



40
2e5

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

EL ENIGMA DE LOS NEUTRINOS SOLARES

TESIS

que para obtener el título de

FISICO

presenta

GREGORIO MOTA PORRAS



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	pag.
- INTRODUCCION	
1. El Neutrino.	1
2. Masa del Neutrino.	2
3. Los Neutrinos solares.	4
4. El problema de los Neutrinos solares.	8
5. Experimentos activos y sus resultados.	9

CAPITULO I : CONCEPTOS BASICOS

▶ La ecuación de Dirac.	13
1.1 Forma covariante de la ecuación de Dirac y matrices γ de Dirac.	15
1.2 Corriente conservada y la ecuación adjunta.	16
1.3 Solución de la ecuación de Dirac para partícula libre, utilizando la representación quiral.	17

CAPITULO II : ANALISIS DE LAS OSCILACIONES DE NEUTRINOS EN MATERIA.

▶ Introducción.	26
2.1 Ecuación de Dirac en un medio.	27
2.2 Relación de dispersión.	31
2.2.1 Relación de dispersión para un medio material en reposo.	31
2.2.2 Relación de dispersión para un medio material con deriva de electrones.	41
2.3 Deducción de la ecuación de Wolfenstein (transformación $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$).	43

2.3.1 Hamiltoniano dependiente del tiempo (introducción al método).	43
2.3.2 Deducción de la ecuación de Wolfenstein (transformación $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$).	44
2.4 Conversión resonante de Neutrinos (posible explicación del «enigma» de los Neutrinos solares).	49

CAPITULO III : CONCLUSIONES.

▶ Conclusiones.	54
-----------------	----

REFERENCIAS

Referencias.	56
--------------	----

1. EL NEUTRINO.

El neutrino es una de las partículas fundamentales de la naturaleza, que ha sido además de gran importancia en la Física Nuclear. Propuesto por Wolfgang Pauli e incorporada por E. Fermi en su teoría de las interacciones débiles (Teoría del decaimiento- β , 1934), al neutrino se le habían atribuido propiedades tales que su detección parecía una empresa imposible. De masa muy pequeña, inferior a la del electrón y quizá incluso nula, el neutrino debía tener espín $1/2$ y, sobre todo, interactuar muy poco con la materia. Muy poco quería decir, por ejemplo, que un neutrino, proveniente de una desintegración, debería tener un recorrido libre medio igual a "una capa de agua que fuera mil millones de veces más espesa que la distancia Tierra-Sol" (Bruno Pontecorvo). Un poder tal de penetración es inconcebible, y dejaba albergar pocas esperanzas para un eventual intento de detección. El neutrino, en efecto, no tiene interacción fuerte y, no teniendo carga eléctrica (como su nombre lo indica), no ioniza las moléculas de los cuerpos que atraviesa (lo que sería, en tal caso, una forma de interactuar con ellas). Sólo actúa mediante la interacción débil. La única forma de detectarlo es observando los productos de sus raras colisiones con la materia, a condición de que éstas si tengan manifestaciones electromagnéticas. Es por lo tanto necesario identificar los productos de las reacciones nucleares que provoque [1].

Pese a su intangibilidad, los neutrinos gozan de un prestigio inigualado por ninguna otra partícula conocida, puesto que en realidad junto con los fotones son los objetos más comunes en el Universo, superando en número a los electrones y protones en la proporción de mil millones a uno. De hecho el Universo es en realidad un mar de neutrinos, salpicado raramente por impurezas tales como átomos. Es incluso posible que el peso total de los neutrinos supere al de las estrellas y que, en consecuencia, dominen la gravedad del cosmos [2].

El Neutrino fue finalmente descubierto en 1960 por Reines y Cowan. Es en esta década cuando se descubre que hay más de un tipo de neutrino, sin embargo, actualmente se sabe que los neutrinos existen en por lo menos tres variedades, o "sabores" a saber: En primer lugar, se halla el tipo que se crea junto con el electrón cuando un neutrón se desintegra (decaimiento nuclear- β); pero hay también otro tipo que aparece durante los decaimientos de muones y piones. Cada tipo de neutrino se hace acompañar de su mismo leptón cargado; así hay un "neutrino electrón" (ν_e) y "neutrino muon" (ν_μ). Parece entonces inevitable que haya un tercer tipo de neutrino que acompañe al taón, conocido como "neutrino taónico" ν_τ (el cual ha sido detectado indirectamente en los experimentos), formando en total tres especies diferentes de neutrinos. Naturalmente, cada tipo de leptón tiene su antipartícula, lo cual trae como consecuencia que también existan tres antineutrinos, $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, y $\bar{\nu}_\tau$. [3]

2. MASA DEL NEUTRINO.

La pregunta acerca de qué masa es la que se debe asignar al neutrino fue formulada por vez primera por Enrico Fermi en su primer artículo sobre la teoría del decaimiento $-\beta$. En experimentos de años recientes llevados a cabo con la finalidad de determinar la masa del neutrino se concentraron sobre la emisión del $\bar{\nu}_e$ en el decaimiento $-\beta$ del tritio



debido a que este decaimiento tiene un umbral bajo de energía de 18.6 KeV. En base a una serie de experimentos llevados a cabo en Moscú, Valentin A. Lubimov y sus colaboradores aseguraron medir una masa para el neutrino del orden de 30 eV. Una masa de este valor sería suficiente para abrumar gravitatoriamente al Universo y causar un colapso futuro. Por tanto, aunque parece ser la más inofensiva y efímera de las partículas, el humilde neutrino puede

contener el poder de la aniquilación cósmica total. Sin embargo el resultado anterior no ha sido corroborado por experimentos posteriores. El resultado más reciente obtenido por el grupo de Los Alamos pone una cota superior de 9 eV. para m_{ν} ($m_{\nu} < 9$ eV.). Mientras que para los otros dos tipos de neutrinos se conocen las siguientes cotas experimentales:

$$m_{\nu\mu} \leq 250 \text{ KeV.}$$

$$m_{\nu\tau} \leq 35 \text{ MeV.}$$

Desde las pasadas dos décadas, el neutrino se ha constituido en una de las principales pruebas empleadas en el estudio de las interacciones débiles. Estos estudios han estado en excelente acuerdo con el modelo estandar de la teoría electro-débil de Weinberg, Salam y Glashow. En este modelo el neutrino interactúa débilmente, es una partícula de espín 1/2 la cual se supone tiene una masa nula y un número leptónico definido. Sin embargo bien puede ser que la masa del neutrino no sea nula. En la mayoría de las extensiones del modelo estandar - en particular las Teorías de Gran Unificación (GUT) - se predicen neutrinos másivos, aunque en la mayoría de los casos los valores de las masas son pequeñísimos. Uno de los pocos métodos que podrían detectar tales masas es mediante el proceso mecánico-cuántico denominado OSCILACION DEL NEUTRINO, en el cual los neutrinos de un sabor (tipo) se transforman en otro. Por ejemplo ν_e , se convierte en ν_{μ} o ν_{τ} .

La explicación más popular de la ligereza de los neutrinos relativa a leptones cargados y Cuarks, empieza por considerar a ésta partícula como un neutrino de Dirac (cuatro estados: ν^D y $\bar{\nu}^D$, cada uno con dos helicidades) divididos en dos neutrinos Majorana (de dos estados cada uno). Uno de estos neutrinos Majorana, ν , es ligero y es identificado como el neutrino conocido, mientras que el otro, N , es pesado. En este esquema, el cual es debido a Gell-Mann-Ramond-Slansky, Yanagida, y Mohapatra-Senjanović, es natural que las masas de ν y N esten relacionadas por

$$M_\nu M_\nu = M_a^2,$$

(2.2)

donde M_a es la masa del Cuarc tónico o la masa del leptón cargado. Además, M_ν está relacionado a la escala de rompimiento de la simetría de Gran Unificación, que es muy grande. De esta manera podemos concluir que $M_\nu \ll M_a$.

Usando la relación (2.2), podemos dar algunos órdenes de magnitud; si $M_\nu = M_{\text{MUT}} = 10^{14}$ GeV y $M_a = 1$ GeV entonces resulta que $M_\nu = 10^{-5}$ eV; Es decir, podemos tener masas de neutrinos mucho más pequeñas en comparación con las medidas exploradas hasta el momento. Si $M_\nu = 100$ GeV y $M_a = 1$ MeV obtenemos una masa M_ν del orden de magnitud de los actuales límites experimentales.

Recordemos que la masa del neutrino puede tener consecuencias fundamentales: si la masa del neutrino es del orden de 10 eV y su vida media es comparable con la edad del Universo, los neutrinos podrían dominar la densidad de masa del Universo.

Una importante característica de todas las teorías de la masa del neutrino es la mezcla de neutrinos. Dicha mezcla, da lugar al fenómeno de oscilaciones; en el cual por ejemplo, un rayo de partículas ν_e es parcialmente transformado en partículas ν_μ o ν_τ al propagarse a través del vacío o de un medio.

3. LOS NEUTRINOS SOLARES.

El Sol es considerado como una fuente copiosa de neutrinos, se considera que aproximadamente el 2% de su energía es emitida en tales partículas. Se ha pensado desde 1930 que la energía emitida por el Sol tiene sus orígenes en reacciones termonucleares que suceden cerca del centro del Sol. Es importante saber que a últimas fechas, como resultado del experimento Kamiokande, se estableció clara evidencia de que el Sol emite neutrinos - lo cual constituyó la primera evidencia experimental de que la energía del Sol tiene sus orígenes en reacciones nucleares [3]. La mayor parte de los productos de las reacciones nucleares (fotones, electrones, protones, neutrones, positrones), son detenidos dentro de la misma materia solar, transformando su energía cinética

en calor que mantiene la temperatura del Sol y alimenta su intensa radiación electromagnética (luz y calor). Solo los neutrinos, en una gran proporción, pueden atravesar sin impedimento inmensos espesores de materia (el radio del Sol es de 700,000 Km). Diseminados hacia el espacio, algunos de ellos llegan a la Tierra, a razón de unos 10^{11} neutrinos por centímetro cuadrado y por segundo. La mayoría atraviesa nuestro planeta y continúa su camino. Pero si fuera posible detectar incluso una ínfima proporción, se podría verificar entonces la validez de los modelos que describen al Sol [1].

Ahora bien, ¿ Qué reacciones nucleares producen neutrinos solares ? ¿ Cuántos neutrinos son esperados ? ¿Cuál es la forma del espectro de energía del neutrino ?

Son ocho las principales reacciones nucleares o decaimientos que producen neutrinos solares; de las cuales seis crean neutrinos con espectro de energía continuo y las otras dos (pep y Be^7) producen neutrinos con espectro de líneas. Los neutrinos provenientes de pp son más numerosos pues tienen un flujo mayor en un orden de magnitud comparados con los de cualquier otra fuente (reacción) nuclear, pero tienen baja energía y por lo tanto son difíciles de detectar. Los neutrinos B^8 son energéticos, pero raros (ver tabla 1 y fig. 1) [4].

