

28
28



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**"SOLUCION DEL MOVIMIENTO
BROWNIANO CON INTEGRALES
DE TRAYECTORIA"**

**TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:**

FISICO

P R E S E N T A

JOSE HUMBERTO HERNANDEZ HERNANDEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA

MEXICO D.F. 1993

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

INTRODUCCION

I PROCESOS ESTOCASTICOS

1

- 1 Conceptos básicos de probabilidad
- 2 Definición de proceso estocástico
- 3 Procesos Gaussianos
- 4 Procesos de Markov
- 5 Ecuación de Langevin
- 6 Ecuación de Fokker-Planck

1
8
13
14
17
19

II INTEGRALES DE TRAYECTORIA

23

- 1 Definición de integrales de trayectoria
- 2 Integrales de trayectoria y la ecuación de Langevin

23
35

III APLICACION DE LAS INTEGRALES DE TRAYECTORIA A UN PROBLEMA CON RUIDO DE COLOR

40

CONCLUSIONES

49

APENDICE

51

REFERENCIAS

54

INTRODUCCION

Las fluctuaciones son un fenómeno muy común en un gran número de campos de las ciencias naturales. Casi todos los sistemas están sujetos a complicadas influencias externas e internas que no son completamente conocidas y que comúnmente se denominan ruido o fluctuaciones. Estos *sistemas* están influenciados por muchas perturbaciones pequeñas, cada una de las cuales cambia las variables del sistema de una manera pequeña e impredecible.

Históricamente, el estudio de estos sistemas comenzó con el movimiento browniano, donde el sistema es una partícula pequeña pero macroscópica inmersa en un fluido. Las moléculas del fluido golpean a la partícula browniana en todas las direcciones de una manera impredecible (estas fluctuaciones aleatorias en el movimiento de la partícula browniana son conocidas como ruido blanco gaussiano) y por tanto la posición de la partícula fluctúa. Debido a estas fluctuaciones, no se conoce con exactitud su posición y en su lugar se busca la probabilidad de encontrar a la partícula en una región dada. Los sistemas que se describen en estos términos, son muy variados y su número aumenta gradualmente. Estos aparecen con frecuencia en: Física del Estado Sólido, Óptica Cuántica (láseres), Físico-Química, Circuitos eléctricos, entre otros.

Existen varios métodos para atacar estos problemas. En la literatura los que ocupan un lugar predominante son la Ecuación de Fokker-Planck y las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. La primera es una ecuación diferencial para la densidad de probabilidad, y en lo que se refiere a las Ecuación Diferencial Estocástica, éstas contienen un término aleatorio y sus soluciones son de alguna forma, funciones aleatorias. La ecuación de Langevin fue el primer

ejemplo de éstas, desarrollada para describir el movimiento browniano.

Aunque existen otras aproximaciones al problema, los métodos mencionados anteriormente han sido los más populares durante mucho tiempo. Sin embargo, últimamente ha estado creciendo el número de artículos que utilizan las Integrales de Trayectoria con mucho éxito. En esta tesis se utilizó este método para resolver una ecuación diferencial estocástica de segundo orden con ruido de color.

En el primer capítulo se definen los conceptos básicos de la teoría de probabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos. También se describe el ruido blanco y el ruido de color, así como la ecuación de Fokker-Planck, la ecuación de Langevin y la generalización de ésta a las ecuaciones diferenciales estocásticas.

En el segundo capítulo se desarrolla el concepto de integral de trayectoria, formulado por Feynman como una nueva alternativa de la Mecánica Cuántica y se muestra cómo se relaciona, en forma natural, con la solución de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

En lo que respecta al capítulo tres, se aplican las ideas descritas en los dos capítulos anteriores para resolver un problema particular, el cual trata con una Ecuación Diferencial Estocástica, con ruido de color.

Por último, en el apéndice se resuelve la misma ecuación pero con un ruido blanco, que es un problema ya muy conocido y resuelto por varios métodos. Esto se hace para confirmar que el método utilizado conduce al resultado correcto.

I. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Este capítulo tiene por objeto dar un panorama de los procesos estocásticos³. En la sección 1 se presentan las ideas básicas de probabilidad. En la sección 2 se da la definición formal de proceso estocástico y sus principales características estadísticas. En la tercera y cuarta sección se muestran los procesos gaussianos con énfasis en la probabilidad condicional y los procesos de Markov. La razón de ello es que representan una amplia variedad de situaciones físicas.

Una ecuación de particular importancia en procesos estocásticos es la de la teoría moderna del movimiento browniano de una partícula, llamada ecuación de Langevin y es la que se presenta en la sección 5, y por último en la sección 6 se plantea la ecuación de Fokker-Planck como una ecuación diferencial parcial, cuya solución caracteriza la evolución de la función de probabilidad de una amplia clase de sistemas.

1. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

Un fenómeno aleatorio⁴ (fortuito o al azar) es un fenómeno que se caracteriza por la propiedad de que, al observarlo repetidas veces se obtienen diferentes resultados que ocurren con regularidad estadística. Esto quiere decir que existen números entre 0 y 1 que representan la frecuencia relativa con la que se observan los diferentes resultados en una serie de repeticiones independientes del fenómeno.

Dos conceptos ligados al de fenómeno aleatorio son los de evento aleatorio y el de la probabilidad de un evento aleatorio. Un evento aleatorio tiene la propiedad de que la frecuencia relativa con la que aparece en una sucesión muy larga de observaciones realizadas al azar, se acerca a un valor límite estable; a medida que el número de observaciones tiende a infinito, el valor límite de la frecuencia relativa se llama probabilidad del evento aleatorio. La probabilidad es pues, la ciencia de los fenómenos aleatorios, en el sentido de que estudia las propiedades de estos fenómenos que dependen esencialmente del concepto de aleatoriedad y no de otros aspectos particulares.

El espacio de descripciones muestrales de un fenómeno aleatorio, que usualmente se denota con la letra \mathcal{S} , es el espacio de las descripciones de todos los resultados posibles del experimento.

La importancia del concepto de espacio de descripciones muestrales que corresponde a un fenómeno aleatorio se debe a que constituye un medio para definir el concepto de evento. En consecuencia, definimos un evento como un conjunto de descripciones en \mathcal{S} . Al decir que cierto evento \mathcal{E} ha ocurrido, significa que el resultado del evento aleatorio considerado tiene por descripción un elemento del conjunto \mathcal{E} .

Hechas estas consideraciones, daremos la siguiente definición de probabilidad como función de los eventos contenidos en un espacio de descripciones muestrales de un fenómeno

aleatorio:

Dado un evento aleatorio, que queda descrito por un espacio de descripciones muestrales S , la probabilidad es una función $P(E)$ que asigna a cada evento un número real no negativo, denotado $P(E)$; ésta es la probabilidad del evento E . Dicha función de probabilidad debe satisfacer tres axiomas³:

Axioma 1.- $P(E) \geq 0$ para todo evento E .

Axioma 2.- $P(S) = 1$ donde S es el evento seguro

Axioma 3.- $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$, en el caso en el que $E \cap F = \emptyset$;

es decir, la probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente excluyentes es la suma de sus probabilidades.

Un modelo matemático para la formulación y solución de muchos problemas, se puede desarrollar con la noción de probabilidad condicional.

Si se tiene un evento A arbitrario de un espacio muestral S con $P(A) > 0$, la probabilidad de que un evento B suceda una vez que A haya sucedido o, en otras palabras, la probabilidad condicional de B dado A , denotado $P(B|A)$, se define como:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \text{si } P(A) > 0 \quad (1.1)$$

Si se multiplica la ecuación anterior que define la probabilidad condicional y usamos el hecho de que $B \cap A = A \cap B$, se obtiene la siguiente fórmula

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \quad (1.2)$$

Este resultado puede extenderse por inducción matemática como sigue: para los eventos B_1, B_2, \dots, B_n

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap B_2) \dots P(B_n|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}) \quad (1.3)$$

que es conocido como el teorema de la multiplicación⁴.

Hay una consecuencia interesante de los resultados anteriores, que es conocido como el Teorema de Bayes:

Supóngase que B_1, B_2, \dots, B_n son n eventos mutuamente excluyentes de S de tal forma que representen una partición del espacio muestral S y que A es cualquier evento de S . Entonces se puede calcular la probabilidad condicional $P(B_i|A)$ de cualquiera de los eventos B_i dado A por medio de la fórmula:

En forma abreviada:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)} \quad (1.4)$$

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

Para muchas funciones de probabilidad⁴ $P(\bullet)$, existe una función $f(\bullet)$, definida para todos los números reales x , a partir de la cual, por integración puede obtenerse $P(E)$ para cualquier evento E :

$$P(E) = \int_R f(x) dx \quad (1.6)$$

Cuando una función de probabilidad pueda representarse en la forma (1.6) en términos de la función $f(\bullet)$, se dice que la función $f(\bullet)$ es la función de densidad de probabilidad de la función de probabilidad $P(\bullet)$.

Más formalmente, se dice que una función $f(\bullet)$ es una función de probabilidad si satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_R f(x) dx = P(E) = 1 \quad (1.7)$$

donde $E=R$ es el conjunto de los números reales y si además satisface la condición

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \text{ contenida en } R. \quad (1.8)$$

Por otro lado se dice que una función $p(\bullet)$, definida para todos los números reales, es una función de masa de probabilidad⁴, si $p(x)$ es igual a cero para toda x , excepto para un conjunto finito e infinito numerable de valores de x para los que $p(x) > 0$, y la serie infinita

$$\sum_{\substack{\text{entre todos} \\ \text{los puntos } x \text{ de } E \\ \text{tales que } p(x) > 0}} p(x) = 1, \quad (1.9)$$

Para estudiar las propiedades generales de los fenómenos aleatorios sin tener que restringirse a aquellas cuyas funciones de probabilidad se han especificado, ya sea por una función de densidad de probabilidad o por una función de masa de probabilidad, basta con estudiar las propiedades generales de las funciones de distribución.

La función de distribución $F(x)$ de un fenómeno aleatorio se define, para cualquier número real x , como la probabilidad de que un valor observado del fenómeno aleatorio sea menor o igual que el número x . En símbolos, para cualquier número real x :

$$F(x) = P\{\text{números reales } x' : x' \leq x\} \quad (1.10)$$

Si la función de probabilidad está especificada por la función de masa de probabilidades $p(x)$, entonces la función de distribución correspondiente $F(x)$, para cualquier número real x está dada por

$$F(x) = \sum_{\substack{\text{puntos } x' \leq x \\ \text{tales que } p(x') > 0}} p(x'). \quad (1.11)$$

Si se especifica la función de probabilidad por una función de densidad de probabilidad $f(x)$, entonces la función de distribución $F(x)$ correspondiente, para cualquier número real x , está dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx' \quad (1.12)$$

El concepto de función está íntimamente relacionado al concepto de variable aleatoria, como nos lo indican las definiciones siguientes:

DEFINICION DE FUNCION. Se dice que un objeto X ó $X(\omega)$ es una función definida en un espacio S , si para todo elemento s de S hay un número real denotado por $X(s)$, al cual se le llama el valor de la función X en s .

DEFINICION DE VARIABLE ALEATORIA. Decimos que un objeto X es una variable aleatoria

si :

- i) Es una función de valores reales definida en un espacio de descripciones muestrales, sobre una familia de cuyos subconjuntos hayamos definido una función de probabilidad $P(\bullet)$.
- ii) Para todo conjunto B de números reales, el conjunto $\{s : X(s) \text{ está en } B\}$ pertenece al dominio de $P(\bullet)$.

