), suponiendo que  $K = K(t)$ , como ya se ha mencionado en el Capítulo I, se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ (Ar)^3 K^* \right] = r^3 \kappa \tilde{S}_r, \quad (2.11a)$$

que se puede integrar inmediatamente, resultando

$$K^* = \frac{\kappa}{(Ar)^3} \int_0^r (r')^3 \tilde{S}_{r'} dr', \quad (2.11b)$$

---

\* El caso más general, con  $A \neq B$ , se presenta en los Apéndices B y C.

donde  $\bar{S}_r = A^3 S_r$ . En general, la tilde denotará cantidades conformalizadas, es decir,  $\bar{q} \equiv A^3 q$ .

La ecuación de lapso, (1.25), se puede escribir explícitamente como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} (\alpha \sqrt{A}) \right] = \frac{1}{4} \alpha (\sqrt{A})^5 \left[ \frac{5}{3} K^2 + \frac{21}{4} (K^*)^2 + \kappa (2\rho - \rho_H) \right] - (\sqrt{A})^5 \frac{1}{c} \frac{\partial K}{\partial t}, \quad (2.12)$$

que es una ecuación elíptica para la cantidad  $\alpha \sqrt{A}$ . Ahora bien, de la expresión (2.8) obtenemos una ecuación auxiliar que se puede interpretar como una ecuación de evolución para el factor conformal  $A^3$  y que está dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} A^3 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-c \beta r^2 A^3) = -c \alpha \bar{K}, \quad (2.13)$$

mientras que, de la ecuación (2.9) obtenemos una ecuación para la componente radial (la única distinta de cero) del vector de desplazamiento,  $\beta$ . Esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\beta}{r} \right) = \frac{3}{2} \alpha \frac{K^*}{r}, \quad (2.14a)$$

que se puede integrar para obtener

$$\beta = -\frac{3}{2} r \int_r^\infty \alpha \frac{1}{r'} K^* dr'. \quad (2.14b)$$

Como podemos observar, dos de estas ecuaciones, (2.11) y (2.14), se han podido reducir a simples cuadraturas<sup>3</sup>.

## II.4 Ecuaciones de Conservación

Las expresiones en simetría esférica de las ecuaciones que describen las leyes de conservación se presentarán en el orden expuesto en el Capítulo I. La ecuación

(1.26a) expresa la definición del tensor de energía-esfuerzos que puede obtenerse explícitamente usando la definición (2.1) y suponiendo que la velocidad del fluido es de la forma

$$U^a = (U^0, U^1, 0, 0), \quad (2.15a)$$

es decir, suponemos que el fluido sólo se mueve en la dirección radial. Explícitamente, podemos escribir

$$U^0 = \frac{cU}{\alpha}, \quad (2.15b)$$

$$U^1 = cU \left( \frac{\sqrt{U^2 - 1}}{AU} - \frac{\beta}{\alpha} \right), \quad (2.15c)$$

donde  $U$ , de acuerdo con la ecuación (1.34), está dada por

$$U = \left[ 1 + \frac{\tilde{S}_r^2}{c^2(cU\sigma)^2 A^2} \right]^{1/2}. \quad (2.16)$$

La ecuación de conservación de bariones, (1.35), conduce a una ecuación para la cantidad conformalizada  $\tilde{D} = A^3 D$ , siendo  $D$  una densidad de masa, explícitamente

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{D}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tilde{D} V^1) = 0. \quad (2.17)$$

El segundo término del miembro izquierdo es conocido como el término de transporte, siendo  $V^i$  la velocidad de transporte radial, con

$$V^i = \frac{cU^i}{U^0}. \quad (2.17a)$$

A partir de la ecuación (1.36) obtendremos las dos ecuaciones de conservación referentes a la energía y al momento. La ecuación de evolución para la densidad de energía interna conformalizada  $\tilde{E} = A^3 E$  se escribe en nuestro caso de manera siguiente

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tilde{E} V^1) + P \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{U}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tilde{U} V^1) \right] = 0, \quad (2.18)$$

donde en el miembro izquierdo, el segundo es el término de transporte y el tercero tiene la forma de un "término de trabajo".<sup>†</sup> Por otro lado, la ecuación de evolución para la componente radial del flujo de momento conformalizado está dada por

$$\frac{\partial \tilde{S}_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tilde{S}_r V^1) - c^3 (U \tilde{\sigma}) \left[ \alpha \frac{A'}{A} \frac{1}{U} (U^2 - 1) - \alpha' U \right] - c \beta' \tilde{S}_r + c \alpha A^3 \frac{\partial P}{\partial r} = 0. \quad (2.19)$$

Las ecuaciones de evolución para las componentes angulares  $\theta$  y  $\varphi$  del vector de flujo de momento son idénticamente cero. Se observa que en el miembro izquierdo, el segundo término es el término de transporte, en el tercer término están el gradiente de la función métrica  $A$  en el campo gravitacional y la aceleración de los observadores en reposo sobre la hipersuperficie, el cuarto término tiene la forma de una fuerza de Coriolis, finalmente el quinto es un término de aceleración debida a la presión<sup>4</sup>.

Para completar el sistema de ecuaciones, es necesario incluir, como ya se dijo en el Capítulo I, una ecuación de estado que relacione las variables del fluido en cuestión [ecuación (1.41)], además de cantidades como la entalpía [ecuación (1.26b)], y el factor de Lorentz [ecuación (2.16)], que junto con las expresiones obtenidas para las ecuaciones de Einstein en el caso de simetría esférica, en la norma isotrópica, completan la descripción del sistema que se estudia<sup>5,6</sup>.

## II.5 Solución del Sistema de Ecuaciones

A continuación se expondrá la secuencia que se sigue para resolver nuestro sistema de ecuaciones. Al tiempo  $t = t_0$  se escogen los valores iniciales de

---

<sup>†</sup> Es decir, tiene la forma de un término " $PdV$ ".

las cantidades que describen al fluido:  $D$ ,  $E$ ,  $S_r$  y  $\Gamma$ . Asimismo los valores iniciales de las variables de curvatura  $K$  y  $\dot{K}$ , que se consideran constantes en las hipersuperficies de nivel, deberán ser propuestos. Con lo anterior es posible llevar a cabo los siguientes pasos<sup>7</sup>:

1. Se calcula la densidad de Hamilton, ecuación (1.27) y la densidad de lapso, ecuación (1.30).
2. El sistema formado por las ecuaciones de restricción, (2.10) y (2.11b), se resuelve en forma simultánea de la siguiente manera: se propone una primera aproximación para la variable  $A$ ,  $A_0$ , con la cual se obtiene una primera aproximación para  $K^*$ ,  $K_0^*$ , de la ecuación (2.11b). Con esta primera aproximación se calculará, usando la ecuación (2.10), una segunda aproximación para  $A$ ,  $A_1$ . Nuevamente se utiliza la ecuación (2.11b) para calcular  $K_1^*$ , continuándose este proceso iterativo hasta que se satisfaga algún criterio de convergencia previamente establecido. Con ello los valores de  $A(t_0)$  y  $K^*(t_0)$  se han encontrado.
3. Con el valor obtenido para  $A(t_0)$  es posible ahora resolver la ecuación de la función de lapso, ecuación (2.12). Mientras que con el valor obtenido para  $K^*(t_0)$  se encuentra la solución de la ecuación del vector de translación, ecuación (2.14b).
4. Con las ecuaciones (2.13) y (2.17-19) se evolucionan las cantidades  $A$ ,  $D$ ,  $E$  y  $S_r$  respectivamente, obteniendo así los valores de estas cantidades en la siguiente hipersuperficie.

5. Se construye la cantidad  $U\sigma$ , ecuación (1.42), y con el valor de  $S_r$  se determina el "factor de Lorentz"  $U$  usando la ecuación (2.16).

6. En este punto existen dos posibilidades a seguir: podemos realizar lo que se conoce como una evolución "totalmente restringida" que consiste en utilizar las ecuaciones de restricción en cada hipersuperficie, o bien, podemos efectuar una evolución "parcialmente restringida" en la que las ecuaciones de restricción son utilizadas únicamente como "correctores" para evitar que la solución numérica se desvíe de la solución real debido a errores ya sea de redondeo ó producidos por las aproximaciones hechas en los métodos numéricos. En este trabajo usaremos una modificación de la segunda opción: debido a la forma de la ecuación (2.11b), de manera natural es sólo necesario utilizar la ecuación de restricción de momento en cada hipersuperficie. Así pues, los pasos anteriores se repiten, con la excepción del segundo paso, en el que sólo se resuelve la restricción de momento, hasta alcanzar un tiempo final, ó un número máximo de estos ciclos, que han sido fijados previamente.

En resumen, se ha planteado nuestro sistema de ecuaciones para una métrica específica correspondiente al caso de simetría esférica. En el Capítulo siguiente se realizará la exposición detallada del proceso que se utilizará para llevar a cabo su solución numérica.



## Referencias

- 1.- Harleston, H. y Holcomb, K. A. 1991, *Ap. J.*, **372**, 225.
- 2.- Harleston, H. y Vishniac, E. T. 1992, *Phys. Rev. D15*, **45**, 4458.
- 3.- Holcomb, K. A. 1990, *G.R.G.*, **22**, 145.
- 4.- Centrella, J. y Wilson, J. R. 1983, *Ap. J.*, **273**, 428.
- 5.- Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. 1973, *Teoría Clásica de los Campos*, (Reverté Editores: España).
- 6.- Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (John Wiley & Sons: New York).
- 7.- Harleston, H. 1990, Tesis Doctoral, Universidad de Texas en Austin.

## Capítulo III

### Diferencias Finitas y Métodos Numéricos

#### III.1 Introducción

Ahora que se tiene una idea general de los pasos necesarios a seguir para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales formado por las ecuaciones de Einstein y las ecuaciones de conservación en simetría esférica, nos ocuparemos de la descripción del programa de computadora, ó "código", cuya función es la de resolver el sistema numéricamente. Nos basaremos en un código ya existente al cual sólo se le harán los cambios necesarios para implementar la aplicación particular que se describirá en el siguiente Capítulo. A continuación se expondrán los detalles más relevantes relacionados con los métodos numéricos utilizados en este código para llevar a cabo el análisis numérico de nuestro sistema de ecuaciones.