En el modelo solar estándar, la energía es generada en el interior del Sol por procesos nucleares que como proceso global, fusionan cuatro protones en un núcleo de helio. La tabla No.1, muestra la cadena de reacciones, y la figura No.1, muestra el espectro de energía del neutrino resultante. Primeramente se tiene la reacción que fusiona dos protones para formar un deuterón. Esta reacción genera un gran flujo de neutrinos con un espectro continuo terminando en 420 KeV. El deuterón reacciona rápidamente para producir He^3 , después del cual la cadena se divide en dos partes. La primera de interés produce Be^7 . El Be^7 puede capturar un electrón, produciendo un espectro de líneas de neutrinos con 90% de intensidad a 862 KeV. Sin embargo, la más importante para la observación es la muy rara cadena B^8 por que su decaimiento β produce neutrinos con energías superiores a 15 MeV, los cuales son más fáciles de detectar. Algunos

neutrinos, también son esperados de reacciones nucleares de los elementos más pesados incluyendo el carbono, nitrógeno y oxígeno en el Sol, pero de estos se espera una contribución menor [3].

Tabla I

Cadenas de reacciones nucleares Protón-Protón en el Sol		
Cadena I	Cadena II	Cadena III
$p+p \rightarrow d+e^+ + \nu_e$ (99.75%)		
$p+e^- + p \rightarrow d + \nu_e$ (0.25%)		
↓		
$d+p \rightarrow He^3 + \gamma$		
$He^3 + He^3 \rightarrow He^4 + p + p$ (85%)	$He^3 + He^4 \rightarrow Be^7 + \gamma$ (15%)	
	↓	
	$Be^7 + e^- \rightarrow Li^7 + \nu_e$ (99%)	$Be^7 + p \rightarrow B^8 + \gamma$ (0.1%)
	↓	↓
	$Li^7 + p \rightarrow He^4 + He^4$	$B^8 \rightarrow Be^{8*} + e^+ + \nu_e$
		↓
		$Be^{8*} \rightarrow He^4 + He^4$

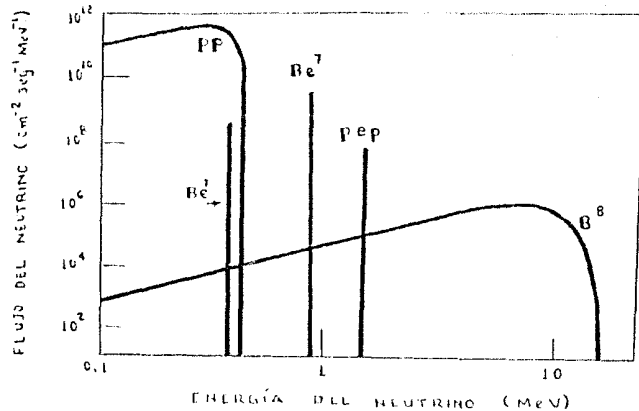


Fig.1. Espectro del Neutrino Solar.- Distribución de energía del flujo de neutrinos solares para diversas reacciones. Los flujos de fuentes continuas son dados en unidades de número por cm^2 por segundo por MeV a una distancia que coincide con la distancia promedio Sol - Tierra.

4. EL PROBLEMA DE LOS NEUTRINOS SOLARES.

En base a elaborados modelos del Sol se puede predecir el flujo de neutrinos que se debería de detectar en la Tierra. Los experimentos que se han llevado a cabo hasta ahora han detectado mucho menos neutrinos que los que teóricamente se esperaban. Este es el llamado problema del neutrino solar [5].

Lógicamente, el problema debe de estar en uno de los siguientes aspectos: (1) La detección de los neutrinos podría ser defectuosa; (2) el cálculo del flujo de neutrinos esperado podría estar equivocado, debido a alguna falta en el modelo solar estandar; (3) algo podría estar haciendo falta en nuestro entendimiento de las propiedades del neutrino.

Aun cuando en un principio todas estas alternativas parecieron igualmente probables, en la actualidad pareciera que la primera alternativa debe ser excluida ya que varios experimentos han sido llevados a cabo, empleando diferentes técnicas, en todos ellos se encontraron menos neutrinos que los esperados. En cuanto a la

segunda alternativa, lo que podemos decir es que John Bahcall y sus colaboradores [4] han checado y mejorado sus cálculos iniciados hace 30 años y en las estimaciones de sus errores, estos se han ido reduciendo progresivamente. Además de que sus resultados coinciden con los obtenidos más recientemente por otros grupos. Así mismo hay que tomar en cuenta que basado solamente en cambios al modelo solar no se puede explicar la discrepancia entre la razón de neutrinos detectados en diferentes experimentos.

Por último, en cuanto se refiere a una explicación basada en la alteración de las propiedades de neutrinos; la más atractiva requeriría que los neutrinos fueran masivos pudiendo dar lugar a oscilaciones de neutrinos. De acuerdo a esta explicación parte de los ν_e producidos en el Sol se transforman en ν_μ o ν_τ , los cuales no son detectados en los experimentos.

5. EXPERIMENTOS ACTIVOS Y SUS RESULTADOS [3].

Muchos experimentos infructuosos para detectar oscilaciones de neutrinos se han llevado a cabo mediante neutrinos producidos por fuentes terrestres o reactores. Es importante considerar que si el Sol es considerado como una fuente de neutrinos, con la investigación de los mismos es posible ampliar el estudio de oscilaciones para distancias mucho mayores. Además el medio material del Sol puede acrecentar el efecto de las oscilaciones de neutrinos en su recorrido hacia el exterior del mismo. En general, los neutrinos solares permiten el estudio de las propiedades del neutrino que son difíciles o imposibles de estudiar mediante fuentes terrestres.

Recientemente se han llevado a cabo varios experimentos para detectar neutrinos solares; entre estos experimentos podemos mencionar algunos que se destacan como los más importantes y que son los siguientes

A). El Experimento Cl³⁷

En 1970 Raymond Davis y sus colaboradores ponen en marcha su experimento designado para detectar neutrinos del Sol. Dicho

experimento consistente en un gran monitor conocido como "detector Cl^{37} " formado por un tanque de 380,000 litros de percloroetileno (C_2Cl_4), que está localizado a 4850 pies de profundidad en una mina de oro en el sur de Dakota. La idea de este experimento es detectar neutrinos solares a través de la reacción inversa del decaimiento- β



en la cual se tiene un umbral de energía de 0.81 MeV; el blanco del núcleo Cl^{37} tiene una abundancia natural de 24% de cloro. El núcleo de Ar^{37} producido en la reacción es radiactivo y decae con una vida media de 31 días. La detección del decaimiento del Ar^{37} es la evidencia de que la reacción (5.A.1) ocurre.

El resultado experimental, en promedio de 1970 a 1985, es de 0.472 ± 0.037 átomos de Ar^{37} producidos por día en el detector. La importancia de este resultado, es que es significativamente bajo en comparación con el estimado basado en los modelos convencionales de la evolución estelar. En términos de unidades de neutrino solar, donde $1 \text{ SNU} = 10^{-36}$ átom / capturados / día, la razón experimental es $2.1 \pm 0.3 \text{ SNU}$, y la razón predicha por el modelo solar es $7.9 \pm 1.5 \text{ SNU}$. Esta discrepancia entre el valor obtenido experimentalmente y el valor del modelo solar estandar es conocida como el "enigma de los neutrinos solares".

B). Kamiokande II.

Durante 15 años no existió ningún experimento que confirmara o extendiera el resultado del experimento Cl^{37} . Fue hasta principios de 1986 que hace su aparición el detector conocido como Kamiokande II. El Kamiokande fue diseñado originalmente para detectar el decaimiento del protón. Este detector localizado en Japón esta diseñado para detectar luz Cerenkov emitida por los electrones que son dispersados por los neutrinos. La reacción para la cual se "observan" los neutrinos es



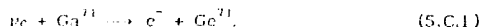
esta reacción es sensible a neutrinos con energía mayor 5 MeV. La detección a través de la luz Cerenkov proporciona información a cerca de la dirección del neutrino incidente. La dirección del electrón esta correlacionada con la dirección de la Tierra a el Sol con una raíz - cuadrática - media de resolución de 28° para electrones de momento 10 MeV/c; la resolución es limitada por el esparsamiento múltiple del electrón por el agua en el detector.

El detector Kamiokande II es un experimento de "cuenta directa", diferente al detector pasivo Cl³⁷. Recientemente el grupo de Kamiokande II presentó sus primeros resultados. Por 450 días de operación, desde enero de 1987 a mayo de 1988, el número detectado de neutrinos fue $0.46 \pm 0.13 \pm 0.08$ veces el número esperado de acuerdo al modelo solar. Con esto, dicho experimento demostró por vez primera, a través de la propiedad direccional, que los neutrinos con energías mayores de 9 MeV son emitidos por el Sol, además de corroborar la existencia del problema de falta de neutrinos solares.

C). Futuros experimentos.

El experimento Kamiokande es sensible sólo aun pequeño porcentaje de los neutrinos esperados en la reacción B⁸ en el Sol, de manera que uno debe ser muy cauteloso para poder interpretar el resultado. Los detectores Cl³⁷ y Kamiokande son ambos experimentos sensibles a neutrinos de energía relativamente alta.

Actualmente existen dos experimentos que se están llevando a cabo y cuyos resultados serán de gran interés. Ambos experimentos basados en métodos radioquímicos utilizan Ga⁷¹. La reacción de detección del neutrino es



El umbral de energía para esta reacción es de 0.233 MeV, lo cual la hace muy interesante ya que podrá detectar neutrinos provenientes de la reacción pp. El experimento SAGE se está llevando a cabo en Rusia, mientras que el GALLEX se realiza en Italia. Existen pues, muchas oportunidades para explorar los neutrinos solares. Son todos estos detallados estudios cuantitativos del espectro de neutrinos

los que nos proporcionan una extraordinaria técnica para estudiar las propiedades del neutrino; tales como su masa así como para aprender más acerca del interior del Sol.

En el presente trabajo utilizamos métodos generales de la Mecánica Cuántica no relativista y relativista, para desarrollar técnicas que sirvan para atacar el problema de las oscilaciones de neutrinos. En particular nos interesamos en entender las oscilaciones de neutrinos en un medio material. Los temas tratados en este trabajo incluyen en el primer capítulo, el desarrollo de los principios de la teoría de la ecuación de Dirac (derivación covariante, solución para partícula libre, etc.), que se utilizarán después para la deducción de la ecuación de evolución para las oscilaciones de neutrinos en un medio material (ecuación de Wolfenstein). En el segundo capítulo se aprovecha el formalismo planteado en el primer capítulo para deducir la ecuación de Dirac en un medio material (ecuación de propagación del ν_e en materia). Apartir de esta ecuación se estudia la manera como las interacciones con materia afectan a la relación de dispersión (espectro de energía), analizándose en primer lugar la situación en la que el medio material se encuentra en reposo y segundo para un medio material con deriva de electrones. Así mismo, aprovechando el formalismo del método de Hamiltonianos dependientes del tiempo se deduce la ecuación de Wolfenstein (ecuación de evolución en un medio), tanto para una aproximación no relativista, como también para una aproximación relativista; y en en la parte final de éste capítulo se discute brevemente la conversión resonante de neutrinos en un medio material. Finalmente en el tercer capítulo se presenta de manera general algunas discusiones, así como también conclusiones del problema estudiado.

CAPITULO I
CONCEPTOS BASICOS.

LA ECUACION DE DIRAC.