Aunque por definición una variable aleatoria X es una función sobre un espacio de probabilidades, en la teoría de probabilidades raras veces es de importancia la forma funcional de X , puesto que no se está interesado en calcular el valor de $X(s)$ que la función X asume de un elemento individual s del espacio de descripciones muestrales \mathcal{S} , sobre el cual se ha definido X . Más bien interesa la probabilidad de que un valor observado de la variable aleatoria X pertenezca al conjunto B .

Así pues, se define la función de probabilidad de una variable aleatoria X , denotada por $P_X(\bullet)$, como una función de conjunto definida para todo conjunto B de números reales cuyo valor $P_X(B)$ es la probabilidad de que X esté en B . Algunas veces nos expresamos intuitivamente al escribir $P\{X \text{ está en } B\}$ en lugar de la expresión matemática correcta $P_X(B)$. De manera similar, se usan las siguientes expresiones para cualesquiera números reales a y x :

$$P\{a < X \leq b\} = P_X\{\text{números reales } x: a < x \leq b\}$$

$$P\{X \leq x\} = P_X\{\text{números reales } x': x' \leq x\}$$

$$P\{X = x\} = P_X\{\text{números reales } x': x' = x\} = P_X\{x\}.$$

La función de probabilidad $P_X(\bullet)$ de la variable aleatoria X se obtiene de la función de probabilidad $P(\bullet)$, que existe en el espacio de descripciones muestrales \mathcal{S} sobre el cual se ha definido X como una función, por medio de la siguiente fórmula:

$$P_X(B) = P\{s: X(s) \text{ está en } B\}. \quad (1.13)$$

Donde B es un conjunto de números reales.

La ecuación (1.13) representa la definición de $P_X(B)$, es claro que el significado intuitivo de $P_X(B)$ expresado anteriormente está implícito en (1.13), puesto que la función X tendrá un valor observado perteneciente al conjunto B si, y sólo si, el valor observado s del fenómeno aleatorio es tal que $X(s)$ está en B .

Se define la ley de probabilidad de una variable aleatoria X como una función de probabilidades $P_X(\bullet)$ en la recta real, que coincida con la función de probabilidades $P(\bullet)$ de la variable aleatoria X . Por tanto, la teoría de probabilidades estudia las aseveraciones que se pueden hacer acerca de una variable aleatoria, cuando se conoce únicamente su ley de probabilidades.

Se define la función de distribución⁴ de una variable aleatoria X , denotada por $F_X(x)$, para cualquier número real x , por

$$F_X(x) = P[X \leq x]. \quad (1.14)$$

La función de distribución de X determina de manera única la función de probabilidad de X .

La función de distribución sirve para clasificar⁵ las variables aleatorias según sus tipos. Diremos que una variable aleatoria X es discreta o continua si su función de distribución $F_X(x)$ es discreta o continua, respectivamente.

Una función de masa de probabilidades de una variable aleatoria X , denotada por $p_X(x)$, es una función cuyo valor $p_X(x)$, en cualquier número real x , representa la probabilidad de que el valor observado de la variable aleatoria X sea igual a x . En símbolos;

$$p_X(x) = P[X=x] = P_X[(x'x' = x)]. \quad (1.15)$$

Una variable aleatoria X es discreta si:

$$\sum_{\substack{\text{sobre todos} \\ \text{los puntos } x \\ \text{tales que } p_X(x) > 0}} p_X(x) = 1. \quad (1.16)$$

Si una variable aleatoria X es discreta, basta conocer su función de masa de probabilidad $p_X(x)$ para conocer su función de probabilidad $F_X(x)$. Si X es discreta, entonces, para cualquier conjunto B de números reales, se tiene que

$$P_X[B] = P[X \text{ está en } B] = \sum_{\substack{\text{sobre todos} \\ \text{los puntos } x \text{ de } B \\ \text{tales que } p_X(x) > 0}} p_X(x). \quad (1.17)$$

La función de distribución de una variable aleatoria discreta X se expresa en términos

de su función de masa de probabilidades como

$$F_X(x) = \sum_{\left(\begin{array}{l} \text{sobre todos} \\ \text{los puntos } x' \text{ en} \\ \text{talos que } p_X(x') > 0 \end{array} \right)} p_X(x'). \quad (1.18)$$

Por otro lado se tiene que si una variable aleatoria X es continua, existe una función no negativa $f_X(x)$, llamada función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X , que tiene la propiedad de que, para cualquier conjunto B de números reales.

$$P_X[B] = P[X \text{ está en } B] = \int_B f_X(x) dx. \quad (1.19)$$

La función de distribución $F_X(x)$ de una variable aleatoria continua se obtiene en términos de su función de densidad de probabilidad mediante

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x') dx'. \quad (1.20)$$

A su vez, la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua se obtiene mediante la derivada⁵ de su función de distribución:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (1.21)$$

2. DEFINICION DE PROCESO ESTOCASTICO

Un concepto que se desprende del de variable aleatoria es el de proceso estocástico⁶. Los *procesos estocásticos*, también llamados procesos aleatorios⁸ son una generalización de las variables aleatorias ya que se consideran como funciones dependientes del tiempo.

Se define un proceso estocástico $Y_t(t)$ como una función de una variable aleatoria $X(\xi)$, $\xi \in \mathcal{S}$ identificado por el parámetro t que pertenece al conjunto \mathcal{T} .

En general \mathcal{Y} puede ser cualquier clase de objeto matemático, y el parámetro t usualmente es interpretado como el tiempo.

Por definición de proceso estocástico, $Y_t(t)$ es una variable aleatoria, por tanto $\{Y_t(t) \leq y\}$ es un evento para cada $t \in \mathcal{T}$ y y un número real. La función de distribución⁷ de probabilidad de un proceso estocástico $Y_t(t)$ está definida de tal manera que:

$$F_{Y(t)}(y, t) = P\{Y(t) \leq y\}, \quad (2.1)$$

para toda y que sea un número real y $t \in \mathcal{T}$. Análogamente la función de distribución para $Y_t(t)$ se obtiene en términos de su función de densidad de probabilidad $f_{Y(t)}$ mediante

$$F_{Y(t)}(y, t) = \int_{-\infty}^y f_{Y(t)}(x', t) dx', \quad (2.2)$$

para toda y con $f_{Y(t)}(x, t) \geq 0$.

Dadas las variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$ se define la función de distribución conjunta del proceso $X(t)$ como

$$F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}, \quad (2.3)$$

y la función de densidad $f_{X(t_1), X(t_2)}$ de $X(t)$ está dada por:

$$F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X(t_1), X(t_2)}(y_1, y_2, t_1, t_2) dy_1 dy_2. \quad (2.4)$$

La probabilidad condicional³ para un proceso estocástico $Y(t)$ de dos variables aleatorias, se define como

$$f_{X(t_1)|X(t_2)}(x_1, t_1 | x_2, t_2) = \frac{f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2, t_1, t_2)}{f_{X(t_2)}(x_2, t_2)}, \quad (2.5)$$

También es posible determinar la función de distribución conjunta y la función de densidad de probabilidad para dos procesos⁷ estocásticos $X(t)$ y $Y(t)$, definidas respectivamente como:

$$F_{X(t), Y(t)}(x, y, t) = P\{ X(t) \leq x, Y(t) \leq y \}, \quad (2.6)$$

y

$$f_{X(t), Y(t)}(x, y, t) = \int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^y dy' f_{X(t), Y(t)}(x', y', t). \quad (2.7)$$

Si se considera a $X(t)$ y $Y(t)$ a diferentes tiempos, la función de distribución conjunta será

$$F_{X(t_1), Y(t_2)}(x, y, t_1, t_2) = P\{ X(t_1) \leq x, Y(t_2) \leq y \} \quad (2.8)$$

y la función de densidad de probabilidad conjunta

$$f_{x(t_1), y(t_2)}(x, y, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^y dv f_{x(t_1), y(t_2)}(u, v, t_1, t_2) . \quad (2.9)$$

Los procesos donde sus valores a diferentes tiempos son estadísticamente independientes son llamados procesos de ruido blanco.

Los promedios $\langle X \rangle$ y $\langle X^2 \rangle$ de una variable aleatoria X , con función de densidad de probabilidad $f(x)$ se definen como

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{y} \quad \langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx , \quad (2.10)$$

y en general para cualquier entero n el promedio de $\langle X^n \rangle$ es

$$\langle X^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx , \quad (2.11)$$

llamado comúnmente, momento n -ésimo de probabilidad. Por otro lado, para cualquier número real c , y entero $n=1, 2, \dots$, se define $\langle (X-c)^n \rangle$ como el momento n -ésimo de la ley de probabilidades con respecto al punto c , mientras que $\langle (X-\langle X \rangle)^n \rangle$ es el momento n -ésimo de las probabilidades con respecto a su promedio ó momento central de probabilidad⁴. Para $n=2$ se obtiene el segundo momento central

$$D(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 , \quad (2.12)$$

mejor conocido como *varianza o dispersión*. Otro concepto útil es la desviación estandar de X , definida como:

$$\sigma(X) = [D(X)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} . \quad (2.13)$$

El promedio de un proceso estocástico se define como:

$$m_1 = \langle Y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Y_x(t) f_x(x) dx . \quad (2.14)$$

Más generalmente, tomando n valores t_1, t_2, \dots, t_n para el tiempo y para los n -ésimos momentos, el producto⁸ de los n -ésimos procesos estocásticos es

$$\langle Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Y_x(t_1) Y_x(t_2) \dots Y_x(t_n) f_x(x) dx , \quad (2.15)$$

considerando a X y Y como variables aleatorias tales que $Y = g(X)$ para alguna función $g(X)$, entonces, se cumple que

$$\langle g(y) \rangle = \langle g(g(X)) \rangle , \quad (2.16)$$

de tal manera que si cualquiera de éstos dos promedios existe, entonces también existe el otro, y los dos son iguales. Considerando el promedio⁸ $\langle g(X_1, X_2, \dots, X_n) \rangle$ de la variable aleatoria $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, y si las variables estocásticas X_1, X_2, \dots, X_n tienen función de distribución conjunta

$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se define:

$$\langle g(X_1, X_2, \dots, X_n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_n) dF_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) . \quad (2.17)$$

El *coeficiente de correlación*⁷ $R(X_1, X_2)$ de dos variables aleatorias distribuidas conjuntamente con varianzas finitas positivas se define como

$$R(X_1, X_2) = \frac{K[X_1, X_2]}{\sigma[X_1] \sigma[X_2]} . \quad (2.18)$$

Donde

$$K[X_1, X_2] = \langle X_1 X_2 \rangle - \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle \quad (2.19)$$

Por lo tanto X_1 y X_2 no están correlacionadas si y sólo si su coeficiente de correlación es cero.

Este coeficiente muestra la medida en que es posible hacer buenas predicciones acerca del valor de una de las variables aleatorias sobre la base de un valor observado de la otra.

Una propiedad que satisface la densidad de probabilidad es la llamada condición de compatibilidad⁴

$$f(x_1, \dots, x_r; t_1, \dots, t_r) = \int f_r(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n; t_1, \dots, t_r, t) dx_{r+1} \dots dx_n \quad (2.20)$$

Un proceso estocástico puede también ser dividido en dos amplias clases: estacionario y no estacionario⁵.

Un proceso estocástico $Y(t)$ es estacionario⁶ si $Y(t)$ y el proceso $Y(t+a)$ tienen las mismas características estadísticas para todo a . Esto es equivalente a decir que todas las densidades de probabilidad conjunta son invariantes ante una traslación del tiempo:

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = f(x_1, t_1 + a; x_2, t_2 + a; \dots; x_n, t_n + a) \quad (2.21)$$

de aquí que tales probabilidades sean solamente funciones de diferencias de tiempos, $t_i - t_j$.

