

01184

1
deq

Control No Lineal de Motores de Inducción

Gerardo René Espinosa Pérez¹
División de Estudios de Posgrado
Facultad de Ingeniería
UNAM

Diciembre 1993

Director de tesis: Dr. Romeo Ortega

¹Becario CONACyT expediente 54417

TESIS CON
FOLIA DE ORDEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Indice

1	Introducción	1
1.1	Antecedentes y Motivación	1
1.2	Formulación del Problema	3
1.3	Revisión Bibliográfica y Contribuciones	6
1.4	Organización de la tesis	10
2	Control No Lineal de Sistemas Euler-Lagrange	11
2.1	Ecuaciones de Euler-Lagrange	11
2.2	Propiedades	16
2.3	Control basado en pasividad	22
2.3.1	Moldeo de Energía Potencial	22
2.3.2	Perspectiva de asignación de modelo del control por moldeo de energía	29
2.3.3	Problema de Asignación de Dinámica Deseada	32
3	Motores de Inducción: Modelo y Propiedades	38
3.1	Derivación Lagrangiana de la Máquina Generalizada	38
3.2	Modelo no lineal de 3ϕ del motor de inducción	42
3.3	Modelo equivalente no lineal de 2ϕ	44
3.3.1	Transformación de Blondel	44
3.3.2	Modelo $\alpha\beta$	46
3.3.3	Transformación de Blondel-Park: modelos ab y dq	48
3.3.4	Propiedades	54
4	Motores de Inducción: Control	61
4.1	Control por retroalimentación de estados	62

<i>Indice</i>	2
4.1.1 Caso Ideal	62
4.1.2 Caso Adaptable	71
4.2 Control por retroalimentación de salida	76
4.2.1 Caso basado en observador de estados	76
4.2.2 Caso sin reconstrucción de estados	82
Conclusiones	89
Bibliografía	93

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes y Motivación

La teoría de control no-lineal ha experimentado grandes desarrollos en los últimos 15 años los cuales la han convertido en una teoría más rigurosa y potencialmente más aplicable. El rigor, que ha ayudado a clarificar los problemas y ha proveído de soluciones metodológicas, nace de la incorporación de poderosas herramientas analíticas en el área. Por otro lado, la amplia aplicabilidad es una consecuencia de nuevas formulaciones, que capturan mejor los problemas prácticos, y nuevas soluciones matemáticas en forma "cerrada". Mas aún, la gran disponibilidad de computadoras y programas para implementar y probar los algoritmos de control han tenido un profundo impacto en los diseños ingenieriles de control. Desafortunadamente, a pesar de los significativos avances realizados en la teoría, la transición total hacia la implementación práctica está lejos de ser completa y mucha de la investigación actual aparentemente no está orientada a reducir esta separación.

Esta situación, puede ser explicada por el hecho que muchos de los desarrollos en la teoría de control no-lineal, han sido desarrollados considerando sistemas generales con una representación en el espacio de estados, despreciando las estructuras naturales impuestas por el caracter físico de ellos. Por otro lado, el proceso de modelado de estos sistemas explota de una manera exhaustiva estas estructuras. Esta aparente dicotomía entre modelado y control establece la necesidad de desarrollar una teoría para el control de sistemas no-lineales que incorpore, en un nivel fundamental, la estructura física de los sistemas, en particular sus propiedades de disipación de energía. Algunas aplicaciones relevantes, específicamente el caso de control de robots, ha mostrado que el uso adecuado de las propiedades particulares de un determinado sistema, puede redituár un incremento en la robustez del controlador (evitando por ejemplo cancelación de no-linealidades) y proveer elementos teóricos que faciliten el diseño.

Una alternativa que puede ser intentada con el fin de minimizar el problema anterior, y a través de la cual se pueden obtener aplicaciones exitosas de la teoría de control no-

lineal, es abandonar el objetivo general de controlar la clase de sistemas compuesta por *todas* las ecuaciones diferenciales no-lineales y restringir nuestra atención solamente a la sub-clase que refleja el comportamiento de sistemas dinámicos *físicos*, es decir, entidades matemáticas que siempre tienen al menos un elemento correspondiente en el "mundo real".

El problema que plantea tal enfoque, es como caracterizar esta sub-clase de sistemas dinámicos de tal forma que se sea capaz de cubrir tantos sistemas como sea posible con una sola metodología de control. Este problema de caracterización, puede ser parcialmente resuelto si se considera, por ejemplo, las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos o leyes de Newton para sistemas mecánicos, pero (aunque los modelos resultantes pertenecen a la clase de ecuaciones diferenciales de interés) el objetivo de unificación se hace dependiente de la naturaleza del sistema. Otra posibilidad, que puede resolver este problema en una forma más general, es el punto de vista energético.

Como es bien conocido, todo sistema físico, no importa su naturaleza, puede ser visto como un "transformador de energía", esto es, un dispositivo que recibe cierta cantidad de energía y libera otra cantidad de ella. Mas aún, todos ellos deben satisfacer restricciones de balance de energía. Siguiendo este criterio, es razonable esperar que, si se realiza la tarea de modelado utilizando argumentos basados en energía, entonces se obtendrá la caracterización de una clase mucho más grande de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico de sistemas físicos. Un método que ha probado ser muy útil para obtener esta clase de modelos, son las llamadas ecuaciones de *Euler-Lagrange*.

Historicamente, la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange fue restringida a sistemas mecánicos [Goldstein, 1950], aunque su aplicación en [Meisel, 1966] para obtener modelos de sistemas electromecánicos y su uso en [Wellstead, 1979] para estudiar sistemas de diferentes naturalezas, es una prueba que este método es capaz de definir una gran clase de sistemas físicos. Por supuesto, las ecuaciones de Euler-Lagrange no cubren *todos* ellos, pero pueden manejar una clase mucho más grande que la que pueden los métodos que dependen de la naturaleza del sistema. Adicionalmente, el conocimiento actual que se tiene acerca de su estructura, y la gran cantidad de información acerca de sus propiedades que se deriva de éste, hacen de este método de modelización una alternativa atractiva para lograr el objetivo de generalización deseado.

Por otro lado, además de la estructura de transformador de energía considerada, existe otro aspecto muy importante que debe ser incluido si se desea caracterizar de una manera completa el comportamiento de los sistemas físicos, este es *la existencia de fuerzas disipativas*. La importancia de estos términos radica en el hecho de que el fenómeno de disipación de energía separa a los sistemas físicos de todas aquellas estructuras generales de ecuaciones diferenciales dinámicas. Afortunadamente, la estructura de las ecuaciones de Euler-Lagrange permite sin problema, la inclusión de estas fuerzas disipativas, reforzando su atractivo.

La motivación de este trabajo es contribuir al desarrollo de estrategias de control para

sistemas no lineales con estructura física, específicamente, explotando las características generales de los sistemas Euler-Lagrange expuestas anteriormente. Se desea ilustrar, considerando un sistema físico particular, la posibilidad de desarrollar controladores con estructura física y establecer algunos resultados que constituyan etapas intermedias útiles en la realización de la generalización deseada. El objetivo es

- Explotar la estructura física impuesta por la naturaleza "real" del sistema, y
- Utilizar en un nivel fundamental para el diseño del controlador sus propiedades de disipación.

El sistema particular que será estudiado es el *modelo no lineal del motor de inducción*. Los problemas que se resuelven en esta tesis, así como la importancia, tanto práctica como teórica de este dispositivo, son descritos en la siguiente sección.

1.2 Formulación del Problema

Un gran número de sistemas industriales eléctricos en uso utilizan como elemento básico motores lineales de corriente directa (CD) con el fin de obtener altos rendimientos. El atractivo de esta máquina radica en el hecho de que tanto su modelo como control son muy simples (debido al desacoplamiento en los efectos de campo y armadura). Por esta razón, los motores de inducción han sido dedicados a aplicaciones más simples (basicamente tareas a velocidad constante) a pesar de las muchas ventajas que presentan sobre el primero. Por ejemplo, para los motores de inducción

- La construcción es mucho más simple
- Son virtualmente libres de mantenimiento
- Capturan más potencia en menos espacio
- Pueden ser utilizados en medios ambientes hostiles (e.g. corrosivos o explosivos), y otras

Sus principales desventajas, y las razones históricas del uso exhaustivo de las máquinas de CD, pueden ser divididas en:

1. El modelo, y por lo tanto el control, de los motores de inducción es mucho más complejo que el de los motores de CD.
2. Debido a la complejidad del controlador, su implementación es complicada.

La primera de estas desventajas justifica en parte el muy bajo interés por desarrollar esquemas de control para aplicaciones de alto rendimiento en años pasados y la utilización tan restringida del los motores de inducción. Debido a la segunda, los argumentos hasta hace unos pocos años fueron, que era preferible pagar el alto precio de los motores de CD que la todavía más cara implementación de las máquinas de inducción. Sin embargo, la alta disponibilidad de interruptores de alta potencia y de circuitos integrados baratos para procesamiento de señales de alta velocidad han permitido, actualmente, la relativamente sencilla implementación de controladores no lineales para motores de inducción, por lo que desde el punto de vista técnico actualmente no existe ningún problema para su utilización, más aún, esta situación hace de esta clase de máquinas una alternativa atractiva y promisoría en el diseño de sistemas eléctricos para la obtención de altos rendimientos.

Aunque los argumentos técnicos no imponen actualmente ninguna objeción para el uso de motores de inducción, la primera desventaja es un tópico que requiere de mayor consideración. Ya que en años pasados no existieron aplicaciones de alto rendimiento para este tipo de motores, el desarrollo de estrategias de control adecuadas para esta clase de situaciones fue muy restringido. Esto produjo que el número actual de algoritmos confiables y formalmente (matemáticamente) probados para este fin fuera también muy bajo, como se verá en la siguiente sección. El objetivo de este trabajo es intentar minimizar este hecho proponiendo nuevas alternativas para el control de estas máquinas desarrollando algoritmos rigurosa y formalmente probados adecuados para las aplicaciones de alto rendimiento actualmente requeridas. Debe hacerse notar que el modelo no lineal del motor de inducción pertenece a la clase de sistemas que pueden ser modelados por las ecuaciones de Euler- Lagrange, por lo tanto la mencionada tarea se realiza con los dos objetivos mencionados en la sección anterior.

Para formular el problema que se pretende resolver, es conveniente establecer primero los inconvenientes que se presentan para el control de motores de inducción.

El primer problema es por supuesto, derivado de la estructura no lineal de la máquina. Su modelo, es su representación más simple, es un conjunto de cinco ecuaciones diferenciales no lineales altamente acopladas. Más aún, ya que el interés es en aplicaciones modernas (e.g. vehículos eléctricos o robótica), uno de los objetivos es garantizar que el par entregado por el motor siga una referencia pre- establecida, estableciendo la necesidad de trabajar con esta variable la cual es también una relación no lineal de los estados y perturbada por una función desconocida, el par de carga. Además de esta complicada estructura, la construcción física de la máquina impone tres problemas adicionales; Los devanados de rotor son corto-circuitados, por lo tanto no hay manera de variar el valor de voltaje en esos circuitos (ya que es cero todo el tiempo), más aún, en general (e.g. para motores tipo jaula de ardilla) las variables de rotor no son disponibles para medición. En este sentido, es necesario mencionar que en realidad existe la instrumentación necesaria para realizar esta tarea, pero ya que su relación eficiencia/costo es muy baja, la suposición común es considerar esta variables no medibles. El cuarto problema está relacionado con la naturaleza de circuito de potencia del motor, esto es, como cualquier circuito de este

tipo, los parámetros del modelo (fundamentalmente las resistencias de los devanados) varían con la operación de la máquina. El problema final es relacionado con el hecho de que los motores de inducción consumen una gran fracción de la potencia eléctrica utilizada en la industria, de esta forma los algoritmos de control deben ser diseñados con el objetivo de minimizar pérdidas.

Se puede resumir la estructura del modelo no lineal del motor de inducción desde el punto de vista de control como:

Un sistema altamente no lineal con salida una relación no lineal de los estados y perturbada por una función desconocida. Adicionalmente, el estado completo no es disponible para medición y existe incertidumbre paramétrica. Más aún, el sistema posee menos controles que grados de libertad y la tarea de control debe ser realizada minimizando pérdidas.

En este punto, es conveniente mencionar que una posibilidad para reducir las pérdidas mencionadas anteriormente, es que la máquina trabaje en un régimen balanceado, esto es, que si se habla de motores de tres fases, el voltaje de cada fase debe ser de la misma amplitud y frecuencia que los otros. Esto es equivalente a pedir que cada componente del flujo magnético del rotor sea también de la misma magnitud y frecuencia.

Con base a las consideraciones anteriores, la formulación del problema puede ser establecida como resolver el siguiente problema:

Problema de seguimiento de par y regulación de flujo. Considere el modelo no lineal del motor de inducción. Asuma:

- A.1 Las corrientes de estator y la velocidad del rotor son *las únicas variables disponibles para medición*,
- A.2 Los parámetros del motor son *desconocidos*,
- A.3 El par de carga es una *función desconocida*,
- A.4 Las *únicas* entradas de control son los voltajes de estator.

Bajo estas condiciones, diseñe una ley de control que asegure estabilidad interna, seguimiento de par asintótico y regulación de la norma del flujo de rotor. Más aún, se requiere que el motor en estado estable opere en un *régimen balanceado*.

□□□

Debe ser notado, como será claro adelante, que el problema clásico de control de velocidad puede ser visto como un caso particular del problema más general de control de par, por lo tanto la solución de este último cubre tanto aplicaciones típicas como modernas del motor de inducción.

En la siguiente sección se presenta brevemente una revisión de los resultados reportados en el área y las contribuciones generadas en el desarrollo de esta tesis.

1.3 Revisión Bibliográfica y Contribuciones

En el control de motores de inducción pueden distinguirse dos principales tendencias de investigación, una establecida desde mucho tiempo atrás por investigadores aplicados, y otra mucho más reciente desarrollada por la comunidad de teoría de control.

La primera se caracteriza en general por el uso de métodos para el diseño de controladores que prueban su eficacia en implementaciones directas en lugar de argumentos matemáticos rigurosos. Debido a esta razón, en muchos casos la estructura de los nuevos controladores propuestos parecen recaer más en la experiencia del diseñador que en un análisis estructurado del sistema, produciendo la ausencia de una metodología básica para desarrollar nuevas ideas. Esto explica en parte, el número tan bajo de ideas inovativas reportadas en los últimos años por la comunidad aplicada. En este sentido, existe otra razón que puede ser una consecuencia de la anterior. Ya que por mucho tiempo no existió interés por desarrollar estrategias de control para aplicaciones de alto rendimiento de motores de inducción, cuando esto fue requerido por las aplicaciones modernas, los investigadores aplicados no fueron capaces de manejar el problema debido a la falta de una fuerte plataforma matemática. Ya que el trabajo que se presenta aquí no pertenece a esta clase de investigación, y debido también al enorme número de este tipo de publicaciones, se refiere únicamente al lector interesado a los libros [Bose, 1986] y [Leonhard, 1990] y a las referencias en ellos para su ilustración.

La segunda tendencia, nacida en los últimos años, es una nueva alternativa para el desarrollo de esquemas de control para el motor de inducción con el objetivo de resolver este problema desde un punto de vista de teoría de control, es decir estableciendo pruebas matemáticas formales de cada resultado propuesto. La característica principal de este enfoque es que la máquina bajo estudio es vista desde una perspectiva no lineal y se pretende aplicar técnicas de control generales desarrolladas para esta clase de sistemas. Se debe enfatizar el hecho que, en contraste con la filosofía aplicada, su principal objetivo no es *aún* la implementación de los controladores propuestos. Sin embargo, esta situación puede ser explicada por la edad tan corta del enfoque.

Los desarrollos teóricos recientes en el control de motores de inducción pueden ser clasificados en general como

1. Controladores basados en técnicas de linealización por retroalimentación.
2. Controladores basados en pasividad.
3. Otras aproximaciones.

La primera clasificación esta estrechamente relacionada con la más grande proposición establecida por los investigadores aplicados: El *control por campo orientado* propuesto por F. Blaschke en 1972 [Blanchske, 1972]. Esta técnica trabaja con el modelo no lineal del motor de inducción y aplica un cambio de coordenadas que produce que las variables

de la máquina aparezcan como cantidades de CD. En este contexto, una ley de control es diseñada la cual desacopla la norma de flujo de rotor y el par, obteniendo la atractiva característica que esta última variable sea proporcional a una de las corrientes. Después de eso, algunos lazos PI se construyen alrededor para asegurar que (basicamente) el error de velocidad tienda a cero. En resumen, la idea fundamental de este controlador es *simplificar* el comportamiento del motor, – haciendo que se comporte como uno de CD, – para tener la posibilidad de regular con métodos de control clásico. Los principales problemas para su implementación son que el algoritmo requiere la cancelación de términos no lineales, induce singularidades y requiere medición de flujo de rotor.

Ya que el control por campo orientado ha probado ser exitoso en aplicaciones y de hecho intenta realizar linealización y desacoplamiento, algunos intentos desde la comunidad de control han sido desarrollados con el fin de mejorar su comportamiento utilizando ideas de geometría diferencial. En este sentido, en [Marino et. al., 1993] la prueba de que este método realiza desacoplamiento entrada-salida asintótico y linealización es rigurosamente establecida, aunque la historia empieza unos años antes.

En [Krzeminski, 1987] el problema de regulación de velocidad es estudiado y un controlador que logra desacoplamiento *exacto* y linealización entrada-salida es presentado. Se asume medición completa del estado y parámetros conocidos. El problema de regulación de par asumiendo también medición del estado completo fue estudiado utilizando técnicas de linealización por [DeLuca, 1990]. En este trabajo se muestra que el modelo completo no lineal del motor de inducción no es exactamente linealizabile si el par es visto como salida, sin embargo, se prueba que si se desprecia la dinámica mecánica, i.e. se considera velocidad del rotor constante, entonces condiciones necesarias y suficientes para linealización por retroalimentación se cumplen en una región del espacio de estados. En este trabajo, la representación del modelo considerada es sobre un sistema de referencia orientado con los devanados de rotor (modelo dq). [Marino et. al., 1993] propone una versión adaptable del esquema de linealización por retroalimentación de [Krzeminski, 1987] para abordar el problema de regulación de velocidad con resistencia de rotor y par de carga constante desconocidos, pero considerando medición del estado completo. Se utiliza una representación del modelo en un sistema de referencia fijo al estator (modelo ab). Todos estos esquemas sufren de la desventaja de que las leyes de control no son globalmente definidas. El conjunto de singularidades, además de ser difícil de analizar, es definido por la metodología de diseño. La interpretación física de estas es usualmente una etapa *a posteriori*, dejando al diseñador con la esperanza de no contradecir la operación física del sistema. Esta situación se debe al hecho de que esta técnica, –linealización por retroalimentación–, desprecia la estructura física del sistema.

En contraste con el enfoque referido en el párrafo anterior, los controladores que pertenecen a la segunda clasificación explotan sistemáticamente las propiedades físicas del modelo del motor de inducción, produciendo mejores resultados. En [Ortega/Espinosa, 1991a] se propone una metodología para el diseño de controladores basada en ideas de moldeo de energía e inyección de amortiguamiento que

utiliza las propiedades de disipación del sistema. Esta técnica es utilizada en [Ortega/Espinosa, 1993] para derivar la primera solución globalmente definida y globalmente estable para el problema de regulación de par con retroalimentación de salida y par de carga desconcido. El resultado fue establecido para pares deseados constantes que satisfacen una cota superior determinada por el amortiguamiento de la parte mecánica del motor. Un esquema adaptable para compensar incertidumbre en el valor de la resistencia de rotor es también presentado, pero requiere de medición completa del estado. El resultado de [Ortega/Espinosa, 1993] es extendido en [Ortega et. al., 1992] para el caso de pares deseados variantes en el tiempo y se remueve las condiciones de acotamiento descritas antes. La idea fundamental introducida en [Ortega et. al., 1992] es adicionar términos de amortiguamiento al subsistema mecánico.

Los esquemas de [Ortega/Espinosa, 1993] y [Ortega et. al., 1992] se obtienen considerando una representación del modelo donde las variables se expresan en un sistema de referencia que gira a velocidad síncrona (modelo dq). En [Espinosa/Ortega, 1993a] se demuestra que las señales de control de estas esquemas se pueden rotar para resolver el problema considerando la representación del modelo en el sistema de referencia fijo al estator (modelo ab). Esta invariancia al cambio de coordenadas del controlador en [Ortega et. al., 1992] no es sorprendente si se considera que el procedimiento de diseño de [Ortega/Espinosa, 1991a] se basa en propiedades entrada-salida (disipación de energía) del motor, las cuales son independientes a la selección de la representación interna del sistema. En [Espinosa/Ortega, 1993b] un nuevo controlador de retroalimentación de salida y que no requiere observador de estados es presentado, se considera el modelo completo del motor de inducción como la interconexión de dos bloques pasivos. La principal ventaja es que los problemas de seguimiento de par y velocidad se resuelven utilizando únicamente estados medibles. Finalmente, en [Canudas et. al., 1993] el problema de control de posición de robots impulsados con motores de inducción es resuelto.

En la última clasificación se contempla distintas aproximaciones al problema reportadas independientemente. En [Canudas/Seleme, 1992] algunas propiedades de estabilidad de controladores P y PI son estudiadas desde el punto de vista de minimización de energía. [Kanellakopoulos et. al., 1992] establecen condiciones de estabilidad local de un esquema diseñado utilizando una técnica reciente que aumenta el orden del sistema con la introducción de integradores (backstepping) y provee pruebas basadas en teoría de Lyapunov, considera el problema de control de velocidad utilizando un observador de flujo de rotor y considerando parámetros conocidos. En [Utkin, 1993] se aplican ideas de modos deslizantes para control de velocidad con operación balanceada. La principal desventaja de este método son las pérdidas que introducen la lógica de interruptores requerida para su implementación.

Las contribuciones del trabajo que se presenta son consecuencia del trabajo reportado en [Ortega/Espinosa, 1991a], [Ortega/Espinosa, 1993], [Ortega et. al., 1992], [Espinosa/Ortega, 1993a] y [Espinosa/Ortega, 1993b], y pueden ser resumidas de la siguiente manera.

El problema de control del modelo no lineal del motor de inducción se aborda desde un punto de vista físico utilizando la naturaleza Euler- Lagrange del sistema. Se considera como punto base las ideas de moldeo de energía e inyección de amortiguamiento desarrolladas para resolver problemas de regulación y se les da una interpretación en términos de una variante de la técnica de control de asignación de modelo (model matching). Esta modificación, denominada *asignación de dinámica deseada*, permite resolver problemas de seguimiento.

Acerca del modelo, se hace uso de propiedades de pasividad, pasividad por bloques y la existencia de fuerzas que no producen trabajo (i.e. fuerzas que no afectan el balance de energía).

Combinando la técnica de asignación de dinámica deseada y las propiedades de pasividad del motor, se resuelven los problemas de *seguimiento de par y velocidad con regulación de la norma del flujo del rotor* para los siguientes casos

Retroalimentación adaptable de estados. Se considera que los valores de las resistencias del motor, tanto de estator como de rotor, y el par de carga son desconocidos pero constantes y se desarrolla un controlador que requiere medición completa del estado.

Retroalimentación de salida basada en observador de estados.

Bajo la suposición de conocimiento de parámetros se deriva un controlador y un observador que resuelven el problema mencionado antes utilizando únicamente variables medibles. Una ley de adaptación para compensar desconocimiento del par de carga es también incluida.

Retroalimentación de salida sin reconstrucción de estados. Bajo las mismas suposiciones que el caso anterior, se obtiene una ley de control que resuelve el problema de seguimiento de par sin necesidad de reconstruir los estados no medibles. Se incluye también un esquema adaptable para el par de carga.

En los tres casos anteriores se prueba estabilidad global y convergencia exponencial de los errores a cero. Adicionalmente, el desarrollo de los controladores se realiza sin cambios de coordenadas, es decir se trabaja en las coordenadas naturales del sistema $\alpha\beta$ las cuales corresponden a un sistema de referencia fijo para las variables de estator y otro girando a velocidad síncrona para variables de rotor.

Finalmente, la aportación menos evidente aunque de gran importancia, es la prueba de que la posibilidad de desarrollar esquemas de control considerando las características físicas del sistema a un nivel fundamental es completamente realizable, por lo tanto la aportación hacia una teoría de control no lineal para sistemas con estructura física es también cubierto.

1.4 Organización de la tesis

En el capítulo 2 se describe brevemente la estructura general de las ecuaciones de Euler-Lagrange y se obtienen sus principales propiedades. En este nivel de presentación, se introduce las ideas de control por moldeo de energía para dos casos, cuando existen cancelaciones de no linealidades, con igual número de controles que grados de libertad, y cuando estas son eliminadas, con un número de de grados de libertad mayor al de entradas de control. Se presentan las ideas seguidas en el método de asignación de moldeo y se da una interpretación con base en ellas del moldeo de energía. Finalmente, se establece el problema de asignación de dinámica deseada, sus características y propiedades, que permiten resolver problemas de seguimiento.

En el capítulo 3 se presenta el modelo de una máquina eléctrica generalizada y a partir de él se obtiene el modelo de 3 fases del motor de inducción. Después de eso, el modelo de 2 fases es desarrollado y se introducen una serie de propiedades acerca de él.

Los resultados principales acerca del control de motores de inducción se presentan en el capítulo 4. Se inicia con los controladores por retroalimentación de estados, el caso ideal y el controlador adaptable para resistencias del motor, y se termina con los controladores por retroalimentación de salida, el caso con observador y sin observador. Finalmente se presenta una sección de conclusiones, problemas abiertos e investigación futura.

Capítulo 2

Control No Lineal de Sistemas Euler-Lagrange

En este capítulo se presenta la metodología de control que se utiliza en esta tesis considerando una clase general de sistemas no lineales con estructura física: Los sistemas Euler-Lagrange. Se revisa brevemente la estructura general y propiedades de esta clase desde el punto de vista de control, después, con el objetivo de ilustrar el origen de la metodología propuesta, el diseño basado en el moldeo de energía potencial con inyección de amortiguamiento es presentado para dos casos, cuando el número de entradas de control a el sistema es igual al número de grados de libertad y cuando este último es más grande que el primero. Hecho esto, se establecen las ideas básicas en la formulación del problema de asignación de modelo, tanto para el caso lineal como el no lineal, y se estudia el problema de moldeo de energía potencial desde esta perspectiva. Finalmente, como resultado del análisis anterior, la formulación y condiciones generales de solución del problema de *asignación de dinámica deseada*, la contribución principal de este capítulo, es presentada.

2.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Esta sección es una recapitulación de resultados bien conocidos. Se refiere al lector interesado a [Meisel, 1966] y [Nijmeijer et. al., 1990] para un tratamiento más exhaustivo de sistemas Lagrangianos.

Considere un sistema \mathcal{S} compuesto por m elementos ideales (no importa su naturaleza). Si no existe alguna conexión entre ellos, el comportamiento dinámico de \mathcal{S} puede ser especificado completamente por m coordenadas básicas x_i , $i = 1, \dots, m$, y se dice que posee m grados de libertad. Si estos elementos ideales son interconectados de alguna manera, entonces su comportamiento es restringido debido a la dependencia de uno con respecto a los otros, y como consecuencia el número de grados de libertad es reducido.

Esto se debe al hecho de que si \mathcal{S} se somete a r restricciones, el número de coordenadas independientes es solamente $n = m - r$ ahora, por lo tanto el número de grados de libertad es reducido a n .

Estas coordenadas independientes $q_i, i = 1, \dots, n$, son llamadas *coordenadas generalizadas* y establecen una representación de el sistema completo, ya que las m coordenadas básicas pueden ser expresadas como funciones de ellas

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, m$$

así, el comportamiento dinámico de \mathcal{S} puede ser representado solamente en términos de q, \dot{q} . En particular, la co-energía cinética del sistema puede ser representada como $T(q, \dot{q})$ mientras la energía potencial como $V(q)$.

Si se considera que el sistema \mathcal{S} esta en equilibrio y se expresa su comportamiento en términos de q, \dot{q} , aplicando el principio de Alambert se obtiene la siguiente igualdad (ver [Meisel, 1966]) para las fuerzas que aparecen en el sistema

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial V(q)}{\partial q_i} = Q_i^e, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1.1)$$

donde, los primeros dos términos del lado izquierdo se deben a la energía cinética, el tercero son fuerzas conservativas, es decir derivables de la energía potencial, y el término del lado derecho son las *fuerzas externas generalizadas*.