Por algún tiempo se consideró a la ecuación de Klein-Gordon $(-\partial^2\phi/\partial t^2 + \nabla^2\phi = m^2\phi)$ como la única generalización relativista de la ecuación de Schrodinger, hasta que Dirac descubrió otra alternativa. Su meta fue escribir una ecuación la cual, a diferencia de la ecuación de Klein-Gordon, fuera lineal en $\partial/\partial t$. A fin de ser covariante, entonces también tendría que ser lineal en ∇ . Una de las motivaciones que perseguía Dirac era encontrar una ecuación que no tuviera problemas de densidades de probabilidad negativas. La ecuación de Dirac tiene la forma [6]

$$H \Psi = (\vec{\alpha} \vec{P} + \beta m) \Psi. \quad (1.1)$$

Como es sabido la ecuación de Dirac describe partículas y antipartículas con espín 1/2. El impacto histórico de la ecuación de Dirac fue muy importante y va más allá de proporcionar una ecuación relativista para estudiar los fermiones, pues ha influido de manera definitiva en el desarrollo general de la teoría cuántica del campo.

En la ecuación (1.1), los cuatro coeficientes β y α_i ($i=1,2,3$) son determinados por el requerimiento de que una partícula libre satisfaga la relación de energía-momento $E^2 - P^2 = m^2$,

$$H^2 \Psi = (P^2 + m^2) \Psi. \quad (1.2)$$

Utilizando la definición para H dada en (1.1) encontramos que

$$H^2 \Psi = (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) \Psi$$

$$= \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{i>j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m + \beta^2 m^2.$$

Comparando con (1.2), vemos que las matrices α y β obedecen el álgebra

$$\begin{aligned}\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij} \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \\ \alpha_i^2 = \beta^2 &= 1.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Debido a que los coeficientes α y β no conmutan, no pueden ser simples números, y por tanto los consideraremos como matrices operando sobre una función de onda Ψ , la cual es un vector columna.

La dimensionalidad más baja de las matrices que satisfacen todos los requerimientos es 4×4 . La elección de las cuatro matrices $(\vec{\alpha}, \beta)$ no es única. La representación Pauli-Dirac es la más frecuentemente usada:

$$\vec{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}_i \\ \vec{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

donde I denota la matriz unidad 2×2 (la cual es frecuentemente escrita como 1) y donde σ_i son las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Otra posible representación, es la representación quirál:

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma}_i \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Sin embargo, se debe tener que los resultados con interpretación física son independientes de la representación elegida. Ciertamente, toda la física depende solamente de las propiedades enlistadas en (1.3). De hecho en la sección 1.3 presentamos las soluciones explícitas de la ecuación de Dirac usando una representación particular, la representación quirál.

Un vector columna Ψ con cuatro componentes el cual satisface la ecuación de Dirac (1.1) es llamado un espinor de Dirac. Para

el caso de una partícula libre masiva existen cuatro soluciones independientes que representan partículas y antipartículas con dos posibles orientaciones de espín.

1.1. FORMA COVARIANTE DE LA ECUACION DE DIRAC. MATRICES- γ DE DIRAC.

Multiplicando a la ecuación de Dirac, (1.1) por β ($= \gamma^0$) por la izquierda, obtenemos

$$i\beta \partial\Psi/\partial t = -i\beta\vec{\alpha} \cdot \nabla\Psi + m\Psi ,$$

la cual puede ser escrita como

$$(i\gamma^\mu \gamma_\mu - m) \Psi = 0 , \quad (1.7)$$

donde se utiliza la convención de suma de $\mu = 0$ a $\mu = 3$ cuando aparecen índices griegos repetidos y donde hemos introducido las cuatro matrices- γ de Dirac

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\vec{\alpha}) . \quad (1.8)$$

La ecuación (1.7) es llamada la forma covariante de la ecuación de Dirac. Esperaremos hasta la sección (1.2) para entender el sentido en el cual las matrices 4×4 , $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ son consideradas como un 4-vector. La ecuación de Dirac representa cuatro ecuaciones diferenciales las cuales acoplan componentes del vector columna Ψ :

$$\sum_{k=1}^4 \left(\sum_{\mu} i(\gamma^\mu)_{jk} \partial_\mu - m \delta_{jk} \right) \Psi_k = 0 .$$

Usando (1.3) y (1.8), se demuestra directamente que las matrices- γ de Dirac satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} . \quad (1.9)$$

Además, debido a que $\gamma^0 = \beta$, tenemos:

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 , \quad (\gamma^0)^2 = 1 \quad (1.10)$$

$$y \quad \left. \begin{aligned} \gamma^{k\dagger} &= (\beta\alpha^k)^\dagger = \alpha^k\beta = -\gamma^k \\ (\gamma^k)^2 &= \beta\alpha^k\beta\alpha^k = -1 \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3. \quad (1.11)$$

Notese que los resultados de la conjugación hermitiana pueden ser resumidos por

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

1.2. CORRIENTE CONSERVADA Y LA ECUACION ADJUNTA.[6]

Con objeto de construir la corriente conservada, comencemos considerando la ecuación de Dirac escrita como

$$i\gamma^0 \partial\Psi/\partial t + i\gamma^k \partial\Psi/\partial x^k - m\Psi = 0, \quad (1.12)$$

donde índices repetidos implican una suma de $k=1$, a $k=3$. El hermitiano conjugado de esta ecuación nos da

$$-i \partial\Psi^\dagger/\partial t \gamma^0 - i \partial\Psi^\dagger/\partial t (-\gamma^k) - m\Psi^\dagger = 0. \quad (1.13)$$

Para restituir la forma covariante necesitamos eliminar el signo menos que aparece multiplicando a γ^k dejando el primer término inalterado. Esto puede lograrse multiplicando la ecuación (1.13) por la derecha por γ^0 . Tomando en cuenta que $\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k\gamma^0$ e introduciendo el espinor adjunto

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0, \quad (1.14)$$

obtenemos

$$i \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0. \quad (1.15)$$

Podemos ahora derivar la ecuación de continuidad, $\partial_\mu j^\mu = 0$. Para ello multiplicamos (1.7) del lado izquierdo por $\bar{\Psi}$ y (1.15) del lado derecho por Ψ , y sumando. Encontramos que

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi = \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = 0.$$

Así, vemos que la corriente

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi ,$$

satisface la ecuación de continuidad. Escribiendo $j^\mu = (\rho, \vec{J})$, podemos identificar ρ y \vec{J} con las densidades de probabilidad y el flujo. La densidad de probabilidad

$$\rho \equiv j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{l=1}^4 |\psi_l|^2 \quad (1.16)$$

es ahora positiva definida.

Podemos redefinir j^μ si multiplicamos la expresión anterior por $-c$

$$j^\mu = -c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi , \quad (1.17)$$

y ahora consideramos a j^μ como la densidad de corriente de electrones.

Para que la ecuación de continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0$ sea covariante es necesario que j^μ se transforme como un 4-vector. Esto desde luego puede ser probado; ya que de hecho la cantidad $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ se comporta como un 4-vector.

1.3. SOLUCION DE LA ECUACION DE DIRAC PARA PARTICULA-LIBRE, UTILIZANDO LA REPRESENTACION QUIRAL.

Para una posterior discusión de la propagación del neutrino (masivo, o en el caso de masa nula) en un medio resulta conveniente presentar las soluciones de partícula-libre en la base quiral.

Para una partícula libre que se propaga en la dirección z , la ecuación de Dirac admite soluciones del tipo

$$\Psi = \exp (iPz -Et)U , \quad (1.18)$$

donde P y E son el momento y la energía de la partícula y U es un espinor de cuatro componentes (4-espinor) independiente de z y de t . Sustituyendo (1.18) en (1.7), obtenemos

$$(E\gamma^0 - \gamma^3 P - m)U = 0, \quad (1.19)$$

o bien, multiplicando en ambos miembros por γ^0 y reordenando, tenemos

$$E U = (\alpha^3 P + m \gamma^0) U, \quad (1.20)$$

que representa una ecuación de eigenvalores. Por tanto tenemos cuatro soluciones independientes de esta ecuación, dos con $E > 0$ y dos con $E < 0$. Esto es particularmente fácil de ver en la representación quiral de α y β .

Luego entonces (1.20) se convierte, usando (1.6), en

$$\begin{pmatrix} E-P & 0 & m & 0 \\ 0 & E+P & 0 & m \\ m & 0 & E+P & 0 \\ 0 & m & 0 & E-P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.21)$$

Estas ecuaciones tienen soluciones no nulas solamente si el determinante de los coeficientes se anula, esto es,

$$\det \begin{pmatrix} E-P & 0 & m & 0 \\ 0 & E+P & 0 & m \\ m & 0 & E+P & 0 \\ 0 & m & 0 & E-P \end{pmatrix} = 0, \quad (1.22)$$

de donde encontramos la relación de dispersión

$$E = \pm [P^2 + m^2]^{1/2} \quad (1.23)$$

para la energía de la partícula. Los dos signos en (1.23) corresponden a las dos clases de solución de la ecuación de Dirac. De esta manera llamamos a las soluciones $E(+)$ las soluciones positivas de la ecuación de Dirac de una partícula libre y las soluciones $E(-)$ las soluciones negativas. Algunas veces las soluciones positivas son llamadas las soluciones correspondientes a "estados con energías positivas" y las soluciones negativas correspondientes a "estados con energías negativas". Esta nomenclatura fue introducida por Dirac.[7]

Como se mencionó anteriormente existen 4 soluciones

independientes a la ecuación de Dirac, dos de energía positiva y dos de energía negativa. Para clasificar estas soluciones, degeneradas en energía, es conveniente considerar el operador de helicidad h , que se define como

$$h = \vec{\Sigma} \cdot \hat{p} , \quad (1.24)$$

donde $\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$ y la matriz Σ_i esta dada por

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} .$$

En general, si bien las soluciones de onda plana para partícula libre pueden ser siempre elegidas de tal manera que sean eigenfunciones de $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$, no es posible encontrar soluciones que sean eigenfunciones de $\vec{\Sigma} \cdot \hat{n}$ cuando \hat{n} es un vector unitario arbitrario. Esto surge del hecho de que el operador $\vec{\Sigma} \cdot \hat{n}$ no conmuta con el Hamiltoniano de partícula-libre, excepto si $\hat{n} = \pm \hat{p}$. El operador de helicidad $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ puede ser diagonalizado simultáneamente con el Hamiltoniano de partícula-libre. Por tanto si se pide que U sea eigenfunción del operador de helicidad tenemos

$$(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p})U = \lambda U , \quad (1.25)$$

donde

$$\vec{\Sigma} \cdot \hat{p} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_3 & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Por tanto (1.25) se convierte en

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0 , \quad (1.26)$$

que implica

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 .$$

Por lo cual los eigenestados de helicidad λ del operador de helicidad $\hat{\Sigma} \cdot \hat{p}$ son

$$\lambda = \begin{cases} +1 & \text{referido al estado de helicidad positiva} \\ & \text{(espín paralelo al movimiento de la partícula)} \\ -1 & \text{referido al estado de helicidad negativa} \\ & \text{(espín opuesto al movimiento de la partícula).} \end{cases}$$

Por tanto, tenemos cuatro soluciones independientes para la ecuación (1.20), dos con $E > 0$ y dos $E < 0$. Cada una estas soluciones caracterizada por una helicidad definida. Las dos soluciones para $E > 0$ resultan estar dadas por:

$$\Psi_{(+1)}^{(+)} = C \exp i(Pz - Et) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (P-E)/m \\ 0 \end{pmatrix} = C \exp i(Pz - Et) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m/(E+P) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

para helicidad $+1$, y

$$\Psi_{(-1)}^{(+)} = C \exp i(Pz - Et) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -m/(E+P) \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

para helicidad -1 .