De particular importancia en los procesos estocásticos son los procesos gaussianos⁷, que se definen a continuación.

3. PROCESOS GAUSSIANOS

La función de densidad de probabilidad⁸ Gaussiana para una variable estocástica X es:

$$f_X(x) = C e^{-\frac{1}{2}Ax^2 - Bx} \quad -\infty < x < \infty \quad (3.1)$$

Donde A es una constante positiva que determina la amplitud, B determina la posición del pico, y C es la constante de normalización.

$$C = \left(\frac{A}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{B^2}{2A}} \quad (3.2)$$

Con frecuencia es conveniente expresar los parámetros A, B en términos del promedio

$\mu_1 = -\frac{B}{A}$ y varianza $\sigma^2 = \frac{1}{A}$, con lo cual se puede escribir

$$f_X(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.3)$$

Un proceso $X(t)$ es llamado gaussiano⁸ (o normal) cuando el proceso $X(t)$ tenga asociada una función de densidad de la forma (3.1) el cual está completamente especificado por el promedio $\langle X(t_1) \rangle$

y el segundo momento $\langle X(t_1)X(t_2) \rangle$.

Se verá ahora que en la aplicación de los procesos estocásticos a fenómenos reales, existe un resultado de suma importancia, que es el teorema del límite central⁹.

Se dice que una sucesión de variables estocásticas distribuidas conjuntamente X_1, X_2, \dots, X_N con promedios y varianzas finitas, obedece el teorema del límite central si la sucesión Z_1, Z_2, \dots, Z_N definida por

$$Z_n = \frac{S_n - (S_n)}{\sigma(S_n)}, \quad \text{con} \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad (3.4)$$

converge en distribución a una variable estocástica que tiene una distribución gaussiana con promedio 0 y varianza 1, donde las variables aleatorias Z_1, Z_2, \dots, Z_n , forman una sucesión de sumas consecutivas normalizadas de la sucesión X_1, X_2, \dots, X_n .

Uno de los conceptos más relevantes en los procesos gaussianos es la densidad de probabilidad condicional $f_{x_1|x_2}(x_1|x_2)$, que es gaussiana si X_1 y X_2 son conjuntamente gaussianos. Entonces, se escribirá la densidad de probabilidad condicional de X_1 dado X_2 como

$$f_{x_1|x_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{x_1, x_2}(x_1, x_2)}{f_{x_2}(x_2)}, \quad (3.5)$$

Una subclase importante de procesos estocásticos, conocida como procesos de Markov³, es la que ahora será tratada.

4. PROCESOS DE MARKOV

Sea $X(t)$ un proceso estocástico y sean $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ un conjunto de sus valores, en los instantes de tiempos consecutivos $t_1 > t_2 > \dots > t_n$; entonces la densidad de probabilidad condicional del valor de $X(t)$ al instante de tiempo más reciente t_j :

$$f[X(t_j) | X(t_2), \dots, X(t_n)] = \frac{f_n[X(t_1), \dots, X(t_n)]}{f_{n-1}[X(t_2), \dots, X(t_n)]}. \quad (4.1)$$

El proceso $X(t)$ se dice que es un proceso de Markov si la densidad de probabilidad condicional depende solamente del último valor $X(t_2)$ y no de los valores precedentes $X(t_3), X(t_4), \dots, X(t_n), \{t_2 > t_3 > \dots > t_n\}$.

Naturalmente (4.1) aún puede depender de $X(t_1), t_1, t_2$ y por tanto, para un proceso de Markov⁵, se puede escribir

$$f(X_1 | X_2, \dots, X_n) = P_{t_2}(X_1, X_2); \quad (n > 2), \quad (4.2)$$

donde $X_1 = X(t_1), \dots, X_n = X(t_n)$.

Recordando que las densidades de probabilidad condicional correspondientes a n valores distintos están siempre conectadas por la relación de compatibilidad⁶

$$\int f(X_1 | X_2, \dots, X_n) f(X_2, \dots, X_n) dX_n = f(X_1 | X_2, \dots, X_{n-1}) f(X_2, \dots, X_{n-1}), \quad (4.3)$$

sustituyendo (4.2) en (4.3) y arreglando, se encuentra

$$P_{t_2}(X_1, X_2) = f(X_1 | X_2) \quad (t_1 > t_2) \quad (4.4)$$

llamada *probabilidad de transición*, la cual satisface la condición de normalización

$$\int P_{t_2}(X, X) dX = 1. \quad (4.5)$$

Se denota a la probabilidad de transición $P_{t_1 t_2}$ como

$$P_{t_1 t_2}(X_n, t_n | X_1, t_1; \dots; X_{n-1}, t_{n-1}) = P_{t_1 | t_2}(X_n, t_n | X_{n-1}, t_{n-1}), \quad (4.6)$$

esto es, la densidad de probabilidad condicional en X_n a t_n dado el valor X_{n-1} a t_{n-1} .

Un proceso de Markov queda completamente determinado⁶ por las dos funciones $P_{t_1}(X_1, t_1)$ y $P_{t_1 t_2}(X_2, t_2 | X_1, t_1)$. La jerarquización puede ser construida tomando $t_1 < t_2 < t_3$.

$$\begin{aligned}
 P_3(X_1, t_1; X_2, t_2; X_3, t_3) = \\
 P_2(X_1, t_1; X_2, t_2) P_{1|2}(X_3, t_3 | X_1, t_1, X_2, t_2) = \quad (4.7) \\
 P_1(X_1, t_1) P_{1|1}(X_2, t_2 | X_1, t_1) P_{1|1}(X_3, t_3 | X_2, t_2)
 \end{aligned}$$

continuando con este algoritmo se encontrarán sucesivamente todas las P_n . Esta propiedad hace manejables a los procesos de Markov, razón por la cual son usualmente empleados en muchas aplicaciones. El ejemplo más antiguo y mejor conocido de un proceso de Markov en física es el movimiento browniano⁸.

Por otro lado, integrando (4.7) sobre X_2 se obtiene para $t_1 < t_2 < t_3$

$$P_2(X_1, t_1; X_3, t_3) = P_1(X_1, t_1) \int P_{1|1}(X_2, t_2 | X_1, t_1) P_{1|1}(X_3, t_3 | X_2, t_2) dX_2, \quad (4.8)$$

dividiendo ambos lados por $P_1(X_1, t_1)$, se tiene:

$$P_{1|1}(X_3, t_3 | X_1, t_1) = \int P_{1|1}(X_2, t_2 | X_2, t_2) P_{1|1}(X_2, t_2 | X_1, t_1) dX_2 \quad (4.9)$$

llamada ecuación de Chapman-Kolmogorov⁴.

Cualesquiera dos funciones P_j y P_{j+1} , no negativas que obedezcan estas condiciones de consistencia definen un proceso de Markov, donde:

$$P_1(X_2, t_2) = \int P_{1|1}(X_2, t_2 | X_1, t_1) P_1(X_1, t_1) dX_1. \quad (4.10)$$

Otros ejemplos de procesos de Markov⁸ muy conocidos son el proceso Wiener o proceso Wiener-Lévy, y el proceso Poisson.

Los procesos estocásticos que son estacionarios y Markovianos son de especial interés, en particular para describir el equilibrio de fluctuaciones.

Para un proceso de Markov estacionario la probabilidad de transición P_{j+1} no depende de los dos tiempos t_j y t_j sino solamente del intervalo⁸ de tiempo $t_2 - t_1$.

$$P_{1|1}(X_2, t_2 | X_1, t_1) = P_{\tau}^S(X_2 | X_1) \quad \text{con} \quad \tau = t_2 - t_1, \quad (4.11)$$

El ejemplo más estudiado de un proceso estacionario de Markov es el proceso Ornstein-Uhlenbeck⁶ definido por

$$P_1(X_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \quad (4.12)$$

$$P_2^s(X_2 | X_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2\tau})}} \exp\left[-\frac{(X_2 - X_1 e^{-\tau})^2}{2(1-e^{-2\tau})}\right] \quad (4.13)$$

Este proceso fue originalmente construido para describir el comportamiento estocástico de la velocidad de una partícula browniana. Claramente el promedio es cero y su función de autocorrelación es simplemente

$$\kappa(\tau) = e^{-\tau} \quad (4.14)$$

El proceso Ornstein-Uhlenbeck es estacionario, gaussiano y Markoviano.

Por último se señala que si $X(t)$ es estacionario, gaussiano y tiene una función de autocorrelación exponencial $\kappa(\tau) = \kappa(0)e^{-\tau}$, entonces a $X(t)$ se le llama proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

5. ECUACION DE LANGEVIN

Una partícula sumergida en un líquido exhibe incesantes movimientos irregulares que son observables bajo el microscopio. Se le llama movimiento browniano al movimiento de dicha partícula, en memoria del botánico inglés Robert Brown, quien descubrió el fenómeno en 1827. Se encuentra el mismo fenómeno de forma sorprendente en las partículas de humo suspendidas en el aire. La explicación del fenómeno del movimiento browniano fue uno de los mayores éxitos de la mecánica estadística y de la teoría cinética. El movimiento browniano no había sido resuelto satisfactoriamente, hasta que Einstein¹⁰, en 1905, publicó una explicación de la solución en los siguientes términos:

1.- El movimiento es causado por frecuentes impactos sobre los granos de polen del incesante movimiento de las moléculas del líquido en el cual están suspendidos.

2.- El movimiento de éstas moléculas es tan complicado que sus efectos sobre los granos del polen pueden solamente ser descritos probabilísticamente en términos de un gran número de impactos, estadísticamente independientes.

Posteriormente a la solución original de Einstein, (Los resultados teóricos de Einstein fueron comprobados por el trabajo experimental exacto del físicoquímico francés Jean Perrin en 1908) Langevin presenta un nuevo método, el cual es completamente diferente del de Einstein y mucho más simple: aplicando la segunda ley de Newton a la partícula Browniana, se obtiene la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} = f(t), \quad (5.1)$$

que se acostumbra escribir como:

$$\dot{V} = -\beta V + f(t), \quad v = \dot{x} \quad (5.2)$$

donde $f(t)$ es una fuerza aleatoria que actúa sobre la partícula.

A esta ecuación se le llama Ecuación de Langevin y usualmente se le imponen tres condiciones:

i).- la fuerza consiste de un término lineal en v , el cual es el amortiguamiento, más un término $f(t)$ independiente del estado v de la partícula.

ii).- El término $f(t)$ es una fuerza aleatoria, que satisface:

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad (5.3)$$

donde el promedio es tomado sobre un ensamble de muchos sistemas, todos consistiendo de una partícula inmersa en un fluido.

iii).- La fuerza f varía rápidamente en el tiempo, y satisface la relación:

$$\langle f(t)f(t') \rangle = \Gamma \delta(t-t'), \quad (5.4)$$

en donde Γ es una constante. Cada colisión es prácticamente instantánea y las colisiones sucesivas no están correlacionadas.

Si f satisface éstas condiciones, se dice que la partícula está sujeta a ruido blanco, porque la transformada de Fourier del coeficiente de correlación no depende de ω (en analogía con la luz). Por otro lado si $\langle f(t) \rangle = 0$ y no es delta correlacionado, entonces se llama ruido de color porque la transformada de Fourier depende de ω (también en analogía con la luz). En particular es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck¹⁰ en el cual:

$$\langle f(t)f(t') \rangle = \exp - \frac{|t-t'|}{\tau} \quad (5.5)$$

donde τ es el tiempo de correlación, es claramente un proceso con ruido de color.