#### III.2 Construcción de Rejillas y Operadores

Para analizar numéricamente el sistema de ecuaciones obtenido en los Capítulos anteriores, es necesario re-escribir este sistema en términos de ecuaciones de "diferencias finitas". Ahora bien, como ya se mencionó anteriormente, consideraremos funciones que dependen únicamente de la coordenada radial,  $r$ , y del tiempo,  $t$ . Es necesario entonces construir una "rejilla" numérica para la coordenada radial que está formada por un número finito de divisiones del intervalo de validez de dicha coordenada. Esta rejilla radial consistirá, a su vez,

de dos sub-rejillas que denotaremos como rejilla "a" y rejilla "b". La razón de esta subdivisión es meramente operacional ya que de acuerdo con la forma de las ecuaciones en diferencias finitas, resulta conveniente centrar en la rejilla "a" las variables como la velocidad, o con comportamiento numérico semejante como son  $V^1$ ,  $\beta$  y  $S_r$ , mientras que las demás variables se centran en la rejilla "b". Así, los valores que tome una variable genérica,  $X$ , para los valores de la coordenada radial en el nodo  $n$  de la rejilla "a" serán denotados como  $Xa(n)$  mientras que en la rejilla "b" serán denotados como  $Xb(n)$ , donde  $n = 1, 2, \dots, n_M$ . Tenemos la libertad de elegir el número de divisiones que cubren la región de validez de la coordenada radial, según el problema a estudiar<sup>1</sup>.

Utilizaremos una rejilla uniforme, es decir, la distancia entre nodos contiguos es constante y los nodos de la rejilla  $a$  estarán centrados entre los correspondientes nodos de la rejilla  $b$  (ver Figura III.1). Así tenemos que

$$\Delta Xa(n) = Xb(n) - Xb(n-1), \quad (3.1)$$

$$\Delta Xb(n) = Xa(n+1) - Xa(n), \quad (3.2)$$

$$Xa(n) = \frac{1}{2} [Xb(n) + Xb(n-1)] \quad (3.3)$$

y

$$Xb(n) = \frac{1}{2} [Xa(n+1) + Xa(n)]. \quad (3.4)$$

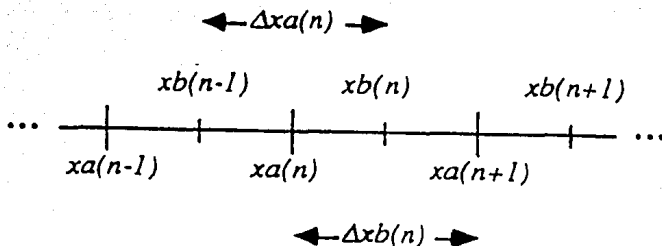


Fig. III.1.— Se muestra parte de una rejilla genérica.

Supóngase que una cantidad  $\mathcal{F}$  está centrada en la rejilla  $b$ ; la diferencial de esta cantidad, expresada en forma de diferencia finita estará centrada en la rejilla  $a$  y se define como

$$d\mathcal{F} \longrightarrow \Delta\mathcal{F}a(n) = \mathcal{F}b(n) - \mathcal{F}b(n-1). \quad (3.5a)$$

Sin embargo, si  $\mathcal{F}$  está centrada en la rejilla  $a$ , su diferencial estará centrada en la rejilla  $b$ , es decir

$$d\mathcal{F} \longrightarrow \Delta\mathcal{F}b(n) = \mathcal{F}a(n+1) - \mathcal{F}a(n). \quad (3.5b)$$

Inspeccionando el sistema de ecuaciones, se observa la presencia de operadores con la forma

$$x^2 \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.6a)$$

y

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.6b)$$

Evidentemente, es necesaria cierta precaución al transcribir estos operadores a sus expresiones correspondientes en términos de diferencias finitas debido a la posible presencia de singularidades de coordenadas, por ejemplo, cuando  $x = 0$ . Por ello, adoptamos expresiones con las que se evita este tipo de problema, así

$$x^2 \frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \frac{x^3}{x \Delta x} = \frac{2x^3}{\Delta(x^2)}, \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \frac{1}{x^2 \Delta x} = \frac{3}{\Delta(x^3)}. \quad (3.8)$$

El operador de Laplace puede conocerse a partir de las ecuaciones anteriores; este operador está dado por

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (3.9)$$

de modo que su expresión en diferencias finitas se puede obtener en forma directa a partir de las expresiones (3.7) y (3.8).

### III.3 Métodos Numéricos

En esta sección se expondrán en forma muy general algunos de los métodos numéricos utilizados para resolver las ecuaciones de Einstein. Comenzaremos con las ecuaciones de la hipersuperficie inicial, es decir, las ecuaciones de restricción, la ecuación de lapso y la ecuación para la componente radial del vector desplazamiento; posteriormente se discutirán los criterios utilizados para el cálculo del intervalo temporal entre la hipersuperficie inicial y las subsiguientes hipersuperficies; finalmente se expondrán los métodos utilizados para manejar las ecuaciones de evolución que nos permiten conocer los valores de las variables en la hipersuperficie  $\Sigma_{\tau=t+\Delta t}$  dados sus valores en la hipersuperficie en  $\Sigma_{\tau=t}$ .

### III.3.a Las Ecuaciones de la Hipersuperficie Inicial

Un análisis somero de las ecuaciones de restricción, lapso y desplazamiento nos permite notar que se pueden dividir, por su forma, en dos grupos: la ecuación de restricción de momento (2.11b) y la ecuación para el vector de translación (2.14b) están escritas como simples cuadraturas, por lo que pueden resolverse de manera sencilla utilizando el conocido método del punto medio (regla trapezoidal)<sup>2</sup>; este método permite una precisión de segundo orden en el cálculo de estas integrales sin mayor problema.

El segundo grupo lo constituyen la ecuación de restricción de Hamilton (2.10) y la ecuación de lapso (2.12). Veremos a continuación que ambas ecuaciones pueden escribirse en la forma

$$\nabla_r^2 \Phi = C_1 \Phi + C_2, \quad (3.10)$$

donde el operador  $\nabla_r^2$  está dado por la expresión (3.8) para la coordenada radial  $r$ , mientras que la forma explícita de las funciones  $C_1$  y  $C_2$  dependerá de la forma original de las ecuaciones en cuestión. La ecuación (3.10) se puede resolver numéricamente de manera muy eficiente utilizando un método muy conocido llamado *algoritmo tridiagonal\**, con el que se obtienen resultados con precisión de segundo orden.

Así por ejemplo, la ecuación de lapso, (2.12), ya está escrita en la forma (3.10), donde identificamos

$$\begin{aligned} \Phi &= \alpha \sqrt{A}, \\ C_1 &= \frac{1}{4} A^2 \left[ \frac{5}{3} K^2 + \frac{21}{4} (K^*)^2 - \kappa (2\rho_g - \rho_H) \right], \\ C_2 &= - \left( \sqrt{A} \right)^5 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} K, \end{aligned}$$

---

\* En el Apéndice E se presenta un esbozo de este algoritmo.

por lo cual el algoritmo tridiagonal puede utilizarse en forma directa.

Por otro lado, la restricción de Hamilton requiere de más consideración para poder llevar esta ecuación a la forma (3.10). Notemos que la ecuación de restricción de Hamilton tiene la forma

$$\nabla_r^2 \Phi_H = C_H \Phi_H^5, \quad (3.11)$$

donde

$$\Phi_H = \sqrt{A}, \quad (3.11a)$$

$$C_H = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3} K^2 - \frac{1}{3} (K^*)^2 - \kappa \rho_H \right]. \quad (3.11b)$$

Evidentemente, se trata de una ecuación no lineal para la variable  $\Phi_H$  por lo que es necesario linealizarla para llevarla a la forma (3.10). Esto se logra si escribimos  $\Phi_H = \Phi_0 + \Phi_1$ , donde  $\Phi_1 \ll \Phi_0$ . Si sustituimos esta expresión en la ecuación (3.11) y mantenemos únicamente los términos a primer orden encontramos que

$$\nabla_r^2 \Phi_1 = C_1 \Phi_1 + C_2, \quad (3.12)$$

donde

$$C_1 = 5C_H \Phi_0^4, \quad (3.12a)$$

$$C_2 = C_H \Phi_0^5 - \nabla_r^2 \Phi_0. \quad (3.12b)$$

La ecuación (3.12) ya tiene la forma deseada y se puede resolver para  $\Phi_1$  con el algoritmo tridiagonal. Es importante notar que para poder llevar a cabo esta solución es necesario *conocer* previamente  $\Phi_0$  con un cierto grado de exactitud, es decir, necesitamos tener una buena primera aproximación,  $\Phi_0$ , que nos permita conocer, a través de la ecuación (3.12) una segunda aproximación a  $\Phi_H = \Phi_0 + \Phi_1$ . Con ello, podemos re-etiquetar esta  $\Phi_H$  como una nueva  $\Phi_0$  y

así repetir el proceso iterativo hasta que el valor calculado de  $\Phi_H$  converja. Este proceso iterativo finaliza cuando se logre satisfacer un criterio de convergencia previamente establecido; usualmente se exige que el valor de  $\Phi_H$  no difiera del "nuevo" valor en más de una parte en  $10^6$ .

Como se puede ver, la debilidad principal de este método radica en la necesidad de conocer un buen valor inicial de  $\Phi_0$ , es decir, este valor inicial debe ser cercano al valor de la solución  $\Phi_H$ . Sin embargo, a pesar de esta restricción, el método ha demostrado su utilidad en muchas situaciones de interés<sup>3</sup>.

Para finalizar esta sección, notemos que las ecuaciones de restricción de Hamilton y de momento deben tratarse como un sistema de ecuaciones *acoplado* para las variables  $A$  y  $K^*$ . En la práctica, entonces, es necesario iterar las soluciones de estas dos ecuaciones utilizando los resultados de la primera en la segunda y viceversa hasta que *ambos* resultados converjan dentro de una tolerancia adecuada, que se escoge usualmente según el problema específico que se esté tratando.

### III.3.b El Incremento Temporal

Una vez que hemos encontrado la solución de las ecuaciones de la hipersuperficie inicial, las ecuaciones de evolución son utilizadas para obtener los valores de nuestras variables en las hipersuperficies subsiguientes. Ahora bien, debido a que estamos utilizando métodos de diferenciación explícitos<sup>4</sup> en la coordenada temporal, lo cual significa que el cómputo de los valores de las variables en un nivel temporal,  $t + \Delta t$ , se lleva a cabo utilizando únicamente los valores de esas variables en el nivel temporal anterior,  $t$ , entonces el paso temporal,  $\Delta t$ , está



limitado por la condición de Courant-Friedrichs-Lewy, ó condición CFL<sup>5</sup>. Esto es así porque el esquema numérico no converge si el dominio de dependencia de la ecuación en diferencias finitas no incluye el dominio de dependencia en la ecuación diferencial en cuestión. Esto se puede ver claramente en la Figura III.2.