Y las soluciones para $E < 0$ por:

$$\Psi_{(+1)}^{(-)} = C \exp i(Pz - Et) \begin{pmatrix} 0 \\ (P-E)/m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C \exp i(Pz - Et) \begin{pmatrix} 0 \\ -m/(E+P) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

para helicidad -1 , y

$$\Psi_{(-1)}^{(-)} = C \exp i(Pz - Et) \begin{pmatrix} -m/(E+P) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

para helicidad +1.

Para la normalización de los espinores U, se sigue la convención

$$U^\dagger U = 1, \quad (1.31)$$

de donde se obtiene el valor de la constante de normalización C

$$C = m / [2E(E-P)]^{1/2}. \quad (1.32)$$

Cuando consideramos el límite relativista, esto es el límite cuando $m \rightarrow 0$, tenemos que de (1.27) y (1.28) las soluciones de energía positiva se reducen a:

$$\Psi_{(+1)}^{(+)} = \exp i(Pz-Et) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.27')$$

$$\Psi_{(-1)}^{(+)} = \exp i(Pz-Et) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.28')$$

respectivamente.

Discutamos ahora el concepto de quiralidad. El operador de quiralidad está dado por la matriz γ_5 . De la propiedad $\gamma_5^2 = 1$, se sigue que los posibles eigenvalores de γ_5 son +1 y -1. Estos casos se identifican con quiralidad derecha e izquierda respectivamente. Ahora nos preguntamos en qué casos se puede identificar un fermión por su quiralidad, para responder a esta pregunta consideremos el conmutador del Hamiltoniano (ec.1.1) con γ_5

$$\left[H, \gamma_5 \right] = m \left[\gamma_0, \gamma_5 \right] = -2 m \gamma_0 \gamma_5, \quad (1.33)$$

De este resultado concluimos que solo en el límite de masa nula se le puede asignar a los fermiones una quiralidad definida.

Aun cuando los neutrinos fueran masivos, el valor de m se espera que sea muy pequeño por lo cual la quiralidad resulta un concepto útil.

Como veremos más adelante cuando $m = 0$ el concepto de helicidad y quiralidad coinciden; de tal manera que un fermión de helicidad positiva (negativa) tiene quiralidad derecha (izquierda).

Con el fin de proyectar tanto como la componente izquierda, como la derecha del espínor de Dirac, consideremos los operadores

$$P_L = (1 - \gamma_5)/2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

$$P_R = (1 + \gamma_5)/2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

denominados operadores de quiralidad, los cuales tienen las propiedades apropiadas para ser considerados operadores de proyección, ya que cumplen con las siguientes propiedades:

$$\left. \begin{aligned} P_L^2 &= P_L, \\ P_R^2 &= P_R, \\ P_L + P_R &= 1, \\ P_L P_R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Para un fermión masivo, descrito, por una solución Ψ de la ecuación de Dirac, podemos definir la proyección izquierda

$$\Psi_L = P_L \Psi = \left[(1 - \gamma_5)/2 \right] \Psi, \quad (1.37)$$

y la proyección derecha

$$\Psi_R = P_R \Psi = \left[(1 + \gamma_5)/2 \right] \Psi. \quad (1.38)$$

Por lo tanto, si consideramos por ejemplo la primera solución

Ψ de la ecuación de Dirac, correspondiente a la solución de energía positiva y helicidad positiva (1.27), obtendremos las proyecciones izquierdas y derechas siguientes

$$\Psi_L^{(+)} = [(1 - \gamma_5)/2] \Psi_{(+1)}^{(+)} = -C \exp i[Pz - Et] [m/(E+P)] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

$$\Psi_R^{(+)} = [(1 + \gamma_5)/2] \Psi_{(+1)}^{(+)} = C \exp i[Pz - Et] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Notemos que estos espinores no son solución de la ecuación de Dirac cuando $m \neq 0$.

Para la solución Ψ de la ecuación de Dirac correspondiente a energía positiva y de helicidad negativa dada por la ecuación (1.28), obtendremos las proyecciones de quiralidad siguientes

$$\Psi_L^{(+)} = [(1 - \gamma_5)/2] \Psi_{(-1)}^{(+)} = -C \exp i[Pz - Et] [m/(E+P)] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

$$\Psi_L^{(+)} = [(1 + \gamma_5)/2] \Psi_{(-1)}^{(+)} = C \exp i[Pz - Et] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Por otro lado, si consideramos el límite relativista, esto es el límite cuando $m \rightarrow 0$, en las soluciones (1.39) - (1.42), observamos que sólo permanece la proyección derecha de $\Psi_{(+1)}^{(+)}$:

$$\Psi_R^{(+)} = \exp i[Pz - Et] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

y la proyección izquierda de $\Psi_{(-1)}^{(+)}$:

$$\Psi_L^{(-)} = \exp \{i(Pz - Et)\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Si comparamos las soluciones de helicidad bien definida obtenidas en (1.43) y (1.44), con las soluciones de helicidad positiva y negativa también obtenidas en el límite relativista ($m \rightarrow 0$), (1.27') y (1.28'), respectivamente, resulta que

$$\Psi_{(+1)}^{(+)} = \Psi_R^{(+)} = \exp \{i(Pz - Et)\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

y

$$\Psi_{(-1)}^{(+)} = \Psi_L^{(+)} = \exp \{i(Pz - Et)\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Por tanto, las relaciones (1.45) y (1.46) nos llevan a concluir que en el límite relativista ($m \rightarrow 0$), los conceptos de helicidad y quiralidad son equivalentes, esto es, el operador de quiralidad es igual al operador de helicidad.

En el capítulo siguiente haremos uso extenso de los conceptos expuestos en este capítulo, aplicados a las interacciones del neutrino del electrón (ν_e) en un medio material.

FALTA PAGINA 24

ANÁLISIS DE LAS OSCILACIONES DE
NEUTRINOS EN MATERIA

INTRODUCCION.

Existe gran interés en estudiar la posibilidad de que un tipo de neutrino pueda ser transformado en un neutrino de otro sabor al propagarse en el vacío. Varios experimentos han sido propuestos para investigar tales oscilaciones. Para que las oscilaciones en vacío puedan ocurrir, es necesario que al menos un neutrino tenga una masa diferente de cero y que las masas de los neutrinos no estén degeneradas, es decir sean diferentes [8].

Recientemente Mikheyev y Smirnov basados en el formalismo desarrollado por Wolfenstein puntualizaron que las oscilaciones de neutrinos asociadas con pequeñas diferencias de masa y ángulos de mezcla son apreciablemente acrecentadas cuando pasan a través de materia tan densa como la del interior del Sol u otras estrellas. En este modelo, generalmente conocido como el modelo MSW, una transformación considerada del ν_e en ν_μ o ν_τ puede ocurrir cuando el neutrino viaja desde su fuente en el interior del Sol hacia la superficie [9]. La idea básica es que las oscilaciones del neutrino son modificadas por el efecto de la materia. Los neutrinos propagandose a través de medio tienen un índice de refracción n dado por la relación [13]

$$P^2 (n - 1) = 2\pi \rho f(0) . \quad (2.1)$$

Aquí $f(0)$ es la amplitud de la dispersión elástica, a ángulo cero, debido a la interacción débil, ρ es el número de partículas en el medio por unidad de volumen y P el momento del neutrino. De acuerdo al teorema óptico la parte imaginaria del índice de refracción n está relacionado a la sección transversal total. Debido a que esta sección es tan pequeña, en general se

desprecia la parte imaginaria de n .

Si consideramos solamente dos tipos de neutrino, la masa del neutrino puede ser descrita por una matriz 2×2 con eigenvalores m_1 y m_2 y eigenvectores $|\nu_1\rangle$ y $|\nu_2\rangle$ que se relacionan con los eigenestados y eigenvectores de sabor por medio de las ecuaciones:

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle + \sin\theta |\nu_2\rangle \quad (2.2)$$

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin\theta |\nu_1\rangle + \cos\theta |\nu_2\rangle. \quad (2.3)$$

Es decir, en general los eigenestados de las interacciones débiles $|\nu_e\rangle$ y $|\nu_\mu\rangle$ no coinciden con los eigenestados de masa definida $|\nu_1\rangle$ y $|\nu_2\rangle$. Supondremos que $m_2 > m_1$, por lo tanto si la mezcla es pequeña ($\theta \ll 1$) ν_μ será un estado dominado por ν_2 y por lo tanto tal y como se espera la masa de ν_μ será mayor que la masa de ν_e .

Se han ideado varios métodos para deducir la ecuación de evolución para neutrinos que oscilan en presencia de un medio. En esta tesis obtendremos una deducción que nos parece mucho más clara y directa. Comenzamos la sección 2.1 con una discusión de la ecuación de Dirac para neutrinos que se propagan en un medio, interactuando por medio de la interacción débil. En la sección 2.2 haremos un estudio de la relación de dispersión que se obtiene para la propagación del neutrino en un medio material (en reposo y con deriva de electrones) cuando se ignora la mezcla entre neutrinos. Aprovechando resultados previos, en la sección 2.3 se introduce el problema de Hamiltonianos dependientes del tiempo con el fin de deducir la ecuación de evolución de neutrinos en un medio material (ecuación de Wolfenstein) cuando se incluye el efecto de la mezcla. Finalmente presentamos una revisión del fenómeno de resonancia del cual se hace mención en la sección 2.4.

2.1. ECUACION DE DIRAC EN UN MEDIO.

Consideremos el caso de un neutrino que se propaga a través de un medio material. Las oscilaciones de neutrinos pueden ser en general afectadas por las interacciones de los neutrinos con las partículas del medio. De acuerdo al modelo estandar dichas interacciones se deben a las corrientes cargadas (CC) mediadas por

el intercambio de una partícula W o a las corrientes neutras (CN) mediadas por el intercambio de una partícula Z. En el caso del Sol las corrientes neutras dan una contribución idéntica para los neutrinos de todos los sabores. Esto se refleja en una fase que aparece en la ecuación de evolución de los neutrinos, que resulta ser irrelevante. No obstante los electrones del medio interactúan vía la CC con los neutrinos del electrón solamente [10] (ver figura 2). Por lo tanto, la interacción efectiva relevante para neutrinos en un medio el cual contiene electrones (pero no muones), surge de la corriente cargada y se puede representar por medio del Lagrangiano [9]

$$L = \{2\}^{1/2} G_F J_{(e)}^{(\mu)} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \left[(1-\gamma_5)/2 \right] N \Psi \quad (2.4)$$

donde G_F es la constante de Fermi de las interacciones débiles, $J_{(e)}^{\mu}$ es la densidad de corriente de electrones del medio. Consideremos el caso de dos familias: ν_e y ν_x ($x = \nu$ o τ), por lo cual en el espacio de sabores Ψ corresponde a un vector de dos componentes $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_e \\ \Psi_x \end{pmatrix}$, donde cada una de estas componentes es un espinor de Dirac. N es una matriz 2x2 la cual en la base de sabor (e,x) esta dada por

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Tomando en cuenta la interacción dada por la ecuación (2.4), tenemos que la ecuación de propagación para los neutrinos esta dada por

$$(i\partial^{\mu}\partial_{\mu} - M) \Psi = \{2\}^{1/2} G_F J_{(e)}^{(\mu)} \gamma_{\mu} \left[(1-\gamma_5)/2 \right] N \Psi. \quad (2.6)$$

Consideremos inicialmente el sistema de referencia en el cual el medio material esta en reposo. Supondremos que los electrones del medio no estan polarizados y que en promedio se encuentran en reposo. Por lo tanto la densidad de corriente de electrones debe ser de la forma

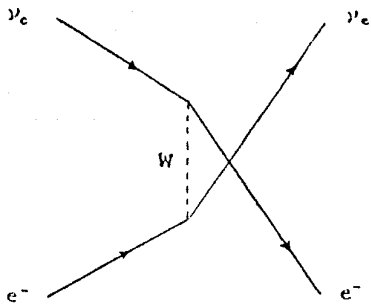


Fig. 2. Interacción $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$ via las corrientes cargadas (C.C.).

$$J_{(e)}^{(\mu)} = \rho_e \delta^{\mu 0}, \quad (2.7)$$

ρ_e es el número de electrones por unidad de volumen. Como veremos adelante, el término de interacción es equivalente a un potencial efectivo para ν_e dado por

$$A = GF \{2\}^{1/2} \rho_e. \quad (2.8)$$

El potencial es positivo, indicando que la fuerza es repulsiva.