Con el fin de sistematizar esta formulación energética, se puede definir una nueva función como la diferencia entre la energía cinética y la potencial

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (2.1.2)$$

Esta nueva función \mathcal{L} es conocida como el *Lagrangiano* y su uso en (2.1.1) produce las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas conservativos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = Q_i^e, \quad i = 1, \dots, n$$

Esta idealización conservativa de las ecuaciones de equilibrio puede ser modificada, para cubrir la suposición más realista de no conservación de la energía, si se introduce la *función de disipación de Raleigh* $\mathcal{F}(\dot{q})$, y se considera que las fuerzas externas generalizadas Q_i^e son de la forma

$$Q_i^e = Q_i - \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}$$

es decir, las fuerzas externas aplicadas a cada coordenada generalizada o grado de libertad menos las fuerzas de disipación. Bajo estas condiciones se obtiene la *forma completa* de las ecuaciones de Euler-Lagrange como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1.3)$$

Desde el punto de vista de control, se puede considerar el comportamiento dinámico descrito por (2.1.3) como un *sistema de control* con Q_i las entradas o variables de control. En este contexto, se puede obtener una representación más general si se considera que solamente *algunos* grados de libertad pueden ser directamente controlados, i.e.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = \begin{cases} Q_i & i = 1, \dots, m \\ 0 & i = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.1.4)$$

con lo que se obtiene lo que se denota como *Sistema Lagrangiano de control*.

Debe hacerse notar que las ecuaciones dinámicas que se obtiene del uso de (2.1.3) son, por supuesto, las mismas que se obtienen de la aplicación de, por ejemplo, las leyes de Newton para sistemas mecánicos. Sin embargo, la ventaja real del uso de (2.1.3), radica en el hecho de que sistemas compuestos por subsistemas de distintas naturalezas (e.g. electro-mecánicos) pueden ser abordados en la *misma* manera que los sistemas de una sola naturaleza.

Esta propiedad, la cual es una consecuencia directa del enfoque energético de las ecuaciones de Euler-Lagrange, puede ser fácilmente justificada por la construcción del Lagrangiano. Considere un sistema que posee dos subsistemas de distinta naturaleza representados por coordenadas α y β respectivamente, y su estructura es tal que α afecta directamente el comportamiento de β . Se puede construir la co-energía cinética de ambos subsistemas como $T_\alpha(\alpha, \dot{\alpha})$ y $T_\beta(\beta, \dot{\beta}, \alpha)$. Con estas, la co-energía cinética *total* del sistema es

$$T(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}) = T_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}) + T_\beta(\beta, \dot{\beta}, \alpha)$$

De la misma forma, la energía potencial *total* del sistema es

$$V(\alpha, \beta) = V_\alpha(\alpha) + V_\beta(\beta, \alpha)$$

y por lo tanto el lagrangiano esta dado por

$$\mathcal{L}(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}) = T(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}) - V(\alpha, \beta)$$

La aplicación de (2.1.3), por ejemplo con respecto a α y despreciando (por facilidad de presentación) los términos disipativos, produce

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T_\alpha(\alpha, \dot{\alpha})}{\partial \dot{\alpha}} \right] - \frac{\partial T_\alpha(\alpha, \dot{\alpha})}{\partial \alpha} + \frac{\partial V_\alpha(\alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial T_\beta(\beta, \dot{\beta}, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial V_\beta(\beta, \alpha)}{\partial \alpha} = Q_\alpha \quad (2.1.5)$$

con Q_α las fuerzas externas aplicadas sobre las coordenadas generalizadas α . Ya que algunos términos adicionales aparecen en el lado izquierdo de la ecuación anterior, el siguiente análisis se hace necesario. Los primeros tres términos son las fuerzas debidas a la co-energía y la energía potencial del subsistema α , por lo tanto los últimos dos términos deben ser las fuerzas producidas por el subsistema β sobre el subsistema α .

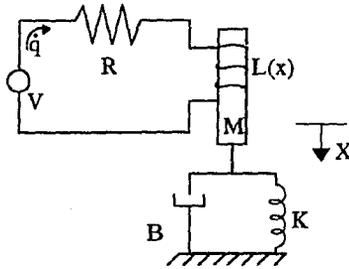


Figura 2.1: Ejemplo sistema electro-mecánico.

Como puede notarse, el atractivo de las ecuaciones de Euler-Lagrange es que en realidad no se debe alterar su estructura general para incluir las fuerzas de *interacción* entre los dos subsistemas.

Ejemplo [Wellstead, 1979].

Considere el sistema electro-mecánico mostrado en la fig. 2.1. El subsistema eléctrico contiene un almacenador magnético inductivo, una resistencia disipativa y una fuerza eléctrica externa dada por la fuente de voltaje. El subsistema mecánico es compuesto por un almacenador de energía cinética (la masa del núcleo), un almacenador de energía potencial (el resorte lineal) y un elemento disipativo (el amortiguador). Las coordenadas generalizadas son dadas por la carga eléctrica q y el desplazamiento traslacional x . Note que en este caso, la inductancia depende de esta última variable.

La co-energía cinética y la energía potencial de la parte eléctrica están dadas por

$$T_e(q, \dot{q}, x) = \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2$$

$$V_e(q, x) = 0$$

mientras que las de la parte mecánica son

$$T_m(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$V_m(x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

Las funciones de disipación de Raleigh para ambos subsistemas son

$$F_e(\dot{q}) = \frac{1}{2}R\dot{q}^2$$

$$F_m(\dot{x}) = \frac{1}{2}B\dot{x}^2$$

Considerando las expresiones anteriores, el Lagrangiano y la función de disipación totales están dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x}) &= \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2 \\ \mathcal{F}(\dot{q}, \dot{x}) &= \frac{1}{2}R\dot{q}^2 + \frac{1}{2}B\dot{x}^2\end{aligned}$$

Si se sustituyen las ecuaciones anteriores en (2.1.4) para la coordenada generalizada mecánica, se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right] = M\ddot{x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{q}^2 - Kx \\ \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}, \dot{x})}{\partial \dot{x}} &= B\dot{x}\end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación de equilibrio para el subsistema mecánico es

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx - \frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{q}^2 = 0$$

donde, como se esperaba, un término mecánico de origen eléctrico, dado por el cuarto elemento del lado izquierdo, aparece.

□□□

Para terminar esta sección, se presenta una suposición fundamental acerca de la estructura de la función de co-energía cinética $T(q, \dot{q})$ de la clase de sistemas definida por (2.1.3) o (2.1.4). Su importancia radica en el hecho de que define la clase de sistemas estudiados en el trabajo que se presenta.

Suposición 2.1.

Considere que la co-energía cinética total de los sistemas definidos por (2.1.3) o (2.1.4) es una función cuadrática de la forma

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.1.6)$$

para alguna matriz simétrica definida positiva $D(q)$.

□□□

Observación 2.1. Note que la suposición anterior no es restrictiva, ya que es bien conocido (vease por ejemplo [Wellstead, 1979]) que una amplia gama de sistemas físicos la satisfacen.

Como una consecuencia de la estructura supuesta para $T(q, \dot{q})$ la estructura de las ecuaciones(2.1.4) puede ser expresada como

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + v(q) + f(\dot{q}) = Mu \quad (2.1.7)$$

donde cada entrada del vector $C(q, \dot{q})$ está dada por

$$c_k(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right] \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.1.8)$$

$v(q)$ y $f(\dot{q})$ son los términos derivados de la energía potencial y la función de disipación respectivamente dados por

$$v(q) = \left[\frac{\partial V(q)}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V(q)}{\partial q_n} \right]^T$$

$$f(\dot{q}) = \left[\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_n} \right]^T$$

y

$$M = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

con I_m la $m \times m$ matriz identidad.

En la siguiente sección se presentan algunas propiedades de la representación anterior que han probado ser útiles desde el punto de vista de control.

2.2 Propiedades

La primer propiedad que se presenta acerca de (2.1.7), está relacionada con el hecho de esta clase de sistemas determinan otra representación muy útil también para aplicaciones de control (ver [Nijmeijer et. al., 1990] para el caso de sistemas mecánicos). Esta es las *ecuaciones Hamiltonianas de movimiento*. Para su presentación, se introduce primero la siguiente transformación, fundamental para la obtención de ella.

Definición 2.1. [Arnold, 1990].

Sea $y = f(x)$ una función convexa, i.e $f''(x) > 0$. La *transformación de Legendre* de la función f es una nueva función g de una nueva variable p , la cual se construye de la siguiente manera (ver fig. 2.2). Se dibuja la gráfica de f en el plano x, y . Sea p un número dado. Considere la línea recta $y = px$. Se toma el punto $x = x(p)$ en el cual la curva es lo más lejana de la línea recta en la dirección vertical: para cada p la función $px - f(x) = F(p, x)$ tiene un mínimo con respecto a x en el punto $x(p)$. Se define $g(p) = F(p, x(p))$ como la transformación de Legendre de $f(x)$. $\square \square \square$

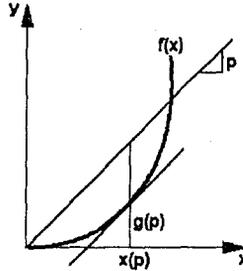


Figura 2.2: Transformada de Legendre.

Observación. Note que la transformación de Legendre no es única. En este caso, el punto $x(p)$ es definido por la condición extrema $f'(x) = p$ y ya que f es convexa, el punto $x(p)$ es único. La generalización para cuando x es un vector es completamente similar.

Dada la definición anterior, se puede definir

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \quad (2.2.1)$$

el cual es llamado momento generalizado, y suponiendo que $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ es convexa, i.e.

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)_{i \leq j \leq n} \neq 0$$

la transformación del sistema está dada por

$$\mathcal{H}(p, q) = p^T \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (2.2.2)$$

con $\mathcal{H}(p, q)$ definido como el *Hamiltoniano* del sistema. Con esta definición se presenta la siguiente propiedad.

Propiedad 2.1.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.1.3) con Lagrangiano dado por (2.1.2) bajo la transformación de Legendre (2.2.2) y con momentos generalizados (2.2.1), satisfacen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial p} \quad (2.2.3)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial q} - f(\dot{q}) + Mu \quad (2.2.4)$$

Prueba.

La ecuación (2.2.3) puede ser directamente obtenida de (2.2.2) tomando su derivada parcial con respecto a p . Para probar (2.2.4), note que de la definición de momento generalizado (2.2.1) y de la estructura de (2.1.3) se obtiene que

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} - f(\dot{q}) + Mu$$

La prueba es completada tomando la derivada parcial de (2.2.2) con respecto a q .

□□□

Un sistema de la forma (2.2.3), (2.2.4) recibe el nombre de *sistema Hamiltoniano de control* y una de sus ventajas principales es que establece una representación "natural" en el espacio de estados de la clase de sistemas definida por (2.1.3).

Otra característica importante de esta nueva representación es que, si la co-energía cinética es de la forma (2.1.6), entonces el Hamiltoniano del sistema dado por (2.2.2) es igual a la energía total (interna) del sistema. Esto se puede probar si se considera que en este caso

$$p = D(q)\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = D^{-1}(q)p$$

por lo tanto

$$\mathcal{H}(p, q) = p^T D^{-1}(q)p - \frac{1}{2} p^T D^{-1}(q)p + V(q)$$

lo que establece la afirmación.

Además de las ventajas mencionadas arriba, una de las características más importantes que la representación Hamiltoniana posee, es que revela claramente las propiedades de disipación de la clase de sistemas que define. Esto se muestra en la siguiente

Propiedad 2.2.

Considere el sistema Hamiltoniano de control (2.2.3), (2.2.4) con entradas u y salidas \dot{q}_m , i.e. la derivada con respecto al tiempo de las m coordenadas generalizadas directamente afectadas por las entradas, entonces el mapa

$$\mathcal{M} : u \rightarrow \dot{q}_m$$

define un mapa pasivo.

Prueba.

Considere la energía total del sistema \mathcal{H} , cuya derivada total a lo largo de las trayectorias del sistema (2.2.3), (2.2.4) está dada por

$$\dot{\mathcal{H}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \dot{q} = -\dot{q}^T f(\dot{q}) + \dot{q}^T Mu \quad (2.2.5)$$

Integrando esta expresión se obtiene la igualdad fundamental

$$\underbrace{\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(0)}_{\text{energía almacenada}} = - \underbrace{\int_0^t \dot{q}^T f(\dot{q}) ds}_{\text{disipada}} + \underbrace{\int_0^t \dot{q}^T M u ds}_{\text{suministrada}}$$

que prueba que la energía almacenada por el sistema es igual a la energía suministrada a él más la energía disipada. La naturaleza pasiva del sistema puede ser establecida de la expresión anterior como

$$\int_0^t \dot{q}^T M u ds \geq \int_0^t \dot{q}^T f(\dot{q}) ds + \beta$$

con $\beta := -\mathcal{H}(0)$ y considerando que el producto $\dot{q}^T f(\dot{q})$ es positivo.

□□□

Ya que la energía total de la representación (2.2.3), (2.2.4) es la misma que la de la representación (2.1.4), una interesante y útil propiedad, fundamental en la metodología de control que se propone en este trabajo puede ser obtenida considerando el sistema (2.1.7) re-escrito en forma de segunda ley de Newton (*masa × aceleración = Fuerza*) como

$$D(q)\ddot{q} = -C(q, \dot{q}) - v(q) - f(\dot{q}) + Mu$$

y considerando que el trabajo hecho por el sistema esta dado por (2.2.5). Como se puede notar, las únicas fuerzas que producen trabajo son las disipativas $f(\dot{q})$ y las externas Mu . Este resultado no es sorprendente para los términos $v(q)$ ya que son conservativos, pero revela que los primeros términos del lado derecho de la expresión anterior no participan en la producción de trabajo. La siguiente proposición establece esta importante propiedad.

Propiedad 2.3.

Considere el sistema (2.1.7) con energía total dada por

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + V(q) \tag{2.2.6}$$

Bajo estas condiciones las fuerzas $C(q, \dot{q})$ no producen trabajo.

Prueba.

De (2.2.6) y (2.1.7) se obtiene que

$$\dot{\mathcal{H}}(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T f(\dot{q}) + \dot{q}^T M u + \frac{1}{2} \dot{q}^T [\dot{D}(q)\dot{q} - 2C(q, \dot{q})]$$

donde cada entrada del vector $\dot{D}(q)\dot{q} - 2C(q, \dot{q})$ es de la forma

$$[\dot{D}(q)\dot{q} - 2C(q, \dot{q})]_k = \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad k = 1, \dots, n$$

Este vector puede ser factorizado como

$$\dot{D}(q)\dot{q} - 2C(q, \dot{q}) = [\dot{D}(q) - 2\bar{C}(q, \dot{q})]\dot{q} = \mathcal{N}(q, \dot{q})\dot{q}$$

con ki -ésima entrada de $\mathcal{N}(q, \dot{q})$ dada por

$$n_{ki} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \right]$$

Note de la ecuación anterior que $n_{ki} = -n_{ik}$, lo que implica que la expresión $\dot{q}^T \mathcal{N}(q, \dot{q})\dot{q}$ es igual a cero para todo \dot{q} .

□□□

Observación 2.1. La prueba de la propiedad anterior muestra el hecho bien conocido de que para *cualquier* factorización $\bar{C}(q, \dot{q})\dot{q} = C(q, \dot{q})$ la expresión $\dot{q}^T \mathcal{N}(q, \dot{q})\dot{q} = 0$ siempre se cumple. En este sentido, esta propiedad puede ser extendida a un caso más general (ver [Spong et. al., 1989]) el cual establece que *siempre* existe una factorización de $C(q, \dot{q})$ tal que $\mathcal{N}(q, \dot{q})$ es antisimétrica para todo $z \in \mathcal{R}^n$, i.e. $z^T \mathcal{N}(q, \dot{q})z = 0$.

La siguiente propiedad que se presenta es un hecho bien conocido relacionado con la estabilidad del sistema.

Propiedad 2.4.

Considere el sistema (2.2.3), (2.2.4) con energía total $\mathcal{H}(q, p)$ dada por (2.2.6). Considere que el punto $(q, p) = (q_0, 0)$ es un punto de equilibrio, es decir la derivada con respecto al tiempo de $V(q)$ evaluada en q_0 es cero. Si $f(\dot{q}) = 0$ entonces

$$\dot{\mathcal{H}}(q, p) = 0$$

y si

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}(q, p)}{\partial q \partial p} > 0 \tag{2.2.7}$$

entonces el equilibrio es estable.

□□□

Para la prueba se refiere al lector interesado a [Arnold, 1990]. Su interpretación es muy simple, ya que solo establece el hecho de que si el punto de equilibrio es un mínimo de la energía potencial ($\dot{q} = 0$ es un mínimo de la energía cinética) entonces el sistema evolucionara alrededor de ese punto. La existencia de términos disipativos solamente modifica la propiedad anterior en el sentido de que se le otorgan propiedades de estabilidad asintótica al equilibrio.

La última propiedad de interés que se presenta, está relacionada con la preservación de la estructura Hamiltoniana bajo cambios de coordenadas. Para esto, considere un cambio de coordenadas general de la forma

$$Q = Q(q, p) \tag{2.2.8}$$

$$P = P(q, p) \tag{2.2.9}$$

y la siguiente definición.

Definición 2.2. Una transformación de coordenadas de las variables independientes (q, p) sobre otro conjunto de coordenadas independientes (Q, P) se dice *canónico* si preserva la estructura Hamiltoniana del sistema. $\square\square\square$

Es claro de la definición anterior, que una transformación canónica también preserva propiedades de energía del sistema. La propiedad siguiente establece cuando un cambio de coordenadas dado califica como canónico. Se refiere al lector interesado a [Bedrossian, 1992] para su prueba y un tratamiento exhaustivo de este tópico.

Propiedad 2.5.

El cambio de coordenadas (2.2.8), (2.2.9) es canónico si y solo si

$$NZN^T = Z$$

donde

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{I}_n \\ -\mathcal{I}_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q(q,p)}{\partial q} & \frac{\partial Q(q,p)}{\partial p} \\ \frac{\partial P(q,p)}{\partial q} & \frac{\partial P(q,p)}{\partial p} \end{bmatrix}$$

con \mathcal{I}_n la $n \times n$ matriz identidad. $\square\square\square$

Debe hacerse notar que la transformación anterior mapea el estado completo q, p en otro vector de estados Q, P . En ese sentido, existe otra clase de transformaciones, llamada *transformación puntual*, la cual realiza unicamente la transformación de las coordenadas generalizadas q . La estructura de este tipo de transformación es

$$Q = Q(q, t) \tag{2.2.10}$$

y su efecto es mapear un conjunto de coordenadas generalizadas q en otro conjunto de coordenadas generalizadas Q . Se puede demostrar (ver también [Bedrossian, 1992]) que

Propiedad 2.6

Toda transformación puntual es canónica. $\square\square\square$

Observación. En este momento es conveniente observar que, para usos futuros, las transformaciones puntuales son canónicas si la relación entre Q y \dot{Q} es univocamente establecida por la expresión $\dot{Q} = \frac{\partial Q(q)}{\partial q} \dot{q}$.

2.3 Control basado en pasividad

En esta sección se introduce, de una manera general, la metodología de control propuesta en este trabajo. Se considera la clase de sistemas de control Lagrangianos (2.1.7) definida en la sección anterior y se establecen condiciones generales para su aplicación. Para este fin, se presenta primero la técnica de control que sirvió de inspiración para la concepción del controlador, el diseño por moldeo de energía e inyección de amortiguamiento. Esta técnica, desarrollada con objetivos de regulación, es estudiada para diferentes versiones y después de eso, interpretada como un caso especial del enfoque más general de control dado por la técnica de asignación de modelo. Una vez que esta interpretación es hecha, la contribución principal de este capítulo, la *asignación de dinámica deseada*, es presentada con el fin de resolver problemas de seguimiento para sistemas Euler-Lagrange.

2.3.1 Moldeo de Energía Potencial

En la sección anterior se presentó en **Propiedad 2.4** que, si el punto de equilibrio $(q, p) = (q_0, 0)$ es un mínimo de la función de energía \mathcal{H} (y en particular de la energía potencial), entonces este era estable y la dinámica del sistema evoluciona cerca de él para adecuadas condiciones iniciales. Más aún, si existen términos disipativos, entonces las trayectorias del sistema tenderán a este punto cuando el tiempo tienda a infinito.

Es interesante notar que, además de que el comportamiento dinámico descrito en el párrafo anterior es una evolución *natural* del sistema, el punto al que tenderán las trayectorias está determinado solamente por la energía potencial, ya que $p = 0$ implica que la co-energía cinética es cero.

La metodología de control que se presenta en esta sección explota esta situación con el objetivo de resolver problemas de regulación. La idea fundamental es que, si se es capaz de modificar la energía potencial del sistema por medio de un controlador y de tal forma que el sistema en lazo cerrado tenga una energía potencial con un mínimo en alguna coordenada deseada $q_0 = q_d$, entonces el sistema evolucionará en forma natural hacia esa posición. Más aún, si el controlador propuesto es capaz de "inyectar" términos de disipación adicionales al sistema, la velocidad de convergencia al estado deseado es mejorada con respecto a la obtenida con la disipación natural ofrecida por el sistema. Esta técnica es conocida con el nombre genérico de *Moldeo de energía más inyección de amortiguamiento*, ya que ha sido ampliamente utilizada en el control de sistemas mecánicos.

Para introducir esta metodología de control, se empezará con el caso más simple cuando existe el mismo número de grados de libertad que entradas de control, es decir $M = I_n$ en (2.1.7) y no se impone ninguna restricción acerca de la cancelación de términos en el sistema. Se refiere al lector al artículo [Takegaki et. al., 1981] para su aplicación al control de robots rígidos.

Considere el sistema Lagrangiano de control

$$D(q)\dot{q} + C(q, \dot{q}) + v(q) + f(\dot{q}) = u$$

con $v(q) = \left(\frac{\partial V_d(q)}{\partial q}\right)^T$ y energía total

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + V(q)$$

Si se define la ley de control

$$u = \left(\frac{\partial V(q)}{\partial q}\right)^T - \left(\frac{\partial V_d(q)}{\partial q}\right)^T$$

con $V_d(q)$ la energía potencial deseada, i.e. la cual tiene un mínimo en $q_0 = q_d$, entonces el sistema en lazo cerrado se representa por

$$D(q)\dot{q} + C(q, \dot{q}) + v_d(q) + f(\dot{q}) = 0 \quad (2.3.1)$$

donde $v_d(q) = \left(\frac{\partial V_d(q)}{\partial q}\right)^T$. La expresión anterior es equivalente a decir que este sistema tiene energía total dada por

$$\mathcal{H}_d(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + V_d(q) \quad (2.3.2)$$

lo que implica a su vez el hecho de que la energía del sistema a sido "moldeada" de tal forma que el nuevo punto de equilibrio es $(q, p) = (q_d, 0)$. Más aún, si se toma la derivada con respecto al tiempo de (2.3.2) a lo largo de las trayectorias de (2.3.1), se obtiene que

$$\dot{\mathcal{H}}_d(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T f(\dot{q})$$

donde se ha utilizado la **Propiedad 2.3**. Así $\mathcal{H}_d(q, \dot{q})$ califica como función de Lyapunov y se prueba la estabilidad asintótica del equilibrio considerando que el término $\dot{q}^T f(\dot{q})$ es positivo.

Una limitación del resultado anterior es que la convergencia hacia el punto de equilibrio es determinada por las propiedades de disipación naturales del sistema. En este sentido, si se propone la siguiente modificación a la ley de control

$$u = \left(\frac{\partial V(q)}{\partial q}\right)^T - \left(\frac{\partial V_d(q)}{\partial q}\right)^T + w$$

con w una nueva señal externa, entonces la derivada de (2.3.2) está dada por

$$\dot{\mathcal{H}}_d(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T f(\dot{q}) + \dot{q}^T w$$

donde, la introducción de la siguiente retroalimentación lineal de estados

$$w = -Q\dot{q}$$

genera la estructura

$$\dot{\mathcal{H}}_d(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T (f(\dot{q}) + Q\dot{q})$$

la cual asegura la estabilidad asintótica, con una velocidad de convergencia mayor, considerando que el término $f(\dot{q}) + Q\dot{q}$ es tal que la negatividad de $\dot{\mathcal{H}}_d(q, \dot{q})$ se cumple.

Ejemplo.

Considere el robot de un grado de libertad con ecuación de equilibrio (ver [Spong et. al., 1989] pg.135, para su derivación)

$$J\ddot{q} + K \sin(q) = \tau \quad (2.3.3)$$

con energía total

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}J\dot{q}^2 + K(1 - \cos(q))$$

donde J es la inercia rotacional, K es una constante que depende de la estructura mecánica del robot y de la gravedad, τ es el par externo aplicado y q la posición angular.

Sea $V_d(q) = 0$ la energía potencial deseada, entonces la ley de control está dada por

$$\tau = K \sin(q) + w$$

y el sistema en lazo cerrado es

$$J\ddot{q} = w$$

lo que implica el moldeo de la energía potencial del sistema. Si adicionalmente se implementa la siguiente retroalimentación lineal de estados

$$w = -k_2\dot{q} - k_1q; \quad k_1 > 0, k_2 > 0$$

es decir, se inyecta amortiguamiento, entonces el sistema completo es descrito por la siguiente ecuación

$$J\ddot{q} + k_2\dot{q} + k_1q = 0$$

la cual es globalmente asintóticamente estable.

Note que el controlador propuesto es el bien conocido PD + compensación de gravedad [Kelly, 1989], [Ortega/Spong, 1989].

□□□

Las principales desventajas de la metodología anterior son: primero, la cancelación de términos (en general) no lineales, y que solo puede ser aplicada a sistemas con igual número de controles que grados de libertad. De hecho, como puede notarse claramente

en el ejemplo, esta técnica está estrechamente relacionada con ideas de linealización por retroalimentación [Isidori, 1989].

En [Ailon/Ortega, 1992] se muestra que la desventaja de cancelación de términos puede ser relajada si, en lugar de definir una ley de control estática, se considera una ley de control dinámica de la forma

$$u = K_2(\hat{q} - q)$$

donde el estado del controlador \hat{q} se obtiene como la solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{\hat{q}} + K_1\dot{\hat{q}} + K_3(\hat{q} - \alpha) = -K_2(\hat{q} - q)$$

donde, el segundo término del lado izquierdo establece la inyección de amortiguamiento. Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado está dado por

$$\begin{aligned} D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + v(q) + f(\dot{q}) &= K_2(\hat{q} - q) \\ \ddot{\hat{q}} + K_1\dot{\hat{q}} + K_3(\hat{q} - \alpha) &= -K_2(\hat{q} - q) \end{aligned}$$

lo que es equivalente a afirmar que la energía total del sistema es

$$\mathcal{H}_d(q, \dot{q}, \hat{q}, \dot{\hat{q}}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{\hat{q}}^T \dot{\hat{q}} + V_d(q)$$

con

$$V_d(q) = V(q) + \frac{1}{2}(\hat{q} - q)^T K_2(\hat{q} - q) + \frac{1}{2}(\hat{q} - \alpha)^T K_3(\hat{q} - \alpha)$$

Los puntos de equilibrio del sistema están dados por

$$\begin{aligned} v(q) - K_2(\hat{q} - q) &= 0 \\ K_2(\hat{q} - q) + K_3(\hat{q} - \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto los valores deseados deben ser de la forma

$$\begin{aligned} \hat{q}_d &= q_d + K_2^{-1}v(q_d) \\ \alpha &= \hat{q}_d + K_3^{-1}v(q_d) \end{aligned}$$

Para poder garantizar unicidad de los valores deseados como puntos de equilibrio, la siguiente condición debe ser satisfecha

$$\lambda_{\min}\{K_2, K_3\} > \beta \geq \left\| \frac{\partial v(q)}{\partial q} \right\|$$

Finalmente, el análisis de estabilidad se lleva a cabo considerando la derivada de $\mathcal{H}_d(q, \dot{q}, \hat{q}, \dot{\hat{q}})$ a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado con lo que se obtiene que

$$\dot{\mathcal{H}}_d(q, \dot{q}, \hat{q}, \dot{\hat{q}}) = -\dot{q}^T f(\dot{q}) - \dot{\hat{q}}^T K_1 \dot{\hat{q}}$$

La estabilidad asintótica se obtiene de la aplicación del teorema de invariancia de La Salle y de la consideración de positividad de $q^T f(\dot{q})$.