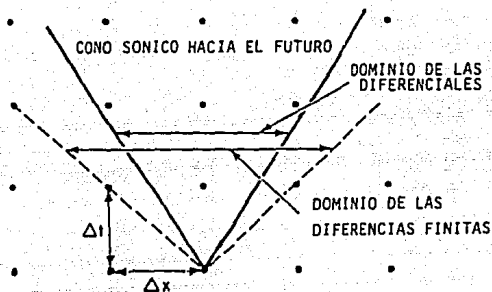


Fig. III.2.— Se muestran esquemáticamente los dominios de las ecuaciones en las rejillas temporal y radial. La elección de  $\Delta t$  debe permitir un punto que esté en la intersección de ambos conjuntos.

Así pues, esta condición (CFL) especifica que el paso temporal  $\Delta t$  en cada nivel temporal debe ser lo suficientemente pequeño como para que

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{V_c}, \quad (3.13)$$

donde  $\Delta x$  representa el tamaño de la rejilla espacial y  $V_c$  representa la velocidad local a la cual se propagan las señales a través de la rejilla espacial. En problemas clásicos,  $V_c$  sería la velocidad del sonido, mientras que en problemas relativistas,  $V_c$  representa a la velocidad de propagación de la luz en la rejilla.

En la práctica, escribiremos la condición CFL de la forma

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{V_c} C_{CFL} , \quad (3.14)$$

donde  $C_{CFL}$  es un factor “de seguridad” que generalmente se toma en el intervalo

$$0 \leq C_{CFL} \leq 0.5 . \quad (3.15)$$

Como una precaución adicional, se establece otro criterio de restricción para el incremento en el paso temporal que podemos escribir como

$$\Delta t^{nuevo} \leq (1.1)\Delta t^{anterior} , \quad (3.16)$$

es decir, se exige que el incremento en el salto temporal siempre sea menor que un 10% del salto temporal anterior entre dos hipersuperficies de nivel  $\Sigma_t$  y  $\Sigma_{t+\Delta t}$ .

### III.3.c Las Ecuaciones de Evolución

Todas nuestras ecuaciones de evolución se pueden escribir de la forma

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V^1 \tilde{Q}) = F , \quad (3.17)$$

donde  $\tilde{Q}$  representa a  $A^3$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{E}$  ó  $\tilde{S}$ , mientras que  $F$  representa a las fuentes. El miembro izquierdo de (3.17) se conoce como la derivada temporal *advectiva* que se presenta en la versión *euleriana* de la hidrodinámica. Físicamente corresponde al transporte de la cantidad  $\tilde{Q}$  con el flujo respecto de un observador fijo. Existe una extensa literatura que trata el problema de la solución numérica de la ecuación (3.17) (ver por ejemplo la excelente exposición presentada en el libro de Roache<sup>6</sup>) y no ahondaremos en este tema en el presente trabajo. Baste mencionar que en el código aquí descrito se utiliza una técnica denominada

de "transporte monotónico" debida a Bram van Leer que está presentada con detalle en los artículos de Centrella y Wilson<sup>7</sup> y de Hawley *et al.* <sup>4,8</sup>. Esta técnica está diseñada para reducir al máximo los efectos no físicos en el comportamiento numérico de las variables sujetas a transporte hidrodinámico.

Por otro lado, los términos inscritos en el miembro derecho de la ecuación (3.17) y que hemos denominado como "fuentes", son tratados numéricamente utilizando la técnica llamada de "separación de operadores"<sup>8</sup>. Aunque no la describiremos con detalle aquí, podemos decir que la utilización y confiabilidad de esta técnica ha sido ampliamente demostrada en la literatura y consiste, esencialmente, en resolver cada término fuente por separado, sumándose su contribución al valor final de la variable en cuestión.

En la física de una onda de choque, la viscosidad actúa en la transformación del movimiento de bulto del fluido en un movimiento aleatorio de las moléculas del fluido. En el código se utiliza una viscosidad artificial para tratar numéricamente aquellos problemas que involucren ondas de choque. La forma en que está implementada esta viscosidad artificial en nuestro código, se basa en la desarrollada por May y White<sup>9</sup> para problemas de hidrodinámica relativista. Así, definimos

$$Q = \begin{cases} k_\nu (D + \Gamma E/c^2) [\Delta V^1(j)]^2, & \text{si } \Delta V^1 < 0, \\ 0, & \text{si } \Delta V^1 > 0, \end{cases}$$

donde  $k_\nu$  es una constante del orden de la unidad y

$$\Delta V^1(j) = V^1(j+1) - V^1(j).$$

Como se puede ver, la viscosidad artificial sólo será diferente de cero en aquellas regiones de la rejilla radial donde se presente una compresión local del fluido.

En el tensor de energía-esfuerzos, la viscosidad artificial juega el papel de una viscosidad de bulto e interviene en las ecuaciones de evolución de la misma manera en que lo hacen los términos que involucran a la presión y, por lo tanto, se tratan numéricamente de manera completamente similar.

A manera de ejemplo, analicemos con algo más de detalle la ecuación (3.17) para el caso en que  $\bar{Q} = \bar{D}$ . Escribimos

$$\frac{\Delta \bar{D}}{\Delta t} + \frac{3}{\Delta (r^3)} (r^2 \bar{D} V^1) = 0, \quad (3.18)$$

definiendo al flujo  $Flux = r^2 \bar{D} V^1$  que representa la cantidad de material transferido entre las zonas de la rejilla en el tiempo e imponiendo la condición de que la elección del valor asociado a  $\bar{D}$  será monótonamente creciente o decreciente con la finalidad de evitar que haya regiones entre divisiones sin material, pero esto implica que para poder realizar la diferencia finita hay que centrar la cantidad  $Flux$  correctamente dado que la cantidad  $V^1$  se define en la rejilla "a", mientras que  $\bar{D}$  se ubica en la rejilla "b". La exposición detallada del método ha sido expuesta por Centrella y Wilson<sup>7</sup>, quienes proporcionan, además, un estudio detallado de los resultados obtenidos en diversos problemas específicos.

Para terminar esta sección es necesario mencionar que antes de poder utilizar un código como este, resulta conveniente someterlo a una serie de pruebas que establezcan un cierto grado de confiabilidad en el mismo. Usualmente, esto se logra aplicando el código a una serie de problemas de prueba cuya solución sea previamente conocida, verificando con ello que los resultados numéricos obtenidos del código reproduzcan los resultados esperados. Aunque no las discutiremos en este trabajo, se han realizado ya diferentes pruebas<sup>1,4,6</sup> que establecen el alto grado de confiabilidad del código aquí descrito.

### III.4 Programa: CODIGO

La filosofía que se ha seguido en la construcción del código muestra los aspectos más relevantes que deben tomarse en cuenta en todo programa: la eficiencia, la optimización, su estructura y su portabilidad, que sirven como parámetros que nos permiten tener una idea de su elaboración y muestran la importancia del programa. En este código se han considerado cuidadosamente los aspectos referentes al comportamiento numérico en los puntos singulares de las variables, los métodos usados tanto en la solución de las ecuaciones elípticas como en el análisis de los términos de transporte y los términos fuente de las ecuaciones de evolución. A continuación se describirá la estructura general del código que, para mayor claridad, se ha dividido en tres "bloques" principales atendiendo a la función de cada una de sus partes:

**INICIALIZACIÓN:** Primeramente, se elige el problema a tratar. Para ello, se eligen las unidades en las que se tratará el problema (e.g. unidades de Planck ó unidades CGS). Asimismo, se establecen los valores de todos los parámetros involucrados en dicho problema.

**GRAVEDAD:** Resuelve las ecuaciones correspondientes a una hipersuperficie, es decir, las ecuaciones de restricción de momento y de Hamilton, con las que se obtienen la función métrica  $A$  y la variable  $K^*$ . Asimismo, se resuelven la ecuación de lapso y la ecuación del vector de desplazamiento para obtener las funciones  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Finalmente, se calcula el incremento  $\Delta t$  para pasar de la hipersuperficie actual a la siguiente.

**ACTUALIZACIÓN:** Evoluciona las cantidades definidas en cada hipersuperficie utilizando las ecuaciones de evolución para el conjunto de variables consideradas en nuestro sistema.

Mientras que el primer bloque (Inicialización) se lleva a cabo una sola vez, los otros dos (Gravedad y Actualización) siguen un proceso iterativo hasta alcanzar, ya sea un tiempo máximo permitido de evolución, o bien, un número máximo permitido de iteraciones. El diagrama de flujo del programa es presentado en la Figura III.3 para una comprensión más clara de los procesos que se llevan a cabo.

De este modo se ha presentado esquemáticamente nuestro programa de cómputo, ó código, y además las bases del análisis numérico propuesto para el sistema de ecuaciones, teniendo así la posibilidad de plantear una amplia gama de problemas, añadiendo o quitando los términos en nuestro conjunto de ecuaciones, puesto que el código sólo es "modificado" para poder resolver diferentes problemas. En el Capítulo siguiente trataremos sobre una posible aplicación del código al problema de la propagación de una onda de choque generada por una supernova.

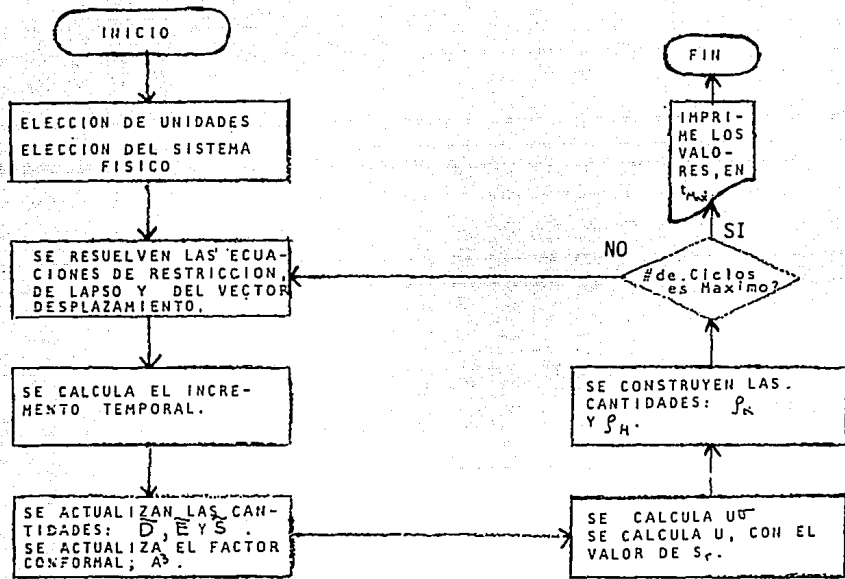


Fig. III.3.— Diagrama de flujo del código.