Luego entonces tenemos que tomando en cuenta las ecuaciones (2.7) y (2.8), la ecuación de movimiento (2.6), para Ψ se puede escribir como

$$\left(i \gamma^\mu \partial_\mu - \begin{pmatrix} m_a & m_x \\ m_x & m_b \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \Psi_e \\ \Psi_x \end{pmatrix} = A \gamma_0 L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_e \\ \Psi_x \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

Con $L = \left((1-\gamma_5)/2 \right)$. La ecuación (2.9) representa la ecuación de evolución para el estado $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_e \\ \Psi_x \end{pmatrix}$. Es decir describe la evolución de los neutrinos ν_e y ν_x propagándose en un medio, tomando en cuenta la interacción de ν_e con los electrones del medio. El estado Ψ_e se presenta acoplado a Ψ_x debido al hecho de que la matriz de masa $M = \begin{pmatrix} m_a & m_x \\ m_x & m_b \end{pmatrix}$ no es diagonal en el espacio de sabores. ν_e y ν_x se relacionan con los eigenestados de masa ν_1 y ν_2 por medio de la transformación ortogonal

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix} = U(\theta) \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

En la base (ν_1, ν_2) la matriz de masa es diagonal $M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$. A partir de estos resultados se puede obtener M en la base de sabor como

$$M = \begin{pmatrix} m_a & m_x \\ m_x & m_b \end{pmatrix} = U(\theta) \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} U^\dagger(\theta) \quad (2.11)$$

con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned}
 m_a &= m_1 \cos^2 \theta + m_2 \sin^2 \theta \\
 m_b &= m_1 \sin^2 \theta + m_2 \cos^2 \theta \\
 m_x &= 1/2 \sin(2\theta) (m_2 - m_1).
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

En el caso en el que el ángulo de mezcla es cero o cuando las masas están degeneradas ($m_2 = m_1$) tenemos que m_x se anula y las ecuaciones para ν_e y ν_x se desacoplan.

Resolver la ecuación (2.9) de manera general resulta complicado. Inicialmente estudiaremos la relación de dispersión para ν_e y ν_x en el límite en que $m_x = 0$. En este caso las ecuaciones se desacoplan y están dadas por

$$\begin{aligned}
 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_a) \Psi_e &= A \gamma_0 L \Psi_e, \\
 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_b) \Psi_x &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

2.2. RELACION DE DISPERSIÓN.

Las oscilaciones en el Sol, o en un medio material, pueden ser considerablemente diferentes de las oscilaciones en vacío. La razón básica para esto, es que las interacciones en un medio modifican la relación de dispersión de las partículas que se propagan a través de él.

Las relaciones de dispersión dan la energía de una partícula en términos del momento. Nosotros por ejemplo, estamos muy familiarizados con la relación de dispersión para el caso de una partícula libre, $E^2 = \pm \{ m^2 + p^2 \}^{1/2}$, esto para el caso en vacío. En un medio, sin embargo, la relación de dispersión es más complicada.

A continuación presentamos dos casos de propagación del ν_e en un medio de densidad uniforme. Estudiaremos como las interacciones en el medio afectan la relación de dispersión, primero para cuando el medio se encuentra en reposo y segundo para un medio material con deriva de electrones.

2.2.1. RELACION DE DISPERSION PARA UN MEDIO MATERIAL EN REPOSO.

Según vimos en la sección 2.1 anterior, la ecuación de propagación para el ν_e (cuando se desprecia m_x) está dada por la

ecuación (2.13), es decir, por la relación

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\alpha)\psi_e = A\gamma_0 L\psi_e.$$

En el caso de un medio homogéneo e isotrópico, esperamos que las soluciones sean del tipo (1.18)

$$\psi_e = \exp(iPz - Et)U,$$

donde U es un 4 - espinor independiente de z y t . De donde resulta

$$(\gamma^0 E + \gamma^3 P - m\alpha - A\gamma_0 L)U = 0. \quad (2.14)$$

Multiplicando por la izquierda por γ_0 en ambos miembros obtenemos

$$EU = (m\alpha\gamma^0 - P\alpha^3 + AL)U, \quad (2.15)$$

que representa nuevamente una ecuación de eigenvalores. Por tanto deben de existir cuatro soluciones independientes de esta ecuación. Nuevamente si utilizamos la representación quirral de $\bar{\alpha}$ y β dada por la relación (1.6), tenemos que la ecuación (2.14) se convierte en

$$\begin{pmatrix} E+P & 0 & m\alpha & 0 \\ 0 & E-P & 0 & m\alpha \\ m\alpha & 0 & E-P+A & 0 \\ 0 & m\alpha & 0 & E+P-A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.16)$$

la cual como sabemos, tiene soluciones no nulas solamente si el determinante de la matriz 4×4 se anula, esto es

$$\det \begin{pmatrix} E+P & 0 & m\alpha & 0 \\ 0 & E-P & 0 & m\alpha \\ m\alpha & 0 & E-P+A & 0 \\ 0 & m\alpha & 0 & E+P-A \end{pmatrix} = 0. \quad (2.17)$$

condición a partir de la cual obtenemos finalmente la relación de dispersión

$$E = 1/2 A \pm \{ m\alpha^2 + (P \mp 1/2 A)^2 \}^{1/2}. \quad (2.18)$$

De acuerdo a la ecuación (2.8) A es proporcional a la densidad de electrones en el medio. La relación de dispersión (2.18) muestra que la presencia del medio rompe la degeneración en energía que existe para partículas y antipartículas, así como la degeneración para partículas de helicidad positiva y negativa. De hecho dependiendo de si la partícula es neutrino o antineutrino, y de la helicidad se puede verificar que la asignación para energías esta dada por

$$\begin{aligned}
 E_{\nu}^{(+)} &= 1/2 A + \left\{ m_{\nu}^2 + (P + 1/2 A)^2 \right\}^{1/2}, \\
 E_{\nu}^{(-)} &= 1/2 A + \left\{ m_{\nu}^2 + (P - 1/2 A)^2 \right\}^{1/2}, \\
 E_{\bar{\nu}}^{(-)} &= -1/2 A + \left\{ m_{\nu}^2 + (P + 1/2 A)^2 \right\}^{1/2}, \\
 E_{\bar{\nu}}^{(+)} &= -1/2 A + \left\{ m_{\nu}^2 + (P - 1/2 A)^2 \right\}^{1/2},
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde para simplificar notación consideremos que P representa $|\vec{P}|$ y $E_{\nu}^{(-)}$, $E_{\nu}^{(+)}$, ($E_{\bar{\nu}}^{(-)}$, $E_{\bar{\nu}}^{(+)}$) denotan la energía del neutrino (antineutrino) con helicidad (-) y (+), respectivamente. Que la asignación dada por (2.19) es correcta se justificará posteriormente. En el caso de las antipartículas su energía se definió como menos el valor de las correspondientes soluciones de energía negativa.

El comportamiento cualitativo de las relaciones de dispersión (2.19) se examina en el plano $E - P$, que se muestra en las figuras 3 y 4 siguientes.

De los resultados obtenidos y de las gráficas 3 y 4 se observan varios resultados interesantes. Para los neutrinos de helicidad negativa ($\nu^{(-)}$) y el antineutrino de helicidad negativa la energía es una función que crece con P . Sin embargo el espectro de energía para $E_{\nu}^{(+)}$ y $E_{\bar{\nu}}^{(-)}$ tiene un valor mínimo que corresponde a un valor del momento diferente de cero ($P = A/2$); en la región $P < A/2$ la energía decrece al aumentar P . En estos casos **casos** el punto $P = A/2$ corresponde a un punto en el cual la velocidad de grupo ($V_g = dE/dP$) se anula.

Los resultados dados en (2.19) se pueden resumir en la siguiente fórmula

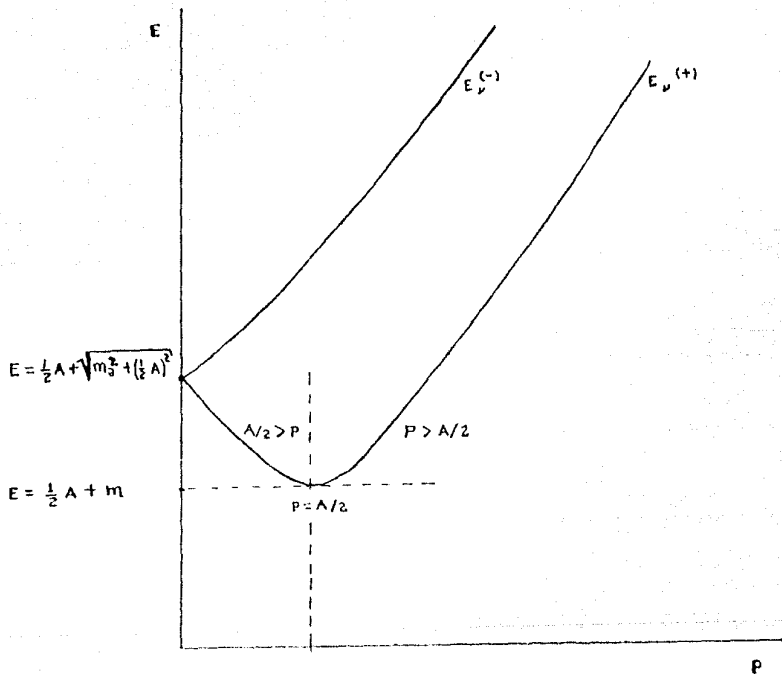


Fig. 3. Comportamiento: energía del neutrino (E) vs momento (P).