Observación 2.2. Debe hacerse notar que, además de la ventaja de evitar cancelaciones de términos no lineales, el controlador anterior posee la característica de que la ecuación diferencial del estado del controlador puede ser vista como un observador de las derivadas de las coordenadas generalizadas, i.e. \dot{q} .

Ejemplo.

Considere nuevamente el robot de un grado de libertad (2.3.3) con el controlador

$$\begin{aligned} \tau &= k_2(\hat{q} - q) \\ \ddot{q} + k_1\dot{q} + k_3(\hat{q} - \alpha) &= -k_2(\hat{q} - q) \end{aligned}$$

Si, por ejemplo, se elije $q_d = \pi$, entonces $v(q_d) = 2K y$

$$\dot{q}_d = \pi + 2k_2^{-1}K \Rightarrow \alpha = \pi + 4(k_2^{-1} + k_3^{-1})K$$

La energía total del sistema en lazo cerrado es

$$\mathcal{H}_d(q, \dot{q}, \hat{q}, \dot{\hat{q}}) = \frac{1}{2}J\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\dot{\hat{q}}^2 + K(1 - \cos(q)) + \frac{1}{2}k_2(\hat{q} - q)^2 + \frac{1}{2}k_3(\hat{q} - \alpha)^2$$

cuya derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{\mathcal{H}}_d(q, \dot{q}, \hat{q}, \dot{\hat{q}}) = -k_1\dot{\hat{q}}^2$$

Con esta estructura y el teorema de invariancia de La Salle, la estabilidad asintótica del estado deseado se prueba considerando $k_2, k_3 > \beta \geq K$.

□□

Una característica importante del esquema anterior es que puede ser aplicado directamente a el sistema (2.1.7), i.e. cuando existen más grados de libertad que entradas de control para el caso especial de que la energía potencial sea de la forma

$$V(q) = V_g(q) + \frac{1}{2}q^T \mathcal{K} q \tag{2.3.4}$$

con

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix} = \mathcal{K}^T$$

En este caso, las ecuaciones de equilibrio del sistema pueden escritas como

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + v(q) + f(\dot{q}) + \mathcal{K}q = M u$$

donde

$$v(q) = \begin{bmatrix} g(q_1) \\ g(q_2) \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

La estructura del controlador está dada por

$$\begin{aligned} u &= K_2(\hat{q}_1 - q_1) \\ \ddot{\hat{q}}_1 + K_1\dot{\hat{q}}_1 + K_3(\hat{q}_1 - \alpha) &= -K_2(\hat{q}_1 - q_1) \end{aligned}$$

mientras el sistema en lazo cerrado por

$$D_a(q)\ddot{q}_a + C_a(q, \dot{q}) + v_a(q) + f_a(\dot{q}_a) + \mathcal{K}_a q_a = \alpha_a \quad (2.3.5)$$

donde $D_a(q) = \text{diag}\{D(q), \mathcal{I}_m\}$ y

$$\begin{aligned} C_a(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} C(q, \dot{q}) \\ 0 \end{bmatrix}; f_a(\dot{q}_a) = \begin{bmatrix} f(\dot{q}) \\ K_1\dot{\hat{q}}_1 \end{bmatrix}; v_a(q) = \begin{bmatrix} v(q) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{K}_a &= \begin{bmatrix} K_{11} + K_2 & K_{12} & -K_2 \\ K_{12}^T & K_{22} & 0 \\ -K_2 & 0 & K_2 + K_3 \end{bmatrix}; q_a = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \hat{q}_1 \end{bmatrix}; \alpha_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_3\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La energía total del sistema es

$$\mathcal{H}_d(q_a, \dot{q}_a) = \frac{1}{2}\dot{q}_a^T D_a(q)\dot{q}_a + V_d(q_a) \quad (2.3.6)$$

donde

$$V_d(q_a) = V_g(q) + \frac{1}{2}q_a^T \mathcal{K}_a q_a$$

mientras que los puntos de equilibrio son soluciones de

$$v_a(q) + \mathcal{K}_a q_a = \alpha_a$$

De esta ecuación se puede obtener, después de largos pero directos cálculos, que el estado deseado debe satisfacer que

$$\begin{aligned} \alpha &= \hat{q}_{1d} + K_3^{-1}(K_{11}q_{1d} + K_{12}q_{2d}) + K_3^{-1}v(q_{1d}) \\ v(q_{2d}) &= K_{12}^T q_{1d} + K_{22}q_{2d} \\ \hat{q}_{1d} &= q_{1d} + K_2^{-1}(K_{11}q_{1d} + K_{12}q_{2d}) + K_2^{-1}v(q_{1d}) \end{aligned}$$

para calificar como puntos de equilibrio. Se prueba estabilidad asintótica tomando la derivada de (2.3.6) a lo largo de las trayectorias de (2.3.5) lo que da como resultado que

$$\dot{\mathcal{H}}_d(q_a, \dot{q}_a) = -\dot{q}_a^T f_a(\dot{q}_a)$$

donde se considera que $\dot{q}_a^T f_a(\dot{q}_a)$ es positivo. Como en el caso de acceso directo a todas las coordenadas generalizadas, unicidad del equilibrio se asegura si $\lambda_{\min}\{K_2, K_3\} > \beta \geq \|\frac{\partial v(q)}{\partial q}\|$ y la restricción adicional $K > \beta$. Se refiere al lector interesado a

[Ailon/Ortega, 1992] para la aplicación de esta metodología al control de robots con uniones flexibles.

Para terminar con esta revisión de las técnicas de moldeo de la energía potencial, se presenta el caso más general cuando la cancelación de términos no lineales no se lleva a cabo, el número de grados de libertad es más grande que el de entradas de control y no existe suposición acerca de la estructura de la energía potencial. Para este fin se sigue [Nijmeijer et. al., 1990] y se considera el sistema (2.1.7) con energía total (2.2.6).

Si se define la ley de control

$$u = Kq + v \quad (2.3.7)$$

con $K = \text{diag}\{k_1, \dots, k_m\} \in \mathcal{R}^{m \times m}$ y v una nueva entrada externa, entonces el sistema en lazo cerrado está dado por

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + v_d(q) + f(\dot{q}) = Mv$$

lo cual implica que la nueva energía total del sistema es

$$\mathcal{H}_d(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} + V_d(q)$$

donde

$$V_d(q) = V(q) + q^T \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q \quad (2.3.8)$$

Por lo tanto la ley de retroalimentación (2.3.7), genera la posibilidad de moldear la energía potencial si (2.3.8) es definida positiva. El siguiente lema (el cual se presenta en una versión especializada) establece condiciones para la existencia de la ley de control (2.3.7) que asegura la positividad deseada.

Lema 2.1. [Nijmeijer et. al., 1990]

Considere el sistema Lagrangiano de control (2.1.7) con un mínimo de la energía potencial $V(q)$ dado por q_0 . Suponga que la matriz

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} (q_0) \right)_{i,j \in \mathbb{N}} \quad (2.3.9)$$

es definida positiva restringida a $\ker\{C\}$ con

$$C = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

entonces, existe una ley de retroalimentación (2.3.7) tal que (2.3.8) es positiva definida en una vecindad U_0 de q_0 , y $\frac{\partial V_d(q)}{\partial q} \neq 0$ para todo $q \in U_0$ con $q \neq q_0$

□□□

Se refiere al lector a [Nijmeijer et. al., 1990] para la prueba del lema, en su lugar se concentrará el estudio en su interpretación. Note que (2.3.10) es la matriz de entrada al sistema, entonces lo que únicamente afirma el lema anterior es que, si las coordenadas generalizadas que no pueden ser afectadas por las entradas de control se comportan "adecuadamente" alrededor de q_0 , i.e. (2.3.9), entonces la ley de control (2.3.7) asegura que las m coordenadas generalizadas directamente afectadas por las entradas de control pueden ser modificadas de tal forma que la energía potencial total de el sistema (2.3.8) tiene un mínimo en q_0 . Por supuesto, este resultado no es sorprendente si se considera la generalidad del enfoque.

2.3.2 Perspectiva de asignación de modelo del control por moldeo de energía

En esta sección se sigue estrechamente [Krener, 1992] con el fin de revisar brevemente el problema de control por asignación de modelo. Una interpretación geométrica de los objetivos de este enfoque es dada tanto para el caso lineal como para el no lineal. Después de eso, el control por moldeo de energía presentado en la sección anterior es retomado y visto desde esta perspectiva.

Considere primero el caso lineal del problema de control por asignación de modelo con planta dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Fx + Gu \\ y &= Hx + Ju\end{aligned}$$

donde $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^m$, $y \in \mathcal{R}^p$ y las matrices F, G, H, J de dimensiones apropiadas. Se supone que la planta tiene una realización mínima, esto es controlable y observable.

El modelo de referencia está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= Ax_m + Bu_m \\ y_m &= Cx_m + Du_m\end{aligned}$$

donde $x_m \in \mathcal{R}_m^n$, $u_m \in \mathcal{R}_m^m$, $y_m \in \mathcal{R}^p$ y las matrices A, B, C, D de dimensiones apropiadas. Se supone también que el modelo es estable.

El problema de control por asignación de modelo en este caso puede ser planteado como

Problema de asignación de modelo: Caso Lineal.

Encontrar una ley de prealimentación/retroalimentación de la forma

$$u = Kx + Lx_m + Mu_m \tag{2.3.11}$$

tal que la planta sea asintóticamente estable alrededor de $x_m = 0, u_m = 0$ y al mismo tiempo el error

$$e = y - y_m$$

tienda a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

□□□

El problema anterior tiene solución si existe un mapa lineal desde los estados y entradas del modelo a los estados y entradas de la planta

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ L & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.3.12)$$

tal que

$$\begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ L & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

sin embargo, se concentrara la atención a la siguiente interpretación geométrica que puede ser dada a este problema.

La existencia del mapa lineal (2.3.12) puede ser interpretada como la existencia de una subvariedad lineal que combina los espacios de estados tal que:

i) Es invariante bajo la dinámica de lazo cerrado dada por $\dot{u} = Lu + Mu_m$ para todo u_m , y

ii) En esta variedad, el error $e(t)$ es cero.

Finalmente, al introducción de K establece, bajo una apropiada selección, propiedades de estabilidad asintótica de esta variedad, es decir la vuelve atractiva.

Para el caso no lineal, la formulación es muy similar. Considere la planta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned}$$

y el modelo no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= a(x_m, u_m) \\ y_m &= c(x_m, u_m) \end{aligned}$$

El problema de asignación de modelo para el caso no lineal se puede plantear como

Problema de asignación de modelo: Caso no lineal.

Encontrar una ley de control por prealimentación/retroalimentación de la forma

$$u = \mu(x_m, u_m) \quad (2.3.13)$$

tal que, el error

$$e = h(x, u) - c(x_m, u_m)$$

tienda a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

□□□

Como en el caso anterior, el problema se puede solucionar si existe un mapa no lineal

$$x = \theta(x_m) \quad (2.3.14)$$

tal que las siguientes ecuaciones, las cuales son una generalización del caso lineal, son satisfechas

$$\begin{aligned} f(\theta(x_m), \mu(x_m, u_m)) &= \frac{\partial \theta}{\partial x_m}(x_m) a(x_m, u_m) \\ h(\theta(x_m), \mu(x_m, u_m)) &= c(x_m, u_m) \end{aligned}$$

La interpretación geométrica de este problema puede ser dada con base a los siguientes argumentos.

La existencia del mapa no lineal (2.3.14) implica la existencia de una variedad no lineal la cual:

- i) Es invariante bajo la dinámica de lazo cerrado $u = \mu(x_m, u_m)$ para todo u_m , y
- ii) El error $e(t)$ es cero en esa variedad.

El problema de hacer atractivo esta variedad puede ser solucionado, por ejemplo, expandiendo en series de Taylor y resolviendo las ecuaciones término a término.

Es interesante notar que el problema de control por moldeo de energía presentado en la sección 2.3.1, puede ser interpretado de la misma forma que los dos casos anteriores, es decir, se puede ver como un caso particular del problema por asignación de modelo. Para ilustrar este hecho, se presenta primero el caso más sencillo cuando la cancelación de términos es permitida.

Considere el sistema Euler-Lagrange

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + v(q) + f(\dot{q}) = u$$

con salida $y = q$, y defina el siguiente modelo de referencia

$$D(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d) + v(q_d) + f(\dot{q}_d) = u_d$$

con salida $y_d = q_d$. El término $v(q) = \left(\frac{\partial V(q)}{\partial q}\right)^T$ mientras que $v(q_d) = \left(\frac{\partial V(q_d)}{\partial q_d}\right)^T$.

Ya que el objetivo es llevar la salida y a un valor deseado *constante*, es decir se desea hacer regulación de salida, entonces $q_d = \text{const.}$ y por lo tanto el modelo se reduce a

$$v(q_d) = u_d$$

lo cual establece la entrada requerida por el modelo.

Note que, si se define $u = u_d$, entonces se han establecido de alguna manera las dos primeras condiciones impuestas por el problema de asignación de modelo, es decir: se ha definido una variedad $q = q_d$ donde el error $e = y - y_d$ es cero, y es invariante bajo la dinámica de lazo cerrado dada por la definición de la entrada al sistema. Para hacer atractiva esta variedad, se puede definir la ley de control

$$u = v(q) - v(q_d)$$

con la selección particular $v(q_d) = v_d(q)$, y siguiendo los mismos pasos que en la sección 2.3.1 probar su estabilidad asintótica.

Es claro que el enfoque anterior puede ser fácilmente extendido a todos los diferentes casos presentados en la sección 2.3.1 considerando definiciones apropiadas. Considere por ejemplo, el caso más general cuando $M = [I_m, 0]^T$ y no se hacen suposiciones acerca de la estructura de la energía potencial. Bajo estas consideraciones la definición de la variedad es la misma que en el caso anterior y

$$M u_d = \begin{bmatrix} v_1(q_d) \\ v_2(q_d) \end{bmatrix}$$

Como se observa inmediatamente $v_2(q_d)$ debe ser cero y $u = u_d$ implica que, $u = v_1(q_d)$. Si en particular se define $v_1(q_d) = -Kq$ y el sistema satisface las condiciones mencionadas en la sección anterior, entonces el objetivo de moldeo de energía se cumple.

Como última observación de esta sección se debe notar que esta perspectiva desde el problema de asignación de modelo pudo llevarse a cabo gracias al objetivo impuesto de regulación, sin embargo, como puede notarse inmediatamente, esta característica establece su principal desventaja también.

En la siguiente sección se presenta la contribución principal de este capítulo, se extienden los resultados anteriores al caso más general de seguimiento de salida para sistemas Euler-Lagrange.

2.3.3 Problema de Asignación de Dinámica Deseada

En esta sección se considera la clase de sistemas no lineales dada por los sistemas Lagrangianos de control (2.1.7), para los cuales se hacen dos suposiciones adicionales que se presentan adelante, y se desarrolla un controlador no lineal que garantiza seguimiento de salida considerando que algunas condiciones son satisfechas. La metodología de diseño que se sigue esta estrechamente ligada a la utilizada en [Slotine/Li, 1987] (ver también [Ortega/Spong, 1989]) para resolver el problema de control de robots y la estructura del controlador es una mezcla del enfoque de moldeo de energía y de asignación de modelo presentadas antes. El material que se presenta en esta sección es una reformulación del resultado presentado en [Ortega/Espinosa, 1991a].

Para iniciar con la presentación, es necesario primero establecer dos suposiciones que caracterizan la clase de sistemas cubierta con el controlador propuesto.

Suposición 2.

Considere la clase de sistemas definida por (2.1.7), y suponga que los términos de disipación pueden ser divididos en una parte lineal, debida a fricción viscosa por ejemplo para sistemas mecánicos, y una parte restante que contiene términos posiblemente no lineales, es decir

$$f(\dot{q}) = R\dot{q} + \xi(q, \dot{q})$$

donde, como se puede observar, el segundo término es una función de las coordenadas generalizadas y sus derivadas.

□□□

Suposición 3.

Considere la matriz $C(q, \dot{q})$ en (2.1.7) factorizada como $\bar{C}(q, \dot{q})\dot{q}$ y tal que la nueva matriz $\bar{C}(q, \dot{q})$ cumple con la condición

$$z^T [\dot{D}(q) - 2\bar{C}(q, \dot{q})]z = 0$$

para todo $z \in \mathcal{R}^n$.

□□□

Observación. La suposición 3 no es restrictiva, ya que como se prueba en [Spong et. al., 1989], siempre se puede construir la matriz $\bar{C}(q, \dot{q})$ utilizando símbolos de Christoffel por ejemplo, y obtener la propiedad deseada. Acerca de la suposición 2, es claro que una gran clase de sistemas la satisface, por lo que es una suposición razonable.

Observación. Por conveniencia notacional, en el resto de la presentación se denotará la matriz $\bar{C}(q, \dot{q})$ como $C(q, \dot{q})$, por lo que se debe tener en cuenta la relación entre ellas.

Considere el sistema Lagrangiano de control dado por

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + v(q) + R\dot{q} + Kq = Mu + \xi \quad (2.3.15)$$

con energía total

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + V(q) + \frac{1}{2}q^T Kq \quad (2.3.16)$$

y salida

$$y = h(q, \dot{q})$$

El objetivo de control es que la salida y siga una referencia pre-establecida dada por la función

$$y_d = h(q_d, \dot{q}_d)$$

la cual es la salida del sistema

$$D(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + v(q) + R\dot{q}_r + Kq_r = Mu_d + \xi \quad (2.3.17)$$

Las variables q_r se obtienen de las relaciones

$$q_r = q_d - \Lambda \left[\int_0^t e(\tau) d\tau \right] \quad (2.3.18)$$

$$e = q - q_d \quad (2.3.19)$$

$$\begin{aligned} s &= \dot{q} - \dot{q}_r \\ &= \dot{e} + \Lambda e \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

con q_d una función vectorial C^2 acotada, la cual es elegida tal que $y_d = h(q_d, \dot{q}_d)$, y Λ una matriz simétrica definida positiva.

Notese que el sistema (2.3.17) no es un modelo de referencia estrictamente, ya que existe dependencia directa con el estado del sistema q, \dot{q} . Sin embargo, como el objetivo final es que el sistema se comporte como él, se denotará como *Modelo de dinámica deseada*. Acerca de su estructura, la introducción de las variables q_r y s es con el objetivo, como en el caso de robots, de resolver problemas de seguimiento. Note también que e puede ser visto como la salida de un filtro lineal estable con entrada s , entonces si $s \rightarrow 0$ implica que e también tenderá a cero (ver [Desoer et. al. 1975]). Finalmente, se debe remarcar el hecho de que en este caso, la existencia de almacenadores lineales de energía potencial se considera solo como generalización del resultado, ya que como se verá adelante no son requeridos para la obtención del controlador.

La formulación general del problema de seguimiento descrita en el párrafo anterior, puede ser expresada como

Problema de asignación de dinámica deseada.

Dado el sistema (2.3.15) y la dinámica deseada (2.3.17), encontrar una ley de control $u = u(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d)$ tal que el error

$$\tilde{y} = y - y_d \quad (2.3.21)$$

tienda a cero cuando $t \rightarrow 0$.

□□□

Observación. Note que la restricción $y = y_d$ define ahora la variedad no lineal de interés. En este caso, la transformación entre coordenadas del sistema y del modelo es no lineal y las condiciones que la caracterizan son $q = q_d$ y $\dot{q} = \dot{q}_d$.

Con el fin de resolver el problema anterior, se debe considerar que la dinámica deseada no es libre, por lo tanto una etapa adicional debe ser cubierta primero, esta es: dada una y_d encontrar u_d y q_d tal que (2.3.17) se cumpla para todo q, \dot{q} y ξ . Note que este problema establece la segunda gran diferencia con el problema de asignación de modelo, donde la entrada es libre.

En este sentido, la sustitución de (2.3.18-2.3.20) en (2.3.17) produce una ecuación integro-diferencial para q_d dada por

$$D(q)\ddot{q}_d + A_1\dot{q}_d + A_2q_d + A_3 \int_0^t q_d d\tau = Mu_d + \xi + f(q, \dot{q}) \quad (2.3.22)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= D(q)\Lambda + C(q, \dot{q}) + R \\ \mathcal{A}_2 &= C(q, \dot{q})\Lambda + R\Lambda + K \\ \mathcal{A}_3 &= K\Lambda\end{aligned}$$

y $f(\cdot)$ una función conocida de q, \dot{q} y $\int q d\tau$ dada por

$$f(q, \dot{q}) = D(q)\Lambda\dot{q} + [C(q, \dot{q})\Lambda + R\Lambda]q + K\Lambda \int_0^t q d\tau - v(q)$$

De la invertibilidad de $D(q)$ es claro que, para todo u_d , $f(\cdot)$ y ξ , (2.3.22) admite una solución q_d . El punto principal es entonces encontrar explícitamente los u_d y q_d que resuelvan el problema.

En este momento es conveniente recordar la estructura especial de la matriz de entrada

$$M = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

que permite realizar la siguiente partición del sistema (2.3.17)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (D(q)\ddot{q}_d)_m \\ (D(q)\ddot{q}_d)_{n-m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathcal{A}_1\dot{q}_d)_m \\ (\mathcal{A}_1\dot{q}_d)_{n-m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathcal{A}_2q_d)_m \\ (\mathcal{A}_2q_d)_{n-m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathcal{A}_3 \int_0^t q_d d\tau)_m \\ (\mathcal{A}_3 \int_0^t q_d d\tau)_{n-m} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} u_d \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_m \\ \xi_{n-m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_m(q, \dot{q}) \\ f_{n-m}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

donde la notación $(\cdot)_m$ y $(\cdot)_{n-m}$ denota las primeras m y finales $n - m$ entradas de cada vector.

Como se puede observar en la expresión anterior, se puede elegir u_d de una manera inmediata de tal forma que las ecuaciones correspondientes en (2.3.23) son satisfechas. Por lo tanto, el problema se reduce a resolver las ecuaciones restantes en (2.3.23) las cuales establecen las condiciones requeridas para resolver el problema de asignación de dinámica deseada. Estas condiciones se pueden expresar como

Problema de selección de coordenadas deseadas.

Considere la siguiente ecuación integro-diferencial

$$\left(D(q)\ddot{q}_d + \mathcal{A}_1\dot{q}_d + \mathcal{A}_2q_d + \mathcal{A}_3 \int_0^t q_d d\tau \right)_{n-m} = \xi_{n-m} + f_{n-m}(q, \dot{q})$$

Para $D(q), \mathcal{A}_i, \xi$ y $f(\cdot)$ dadas, encontrar q_d tal que la salida $h(q_d, \dot{q}_d)$ siga la referencia deseada y_d para todo u_d .

□□□

Notese que formalmente, el problema anterior puede ser presentado como un problema de regulación de salida. Encontrar condiciones de solución a él, es una cuestión cuya respuesta, en este nivel de generalidad, es difícil de obtener. Una contribución significativa en el entendimiento de este problema fundamental ha sido reportada en [Isidori et. al., 1990]. Afortunadamente, en algunas aplicaciones específicas (e.g motor de inducción y robots con uniones flexibles) una solución explícita puede ser obtenida.

Con el fin de continuar con la presentación del controlador propuesto, suponga que el problema anterior es resuelto, i.e. se tiene un u_d y un q_d tal que si $q = q_d$ y $\dot{q} = \dot{q}_d$ entonces $y = y_d$. El problema restante es diseñar, con esta información, la ley de control que garantiza que esta variedad es invariante bajo la dinámica de lazo cerrado y es atractiva.

Este último problema puede ser resuelto si se considera la ecuación dinámica del error, obtenida como la resta de (2.3.17) y (2.3.15) dada por

$$D(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s + Rs + K \int_0^t s d\tau = M(u - u_d) \quad (2.3.24)$$

y considerando la función cuadrática definida positiva

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[s^T D(q)s + \left(\int_0^t s d\tau \right)^T K \left(\int_0^t s d\tau \right) \right] \quad (2.3.25)$$

La derivada de (2.3.25) a lo largo de las trayectorias de (2.3.24) puede ser obtenida, utilizando la suposición 3, como

$$\dot{\mathcal{H}} = -s^T R s - s^T (u - u_d) \quad (2.3.26)$$

por lo tanto, la selección inmediata para la entrada u es u_d . Esta definición, además de proveer la propiedad de invariancia bajo la dinámica de lazo cerrado de la variedad $y = y_d$, asegura su atractividad, ya que la ecuación anterior toma la forma

$$\dot{\mathcal{H}} = -s^T R s$$

Para probar estabilidad asintótica, se puede establecer el siguiente análisis: La derivada con respecto al tiempo de \mathcal{H} con $u = u_d$ implica que el cuadrado de la variable s es integrable, más aún, del acotamiento de \mathcal{H} es también acotada. Esto a su vez implica, de (2.3.20), que $e, \dot{e} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$, i.e. e es uniformemente acotado y por lo tanto $e \rightarrow 0$. De la estructura de (2.3.24) se puede concluir que \dot{s} es también acotado, implicando que s tiende a cero, y como consecuencia $\dot{e} \rightarrow 0$. Esto finalmente implica que el error \tilde{y} tiende a cero.

Se puede resumir el resultado anterior en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.

Considere el sistema (2.3.15). Suponga que para una referencia acotada y_d existe q_d que resuelve el problema de selección de coordenadas deseadas. Bajo estas condiciones

$$u = \left(D(q)\ddot{q}_d + \mathcal{A}_1 \dot{q}_d + \mathcal{A}_2 q_d + \mathcal{A}_3 \int_0^t q_d d\tau \right)_m - \xi_m - f_m(q, \dot{q}) \quad (2.3.27)$$

garantiza que el error de salida $\tilde{y} = y - y_d \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ con todas las señales internas acotadas.

□□□

Observación. De manera interesante, el procedimiento descrito para el diseño del controlador puede ser interpretado en términos de moldeo de energía si se considera a la función (2.3.25) como la energía deseada para el sistema en lazo cerrado y la selección de u como la ley de control necesaria para moldear la energía original (2.3.16) y cumplir con el objetivo. Más aún, si se adicionan términos $-K_d s$ a el controlador de la siguiente forma

$$u = u_d - K_d s$$

con K_d una matriz simétrica definida positiva y s dado por (2.3.20), entonces la derivada de (2.3.26) toma la forma

$$\dot{\mathcal{H}} = -s^T (R + K_d) s$$

lo cual es equivalente a inyectar amortiguamiento al sistema.

Observación. Además del problema impuesto por la selección adecuada de las coordenadas deseadas, una desventaja que presenta el controlador propuesto es la suposición implícita del conocimiento de ξ y $v(q)$.

En los siguientes capítulos se aplica de una manera exitosa el controlador propuesto en la solución del problema de control del modelo no lineal del motor de inducción.

Capítulo 3

Motores de Inducción: Modelo y Propiedades

En este capítulo, el sistema Lagrangiano sobre el cual se interesa aplicar la metodología de control desarrollada en el capítulo 2 es presentado: El modelo no lineal del Motor de Inducción. Su estructura es vista como un caso particular del modelo de una máquina generalizada el cual se obtiene de la aplicación de las ecuaciones de Euler- Lagrange. Se introduce primero el modelo "real" de 3 fases (3ϕ) y se establecen las suposiciones acerca de la construcción de la máquina que lo validan. Después de eso, se presenta la transformación de Blondel y se obtiene el modelo equivalente (modelo $\alpha\beta$) de 2 fases (2ϕ) del modelo original. Dos variaciones de esta representación (los modelos ab y dq) que se obtienen de la aplicación de la transformación de Blondel-Park y que han probado ser de gran utilidad, son presentados y analizados desde un punto de vista de preservación de energía. Finalmente, se presentan algunas propiedades que han probado ser fundamentales para resolver el problema de asignación de dinámica deseada para este caso particular.

3.1 Derivación Lagrangiana de la Máquina Generalizada

En esta sección se trabaja con una máquina rotatoria generalizada [Liu et. al., 1989] que posee un total de $n - 1$ devanados de estator y rotor, y se obtiene su modelo vía la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.1.3). Se suponen devanados por fase sinusoidalmente distribuidos y fases idealmente simétricas. Adicionalmente, el estator y el rotor son considerados concéntricos y la banda de aire entre ellos con una longitud radial constante. La permeabilidad de los núcleos se supone infinita y saturación, pérdidas en el entrehierro, partes terminales de los devanados y los efectos de las ranuras son despreciados. Se considera además materiales magnéticos lineales.