## Referencias

- 1.- Harleston, H. 1990, Tesis Doctoral, Universidad de Texas en Austin.
- 2.- Holcomb, K. A. 1990, *G.R.G.*, **22**, 145.
- 3.- Harleston, H. y Vishniac, E. T. 1992, *Phys. Rev. D15*, **45**, 4458.
- 4.- Hawley, J. F., Smarr, L. L. y Wilson, J. R. 1984a, *Ap. J.*, **277**, 296.
- 5.- Harleston, H. y Holcomb, K. A. 1991, *Ap. J.*, **372**, 225.
- 6.- Roache, P. J. 1982, *Computational Fluid Dynamics*, (Hermosa Publishers: Albuquerque, N. M.).
- 7.- Centrella, J. y Wilson, J. R. 1984, *Ap. J.*, **54**, 229.
- 8.- Hawley, J. F., Smarr, L. L. y Wilson, J. R. 1984b, *Ap. J. Sup.*, **55**, 211.
- 9.- May, M. M. y White, R. H. 1967, en *Methods of Computational Physics*, ed. Adler, B., Feinbach, S. y Rolenberg, M. (Academic Press: New York), p.219.



## Capítulo IV

### Onda de Choque en una Supernova

#### IV.1 Introducción

El evento de una supernova se puede dividir en tres etapas de evolución relativamente distintas<sup>1</sup>: la primera etapa se caracteriza porque la cantidad de materia proyectada hacia el exterior es mucho mayor que la cantidad de materia arrastrada y, por tanto, se puede suponer que el momento permanece relativamente constante. En esta etapa, que dura aproximadamente 100 años, el radio de la onda de choque se puede expresar como  $R_s \propto t^{1/4}$ , siendo  $t$  el tiempo. La segunda etapa se presenta cuando la cantidad de materia arrastrada es mucho mayor que la cantidad de materia inicialmente proyectada al exterior, en esta etapa la supernova puede ser caracterizada sólomente por la energía inicial de la explosión,  $E$ , y la densidad,  $\rho$ , del medio circundante, teniéndose una situación conservativa y adiabática. En esta etapa, el radio de la onda de choque es  $R_s \propto t^{2/5}$ . El sistema permanece en esta segunda etapa hasta que el gas se ha enfriado lo suficiente como para que la pérdida de energía radiada llegue a ser importante. Es entonces, varios miles de años a partir del evento de la supernova, que se presenta la tercera etapa: la evolución de los restos de la explosión continúa hasta que éstos pierden su identidad en el medio interestelar circundante, caracterizándose esta etapa por la existencia de diferentes mecanismos de enfriamiento por radiación.

Nos ocuparemos, en este Capítulo, de la segunda etapa del evento de una supernova. La descripción física se obtiene con el sistema de ecuaciones compuesto por la ecuación de continuidad, la ecuación de Euler y la primera ley de la Termodinámica. Con una ecuación de estado adecuada y la primera ley de la Termodinámica se obtiene la ecuación de flujo isentrópico. Este sistema de ecuaciones fué resuelto analíticamente por Sedov<sup>2</sup> en 1959, para el caso de una explosión intensa en un gas, durante su fase adiabática, con simetría esférica en un medio con índice adiabático,  $\Gamma$ , constante; además muestra que su solución mantiene ciertas propiedades de escala. En este sistema físico la temperatura y la presión del exterior de la onda de choque tienen valores muy pequeños comparados con los valores de estas variables en la región interna de la onda de choque.

Una explosión intensa en un gas es la liberación de una gran cantidad de energía,  $E$ , en un pequeño volumen que nos permite estudiar la propagación de la onda de choque generada. Si se consideran distancias para las cuales la onda de choque no está "muy lejos" de la fuente, se observa que estas distancias son muy grandes comparadas con las dimensiones de la fuente, entonces se puede suponer que la energía  $E$  fué liberada en un punto, el origen<sup>3</sup>. La solución de Sedov nos proporciona las cantidades que describen las propiedades físicas del gas como una función del tiempo,  $t$ , y de la posición radial  $R$ .

## IV.2 Descripción del Sistema Físico

Si denotamos como  $r$  a la posición radial de una partícula en el instante en que es barrida por la onda de choque al tiempo  $t_s$ , entonces las coordenadas del

marco de referencia euleriano,  $R$ , se relacionan con las coordenadas del marco lagrangiano,  $r$ , mediante la ecuación integral

$$R(r, t) = \begin{cases} r, & \text{si } t \leq t_s, \\ r + \int_{t_s}^t u [R(r, t'), t'] dt', & \text{si } t > t_s, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $u [R(r, t'), t']$  es la velocidad de la partícula al tiempo  $t'$  y posición radial  $R(r, t')$ . Como veremos más adelante, esta velocidad es proporcionada por la solución de Sedov.

Considérese un flujo unidimensional y no estacionario que puede ser definido por el parámetro de velocidad y los valores iniciales de la energía y la densidad. En tales circunstancias, la distribución de todas las cantidades depende de la posición,  $r$ , y el tiempo,  $t$ , a través del cociente  $\chi = r/t$ , con unidades de velocidad, es decir, las distribuciones en diferentes instantes deberán ser similares difiriendo sólo en la escala definida por el cociente  $\xi$ , por tanto, el patrón de flujo no cambia, esto es, el flujo es homólogo ó autosimilar.

La ecuación de la conservación de la entropía para un flujo autosimilar unidimensional, en la coordenada  $r$ , es

$$\frac{\partial s}{\partial t} + V_r \frac{\partial s}{\partial r} = 0, \quad (4.2)$$

donde  $s$  es la entropía y  $V_r$  es la velocidad de transporte radial. Con el cociente  $\chi = r/t$  substituído en la ecuación anterior se muestra fácilmente que

$$\frac{1}{t} \left( V_r - \frac{r}{t} \right) \frac{ds}{d\chi} = 0, \quad (4.3)$$

es decir, la entropía debe ser constante. El flujo es autosimilar, unidimensional, adiabático e isentrópico y estará descrito por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u = 0, \quad (4.4)$$

la ecuación de Euler,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u = -\nabla P \quad (4.5)$$

y la ecuación del flujo isentrópico, obtenida con la primera ley de la termodinámica y la ecuación de estado,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P}{\rho^\Gamma} \right) = 0. \quad (4.6)$$

En el caso del problema de una explosión intensa, el flujo es autosimilar y las cantidades físicas como la velocidad, densidad, presión ó temperatura, pueden expresarse como función de la posición; en forma genérica, esto se puede representar matemáticamente como

$$X(R) = X(R_s) f_x(R/R_s), \quad (4.7)$$

donde  $f_x$  es una función de la posición relativa al radio de choque  $R_s$ . Las soluciones se expresarán en la forma de la ecuación (4.7).

#### IV.2.a Solución de Sedov

Las cantidades físicas en la posición de la onda de choque presentan una discontinuidad; denotaremos a las cantidades atrás de la onda de choque por medio del subíndice "1" y las cantidades que están al frente por medio del subíndice "2". Como ya se mencionó, durante la segunda etapa en la evolución de la onda de choque generada por una supernova, la cantidad de materia inicialmente proyectada al exterior es mucho menor que la materia arrastrada y, además, la presión que ejerce el medio circundante es muy pequeña, entonces el problema puede ser descrito por sólo dos parámetros, la energía inicial de la explosión,  $E$ , y la densidad del medio circundante,  $\rho_2$ . Asimismo, se ha supuesto que las cantidades pueden expresarse en forma autosimilar, ecuación (4.7), lo

cual hace necesario el uso de una combinación adimensional de  $\rho_2$ ,  $E$ ,  $R$  y  $t$ . La única cantidad adimensional que se puede construir con estas variables es:

$$\xi = R \left( \frac{\rho_2}{E t^2} \right)^{1/5}, \quad (4.8)$$

de donde la posición del choque,  $R_s$ , está dada por

$$R_s = \xi_s \left( \frac{E t^2}{\rho_2} \right)^{1/5}. \quad (4.8a)$$

Por lo anterior, podemos definir ahora a la variable de similitud,  $\eta$ , en el intervalo  $0 \leq \eta \leq 1$ , por medio de la expresión

$$\eta = \frac{\xi}{\xi_s} = \frac{R}{R_s}, \quad (4.9)$$

es decir, se ha definido un mapeo de la posición radial interna a la onda de choque al intervalo  $[0, 1]$ .

El análisis detallado del problema de la propagación de una onda de choque generada por una explosión intensa en un gas, ha sido realizado para diferentes sistemas coordenados por Sedov. Nos interesamos en el sistema de coordenadas para la simetría esférica, teniéndose que la solución a las ecuaciones del sistema se expresa de la siguiente manera

$$u(R) = u(R_s) \eta u'(\eta), \quad (4.10)$$

$$\rho(R) = \rho(R_s) \rho'(\eta) \quad (4.11)$$

y

$$P(R) = P(R_s) \eta^2 P'(\eta), \quad (4.12)$$

donde las soluciones al sistema fueron escritas con la forma de la ecuación (4.7), las condiciones de Rankine-Hugoniot, obtenidas de las ecuaciones del fluido y

evaluadas en la discontinuidad, conducen a las cantidades en el choque

$$u(R_s) = \frac{4}{5(\Gamma + 1)} \frac{R_s}{t}, \quad (4.13)$$

$$\rho(R_s) = \frac{\Gamma + 1}{\Gamma - 1} \rho_s \quad (4.14)$$

y

$$P(R_s) = \frac{8\rho_s}{25(\Gamma + 1)} \frac{R_s^2}{t^2}. \quad (4.15)$$

Finalmente, las funciones  $u'$ ,  $\rho'$  y  $P'$  satisfacen la condición  $u'(1) = \rho'(1) = P'(1) = 1$  y su forma explícita es

$$\eta^{-5} = (u')^2 \left[ \frac{5(\Gamma + 1) - 2u'(3\Gamma - 1)}{(7 - \Gamma)} \right]^{\nu_1} \left[ \frac{2\Gamma u' - (\Gamma + 1)}{\Gamma - 1} \right]^{\nu_2}, \quad (4.16)$$