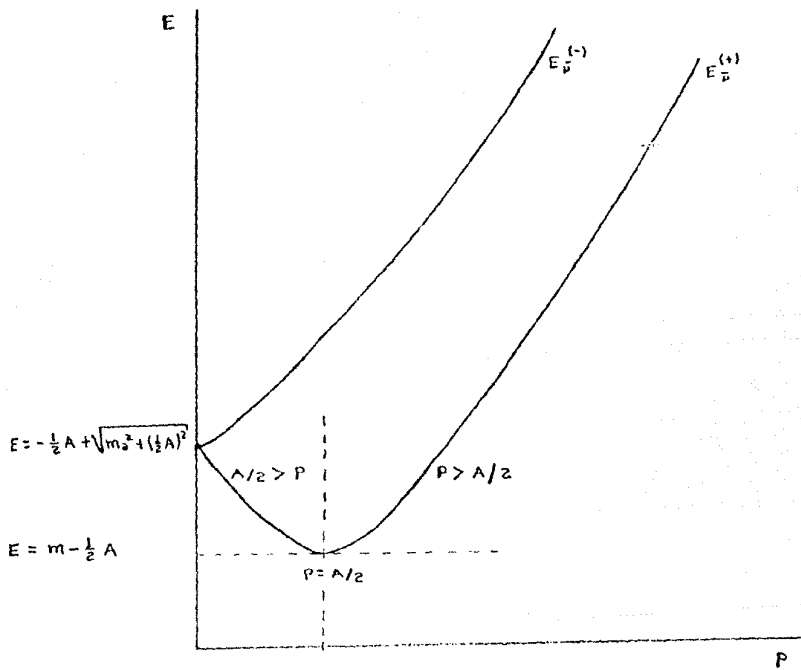


Fig. 4. Comportamiento: energía del antineutrino (E) vs momento (P)

$$E = \epsilon_{\pm} A/2 + \{ m^2 + (P - h_{\pm} A/2)^2 \}^{1/2} , \quad (2.20)$$

donde $\epsilon_{\pm} = \pm 1$ y el signo + (-) corresponde a un neutrino (antineutrino); y $h_{\pm} = \pm 1$ con el signo + (-) corresponde a helicidad positiva (negativa). En base a la última fórmula la velocidad de grupo se obtiene como:

$$V_g = dE/dP = \{ P - h_{\pm} A/2 \} / \{ m^2 + (P - h_{\pm} A/2)^2 \}^{1/2} . \quad (2.21)$$

De esta fórmula corroboramos que para los estados de helicidad positiva la velocidad de grupo se anula en $P = A/2$. La relación de dispersión obtenida para la propagación de neutrinos en un medio muestra que en general un paquete de ondas presentaría dispersión. En el límite $m = 0$, $A = 0$, la relación de dispersión se reduce en todos los casos a $E = P$, que es la relación de dispersión para un neutrino (antineutrino) libre de masa cero.

Para comprobar que la asignación dada en la ecuación (2.19) es correcta, es conveniente considerar el límite de masa cero, en este caso se obtiene:

$$\begin{aligned} E_{\nu}^{(-)} &= P + A , \\ E_{\nu}^{(+)} &= P - A , \\ E_{\nu}^{(+)} &= E_{\bar{\nu}}^{(-)} = P . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Debido a que en este límite los operadores de quiralidad y helicidad coinciden es claro que la relación de dispersión para $\nu^{(-)}$ y $\bar{\nu}^{(-)}$ no son afectados por el medio ya que la interacción sólo actúa sobre neutrinos izquierdos y antineutrinos derechos. En cambio cuando la masa es diferente de cero las relaciones de dispersión para neutrinos y antineutrinos de las dos helicidad son afectadas por el efecto del medio.

Ahora podemos explicar por que el efecto del medio rompe completamente la degeneración del espectro. La diferencia de energía entre neutrino y antineutrino se debe al hecho de que si el medio contiene electrones pero no positrones, la invariancia ante la operación de conjugación de carga (C) se rompe. Por otro lado la

interacción débil al no ser invariante ante paridad (P) rompe la degeneración para las energías de neutrinos de diferente helicidad. Como en el presente caso CP tampoco es una simetría de la teoría se entiende que $E_{\nu}^{(+)}$ sea diferente de $E_{\nu}^{(-)}$.

Si bien al discutir las relaciones de dispersión se encontró que aparecían efectos interesantes cuando $P \approx A$. En las situaciones de posible aplicación se tiene que los neutrinos son relativistas ($P \gg m$, $P \gg A$). Por ejemplo en el caso del Sol los neutrinos tienen energías $E \approx 0.5$ MeV, mientras que para las masas se espera $m \approx 1$ eV. El factor $A = \{2\}^{1/2} GF \rho_e$, se puede estimar si se considera que en el centro del Sol $\rho_e \approx 1.5 \times 10^{26} \text{ cm}^{-3}$ y como $GF \approx 10^{-5} / m_p^2$ (donde m_p es la masa del protón), se obtiene $A \approx 2 \times 10^{-11}$ eV. Lo que es sorprendente es que a pesar del valor tan pequeño de A, el medio puede tener un efecto notable en el fenómeno de oscilaciones.

Si se hace un desarrollo para la relación de dispersión en el caso relativista a primer orden en A, se obtiene

$$E \approx P + [m^2 / 2P] + A \left[c_{\pm} - h_{\pm} \right] / 2. \quad (2.23)$$

Es decir a primer orden en A solamente los neutrinos de helicidad negativa y los antineutrinos de helicidad positiva son afectados por el medio.

Ahora bien, de acuerdo a las relaciones (2.19) el espectro cualitativo de energía para el neutrino y antineutrino para un valor dado del momento se presenta en la figura 5.

Aún cuando se introduce la interacción de los neutrinos con el medio (ecuaciones (2.6) o (2.9)) el operador de helicidad sirve para clasificar a las soluciones, ya que sigue conmutando con el Hamiltoniano. De manera similar a lo que se hizo en la sección anterior si se utiliza la normalización

$$\psi^\dagger(P) \psi(P) = 1$$

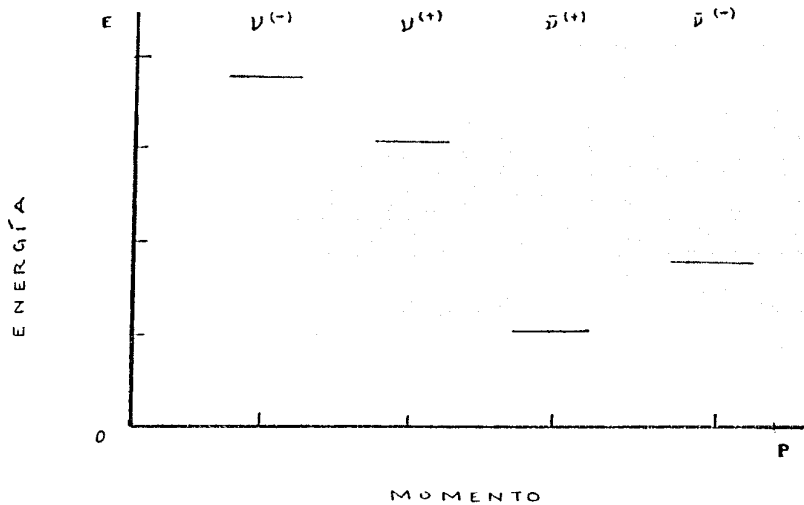


Fig.5.- Espectro cualitativo para la energía del neutrino y antineutrino para un valor fijo del momento.

se pueden determinar las cuatro soluciones independientes como:

$$\Psi_e = \exp i[Pz - Et]U,$$

donde para las cuatro soluciones independientes tenemos:

1). Neutrino de helicidad negativa ($\nu^{(-)}$):

$$U = [(E+P)/(2E-A)]^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ -m/(E+P) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

$$E = (1/2)A + \{m^2 + [P + (1/2)A]^2\}^{1/2}.$$

2). Neutrino de helicidad positiva ($\nu^{(+)}$):

$$U = \{(E+P-A)/2[E-(A/2)]\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m/(E+P-A) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$E = (1/2)A + \{m^2 + [P - (1/2)A]^2\}^{1/2}.$$

3). Antineutrino de helicidad positiva ($\bar{\nu}^{(+)}$):

$$U = [(E-P)/(2E-A)]^{1/2} \begin{pmatrix} -m/(E-P) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$E = +(1/2)A - \{m^2 + [P - (1/2)A]^2\}^{1/2}.$$

4). Antineutrino de helicidad negativa ($\bar{\nu}^{(-)}$):

$$U = \{(E-P-A)/2[E-(A/2)]\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -m/(E-P-A) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$E = (1/2)A - \{m^2 + [P + (1/2)A]^2\}^{1/2}.$$

Recordemos que para los antineutrinos a la energía se le debe cambiar el signo, de tal manera que sea positiva. Los valores anotados arriba corresponden a las soluciones de energía negativa.

En el límite de masa cero, las soluciones correspondientes a neutrinos (2.24) y (2.25) se reducen a:

$$\Psi_{\nu}^{(+)} = \exp i[Pz-Et] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.24')$$

$$\Psi_{\nu}^{(-)} = \exp i[Pz-Et] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.25')$$

respectivamente. Es inmediato comprobar que estos estados tienen quiralidad R y L respectivamente.

Por lo tanto, podemos concluir nuevamente que en el límite $m \rightarrow 0$ los conceptos de helicidad y quiralidad son equivalentes, aún en presencia del medio.

2.2.2. RELACION DE DISPERSION PARA UN MEDIO MATERIAL CON DERIVA DE ELECTRONES.

Los resultados de la sección anterior se pueden extender al caso de un medio en movimiento, es decir cuando existe una deriva de electrones. Recordemos nuevamente que la ecuación de propagación para el neutrino del electrón, se puede escribir como

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - ma) \Psi_e = \{ 2 \}^{1/2} G_F \gamma_\mu J_{(e)}^\mu L \Psi_e . \quad (2.30)$$

Ahora bien, si consideramos que el medio posee cierta deriva de electrones en las direcciones x y z, es decir en las direcciones perpendiculares y paralelas al movimiento del neutrino, tenemos que $J_{(e)}^\mu$ se puede escribir como

$$J_{(e)}^\mu = (\rho, J_x, 0, J_z) \equiv \rho (1, v_x, 0, v_x) , \quad (2.31)$$

donde v_x y v_z son las componentes de las velocidades de deriva de los electrones. Además bien sabemos que (2.30) admite soluciones del tipo (1.18), es decir de la forma

$$\Psi = \exp i(pz - Et) U .$$

Por lo tanto si combinamos estas tres últimas relaciones y procediendo de manera análoga a lo realizado en la sección 3.1, se obtiene la relación

$$E U = [\gamma^0 ma + \alpha^3 p + \Lambda (1 - v_x \alpha^1 - v_z \alpha^3) I .] U , \quad (2.32)$$

de la cual si utilizamos la representación quiral de $\tilde{\alpha}$ y β ($= \gamma^0$) tenemos que se convierte en

$$\begin{pmatrix} E-P & 0 & m_a & 0 \\ 0 & E+P & 0 & m_z \\ m_u & 0 & E+P-A(1+v_z) & -Av_x \\ 0 & m_a & -Av_x & E-P-A(1-v_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.33)$$

la cual como sabemos, tiene soluciones no nulas, si el determinante de los coeficientes se anula, es decir si

$$\det \begin{pmatrix} E-P & 0 & m_a & 0 \\ 0 & E+P & 0 & m_a \\ m_a & 0 & E+P-A(1+v_z) & -Av_x \\ 0 & m_a & -Av_x & E-P-A(1-v_x) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.34)$$

condición a partir de la cual obtenemos la relación:

$$A^2 \left(E^2 - P^2 \right) \left(1 - v_x^2 - v_z^2 \right) + \left(E^2 - P^2 - m^2 \right) \left(2A \left(P v_z - E \right) + \left(E^2 - m^2 P^2 \right) \right) = 0. \quad (2.35)$$

La ecuación (2.35) determina la relación de dispersión cuando existe deriva de electrones tanto en la dirección paralela, como en la dirección perpendicular a la propagación del neutrino. Si suponemos que el movimiento es sólo en la dirección paralela a la propagación de los neutrinos ($v_x = 0$), la relación de dispersión se puede resolver explícitamente

$$E = 1/2 A (1 - v_z) \pm \left\{ m^2 + [P \mp 1/2 A (1 - v_z)]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.36)$$

para la energía del ν_e . De la ecuación anterior vemos que el efecto de la deriva de electrones es aumentar o disminuir (dependiendo del signo de v_z) el efecto de la materia al multiplicar la cantidad A por el factor $(1-v_z)$. Este factor nos permitiría, por ejemplo,

tomar en cuenta el efecto de corrientes convectivas en el Sol. Sin embargo como las velocidades están medidas en unidades de $c=1$, esperamos que su efecto sea muy pequeño.