La *ecuación de Langevin* es un ejemplo simple de una *ecuación diferencial estocástica*, porque uno de los términos, f , es una función aleatoria con propiedades estadísticas dadas.

La ecuación de Langevin puede generalizarse¹⁰ a otras situaciones más complicadas, quedando:

$$\dot{x} = a[X(t), t] + b[X(t), t] \xi(t) \quad (5.6)$$

que sería la expresión más general de una ecuación diferencial estocástica.

6. ECUACION DE FOKKER-PLANCK

El origen del nombre: *Ecuación de Fokker-Planck*, surge de Fokker y Planck, ya que fueron los primeros en usarla para describir el movimiento browniano de las partículas en presencia de un campo radiactivo, e intentar construir una teoría completa de fluctuaciones, sobre esta base.

La ecuación de Fokker-Planck describe una gran clase de procesos estocásticos muy interesantes, los cuales tienen una trayectoria continua y proporciona la evolución de la función de densidad de probabilidad del estado estocástico para el sistema.

Existen varias alternativas para la deducción de la ecuación de Fokker-Planck, como es a partir de la ecuación *maestra*⁶, de la ecuación *diferencial de Chapman-Kolmogorov* e incluso a partir de la ecuación de *Langevin*¹⁰. Una forma simple es como sigue⁶. Considere una función arbitraria $f[x(t)]$ de $x(t)$, entonces desarrollando $df[x(t)]$ a segundo orden en $dw(t)$, se tiene:

$$d[f(x(t))] = f[x(t) + dx(t)] - f[x(t)] \\ = f'[x(t)]dx(t) + \frac{1}{2}f''[x(t)]dx(t)^2 + \dots \quad (6.1)$$

ahora de la ecuación de Langevin (5.6) de la sección anterior:

$$dx(t) = [a[x(t), t] + b[x(t), t] \xi(t)] dt \quad (6.2)$$

y sustituyendo esta última ecuación en (6.1) resulta

$$d[f(x(t))] = f'[x(t)]\{a[x(t), t]dt + b[x(t), t]dW(t)\} \\ + \frac{1}{2}f''[x(t)]b[x(t), t]^2[dW(t)]^2 + \dots, \quad (6.3)$$

descartando todos los términos de orden superior y usando

$[dW(t)]^2 = dt$ se obtiene

$$d[f(x(t))] = \{ a[x(t), t]f'[x(t)] + \frac{1}{2}b[x(t), t]^2f''[x(t)] \} dt \\ + b[x(t), t]f'[x(t)]dW(t). \quad (6.4)$$

ahora considere el promedio del desarrollo temporal de una $f(x(t))$ arbitraria y usando la fórmula anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{df[x(t)]}{dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{df[x(t)]}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle f[x(t)] \rangle = \\ &= \left\langle a[x(t), t] \partial_x f[x(t)] + \frac{1}{2} b[x(t), t]^2 \partial_x^2 f[x(t)] \right\rangle \quad (6.5) \\ &= \left\langle a[x(t), t] \partial_x f + \frac{1}{2} b[x(t), t]^2 \partial_x^2 f \right\rangle, \end{aligned}$$

sin embargo $x(t)$ tiene una densidad de probabilidad condicional $P(x, t; x_0, t_0)$ y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f[x(t)] \rangle &= \frac{d}{dt} \int dx f(x) P(x, t; x_0, t_0) = \\ &= \int dx f(x) \partial_t P(x, t; x_0, t_0) = \quad (6.6) \\ &= \int dx \left[a(x, t) \partial_x f + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \partial_x^2 f \right] P(x, t; x_0, t_0), \end{aligned}$$

integrando por partes y descartando las integrales de superficie se obtiene

$$\int dx f(x) \partial_t P = \int dx f(x) \left[-\partial_x [a(x, t) P] + \frac{1}{2} \partial_x^2 [b(x, t)^2 P] \right], \quad (6.7)$$

y de aquí, siendo $f(x)$ arbitraria,

$$\frac{\partial P(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x, t) P(x, t | x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x, t)^2 P(x, t | x_0, t_0)], \quad (6.8)$$

por lo que la ecuación de difusión queda especificada si se conoce el coeficiente de deriva $a(x, t)$ y el coeficiente de difusión $b(x, t)$.

Así pues se ha partido de una función arbitraria $f(x(t))$ de $x(t)$ para obtener finalmente una ecuación diferencial en términos de la densidad de probabilidad, mejor conocida como la ecuación de Fokker-Planck, cuya solución caracteriza la evolución de la función de probabilidad del estado de una amplia clase de sistemas.

Reescribiendo (6.8) resulta:

$$\frac{\partial P(X,t)}{\partial t} = -\frac{\partial [A(X)P]}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [B(X)P]}{\partial X^2} . \quad (6.9)$$

El rango de X es necesariamente continuo, los coeficientes $A(X)$ y $B(X)$ pueden ser cualquier función real diferenciable, con la única restricción $B(X) > 0$. La ecuación (6.9) puede dividirse en una *ecuación continua* para la densidad de probabilidad

$$\frac{\partial P(X,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(X,t)}{\partial X} , \quad (6.10)$$

donde $J(X,t)$ es el flujo de probabilidad, y una ecuación constitutiva

$$J(X,t) = A(X)P - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} [B(X)P] , \quad (6.11)$$

la ecuación (6.9) además de ser la ecuación de Fokker-Planck⁶, es también llamada ecuación de *Smoluchowski*, ecuación segunda de *Kolmogorov* o ecuación generalizada de *difusión*. El primer término de la derecha de (6.9) ha sido llamado término de transporte, término de convección o término de deriva, el segundo término de difusión o término de fluctuación. Desde luego que todos estos nombres no cambian la interpretación física.

II. INTEGRALES DE TRAYECTORIA

En este capítulo se describirá la integral de trayectoria y se mostrará su empleo en la solución de problemas estocásticos.

Se aplica en particular a la ecuación de Langevin y se compara con el resultado obtenido por otros métodos.

1. DEFINICION DE INTEGRALES DE TRAYECTORIA

En un intento por desarrollar una formulación diferente de la mecánica cuántica, *Feynman*¹¹ introdujo el concepto de sumas sobre trayectorias.

El problema se puede plantear de la siguiente manera: se desea calcular la probabilidad de que una partícula se encuentre en la posición x_b al tiempo t_b , sabiendo que se encontraba en x_a al tiempo t_a . En mecánica cuántica se define la amplitud de probabilidad frecuentemente llamada kernel, la cual se denota como $K(b,a)$. Esta es la suma de las amplitudes de probabilidad individuales de todas las trayectorias que van del punto a al punto b .

Uno de los métodos más elegantes para determinar la trayectoria particular $x(t)$ que sigue una partícula, en mecánica clásica, lo proporciona el principio de mínima acción. Este establece que existe una cierta cantidad S (llamada "acción") que puede ser calculada para cada trayectoria, y la trayectoria clásica $x(t)$ es tal que S toma el valor mínimo, aunque la condición real es que S sea una extremal. Entonces se dice que el valor de S no cambia a primer orden si la trayectoria es modificada ligeramente. La cantidad S se define por la expresión

$$S[b,a] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt, \quad (1.1)$$

donde L es el lagrangiano del sistema. Para una partícula de masa m moviéndose en un potencial $V(x,t)$, el lagrangiano es

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x,t) \quad (1.2)$$

La forma de la trayectoria extremal $x(t)$ se determina con los procedimientos usuales del cálculo variacional. Entonces, supóngase que la trayectoria se desvía de \bar{x} por una pequeña

cantidad $\delta x(t)$; la condición para que los puntos extremos queden fijos requiere que

$$\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0 \quad (1.3)$$

y la condición de que x sea una extremal de S significa que

$$\delta S = S[x + \delta x] - S[x] = 0 \quad (1.4)$$

a primer orden en δx . Usando la ecuación (1.1) se puede escribir

$$\begin{aligned} S[x + \delta x] &= \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{x} + \delta \dot{x}, x + \delta x, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[L(\dot{x}, x, t) + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} + \delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] dt \\ &= S[x] + \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \end{aligned} \quad (1.5)$$

integrando por partes, la variación en S resulta

$$\delta S = \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta x \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] dt \quad (1.6)$$

Utilizando el hecho de que los puntos extremos son fijos, entonces el primer término del lado derecho de esta ecuación es 0. Entre los puntos extremos δx puede tomar cualquier valor arbitrario. Entonces la extremal es la curva a lo largo de la cual se satisface:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

que es la ecuación de Lagrange en mecánica clásica.

Ahora se puede dar la regla para la mecánica cuántica. Se dirá cuánto contribuye cada trayectoria al total de la amplitud para ir de a a b . Todas las trayectorias contribuyen igualmente, en promedio, al total de la amplitud, pero contribuyen con distintas fases. La contribución de la fase de una trayectoria dada es la acción S para la trayectoria en unidades

del cuanto de acción \hbar . La probabilidad $P(b,a)$ para ir del punto x_a al tiempo t_a al punto x_b al tiempo t_b es el cuadrado del valor absoluto de la amplitud $A(b,a)$ para ir del punto a hasta el punto b . Esta amplitud es la suma de las contribuciones $\Phi[x(t)]$ para cada trayectoria.

$$K(b,a) = \sum_{\substack{\text{sobre todas} \\ \text{las trayectorias} \\ \text{desde } a \text{ hasta } b}} \Phi[x(t)] \quad (1.8)$$

La contribución de una trayectoria particular tiene una fase proporcional a la acción S :

$$\Phi[x(t)] = \text{const.} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \quad (1.9)$$

donde la constante es seleccionada convenientemente para normalizar K y $S[x(t)]$ es la acción, definida en mecánica clásica.

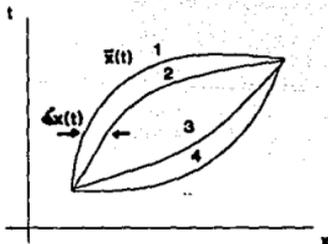
EL LIMITE CLASICO

La implicación más importante de la ecuación (1.9) es que todas las trayectorias contribuyen igualmente a través de la variación de sus fases, aunque no es muy claro cómo, en el límite clásico, alguna trayectoria particular resulta más importante. La aproximación clásica sin embargo, corresponde al caso en que las dimensiones, masas, tiempos, etc., son tan grandes que S es enorme en relación con \hbar ($\approx 1.05 \times 10^{-27}$ erg \cdot seg). Entonces la fase de la contribución S/\hbar es algunas veces un ángulo muy grande. La parte real (o imaginaria) de Φ es el coseno (o seno) de este ángulo. Esta fase tiene la misma probabilidad de dar una contribución positiva o negativa. Ahora, si se desplaza la trayectoria como se muestra en la figura, por un incrementó δx , pequeño en la escala clásica, el cambio en S es así mismo pequeño, pero no cuando se mide en unidades de \hbar . Estos cambios en la trayectoria, generalmente hacen cambios enormes en la fase, y el coseno o el seno oscilan excesivamente rápido. La contribución total entonces suma cero, porque si una trayectoria hace una contribución positiva, otra infinitesimalmente contigua (en la escala clásica) hace una contribución igualmente negativa, y por tanto no hay una contribución neta.

La trayectoria clásica 1, $x(t)$, es tal que para una cierta integral, la acción S , es un mínimo. Si la trayectoria varía por $\delta x(t)$, para la trayectoria 2, la integral no sufre cambios a primer orden. Esto lo determina la ecuación de movimiento. En mecánica cuántica, la amplitud para ir de a a b es la suma de las amplitudes para cada interferencia alternativa de la trayectoria. La

amplitud para una trayectoria dada, $e^{\frac{iS}{\hbar}}$, tiene una fase proporcional a la acción.