$$\rho' = \left[ \frac{2\Gamma u' - (\Gamma + 1)}{\Gamma - 1} \right]^{\nu_3} \left[ \frac{5(\Gamma + 1) - 2u'(3\Gamma - 1)}{(7 - \Gamma)} \right]^{\nu_4} \left[ \frac{(\Gamma + 1) - 2u'}{\Gamma - 1} \right]^{\nu_5} \quad (4.17)$$

y

$$P'\eta^2 = \left[ \frac{5(\Gamma + 1) - 2u'(3\Gamma - 1)}{(7 - \Gamma)} \right]^{\nu_6} \left[ \frac{(\Gamma + 1) - 2u'}{\Gamma - 1} \right]^{\nu_7} (u')^{6/5}, \quad (4.18)$$

donde

$$\nu_1 = \frac{13\Gamma^2 - 7\Gamma + 12}{(2\Gamma + 1)(3\Gamma - 1)},$$

$$\nu_2 = -\frac{5(\Gamma - 1)}{(2\Gamma + 1)},$$

$$\nu_3 = \frac{3}{(2\Gamma + 1)},$$

$$\nu_4 = \frac{13\Gamma^2 - 7\Gamma + 12}{(2 - \Gamma)(3\Gamma - 1)(2\Gamma + 1)},$$

$$\nu_5 = \frac{2}{\Gamma - 2},$$

$$\nu_6 = \frac{13\Gamma^2 - 7\Gamma + 12}{5(2 - \Gamma)(3\Gamma - 1)},$$

$$\nu_7 = \frac{\Gamma}{\Gamma - 2}.$$

Resta únicamente encontrar el valor numérico de la constante de similitud,  $\xi_s$ , definida en la ecuación (4.8a). Para ello, consideramos que la energía total sea igual a la energía inicial de la explosión, es decir,

$$E = \int_0^{R_s} \left[ \frac{\rho u^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1} \right] 4\pi R^2 dR; \quad (4.19)$$

esta expresión se puede escribir en forma adimensional como

$$1 = \xi_s^5 \frac{32\pi}{25(\gamma^2 - 1)} \int_0^1 [\rho' u'^2 + P'] \eta^4 d\eta. \quad (4.20)$$

Mediante una cuadratura numérica se obtiene, para  $\Gamma = 5/3$ , aproximadamente,  $\xi_s = 1.15167$ , mientras que para  $\Gamma = 7/5$ , se obtiene  $\xi_s = 1.03278$ .

Con lo anterior, puede describirse completamente nuestro sistema físico de interés para así tener una mejor comprensión de su evolución. El análisis teórico de nuestro sistema físico nos acerca al trabajo hecho por Sedov, que es utilizado para obtener la solución analítica del problema de la propagación de una onda de choque generada por una supernova, durante su fase adiabática. Con las ecuaciones anteriores, podemos calcular los valores de las diferentes variables involucradas, como funciones del tiempo. El proceso seguido para obtener estos valores se describe a continuación.

#### IV.2.b Solución Analítica

Después de una inspección de las ecuaciones (4.10-18) resulta que todas las cantidades pueden ser expresadas en función de  $u'$  para un valor de  $\eta$  dado. Por tanto, despejando  $u'$  del término con potencia  $\nu_2$  en la ecuación (4.16), obtenemos para una  $\eta$  dada

$$u' = \frac{\Gamma + 1}{2\Gamma} + \frac{\Gamma - 1}{2\Gamma} \eta^{-5/\nu_2} (u')^{-2/\nu_2} \left[ \frac{5(\Gamma + 1) - 2u'(3\Gamma - 1)}{7 - \Gamma} \right]^{-\nu_1/\nu_2}, \quad (4.21)$$

cabe mencionar, que ésta es una ecuación implícita para  $u'$ , es decir, se resuelve proponiendo un valor inicial de  $u'$ , que se utiliza en esta ecuación, para realizar un proceso iterativo, finalizando cuando se obtiene la convergencia en el valor

de  $u'$ , dada una  $\eta$ . Si en la ecuación (4.21) utilizamos al vector  $\eta(j)$ , definido por la expresión siguiente

$$\eta(j) = \frac{rb(j)}{rb(j_s)}, \quad (4.22)$$

donde  $j_s$  indica la posición de la rejilla numérica correspondiente a la posición de la onda de choque,  $R_s$ , y  $j$  indica la posición de la rejilla numérica asociada a la posición  $R$ , con  $2 \leq j \leq j_s$ , entonces se puede obtener al vector  $u'(j)$  que nos proporciona las cantidades  $u$ ,  $\rho$  y  $P$  en las zonas interiores a la onda de choque a un tiempo  $t = t_0$ , por tanto para diferentes valores de  $t$ , las cantidades  $u$ ,  $\rho$  y  $P$  pueden ser calculadas en cada zona. De esta manera se ha descrito la forma en la que se han obtenido los resultados analíticos, las gráficas de estos resultados se presentan en la Figura IV.1.

Con lo anterior se ha descrito de manera analítica el sistema físico de interés en forma concreta. Finalmente, se ha obtenido una idea clara del comportamiento del sistema estudiado, que será la solución esperada para el análisis numérico.



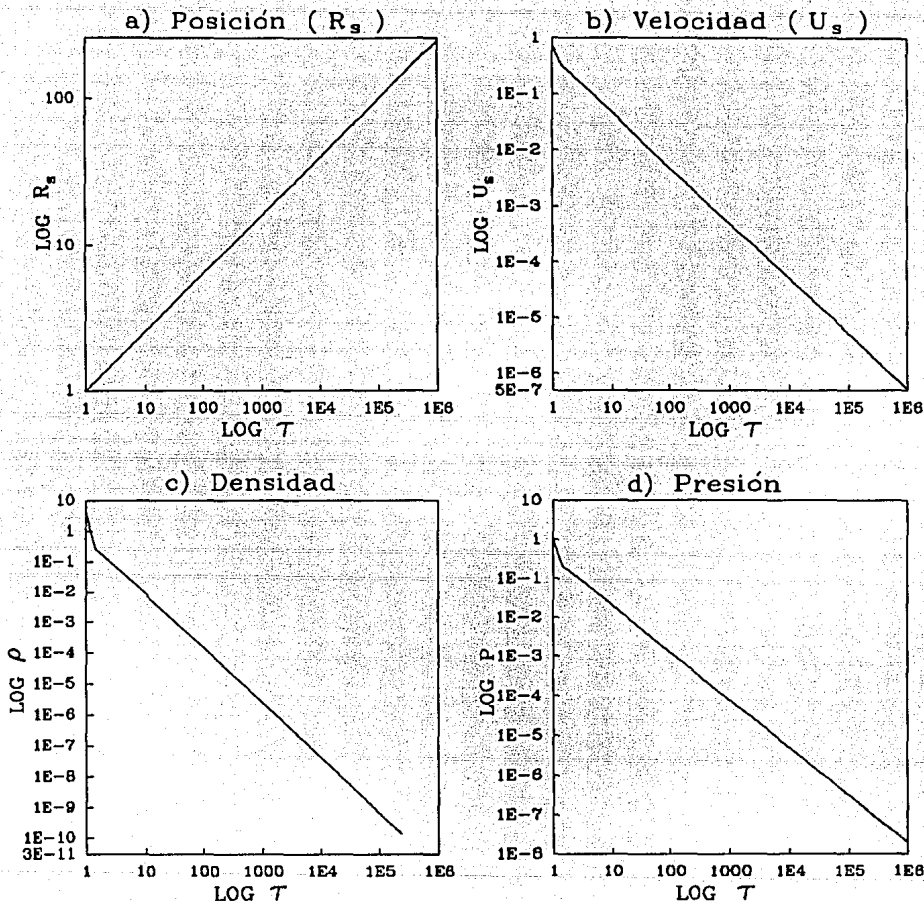


Fig. IV.1.— En la gráfica a) se tiene al radio de choque normalizado vs.  $\tau$ ; en b) se observa a la velocidad de la onda de choque normalizada vs.  $\tau$ ; en c) se presenta la densidad en la posición inicial de la onda de choque y, finalmente, en d) se presenta la variación de la presión para la posición inicial de la onda de choque.

### IV.3.b En Busca de la Solución Numérica

Se propone utilizar el código, cuyo diagrama de flujo ha sido presentado en el Capítulo anterior, para realizar un análisis numérico de la propagación temporal de una onda de choque. Los resultados obtenidos en un primer intento, sin embargo, están lejos de la solución esperada, lo cual propició una revisión del código i.e. las condiciones a la frontera, diferentes formas de realizar los promedios para centrar las cantidades, además del uso de diversas técnicas para las ecuaciones de evolución (términos de transporte)<sup>4</sup>, asimismo, se implementó un monitoreo para las cantidades calculadas en cada ciclo del código.

Los resultados iniciales muestran problemas en el origen de coordenadas, algunas desviaciones en el cálculo de la velocidad  $V^1$  y problemas en los términos de transporte; el error se propaga y cuando termina la corrida el conjunto de valores numéricos no representa a la solución analítica del problema, pero nos permite discernir sobre las cuestiones esenciales de los procesos numéricos.

El análisis de los resultados del código fué realizado para los primeros ciclos de la corrida; se ha observado que existen contribuciones no deseables en el cálculo de la velocidad,  $V^1$ , cuando se evoluciona hacia la primer hipersuperficie, afectando los cálculos de la energía y el momento, también se ha observado que existen zonas en donde la viscosidad artificial se presenta, esto es cerca del origen.

Nuestro código es un código relativista, explícito en el tiempo, que se puede aplicar a problemas no relativistas como el aquí descrito. En la construcción del mismo, se ha utilizado la técnica de separación de operadores para resolver una parte del sistema de ecuaciones, además está escrito de tal manera que se pueden

cambiar fácilmente los métodos numéricos utilizados mediante la substitución de algunas líneas en el código, asimismo, se ha hecho uso de la viscosidad artificial,  $Q$ , para permitir un resolución de la onda de choque en un número finito de zonas de la rejilla radial disipándola suficientemente para que las discontinuidades se extiendan en algunas zonas de la rejilla. Por tanto el programa no necesita ser reescrito para tratar diferentes problemas o el mismo problema con diferentes técnicas.