Bajo las consideraciones anteriores y la aplicación de las leyes de Gauss y Ampere, la siguiente relación lineal entre el vector de flujos $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]^T$ y el vector de corrientes $\dot{q}_e = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}]^T$ se obtiene

$$\lambda = D_e(q_n)\dot{q}_e + \mu(q_n)$$

donde q_n es la posición mecánica del eje del motor, $D_e(q_n)$ es la matriz $n-1 \times n-1$ de inductancias (simétrica, definida positiva y periódica en q_n) y el vector $\mu(q_n)$ representa los flujos debidos a la posible existencia de imanes permanentes.

Si se definen como coordenadas generalizadas del sistema a las cargas de cada devanado q_i , $i = 1, \dots, n-1$, y la posición angular del rotor q_n , se puede calcular la co-energía cinética de la parte eléctrica (con ' denotando las variables de integración) como

$$\mathcal{K}_e = \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{\dot{q}_i} \lambda_i(\dot{q}_i') d\dot{q}_i' = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(q_n) \dot{q}_e + \mu(q_n)^T \dot{q}_e$$

mientras que la mecánica es

$$\mathcal{K}_m = \frac{1}{2} J \dot{q}_n^2$$

donde J es la inercia rotacional del motor.

Considerando que no existen efectos capacitivos en los devanados del motor y que la flecha es rígida, i.e. no existen efectos torsionales, se puede concluir que la energía potencial del sistema es cero, y por lo tanto el Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_n, q_n) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(q_n) \dot{q}_e + \mu(q_n)^T \dot{q}_e + \frac{1}{2} J \dot{q}_n^2 \quad (3.1.1)$$

Suponga ahora que los términos de disipación en los devanados se deben unicamente a sus resistencias las cuales tienen valores constantes, la función de disipación de Raleigh para la parte eléctrica se puede escribir como

$$\mathcal{F}_e(\dot{q}_e) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e$$

con $R = \text{diag}\{R_1, \dots, R_{n-1}\}$ (positiva definida), mientras que, si se extiende la suposición a la parte mecánica (i.e. existen términos de fricción viscosa), su función de disipación está dada por

$$\mathcal{F}_m(\dot{q}_n) = \frac{1}{2} B \dot{q}_n^2$$

con B el coeficiente de amortiguamiento. La función total de disipación del sistema es entonces

$$\mathcal{F}(\dot{q}_e, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e + \frac{1}{2} B \dot{q}_n^2 \quad (3.1.2)$$

Las fuerzas externas generalizadas de el sistema son los voltages aplicados a los devanados, denotados por $\bar{u} = [u_1, \dots, u_{n-1}]^T$, y el par de carga $-\tau_L$ el cual es, en general, una función no lineal de la posición y la velocidad.

Para obtener las ecuaciones de equilibrio de este sistema, considere primero el caso de las coordenadas generalizadas eléctricas. Tomando la derivada parcial de (3.1.1) con respecto a las corrientes \dot{q}_e , se obtiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_n, q_n)}{\partial \dot{q}_e} = D_e(q_n)\dot{q}_e + \mu(q_n)$$

lo cual implica que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_n, q_n)}{\partial \dot{q}_e} \right] = D_e(q_n)\ddot{q}_e + \frac{\partial D_e(q_n)}{\partial q_n} \dot{q}_n \dot{q}_e + \frac{\partial \mu(q_n)}{\partial q_n} \dot{q}_n$$

Ya que no existe dependencia de (3.1.1) con respecto a q_e , y considerando que

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}_e, \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_e} = R_e \dot{q}_e$$

las ecuaciones de equilibrio para la parte eléctrica de la máquina generalizada están dadas por

$$D_e(q_n)\ddot{q}_e + W_1(q_n)\dot{q}_n \dot{q}_e + W_2(q_n)\dot{q}_n + R_e \dot{q}_e = \bar{u} \quad (3.1.3)$$

donde se ha definido

$$W_1(q_n) = \frac{\partial D_e(q_n)}{\partial q_n}$$

$$W_2(q_n) = \frac{\partial \mu(q_n)}{\partial q_n}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, ahora con respecto a la coordenada generalizada mecánica, se obtiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_n, q_n)}{\partial \dot{q}_n} = J \dot{q}_n$$

por lo que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_n, q_n)}{\partial \dot{q}_n} \right] = J \ddot{q}_n$$

Por otro lado, se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_n, q_n)}{\partial q_n} = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \frac{\partial D_e(q_n)}{\partial q_n} \dot{q}_e + \left(\frac{\partial \mu(q_n)}{\partial q_n} \right)^T \dot{q}_e$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}_e, \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_n} = B \dot{q}_n$$

por lo tanto, la segunda ecuación, ahora para la parte mecánica del motor, está dada por

$$J\ddot{q}_n - \frac{1}{2}\dot{q}_e^T W_1(q_n)\dot{q}_e - W_2^T(q_n)\dot{q}_e + B\dot{q}_n = -\tau_l(q_n, \dot{q}_n) \quad (3.1.4)$$

donde se ha utilizado las definiciones anteriores.

Se puede reconocer fácilmente en (3.1.4), al segundo término del lado izquierdo como el *par mecánico de origen eléctrico* y al tercero como el *par mecánico de origen magnético*. Note también que, si se considera como entrada total a este subsistema la suma total de pares, i.e. pares generados menos el par de carga, entonces la ecuación (3.1.4) puede ser vista como un filtro lineal de primer orden estable.

Se puede suponer sin pérdida de generalidad, que en la ecuación (3.1.3) solamente los primeros $\frac{n-1}{2}$ términos son afectados directamente por voltajes externos. Por lo tanto el conjunto completo de ecuaciones de equilibrio de la máquina generalizada es

$$D_e(q_n)\ddot{q}_e + W_1(q_n)\dot{q}_n\dot{q}_e + W_2(q_n)\dot{q}_n + R_e\dot{q}_e = M_e u \quad (3.1.5)$$

$$J\ddot{q}_n - \tau(\dot{q}_e, q_n) - \tau_m(\dot{q}_e, q_n) + B\dot{q}_n = -\tau_L(q_n, \dot{q}_n) \quad (3.1.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau(\dot{q}_e, q_n) &= \frac{1}{2}\dot{q}_e^T W_1(q_n)\dot{q}_e \\ \tau_m(\dot{q}_e, q_n) &= W_2^T(q_n)\dot{q}_e \\ M_e &= \begin{bmatrix} I_{\frac{n-1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$I_{\frac{n-1}{2}}$ la matriz identidad de dimensión $\frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ y u el vector que contiene los $\frac{n-1}{2}$ voltajes externos.

Observación 3.1. La ventaja del modelo (3.1.5-3.1.6) radica en el hecho de que un gran número de máquinas pueden ser vistas como casos particulares de él. Más aún, note que no se hizo ninguna suposición acerca de la forma de onda de las fuerzas externas aplicadas, por lo tanto el modelo admite entradas de forma arbitraria. Véase [Liu et. al., 1989] para la aplicación de este modelo a distitos tipos de motores.

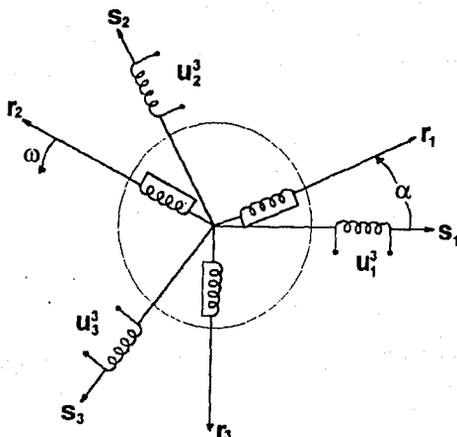
Observación 3.2. Es claro que para el caso particular en que la máquina en estudio no posea imanes permanentes, los términos $W_2(q_n)$ and $\tau_m(\dot{q}_e, q_n)$ son cero.

Observación 3.3. Note que, como se esperaba, el modelo (3.1.5-3.1.6) es el modelo clásico

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} + R_e\dot{q}_e &= u \\ J\ddot{q}_n + B\dot{q}_n &= \tau + \tau_m - \tau_L \end{aligned}$$

que se obtiene de la aplicación de las leyes de Faraday, Ohm y Newton.

En la siguiente sección se estudia el caso del motor de inducción de tres fases como caso particular del modelo presentado.


 Figura 3.1: Representación del motor de inducción de 3ϕ .

3.2 Modelo no lineal de 3ϕ del motor de inducción

En esta sección se trabaja con el motor de inducción de tres fases compuesto por tres devanados de estator fijos y tres devanados de rotor los cuales giran a una velocidad angular ω (ver fig. 3.1). Las mismas suposiciones hechas en la sección anterior son válidas para este motor y adicionalmente se supone que los dos neutros de los circuitos de estator y rotor son aislados y que las terminales de rotor son cerradas por anillos deslizantes o bien están en corto circuito internamente. Sin pérdida de generalidad, y por facilidad de presentación, se considera el caso de un solo par de polos. Note que, bajo estas suposiciones, los motores tipo jaula de ardilla, los cuales son de gran importancia actual, son considerados.

En relación a la máquina generalizada presentada en la sección anterior, se considera que $n = 7$, por lo que $\omega = q_7$. Bajo la suposición acerca de la conexión de las terminales de rotor, solamente los devanados de estator son externamente afectados, por lo tanto la matriz de entrada es de la forma

$$M_e = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y el vector de entrada es $u^3 = [u_1^3, u_2^3, u_3^3]^T$, donde el superíndice 3 utilizado a largo de esta sección denota la naturaleza de tres fases del sistema.

El vector de coordenadas generalizadas puede ser particionado como

$$q_e^3 = \begin{bmatrix} q_s^3 \\ q_r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{s1}^3 \\ q_{s2}^3 \\ q_{s3}^3 \\ q_{r1}^3 \\ q_{r2}^3 \\ q_{r3}^3 \end{bmatrix}$$

donde los subíndices s y r denotan pertenencia de las variables al estator y rotor respectivamente.

Acerca de los términos disipativos eléctricos, se supone que los tres devanados de estator tiene el mismo valor de resistencia, denotado por R_s . La suposición se extiende para los devanados de rotor para los cuales su valor de resistencia es R_r . Con estas consideraciones, la matriz de resistencias toma la forma particular

$$R_e^3 = \begin{bmatrix} R_s \mathcal{I}_3 & 0 \\ 0 & R_r \mathcal{I}_3 \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar (ver [Krause, 1986]), que la estructura de la matriz de inductancias para esta máquina en particular es de la forma

$$D_e^3(q_7) = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{I}_3 & L_{sr} U(q_7) \\ L_{sr} U^T(q_7) & L_r \mathcal{I}_3 \end{bmatrix}$$

donde L_s y L_r son las inductancia propias de estator y rotor respectivamente, L_{sr} es la inductancia mutua entre estator y rotor y

$$U(q_7) = \begin{bmatrix} \cos(q_7) & \cos(q_7 + \gamma) & \cos(q_7 - \gamma) \\ \cos(q_7 - \gamma) & \cos(q_7) & \cos(q_7 + \gamma) \\ \cos(q_7 + \gamma) & \cos(q_7 - \gamma) & \cos(q_7) \end{bmatrix}$$

con $\gamma = \frac{2\pi}{3}$. Note que los efectos de *leakage* son incluidos en las definiciones de inductancias anteriores.

Bajo estas condiciones, y considerando que la máquina no posee imanes permanentes (ver observación 3.2), el modelo completo para el motor de tres fases está dado por

$$\begin{bmatrix} L_s \mathcal{I}_3 & L_{sr} U(q_7) \\ L_{sr} U^T(q_7) & L_r \mathcal{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_s^3 \\ \dot{q}_r^3 \end{bmatrix} - L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & W_{12}(q_7) \\ W_{21}(q_7) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_s^3 \\ \dot{q}_r^3 \end{bmatrix} \dot{q}_7 \quad (3.2.1) \\ + \begin{bmatrix} R_s \mathcal{I}_3 & 0 \\ 0 & R_r \mathcal{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_s^3 \\ \dot{q}_r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \end{bmatrix}$$

$$J \ddot{q}_7 + B \dot{q}_7 = \tau(\dot{q}_e^3, q_7) - \tau_L(q_7, \dot{q}_7) \quad (3.2.2)$$

donde

$$W_{12}(q_7) = \begin{bmatrix} \sin(q_7) & \sin(q_7 + \gamma) & \sin(q_7 - \gamma) \\ \sin(q_7 - \gamma) & \sin(q_7) & \sin(q_7 + \gamma) \\ \sin(q_7 + \gamma) & \sin(q_7 - \gamma) & \sin(q_7) \end{bmatrix} = W_{21}^T(q_7)$$

y

$$\tau(\dot{q}_e^3, q_7) = L_{sr} \dot{q}_s^{3T} W_{12}(q_7) \dot{q}_r^3$$

el par generado. Note la dependencia de esta variable con respecto a \dot{q}_e^3 y q_7 , y que las cargas eléctricas no aparecen en él.

Observación 3.4. Aunque las corrientes en el modelo anterior pueden tomar cualquier forma, debe notarse que una de ellas es redundante ya que, debido al neutro aislado, las expresiones

$$\begin{aligned} \dot{q}_{s1}^3(t) + \dot{q}_{s2}^3(t) + \dot{q}_{s3}^3(t) &= 0 \\ \dot{q}_{r1}^3(t) + \dot{q}_{r2}^3(t) + \dot{q}_{r3}^3(t) &= 0 \end{aligned}$$

son válidas en todo instante de tiempo.

Con base en la observación anterior, en la siguiente sección se presentan dos transformaciones que permiten obtener un modelo de orden reducido equivalente al modelo (3.2.1-3.2.2).

3.3 Modelo equivalente no lineal de 2ϕ

La suposición de neutros aislados en los circuitos de estator y rotor, establece el hecho de que una de las corrientes de estator y una de rotor son redundantes en el modelo de 3ϕ , ver observación 3.4. En esta sección, esta característica se explota con el objetivo de obtener un modelo de orden reducido equivalente. En este sentido, se introduce (siguiendo estrechamente a [Meisel, 1966]) la conocida transformación de Blondel y se obtiene el modelo conocido como $\alpha\beta$. Una transformación adicional, la transformación de Blondel-Park, que ha estado en uso por mucho tiempo, es presentada para obtener los modelos ab y dq . Análisis acerca de la canonicidad (ver propiedad 2.6) de estas transformaciones se lleva a cabo y finalmente algunas propiedades de los modelos obtenidos son presentadas.

3.3.1 Transformación de Blondel

Considere los devanados de estator de un motor de inducción de 3ϕ (fig. 3.1). Si se supone que son idénticos en las tres fases y distribuidos sinusoidalmente, entonces al alimentar corrientes en ellos, distribuciones también sinusoidales de corriente son obtenidas en la periferia del estator. Estas distribuciones de corriente tienen idénticos factores d y por lo

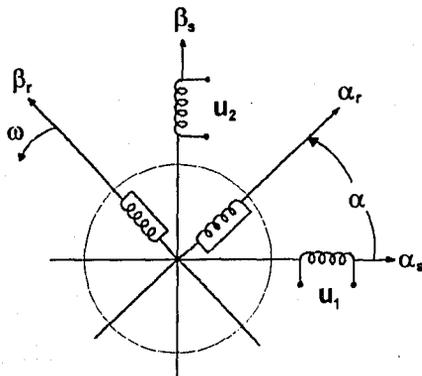


Figura 3.2: Representación equivalente de 2ϕ .

tanto están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{s1}^3 &= d \sin(\theta) \dot{q}_{s1}^3 a_z \\ \mathcal{J}_{s2}^3 &= d \sin(\theta + \gamma) \dot{q}_{s2}^3 a_z \\ \mathcal{J}_{s3}^3 &= d \sin(\theta - \gamma) \dot{q}_{s3}^3 a_z \end{aligned}$$

donde θ es la posición angular con respecto a la cual la magnitud de la distribución es medida, a_z es el vector unitario en el eje z y $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.

La distribución de corriente total del estator puede ser obtenida como la suma de las expresiones anteriores

$$\mathcal{J}_{sT}^3 = d \left[(\dot{q}_{s1}^3 + \cos(\gamma) \dot{q}_{s2}^3 + \cos(\gamma) \dot{q}_{s3}^3) \sin(\theta) - (-\sin(\gamma) \dot{q}_{s2}^3 + \sin(\gamma) \dot{q}_{s3}^3) \cos(\theta) \right] a_z \quad (3.3.1)$$

donde se han utilizado identidades trigonométricas para *senos* y *cosenos* de la suma de dos ángulos.

Considere ahora una máquina de 2ϕ (como se muestra en fig. 3.2) con devanados de estator en ejes fijos ortogonales α y β , y devanados de rotor también en ejes ortogonales pero girando a una velocidad angular ω . De manera similar a la máquina de tres fases, se puede obtener la distribución total de corriente del estator como

$$\mathcal{J}_{sT} = d [\dot{q}_{s1} \sin(\theta) - \dot{q}_{s2} \cos(\theta)] a_z \quad (3.3.2)$$

donde se han supuesto factores de distribución iguales y la ausencia de superíndices indica variables de dos fases.

Ya que el objetivo es obtener un equivalente de 2ϕ para la máquina de 3ϕ , es claro que la distribución de corriente (3.3.2) debe ser igual a (3.3.1), por lo tanto las siguientes condiciones se deben cumplir

$$\begin{aligned} \dot{q}_{s1} &= \dot{q}_{s1}^3 + \cos(\gamma)\dot{q}_{s2}^3 + \cos(\gamma)\dot{q}_{s3}^3 \\ \dot{q}_{s2} &= -\sin(\gamma)\dot{q}_{s2}^3 + \sin(\gamma)\dot{q}_{s3}^3 \end{aligned}$$

Se puede obtener de la expresión anterior, la celebrada *transformación de Blondel* que relaciona variables de 3ϕ con variables *equivalentes* de 2ϕ como

$$T_{3\phi}^{2\phi} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

donde el término $\frac{2}{3}$ se introduce con objetivos de preservación de potencia.

Observación 3.5. Note que la transformación (3.3.3) es equivalente a la obtenida por [Krause, 1986] utilizando argumentos de proyección de variables. En este caso, la transformación propuesta es

$$T_{3\phi}^{2\phi} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

donde el tercer renglon produce la corriente de "secuencia cero"

$$\dot{q}_{s0} = \frac{1}{3}(\dot{q}_{s1}^3 + \dot{q}_{s2}^3 + \dot{q}_{s3}^3)$$

la cual, bajo las consideraciones hechas, es cero.

Observación 3.6. Se puede demostrar, tomando la inversa de (3.3.4), que la transformación inversa de Blondel está dada por

$$(T_{3\phi}^{2\phi})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

3.3.2 Modelo $\alpha\beta$

Notando que el procedimiento expuesto en la sección anterior puede ser aplicado exactamente igual a los devanados de rotor, y de hecho aplicar la transformación a voltajes y flujos, se puede establecer la siguiente transformación completa al vector de corrientes del motor de 3ϕ

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{s1} \\ \dot{q}_{s2} \\ \dot{q}_{r1} \\ \dot{q}_{r2} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{s1}^3 \\ \dot{q}_{s2}^3 \\ \dot{q}_{r1}^3 \\ \dot{q}_{r2}^3 \end{bmatrix}$$

mientras que los voltajes transformados están dados por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ & 0 & 1 & \cos(\gamma) \\ 0 & & 0 & -\sin(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando las transformaciones anteriores al modelo de tres fases (3.2.1 -3.2.2) y después de largas pero fáciles cálculos (que involucran el uso de las identidades trigonométricas presentadas en [Krause, 1986] pg. 535), se obtiene el modelo $\alpha\beta$ del motor como

$$D_e(q_s)\ddot{q}_e + W_1(q_s)\dot{q}_s\dot{q}_e + R_e\dot{q}_e = M_e u \quad (3.3.6)$$

$$J\dot{q}_s - \frac{1}{2}\dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e + B\dot{q}_s = -\tau_L(q_s, \dot{q}_s) \quad (3.3.7)$$

donde $R_e = \text{diag}\{R_s \mathcal{I}_2, R_r \mathcal{I}_2\}$, $M_e = [\mathcal{I}_2, 0]^T$

$$D_e(q_s) = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{I}_2 & L_{sr} e^{\mathcal{J} q_s} \\ L_{sr} e^{-\mathcal{J} q_s} & L_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}; \quad W_1 = L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \\ -\mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} & 0 \end{bmatrix}$$

y \mathcal{J} la 2×2 matriz antisimétrica

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathcal{J}^T$$

En este caso $e^{\mathcal{J} q_s}$ representa la matriz exponencial

$$e^{\mathcal{J} q_s} = \begin{bmatrix} \cos(q_s) & -\sin(q_s) \\ \sin(q_s) & \cos(q_s) \end{bmatrix} = e^{-\mathcal{J}^T q_s}$$

y $u = [u_1, u_2]^T$ los voltajes de estator. Adicionalmente, note que la coordenada mecánica es denotada por el subíndice s debido al hecho de que solo existen cuatro coordenadas eléctricas, las cuales están dadas por

$$q_e = \begin{bmatrix} q_s \\ q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{s1} \\ q_{s2} \\ q_{r1} \\ q_{r2} \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\tau(q_e, q_s) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e \quad (3.3.8)$$

es el par mecánico de origen eléctrico.

Un hecho que debe hacerse notar es la dependencia con respecto a la posición del modelo anterior. Esto se debe a que las variables de estator no están representadas en el mismo sistema de referencia que las variables de rotor (recuerde que mientras el primero está fijo, el segundo gira a una velocidad angular $\omega = \dot{q}_s$). Sin embargo, la gran ventaja que el modelo $\alpha\beta$ presenta es que es una representación directa del motor "real", i.e. su comportamiento es el mismo que el modelo de 3ϕ , por lo tanto si un controlador es diseñado considerando este modelo, este tendrá directamente su *forma implementable*.

Una propiedad muy importante del modelo (3.3.6-3.3.7) es que, si se considera la ecuación de los flujos transformada

$$\lambda = D_e(q_s)\dot{q}_e$$

y se calcula la energía total como

$$\mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_s, q_s) = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T D_e(q_s)\dot{q}_e + \frac{1}{2}J\dot{q}_s^2$$

la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.1.3) genera exactamente el modelo $\alpha\beta$ dado por (3.3.6-3.3.7). Esto significa, que aunque la transformación (3.3.3) se aplica sobre las derivadas de las coordenadas generalizadas, *preserva energía*. Este resultado permite establecer la siguiente importante

Proposición 3.1.

La transformación de Blondel (3.3.3) es canónica.

□□□

Observación 3.7. Desde el punto de vista de control, la proposición anterior garantiza que la aplicación de técnicas de control basadas en el molde de energía tienen una interpretación inmediata en términos de la energía del sistema.

3.3.3 Transformación de Blondel-Park: modelos ab y dq

Con el objetivo de eliminar la dependencia con respecto a la posición en el modelo $\alpha\beta$, R. Park en 1929 introdujo una nueva transformación. Ya que esta se basa en la transformación de Blondel, se conoce como *transformación de Blondel-Park (BP)*. En esta sección se estudia a ella y su versión, reportada por [Liu et. al., 1989], para la máquina generalizada. Dos modelos, exhaustivamente utilizados en el diseño de controladores son presentados (los modelos ab y dq) y sus propiedades de canonicidad analizadas.

La idea base en la transformación BP es que, en lugar de trabajar directamente con corrientes, voltajes y flujos asociados con las fases del sistema, algunas "variables auxiliares" pueden ser introducidas en el modelo de la máquina de tal forma que su estructura se simplifique. De hecho, como se muestra en [Krause, 1986], esas variables auxiliares lo

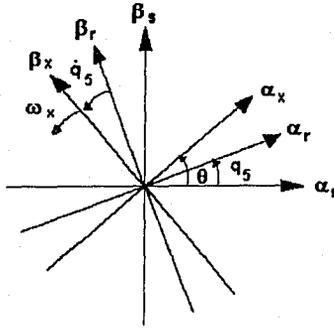


Figura 3.3: Transformación Blondel-Park.

que establecen es un cambio de coordenadas, que es aplicado tanto a variables de estator como de rotor, con el objetivo de obtener una representación de todas las variables en un sistema de referencia *común*. De manera interesante, bajo este cambio de coordenadas la dependencia de las inductancia con respecto de la posición desaparece.

Con el fin de introducir la transformación BP, considere los sistemas de referencia de estator y rotor del modelo $\alpha\beta$, el primero fijo y el segundo rotando a una velocidad \dot{q}_5 , y un tercer referencial (también ortogonal) que gira a una velocidad arbitraria ω_x (ver fig. 3.3). Esto es, la posición angular de este sistema de referencia, denotado por $\alpha_x\beta_x$, es una función del tiempo de la forma

$$\theta = \omega_x t + \theta(0)$$

donde, por conveniencia se supone que en el tiempo cero los ejes α_s , α_r y α_x coinciden, i.e. $\theta(0) = 0$.

La transformación de las ecuaciones, que puede ser relacionada con las relaciones angulares de los ejes mostrados en la fig. 3.3, pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} f_{x1}^s &= f_{s1} \cos(\theta) + q_{s2} \sin(\theta) \\ f_{x2}^s &= -f_{s1} \sin(\theta) + q_{s2} \cos(\theta) \end{aligned}$$

para las variables de estator, y

$$\begin{aligned} f_{x1}^r &= f_{r1} \cos(\theta - \dot{q}_5) + q_{r2} \sin(\theta - \dot{q}_5) \\ f_{x2}^r &= -f_{r1} \sin(\theta - \dot{q}_5) + q_{r2} \cos(\theta - \dot{q}_5) \end{aligned}$$

para las variables de rotor, donde f puede representar voltaje, corriente o flujo, y el superíndice de las variables del lado izquierdo indica si las variables son de estator o rotor.

La transformación completa para variables de estator y rotor puede ser expresada como

$$T_{BP} = \begin{bmatrix} e^{-\mathcal{J}\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\mathcal{J}(\theta-\varphi_s)} \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

con la matriz exponencial definida antes. Es inmediato obtener, debido a las propiedades de las matrices antisimétricas, que

$$(T_{BP})^{-1} = \begin{bmatrix} e^{\mathcal{J}\theta} & 0 \\ 0 & e^{\mathcal{J}(\theta-\varphi_s)} \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

La aplicación de (3.3.9) a el modelo (3.3.6-3.3.7) produce, después de algunos calculos sencillos, el modelo $\alpha_x \beta_x$ del sistema

$$D_{xe} \ddot{q}_x + W_{x1} \dot{q}_x + R_{xe} \dot{q}_x = M_{xe} u_x \quad (3.3.11)$$

$$J \ddot{q}_s - \frac{1}{2} \dot{q}_x^T W_{x2} \dot{q}_x + B \dot{q}_s = -\tau_L(q_s, \dot{q}_s) \quad (3.3.12)$$

donde

$$D_{xe} = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{I}_2 & L_{sr} \mathcal{I}_2 \\ L_{sr} \mathcal{I}_2 & L_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}; \quad W_{x1} = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{J} \omega_x & L_{sr} \mathcal{J} \omega_x \\ L_{sr} \mathcal{J} (\omega_x - \dot{q}_s) & L_r \mathcal{J} (\omega_x - \dot{q}_s) \end{bmatrix}$$

$$W_{x2} = L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{J} \\ -\mathcal{J} & 0 \end{bmatrix}; \quad q_x = \begin{bmatrix} q_{x1}^s \\ q_{x2}^s \\ q_{x1}^r \\ q_{x2}^r \end{bmatrix}; \quad u_x = \begin{bmatrix} u_{x1}^s \\ u_{x2}^s \end{bmatrix}$$

$R_{xe} = R_e$ y $M_{xe} = M_e$. En este caso el par mecánico de origen eléctrico es

$$\tau(\dot{q}_x) = \frac{1}{2} \dot{q}_x^T W_{x2} \dot{q}_x \quad (3.3.13)$$

Como puede observarse, el objetivo de eliminar la dependencia con respecto a la posición de las entradas de las matrices se cumple, lo cual establece la principal ventaja del modelo.