Si la acción S es muy grande comparada con \hbar , las trayectorias vecinas tales como 3 y 4 tienen acciones significativamente diferentes. Tales trayectorias (por lo pequeño de \hbar) tienen muy diferentes fases y su contribución se cancela. Solamente en las vecindades de la trayectoria clásica $x(t)$ varía, donde la acción cambia poco. Cuando las trayectorias varían, las trayectorias de la vecindad tales como 1 y 2, contribuyen con la misma fase e interfieren constructivamente. Esto es por la aproximación de la Física clásica - Esto es que solamente la trayectoria $x(t)$ necesita ser considerada - que es válida cuando la acción es muy grande comparada con \hbar .



Para la trayectoria especial \bar{x} para la cual S es una extremal un pequeño cambio en la trayectoria no produce, a primer orden, cambios en S . Todas las contribuciones de las trayectorias en esta región están casi en fase con la de $S_{\bar{x}}$ y no se cancelan. Por tanto, solamente para las trayectorias en la vecindad de \bar{x} pueden obtenerse contribuciones importantes, y en el límite clásico necesitamos solamente considerar estas trayectorias particulares. De esta forma las leyes clásicas del movimiento se derivan de las leyes cuánticas.

Bajo estas condiciones podemos afirmar que, en el límite clásico el Kernel se puede escribir como

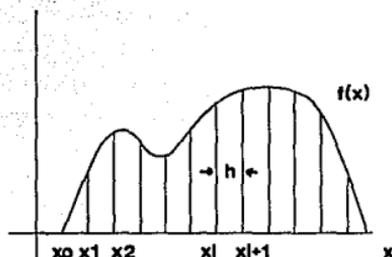
$$K(b,a) \sim e^{\frac{iS_{\bar{x}}}{\hbar}} \quad (1.10)$$

LA SUMA SOBRE TRAYECTORIAS

ANALOGIA CON LA INTEGRAL DE RIEMANN. A través de la idea cualitativa de una suma para la contribución de cada una de las trayectorias se puede dar una definición matemática más precisa de tales sumas. El número de trayectorias es un infinito de orden superior y no es evidente qué medida puede ser dada para el espacio de trayectorias. Comencemos con la integral de Riemann, diciendo que el área A debajo de una curva, es la suma de todas las ordenadas. Mejor aún puede decirse que ésta es proporcional a la suma. Pero para hacer precisa la idea, haremos esto: tómesese un subconjunto de todas las ordenadas (todas separadas con iguales intervalos h). Sumando las ordenadas, se obtiene

$$A = \sum_i f(x_i) \quad (1.11)$$

donde la suma se realiza sobre un conjunto infinito de puntos x_i como se muestra en la figura.



En la definición de la integral ordinaria de Riemann, un conjunto de ordenadas es dibujado desde la abscisa hasta la curva. Las ordenadas son espaciadas por una distancia h . La integral (el área entre la curva y la abscisa) es aproximada por h veces la suma de las ordenadas. Esta aproximación se acerca al valor correcto cuando h se aproxima a cero.

Una definición análoga puede ser usada para las integrales de trayectoria, la medida que va desde cero en el proceso límite es el intervalo ϵ entre los puntos discretos sobre las trayectorias.

El siguiente paso es definir A como el límite de esta suma tomando valores cada vez más pequeños de h . Haciendo esto, pueden obtenerse sumas diferentes para cada valor de h . El límite no existe. El procedimiento para obtener un límite en este proceso debe ser especificado por algún factor de normalización el cual dependa de h . Por supuesto, para la integral de Riemann, este factor es justamente el mismo h . En este caso el límite existe y puede escribirse como

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \left[h \sum_i f(x_i) \right] \quad (1.12)$$

Puede seguirse un procedimiento análogo para definir la suma sobre todas las trayectorias, dividiendo la variable independiente t en intervalos de amplitud ϵ , dando como resultado un conjunto de valores t_j espaciados una distancia ϵ entre los valores t_j y t_{j+1} . A cada t_j le corresponde algún punto especial x_j . Si ahora se construye una trayectoria uniendo todos los puntos así seleccionados con líneas rectas, esto hace posible definir una suma sobre todas las trayectorias construidas de ésta manera, tomando una integral múltiple sobre todos los valores x_j para j entre 1 y $N-1$, donde

$$\begin{aligned}
 N\varepsilon &= l_b - l_a \\
 \varepsilon &= l_{j+1} - l_j \\
 l_0 &= l_a & l_N &= l_b \\
 x_0 &= x_a & x_N &= x_b
 \end{aligned}$$

Esta suma se acostumbra a escribir como

$$K(b,a) = \int \int \dots \int \Phi[x(t)] dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} \quad (1.13)$$

En este caso, se puede obtener una representación más simple del conjunto completo de todas las posibles trayectorias entre a y b haciendo ε pequeño. Sin embargo, en el caso de la integral de Riemann, no es posible proceder a tomar el límite, porque este límite no existe. No obstante es posible proveer un factor de normalización el cual esperamos que dependa de ε . Desafortunadamente, definir tal factor de normalización, al parecer, es un problema muy difícil y no se sabe cómo obtenerlo en términos generales, pero se conoce cómo dar una definición para las situaciones particulares. Por ejemplo, tomando el caso donde el lagrangiano está dado por la ecuación (1.2) (partícula libre), el factor de normalización resulta ser A^{-N} , donde

$$A = \left(\frac{2\pi\hbar\varepsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.14)$$

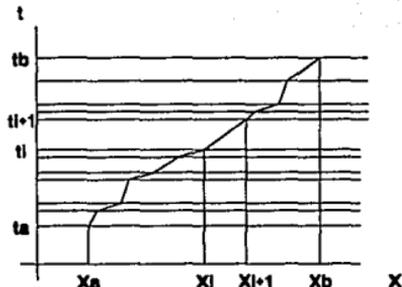
el límite de este factor existe y se puede escribir

$$K(b,a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int \int \dots \int e^{\frac{i}{\hbar} S[b,a]} \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \dots \frac{dx_{N-1}}{A} \quad (1.15)$$

donde

$$S[b,a] = \int_a^b L(\dot{x}, x, t) dt \quad (1.16)$$

es una integral de línea tomada sobre la trayectoria pasando a través de los puntos x_i entre las secciones rectas como en la siguiente figura



La suma sobre trayectorias es definida como un límite en el cual la primer trayectoria es especificada dando solamente la coordenada x en un gran número de tiempos específicos separados por pequeños intervalos ϵ . La suma sobre la trayectoria es entonces una integral sobre todas estas coordenadas específicas. Entonces para conseguir la medida correcta se toma el límite cuando ϵ tiende a cero.

Entonces se escribirá la suma sobre todas las trayectorias en notación menos restringida como:

$$K(b,a) = \int_a^b e^{(\frac{i}{\hbar})S[x,b,a]} Dx(t) \quad (1.17)$$

Calcular éstas integrales múltiples en forma analítica (de hecho, un número infinito de ellas) resulta, en general, muy difícil y sólo se ha calculado un número muy limitado de éstas. De particular importancia es la integral de trayectoria para el caso en que se tenga un lagrangiano cuadrático (resuelto por el mismo Feynman) llamadas integrales gaussianas. En este caso, el lagrangiano se escribe como:

$$L = a(t)x^2 + b(t)tx + c(t)x^2 + d(t)t + e(t)x + f(t) \quad (1.18)$$

La acción es la integral de esta función con respecto al tiempo entre dos puntos fijos. En esta forma el lagrangiano es un poco más general de lo necesario. El factor x puede ser removido de estos términos lineales a través de una integración por partes.

Se desea determinar

$$K(b,a) = \int_a^b \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{x_a}^{x_b} L(x,x,t) \right] Dx(t) \quad (1.19)$$

que es la suma sobre todas las trayectorias que van desde (x_a, t_a) hasta (x_b, t_b) .

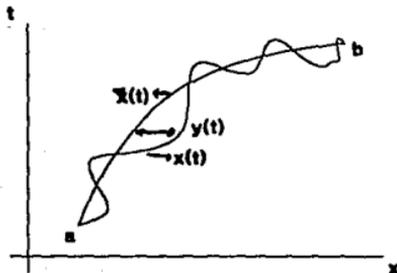
Sea $\bar{x}(t)$ la trayectoria clásica entre los puntos específicos x_a y x_b . Esta es la trayectoria extremal para la acción \mathcal{S} . En nuestra notación se tiene que

$$\mathcal{S}[b,a] = \mathcal{S}[\bar{x}(t)] \quad (1.20)$$

puediendo representar x en terminos de \bar{x} y una nueva variable y :

$$x = \bar{x} + y \quad (1.21)$$

Esto es, que en vez de definir un punto sobre la trayectoria por una distancia $\bar{x}(t)$ desde un eje coordenado arbitrario, en su lugar se mide la desviación $y(t)$ desde la trayectoria clásica, como se muestra en la figura.



La diferencia entre la trayectoria clásica $\bar{x}(t)$ y alguna otra trayectoria $x(t)$ es la función $y(t)$. De aquí que ambas trayectorias avancen los mismos puntos extremos, $y(t_a) = y(t_b) = 0$. Entre estos puntos $y(t)$ puede tomar cualquier forma. La trayectoria clásica es completamente fija y cualquier variación en la trayectoria alternativa $x(t)$ es equivalente a la variación asociada en la diferencia $y(t)$. Entonces, en una integral de trayectoria, la diferencial de trayectoria $Dx(t)$ puede ser reemplazada por $Dy(t)$, y la trayectoria $x(t)$ por $\bar{x}(t) + y(t)$. En esta forma $\bar{x}(t)$ es una constante para la integración sobre las trayectorias. La nueva variable de trayectoria $y(t)$ está restringida a tomar el valor cero en los puntos extremos a y b . Esta sustitución conduce a una integral de trayectoria independientemente de la posición de los puntos extremos.

En cada t las variables x y y difieren por la constante \bar{x} . (por supuesto que esta es una constante diferente para cada valor de t), por lo que claramente $dx_i = dy_i$ para cada punto específico i en la subdivisión del tiempo. En general puede decirse que $Dx(t) = Dy(t)$.