2.3. DEDUCCION DE LA ECUACION DE WOLFENSTEIN (TRANSFORMACION $v_e \rightarrow v_p$).

2.3.1. HAMILTONIANO DEPENDIENTE DEL TIEMPO (INTRODUCCION AL METODO).

Cuando el Hamiltoniano de un sistema depende del tiempo, no se tienen soluciones estacionarias de la ecuación de Schrodinger. De esta manera nuestra identificación de un estado determinado con un nivel discreto de energía y eigenfunción estacionaria puede ser modificada. El método que presentaremos, de hecho sirve de punto de partida para la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo. Supongamos que el Hamiltoniano se puede escribir como:

$$H = H_0 + H_p \quad (2.37)$$

donde los eigenestados de H_0 se conocen

$$H_0 U_k = E_k U_k ,$$

H_p tiene el efecto de causar transiciones entre eigenestados de H_0 que serían estacionarios en la ausencia de H_p .

Ahora bien, trabajamos con la ecuación de Schrodinger dependiente del tiempo

$$i \partial \Psi / \partial t = H \Psi . \quad (2.38)$$

El procedimiento consiste en expresar Ψ como una expansión en las eigenfunciones $U_n \exp [-iE_n t]$ del Hamiltoniano no perturbado, donde los coeficientes de expansión evidentemente dependen del

tiempo:

$$\Psi = \sum_n C_n(t) U_n \exp[-iE_n t]. \quad (2.39)$$

Si sustituimos (2.39) en (2.38) resulta

$$\sum_n C_n U_n \exp[-iE_n t] + \sum_n C_n E_n U_n \exp[-iE_n t] = \sum_n C_n (H_0 + H_P) U_n \exp[-iE_n t].$$

Si reemplazamos $H_0 U_n$ por $E_n U_n$ en el lado derecho, multiplicamos en el lado izquierdo por $\langle \bar{U}_k$, e integramos sobre todo el espacio, haciendo uso de la ortogonalidad de U_n obtenemos

$$i C_k \exp[-iE_k t] = \sum_n C_n \exp[-iE_n t] \langle k | H_P | n \rangle,$$

donde si definimos la frecuencia (angular) de Bohr

$$W_{kn} = E_k - E_n \quad (2.40)$$

obtenemos

$$i C_k = \sum_n \langle k | H_P | n \rangle C_n \exp[iW_{kn} t]. \quad (2.41)$$

el grupo de ecuaciones (2.41) para todo k es exactamente equivalente a la ecuación de Schrödinger (2.38).

2.3.2. DEDUCCION DE LA ECUACION DE WOLFENSTEIN (TRANSFORMACION

$\nu_e \rightarrow \nu_\mu$).

En las secciones anteriores hemos visto como resolver la ecuación de evolución (2.9) en el límite $m_e = 0$, en el que la propagación de ν_e se desacopla de ν_x . Además supusimos que el medio era homogéneo por lo cual A se consideraba constante. En general $m_x \neq 0$ ya que ν_e y ν_x no son eigenvalores de masa; y A puede ser dependiente de la posición (o del tiempo). Un ejemplo en el cual A no es constante se da en el Sol, ya que la densidad disminuye conforme el neutrino viaja desde el interior hasta el exterior del

Sol. Utilizando el método de la sección anterior presentaremos una deducción de la ecuación de evolución para la Amplitud (número relativo de neutrinos) correspondiente a ν_e y ν_x . Dicha ecuación coincide en el límite relativista con la ecuación de Wolfenstein.

Comencemos por considerar la ecuación de evolución (2.9):

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - M \right) \begin{pmatrix} \Psi_e \\ \Psi_x \end{pmatrix} = A\gamma_0 L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_e \\ \Psi_x \end{pmatrix}$$

con
$$M = \begin{pmatrix} m_a & m_\nu \\ m_x & m_a \end{pmatrix},$$

escrita en la forma:

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \Psi_e \\ \Psi_x \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \Psi_e \\ \Psi_x \end{pmatrix} = (H_0 + HND) \begin{pmatrix} \Psi_e \\ \Psi_x \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

con
$$H = M\gamma_0 - i\alpha^t \partial_t + AL \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde
$$H_0 = \begin{pmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_b \end{pmatrix} \gamma_0 - i\alpha^t \partial_t + AL \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y
$$HND = m_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma_0.$$

Observemos que H_0 es diagonal. Si suponemos que A es constante, los eigenvalores de H_0 corresponden a las soluciones estudiadas en la sección 2.2. Así encontramos que:

$$H_0 \begin{pmatrix} U_a \\ U_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_a & 0 \\ 0 & E_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_a \\ U_b \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Donde la componente superior corresponde a ν_e y por lo tanto incluye los efectos del medio. Por lo tanto para un neutrino de helicidad negativa E_a y U_a están dados por la ecuación (2.24):

$$E_a = 1/2 A + \left\{ m_b^2 + [P + (1/2)A]^2 \right\}^{1/2},$$

$$U_a = [(E+P)/(2E-A)]^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ -m_a/(E+P) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como la componente inferior corresponde a ν_x que no es afectado por el medio, E_b y U_b se obtienen de las ecuaciones para E_a y U_a haciendo $A = 0$ y $m_a \rightarrow m_b$.

Suponiendo que ambos neutrinos tienen el mismo momento P (en la dirección z) proponemos para Ψ :

$$\Psi = \exp [iPz] \begin{pmatrix} C_e(t) U_a \\ C_x(t) U_b \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

En el límite particular en que $m_x = 0$ y A fuera independiente de t , tendríamos que: $C_e(t) = \exp [-iE_a t]$ y $C_x(t) = \exp [-iE_b t]$. Sustituyendo (2.44) en la ecuación (2.42) obtenemos

$$i \begin{pmatrix} \dot{C}_e U_a + C_e \dot{U}_a \\ \dot{C}_x U_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_a & m_x \gamma_0 \\ m_x \gamma_0 & E_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_e U_a \\ C_x U_b \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

donde hemos tomado en cuenta que los espinores pueden depender del tiempo a través de su dependencia en A .

La ecuación (2.45) se puede escribir como las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} i\dot{C}_e U_a + iC_e \dot{U}_a &= E_a C_e U_a + m_x C_x \gamma_0 U_b \\ i\dot{C}_x U_b &= E_b C_x U_b + m_x C_e \gamma_0 U_a \end{aligned} \quad (2.46)$$

multiplicando la primera ecuación por U_a^\dagger y la segunda por U_b^\dagger y tomando en cuenta que las U 's están normalizadas se obtiene:

$$\begin{aligned} i\dot{C}_e &= E_a C_e + m_x C_x (U_a^\dagger \gamma_0 U_b) \\ i\dot{C}_x &= E_b C_x + m_x C_e (U_b^\dagger \gamma_0 U_a). \end{aligned} \quad (2.47)$$

En las últimas ecuaciones se tomó en cuenta que el término $U_a^\dagger U_a$ que correspondería a la fase de Berry se anula.

En notación matricial las relaciones (2.47) nos conducen a la expresión:

$$i \begin{pmatrix} \dot{C}_e \\ \dot{C}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_a & m_x F \\ m_x F' & E_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_e \\ C_x \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

donde,

$$\begin{aligned} F &= U_a^\dagger \gamma_0 U_b, \\ F' &= U_b^\dagger \gamma_0 U_a, \end{aligned}$$

$$E_a = (1/2)A + \{ m_a^2 + [P+(1/2)A]^2 \}^{1/2}$$

$$E_b = \{ P^2 + m_b^2 \}^{1/2}$$

La ecuación (2.48) es la ecuación exacta que describe la evolución de las amplitudes C_e y C_x en el caso general.

Sin embargo en los casos de interés los neutrinos son relativistas. Por lo tanto escribiremos la ecuación de evolución en ese límite. La cantidad F se puede evaluar como

$$F = F' = (m_a + m_b)/2P = (m_1 + m_2)/2P ,$$

donde hemos utilizado la ecuación (2.12).

Tomando en cuenta que en el límite relativista

$$E_a = P + m_a^2 / 2P + A$$

$$E_b = P + m_b^2 / 2P$$

y utilizando las ecuaciones (2.12) se tiene que la ecuación (2.48) se puede escribir en el límite relativista como:

$$i \begin{pmatrix} \dot{C}_e \\ \dot{C}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - [\delta m^2 / 4P] \text{Cos}(2\theta) & [\delta m^2 / 4P] \text{Sen}(2\theta) \\ [\delta m^2 / 4P] \text{Sen}(2\theta) & [\delta m^2 / 4P] \text{Cos}(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_e \\ C_x \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

donde $\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ y recordemos que $A = \{2\}^{1/2} G_F \rho$. Hacemos notar que en la ecuación (2.49) se omitió del lado derecho un término proporcional a la matriz identidad, ya que produciría una fase global para las amplitudes C_e y C_x que resulta irrelevante.

La expresión (2.49) es la ecuación de evolución para las amplitudes correspondientes a ν_e y ν_x . Dicha relación es conocida como la ecuación de Wolfenstein [8].

En su trabajo de 1978 Wolfenstein postuló la ecuación (2.49) para describir la evolución de las amplitudes correspondientes a ν_e y ν_x , basado en argumentos intuitivos. Posteriormente se han presentado deducciones formales de la ecuación de Wolfenstein [ver referencias 9 y 11]. Sin embargo esas deducciones nos parecen poco claras, además de hacer suposiciones que son innecesarias. Por ejemplo en la deducción presentada en las referencias [9 y 11]: la ecuación de Dirac se eleva al cuadrado para obtener una ecuación tipo Klein-Gordon para posteriormente desprestigiar el término ∂_t^2 y desprestigiar las soluciones reflejadas, además de suponer que la densidad del medio es constante. En nuestro caso la ecuación de evolución (2.48) es exacta, y para llegar a la ecuación de Wolfenstein (2.49) sólo se supuso que los neutrinos eran relativistas.