Aunque el comportamiento del motor de inducción puede ser descrito en cualquier sistema coordinado, es útil seleccionar el valor de la velocidad angular ω_x tomando en cuenta el comportamiento físico de la máquina. En este sentido, existen dos valores que han sido comunmente utilizados. Estos son, el sistema de referencia estacionario, i.e. $\omega_x = 0$, el cual produce el llamado modelo *ab*, y el sistema de referencia que gira a velocidad síncrona, i.e. $\omega_x = \omega_a$ con ω_a la frecuencia de los voltajes aplicados, lo cual produce el modelo *dq*. Ambos modelos pueden ser obtenidos por la sustitución apropiada en (3.3.11-3.3.12), sin embargo el interes es mostrar algunas diferencias importantes entre ellos.

Con el fin de establecer estas diferencias entre los modelos ab y dq , recuerde que los voltajes aplicados al modelo $\alpha\beta$ deben ser de la forma

$$u_1 = A \cos(\omega_a t)$$

$$u_2 = A \sin(\omega_a t)$$

con A la amplitud y ω_a la frecuencia de las señales aplicadas. Esto implica que los voltajes BP transformados son, de (3.3.9), de la forma

$$u_{x1}^s = A \cos(\omega_a t) \cos(\theta) + A \sin(\omega_a t) \sin(\theta) \quad (3.3.14)$$

$$u_{x2}^s = -A \cos(\omega_a t) \sin(\theta) + A \sin(\omega_a t) \cos(\theta) \quad (3.3.15)$$

Considere el caso cuando $\omega_r = 0$ lo que implica que $\theta = 0$. La sustitución en (3.3.14-3.3.15), produce el siguiente resultado

$$u_{x1}^s = A \cos(\omega_a t)$$

$$u_{x2}^s = A \sin(\omega_a t)$$

es decir, se recuperan los voltajes aplicados al modelo $\alpha\beta$. Este resultado, que no es sorprendente ya que en ambos modelos el referencial de estator es fijo, establece el hecho de que todas las señales que aparecen en el modelo ab serán variantes en el tiempo.

Por otro lado, si $\omega_r = \omega_a$, lo que implica que $\theta = \omega_a t$, entonces los voltajes resultantes son

$$u_{x1}^s = A$$

$$u_{x2}^s = A$$

lo que establece el hecho de que las variables en el modelo dq serán cantidades constantes o de CD. Más aún, en este caso se puede identificar el término $\omega_s = \omega_r - \dot{\theta}_s$ como la frecuencia de deslizamiento, la cual desde el punto de vista de control puede ser considerada como una entrada adicional.

Observación 3.8. Note que la posible ventaja del modelo dq sobre el modelo ab debida a la simplicidad de las señales que en él aparecen, es compensada por el hecho de que los controladores diseñados utilizando el modelo ab son dados en su forma implementable, mientras que para el modelo dq algunas transformaciones adicionales se requieren.

Como dato interesante, en in [Liu et. al., 1989] una extensión (denotada transformación BP extendida (EBP)) es dada para la máquina generalizada (3.1.5-3.1.6). En ese trabajo se obtiene condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales este modelo es BP transformable. Algunas máquinas específicas, incluido el motor de inducción, ilustran el resultado. Con el fin de hacer el trabajo autocontenido, se presenta a continuación el principal teorema de ese trabajo, aunque se refiere al lector interesado a [Liu et. al., 1989] para más detalles y la prueba del mismo.

Teorema 3.1. [Liu et. al., 1989]

i) La máquina eléctrica (3.1.5-3.1.6) es EBP transformable si y solo si existe una matriz U constante de dimensión $n \times n$ tal que

$$UD_e(q_n) - D_e(q_n)U = W_1 \quad (3.3.16)$$

$$R_e U = U^T R_e \quad (3.3.17)$$

$$UW_2 = \frac{\partial W_2}{\partial q_n} \quad (3.3.18)$$

ii) Si la máquina es EBP transformable, una sencilla transformación es dada por

$$T(q_n) = e^{Uq_n}$$

donde U es la matriz constante que satisface (3.3.16-3.3.18) y e^{Uq_n} denota la matriz exponencial usual.

iii) El sistema completo es EBP transformable si y solo si su subsistema eléctrico es EBP transformable.

□□□

Observación 3.9. Note que pre- y post-multiplicando (3.3.17) por $(R_e)^{-\frac{1}{2}}$ se obtiene que la matriz U debe ser similar a una matriz antisimétrica.

Con el propósito de estudiar las propiedades de preservación de energía de la transformación BP, note que el cambio de coordenadas que establece dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_z \\ \dot{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{BP} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_e \\ \dot{q}_s \end{bmatrix}$$

puede ser visto como una transformación de la forma

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} T_{BP} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x} \quad (3.3.19)$$

Es decir, una transformación sobre las derivadas de las coordenadas generalizadas. Se sabe, de la propiedad 2.6 y la observación XX, que para que este cambio de coordenadas califique como canónico, (3.3.19) debe definir una transformación sobre las coordenadas generalizadas de la forma

$$z = z(x) = \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \\ z_4(x) \\ z_5(x) \end{bmatrix}$$

y tal que

$$\begin{bmatrix} T_{BP} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial z(x)}{\partial x}$$

ya que la relación $\dot{z} = \frac{\partial z(x)}{\partial x} \dot{x}$ debe cumplirse.

En este sentido, considere por ejemplo el caso de $z_4(x)$. De la estructura de la transformación BP, se puede concluir que

$$\frac{\partial z_4(x)}{\partial q_{r1}} = \sin(\theta - q_5); \quad \frac{\partial z_4(x)}{\partial q_{r2}} = \cos(\theta - q_5)$$

y su derivada parcial con respecto a q_{s1} , q_{s2} y q_5 igual a cero. Esto implica que $z_4(x)$ debe ser de la forma

$$z_4(x) = q_{r1} \sin(\theta - q_5) + q_{r2} \cos(\theta - q_5) + r_4$$

donde $r_4 \neq r_4(q_{r1}, q_{r2})$.

Considere ahora, la derivada parcial de la estructura propuesta para $z_4(x)$ con respecto a q_5 . Se sabe que esta expresión debe ser cero, por lo tanto

$$\frac{\partial z_4(x)}{\partial q_5} = -q_{r1} \cos(\theta - q_5) + q_{r2} \sin(\theta - q_5) + \frac{\partial r_4}{\partial q_5} = 0$$

implica que

$$\frac{\partial r_4}{\partial q_5} = q_{r1} \cos(\theta - q_5) - q_{r2} \sin(\theta - q_5)$$

pero r_4 no puede ser una función de q_{r1} , q_{r2} , y por lo tanto tampoco su derivada, entonces se puede concluir que no existe tal función r_4 , lo que implica a su vez que la transformación $z = z(x)$ no se puede obtener y por lo tanto la transformación BP *no es canónica*.

En la siguiente proposición, se extiende el resultado anterior para el caso de la transformación EBP.

Proposición 3.2

La transformación EBP no es canónica.

Prueba.

Considere primero que la transformación $z = z(x)$ es canónica si y solo si $\dot{z} = \frac{\partial z(x)}{\partial x} \dot{x}$. En este caso

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x} = e^{Uq_n}$$

donde q_n es la última entrada del vector x .

Ya que $U + U^T = 0$, ver observación 3.9, entonces existe una matriz Q con $QQ^T = I$ tal que

$$Q^T U Q = \text{diagblock}\{0 \text{ o } B_i\}$$

donde

$$B_i = \beta_i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \beta_i \in \mathfrak{R}$$

Considere el modelo $\alpha\beta$ del motor de inducción, y defina como vector de entrada a

$$v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -\tau_L \end{bmatrix}$$

y como vector de salida a

$$y = \begin{bmatrix} \dot{q}_{e1} \\ \dot{q}_{e2} \\ \dot{q}_s \end{bmatrix}$$

Bajo estas condiciones, el mapa \mathcal{M} dado por

$$\mathcal{M} : v \rightarrow y$$

es pasivo.

Prueba.

Considere la función cuadrática definida positiva dada por la energía total del sistema

$$\mathcal{H}(\dot{q}_e, \dot{q}_s, q_s) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(q_s) \dot{q}_e + \frac{1}{2} J \dot{q}_s^2$$

La derivada de esta función a lo largo de las trayectorias de (3.3.6-3.3.7) es

$$\dot{\mathcal{H}}(\dot{q}_e, \dot{q}_s, q_s) = -\dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_s \dot{q}_e - \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e + \dot{q}_e^T M_e u - B \dot{q}_s^2 + \dot{q}_s \tau - \dot{q}_s \tau_L + \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \dot{D}_e(q_s) \dot{q}_e$$

la cual, notando que $\tau = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e$ y $\dot{D}_e(q_s) = W_1 \dot{q}_s$, puede escribirse como

$$\dot{\mathcal{H}}(\dot{q}_e, \dot{q}_s, q_s) = -\dot{q}^T R \dot{q} + y^T v$$

donde y y v son los vectores de entrada y salida definidos antes, $R = \text{diag}\{R_e, B\}$ es una matriz simétrica definida positiva y $\dot{q} = [\dot{q}_e, \dot{q}_s]^T$.

Integrando la expresión anterior se obtiene que

$$\mathcal{H}(T) - \mathcal{H}(0) = - \int_0^T \dot{q}^T R \dot{q} ds + \int_0^T y^T v ds$$

con s la variable de integración. Es fácil mostrar que esta expresión implica que

$$\int_0^T y^T v ds \geq c \int_0^T \|\dot{q}\|_2^2 ds + \beta; \quad \forall T > 0$$

con $c = \lambda_{\min}\{R\} > 0$, $\beta = -\mathcal{H}(0)$ para todo u_1, u_2 y τ_L localmente integrables. La proposición se prueba notando que esta última expresión establece la desigualdad necesaria para obtener la estructura de disipación.

□□□

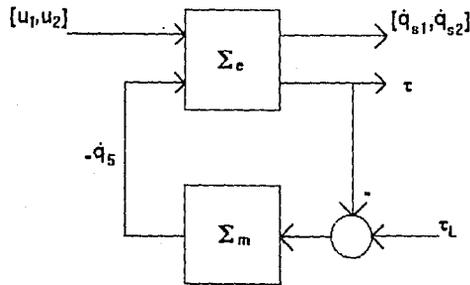


Figura 3.4: Motor de inducción como interconexión de bloques pasivos.

Observación 3.11. Basandose en la prueba de la propiedad anterior, es claro que el vector dado por

$$W(\dot{q}_e, \dot{q}_s, q_s) = \begin{bmatrix} W_1 \dot{q}_s \dot{q}_e \\ \frac{1}{2} \dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e \end{bmatrix} \quad (3.3.20)$$

contiene a los términos que no producen trabajo en el sistema.

La segunda propiedad que se presenta está también relacionada con las características de disipación del sistema, el cual en este caso se observa como la interconexión de dos subsistemas. Se demuestra que ambos subsistemas, eléctrico y mecánico, son pasivos y por lo tanto, basandose en el hecho bien conocido de que la interconexión de bloques pasivos es también pasiva, se obtiene una nueva interpretación de la estructura de pasividad encontrada en la propiedad 3.1.

Propiedad 3.2.

Considere el modelo del motor de inducción (3.3.6- 3.3.7) como la interconexión de los siguientes dos mapas (ver fig.3.4). Un mapa eléctrico, establecido por (3.3.6) y dado por

$$\Sigma_e : v_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -\dot{q}_5 \end{bmatrix} \rightarrow y_1 = \begin{bmatrix} \dot{q}_{s1} \\ \dot{q}_{s2} \\ \tau \end{bmatrix}$$

y un mapa mecánico, que se obtiene de (3.3.7), con estructura

$$\Sigma_m : (-\tau + \tau_L) \rightarrow -\dot{q}_5 = \frac{1}{Jp + B} (-\tau + \tau_L); p = \frac{d}{dt}$$

Bajo estas condiciones, el modelo del motor de inducción puede ser visto como la interconexión de dos subsistemas pasivos.

Prueba.

Considere primero la energía total del subsistema eléctrico dada por

$$\mathcal{H}_e(\dot{q}_e, q_s) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(q_s) \dot{q}_e$$

y cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (3.3.6) es

$$\dot{\mathcal{H}}_e(\dot{q}_e, q_s) = -\frac{1}{2} \dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_s \dot{q}_e - \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e + \dot{q}_e^T M_e u$$

Notando nuevamente que $\tau = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e$, esta expresión se puede escribir como

$$\dot{\mathcal{H}}_e(\dot{q}_e, q_s) = -\dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e + y_1^T v_1$$

La integración de esta ecuación genera la siguiente desigualdad

$$\int_0^T y_1^T v_1 ds \geq c_1 \int_0^T \|\dot{q}_e\|_2^2 ds + \beta_1; \quad \forall T > 0$$

con $c_1 = \lambda_{\min}\{R_e\} > 0$ y $\beta_1 = -\mathcal{H}_e(0)$, lo que prueba que Σ_e es pasivo.

Por otro lado, el subsistema Σ_m es estrictamente positivo real para todo $J \geq 0, B > 0$ y por lo tanto es pasivo.

□□□

Observación 3.12. Se puede demostrar que las propiedades 3.1 y 3.2 son también válidas para los modelos *ab* y *dq* (ver [Ortega/Espinosa, 1993], [Espinosa/Ortega, 1993a] y [Espinosa/Ortega, 1993b]). Este resultado no es sorprendente si se considera que las propiedades de pasividad son de naturaleza entrada/salida y por lo tanto invariantes bajo transformaciones de la representación interna del sistema.

Para introducir la tercer propiedad, note que el modelo (3.3.6-3.3.7) puede escribirse en forma compacta como

$$\mathcal{D}(q)\ddot{q} + W(q, \dot{q}) + \mathcal{R}\dot{q} = \mathcal{M}u + \xi$$

donde $\mathcal{D}(q) = \text{diag}\{D_e(q_s), J\}$, $R = \text{diag}\{R_e, B\}$, $M = [M_e^T, 0_{3 \times 3}]^T$, $\xi = [0, 0, 0, 0, -\tau_L]^T$, $\dot{q} = [\dot{q}_e, \dot{q}_s]^T$ y $W(\dot{q}, q)$ como en (3.3.20).

La propiedad que se presenta es fundamental para el diseño del controlador que se presenta en el siguiente capítulo, y es relacionada con la observación 2.1 en el sentido de que prueba que una factorización adecuada del vector de fuerzas que no producen trabajo genera la propiedad de antisimetría de la propiedad 2.3 para todo $z \in \mathfrak{R}^n$.

Propiedad 3.3.

El vector de fuerzas que no producen trabajo (3.3.20) puede ser escrito como

$$W(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_s & 0 \\ -f^T(q, \dot{q}) & 0 \end{bmatrix} \dot{q} = \mathcal{C}(q, \dot{q}) \dot{q} \quad (3.3.21)$$

donde $f(q, \dot{q}) = [L_{sr} \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \dot{q}_r, 0, 0]^T$ y $\dot{q}_r = [\dot{q}_{r1}, \dot{q}_{r2}]^T$.

Prueba.

Considere el vector (3.3.20) escrito como

$$W(\dot{q}_e, \dot{q}_s, q_s) = \begin{bmatrix} W_1 \dot{q}_s \dot{q}_e \\ \frac{1}{2} \dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} W_1 \dot{q}_s & \frac{1}{2} W_1 \dot{q}_e \\ \frac{1}{2} \dot{q}_e^T W_1 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}$$

Se puede observar que, ya que la entrada (2,1) de la matriz anterior es una expresión cuadrática, puede expresarse como

$$\frac{1}{2} \dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T (W_1 + W_3) \dot{q}_e$$

siempre y cuando la matriz W_3 sea antisimétrica, i.e. $W_3 + W_3^T = 0$. Más aún, si se adiciona y se sustrae el término $W_3 \dot{q}_s \dot{q}_e$ en el renglón superior de la matriz se obtiene que

$$W(\dot{q}_e, \dot{q}_s, q_s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (W_1 - W_3) \dot{q}_s & \frac{1}{2} (W_1 + W_3) \dot{q}_e \\ \frac{1}{2} \dot{q}_e^T (W_1 + W_3) & 0 \end{bmatrix} \dot{q}$$

Eligiendo en particular

$$W_3(\dot{q}_s) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \\ -\mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} & 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene la estructura propuesta en el enunciado. □□□

Observación 3.13. Como se sabe, la factorización anterior no es la única alternativa que genera la propiedad de antisimetría deseada. Sin embargo, como se verá claro en el siguiente capítulo, el hecho de que el vector $f(\cdot)$ tenga entradas cero es su parte baja, es fundamental para resolver el problema de seguimiento de par para el motor de inducción con la metodología presentada en el capítulo 2.

Observación 3.14. La prueba de que la matriz obtenida cumple con la propiedad de antisimetría es sencilla si se observa que

$$\dot{D}(q) = \begin{bmatrix} 0 & L_{sr} \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s & 0 \\ -L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$\dot{D}(q) - 2\mathcal{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & L_{sr} \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s & 2f(q, \dot{q}) \\ L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s & 0 & 0 \\ -2f^T(q, \dot{q}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación 3.15. Se referira en lo que sigue a el modelo

$$\mathcal{D}(q) \ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \mathcal{R} \dot{q} = \mathcal{M} u + \xi \tag{3.3.22}$$

como la representación compacta del modelo $\alpha\beta$.

La última propiedad que se presenta es el establecimiento de la relación que existe entre la velocidad de rotación del vector de flujos de rotor y el par generado por el motor. Para esto, recuerde que la estructura de los flujos en el modelo $\alpha\beta$ está dada por

$$\lambda = D_e(q_s)\dot{q}_e \quad (3.3.23)$$

Ahora, ya que se trabaja en 2ϕ , el ángulo de rotación del vector resultante de flujo de rotor con respecto al eje α del sistema de referencia fijo al estator es

$$\rho = \arctan\left(\frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}}\right) \quad (3.3.24)$$

La relación entre la derivada con respecto al tiempo de este ángulo y el par generado se establece en la siguiente

Propiedad 3.4.

La velocidad angular del vector de flujos de rotor es dada en términos del par generado como

$$\dot{\rho} = \frac{R_r}{\|\lambda_r\|^2} \tau$$

con $\|\cdot\|$ la norma Euclideana.

Prueba.

Considere la derivada con respecto al tiempo de (3.3.24) dada por

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2} \lambda_{r1}^2 \dot{\lambda}_{r2} - \dot{\lambda}_{r1} \lambda_{r2}^2 = -\frac{1}{\|\lambda_r\|^2} \lambda_r^T \mathcal{J} \dot{\lambda}_r$$

Por otro lado, de (3.3.23) se tiene que

$$\dot{\lambda} = D_e(q_s)\dot{q}_e + W_1\dot{q}_s\dot{q}_e = -R_e\dot{q}_e + M_e u$$

donde la última identidad se obtuvo de (3.3.6). Considerando la estructura de la matriz de entrada M_e se puede obtener de la expresión anterior que

$$\dot{\lambda}_r = -R_r\dot{q}_r$$

por lo tanto, sustituyendo esta expresión en la ecuación de $\dot{\rho}$ se obtiene que

$$\dot{\rho} = \frac{R_r}{\|\lambda_r\|^2} \lambda_r^T \mathcal{J} \dot{q}_r$$

La prueba se completa notando que

$$\tau = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e = -L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_s$$

el cual puede ser expresado, utilizando (3.3.23), como

$$\tau = \lambda_r^T \mathcal{J} \dot{q}_r$$

lo que establece la relación propuesta.

□□□

Observación 3.16. Se cierra este capítulo remarcando el hecho de que la presentación de los modelos fue hecha considerando siempre el vector de estados constituido por corrientes. Considerando al estructura lineal de los flujos, ver (3.3.23), es claro que cualquier otra representación en términos de flujos o flujos y corrientes puede ser directamente obtenida, más aún, cualquier selección del vector de estados no afecta las propiedades presentadas. En el resto del trabajo, como se ha venido haciendo, se continuará utilizando, sin pérdida de generalidad, el modelo expresado en términos únicamente de corrientes.

Capítulo 4

Motores de Inducción: Control

El comportamiento dinámico de los motores de inducción es descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales altamente acopladas, como se mostro en el capítulo 3, que hacen del diseño de controladores una tarea no trivial. Complicaciones adicionales se presentan ya que el estado completo del sistema no es disponible para medición, el motor es perturbado por el par de carga que es desconocido y algunos de sus parámetros (en particular las resistencias) varían considerablemente durante la operación. En este capítulo se presentan las estrategias de control desarrolladas en esta tesis para hacer frente a las complicaciones anteriores. Los controladores propuestos resuelven, –bajo ciertas suposiciones–, el problema de control establecido en el capítulo 1 (i.e. seguimiento de par y regulación de norma de flujo de rotor), y su estructura se deriva como un caso particular de la metodología general presentada en el capítulo 2. Los resultados que se presentan en este capítulo son fruto del trabajo reportado en [Ortega/Espinosa, 1991a], [Ortega/Espinosa, 1993], [Espinosa/Ortega, 1993a] y [Espinosa/Ortega, 1993b], donde los modelos ab y dq son utilizados. En este caso los controladores se obtienen considerando el modelo $\alpha\beta$ (donde se preservan propiedades de energía) y se clarifican algunos aspectos en el desarrollo de los artículos citados, aunque los resultados son virtualmente los mismos. Para la realización de esto, se explotan las propiedades del modelo presentadas en el capítulo 3.

La estructura del capítulo es como sigue: Primero se presentan dos controladores basados en retroalimentación de estados; El caso ideal (que se incluye con fines de dar claridad a la presentación), donde se suponen conocidos los parámetros del motor y el par de carga. Se obtiene un controlador *globalmente asintóticamente estable* que no utiliza cancelación de no linealidades, es decir *es globalmente definido*. Después de eso, un controlador *adaptable globalmente convergente* es introducido, donde se considera la existencia de incertidumbre en los valores de las resistencias, tanto de estator como de rotor, del motor y en el par de carga. Se supone valores desconocidos pero *constantes* en estas tres variables. La segunda parte del capítulo está dedicada a la presentación de dos controladores basados en retroalimentación de salida. Primero se presenta un controlador *globalmente asintóticamente estable* basado en la observación de estados y después un

controlador *globalmente estable* que no requiere de la reconstrucción de los estados. En estos dos casos, se supone conocimiento de los parámetros del sistema y el par de carga es compensado adaptablemente suponiéndolo constante. Debe hacerse notar que, como en el caso ideal, todos los controladores propuestos son globalmente definidos.

4.1 Control por retroalimentación de estados

4.1.1 Caso Ideal

Considere el modelo $\alpha\beta$ en su forma compacta (la cual se repite aquí por facilidad) dado por

$$\mathcal{D}(q)\ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathcal{R}\dot{q} = \mathcal{M}u + \xi \quad (4.1.1)$$

con salida

$$\tau(q, \dot{q}) = h(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e \quad (4.1.2)$$

donde $\mathcal{D}(q) = \text{diag}\{D_e(q_s), J\}$, $R = \text{diag}\{R_e, B\}$, $R_e = \text{diag}\{R_s \mathcal{I}_2, R_r \mathcal{I}_2\}$, $M = [M_e^T, 0_{3 \times 3}]^T$, $M_e = [\mathcal{I}_2, 0]^T$, $\xi = [0, 0, 0, 0, -\tau_L]^T$, $\dot{q} = [\dot{q}_e, \dot{q}_s]^T = [\dot{q}_s^T, \dot{q}_r^T, \dot{q}_s]^T$ y

$$D_e(q_s) = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{I}_2 & L_{sr} e^{\mathcal{J} q_s} \\ L_{sr} e^{-\mathcal{J} q_s} & L_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}; \quad W_1 = L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \\ -\mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f(q, \dot{q}) \\ -\mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s & 0 & 0 \\ -f^T(q, \dot{q}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $f(q, \dot{q}) = [L_{sr} \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \dot{q}_r, 0, 0]^T$ and $\dot{q}_r = [\dot{q}_{r1}, \dot{q}_{r2}]^T$.

Recuerde también que la estructura de los flujos para este modelo es

$$\lambda = D_e(q_s) \dot{q}_e \quad (4.1.3)$$

donde $\lambda = [\lambda_s^T, \lambda_r^T]^T$.

El problema particular que se resuelve en esta sección puede formularse como

Formulación del problema: Caso ideal.

Considere el modelo del motor de inducción (4.1.1- 4.1.2). Suponga

- A.1. Que todos los estados *son disponibles* para medición,
- A.2. Que todos los parámetros del motor *son conocidos*, y
- A.3. El par de carga τ_L es una función suave y acotada *conocida*.

Sea el *par deseado* $\tau_d(t)$ una función diferenciable, suave y acotada con primera derivada acotada y conocida, y la *norma deseada para el flujo de rotor* la constante

$\beta > 0$. Bajo estas condiciones diseñe una ley de control que asegure estabilidad interna, seguimiento de par asintótico y regulación de la norma del flujo de rotor, es decir que el sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tau - \tau_d) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\lambda_r\| = \beta \quad (4.1.4)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclídeana, con todas las señales uniformemente acotadas. Más aún, se requiere que el motor en estado estable opere en un *régimen balanceado*.

□□□

Para resolver el problema anterior, es claro que, si se desea aplicar la metodología propuesta en el capítulo 2, se debe establecer primero la estructura de la dinámica deseada y resolver el problema "de selección de coordenadas deseadas". Sin embargo, antes de abordar esas cuestiones, es conveniente presentar el siguiente análisis.

Como se sabe, por la propiedad 3.4 y la ortogonalidad de los ejes en un sistema de referencia de 2ϕ , el valor del flujo de rotor en estado estable es de la forma

$$\lambda_r = \begin{bmatrix} \lambda_{r1} \\ \lambda_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cos(\rho) \\ A_2 \sin(\rho) \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

donde A_1, A_2 definen la amplitud del vector resultante, y

$$\dot{\rho} = \frac{R_r}{\|\lambda_r\|^2} \tau$$

con τ dado por (4.1.2) y $\|\cdot\|$ la norma Euclídeana, su velocidad de rotación.

Por otro lado, si se desea lograr regulación de la norma del flujo de rotor y operación balanceada, es razonable definir la siguiente estructura para el vector de flujos de rotor *deseados*

$$\lambda_{rd} = \begin{bmatrix} \lambda_{r1d} \\ \lambda_{r2d} \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \cos(\rho_d) \\ \sin(\rho_d) \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

con $\beta > 0$ y $\rho_d = \arctan\left(\frac{\lambda_{r2d}}{\lambda_{r1d}}\right)$, y por lo tanto

$$\dot{\rho}_d = \frac{R_r}{\beta^2} \tau_d(t)$$

donde $\tau_d(t)$ es el par deseado.

Se puede observar que si $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_r = \lambda_{rd}$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} A_i = \beta$ y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_r}{\|\lambda_r\|^2} \tau = \frac{R_r}{\beta^2} \tau_d$$

lo que a su vez implica el hecho de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau = \tau_d$$

El análisis anterior permite reformular el problema de control en términos de la siguiente proposición.

Proposición 4.1: Reformulación del problema de control. Considere el modelo del motor de inducción (4.1.1- 4.1.2). Suponga **A.1.-A.3.**. Sea el par deseado $\tau_d(t)$ una función diferenciable, suave y acotada con primera derivada acotada y conocida, y la *norma deseada para el flujo de rotor* la constante $\beta > 0$. Si el sistema en lazo cerrado compuesto por el sistema y un controlador dado asegura *regulación de la norma del flujo del rotor* con estabilidad interna, entonces el motor en estado estable opera en un régimen balanceado y se resuelve también el problema de seguimiento de par.

□□□

Con la formulación anterior en mente, se puede proceder ahora a la definición de la dinámica deseada. Para esto, note que en este caso, la estructura de este sistema dinámico está dada por

$$\mathcal{D}(q)\dot{q}_r + \mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \mathcal{R}\dot{q}_r = \mathcal{M}u_d + \xi \quad (4.1.7)$$

con

$$\begin{aligned} q_r &= q_d - \Lambda \left[\int_0^t e(\tau) d\tau \right] \\ e &= q - q_d \\ s &= \dot{q} - \dot{q}_r \\ &= \dot{e} + \Lambda e \end{aligned}$$

La salida del sistema, la cual debe ser compatible con las restricciones físicas del motor, puede ser obtenida notando que el producto

$$-f^T(q, \dot{q})\dot{q}_e = L_{sr}\dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_s = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e$$

en (4.1.1) es precisamente el par generado. Por lo tanto, considerando que la matriz $\mathcal{C}(q, \dot{q})$ es la misma en ambos sistemas, se propone la siguiente estructura para la salida del sistema que define la dinámica deseada

$$\tau_d(q, \dot{q}_d) = h(q, \dot{q}_d) = \frac{1}{2}\dot{q}_{er}^T W_1 \dot{q}_{er} \quad (4.1.8)$$

donde $\dot{q}_{er} = [\dot{q}_{rr}^T, \dot{q}_{sr}^T]^T$ son las componentes eléctricas del vector \dot{q}_r .