Entonces partiendo de la ecuación (1.18) para el lagrangiano cuadrático y haciendo el cambio de variable $x = \bar{x} + y$ se tiene:

$$L = a(\bar{x} + y)^2 + b(\bar{x} + y)(\bar{x} + y) + c(\bar{x} + y)^2 + d(\bar{x} + y) + e(\bar{x} + y) + f \quad (1.22)$$

$$L = a\bar{x}^2 + 2a\bar{x}y + ay^2 + b\bar{x}\bar{x} + b\bar{x}y + b\bar{y}\bar{x} + b\bar{y}y + c\bar{x}^2 + 2c\bar{x}y + cy^2 + d\bar{x} + d\bar{y} + e\bar{x} + ey + f \quad (1.23)$$

Entonces la integral para la acción puede escribirse

$$\begin{aligned} S[X(t)] &= S[\bar{x}(t) + y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [a\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{x} + c\bar{x}^2 + d\bar{x} + e\bar{x} + f] dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [2a\bar{x}y + b\bar{x}y + b\bar{y}\bar{x} + 2c\bar{x}y + d\bar{y} + ey] dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [ay^2 + b\bar{y}y + cy^2] dt \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde la primer integral resulta ser la acción clásica, es decir:

$$S_{cl}[b,a] = \int_{t_a}^{t_b} [a\dot{x}^2 + b\dot{x} + c\dot{x}^2 + d\dot{x} + e\dot{x} + f] dt \quad (1.25)$$

mientras que la segunda, se reduce a cero de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \int_{t_a}^{t_b} [2a\dot{x}y + b\dot{x}y + b\dot{x}y + 2c\dot{x}y + d\dot{y} + e\dot{y}] dt = \\ & \int_{t_a}^{t_b} [2a\dot{x} + b\dot{x} + d] y dt + \int_{t_a}^{t_b} [b\dot{x} + 2c\dot{x} + e] y dt \end{aligned} \quad (1.26)$$

integrando por partes la primera de estas dos integrales, y empleando el hecho de que

$$y = \frac{dy}{dt} \quad \text{---} \quad y dt = dy \quad \text{se reduce a:}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} [2a\dot{x} + b\dot{x} + d] dy &= (2a\dot{x} + b\dot{x} + d) y \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} y d [2a\dot{x} + b\dot{x} + d] \\ &= - \int_{t_a}^{t_b} y (2a\ddot{x} + b\ddot{x}) dt \end{aligned} \quad (1.27)$$

y sustituyendo este resultado en la ecuación (1.26) se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} [2a\dot{x}\dot{y} + b\ddot{x}\dot{y} + b\dot{x}\ddot{y} + 2c\bar{x}\dot{y} + d\dot{y} + e\dot{y}] dt = \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} [2a\ddot{x} + b\ddot{\dot{x}}] y dt + \int_{t_1}^{t_2} [b\dot{x} + 2c\bar{x} + e] y dt \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} (2c\bar{x} - 2a\ddot{x} + e) y dt = 0
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

esta última integral es cero debido a que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2a\dot{x} + bx + d, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2a\ddot{x} + b\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = b\dot{x} + 2c\bar{x} + e, \tag{1.29}$$

que no es más que la ecuación de Lagrange

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 2a\ddot{x} - 2c\bar{x} - e = 0 \tag{1.30}$$

y por tanto la acción se puede escribir

$$S[X(t)] = S_a[b, a] + \int_{t_1}^{t_2} [a(t)\dot{y}^2 + b(t)\dot{y}y + c(t)y^2] dt \tag{1.31}$$

La integral sobre todas la trayectorias no depende de la trayectoria clásica, y el kernel puede escribirse como

$$K(b, a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_c(b, a)} \int_0^0 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} [a(t)y^2 + b(t)y + c(t)y^2] dt \right\} Dy(t). \quad (1.32)$$

Y puesto que todas las trayectorias $y(t)$ parten y regresan al punto $y=0$, la integral sobre todas las trayectorias puede ser una función solamente del tiempo en los puntos extremos. Esto significa que el kernel puede escribirse como

$$K(b, a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_c(b, a)} F(t_a, t_b) \quad (1.33)$$

donde $F(t_a, t_b)$ es una función que no depende de las variables espaciales x_a y x_b , y S_c es la acción extremal, que se obtiene en mecánica clásica.

Los problemas estocásticos encuentran una expresión natural en términos de estas integrales de trayectoria. Uno de los problemas estocásticos simples es el movimiento browniano descrito por la ecuación de Langevine (ya mencionado anteriormente) que se resuelve fácilmente con esta técnica.

Aquí se analizará un método para resolver estos problemas, siempre y cuando se conozca la solución formal de la ecuación diferencial estocástica:

$$\dot{x} = a[X(t), t] + b[X(t), t]f(t), \quad (1.34)$$

que es la forma general de las ecuaciones diferenciales estocásticas. La función $f(t)$ que aparece en el miembro derecho de la ecuación (1.34) es una función estocástica, la cual fluctúa rápidamente con el tiempo y cuyas propiedades estocásticas son conocidas.

Si se conoce la función de distribución de probabilidad para $f(t)$ esto es, $P_f[f(t)]$, entonces, para cada $f(t)$ existe una $\chi(t)$ relacionadas de la siguiente forma:

$$P_\chi[x(t)] D x(t) = P_f[f(t)] D f(t), \quad (1.35)$$

Si f y x están relacionadas linealmente, el "jacobiano" no depende de $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots$, entonces (1.35) adquiere la forma

$$P_x[x(t)] \sim P_x[f(t)], \quad (1.36)$$

La función de proporcionalidad en esta expresión, depende exclusivamente del tiempo, que puede ser obtenido por la normalización de la función de densidad de probabilidad resultante.

Al calcular $P_x[x(t)]$ se obtiene la densidad de probabilidad de $x(t)$ tomada por el sistema. El hecho interesante es que mediante la densidad de probabilidad condicional, teniendo en cuenta ciertas condiciones a la frontera, es posible calcular la función de densidad de probabilidad condicional

$$P(x, t; x_0, t_0) = \int P_x[x(\tau)] Dx(\tau), \quad (1.37)$$

que tiene la forma de una integral de trayectoria.

Para mostrar la efectividad de este método, se aplicará a un problema muy sencillo, que ya ha sido resuelto por varios métodos e incluso por el de integral de trayectoria.

Para una deducción más rigurosa de la integral de trayectoria de Feynman puede consultarse a: *Schulman*¹⁴ o *Muldowney*¹⁵.

2. INTEGRALES DE TRAYECTORIA Y LA ECUACION DE LANGEVIN

En esta sección se mostrará cómo se aplica el método¹² de las *integrales de trayectoria* al resolver la ecuación de Langevin, la cual describe el movimiento browniano con ruido gaussiano blanco (*problema resuelto por Chandrasekhar*¹³), y posteriormente se dedicará todo el capítulo siguiente para analizar el mismo problema pero con ruido de color (*el ruido de color es un tema que se trabaja bastante en la actualidad*). Normalmente cuando aparece el ruido de color se utilizan métodos aproximados o bien se encuentra la solución estacionaria, casi nunca la solución analítica completa del problema. Veamos cómo funciona el método enfrentando el problema del movimiento browniano, el cual consiste en determinar la densidad de probabilidad condicional $P(v, t; v_0)$ de encontrar a la partícula con una velocidad v al tiempo t , dado que partió con una velocidad inicial v_0 al instante $t=0$.

De la ecuación de *Langevin*

$$\dot{v} + \beta v(\tau) = f(\tau), \quad (2.1)$$

Donde β es el coeficiente de fricción, y $f(\tau)$ es una fuerza aleatoria, pidiendo que se satisfagan las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \tau=0, v(\tau=0) &= v_0 \\ \tau=t, v(\tau=t) &= v. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aplicando la ec (1.11) de la sección anterior al problema se obtiene:

$$P(v, t; v_0) = \int P, [v(\tau)] Dv(\tau), \quad (2.3)$$

mientras que la ecuación (1.9) de la sección anterior adquiere la forma

$$P, [v(\tau)] Dv(\tau) = P, [f(\tau)] Df(\tau), \quad (2.4)$$

$$- P, [v(\tau)] = \frac{Df(\tau)}{Dv(\tau)} P, [f(\tau)], \quad (2.5)$$

donde $\frac{Df(\tau)}{Dv(\tau)}$ es el "jacobiano" de la transformación.

Resolviendo formalmente la ecuación (2.1) sujeta a las condiciones (2.2) se encuentra

$$v(t) = v_0 e^{-\beta t} + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

en esta expresión el jacobiano no depende de ν o κ por lo que (2.5) se puede escribir como

$$P_{\nu}[v(\tau)] = N' P_f[f(\tau)], \quad (2.7)$$

donde N' es el factor de proporcionalidad que depende solamente de t , y que puede ser determinado por la normalización de ambos lados de la ecuación (2.7).

Por hipótesis $f(\tau)$ es un proceso gaussiano de ruido blanco y entonces se puede escribir como

$$P_f[f(\tau)] = R e^{-\frac{1}{2} \int_0^t f^2(\tau) d\tau}, \quad (2.8)$$

con $\varphi > 0$ y R una constante de normalización. Sustituyendo la ecuación (2.8) en (2.7) se obtiene

$$P_{\nu}[v(\tau)] = N' R e^{-\frac{1}{2} \int_0^t v^2(\tau) d\tau}, \quad (2.9)$$

$$P_{\nu}[v(\tau)] = N(t) e^{-S(t)}, \quad (2.10)$$

con el factor de normalización $N(t) = N' R$ y además

$$S(t) = \int_0^t L(\tau) d\tau, \quad (2.11)$$

con

$$L(\tau) = -\varphi f^2(\tau). \quad (2.12)$$

Entonces la función de densidad de probabilidad condicional para las velocidades sujeta a las condiciones (2.2), es

$$P(v, \tau; v_0) = \int N(\tau) e^{-\beta \tau} Dv(\tau). \quad (2.13)$$

De las ecuaciones (2.1) y (2.12) se obtiene

$$L(\tau) = -\alpha[\dot{v}(\tau) + \beta v(\tau)]^2. \quad (2.14)$$

En este caso particular $L(\tau)$ es una función cuadrática en las variables v y \dot{v} y la ecuación (2.13) resulta ser una integral del tipo gaussiano. Entonces es posible mostrar que la integral de trayectoria es

$$P(v, \tau; v_0) = N(\tau) e^{-S(\tau)} \quad (2.15)$$

donde $S(\tau)$ resulta ser la extremal.

Entonces para obtener la trayectoria extremal sujeta a las condiciones (2.2) basta encontrar la trayectoria $v(\tau)$ para la cual $\delta S = 0$ sujeta a las condiciones (2.2). La condición $\delta S = 0$ aplicada a la ecuación (2.11) da lugar a la ecuación de Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0. \quad (2.16)$$

Sustituyendo la ecuación (2.14) en (2.16) se obtiene una ecuación diferencial ordinaria

$$\ddot{v} - \beta^2 v = 0, \quad (2.17)$$

cuya solución es

$$\tilde{v}(\tau) = c_1 e^{\beta \tau} + c_2 e^{-\beta \tau}. \quad (2.18)$$

Imponiendo las condiciones iniciales (2.2):

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\tau=0) &= c_1 + c_2 = v_0 \\ \tilde{v}(\tau=t) &= c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t} = v, \end{aligned} \quad (2.19)$$

y resolviendo este sistema de ecuaciones para c_1 y c_2 se encuentra

$$c_1 = \frac{v - v_0 e^{-\beta t}}{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}, \quad c_2 = \frac{v_0 e^{\beta t} - v}{e^{\beta t} - e^{-\beta t}} \quad (2.20)$$

Ahora a partir de la ecuación (2.18) evaluando $L(\tau)$ y $S(\tau)$ con las ecuaciones (2.14) y (2.11), respectivamente

$$L(\tau) = -4q\beta^2 c_1^2 e^{2\beta\tau} \quad (2.21)$$

y

$$\bar{S}(\tau) = -2q\beta c_1^2 (e^{2\beta\tau} - 1) = -\frac{2q\beta(v - v_0 e^{-\beta\tau})^2}{(1 - e^{-2\beta\tau})}, \quad (2.22)$$

por lo tanto, de la ecuación (2.15) se obtiene la función de densidad de probabilidad condicional para las velocidades

$$P(v, t; v_0) = N(t) \exp\left[-\frac{2q\beta(v - v_0 e^{-\beta t})^2}{(1 - e^{-2\beta t})}\right], \quad (2.23)$$

Este resultado obtenido es una distribución bien conocida para la ecuación de Langevin o como una solución para la ecuación de Fokker-Planck correspondiente. Con éste método la solución analítica es más directa en comparación con otros métodos¹³

III. APLICACION DE LAS INTEGRALES DE TRAYECTORIA A UN PROBLEMA CON RUIDO DE COLOR

En este capítulo se presenta un modelo para encontrar la función de densidad de probabilidad condicional de la partícula sujeta a ruido de color, a través de las integrales de trayectoria, partiendo de la ecuación de Langevin como una ecuación diferencial estocástica de segundo orden, y conociendo su solución formal con ciertas condiciones iniciales.