2.4. CONVERSION RESONANTE DEL NEUTRINO (POSIBLE EXPLICACION DEL ENIGMA DE LOS NEUTRINOS SOLARES).

Como mencionamos en el inicio de este capítulo, Mikheyev y Smirnov (MS) [13], descubrieron un mecanismo mediante el cual una gran fracción de ν_e emitidos en el Sol pueden ser convertidos en ν_μ cuando cruzan el Sol, y por consiguiente resultan inobservables. A continuación trataremos de dar una explicación clara y concisa de este mecanismo basado en la ecuación (2.49). Para esto, al igual que MS, consideraremos solamente dos sabores de neutrinos, ν_e y ν_μ .

La ecuación de evolución (2.49) es una ecuación tipo Schrödinger para un sistema de dos niveles (ν_e y ν_x) con un Hamiltoniano dependiente del tiempo:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} A - [\delta m^2/4P]\text{Cos}(2\theta) & [\delta m^2/4P]\text{Sen}(2\theta) \\ [\delta m^2/4P]\text{Sen}(2\theta) & [\delta m^2/4P]\text{Cos}(2\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

que depende del tiempo a través de la dependencia en ρ . En el caso del vacío ($\rho = 0$), \hat{H} es diagonalizado por una transformación a los estados $|\nu_1\rangle$ y $|\nu_2\rangle$ que son eigenestados de masa. La transformación está dada por la ecuación (2.2) con θ el ángulo de mezcla en el vacío.

Busquemos ahora una transformación a una base que diagonalice el Hamiltoniano \hat{H} cuando se incluye el efecto de materia. Primeramente hacemos notar que los eigenvalores instantáneos de \hat{H} se pueden encontrar fácilmente como:

$$E_{1,2} = \pm \{ [A - \Delta \text{Cos}(2\theta)]^2 + [\Delta \text{Sen}(2\theta)]^2 \}^{1/2}, \quad (2.51)$$

donde definimos la cantidad

$$\Delta = \delta m^2/2P. \quad (2.52)$$

El Hamiltoniano se puede diagonalizar por medio de una rotación a una base $\{ |\nu_1^m\rangle, |\nu_2^m\rangle \}$:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \text{Cos}\theta_m |\nu_1^m\rangle + \text{Sen}\theta_m |\nu_2^m\rangle \\ |\nu_x\rangle &= -\text{Sen}\theta_m |\nu_1^m\rangle + \text{Cos}\theta_m |\nu_2^m\rangle \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde el ángulo de mezcla en materia θ_m queda determinado a partir de la relación

$$\text{Sen}^2(2\theta_m) = [\Delta \text{Sen}(2\theta)]^2 / \{ [A - \Delta \text{Cos}(2\theta)]^2 + (\Delta \text{Sen}(2\theta))^2 \} \quad (2.54)$$

De la ecuación (2.54) es claro que en el vacío ($\rho = 0$) el ángulo de

mezcla θ_m se reduce al ángulo de mezcla en el vacío θ . Sin embargo en general el ángulo de mezcla θ_m es modificado sustancialmente por el efecto del medio. Por ejemplo en el límite $\rho \rightarrow \infty$, el ángulo de mezcla $\theta_m \rightarrow \pi/2$. Sin embargo la característica más importante de θ_m es su comportamiento resonante como función de A . De acuerdo a la fórmula (2.53) la resonancia ocurre cuando

$$A = \Delta \cos(2\theta) \quad (2.55)$$

valor para el cual $\text{Sen}^2(2\theta_m) = 1$ y la mezcla de neutrinos es máxima. La ecuación (2.54) muestra que la resonancia está caracterizada por una anchura-media dada por

$$\delta A = \Delta \text{Sen}(2\theta) \quad (2.56)$$

Sustituyendo los valores para A y Δ dados en las ecuaciones (2.8) y (2.52) respectivamente, en la ecuación (2.55) obtenemos que la condición de resonancia se puede escribir como

$$\{2\}^{1/2} G \rho = [\delta m^2 / 2P] \cos(2\theta) \quad (2.57)$$

la cual determina, para un valor dado del momento del neutrino y de δm^2 , una densidad crítica a la cual sucede la resonancia.

De acuerdo a la ecuación de eigenvalores (2.51) la condición de resonancia [ecuación (2.55) o (2.57)] corresponde al punto donde la separación entre los dos eigenvalores es mínima. Y la anchura de la resonancia [ecuación (2.56)] determina la separación mínima entre esos eigenvalores. La figura 6 muestra gráficamente los dos eigenvalores [ecuación (2.51)] como función de la densidad. La curva superior (inferior) corresponde al eigenestado ν_2^m (ν_1^m) que diagonaliza el Hamiltoniano. Lo que es notable es que el eigenestado ν_2^m puede casi coincidir con ν_e para densidades altas, y con el estado ν_x para densidades bajas. Por ejemplo supongamos que el ángulo de mezcla en el vacío es pequeño $\theta \ll 1$. Si la densidad es muy alta ($\rho \rightarrow \infty$) la fórmula (2.54) implica que $\theta_m \rightarrow \pi/2$ y de acuerdo a (2.53) $|\nu_2^m\rangle = |\nu_e\rangle$. Mientras que cuando $\rho \rightarrow$

0, se tiene $0_m = 0$ y como 0 es muy pequeño la ecuación (2.53) implica que $|\nu_2^m\rangle = |\nu_e\rangle$. Lo anterior es la esencia del mecanismo de Mikheyev y Smirnov, que puede dar una elegante explicación al enigma de los neutrinos solares. Supongamos que el neutrino del electrón que es producido en el centro del Sol tiene parámetros $(\delta m^2, 0)$ tales que la densidad del Sol en el centro es mayor que la densidad crítica correspondiente dada por [ecuación (2.57)]

$$\rho_c = \{\delta m^2 / (2\hbar^2 c^4 G F \rho)\} \cos(2\theta),$$

en este caso se coincidirá esencialmente con ν_2^m . Conforme el neutrino viaja hacia el exterior del Sol, la densidad disminuye por lo cual recorre (de acuerdo a la figura 6) la curva superior correspondiente al eigenestado ν_2^m , hacia la región $\rho \rightarrow 0$ en la que finalmente $\nu_2^m = \nu_\mu$, es decir se se habrá convertido en ν_μ . Este análisis tendrá que ser modificado si la evolución no es adiabática, ya que habrá una cierta probabilidad de salto entre el eigenestado ν_2^m y el ν_1^m . Para una discusión detallada del mecanismo Mikheyev y Smirnov ver la referencia [11].

Finalmente es interesante ver que de acuerdo a la explicación anterior y utilizando la fórmula (2.57) podemos hacer una estimación del rango de valores de δm^2 para los cuales puede haber una transformación resonante en el Sol. En el centro del Sol $\rho = 1$ MeV, y si suponemos un ángulo de mezcla pequeño ($\theta \ll 1$); obtenemos que habrá transformación resonante si

$$\delta m^2 \leq 3 \times 10^{-5} \text{ eV}^2.$$

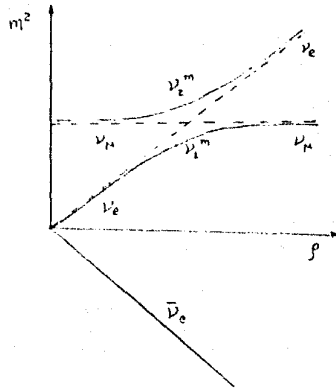


Fig. 6. Los eigenvalores para neutrinos como una función de la densidad. Las curvas tienen el máximo acercamiento en el punto de resonancia. La curva superior corresponde al eigenestado ν_2^m y la inferior al eigenestado ν_1^m . El 2ν Li-neutrino del electrón $\bar{\nu}_e$ también es mostrado.

CAPITULO 3 CONCLUSIONES

En resumen, en este trabajo presentamos una revisión de algunos de los aspectos más importantes en relación con el enigma de los neutrinos solares. Se puso especial énfasis en la posible solución a este problema en base al fenómeno de las oscilaciones de neutrinos en materia. Así mismo, se presentó una deducción de la ecuación de evolución, que describe las oscilaciones entre dos especies de neutrinos, una de las cuales corresponde al neutrino del electrón.

Queremos hacer notar, que la deducción de la ecuación de evolución (Ecuación de Wolfenstein) que hemos presentado en esta tesis, es otra alternativa a las ya conocidas en la literatura. Sin embargo, la presente deducción nos parece más elegante, ya que hace ver que es posible obtener una ecuación de evolución exacta (ecuación (2.48)). A partir de la cual la única aproximación que se requiere para llegar a la Ecuación de Wolfenstein, es la de suponer que los neutrinos son relativistas.

Otro punto que nos parece muy interesante es la forma de las relaciones de dispersión para neutrinos masivos que se propagan en un medio material. Debido a que las interacciones débiles violan paridad y que la presencia del medio implica que el sistema no es invariante ante conjugación de carga; obtuvimos que la degeneración para las cuatro soluciones de la ecuación de Dirac se rompe completamente. En particular la energía para neutrinos y antineutrinos derechos presenta un mínimo para un valor del momento diferente de cero.

La esencia de la belleza del mecanismo de MSW se puede apreciar en la figura 6. La cual muestra como un ν_e producido en una región de alta densidad, se convierte en un ν_μ al salir al exterior.

Por último diremos que la explicación al enigma de los neutrinos solares basada en el mecanismo de MSW resulta sumamente atractiva desde el punto de vista teórico. Como se mencionó anteriormente, esta explicación implica un valor no nulo para la masa de los neutrinos. Lo cual tendría profundas implicaciones tanto en la Física de Partículas Elementales, así como en la Cosmología. Sin embargo no debemos perder de vista el hecho que existen otras posibilidades para la solución del enigma de los neutrinos solares. En particular, una alteración al modelo estandar del Sol, podría eliminar el problema. De este modo, resultan ser necesarios más experimentos para probar si la mezcla de neutrinos, y

en particular si el efecto MSW, es la solución correcta al enigma de los neutrinos solares.

- [1]. Michael Crozon
LA MATERIA PRIMA
La búsqueda de las partículas
fundamentales y de sus interacciones.
Editorial gedisa, 1988.
- [2]. Paul Davis
SUPER FORCE
Biblioteca científica salvat, 1985.
- [3]. L. Wolfenstein and Eugene W. Beier,
PHYSICS TODAY, 28 (1988).
- [4]. Bahcall, John N.
NEUTRINO ASTROPHYSICS
Cambridge University Press, 1989.
- [5]. Palash B. Pal, Preprint OITS - 470 (June 1991).
- [6]. Francis Halzen, Alan D. Martin
QUARKS AND LEPTONS:
An Introductory Course
in Modern Particle Physics.
John Wiley and Sons, 1984.
- [7]. A. S Davydov
QUANTUM MECHANICS
Pergamon Press, 2nd. Ed., 1976.
- [8]. L. Wolfenstein, Phys. Rev. D, 17 , (1978) 2369.
- [9]. A. Halprin, Phys. Rev. D. 34 , (1986) 3462.
- [10]. J.W.F. Valle: in Neutrino '88 , proceedings of the XII th
International Conference on Neutrino and Astrophysics,
ed. J. Schneps et. al (World Scientific 1989) p. 612.

[11]. T. K. Kuo y J. Pantaleone Rev. Mod. Phys. 61, (1989) 937.

[12]. Leonard I. Schiff

QUANTUM MECHANICS

Mc. Graw - Hill Book Company, third ed., (1968).

[13]. H. A. Bethe, Phys. Rev. Lett. 12 , (1986) 1305.