Sin embargo, todos los sistemas numéricos son inherentemente disipativos en algun grado, por lo cual uno deberá entender y considerar cualquier efecto que surja de una difusión numérica no deseable. La difusión numérica la entenderemos como la pérdida de identidad de las variables físicas como consecuencia de ciertas propiedades no físicas implícitas a los esquemas de diferencias finitas y que pueden ser identificadas cuando estos esquemas son comparados con las ecuaciones diferenciales que se supone deben representar<sup>5</sup>. Más específicamente, esto se refiere a la pérdida de información cuando el fluido pasa de una zona a la otra, siendo esto una propiedad de todos los métodos eulerianos hidrodinámicos. La difusión numérica puede provocar una violación de la conservación local, que es obtenida cuando los elementos del fluido transportan las propiedades intrínsecas locales, tales como el momento, la energía, etc.

En este Capítulo, se ha presentado a un sistema físico de interés, es decir, la propagación temporal de una onda de choque durante la fase adiabática. La solución analítica de nuestro sistema, es el trabajo realizado por Sedov, Landau y Newman; por último, se propone aplicar el código descrito en el Capítulo anterior a este sistema físico y se vislumbran los problemas inherentes en los procesos numéricos.

## Referencias

- 1.- Newman, W. I. 1977, *Ap. and S. Sc.*, **47**, 99.
- 2.- Sedov, L. I. 1959, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, (Academic Press: New York).
- 3.- Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. 1987, *Fluid Mechanics*, (Pergamon Press: New York).
- 4.- Hawley, J. F., Smarr, L. L. y Wilson, J. R. 1984b, *Ap. J. Sup.*, **55**, 211.
- 5.- Norman, M. L., Wilson, J. R. y Barton, R. T. 1980, *Ap. J.*, **239**, 968.

## Capítulo V

### Conclusiones

En este trabajo se ha presentado en el Capítulo I, el formalismo ADM, utilizado para escribir las ecuaciones de Einstein, considerando como fuente de campo gravitacional a un fluido perfecto. La ecuación de estado y las ecuaciones de conservación se utilizan para completar el sistema de ecuaciones, que nos proporciona información sobre la evolución temporal del sistema físico. En el Capítulo II, se adoptó una métrica esférica en la norma isotrópica con lo cual se reescribió el sistema de ecuaciones presentado en el Capítulo anterior para este caso. Además se ha expuesto la secuencia utilizada para resolver el sistema de ecuaciones. Continuando con el Capítulo III, en donde se realizó una exposición acerca de las consideraciones hechas al transcribir el sistema de ecuaciones diferenciales a expresiones de diferencias finitas con el fin de resolverlas numéricamente. Además, se discutieron los métodos utilizados para resolver las ecuaciones en diferencias finitas y también las características del programa de computadora, ó código, utilizado para resolver el sistema de ecuaciones en diferencias finitas.

Posteriormente, en el Capítulo IV, se propuso un sistema físico para su posible estudio numérico: la propagación en el tiempo de una onda de choque, generada por una supernova, durante su fase adiabática en un marco de referencia euleriano. Este sistema físico puede ser descrito analíticamente gracias al trabajo de Sedov, Landau y Newman. Se proporcionaron las gráficas que contienen la información sobre el comportamiento de la densidad, la presión y

la velocidad. Además, se plantea la posibilidad de una solución numérica, que pretende obtenerse a partir de un código relativista aplicado a un problema no relativista o "newtoniano", ilustrando con ello los problemas inherentes a los procesos numéricos que surgen en el área de la relatividad numérica.

En la relatividad numérica se utiliza al formalismo ADM para escribir las ecuaciones de Einstein, en forma de un problema de valores iniciales o problema de Cauchy y además se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones, es decir, se obtiene la solución numérica. Se ha mostrado que la relatividad numérica es una herramienta útil para estudiar y resolver problemas que no son accesibles de otra manera, por no existir métodos analíticos capaces de resolverlos.

En concreto se concluye que cuando los problemas cuyas soluciones analíticas se conocen, puedan resolverse numéricamente de modo totalmente satisfactorio, uno estará en una mejor posición de analizar las soluciones numéricas de los problemas en donde las soluciones analíticas se desconocen, bajo la luz de las teorías aceptadas.

Considero que el campo del análisis numérico de los sistemas físicos es un campo amplio, donde se observan similitudes entre el equipo de un físico experimental, al cual hay que calibrar para garantizar un buen funcionamiento y por ende óptimos resultados, y los códigos utilizados por los físicos teóricos, que deben ser construídos y calibrados teniendo en mente una reproducción adecuada de los resultados esperados.

En general deben analizarse ampliamente y establecerse cuidadosamente las condiciones de frontera, las técnicas de transporte para los términos de

advección, y también la intervención de la viscosidad artificial con el fin de poder encontrar una solución numérica aceptable del sistema estudiado.

En particular, en el ejemplo de la propagación de una onda de choque las condiciones iniciales deberán ser elegidas cuidadosamente y, también, deberá plantearse un método para los términos de transporte que proporcionen los resultados deseados.

Finalmente, cabe mencionar que el trabajo por realizar en el área de la relatividad numérica es vasto, e.g. analizar los errores inherentes en los procesos numéricos, desarrollar técnicas y métodos adecuados para resolver las ecuaciones en diferencias finitas, el tratamiento de singularidades y definiciones de los operadores en diferencias finitas.

## APÉNDICES

Los siguientes apéndices fueron elaborados con la finalidad de ampliar la presentación de los cálculos realizados y de complementar con mayor detalle los resultados presentados en los capítulos que componen este trabajo. En ellos se incluyen definiciones y la notación utilizada, además de conceptos propios del tema.

- A. Definiciones y Notación
- B. Ecuaciones de Einstein. Caso  $A \neq B$
- C. Ecuaciones de Conservación. Caso  $A \neq B$
- D. Análisis Dimensional
- E. El Método Tridiagonal



## A. Definiciones y Notación

A lo largo de este trabajo, se utiliza la convención de suma de Einstein sobre índices repetidos. Todos los índices corren de 0 a 3, con la única excepción del índice  $i$  que corre de 1 a 3.

### A.1 Coordenadas

En simetría esférica, las coordenadas se definen como

$$\begin{aligned}x^0 &= ct, \\x^1 &= r, \\x^2 &= \theta, \\x^3 &= \varphi.\end{aligned}\tag{A.1}$$

### A.2 Derivadas

Las derivadas se denotan de alguna de las siguientes formas

$$\begin{aligned}\partial_0 f &= \frac{\partial f}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f}, \\ \partial_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial f}{\partial r} = f' = f_{,r}, \\ \partial_2 f &= \frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial \theta}, \\ \partial_3 f &= \frac{\partial f}{\partial x^3} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

### A.3 Derivada de Lie

a) Derivada de lie de un campo escalar  $\sigma$  :

$$\mathcal{L}_\eta \sigma = \eta^a \partial_a \sigma . \quad (A.3)$$

b) Derivada de Lie de un campo vectorial covariante  $Z_a$  :

$$\mathcal{L}_\eta Z_a = \eta^b \nabla_b Z_a + Z_b \nabla_a \eta^b . \quad (A.4)$$

c) Derivada de Lie de una campo tensorial  $T_{ab}$  :

$$\mathcal{L}_\eta T_{ab} = \eta^c \nabla_c T_{ab} + T_{cb} \nabla_a \eta^c + T_{ac} \nabla_b \eta^c . \quad (A.5)$$

De aquí obtenemos el siguiente resultado útil:

$$\mathcal{L}_\eta g_{ab} = 2\nabla_{(a} \eta_{b)} , \quad (A.6)$$

donde  $\nabla$  es la derivada covariante,  $g_{ab}$  es el tensor métrico y los paréntesis indican la parte simétrica del tensor  $\nabla_a \eta_b$ , cuya definición es

$$\nabla_a \eta_b \equiv \eta_{b;a} = \partial_a \eta_b - \Gamma^c_{ab} \eta_c , \quad (A.7)$$

siendo  $\Gamma^c_{ab}$  los símbolos de Christoffel, que representan a los parámetros de conexión y están definidos de la manera siguiente

$$\Gamma^c_{ab} \equiv \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_b g_{da} + \partial_a g_{db} - \partial_d g_{ab}) . \quad (A.8)$$

## B. Ecuaciones de Einstein. Caso $A \neq B$

Presentándose de modo complementario al Capítulo 2 se esboza el camino seguido para la obtención de las ecuaciones de Einstein. La ecuación de restricción de Hamilton se escribe a partir de la ecuación (1.21a), es decir

$${}^{(3)}R + K^2 - K^a{}_b K^b{}_a = 2\kappa \rho_H. \quad (B.1)$$

Ahora, de la ecuación (1.12), al contraer los índices "a" con "c" y "b" con "d", se obtiene

$$\gamma^{ac} \gamma^{bd} R_{abcd} = {}^{(3)}R + K^2 - K^a{}_b K^b{}_a; \quad (B.2)$$

por otro lado, la cantidad  $\gamma^{ac} \gamma^{bd} R_{abcd}$  se puede calcular explícitamente para la métrica (2.1) resultando

$$\begin{aligned} \gamma^{ac} \gamma^{bd} R_{abcd} = & \frac{2}{B^2 r^2} \left[ \Gamma^1{}_{22,1} + \beta \Gamma^0{}_{22,1} \right] - \frac{2}{A^2} \Gamma^2{}_{12,1} - \frac{2}{A^2} \left( \frac{B'}{B} + \frac{1}{r} \right) \\ & + \frac{2}{B^2 r^2} + 2\beta' \frac{\Delta_B}{B^2 \alpha} + K^2 - K^a{}_b K^b{}_a, \end{aligned} \quad (B.3)$$

donde la cantidad  $\Delta_B$  está dada por la ecuación (2.7). Introduciendo las expresiones explícitas de los símbolos de Christoffel que aparecen en la ecuación (B.3) y comparando esta ecuación con (B.2), observamos que el 3-escalar de Ricci,  ${}^{(3)}R$ , está dado por

$${}^{(3)}R = -\frac{4}{A^2} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{B'}{B} + \frac{1}{r} \right)^2 - \frac{A'}{A} \left( \frac{B'}{B} + \frac{1}{r} \right) + \left( \frac{B'}{B} + \frac{1}{r} \right)_{,r} \right] + \frac{2}{B^2 r^2}. \quad (B.4)$$