Partiendo de la ecuación de *Langevin* y con la ayuda de las *integrales de trayectoria* se determinará la función de densidad de probabilidad condicional $P(x, t; x_0, v_0)$ de que la partícula se localice en el instante t con una posición x dado que partió con una velocidad v_0 en x_0 al tiempo $t=0$.

$$\ddot{x}(t) + \beta \dot{x}(t) = f(t), \quad (1)$$

con $f = \beta r = f(t)$ se encuentra la solución formal

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{e^{r_1 t}}{r_1 - r_2} \int e^{-r_1 t'} f(t') dt' + \frac{e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} \int e^{-r_2 t'} f(t') dt', \quad (2)$$

en el caso de la solución homogénea

$$r^2 + \beta r = 0 \quad (3)$$

$$\therefore r_1 = 0, r_2 = -\beta,$$

las raíces son reales y distintas, por lo que la solución formal queda como

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta} \int_0^t f(t') dt' - \frac{e^{-\beta t}}{\beta} \int_0^t e^{\beta t'} f(t') dt', \quad (4)$$

y derivando (4) respecto a t

$$\dot{x}(t) = -\beta c_2 e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta t'} f(t') dt' \quad (5)$$

imponiendo las condiciones iniciales en (4) y (5)

$$\begin{aligned} x(t=0) &= c_1 + c_2 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= -\beta c_2 = v_0 \end{aligned} \quad (6)$$

se encuentran los valores para las constantes c_1 y c_2 respectivamente .

$$c_1 = x_0 + \frac{v_0}{\beta} \quad , \quad c_2 = -\frac{v_0}{\beta} \quad (7)$$

sustituyendo (7) en (4) se encuentra,

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\beta} - \frac{v_0}{\beta} e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta} \int_0^t f(t') dt' - \frac{e^{-\beta t}}{\beta} \int_0^t e^{\beta t'} f(t') dt' \quad (8)$$

y sustituyendo (8) en la expresión de la función de densidad de probabilidad condicional

$$P(x, t; x_0, v_0) = \int D[\eta] P[\eta] \delta(x-x'), \quad (9)$$

donde

$$P[\eta] = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t ds \int_0^s ds' \eta(s) K(s-s') \eta(s')} \quad (10)$$

es la expresión para cualquier tipo de ruido gaussiano, y

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-x'k} dk \quad (11)$$

es la función delta de Dirac. La función de densidad de probabilidad condicional queda

$$P(x, t; x_0, v_0) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik} \int D[f] e^{iS(t)}, \quad (12)$$

con

$$S(t) = -\frac{1}{2} \int ds \int ds' f(s) f(s') k(s-s') - \frac{ik}{\beta} \int_0^t f(t') dt' + \frac{ike^{-\beta t}}{\beta} \int_0^t e^{\beta t'} f(t') dt', \quad (13)$$

y

$$B = i(x - x_0 - \frac{v_0}{\beta} + \frac{v_0}{\beta} e^{-\beta t}). \quad (14)$$

Donde se ve que la integral de trayectoria es una integral del tipo gaussiano, y por lo expuesto en la sección 1 del capítulo dos su solución es $\int D[f(t)] e^{iS(t)} = e^{i\bar{S}}$, donde \bar{S} es la extremal la cual se encuentra al aplicar la condición $\delta S = 0$ en la ecuación (13) para conseguir

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta f(\tau)} = & -\frac{1}{2} \int \int ds ds' f(s) \frac{\delta f(s')}{\delta f(\tau)} + \\ & f(s') \frac{\delta f(s)}{\delta f(\tau)} k(s-s') - \frac{ik}{\beta} \int [1 - e^{\beta(t'-\tau)}] \frac{\delta f(t')}{\delta f(\tau)} dt' = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{2} \int ds f(s) k(s-\tau) + \frac{1}{2} \int ds' f(s') k(\tau-s') + \frac{ik}{\beta} [1 - e^{\beta(\tau-t)}] = 0, \quad (16)$$

De aquí, se sigue que:

$$\int ds f(s) k(s-\tau) = -\frac{ik}{\beta} [1 - e^{\beta(\tau-\eta)}]. \quad (17)$$

Aplicando el teorema de convolución dos veces a (17), se encuentra

$$-f(t) = -\frac{ik}{\beta} \int c(t-\tau) [1 - e^{\beta(\tau-\eta)}] d\tau, \quad (18)$$

y sustituyendo en (13) se tiene

$$\begin{aligned} \bar{s}(t) = & -\frac{k^2}{2\beta^2} \iiint ds ds' d\tau d\tau' c(s-\tau) [1 - e^{\beta(\tau-\eta)}] c(s'-\tau') [1 - e^{\beta(\tau'-\eta)}] k(s-s') + \\ & \frac{k^2}{2\beta^2} \iint d\tau' d\tau c(\tau'-\tau) [1 - e^{\beta(\tau-\eta)}] - \frac{k^2}{\beta^2} e^{-\beta\tau} \iint d\tau d\tau' e^{\beta\tau'} c(\tau'-\tau) [1 - e^{\beta(\tau-\eta)}] \end{aligned} \quad (19)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bar{s}(t) = & -\frac{k^2}{2\beta^2} \iint d\tau d\tau' [1 - e^{\beta(\tau-\eta)}] c(\tau-\tau') [1 - e^{\beta(\tau'-\eta)}] - \\ & \frac{k^2}{\beta^2} e^{-\beta\tau} \iint d\tau d\tau' e^{\beta\tau'} c(\tau'-\tau) [1 - e^{\beta(\tau-\eta)}] + \quad (20) \\ & \frac{k^2}{\beta^2} \iint d\tau d\tau' c(\tau'-\tau) [1 - e^{\beta(\tau-\eta)}], \end{aligned}$$

(En el apéndice A, se hace la comprobación de que los resultados hasta aquí encontrados son consistentes. Esta verificación se hace para ruido blanco y se llega al mismo resultado de Chandrasekhar¹³).

Entonces haciendo

$$D_1(t) = \int \int d\tau d\tau' [1 - e^{\beta(\tau-\tau')}] c(\tau-\tau') [1 - e^{\beta(\tau'-t)}], \quad (21)$$

$$D_2(t) = \int \int d\tau d\tau' e^{\beta\tau'} c(\tau'-\tau) [1 - e^{\beta(\tau-\tau)}], \quad (22)$$

$$D_3(t) = \int \int d\tau d\tau' c(\tau'-\tau) [1 - e^{\beta(\tau-\tau)}], \quad (23)$$

resulta

$$\bar{S}(t) = -\frac{k^2}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} D_1(t) + e^{-\beta t} D_2(t) - D_3(t) \right], \quad (24)$$

para calcular $D_1(t)$, $D_2(t)$, $D_3(t)$ se supondrá que :

$$c(t-t') = \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau_0}}, \quad (25)$$

que es el coeficiente de correlación de un proceso Ornstein-Uhlenbeck, y τ_0 es el tiempo de correlación, por lo que la ecuación (21) adquiere la forma:

$$D_1(t) = \int \int dt' dt'' [1 - e^{\beta(t'-t)}] [1 - e^{\beta(t''-t)}] \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{|t'-t''|}{\tau_0}}, \quad (26)$$

Resolviendo la primer integral resulta

$$D_1(t) = \frac{1}{2\tau_o} \int_0^t dt' [1 - e^{\beta(t'-t)}] \left(2\tau_o - \tau_o e^{-\frac{t'}{\tau_o}} - \tau_o e^{-\frac{1}{\tau_o}(t-t')} + \right. \\ \left. \frac{\tau_o}{\beta\tau_o+1} e^{-\beta t' - \frac{t'}{\tau_o}} - \frac{\tau_o}{\beta\tau_o+1} e^{\beta(t'-t)} - \frac{\tau_o}{\beta\tau_o-1} e^{-\frac{1}{\tau_o}(t'-t)} + \frac{\tau_o}{\beta\tau_o-1} e^{\beta(t'-t)} \right), \quad (27)$$

haciendo la segunda integral y un poco de álgebra, se obtiene el valor

$$D_1(t) = 2t - 2 \left[\frac{\beta\tau_o + 1}{\beta} \right] + \frac{1}{\beta[(\beta\tau_o)^2 - 1]} - \frac{2\tau_o}{(\beta\tau_o)^2 - 1} + \frac{\tau_o}{(\beta\tau_o)^2 - 1} + \\ \left[\frac{2[(\beta\tau_o)^2 - \beta\tau_o - 2]}{\beta[(\beta\tau_o)^2 - 1]} + \frac{1}{\beta[\beta\tau_o - 1]} e^{-\beta t} \right] e^{-\beta t} + \frac{2\beta\tau_o^2}{\beta\tau_o - 1} e^{-\frac{t}{\tau_o}} - \frac{2\beta\tau_o^2}{(\beta\tau_o)^2 - 1} e^{-\frac{t}{\tau_o} - \beta t}, \quad (28)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2} D_1(t) = t - \frac{1}{2} \left[\frac{2(\beta\tau_o + 1)^2 + 1}{\beta(\beta\tau_o + 1)} \right] + \frac{\beta\tau_o^2}{\beta\tau_o - 1} e^{-\frac{t}{\tau_o}} + \\ \left[\frac{(\beta\tau_o)^2 - \beta\tau_o - 2}{\beta[(\beta\tau_o)^2 - 1]} + \frac{1}{2\beta[\beta\tau_o - 1]} e^{-\beta t} - \frac{\beta\tau_o^2}{(\beta\tau_o)^2 - 1} e^{-\frac{t}{\tau_o}} \right] e^{-\beta t} \quad (29)$$

para calcular $\mathcal{A}(t)$ de la ecuación (22) se sustituye (25), obteniendo

$$D_2(t) = \frac{1}{\tau_o} \int \int dt' dt'' e^{\beta t'} [1 - e^{\beta(t'-t'')}] e^{-\frac{t''-t'}{\tau_o}} \quad (30)$$

Resolviendo la primer integral de (30) se encuentra

$$D_2(t) = \frac{1}{\tau_o} \int_0^t dt' [1 - e^{\beta(t'-t)}] \left\{ \frac{\tau_o e^{\beta t'}}{\beta \tau_o + 1} - \frac{\tau_o e^{-\frac{t'}{\tau_o}}}{\beta \tau_o + 1} + \frac{\tau_o e^{\frac{t'}{\tau_o} (\beta - \frac{1}{\tau_o})}}{\beta \tau_o - 1} - \frac{\tau_o e^{\beta t'}}{\beta \tau_o - 1} \right\} \quad (31)$$

haciendo la segunda integral se obtiene finalmente el valor de

$$D_2(t) = -\frac{(\beta \tau_o - 2)}{\beta(\beta \tau_o - 1)} + \left[\frac{(\beta \tau_o)^2 - \beta \tau_o^2 + \beta \tau_o - 1}{\beta(\beta \tau_o + 1)(\beta \tau_o - 1)} \right] e^{-\beta t} - \frac{1}{\beta(\beta \tau_o - 1)} e^{-\beta t} [e^{\beta t} - 1] \frac{\tau_o e^{-\frac{t}{\tau_o}}}{\beta \tau_o - 1} \quad (32)$$

$$e^{-\beta t} D_2(t) = \frac{(\beta \tau_o)^2 - \beta \tau_o^2 + \beta \tau_o - 1}{\beta(\beta \tau_o + 1)(\beta \tau_o - 1)} \left[\frac{-2 + \beta \tau_o + e^{-\beta t}}{\beta(\beta \tau_o - 1)} \right] e^{-\beta t} - \frac{\tau_o}{\beta \tau_o - 1} e^{-\frac{t}{\tau_o}} + \frac{\tau_o}{\beta \tau_o - 1} e^{-(\beta + \frac{1}{\tau_o})t} \quad (33)$$