La dinámica deseada es completamente definida con el establecimiento de la estructura de la restricción

$$\lambda_{qr} = D_c(q_s)\dot{q}_{er} \quad (4.1.9)$$

la cual corresponde a los flujos (4.1.3) en el modelo (4.1.1).

Debe notarse que en la definición de (4.1.7)-(4.1.9) no aparece la variable q_r . Esta característica permite que no se imponga ninguna restricción sobre el comportamiento de

las coordenadas generalizadas q , si no solamente a \dot{q} , así se puede simplificar la estructura de la dinámica deseada definiendo $q_r = q_d$ (i.e. $\Lambda = 0$). Con esta selección, la ecuación (4.1.7) se reduce a

$$D(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + R\dot{q}_d = \mathcal{M}u_d + \xi \quad (4.1.10)$$

con la restricción

$$\lambda_d = D_e(q_s)\dot{q}_{ed} \quad (4.1.11)$$

donde $\lambda_d = [\lambda_{sd}^T, \lambda_{rd}^T]^T$ y $\dot{q}_{ed} = [\dot{q}_{sd}^T, \dot{q}_{rd}^T]^T$. Note que, en vista de la proposición 4.1, si \dot{q}_d en (4.1.10) satisface (4.1.11) entonces la salida de la dinámica deseada

$$\tau_d(q, \dot{q}_d) = h(q, \dot{q}_d) = \frac{1}{2}\dot{q}_{ed}^T W_1 \dot{q}_{ed} \quad (4.1.12)$$

es también satisfecha.

Con la definición de la dinámica deseada, el siguiente problema a resolver en el diseño del controlador, es la definición de u_d y q_d para un $\tau_d(t)$ dado, tal que (4.1.10) y (4.1.11) se satisfagan para todo tiempo $t \geq 0$ y todo valor de q, \dot{q} y ξ (i.e. τ_L).

Para resolver este problema se sigue estrechamente las etapas presentadas en la sección 2.3.3.

Note primero que para cualquier q, \dot{q} dados, las dos primeras ecuaciones de (4.1.10) pueden ser satisfechas con

$$u_d = L_s \ddot{q}_{sd} + L_{sr} e^{\mathcal{J}q_s} \ddot{q}_{rd} + L_{sr} \mathcal{J} e^{\mathcal{J}q_s} \dot{q}_r \dot{q}_{sd} + R_s \dot{q}_{sd} \quad (4.1.13)$$

por lo tanto solamente se necesita resolver lo que se llamo "el problema de selección de coordenadas deseadas", que en este caso se puede formular como encontrar q_d tal que (4.1.11) y

$$L_{sr} e^{-\mathcal{J}q_s} \ddot{q}_{sd} + L_r \ddot{q}_{rd} - \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_s \dot{q}_{sd} + R_r \dot{q}_{rd} = 0 \quad (4.1.14)$$

$$J \ddot{q}_{sd} + L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_{sd} + B \dot{q}_{sd} = -\tau_L \quad (4.1.15)$$

que son las tres ultimas ecuaciones de (4.1.10), se cumplan para todo tiempo $t \geq 0$ y todo valor de q, \dot{q} and τ_L .

En este momento, es conveniente analizar la relación que existe entre el par y velocidad en máquinas eléctricas. Es bien conocido que estas dos variables están acopladas y que tiene una relación uno a uno, es decir, si se da un par τ para un valor determinado de τ_L , automáticamente se define la velocidad de la máquina ω . Lo inverso es también cierto, si se da una velocidad ω para algún τ_L , entonces el par τ es inmediatamente definido. Esta relación es muy clara para el caso del motor de inducción, si se observa la estructura del mapa Σ_m en la proposición 3.2.

Ahora, recuerde que se ha establecido un problema de control de par, entonces el par deseado dado automáticamente determina la velocidad "requerida" necesaria para generar esa salida. Estos argumentos, y el hecho de que (4.1.11) y (4.1.14) no dependen de \dot{q}_{sd} ,

permiten definir el valor deseado para la velocidad de rotor como la solución de (4.1.15), es decir, la solución de

$$\ddot{q}_{sd} = -\frac{1}{J} \left[L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_{sd} + B \dot{q}_{sd} + \tau_L \right]$$

En este sentido, \dot{q}_{sd} debe ser interpretado como la velocidad correspondiente al par deseado. Note que este es el caso si \dot{q} converge a \dot{q}_d en la expresión anterior.

Observación 4.1. El razonamiento anterior explica porque el problema de control de velocidad puede ser visto como un caso particular del problema más general de control de par.

Con la selección anterior para \dot{q}_{sd} , el problema se reduce a encontrar \dot{q}_{rd} y \dot{q}_{sd} como soluciones de (4.1.14) y (4.1.11) al mismo tiempo. Para esto, considere los siguientes elementos:

Primero, si se obtiene de (4.1.11) la estructura para el vector deseado de flujo de rotor, se tiene que

$$\lambda_{rd} = L_{sr} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_{sd} + L_r \dot{q}_{rd} \quad (4.1.16)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de esta expresión se obtiene que

$$\dot{\lambda}_{rd} = L_{sr} e^{-\mathcal{J}q_s} \ddot{q}_{sd} - \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_s \dot{q}_{sd} + L_r \ddot{q}_{rd}$$

lo cual corresponde a los primeros términos de la ecuación (4.1.14), por lo tanto la sustitución en ella produce el resultado que el flujo de rotor deseado satisface la ecuación diferencial

$$\dot{\lambda}_{rd} + R_r \dot{q}_{rd} = 0 \quad (4.1.17)$$

Por otro lado, es claro que λ_{rd} definida en (4.1.6) es también solución de

$$\dot{\lambda}_{rd} = \frac{R_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd}, \quad \lambda_{rd}(0) = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.18)$$

donde las condiciones iniciales son elegidas de tal forma que las formas de onda $\cos(\cdot)$ y $\sin(\cdot)$ son obtenidas.

Colocando todas las piezas juntas, se puede sustituir (4.1.18) en (4.1.17) y obtener el vector de corrientes de rotor deseadas como

$$\dot{q}_{rd} = -\frac{\tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd} \quad (4.1.19)$$

mientras que la sustitución de esta ecuación en (4.1.16) produce

$$\dot{q}_{sd} = \left(\frac{L_r}{L_{sr} \beta^2} \tau_d \mathcal{J} + \frac{1}{L_{sr}} \mathcal{I}_2 \right) e^{\mathcal{J}q_s} \lambda_{rd} \quad (4.1.20)$$

que establece la estructura de las corrientes de estator deseadas.

En este momento, se ha resuelto el problema de selección de coordenadas deseadas, pero antes de presentarlo formalmente en la siguiente proposición, es interesante observar los siguientes hechos.

Es claro que la obtención de los valores deseados para las corrientes (4.1.19) y (4.1.20) se llevo acabo considerando unicamente la estructura del flujo de rotor en (4.1.11) y la ecuación (4.1.14). Este procedimiento no impone ningún problema ya que, como se muestra en el desarrollo, la *única dinámica fija* es precisamente (4.1.14) o equivalentemente (4.1.17), las otras ecuaciones (4.1.13), (4.1.15) y los flujos de estator deseados en (4.1.11), dados por

$$\lambda_{sd} = L_s \dot{q}_{sd} + L_{sr} e^{\mathcal{J} q_s} \dot{q}_{rd}$$

son *dinámicas libres* que se satisfacen para cualquier valor de \dot{q}_{sd} and \dot{q}_{rd} . La única prueba que resta por presentar es que efectivamente, con los valores deseados para las corrientes propuestos, el par deseado dado es alcanzado. Esto puede ser directamente probado si se considera, de la prueba de la propiedad 3.4, que la salida de la dinámica deseada puede ser escrita como

$$\tau_d = \lambda_{rd}^T \mathcal{J} \dot{q}_{rd}$$

por lo tanto la sustitución de (4.1.19) y (4.1.6) produce la igualdad deseada con $\tau_d(t)$.

De manera interesante, el problema pudo ser resuelto de esta forma, debido al hecho de que (4.1.17) es dada solamente en términos de λ_{rd} y \dot{q}_{rd} , lo cual se se retrocede en las etapas, es causa directa de la estructura particular de la matriz $\mathcal{C}(q, \dot{q})$, lo que explica los comentarios hechos en la observación 3.13.

Despues de estos comentarios, se está en posición de de resumir los calculos anteriores en la siguiente proposición.

Proposición 4.2. La señal de control para el sistema que define la dinámica deseada es una *retroalimentación dinámica de estados* de la forma

$$u_d = \Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d) \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \lambda_{rd} + L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_r \dot{q}_{sd} \quad (4.1.21)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d) = & \frac{L_r \sigma}{L_{rr} \beta^2} \dot{\tau}_d + \frac{L_r}{L_{rr}} \left(\frac{L_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} + \mathcal{I}_2 \right) + \\ & + \frac{\tau_d}{L_{rr} \beta^2} \left(L_s \mathcal{I}_2 + \frac{L_r \sigma}{\beta^2} \mathcal{J} \right) R_r + \frac{1}{L_{rr}} \left(\frac{\tau_d L_r}{\beta^2} \mathcal{I}_2 - \mathcal{J} \right) R_s \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

con $\sigma := L_s - \frac{L_r^2}{L_r}$ y estados del controlador

$$\dot{q}_{sd} = -\frac{1}{J} \left[L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_{sd} + B \dot{q}_{sd} + \tau_L \right]; \quad \dot{q}_{sd}(0) = \dot{q}_{sd0}$$

y

$$\dot{\lambda}_{rd} = \frac{R_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd}, \quad \lambda_{rd}(0) = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prueba.

La prueba de la proposición de reduce solamente a la sustitución de (4.1.19) y (4.1.20) en (4.1.13), y a la agrupación de términos.

□□□

Observación 4.2. Es importante remarcar el hecho de que \dot{q}_d definida antes es la *única selección* que asegura que la salida de la dinámica deseada es igual al par deseado, i.e. $h(q, \dot{q}_d) = \tau_d$, y regulación de norma de flujo con régimen balanceado. Esto puede ser probado notando que para un $\tau_d(t)$ y β dados la solución de (4.1.18) es única, entonces el valor de (4.1.19) es también único, lo que implica a su vez la unicidad de (4.1.20).

Como en el caso general, con los resultados obtenidos se ha caracterizado la variedad no lineal $\tau = \tau_d$ donde el error es cero. La siguiente etapa es diseñar la entrada de control u y establecer la atractividad de esta variedad. Esto es, para completar el diseño solo se necesita encontrar una ley de control para el motor, la cual asegure que su dinámica converja asintóticamente a la dinámica deseada. Para llevar a cabo esta etapa se utilizan argumentos estandares de la teoría de Lyapunov.

Defina la señal de error del estado como $e = \dot{q} - \dot{q}_d$, la cual restando (4.1.1) y (4.1.10), se demuestra que satisface

$$\mathcal{D}(q)\dot{e} + C(q, \dot{q})e + \mathcal{R}e = Mu - Mu_d \quad (4.1.23)$$

donde los términos del lado derecho pueden ser escritos, considerando las ecuaciones (4.1.13), (4.1.15) y (4.1.17), como

$$Mu - Mu_d = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_d \\ \dot{\lambda}_{rd} + R_r \dot{q}_{rd} \\ J\dot{q}_{sd} + L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_{sd} + B\dot{q}_{sd} + \tau_L \end{bmatrix}$$

Note que, con las definiciones de los valores deseados para las corrientes y los estados del controlador en la proposición 4.2, se asegura que el segundo y tercer renglon de la expresión anterior son cero, por lo tanto, si se define $u = u_d$, lo que establece la ley de control para el sistema, la ecuación anterior se simplifica a

$$\mathcal{D}(q)\dot{e} + C(q, \dot{q})e + \mathcal{R}e = 0 \quad (4.1.24)$$

Ahora, considere la función cuadrática

$$V = \frac{1}{2} e^T \mathcal{D}(q) e \quad (4.1.25)$$

la cual, debido a la positividad de $\mathcal{D}(q)$, satisface las siguiente cotas

$$0 \leq \lambda_{\min}\{\mathcal{D}\} \|e(t)\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}\{\mathcal{D}\} \|e(t)\|^2 \quad (4.1.26)$$

donde $\lambda_{\min}\{\cdot\}, \lambda_{\max}\{\cdot\}$ denotan los valores propios máximo y mínimo de $\{\cdot\}$. Tomando la derivada de (4.1.25) a lo largo de las trayectorias de (4.1.24) se obtiene que

$$\dot{V} = -e^T \mathcal{R} e$$

Es claro de la expresión anterior que

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}\{\mathcal{R}\} \|e(t)\|^2$$

por lo tanto, utilizando (4.1.26) se obtiene que $\dot{V} \leq -\alpha V$ con $\alpha = \frac{\lambda_{\min}\{\mathcal{R}\}}{\lambda_{\max}\{\mathcal{D}\}} > 0$. Integrando esta expresión se tiene que

$$V(t) \leq V(0) + \int_0^t (-\alpha)V(s) ds$$

donde aplicando la desigualdad de Gronwall produce el siguiente resultado

$$V(t) \leq V(0)e^{-\alpha t}$$

donde, si se utiliza nuevamente (4.1.26), se demuestra que

$$\|e(t)\|^2 \leq m e^{-\alpha t} \|e(0)\|^2, \quad m := \frac{\lambda_{\max}\{\mathcal{D}\}}{\lambda_{\min}\{\mathcal{D}\}} > 0 \quad (4.1.27)$$

y consecuentemente el error de estados *converge exponencialmente a cero*.

Para probar estabilidad interna para todo $t \in [0, \infty)$, note que la dinámica del sistema en lazo cerrado, si $u = u_d$, es completamente descrita por (4.1.24), (4.1.15) y (4.1.18). Este conjunto de ecuaciones diferenciales es localmente Lipschitz en el estado, y bajo las consideraciones sobre los pares deseados y de carga, también es continua en t . Por lo tanto, existe un intervalo de tiempo $[0, t_1)$ donde las soluciones existen y son únicas. Ahora, para todo $t \in [0, t_1)$, la ecuación (4.1.27) se cumple. Por otro lado, por definición $\lambda_{r,d}$ (4.1.6) es acotada, esto implica que (4.1.19) y (4.1.20) son también acotadas. Esto junto con el acotamiento de τ_L prueba que sobre el intervalo de tiempo $[0, t_1)$, \dot{q}_{sd} es acotado de (4.1.15), el cual es la salida de un filtro de primer orden lineal estable con entrada acotada, por lo que sus soluciones no pueden crecer más rápido que una exponencial en este intervalo de tiempo. Ya que m y α en (4.1.27) son independientes de t_1 , se puede repetir los argumentos para una nueva condición inicial t_1 y definir la continuación de la solución en un nuevo intervalo de tiempo $[t_1, 2t_1]$. Esto permite extender el intervalo de tiempo de las soluciones a todo el eje real.

Este resultado puede ser interpretado en términos de moldeo de energía. si se considera la función cuadrática (4.1.25) como la energía deseada de el sistema en lazo cerrado, entonces con la definición de $u = u_d$ se está encontrando la ley de control que moldea la energía original del sistema para obtener el comportamiento deseado. Más aún, si se modifica la ley de control y el estado del controlador \dot{q}_s como

$$u = u_d - K_1 e_s; \quad K_1 > 0 \quad (4.1.28)$$

$$\dot{q}_{sd} = -\frac{1}{J} [L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} t_s} \dot{q}_{sd} + B \dot{q}_{sd} + K_2 e_s + \tau_L]; \quad K_2 > 0 \quad (4.1.29)$$

donde $e_s = \dot{q}_s - \dot{q}_{sd}$ and $e_5 = \dot{q}_5 - \dot{q}_{5d}$, entonces la ecuación (4.1.24) toma la forma

$$\mathcal{D}(q)\dot{e} + \mathcal{C}(q, \dot{q})e + (\mathcal{R} + \mathcal{K})e = 0$$

con $\mathcal{K} = \text{diag}\{K_1, 0, K_2\}$, y la derivada con respecto al tiempo de (4.1.25) a lo largo de esta ecuación es

$$\dot{V} = -e^T(\mathcal{R} + \mathcal{K})e$$

Esto implica que el valor de α en (4.1.27) es ahora dado por

$$\alpha = \frac{\lambda_{\min}\{\mathcal{R} + \mathcal{K}\}}{\lambda_{\max}\{\mathcal{D}\}} > 0$$

lo que implica a su vez que se ha mejorado la velocidad de convergencia del error a cero, o equivalentemente "se ha adicionado amortiguamiento" al sistema.

Después de este análisis, se puede presentar el primer resultado principal de este capítulo acerca del control del modelo no lineal del motor de inducción.

Teorema 4.1. Considere el modelo del motor de inducción (2.1.7) con salida τ (4.1.2), flujos λ (4.1.3) y suposiciones A.1 - A.3. Sea la ley de control definida como

$$u = \Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d)\mathcal{J}e^{\mathcal{J}q_s}\lambda_{rd} + L_{sr}\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}q_s}\dot{q}_r\dot{q}_{5d} - K_1e_s; \quad K_1 > 0 \quad (4.1.30)$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d) = & \frac{L_r\sigma}{L_{rr}\beta^2}\dot{\tau}_d + \frac{L_r}{L_{rr}}\left(\frac{L_r\tau_d}{\beta^2}\mathcal{J} + \mathcal{I}_2\right) + \\ & + \frac{\tau_d}{L_{rr}\beta^2}\left(L_s\mathcal{I}_2 + \frac{L_r\sigma}{\beta^2}\mathcal{J}\right)R_r + \frac{1}{L_{rr}}\left(\frac{\tau_d L_r}{\beta^2}\mathcal{I}_2 - \mathcal{J}\right)R_s \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

y estados del controlador

$$\dot{\lambda}_{rd} = \frac{R_r\tau_d}{\beta^2}\mathcal{J}\lambda_{rd} \quad (4.1.32)$$

$$\dot{q}_{5d} = -\frac{1}{J}\left[L_{sr}\dot{q}_r^T\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}q_s}\dot{q}_{sd} + B\dot{q}_{5d} + K_2e_5 + \tau_L\right] \quad (4.1.33)$$

con condiciones iniciales $\lambda_{rd}(0) = [\beta, 0]^T$, $\dot{q}_{5d}(0) = \dot{q}_{5d0}$. Bajo estas condiciones el sistema en lazo cerrado es *globalmente asintóticamente estable* logrando seguimiento de par y regulación de norma de flujo de rotor con operación balanceada.

□□□

Observación 4.3. Como se puede observar inmediatamente, las principales desventajas del controlador anterior son las suposiciones sobre el conocimiento de los parámetros y el par de carga, y la medición del estado completo. Sin embargo, una ventaja grande de él es que la ley de control es globalmente definida, i.e. no existen puntos singulares.

En la siguiente sección se presenta una versión modificada del controlador anterior que relaja la suposición de resistencias y par de carga conocidos pero que requiere aún de medición del estado completo.

4.1.2 Caso Adaptable

En esta sección se presenta un controlador de retroalimentación de estados *globalmente convergente* que relaja la suposición de conocimiento sobre el valor de las resistencias del motor, tanto del estator como del rotor, y el par de carga. Se supone que estos tres parámetros son desconocidos pero constantes y la idea que se sigue es reemplazar a ellos por sus valores estimados \hat{R}_s , \hat{R}_r y $\hat{\tau}_L$, y al mismo tiempo, utilizar estos estimados para calcular el (ahora variante en el tiempo) término de compensación $\Gamma(\cdot)$ del controlador.

El problema de control particular que se resuelve en esta sección se puede formular como

Formulación del problema: Caso Adaptable.

Considere el modelo del motor de inducción (4.1.1- 4.1.2). Suponga

- A.1a. Que *todo* el estado es disponible para medición,
- A.2a. Las resistencias del motor R_s , R_r son *desconocidas*, y
- A.3a. El par de carga τ_L es una función *constante desconocida*.

Sea el *par deseado* $\tau_d(t)$ una función diferenciable, suave y acotada con primera derivada acotada y conocida, y la *norma deseada para el flujo de rotor* la constante $\beta > 0$. Bajo estas condiciones diseñe una ley de control que asegure estabilidad interna, seguimiento de par asintótico y regulación de la norma del flujo de rotor, es decir que el sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tau - \tau_d) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\lambda_r\| = \beta \quad (4.1.34)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclídeana, con todas las señales uniformemente acotadas. Más aún, se requiere que el motor en estado estable opere en un *régimen balanceado*.

□□□

El procedimiento que se sigue para resolver el problema anterior es diseñar un controlador adaptable estrechamente relacionado con el presentado en el caso ideal, por lo tanto se usarán exhaustivamente los resultados obtenidos en la sección correspondiente.

En la sección anterior, si se considera el modelo del motor dado por (4.1.1-4.1.2), la dinámica deseada está dada por (4.1.10-4.1.12), más aún, se sabe por la proposición 4.2, que la señal de control que satisface ese sistema y resuelve el "problema de selección de coordenadas deseadas" es

$$u_d = \Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d) \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \lambda_{rd} + L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_r \dot{q}_{sd}$$

donde

$$\Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d) = \frac{L_r \sigma}{L_{rr} \beta^2} \dot{\tau}_d + \frac{L_r}{L_{rr}} \left(\frac{L_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} + \mathcal{I}_2 \right) + \frac{\tau_d}{L_{rr} \beta^2} \left(L_s \mathcal{I}_2 + \frac{L_r \sigma}{\beta^2} \mathcal{J} \right) R_r + \frac{1}{L_{rr}} \left(\frac{\tau_d L_r}{\beta^2} \mathcal{I}_2 - \mathcal{J} \right) R_s$$

con estados del controlador

$$\ddot{q}_{sd} = -\frac{1}{J} \left[L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_{sd} + B\dot{q}_{sd} + \tau_L \right]; \dot{q}_{sd}(0) = \dot{q}_{sd0}$$

y

$$\dot{\lambda}_{rd} = \frac{R_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd}, \lambda_{rd}(0) = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

y valores deseados de las corrientes (4.1.19) y (4.1.20).

También en la sección anterior, se probó que si $u = u_d$ la señal de error entre los estados reales y los deseados, converge exponencialmente a cero. En este caso, desafortunadamente, no se puede seguir con el mismo procedimiento que en ese caso ya que se supone que en las ecuaciones anteriores los valores de R_s , R_r y τ_L son desconocidos. La forma en que se propone compensar esta incertidumbre en los parámetros, es conservar la misma estructura del controlador que en el caso ideal, y reemplazar los parámetros reales por sus estimados directamente, para después de eso diseñar una ley de adaptación que permita resolver el problema planteado.

Considere entonces la siguiente proposición para la estructura del controlador

$$u = \Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d, \hat{R}_s, \hat{R}_r) \mathcal{J} e^{\mathcal{J}q_s} \lambda_{rd} + L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_{sd} - K_1 e_s,$$

donde

$$\Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d, \hat{R}_s, \hat{R}_r) = \frac{L_r \sigma}{L_{sr} \beta^2} \dot{\tau}_d + \frac{L_r}{L_{sr}} \left(\frac{L_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} + \mathcal{I}_2 \right) + \frac{\tau_d}{L_{sr} \beta^2} \left(L_s \mathcal{I}_2 + \frac{L_r \sigma}{\beta^2} \mathcal{J} \right) \hat{R}_r + \frac{1}{L_{sr}} \left(\frac{\tau_d L_r}{\beta^2} \mathcal{I}_2 - \mathcal{J} \right) \hat{R}_s$$

con estados del controlador

$$\ddot{q}_{sd} = -\frac{1}{J} \left[L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_{sd} + B\dot{q}_{sd} + K_2 e_s + \hat{\tau}_L \right]$$

y

$$\dot{\lambda}_{rd} = \frac{\hat{R}_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd}$$

y valores deseados para las corrientes dados por (4.1.19) y (4.1.20).

Si se define la señal de error en los estados como $e = \dot{q} - \dot{q}_d$, entonces de (4.1.1) y (4.1.10), se llega a la siguiente ecuación que define la dinámica de este error

$$\mathcal{D}(q)\dot{e} + \mathcal{C}(q, \dot{q})e + \mathcal{R}e = \mathcal{M}u - \mathcal{M}u_d$$

donde

$$\mathcal{M}u - \mathcal{M}u_d = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_d \\ \dot{\lambda}_{rd} + R_r \dot{q}_{rd} \\ J\ddot{q}_{sd} + L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_{sd} + B\dot{q}_{sd} + \tau_L \end{bmatrix}$$

Note que, debido a la estructura propuesta para el controlador, la expresión anterior no es cero como en el caso ideal, ya que por la discrepancia entre los valores estimados y los reales se introducen términos adicionales. Estos términos pueden ser obtenidos sustituyendo el controlador propuesto, sus estados y u_d en la ecuación anterior, lo que produce el siguiente resultado

$$\mathcal{M}u - \mathcal{M}u_d = \begin{bmatrix} \frac{\tau_d}{L_{sr}\beta^2} \left(L_s \mathcal{I}_2 + \frac{L_r \sigma}{\beta^2} \mathcal{J} \right) (\hat{R}_r - R_r) + \frac{1}{L_{sr}} \left(\frac{\tau_d L_r}{\beta^2} \mathcal{I}_2 - \mathcal{J} \right) (\hat{R}_s - R_s) - K_1 e_s \\ \frac{\tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd} (\hat{R}_r - R_r) \\ (\hat{\tau}_L - \tau_L) - K_2 e_s \end{bmatrix}$$

el cual, si se define

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{L_{sr}} \left(\frac{\tau_d L_r}{\beta^2} \mathcal{I}_2 - \mathcal{J} \right) \\ \phi_2 &= \frac{\tau_d}{L_{sr} \beta^2} \left(L_s \mathcal{I}_2 + \frac{L_r \sigma}{\beta^2} \mathcal{J} \right) \\ \phi_3 &= \frac{\tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd} \end{aligned}$$

y $\tilde{\theta}_1 = (\hat{R}_s - R_s)$, $\tilde{\theta}_2 = (\hat{R}_r - R_r)$, $\tilde{\theta}_3 = (\hat{\tau}_L - \tau_L)$, puede ser escrito como

$$\mathcal{M}u - \mathcal{M}u_d = \begin{bmatrix} \phi_1 \tilde{\theta}_1 + \phi_2 \tilde{\theta}_2 \\ \phi_3 \tilde{\theta}_3 \\ \tilde{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \mathcal{I}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_s \\ e_r \\ e_s \end{bmatrix}$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación de la dinámica del error, se obtiene que

$$\mathcal{D}(q)\dot{e} + \mathcal{C}(q, \dot{q})e + (\mathcal{R} + \mathcal{K})e = \Phi \tilde{\theta} \quad (4.1.35)$$

where $\mathcal{K} = \text{diag}\{K_1 \mathcal{I}_2, 0, K_2\}$, $\tilde{\theta} = [\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3]^T$ and

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considere ahora la función cuadrática definida positiva

$$V_a = \frac{1}{2} e^T \mathcal{D}(q)e + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (4.1.36)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (4.1.35) es

$$\dot{V}_a = -e^T (\mathcal{R} + \mathcal{K})e + \tilde{\theta}^T \Phi^T e + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \quad (4.1.37)$$

donde se ha utilizado nuevamente la propiedad de antisimetría de $\mathcal{D}(q)$ y $\mathcal{C}(q, \dot{q})$.