Es fácil mostrar que

$$K^2 - K^a{}_b K^b{}_a = \frac{2}{3} K^2 - \frac{3}{2} (K^*)^2. \quad (B.5)$$

Substituyendo las ecuaciones (B.4-5) en la ecuación (B.1) se obtiene

$$B'' + \frac{(B')^2}{2B} + \left(\frac{2}{r} - \frac{A'}{A}\right) B' + \frac{B'}{r} + \frac{B}{2r^2} - \frac{A'B}{Ar} - \frac{A^2}{2Br^2} = \frac{1}{2} A^2 B \left[ \frac{1}{3} K^2 - \frac{3}{4} (K^*)^2 - \kappa \rho_H \right]. \quad (B.6)$$

Ahora considérese la siguiente expresión para la derivada de un producto de funciones con dependencia en la coordenada radial únicamente:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ A^l B^m r^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} B^n \right) \right], \quad (B.7)$$

donde los números  $l$ ,  $m$  y  $n$  son potencias que están por determinarse. Expandiendo las derivadas de la expresión (B.7), podemos escribir

$$B'' + p \frac{(B')^2}{B} + \left(\frac{2}{r} + l \frac{A'}{A}\right) B' = \frac{1}{n A^l B^p} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ A^l B^m r^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} B^n \right) \right], \quad (B.8)$$

donde  $p = m + n - 1$ . Comparando el miembro izquierdo de esta expresión con los primeros tres términos del miembro izquierdo de la ecuación (B.6), observamos que éstos se obtienen de (B.8) haciendo  $m + n = \frac{3}{2}$  y  $l = -1$ . Con ello obtenemos

$$\frac{1}{n} \frac{A}{\sqrt{B}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{B^m}{A} r^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} B^n \right) \right] = B'' + \frac{(B')^2}{2B} + \left(\frac{2}{r} - \frac{A'}{A}\right) B'. \quad (B.9)$$

Los términos restantes de la ecuación (B.6) se pueden asociar en la expresión

$$\frac{B'}{r} + \frac{B}{2r^2} - \frac{A'B}{Ar} - \frac{A^2}{2Br^2} = \frac{1}{2} \frac{A^2}{B} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{B^2}{A^2} - 1 \right) \right]. \quad (B.10)$$

De los resultados anteriores, el escalar de Ricci es, finalmente

$${}^{(3)}R = -\frac{4}{n A B^{3/2}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{B^m}{A} \left( \frac{\partial}{\partial r} B^n \right) \right] - \frac{2}{B^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{B^2}{A^2} - 1 \right) \right]. \quad (B.11)$$

Si tomamos  $n = \frac{1}{2}$  (y por tanto  $m = 1$ ), la expresión final para la ecuación de restricción de Hamilton, (B.1), es

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{B}{A} r^2 \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{B}) \right] + \frac{AB}{4} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{B^2}{A^2} - 1 \right) \right] = \frac{1}{4} A B^{3/2} \left[ \frac{1}{3} K^2 - \frac{3}{4} (K^*)^2 - \kappa \rho_H \right]. \quad (B.12)$$

La ecuación (2.10) se obtiene directamente de esta expresión para el caso  $A = B$ .

La ecuación de restricción de momento radial se obtiene de las ecuaciones (1.21b)

$$D_b K^b_a - D_a K = \kappa S_a, \quad (B.13)$$

donde, recordamos,  $S_a$  es un vector espacial, es decir,  $n^a S_a = 0$ . Es fácil ver que

$$D_a K^a_c = D_a K^a_r \times (\beta, 1, 0, 0) \quad (B.14a)$$

y

$$D_r K = D_r K \times (\beta, 1, 0, 0). \quad (B.14b)$$

Se nota que las dos únicas ecuaciones (B.13) que no son identidades triviales no son independientes por lo cual se considera únicamente la ecuación siguiente

$$D_a K^a_r - D_r K = \kappa S_r. \quad (B.15)$$

Explícitamente, tenemos que

$$D_a K^a_r = K^{rr}_{r,r} + 3 K^* \frac{(Br)_{,r}}{Br} \quad (B.16a)$$

y

$$D_r K = \frac{\partial K}{\partial r}, \quad (B.16b)$$

por lo que la expresión (B.15) se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial r} [(Br)^3 K^*] = (Br)^3 \kappa S_r + \frac{2}{3} (Br)^3 \frac{\partial K}{\partial r}, \quad (B.17)$$

que se puede integrar de inmediato para obtener la ecuación

$$K^* = \frac{\kappa}{(Br)^3} \int_0^r (Br')^3 S_{r'} dr' + \frac{2}{3} \frac{1}{(Br)^3} \int_0^r (Br')^3 \frac{\partial K}{\partial r'} dr'. \quad (B.18)$$

Las condiciones de  $K = K(t)$ ,  $A = B$  y  $\tilde{S}_r = A^3 S_r$  conducen directamente a la ecuación (2.11b).

Para la función de lapso, a partir de la expresión (1.25) podemos escribir

$$\Delta\alpha = \left[ K^a{}_b K^b{}_a + \frac{1}{2} \kappa \rho_a \right] \alpha + \beta^a D_a K - \frac{\partial K}{c \partial t}, \quad (B.19)$$

donde  $\Delta\alpha = D^b D_b \alpha$ . Explícitamente, dada la métrica (2.1), tenemos que

$$\Delta\alpha = \frac{\alpha''}{A^2} + \left[ \frac{2}{A^2} \left( \frac{B'}{B} + \frac{1}{r} \right) - \frac{A'}{A^3} \right] \alpha'. \quad (B.20)$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$AB^2 \Delta\alpha = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{B^2}{A} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right); \quad (B.21)$$

con este resultado y la ecuación (B.5), la ecuación de lapso (B.19) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{B^2}{A} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right] &= AB^2 \alpha \left[ \frac{1}{3} K^2 + \frac{3}{2} (K^*)^2 + \frac{1}{2} \kappa \rho_a \right] \\ &+ AB^2 \left( \frac{\partial K}{c \partial t} - \beta \frac{\partial K}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (B.22)$$

Podemos ahora utilizar la identidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha \sqrt{B}) \right] &= \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{B}) \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{B}} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{B^2}{A} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (B.23)$$

para combinar la ecuación de restricción de Hamilton, (B.12), con la ecuación de lapso, (B.22), y así obtener la ecuación de lapso "modificada"

$$\begin{aligned} \sqrt{B} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha \sqrt{B}) \right] &+ \frac{\alpha A}{4} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{B^2}{A^2} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} AB^2 \alpha \left[ \frac{5}{3} K^2 + \frac{21}{4} (K^*)^2 + \kappa (2\rho_a - \rho_H) \right] \\ &- AB^2 \left( \frac{\partial K}{c \partial t} - \beta \frac{\partial K}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (B.24)$$

Esta ecuación conduce directamente a la expresión (2.12) cuando se consideran las condiciones  $A = B$  y  $K = K(t)$ .

Continuamos ahora con la obtención de la ecuación de evolución de la función métrica  $A$ , partiendo de la definición (2.8)

$$K = - \left( A^{-2} \Delta_A + 2 B^{-2} \Delta_B \right), \quad (B.25)$$

donde las cantidades  $\Delta_A$  y  $\Delta_B$  están dadas por las expresiones (2.6) y (2.7). Multiplicando por el factor  $-c\alpha AB^2$  y definiendo  $\widetilde{K} \equiv AB^2 K$  se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (AB^2) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-c\beta r^2 AB^2) = -c\alpha \widetilde{K}. \quad (B.26)$$

En el caso  $A = B$ , se obtiene directamente la ecuación (2.13).

Finalmente, la expresión para el vector de translación, utilizando la definición (2.9) multiplicada por el factor  $\frac{3}{2} \alpha c A (Br)^{-1}$ , es

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( c \frac{\beta}{r} \frac{A}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{A}{B} \right) = \frac{3}{2} c \alpha \frac{A}{B} \frac{K^*}{r}. \quad (B.27)$$

Ahora bien, si suponemos que  $B = f(r) \times A$  se concluye que

$$\beta = \frac{3}{2} r f(r) \int_r^\infty \alpha K^* \left( r' f(r') \right)^{-1} dr'. \quad (B.28)$$

Tomando el caso  $f(r) = 1$  la ecuación (2.14b) es directa.

### C. Ecuaciones de Conservación. Caso $A \neq B$

La ecuación de conservación de bariones está dada por

$$\nabla_a (\rho U^a) = 0 . \quad (C.1)$$

El miembro izquierdo de esta ecuación se puede escribir como

$$\nabla_a (\rho U^a) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{-g} \rho U^a) . \quad (C.2)$$

Los determinantes de los tensores métricos  $g_{ab}$ ,  $\gamma_{ab}$  y la cuadrivelocidad, están dados por

$$\sqrt{-g} = \alpha AB^2 r^2 \text{sen } \theta , \quad (C.3)$$

$$\sqrt{\gamma} = AB^2 r^2 \text{sen } \theta \quad (C.4)$$

y

$$U^a = (U^0, U^i) \equiv \frac{cU}{\alpha} \left( 1, \frac{U^i}{U^0} \right) , \quad (C.5)$$

siendo

$$U^0 = \frac{cU}{\alpha} , \quad (C.6)$$

$$U^i = (U^1, 0, 0) .$$

Definimos, además,

$$D \equiv U \rho , \quad \text{Densidad de Masa ,} \quad (C.7)$$

$$\mathcal{V}^a \equiv \left( 1, \frac{U^i}{U^0} \right) , \quad (C.8)$$

$$V^a \equiv c\mathcal{V}^a . \quad \text{Velocidad de Transporte .} \quad (C.9)$$



Las ecuaciones (C.1-2) y las definiciones anteriores nos llevan a la expresión

$$\frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{\gamma} D V^a) = 0, \quad (C.10)$$

que, en vista de que  $V^a$  sólo tiene componentes temporal y radial diferentes de cero, se puede escribir explícitamente como

$$\frac{\partial}{\partial t} (AB^2 D) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 AB^2 D V^1) = 0. \quad (C.11)$$

En el caso  $A = B$  y con la definición del factor conformal,  $A^3$ , se obtiene la ecuación (2.17).

Consideremos ahora la ecuación de conservación de energía-momento

$$\nabla_a T^a_b = 0; \quad (C.12)$$

el miembro izquierdo de esta ecuación se puede escribir como

$$\nabla_a T^a_b = U_b \left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{-g} \sigma U^a) \right] + g^a_b \frac{\partial P}{\partial x^a}; \quad (C.13)$$

contrayendo con la cuadrivelocidad  $U^b$ , notando que la entropía relativista contiene un término que cancela a la derivada parcial de la presión y haciendo uso de la ecuación (C.10), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{-g} \rho \epsilon U^a) + P \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{-g} U^a) = 0. \quad (C.14)$$

Con la definición de densidad de energía interna  $E = \rho \epsilon U$ , la definición del determinante del tensor métrico  $g_{ab}$  y haciendo las derivadas en el segundo término, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (AB^2 E) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 AB^2 E V^1) \\ + P \left[ \frac{\partial}{\partial t} (AB^2 U) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 AB^2 U V^1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (C.15)$$

Cuando  $A = B$  la ecuación (2.18) es directa a partir de la ecuación (C.15) para la energía conformalizada  $\tilde{E} \equiv A^3 E$ .

La ecuación de evolución para el vector de flujo de momento conformalizado  $\tilde{S}_r$  se obtiene expresando el miembro izquierdo de la ecuación (C.12) de la forma

$$\nabla_a T^a_b = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^a} \left( \frac{\sigma U}{\alpha} V^a V_b \sqrt{-g} \right) - \frac{\sigma U}{\alpha} V^a U_m \Gamma^m_{ab} + P_{,b}. \quad (C.16)$$

La componente  $b = 1$  de la ecuación (C.12) es entonces

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^a} \left( \frac{\sqrt{-g}}{c\alpha} V^a S_r \right) - \frac{\sigma U}{\alpha} V^a U_m \Gamma^m_{a1} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0; \quad (C.17)$$

realizando las derivadas y utilizando  $U_a = (U_0, U_1, 0, 0)$ , donde  $U_0$  y  $U_1$  son explícitamente

$$U_0 = A\beta c \sqrt{U^2 - 1} - cU\alpha \quad (C.18)$$

y

$$U_1 = A c \sqrt{U^2 - 1}, \quad (C.19)$$

obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (AB^2 S_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 AB^2 S_r V^1) - c^3 U AB^2 \sigma \left[ \alpha \frac{A'}{A} \frac{1}{U} (U^2 - 1) - \alpha' U \right] \\ - c\beta' AB^2 S_r + c\alpha AB^2 \frac{\partial P}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (C.20)$$

En el caso  $A = B$ , se obtiene inmediatamente la ecuación (2.19) para  $\tilde{S}_r \equiv A^3 S_r$ .

## D. Análisis Dimensional

A continuación se muestra el análisis dimensional de las cantidades involucradas en este trabajo.

### Cantidades Gravitacionales

$$[A] = \text{adimensional}$$

$$[\alpha] = \text{adimensional}$$

$$[\beta] = \text{adimensional}$$

$$[U] = \text{adimensional}$$

$$[K] = L^{-1}$$

$$[K^*] = L^{-1}$$

$$[\kappa] = T^2 M^{-1} L^{-1}$$

### Cantidades del Fluído

$$[\rho] = M L^{-3}$$

$$[\epsilon] = L^2 T^{-2}$$

$$[P] = M L^{-1} T^{-2}$$

$$[\sigma] = M L^{-3}$$

$$[\rho_u] = M L^{-1} T^{-2}$$

$$[D] = M L^{-3}$$

$$[E] = M L^{-1} T^{-2}$$

$$[S_r] = M L^{-1} T^{-3}$$

$$[\Gamma] = \text{adimensional}$$

$$[\rho_a] = M L^{-1} T^{-2}$$

## E. Algoritmo Tridiagonal

Algunos autores se refieren a este algoritmo como una variante del procedimiento de eliminación Gaussiana, aunque también se le conoce comúnmente como el algoritmo de Thomas. Consiste en expresar a la ecuación diferencial en cuestión como una "ecuación de punto interno" que se escribe como

$$-A_m W_{m+1} + B_m W_m - C_m W_{m-1} = D_m . \quad (E.1)$$

Es importante mantener los errores de redondeo pequeños, porque el procedimiento de recurrencia generalmente no es estable y los errores de redondeo pueden crecer exponencialmente. La excepción es el caso de la ecuación unidimensional de Poisson, donde el error crece en forma lineal. Richtmyer y Morton demuestran que los errores de redondeo se mantienen siempre pequeños cuando se cumple

$$A_m > 0 , \quad B_m > 0 , \quad C_m > 0 \quad (E.2)$$

y

$$B_m > A_m + C_m , \quad (E.3)$$

donde  $m = 1, 2, \dots, M$ . Se deben establecer, además, las condiciones de frontera adecuadas, e.g. condiciones de Dirichlet, de Neumann ó de Robbin. Por ejemplo, en el caso de la condición de frontera de Dirichlet para el lado izquierdo, ( $m = 1$ ), con la que se especifica  $W_1 = a_1$ , la ecuación (E.1) puede ser resuelta para  $W_{m+1}$  y así iniciar un proceso de recurrencia para toda  $m + 1 \geq 3$ .

Postulamos la existencia de dos vectores  $E$  y  $F$  tales que

$$W_m = E_m W_{m+1} + F_m ; \quad (E.3)$$

substituyendo esta expresión en la ecuación (E.1) y despejando  $W_m$  se obtiene

$$W_m = \frac{A_m}{B_m - C_m E_{m-1}} W_{m+1} + \frac{D_m + C_m F_{m-1}}{B_m - C_m E_{m-1}} . \quad (E.4)$$

Comparando las ecuaciones (E.3) y (E.4), obtenemos las siguientes relaciones de recurrencia para  $E$  y  $F$ :

$$E_m = \frac{A_m}{B_m - C_m E_{m-1}} , \quad (E.5a)$$

$$F_m = \frac{D_m + C_m F_{m-1}}{B_m - C_m E_{m-1}} , \quad (E.5b)$$

para  $m \geq 2$ . Se observa que con la condición de frontera del lado izquierdo se determina a  $E_1$  y  $F_1$  con lo cual las relaciones de recurrencia (E.5) nos permiten conocer a  $E_m$  y  $F_m$  para  $m = 2, 3, \dots, M-1$ . Ahora bien, con la condición de frontera del lado derecho se fija  $W_M$  de modo que con los valores conocidos de  $A, B, C, D$  y los valores calculados de  $E$  y  $F$ , se puede utilizar la ecuación (E.4) para resolver recurrentemente para  $W_m$  a partir de  $W_{m+1}$  desde  $m = M-1$  hasta  $m = 1$ .

## Referencias Generales

Arnowitt, R. y Deser, S. 1959, *Phys. Rev.*, **113**, 745.

Arnowitt, R., Deser, S. y Misner, C. W. 1962, en *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. Witten, L. (Wiley: New York), p.227.

Centrella, J. 1980, *Phys. Rev. D*, **21**, 2776.

Centrella, J. y Matzner, R. 1979, *Ap. J.*, **230**, 311.

Centrella, J. y Smarr, L., 1978, no publicado.

Centrella, J. y Wilson, J. R. 1983, *Ap. J.*, **273**, 428.

Centrella, J. y Wilson, J. R. 1984, *Ap. J.*, **54**, 229.

Chandrasekhar, S. 1938, *Stellar Structure*, (Chicago: University of Chicago Press).

Eardley, D. M. 1978, en *Sources of Gravitational Radiation*, ed. Smarr, L. L. (Cambridge U. Press: Cambridge), p.127.

- Feynman, R. F., Leighton, R. B. y Sands, M. 1971, *Mecánica Cuántica*, (Fondo Educativo Interamericano: USA).
- Harleston, H. 1990, Tesis Doctoral, Universidad de Texas en Austin.
- Harleston, H. y Holcomb, K. A. 1991, *Ap. J.*, **372**, 225.
- Harleston, H. y Vishniac, E. T. 1992, *Phys. Rev. D15*, **45**, 4458.
- Hawley, J. F., Smarr, L. L. y Wilson, J. R. 1984a, *Ap. J.*, **277**, 296.
- Hawley, J. F., Smarr, L. L. y Wilson, J. R. 1984b, *Ap. J. Sup.*, **55**, 211.
- Holcomb, K. A. 1990, *G.R.G.*, **22**, 145.
- Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. 1987, *Fluid Mechanics*, (Pergamon Press: New York).
- Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. 1973, *Teoría Clásica de los Campos*, (Reverté: España).
- Lightman, A. P., Press, W. H. y Price, R. H. 1979, *Problem Book in Relativity and Gravitation*, (Princeton U. Press: Princeton, New Jersey).
- Lindquist, R. W. 1966, *Annals of Physics*, **37**, 487.

- Lorentz, H. A., Einstein, A., Minkowski, H. y Weyl, H. 1952, *The Principle of Relativity*, (Dover: New York).
- May, M. M. y White, R. H. 1967, en *Methods of Computational Physics*, ed. Adler, B., Feinbach, S. y Rolenberg, M. (Academic Press: New York), p.219.
- Mezzacappa, A. y Matzner, R. 1989, *Ap. J.*, **343**, 853.
- Nadejin, D. K., Novikov, I. D. y Polnarev, A. G. 1978, *Soviet Astr.*, **22(2)**, 129.
- Novikov, I. D. y Polnarev, A. G. 1978, *Sources of Gravitation Radiation*, Smarr, L. L., Cambridge University Press.
- Cambridge 173 Newman, W. I. 1977, *Ap. and S. Sc.*, **47**, 99.
- Norman, M. L., Wilson, J. R. y Barton, R. T. 1980, *Ap. J.*, **239**, 968.
- Piran, T. 1980, *J. Comp. Phys.*, **35**, 254.
- Roache, P. J. 1982, *Computational Fluid Dynamics*, (Hermosa Publishers: Albuquerque, N. M.).
- Sedov, L. I. 1959, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, (Academic Press: New York).



Smarr, L., Taubes, C. y Wilson, J. R. 1980, en *Essays in General Relativity*, ed. Tipler, F. (Academic Press: New York), p.157.

Smarr, L. y York, J. W. 1978, *Phys. Rev. D*, **17**, 2529.

Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (John Wiley & Sons: New York).

Wilson, J. R. 1978, en *Proc. of the Int. Sch. of Phys. 'Enrico Fermi', Course LXV*, ed. Giacconi, R. y Ruffini, R. (North Holland Publishing Co.: Amsterdam), p.644.

Wilson, J. R. 1979, en *Sources of Gravitational Radiation*, ed. Smarr, L. L. (Cambridge U. Press: Cambridge), p.423.

Wilson J. R. 1986, en *Astrophysical Radiation Hydrodynamics*, ed. Winkler, K-H. A. y Norman, M. L. (D. Reidel Publishing Co.: Dordrecht), p.477.

York, J. W. 1979, en *Sources of Gravitational Radiation*, ed. Smarr, L. L. (Cambridge U. Press: Cambridge), p.83.