Esta última ecuación permite definir la ley de adaptación requerida para los parámetros desconocidos. Esta definición debe ser hecha tal que la convergencia del error de estados se asegure, lo cual se obtiene inmediatamente si se observa que

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \Phi^T e \quad (4.1.38)$$

en (4.1.37) produce la estructura deseada

$$\dot{V}_a = -e^T(\mathcal{R} + \mathcal{K})e \quad (4.1.39)$$

Desafortunadamente, en este caso no es posible establecer convergencia exponencial a cero del error de estado, sin embargo, notando que la derivada con respecto al tiempo de (4.1.36) dada por (4.1.39) es negativa semidefinida, i.e.

$$\dot{V}_a \leq 0$$

pero que la única solución que cumple con la igualdad es $e = 0$, entonces se puede aplicar el teorema de La Salle y concluir estabilidad asintótica, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

La estabilidad interna puede ser probada siguiendo argumentos similares a los utilizados en el caso ideal, los cuales son equivalentes a la siguiente discusión. Note que en este caso la dinámica del sistema en lazo cerrado está completamente determinada por (4.1.35), (4.2.24) y los estados del controlador. Ahora, de (4.1.36) se obtiene que la función V_a es acotada por abajo, mientras que de (4.1.39) es acotada por arriba. Por lo tanto se puede concluir que e y $\hat{\theta}$ son acotados. Más aún, e tiende a cero. Ya que λ_{rd} es acotado por construcción, también lo son los valores deseados de las corrientes \hat{q}_{sd} and \hat{q}_{rd} , y consecuentemente (debido a la tendencia de e a cero) \hat{q}_s and \hat{q}_r . Finalmente, el hecho de que \hat{q}_{sd} es acotado se concluye de recordar que es la salida de un filtro lineal estable de primer orden cuya entrada, la cual es función de señales acotadas, es acotada.

Antes de presentar formalmente el resultado obtenido, se presentan a continuación a partir de (4.2.24), las leyes de adaptación para cada uno de los parámetros como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{R}}_s &= -\gamma \phi_1^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{R}}_r &= -\gamma \left(\phi_2^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \phi_3^T \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \right) \\ \dot{\hat{\tau}}_L &= -\gamma e_5 \end{aligned}$$

con ganancia de adaptación $\gamma > 0$.

Es interesante notar que para el caso de τ_L , ya que solo depende de c_5 , no se requiere excitación persistente para concluir la convergencia del estimado del par de carga a su valor real, como se puede notar del último renglon de (4.1.35). Sin embargo, para el caso de las resistencias del motor, esta condición es requerida. Desafortunadamente, no es posible probar que la señal ϕ_i satisfaga tal condición y por lo tanto no es posible concluir convergencia de los valores estimados de las resistencias a sus valores reales. Este resultado no es sorprendente, ya que como es bien conocido en esquemas adaptables directos, como es el caso, la convergencia del error de estados puede ser alcanzada sin convergencia de los parámetros.

Considerando el análisis anterior, se puede presentar el segundo resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.2. Considere el modelo del motor de inducción (4.1.1) con salida el par τ (4.1.2), flujo de rotor λ (4.1.3) y las suposiciones A.1a-A.3a. Sea la ley de control definida como

$$u = \Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d, \hat{R}_s, \hat{R}_r) \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \lambda_{rd} + L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s \dot{q}_{sd} - K_1 e_s \quad (4.1.40)$$

donde

$$\Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d, \hat{R}_s, \hat{R}_r) = \frac{L_r \sigma}{L_{sr} \beta^2} \dot{\tau}_d + \frac{L_r}{L_{sr}} \left(\frac{L_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} + \mathcal{I}_2 \right) + \frac{\tau_d}{L_{sr} \beta^2} \left(L_s \mathcal{I}_2 + \frac{L_r \sigma}{\beta^2} \mathcal{J} \right) \hat{R}_r + \frac{1}{L_{sr}} \left(\frac{\tau_d L_r}{\beta^2} \mathcal{I}_2 - \mathcal{J} \right) \hat{R}_s \quad (4.1.41)$$

con estados del controlador

$$\dot{q}_{sd} = -\frac{1}{J} \left[L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_{sd} + B \dot{q}_{sd} + K_2 e_s + \dot{\tau}_L \right] \quad (4.1.42)$$

y

$$\dot{\lambda}_{rd} = \frac{\hat{R}_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd} \quad (4.1.43)$$

con condiciones iniciales $\lambda_{rd}(0) = [\beta, 0]^T$ y $\dot{q}_{sd}(0) = \dot{q}_{sd0}$. La ley de adaptación para cada parámetro está dada por

$$\dot{\hat{R}}_s = -\gamma \phi_1^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.44)$$

$$\dot{\hat{R}}_r = -\gamma \left(\phi_2^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \phi_3^T \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \right) \quad (4.1.45)$$

$$\dot{\hat{\tau}}_L = -\gamma e_s \quad (4.1.46)$$

donde

$$\phi_1 = \frac{1}{L_{sr}} \left(\frac{\tau_d L_r}{\beta^2} \mathcal{I}_2 - \mathcal{J} \right) \quad (4.1.47)$$

$$\phi_2 = \frac{\tau_d}{L_{sr} \beta^2} \left(L_s \mathcal{I}_2 + \frac{L_r \sigma}{\beta^2} \mathcal{J} \right) \quad (4.1.48)$$

$$\phi_3 = \frac{\tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd} \quad (4.1.49)$$

con $\gamma > 0$ la ganancia de adaptación y (4.1.19), (4.1.20) los valores deseados para las corrientes.

Bajo estas condiciones, el esquema es *globalmente estable* y asegura seguimiento de par y regulación de la norma del flujo de rotor con operación balanceada con todas las señales internas acotadas. Más aún, el estimado del par de carga converge al valor real del mismo.

□□□

Observación 4.4. Es interesante observar que el controlador propuesto es muy fácil de sintonizar. Existen solamente cuatro parámetros a elegir, la ganancia de adaptación γ , la norma del flujo de rotor deseada β y las ganancias K_1, K_2 . Note también que, como en el caso ideal, no existen puntos singulares en el comportamiento del controlador.

4.2 Control por retroalimentación de salida

4.2.1 Caso basado en observador de estados

En esta segunda parte del capítulo, se estudia el problema de control de motores de inducción considerando que solamente se tiene a disposición las variables medibles del sistema, i.e. corrientes de estator y velocidad del rotor. Se supone que tanto los parámetros del motor son conocidos y se desconoce el par de carga. En particular, en esta sección se desarrolla un controlador por retroalimentación de salida basado en un observador de estados y el problema que se resuelve puede ser formulado como

Formulación del problema: Caso basado en observador.

Considere el modelo del motor de inducción (4.1.1- 4.1.2). Suponga

A.1o. Las corrientes de estator $\hat{q}_{s1}, \hat{q}_{s2}$ y la velocidad del rotor \hat{q}_s son *disponibles* para medición,

A.2o. Los parámetros del motor son *conocidos*, y

A.3o. El par de carga τ_L es una función *desconocida constante*.

Sea el *par deseado* $\tau_d(t)$ una función diferenciable, suave y acotada con primera derivada acotada y conocida, y la *norma deseada para el flujo de rotor* la constante $\beta > 0$. Bajo estas condiciones diseñe una ley de control que asegure estabilidad interna, seguimiento de par asintótico y regulación de la norma del flujo de rotor, es decir que el sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tau - \tau_d) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\lambda_v\| = \beta \quad (4.2.1)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclideana, con todas las señales uniformemente acotadas. Más aún, se requiere que el motor en estado estable opere en un *régimen balanceado*.

□□□

Para resolver el problema anterior se sigue el mismo procedimiento que en el caso de retroalimentación de estados, i.e. se define la dinámica deseada y utilizando la solución del problema de selección de coordenadas deseadas, se propone una ley de control que cubre el objetivo de control bajo algunas suposiciones particulares. Por lo tanto en este caso, la dinámica deseada es definida también como en (4.1.10), y por lo tanto la entrada de control que satisface este sistema es dada como en la proposición 4.2. Sin embargo, como en el caso adaptable, la implementación directa de ese resultado, i.e. hacer $u = u_d$, no puede ser realizada, ahora por el hecho de que se supone que las variables de rotor no son medibles.

Considerando el procedimiento seguido en el caso adaptable, la idea aquí es proponer una estructura para el controlador similar a la del caso ideal pero sustituyendo las corrientes de rotor por sus estimados \hat{q}_r . Después diseñar un observador que asegure la solución del problema planteado.

Considere la siguiente proposición para la estructura del controlador

$$u = \Gamma(\tau_d, \hat{\tau}_d) \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \lambda_{rd} + L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \hat{q}_r \dot{q}_{sd} - K_1 e_s \quad (4.2.2)$$

con

$$\Gamma(\tau_d, \hat{\tau}_d) = \frac{L_r \sigma}{L_{sr} \beta^2} \hat{\tau}_d + \frac{L_{sr}}{L_r} \left(\frac{L_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} + \mathcal{I}_2 \right) + \frac{\tau_d}{L_{sr} \beta^2} \left(L_s \mathcal{I}_2 + \frac{L_r \sigma}{\beta^2} \mathcal{J} \right) R_r + \frac{1}{L_{sr}} \left(\frac{\tau_d L_r}{\beta^2} \mathcal{I}_2 - \mathcal{J} \right) R_s \quad (4.2.3)$$

y los estados del controlador

$$\dot{\lambda}_{rd} = \frac{R_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd} \quad (4.2.4)$$

$$\dot{\tilde{q}}_{sd} = -\frac{1}{J} \left[L_{sr} \hat{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_{sd} + B \dot{q}_{sd} + K_2 e_s + \hat{\tau}_L \right] \quad (4.2.5)$$

con condiciones iniciales $\lambda_{rd}(0) = [\beta, 0]^T$, $\tilde{q}_{sd}(0) = \tilde{q}_{sd0}$.

Los problemas que se presentan son: Diseñar un observador que genere las señales \hat{q}_r , y probar la solución del problema planteado con retroalimentación de estados estimados. Con fines de claridad en la presentación, se presenta primero el diseño del observador. Después, se estudia las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado compuesto por el sistema, el controlador anterior y el observador propuesto.

Diseño del observador.

Siguiendo la misma filosofía que en las secciones anteriores, se diseñara un observador globalmente convergente utilizando las ecuaciones de error del estado. Sin embargo, en este caso es conveniente recordar que la variables no medibles son de naturaleza eléctrica, por lo tanto solamente se considerara la parte correspondiente del sistema.

De (3.3.6-3.3.7), se sabe que el modelo $\alpha\beta$ puede ser escrito como

$$D_e(q_s)\ddot{q}_e + W_1(q_s)\dot{q}_s\dot{q}_e + R_e\dot{q}_e = M_e u \quad (4.2.6)$$

$$J\dot{q}_s - \frac{1}{2}\dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e + B\dot{q}_s = -\tau_L \quad (4.2.7)$$

donde la primera ecuación corresponde al subsistema eléctrico mientras que la segunda al mecánico con matrices definidas en la sección del caso ideal.

Para desarrollar un observador para (4.2.6) utilizando las ecuaciones de error, es necesario que las matrices $D_e(q_s)$ y $W_1(q_s)\dot{q}_s$ satisfagan la propiedad fundamental de antisimetría introducida en el capítulo 2. Más aún, la información que el observador recibe del sistema es solamente vía las corrientes y voltajes de estator y la velocidad de rotor. Adicionalmente, es conveniente que el observador sea del tipo de lazo cerrado (con el fin de incrementar su robustez).

La primera de estas características puede ser cubierta notando que

$$\dot{D}_e(q_s) - 2W_1(q_s)\dot{q}_s = -W_1(q_s)\dot{q}_s = L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{J}e^{\mathcal{J}q_s} \\ \mathcal{J}e^{-\mathcal{J}q_s} & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_s$$

por lo tanto, si se es capaz de adicionar a la entrada (2,1) de la matriz anterior la cantidad $-2\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}q_s}$ se obtendrá la propiedad de antisimetría deseada. De manera interesante, la adición de tal término puede ser llevada a cabo al mismo tiempo que las dos características restantes impuestas a la estructura del controlador, son cubiertas.

Para este fin, considere la siguiente propuesta para la estructura del observador

$$D_e(q_s)\ddot{\hat{q}}_e + W_1(q_s)\dot{q}_s\dot{\hat{q}}_e + R_e\dot{\hat{q}}_e = M_e u - L(q_s, \dot{q}_s)\dot{\hat{q}}_e \quad (4.2.8)$$

con $\dot{\hat{q}}_e = \dot{\hat{q}}_e - \dot{q}_e$ el error de observación y

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{sr}\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}q_s} & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_s \quad (4.2.9)$$

Note que el observador solamente depende de las variables mecánicas y, debido a la estructura de la matriz $L(q_s, \dot{q}_s)$, solamente requiere medición de las corrientes de estator. Más aún, si se obtiene la ecuación que describe la dinámica del error de observación, restando (4.2.8) y (4.2.6), entonces

$$D_e(q_s)\ddot{\hat{q}}_e + (W_1\dot{q}_s + L)\dot{\hat{q}}_e + R_e\dot{\hat{q}}_e = 0 \quad (4.2.10)$$

Ahora, considere la ecuación cuadrática

$$V_o = \frac{1}{2}\dot{\hat{q}}_e^T D_e(q_s)\dot{\hat{q}}_e$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (4.2.10) es

$$\dot{V}_o = -\dot{\hat{q}}_e^T R_e\dot{\hat{q}}_e$$

Capítulo 4. Motores de Inducción: Control

ya que ahora la matriz $\dot{D}_e(q_s) - 2(W_1(q_s)\dot{q}_s + L(q_s, \dot{q}_s))$ es antisimétrica.

Utilizando las cotas de las funciones V y V_0 es fácil encontrar constantes positivas m_0, α_0 tales que

$$\|\tilde{q}_e(t)\|^2 \leq m_0 e^{-\alpha_0 t} \|\tilde{q}_e(0)\|^2$$

lo cual establece la convergencia exponencial del error de observación a cero.

Con este resultado, se puede presentar la siguiente proposición intermedia en la solución del problema planteado.

Proposición 4.3.

Para el modelo del motor de inducción (4.1.1) el observador no lineal

$$D_e(q_s)\dot{\tilde{q}}_e + W_1(q_s)\dot{q}_s\dot{\tilde{q}}_e + R_e\dot{\tilde{q}}_e = M_e u - L(q_s, \dot{q}_s)\dot{\tilde{q}}_e$$

con $\dot{\tilde{q}}_e = \dot{\hat{q}}_e - \dot{q}_e$ el error de observación y

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_s$$

produce convergencia exponencial del error de observación a cero.

□□□

Observación 4.5. El observador no lineal anterior fue reportado primero en [Ortega/Espinosa, 1991b] para el modelo dq . Hasta donde se conoce por el autor, este es el único observador exponencialmente estable para el modelo completo del motor de inducción.

Retroalimentación de estados estimados.

Una vez establecida la estructura del observador, el problema que se aborda es el estudio de las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado con retroalimentación de estados estimados. Para este fin, considere nuevamente la ecuación del error de estados

$$D(q)\dot{e} + C(q, \dot{q})e + \mathcal{R}e = \mathcal{M}u - \mathcal{M}u_d$$

donde

$$\mathcal{M}u - \mathcal{M}u_d = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_d \\ \lambda_{rd} + R_r \dot{q}_{rd} \\ \mathcal{J} \tilde{q}_{sd} + L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_{sd} + B \dot{q}_{sd} + \tau_L \end{bmatrix}$$

La sustitución del controlador propuesto (4.2.2-4.2.5) en la expresión anterior produce

$$D(q)\dot{e} + C(q, \dot{q})e + (\mathcal{R} + \mathcal{K})e = S(q_s, \dot{q}_d)\dot{\tilde{q}}_e + \tilde{\xi} \quad (4.2.11)$$

donde $\mathcal{K} = \text{diag}\{K_1 I_2, 0, 0, K_2\}$, $\tilde{\xi} = [0, 0, 0, 0, \hat{\tau}_L - \tau_L]^T$ y

$$S = \begin{bmatrix} 0 & L_{sr} \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \dot{q}_{sd} \\ 0 & 0 \\ 0 & L_{sr} \dot{q}_{sd}^T \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \end{bmatrix}$$

Es claro que el sistema en lazo cerrado es ahora descrito por las ecuaciones de los errores (4.2.11) and (4.2.10).

Considere ahora la función candidata de Lyapunov compuesta dada por

$$V_o = \frac{1}{2} e^T \mathcal{D}(q) e + \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(\dot{q}_s) \dot{q}_e + \frac{1}{2\gamma} \dot{\tau}_L^2$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (4.2.11) and (4.2.10), considerando la antisimetría de $\dot{\mathcal{D}} - 2\mathcal{C}$ and $\dot{D}_e - 2(W_1 \dot{q}_s + L)$, esta dada por

$$\dot{V}_o = -e^T (\mathcal{R} + \mathcal{K}) e + e^T S \dot{q}_e - \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e + \frac{1}{\gamma} \dot{\tau}_L \dot{\tau}_L + \dot{\tau}_L e_s$$

En este momento, se está en posición de determinar la ley de adaptación para compensar la incertidumbre del par de carga. Note que, si en la expresión anterior se define

$$\dot{\tau}_L = -\gamma e_s; \quad \gamma > 0 \quad (4.2.12)$$

entonces, bajo la suposición de que el par de carga es constante, se obtiene que

$$\dot{V}_o = -e^T (\mathcal{R} + \mathcal{K}) e + e^T S \dot{q}_e - \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e$$

La última etapa es encontrar condiciones que hagan la función anterior negativa definida. Para esto, se puede definir el vector $z = [e^T, \dot{q}_e^T]^T$ y, después de algunos arreglos sencillos, llegar a la expresión equivalente, pero más simple

$$\dot{V}_o = -z^T Q z$$

con

$$Q = \begin{bmatrix} \mathcal{R} + \mathcal{K} & -\frac{1}{2} S \\ -\frac{1}{2} S^T & R_e \end{bmatrix}$$

Es bien conocido que, la positividad de Q se cumple si y solo si (ver [Kreindler et. al., 1972]), R_e es positiva definida y

$$\mathcal{R} + \mathcal{K} - \frac{1}{4} S R_e^{-1} S^T > 0$$

donde

$$\mathcal{R} + \mathcal{K} - \frac{1}{4} S R_e^{-1} S^T = \begin{bmatrix} Q_{11} \mathcal{I}_2 & 0 & Q_{13} \\ 0 & R_e \mathcal{I}_2 & 0 \\ Q_{13}^T & 0 & Q_{33} \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}$$

con

$$Q_{11} = R_s + K_1 - \frac{L_{sr}^2}{4R_r} \dot{q}_{sd}^2$$

$$Q_{33} = B + K_2 - \frac{L_{sr}^2}{4R_r} \dot{q}_{sd}^T \dot{q}_{sd}$$

$$Q_{13} = -\frac{L_{sr}^2}{4R_r} \dot{q}_{sd} \dot{q}_{sd}$$

Por lo tanto, si se eligen

$$K_1 > \frac{L_{sr}^2}{4R_r} \dot{q}_{sd}^2 \quad (4.2.13)$$

$$K_2 > \frac{L_{sr}^2}{4R_r} \dot{q}_{sd}^T \dot{q}_{sd} \quad (4.2.14)$$

la positividad de Q se logra. Sin embargo, note que el término del lado derecho en esta última expresión es variante en el tiempo. Esta situación obliga a definir en este caso, las ganancias también variantes en el tiempo

$$K_1(\dot{q}_{sd}) = \frac{L_{sr}^2}{4\epsilon} \dot{q}_{sd}^2 \quad (4.2.15)$$

$$K_2(\dot{q}_d) = \frac{L_{sr}^2}{4\epsilon} \dot{q}_{sd}^T \dot{q}_{sd} \quad (4.2.16)$$

donde $0 < \epsilon < R_r$. Note que el factor ϵ que se introduce, además de establecer las condiciones impuestas por (4.2.13- 4.2.14), refleja la incertidumbre sobre el valor de la resistencia de rotor.

Para establecer la estabilidad interna del controlador propuesto, note que el sistema en lazo cerrado está completamente determinado por (4.2.10), (4.2.11), los estados del controlador (4.2.4-4.2.5) y la ley de adaptación para el par de carga (4.2.12). Ahora, de la positividad de Q se puede concluir que e , \dot{q}_e y $\hat{\tau}_L$ son acotados. Más aún, aplicando el teorema de invariancia de La Salle se concluye que $e \rightarrow 0$ y $\dot{q}_e \rightarrow 0$. Ya que λ_{rd} es acotado por construcción también lo son \dot{q}_{sd} , \dot{q}_{rd} y por lo tanto \dot{q}_{sd} , visto nuevamente como la salida de un filtro lineal estable de primer orden con entrada acotada. Notando que, como en el caso adaptable, $\hat{\tau}_L \rightarrow 0$, se puede concluir finalmente la estabilidad asintótica del sistema completo.

El siguiente teorema, resume los resultados obtenidos y establece la presentación del tercer resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.3.

Considere el modelo del motor de inducción dado por (4.1.1) con salida τ (4.1.2), flujos λ (4.1.3) y las suposiciones **A.1o.** - **A.3o.** Sea la ley de control definida como

$$u = \Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d) \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \lambda_{rd} + L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_r \dot{q}_{sd} - K_1(\dot{q}_{sd}) e_s \quad (4.2.17)$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d) = & \frac{L_{r\sigma}}{L_{rr}\beta^2} \dot{\tau}_d + \frac{L_{\lambda}}{L_{sr}} \left(\frac{L_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} + \mathcal{I}_2 \right) + \\ & + \frac{\tau_d}{L_{rr}\beta^2} \left(L_s \mathcal{I}_2 + \frac{L_r \sigma}{\beta^2} \mathcal{J} \right) R_r + \frac{1}{L_{rr}} \left(\frac{\tau_d L_r}{\beta^2} \mathcal{I}_2 - \mathcal{J} \right) R_s \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

y estados del controlador

$$\dot{\lambda}_{rd} = \frac{R_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd} \quad (4.2.19)$$

$$\dot{q}_{sd} = -\frac{1}{J} \left[L_{sr} \dot{q}_r^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_{sd} + B \dot{q}_{sd} + K_2(\dot{q}_d) e_s + \hat{\tau}_L \right] \quad (4.2.20)$$

con condiciones iniciales $\lambda_{rd}(0) = [\beta, 0]^T$, $\dot{q}_{sd}(0) = \dot{q}_{sd0}$. Las ganancias $K_1(\dot{q}_{sd})$ and $K_2(\dot{q}_d)$ son dadas como

$$K_1(\dot{q}_{sd}) = \frac{L_{sr}^2}{4\epsilon} \dot{q}_{sd}^2 \quad (4.2.21)$$

$$K_2(\dot{q}_d) = \frac{L_{sr}^2}{4\epsilon} (\dot{q}_{1d}^2 + \dot{q}_{2d}^2), \quad 0 < \epsilon < R_r \quad (4.2.22)$$

mientras el estimador de estados y la ley de adaptación para el par de carga son

$$D_e(q_s)\ddot{q}_e + W_1\dot{q}_s\dot{q}_e + R_e\dot{q}_e = M_e u - L(q_s, \dot{q}_s)\ddot{q}_e \quad (4.2.23)$$

$$\dot{\tau}_L = -\gamma e_s, \quad \gamma > 0 \quad (4.2.24)$$

con $\dot{q}_e := \dot{q}_e - \dot{q}_e$ el error de observación y

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{sr} J_2 e^{-J q_s} & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_s$$

Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado es *globalmente asintóticamente estable* logrando seguimiento de par y regulación de la norma del flujo de rotor con operación balanceada.

□□□

Observación 4.6. Note nuevamente que la sintonización del controlador anterior es muy simple, existen esencialmente dos parámetros de diseño, la constante ϵ y la ganancia de adaptación γ . Se debe hacer notar también, que el controlador es siempre bien definido en el sentido de que no existen puntos singulares.

4.2.2 Caso sin reconstrucción de estados

En esta última sección se presenta un controlador dinámico globalmente estable basado en retroalimentación de salida el cual no utiliza ideas de reconstrucción de estados. El procedimiento que se sigue es motivado por el hecho bien conocido de que la interconexión de subsistemas pasivos es también pasiva. Se considera el modelo $\alpha\beta$ model como en (3.3.6- 3.3.7), el cual se repite aquí por facilidad, dado por

$$D_e(q_s)\ddot{q}_e + W_1(q_s)\dot{q}_s\dot{q}_e + R_e\dot{q}_e = M_e u \quad (4.2.25)$$

$$J\ddot{q}_s + B\dot{q}_s = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e - \tau_L \quad (4.2.26)$$

y se propone diseñar un controlador basado en ideas de asignación de dinámica deseada (o equivalentemente, en ideas de moldeo de energía) del subsistema eléctrico solamente, tratando al subsistema mecánico como una "perturbación pasiva". Esto puede ser hecho, si se considera de la propiedad 3.2, que ambos subsistemas son pasivos. El punto básico

aquí es que el moldeo de la energía eléctrica y la inyección de amortiguamiento puede llevarse a cabo utilizando únicamente variables medibles.

El problema particular que se resuelve en esta sección, puede formularse como en el caso basado en observador de estados, pero considerando que, debido al hecho de que aquí no se trabaja con la parte mecánica, no es necesario imponer ninguna restricción al par de carga más que sea una función acotada y suave. Con esto, la formulación del problema es

Formulación del problema: Caso sin reconstrucción de estados.

Considere el mismo problema que en el caso basado en observación de estados, pero sustituya la suposición A.30. por

A.30l. El par de carga $\tau_L(t)$ es una función suave y acotada.

□□□

Ya que se trabajará únicamente con el subsistema eléctrico del motor, y se desea aplicar la misma metodología basada en ecuaciones de error que en las secciones anteriores, se debe encontrar una representación que posea la propiedad de antisimetría introducida antes. Para esto, recuerde el procedimiento seguido en el diseño del observador en la sección anterior. Se sabe que si la matriz

$$L(q_s, \dot{q}_s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{sr} \mathcal{J}_2 e^{-\mathcal{J} q_s} & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_s$$

se adiciona a la matriz $W_1(q_s)\dot{q}_s$ en el modelo, la citada propiedad se obtiene. Sin embargo, en este caso no es posible solamente adicionar esta matriz, ya que implicaría modificar el sistema. Para compensar este cambio, se propone la siguiente representación equivalente del subsistema eléctrico

$$D_e(q_s)\ddot{q}_e + (W_1(q_s)\dot{q}_s + L(q_s, \dot{q}_s))\dot{q}_e + (R_e - L(q_s, \dot{q}_s))\dot{q}_e = M_e u \quad (4.2.27)$$

la cual no altera la estructura original y posee la propiedad deseada. Por supuesto el "precio" de esta modificación es la pérdida de la propiedad de positividad de la matriz correspondiente a los términos de disipación, que ahora tiene la forma

$$R_e - L(q_s, \dot{q}_s) = \begin{bmatrix} R_s \mathcal{I}_2 & 0 \\ -L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} & R_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}$$

Con esta modificación, la dinámica deseada para la parte eléctrica del motor se propone como

$$D_e(q_s)\ddot{q}_{ed} + (W_1(q_s)\dot{q}_s + L(q_s, \dot{q}_s))\dot{q}_{ed} + (R_e - L(q_s, \dot{q}_s))\dot{q}_{ed} = M_e u_d \quad (4.2.28)$$

y el problema inmediato es encontrar el control u_d y los valores deseados \dot{q}_{ed} que satisfagan este sistema. Afortunadamente, si se nota que el sistema anterior puede ser descompuesto

como

$$L_s \ddot{q}_{sd} + L_{sr} e^{\mathcal{J}q_s} \ddot{q}_{rd} + L_{sr} \mathcal{J} e^{\mathcal{J}q_s} \dot{q}_s \dot{q}_{rd} + R_s \dot{q}_{sd} = u_d \quad (4.2.29)$$

$$L_{sr} e^{-\mathcal{J}q_s} \ddot{q}_{sd} + L_r \ddot{q}_{rd} - L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_s \dot{q}_{sd} + R_r \dot{q}_{rd} = 0 \quad (4.2.30)$$

y se toma en cuenta que el flujo de rotor del sistema es el mismo que para el sistema completo, esto es

$$\lambda_{rd} = L_{sr} e^{-\mathcal{J}q_s} \dot{q}_{sd} + L_r \dot{q}_{rd}$$

se puede establecer que la segunda ecuación (4.2.30) satisface también la ecuación diferencial

$$\dot{\lambda}_{rd} + R_r \dot{q}_{rd} = 0$$

y por lo tanto el mismo estado del controlador

$$\dot{\lambda}_{rd} = \frac{R_r}{\beta^2} \tau_d \mathcal{J} \lambda_{rd} \quad (4.2.31)$$

y los mismos valores deseados de las corrientes (4.1.19- 4.1.20) son apropiadas soluciones del sistema.

De manera interesante, se puede observar que la entrada de control requerida para satisfacer al sistema *depende unicamente de variables medibles*.

Considere ahora, la ecuación de error de estado dada por la resta de (4.2.27) y (4.2.28) como

$$D_e(q_s) \dot{e}_1 + (W_1(q_s) \dot{q}_s + L(q_s, \dot{q}_s)) e_1 + (R_e - L(q_s, \dot{q}_s)) e_1 = M_e u - M_e u_d \quad (4.2.32)$$

donde

$$M_e u - M_e u_d = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_d \\ \dot{\lambda}_{rd} + R_r \dot{q}_{rd} \end{bmatrix}$$

y $e_1 = [\dot{q}_s^T, \dot{q}_r^T]^T - [\dot{q}_{sd}^T, \dot{q}_{rd}^T]^T$. Es claro que, ya que se sabe que la segunda ecuación es satisfecha por la selección de valores deseados, si se elige $u = u_d$, la expresión anterior se reduce a

$$D_e(q_s) \dot{e}_1 + (W_1(q_s) \dot{q}_s + L(q_s, \dot{q}_s)) e_1 + (R_e - L(q_s, \dot{q}_s)) e_1 = 0$$

pero en este caso, con la matriz $R_e - L(q_s, \dot{q}_s)$ de signo indefinido. Para superar esta dificultad, sea la entrada u del sistema dada por

$$u = u_d - K_3 e_1$$

con K_3 una ganancia con valor a definir.

Esta nueva ley de control produce que la ecuación del error (4.2.32) tome la forma

$$D_e(q_s) \dot{e}_1 + (W_1(q_s) \dot{q}_s + L(q_s, \dot{q}_s)) e_1 + (R_e - L(q_s, \dot{q}_s) + \mathcal{K}_1) e_1 = 0 \quad (4.2.33)$$

donde $\mathcal{K}_1 = \text{diag}\{K_3, 0\}$.

Para probar convergencia del error, considere la ecuación cuadrática

$$V_{ol} = \frac{1}{2} e_1^T D_e(\dot{q}_s) e_1$$

y considere *temporalmente* que \dot{q}_s no tiene tiempo de escape finito. Bajo estas consideraciones, se puede evaluar la derivada con respecto al tiempo de V_{ol} a lo largo de las trayectorias de (4.2.33) con lo que se obtiene, utilizando la propiedad de antisimetría, que

$$\dot{V}_{ol} = -e_1^T \mathcal{Q}_1(q_s, \dot{q}_s) e_1$$

donde

$$\mathcal{Q}_1(q_s, \dot{q}_s) = \begin{bmatrix} (R_s + K_3)\mathcal{I}_2 & \frac{1}{2} L_{sr} \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s \\ -\frac{1}{2} L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s & R_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}$$

La siguiente etapa es encontrar condiciones que aseguren la positividad de la matriz anterior. Para esto, note que $\mathcal{Q}_1(q_s, \dot{q}_s) > 0$ si y solo si $R_r > 0$, lo cual es cierto ya que es el valor de la resistencia de rotor, y

$$(R_s + K_3)\mathcal{I}_2 - \frac{1}{4R_r} (L_{sr} \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s) (-L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s) > 0$$

lo cual, considerando que \mathcal{J} conmuta con $e^{-\mathcal{J} q_s}$ y $\mathcal{J}^2 = -\mathcal{I}_2$, se reduce a la condición

$$K_3 > \frac{L_{sr}^2 \dot{q}_s^2}{4R_r}$$

De manera similar al caso basado en observador, se puede elegir K_3 como la ganancia variante en el tiempo

$$K_3 = \frac{L_{sr}^2 \dot{q}_s^2}{4\epsilon} \quad (4.2.34)$$

donde $0 < \epsilon < R_r$, lo cual garantiza la positividad de \mathcal{Q}_1 . Con esta definición y utilizando las cotas sobre las matrices V_{ol} y \dot{V}_{ol} , es fácil demostrar que

$$\|e_1(t)\|^2 \leq m_o e^{-\alpha_o t} \|e_1(o)\|^2 \quad (4.2.35)$$

con $m_o = \frac{\lambda_{\max}\{D_e\}}{\lambda_{\min}\{D_e\}}$ y $\alpha_o = \frac{\lambda_{\max}\{\mathcal{Q}_1\}}{\lambda_{\min}\{D_e\}}$. Esto es, el error converge exponencialmente a cero.

La única dificultad que resta por resolver es probar que no existen comportamientos con tiempo de escape finito. Para esto, note que la dinámica del sistema en lazo cerrado es completamente descrita por (4.2.33), (4.2.26) y (4.2.31). Este conjunto de ecuaciones diferenciales es localmente Lipschitz en el estado y, bajo las suposiciones en los pares deseado y de carga, es también continuo en t . Por lo tanto, existe un intervalo de tiempo $[0, t_1)$ donde las soluciones existen y son únicas. Ahora, para todo $t \in [0, t_1)$, (4.2.35) se cumple. Esto, junto con el acotamiento de T_L y \dot{q}_{ed} , ya que λ_{rd} (4.2.31) es acotado por

construcción, prueba que en el intervalo $[0, t_1]$ el lado derecho de (4.2.26) es acotado por una constante α_1 independiente de t_1 . Por lo tanto, sus soluciones no pueden crecer más rápido que una exponencial en este intervalo. Consecuentemente, \dot{q}_s es acotado $\forall t \in [0, t_1]$, y e_1 no puede escapar a infinito en $[0, t_1]$. Ya que m_o, α_o, α_1 son independientes de t_1 se puede repetir el argumento para una nueva condición inicial t_1 y definir la continuación de la solución para un nuevo intervalo $[t_1, 2t_1]$. Esto permite extender la existencia de las soluciones para el eje real completo y concluir la prueba.

Con este resultado, en el teorema siguiente se presenta el cuarto resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.4.

Considere el modelo del motor de inducción (4.1.1) con salida el par τ (4.1.2), flujos λ (4.1.3) y las suposiciones A.1o., A.2o. y A.3o1. Sea la ley de control definida como

$$u = \Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d) \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_s} \lambda_{rd} + \frac{L_{sr}}{\beta^2} \tau_d e^{\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s - K_3(\dot{q}_{sd}) e_s \quad (4.2.36)$$

con

$$\Gamma(\tau_d, \dot{\tau}_d) = \frac{L_r \sigma}{L_r \beta^2} \dot{\tau}_d + \frac{L_r}{L_r} \left(\frac{L_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} + \mathcal{I}_2 \right) + \frac{\tau_d}{L_r \beta^2} \left(L_s \mathcal{I}_2 + \frac{L_r \sigma}{\beta^2} \mathcal{J} \right) R_r + \frac{1}{L_r} \left(\frac{\tau_d L_r}{\beta^2} \mathcal{I}_2 - \mathcal{J} \right) R_s \quad (4.2.37)$$

y estados del controlador

$$\dot{\lambda}_{rd} = \frac{R_r \tau_d}{\beta^2} \mathcal{J} \lambda_{rd} \quad (4.2.38)$$

con condiciones iniciales $\lambda_{rd}(0) = [\beta, 0]^T$. La ganancia $K_3(\dot{q}_{sd})$ está dada por

$$K_3(\dot{q}_{sd}) = \frac{L_{sr}^2}{4\epsilon} \dot{q}_s^2, \quad 0 < \epsilon < R_r \quad (4.2.39)$$

Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado es *globalmente asintóticamente estable* logrando seguimiento de par y regulación de la norma de flujo de rotor con operación balanceada.

□□□

Observación 4.7. La ventaja del controlador anterior es que resuelve el problema de seguimiento de par *sin* reconstrucción de los estados de rotor. Se puede considerar este resultado como el establecimiento de la primera etapa hacia la solución del problema, aún abierto, de estimación de parámetros combinada con observación de estados.

Este capítulo se cierra, presentando explícitamente la solución del problema de seguimiento de velocidad para este controlador. La motivación de esto, es que en este caso, no es suficiente definir "un adecuado par deseado para obtener la velocidad deseada" como en los casos anteriores, si no que suposiciones más fuertes tienen que ser hechas.

Para empezar, note que si se desea realizar control de velocidad del motor, el par de carga debe ser compensado. Por lo tanto una adecuada definición del par de carga es

$$\tau_d = J\dot{q}_{sd} + B\dot{q}_{sd} + \hat{\tau}_L \quad (4.2.40)$$

donde \dot{q}_{sd} es la velocidad deseada (la cual debe ser al menos C^2) y $\hat{\tau}_L$ es un estimado del par de carga. Bajo esta definición, la ecuación del error para la parte mecánica es dada, de (4.2.26) and (4.2.40), por

$$J\dot{e}_s + Be_s = \tau - \tau_d + \tilde{\tau}_L$$

con $e_s = \dot{q}_s - \dot{q}_{sd}$ y $\tilde{\tau}_L = \hat{\tau}_L - \tau_L$.

Si se considera la función cuadrática

$$V_s = \frac{1}{2}J e_s^2 + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\tau}_L^2$$

su derivada a lo largo de las trayectorias de la ecuación de error es

$$\dot{V}_s = -Be_s^2 + e_s(\tau - \tau_d) + e_s\tilde{\tau}_L + \frac{1}{\gamma}\tilde{\tau}_L\dot{\tilde{\tau}}_L$$

y en este momento se puede definir la ley de adaptación que compense la incertidumbre sobre el par de carga. Sin embargo, algunas suposiciones adicionales deben ser consideradas, específicamente: Si el par de carga es *constante*, una adecuada ley de adaptación es

$$\dot{\tilde{\tau}}_L = -\gamma e_s$$

lo que reduce la ecuación anterior a

$$\dot{V}_s = -Be_s^2 + e_s(\tau - \tau_d) \quad (4.2.41)$$

Para probar convergencia a cero del error de velocidad a partir de la expresión anterior, es conveniente notar que $\tau = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e$ y $\tau_d = \frac{1}{2}\dot{q}_{ed}^T W_1 \dot{q}_{ed}$. Por lo tanto es fácil mostrar que

$$\begin{aligned} \tau - \tau_d &= \frac{L_{sr}}{2} [\dot{q}_e^T W_0 \dot{q}_e - \dot{q}_{ed}^T W_0 \dot{q}_{ed}] \\ &= \frac{L_{sr}}{2} [e_1^T W_0 e_1 + 2e_1^T W_0 \dot{q}_{ed}] \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

donde $W_0 = \frac{1}{L_{sr}} W_1$ es una matriz unitaria. Ahora, tomando normas de ambos, la cota siguiente se obtiene inmediatamente

$$|\tau - \tau_d| \leq \frac{L_{sr}}{2} (\|e_1\|^2 + 2\|e_1\| \|\dot{q}_{ed}\|)$$

Este resultado permite establecer las siguientes conclusiones. Ya que $\tau - \tau_d$ es acotado, entonces por (4.2.41), e_5 es también acotado. Más aún, ya que $(\tau - \tau_d) \rightarrow 0$ exponencialmente, se puede concluir, nuevamente de (4.2.41) y el teorema de invariancia de La Salle, que $e_5 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Como se puede observar del análisis anterior, existe un problema mas: No existen argumentos para garantizar que $\hat{\tau}_L$ es acotado. En este sentido, este problema se puede resolver, implementando la siguiente ley de adaptación

$$\dot{\hat{\tau}}_L = Proj\{\hat{\tau}_L, -\gamma e_5\}; |\tau_L(0)| \leq \tau_L^{max}$$

donde $Proj\{\cdot, \cdot\}$ es una proyección suave (ver [Pomet et. al., 1989]) que mantiene a los estimados dentro de una esfera de radio τ_L^{max} . Por supuesto, esta clase de ley de adaptación impone una suposición adicional para resolver el problema, esto es, *conocer una cota superior* sobre el par de carga.

La proposición siguiente resume el resultado obtenido.

Corolario 4.1.

Considere el modelo del motor de inducción (4.1.1) con salida el par τ (4.1.2), flujos λ (4.1.3) y las suposiciones **A.1o.**, **A.2o.**

A.3os La velocidad deseada de rotor $\dot{q}_{sd}(t)$ es una función acotada dos veces diferenciable con primera y segunda derivadas acotadas y conocidas, y

A.4o. El par de carga es una función constante desconocida con una cota superior conocida τ_L^{max} sobre su norma, i.e. $|\tau_L(0)| \leq \tau_L^{max}$.

Sea la ley de control definida como (4.2.36) con par deseado

$$\tau_d = J\dot{q}_{sd} + B\dot{q}_{sd} + \hat{\tau}_L$$

El estimado del par de carga $\hat{\tau}_L$ se obtiene de la ley de adaptación tipo gradiente con proyección

$$\dot{\hat{\tau}}_L = Proj\{\hat{\tau}_L, -\gamma e_5\}; |\tau_L(0)| \leq \tau_L^{max}$$

Bajo estas condiciones

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_5(t) = 0$$

con todas las señales internas acotadas.

□□□

Observación 4.8. Quizá la desventaja más grande del resultado anterior sea la dependencia de la convergencia del error sobre el amortiguamiento "natural" del sistema. Note que en este caso, no es posible "inyectar" amortiguamiento a la parte mecánica ya que esto implicaría la necesidad de medición de aceleración del motor (note que el controlador utiliza la derivada del par de carga).

Conclusiones

Uno de los problemas más importantes, desde el punto de vista ingenieril, a los cuales se enfrenta actualmente la teoría de control, es el distanciamiento existente entre los resultados propuestos por ella y la implementación práctica de los mismos. Al parecer, la razón principal de esta situación es la falta de interés por parte de la comunidad teórica hacia la interpretación física de sus proposiciones, lo que ocasiona que el entendimiento de ellos por parte de la comunidad aplicada (explícitamente, la comunidad ingenieril) sea muy bajo, y con esto su utilización prácticamente nula. Con el fin de reducir esta separación, en este trabajo se presenta una aproximación a la solución de este problema. Las contribuciones que se hacen, se pueden dividir en las siguientes dos partes.

En la primera parte, se propone una metodología general de control que considera a un nivel fundamental las propiedades físicas de los sistemas a controlar. La característica principal de este método es que abandona la idea de considerar *cualquier* sistema dinámico, esto es cualquier ecuación diferencial sin importar su estructura, y se centra en una clase particular de sistemas *no lineales* sobre los cuales se tiene un amplio conocimiento sobre su estructura y propiedades. Esta clase particular de sistemas, la cual abarca un gran número de sistemas físicos, está constituida por aquellos sistemas que pueden ser modelados por las ecuaciones de Euler-Lagrange. Se presentan la estructura y algunas propiedades útiles para control de esta clase de ecuaciones. Se introduce el método de control basado en ideas de moldeo de energía potencial (concebido con fines de resolver problemas de regulación de salida) y se lleva a cabo un estudio de este desde una perspectiva del bien conocido problema de control por asignación de modelo (model matching). En base a este estudio, la primera contribución de esta tesis es establecer lo que se denota como *Problema de control por asignación de dinámica deseada*, el cual plantea la necesidad de obtener una ley de control que permita llevar a cabo tareas de *seguimiento* de salida y cuya solución esté dada por la metodología de control propuesta.

La estructura del problema planteado y su solución son: Dado un sistema modelado por las ecuaciones Euler-Lagrange, definir otro sistema dinámico (la dinámica deseada), el cual satisface *para todo tiempo* la salida deseada. El problema es diseñar una ley de control que garantice que la dinámica del sistema a controlar converja a la dinámica deseada, lo que implica a su vez que la salida del primero tiende a la deseada también. En este sentido, se establecen las condiciones generales que deben ser satisfechas para la solución del problema, explícitamente, la solución del "Problema de selección de coordenadas de-

seadas” y se presenta explícitamente la estructura de la ley de control requerida para este fin. Finalmente, se realiza una interpretación, en términos de moldeo de energía e inyección de amortiguamiento del controlador propuesto y se mencionan sus desventajas, conocimiento de términos de gravedad y perturbaciones.

Con el fin de ilustrar la aplicabilidad de la metodología de control propuesta, en la segunda (y más grande) parte del trabajo se resuelve el problema de control de par en Motores de inducción. Se presenta, bajo la suposición de circuitos magnéticos lineales y algunas suposiciones adicionales, la estructura del modelo de 3 fases del sistema como un caso particular del modelo de una máquina generalizada la cual abarca un gran número de motores eléctricos. Después de esto, se introducen tres representaciones equivalentes de 2 fases del sistema original vía dos transformaciones ampliamente utilizadas en el área, la transformación de Blondel, con la que se obtiene el modelo $\alpha\beta$ del motor, y la de Blondel-Park, que produce los modelos ab y dq del sistema. Como contribuciones del trabajo, se establece claramente la relación existente entre estas tres representaciones, un cambio de coordenadas lineal, y se presenta las ventajas y desventajas de cada una de ellas desde el punto de vista de control. Al mismo tiempo, se analizan cada una de las dos transformaciones en relación a sus propiedades de preservación de energía y se demuestra que mientras la primera es una transformación canónica, la segunda no lo es. Finalmente se presentan algunas propiedades relacionadas con las características de disipación de energía del motor.

La contribución principal de la tesis se realiza con la presentación de 4 distintos controladores que resuelven el problema de seguimiento de par con regulación de la norma de flujo de rotor y operación en régimen balanceado para esta clase de máquinas eléctricas, cuya concepción es resultado de la aplicación directa de la metodología general presentada primero.

- **Caso ideal.** Considera medibles todos los estados y conocidos todos los parámetros del motor así como el par de carga. Se diseña una ley de control *globalmente asintóticamente estable*.
- **Caso adaptable con retroalimentación de estados.** Considera medibles todos los estados y supone desconocidos (aunque constantes) los valores de las resistencias del motor así como el par de carga. Se diseña una ley de control adaptable *globalmente asintóticamente estable* con convergencia *exponencial* de los parámetros.
- **Caso basado en observador de estados.** Se considera medibles únicamente las corrientes de estator y la velocidad del rotor, los parámetros del motor conocidos y el par de carga desconocido aunque constante. Se diseña una ley de control con retroalimentación de salida y que utiliza estados de rotor estimados, un observador de estados *exponencialmente estable* y una ley de adaptación para compensar la incertidumbre sobre el par de carga, tales que se garantiza que el sistema en lazo cerrado es *globalmente asintóticamente estable*.

- **Caso sin reconstrucción de estados.** Se hacen las mismas suposiciones que el caso anterior sobre las señales del sistema. Adicionalmente, la parte mecánica del motor se considera como una perturbación pasiva y se controla únicamente la parte eléctrica del motor. Se diseña una ley de control con retroalimentación de salida *que no requiere de la medición de estados de rotor* y la cual garantiza *estabilidad global del sistema*. En este caso, se muestra explícitamente el controlador resultante para el caso de seguimiento de velocidad, el cual presenta la desventaja de depender para la convergencia de la señal de velocidad a su valor deseado, del amortiguamiento natural del sistema.

En todos estos casos, las leyes de control son *globalmente definidas* y su sintonización es relativamente simple.

Para finalizar, la conclusión más importante que se desprende del trabajo realizado, es la demostración clara de la posibilidad de desarrollar controladores con una interpretación física inmediata que permiten, utilizando propiedades específicas de los sistemas en estudio, primero disminuir el distanciamiento entre la teoría y la práctica, y segundo resolver problemas importantes que vistos desde una perspectiva general no tienen una solución satisfactoria.

Problemas abiertos e investigación futura

En el desarrollo del trabajo realizado son varios los puntos en donde se observa la existencia de problemas abiertos, los cuales definen la tendencia que tendrá la investigación futura en relación al tema.

En la parte relacionada a la metodología general de control propuesta, el problema inmediato es obtener condiciones necesarias y suficientes para la solución del "Problema de selección de coordenadas deseadas". Desafortunadamente, en este nivel de generalidad parece difícil encontrar una respuesta a esta pregunta. La investigación futura que se plantea en este sentido es tratar de aplicar la metodología a distintos sistemas particulares, por ejemplo: La máquina generalizada, el péndulo invertido con carro, robots con uniones flexibles, etc., y tratar de construir en base a estos casos particulares una teoría más general. Sin embargo, se cree fuertemente que esto será difícil de realizar y por lo tanto la solución de cada problema será también particular, dependiendo de la estructura del sistema en estudio.

En relación al motor de inducción existen problemas abiertos con mucha más posibilidad de ser resueltos. Primero, un problema importante es el que se refiere a la tarea de control que involucre al mismo tiempo tanto la adaptación de parámetros desconocidos como la estimación de estados no medibles. En este sentido, el controlador propuesto que no requiere de reconstrucción de estados es una buena primera aproximación y se piensa que la investigación futura deberá estar encaminada a la busca de nuevas parametriza-

ciones del sistema que permitan resolver este problema. Un segundo problema es la relajación de la suposición sobre el par de carga hecha en todos los controladores, esto es, que es constante. En este sentido, el problema está estrechamente ligado a un tema de investigación más general. Considerar que el motor de inducción está interconectado con otro sistema dinámico cuyo efecto sobre este se refleja justamente en el par de carga. Resolver este problema es equivalente a dotar a esta señal de perturbación de más estructura. Un tercer problema, relacionado con el último controlador presentado, es la incapacidad de inyectar amortiguamiento para solucionar el problema de seguimiento de velocidad. Se cree que la introducción de filtros, una especie de observadores para la velocidad del motor, pueden ser de ayuda en este sentido. Métodos como este han sido utilizados por ejemplo en el control de robots con uniones flexibles, como el presentado en el capítulo 2, probando ser de gran utilidad. Finalmente, un problema que es insoslayable, dada la filosofía expuesta en el trabajo, es el que se refiere a la implementación de los controladores propuestos. En este sentido, parece ser que una buena primera aproximación es la realización de experimentos de identificación de parámetros para posteriormente implementar los resultados obtenidos en esta tesis.

Bibliografía

- [Ailon/Ortega, 1992] A. Ailon, y R. Ortega, "An observer-based set-point controller for robot manipulators with flexible joints", *Systems and Control Letters*, (to appear). (See also Université de Technologie de Compiègne, France, Tech. Report, November, 1992.)
- [Arnold, 1990] V.I Arnold, **Mathematical Methods of Classical Mechanics**, *Springer-Verlag*, 2nd. ed., 1989.
- [Bedrossian, 1992] N. Bedrossian, "A New Class of Transformations Preserving Hamilton's Equations", *31st Conference on Decision and Control*, Tucson Arizona, USA, 1992.
- [Blanchske, 1972] F. Blanchske, "The principle of field orientation applied to the new TRANSVEKTOR closed loop control system for rotating-field machines", *Siemens, Review*, 34, pp. 217-220. 1972.
- [Bose, 1986] B.K. Bose, **Power electronics and AC drives**, *Prentice Hall*, 1986.
- [Canudas/Seleme, 1992] Canudas, C. y S. Seleme, "Lyapunov-based Torque Control Design for Induction Motors", *Proc. IFAC IMACS Workshop Motion Control*, Perugia, IT, Oct. 1992.
- [Canudas et. al., 1993] C. Canudas, R. Ortega y S. Seleme, "Robot Motion Control using Induction Motor Drives", *IEEE ICRA 93*, Atlanta, GA, May 1993.
- [DeLuca, 1990] A. Deluca, "Design of an exact nonlinear controller for induction motors", *IEEE Trans. Aut. Cont.*, Vol. 34, No.12, 1989, pp. 1304-1307.
- [Desoer et. al. 1975] C. Desoer y M. Vidyasagar, **Feedback Systems: Input-Output Properties**, *Academic Press*, 1975.

- [Espinosa/Ortega, 1993a] G. Espinosa y R. Ortega, "Control of Induction Motor Models in a Fixed Reference Frame", *Proc. IEEE CDC*, San Antonio, TX, USA, Dec. 1993.
- [Espinosa/Ortega, 1993b] G. Espinosa y R. Ortega, "State Observers are Unnecessary for Induction Motor Control", *Systems & Control Letters*, (to appear).
- [Goldstein, 1950] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading Mass., 1950.
- [Isidori, 1989] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, Springer-Verlag, 1989.
- [Isidori et. al., 1990] A. Isidori y C. Byrnes, "Output regulation of nonlinear systems", *IEEE Trans. on Aut. Control*, Vol. AC-35, No. 2, pp. 131-140, 1990.
- [Kanellakopoulos et. al., 1992] I. Kanellakopoulos, P. Krein y F. Disilvestro, "Nonlinear flux-observer-based control of induction motors", *Proc ACC*, Chicago, IL, USA, May 1992.
- [Kelly, 1989] R. Kelly, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*, DEFFI-UNAM, 1989.
- [Krause, 1986] P. Krause, *Analysis of Electric Machinery*, Mc Graw Hill, 1986.
- [Kreindler et. al., 1972] E. Kreindler y A. Jameson, *IEEE Trans. on Aut. Control*, Vol. 17, pp. 147, 1972.
- [Krener, 1992] A.J. Krener, "Optimal Model Matching Controllers for Linear and Nonlinear Systems", *Proc. NOLCOS-IFAC*, Bordeaux, Francia, 1992.
- [Krzeminski, 1987] Z. Krzeminski, "Nonlinear control of induction motor", *10th IFAC World Congress*, Munich, 1987, pp. 349-354.
- [Leonhard, 1990] W. Leonhard, *Control of Electrical Drives*, Springer-Verlag, 1990.
- [Liu et. al., 1989] X. Liu, G. Verghese, J. Lang y M. Onder, "Generalizing the Blondel-Park Transformation of Electrical Machines: Necessary and Sufficient Conditions", *IEEE Trans. on Circuits and Syst.*, Vol. 36, No. 8, August, 1989.

- [Marino et. al., 1993] R. Marino, S. Peresada y P. Valigi, "Adaptive partial feedback linearization of induction motors", *IEEE Trans. Aut. Control*, 38, 2, 1993, pp. 208-221.
- [Meisel, 1966] J. Meisel, **Principles of Electromechanical-Energy Conversion**, *Mc Graw-Hill*, 1966.
- [Nijmeijer et. al., 1990] H. Nijmeijer y A. Van der Schaft, **Nonlinear Dynamical Control Systems**, *Springer Verlag*, 1990.
- [Ortega/Spong, 1989] Ortega, R., y M. Spong, "Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial", *Automatica*, Vol. 25, No.6, pp. 877-888, 1989.
- [Ortega/Espinosa, 1991a] R. Ortega y G. Espinosa, "A controller design methodology for systems with physical structures: Application to Induction Motors", *Proc. IEEE CDC*, Brighton, UK, Dec. 1991.
- [Ortega/Espinosa, 1991b] R. Ortega y G. Espinosa, "Passivity properties of induction motors: Application to flux observer design", *1991 IAS annual tech. conf.*, Michigan, USA, 1991.
- [Ortega et. al., 1992] R. Ortega, C. Canudas y S. Seleme, "Nonlinear Control of Induction Motors: Torque Tracking with Unknown Load Disturbances", *Proc. ACC*, Chicago, USA, June 1992. (Also to appear at *IEEE TAC*).
- [Ortega/Espinosa, 1993] R. Ortega y G. Espinosa, "Torque regulation for induction motors", *Automatica*, Vol. 29, No. 3, 1993, pp. 621-633.
- [Pomet et. al., 1989] J. Pomet y L. Praly, "Adaptive Nonlinear Regulation: Equation error from the Lyapunov equation", *IEEE 28th Conf. on Dec. and Contr.*, Tampa Florida, USA, 1989.
- [Slotine/Li, 1987] J. Slotine y W. Li, "On the adaptive control of Robot Manipulators", *Int. J. Robotics Res.*, 6(3), pp. 49-59, 1987.
- [Spong et. al., 1989] M. Spong. y M. Vidyasagar, **Robot dynamics and control**, *John Wiley and Sons*, 1989.
- [Takegaki et. al., 1981] M. Takegaki y S. Arimoto, "A new feedback method for dynamic control of manipulators", *ASME J. Dyn Syst. Meas. Cont.*, Vol. 102, 1981.

[Utkin, 1993]

Utkin, V. (1993), "Sliding mode control design principles and applications to electric drives", *IEEE Trans Ind. Electr.*, 40, 1, pp. 23-36, Feb. 1993.

[Wellstead, 1979]

P.E. Wellstead, **Introduction to Physical System Modelling**, *Academic Press*, 1979.