Por último, para calcular $D_H(t)$ de la ecuación (23), sustituyendo (25) se tiene:

$$D_3(t) = \frac{1}{\tau_0} \iint dt' dt'' \{1 - e^{\beta U'(t)}\} e^{-\frac{|t''-t'|}{\tau_0}} \quad (34)$$

Resolviendo la primer integral de (34) se encuentra

$$D_3(t) = \int_0^t [1 - e^{-\beta t' \tau_0}] \left[2 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_0}} - e^{-\frac{t'}{\tau_0}} \right] dt' \quad (35)$$

y resolviendo la segunda integral resulta

$$\begin{aligned} \therefore D_3(t) = 2t & \left[\frac{2(\beta\tau_0)^2 + 3\beta\tau_0 + 2}{\beta(\beta\tau_0 + 1)} \right] + \left[\frac{2\beta\tau_0^2 - \tau_0}{\beta\tau_0 - 1} \right] e^{-\frac{t}{\tau_0}} + \\ & \left[\frac{\beta\tau_0 - 2}{\beta(\beta\tau_0 - 1)} \right] e^{-\beta t} - \frac{\tau_0}{\beta\tau_0 + 1} e^{-\left(\beta + \frac{1}{\tau_0}\right)t} \end{aligned} \quad (36)$$

sustituyendo las ecuaciones (29), (33) y (36) en (24)

$$\begin{aligned} \bar{S}(t) = \frac{k^2}{\beta^2} & \left\{ t - \frac{2(\beta\tau_0)^3 + (\beta\tau_0)^2 - \beta\tau_0^2 - 2}{2\beta(\beta\tau_0 + 1)(\beta\tau_0 - 1)} + \left[\frac{(\beta\tau_0)^2 - \beta\tau_0 - 2}{\beta(\beta\tau_0 + 1)(\beta\tau_0 - 1)} \right] e^{-\beta t} \right\} \\ & + \frac{k^2}{\beta^2} \left\{ \frac{1}{2\beta(\beta\tau_0 - 1)} e^{-2\beta t} - \frac{\beta\tau_0^2}{(\beta\tau_0 + 1)(\beta\tau_0 - 1)} e^{-\left(\beta + \frac{1}{\tau_0}\right)t} \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

por lo tanto la integral de trayectoria queda:

$$\int D[\xi(t)] e^{S(t)} = e^{\bar{S}} = e^{-k^2 A} \quad (38)$$

donde

$$A(t) = \frac{1}{\beta^2} \left\{ t - \frac{2(\beta\tau_0)^3 + (\beta\tau_0)^2 - \beta\tau_0^2 - 2}{2\beta(\beta\tau_0 + 1)(\beta\tau_0 - 1)} + \left[\frac{(\beta\tau_0)^2 - \beta\tau_0 - 2}{\beta(\beta\tau_0 + 1)(\beta\tau_0 - 1)} \right] e^{-\beta t} \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{1}{2\beta(\beta\tau_0 - 1)} e^{-2\beta t} - \frac{\beta\tau_0^2}{(\beta\tau_0 + 1)(\beta\tau_0 - 1)} e^{-(\beta + \frac{1}{\tau_0})t} \right\} \right\} \quad (39)$$

y sustituyendo el valor de la integral de trayectoria (38) en (12), la función de densidad de probabilidad condicional queda como:

$$P(x, t; x_0, v_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik^2 + ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{\beta^2}{4A}}, \quad (40)$$

o bien:

$$P(x, t; x_0, v_0) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{[x-x_0 - \frac{v_0}{\beta} + \frac{v_0}{\beta} - \beta t]^2}{4A}} \quad (41)$$

CONCLUSIONES

Se realizó una breve revisión de la teoría de los procesos estocásticos donde se destacaron algunos resultados y conceptos enfocados al trabajo desarrollado en el último capítulo. Estos sirvieron para comprender el desarrollo del problema tratado al igual que los resultados.

En el capítulo uno se definió la probabilidad bayesiana, sin la cual no podría haberse determinado el futuro probabilístico de la partícula, dadas las condiciones iniciales del sistema. Por otro lado, los procesos gaussianos resultan de gran utilidad, puesto que en el tratamiento del problema se hizo la suposición de que la partícula sigue una distribución del tipo gaussiano.

La herramienta más poderosa aquí empleada, sin duda alguna, resultó ser la integral de trayectoria, definida en el capítulo II, que fue aplicada al problema estocástico de una partícula con ruido de color, para encontrar finalmente su función de densidad de probabilidad condicional, ec. (41). Cabe destacar que casi todas las soluciones presentadas en trabajos que tratan con problemas de ruido de color son aproximaciones.

Hasta donde resultó posible, se cotejó el procedimiento seguido en la solución al problema, ya que en la extremal encontrada, ec. (20) se hace la suposición de que el coeficiente de correlación es una delta de Dirac (ruido blanco) y se llega al mismo resultado presentado por S. Chandraseckar. Sin embargo, respecto al problema aquí tratado, no se encontró en otros trabajos una solución analítica sin aproximaciones.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

En este trabajo se desarrolló un método para resolver este tipo de problemas que da resultado siempre que se conozca la solución "formal" de la ecuación diferencial. Desafortunadamente esto, en casos más interesantes, no es posible porque las ecuaciones diferenciales involucradas son no lineales.

APENDICE A

Ahora se obtendrá el resultado de S. Chandrasekhar, como caso particular, para ruido blanco. Supongase entonces que

$$c(\tau - \tau') = \frac{1}{2} \delta(\tau - \tau') \quad (a.1)$$

y sustituyendo en (1.21) del capítulo III, se obtiene

$$D_1(t) = \iint d\tau d\tau' [1 - e^{-\beta(\tau - \eta)}] \frac{1}{2} \delta(\tau - \tau') [1 - e^{-\beta(\tau' - \eta)}] \quad (a.2)$$

resolviendo la primera integral se encontró que

$$D_1(t) = \frac{1}{2} \int d\tau [1 - e^{-\beta(\tau - \eta)}] [1 - e^{-\beta(\tau' - \eta)}] \quad (a.3)$$

o bien

$$D_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^t [1 - 2e^{-\beta(\tau - t)} + e^{-2\beta(\tau - \eta)}] d\tau \quad (a.4)$$

resolviendo esta segunda integral se obtiene

$$D_1(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \frac{1}{4\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \quad (a.5)$$

por otro lado sustituyendo (a.1) en (1.22) del capítulo III, se obtiene

$$D_2(t) = \iint d\tau d\tau' e^{-\beta\tau'} [1 - e^{-\beta(\tau - \eta)}] \frac{1}{2} \delta(\tau - \tau') \quad (a.6)$$

resolviendo la primera integral se obtiene

$$D_2(t) = \frac{1}{2} \int d\tau e^{-\beta\tau} [1 - e^{-\beta(\tau - \eta)}] \quad (a.7)$$

integrando, se obtiene

$$D_2(t) = \frac{1}{2\lambda} (e^{\beta t} - 1) - \frac{1}{4\lambda} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \quad (a.8)$$

multiplicando esta ecuación por $e^{-\beta t}$ se encontró

$$e^{-\beta t} D_2(t) = \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-\beta t}) - \frac{1}{4\beta}(1 - e^{-2\beta t}) \quad (a.9)$$

finalmente sustituyendo (a.1) en (23) del capítulo III, se obtiene

$$D_3(t) = \int \int d\tau d\tau' [1 - e^{\beta(\tau - \tau')}] \frac{1}{2} \delta(\tau - \tau') \quad (a.10)$$

resolviendo la primera integral se obtiene

$$D_3(t) = \frac{1}{2} \int d\tau [1 - e^{\beta(\tau - t)}] \quad (a.11)$$

y esta última integral da

$$D_3(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-\beta t}) \quad (a.12)$$

Sustituyendo (a.5), (a.9) y (a.12) en (1.24) del capítulo III, resulta

$$\begin{aligned} \bar{S}(t) = & -\frac{K^2}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \int \frac{t}{2} - \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \right. \\ & \left. \frac{1}{4\beta}(1 - e^{-2\beta t}) + \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-\beta t}) - \right. \\ & \left. \frac{1}{4\beta}(1 - e^{-2\beta t}) - \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-\beta t}) \right] \right] \end{aligned} \quad (a.13)$$

haciendo un poco de álgebra y ordenando se encuentra que:

$$\bar{S}(t) = \frac{K^2}{2\beta^2} \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \frac{1}{4\beta}(1 - e^{-2\beta t}) \right] \quad (a.14)$$

y la integral de trayectoria es entonces

$$\int D[f(t)] e^{i\theta_0} = e^{-k^2 A} \quad (a.15)$$

sustituyendo en (12) del capítulo III se encuentra:

$$P(x, t; x_0, v_0) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik^2 - Bk} dk = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{B^2}{4A}} \quad (a.16)$$

donde:

$$B = i(x - x_0 - \frac{v_0}{\beta} + \frac{v_0}{\beta} e^{-\beta t}); \quad (a.17)$$

$$A = \frac{1}{8\beta^3} [4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t} + 2\beta t - 3]$$

por lo tanto

$$P(x, t; x_0, v_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{8\pi\beta^3}{4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t} + 2\beta t - 3} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{8\beta^3(x - x_0 - \frac{v_0}{\beta} + \frac{v_0}{\beta} e^{-\beta t})^2}{[4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t} + 2\beta t - 3]}} \quad (a.18)$$

Obsérvese que la ec. (a.18) es el mismo resultado presentado por S. Chandrasekhar¹³.

REFERENCIAS

- 1).- N.G. Van Kampen: *A soluble Model for Diffusion in a Bistable potential*. Journal of Statistical Physics. Vol. 17. No. 2, 1977.
- 2).- Frank Moss, Luigi A. Lugiato y Wolfgang Schleich: *Noise and Chaos in Nonlinear Dynamical Systems*. Cambridge University Press 1990.
- 3).- Athanasios Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. second Edition. International Student Edition, Mc Graw Hill.
- 4).- Emanuel Parzen: *Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones*. Editorial Limusa, S. A., México. 1982.
- 5).- R.L. Stratonovich: *Topics in the theory of random noise*. volumen I. Editorial Gordon and Breach. USA 1963.
- 6).- N. G. Van Kampen: *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. Primera reimpression, North-Holland Publishing Company, Amsterdam. New York. Oxford 1983.
- 7).- James L. Melsa, Andrew P. Sage: *An Introduction to Probability and Stochastic Processes*. Prentice-Hall, inc., U.S.A. 1973.
- 8).- C.W. Gardiner: *Handbook of Stochastic methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Segunda edición. Alemania, Marzo 1985.
- 9).- Charles R. Doering: *Modeling Complex Systems: Stochastic Processes, Stochastic Differential Equations, and Fokker-Planck Equations*

- 10).- H. Risken: *The Fokker-Planck Equation*. methods of solution and applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Segunda edición. Alemania, 1989.
- 11).- R. P. Feynman, A. R. Hibbs: *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Editorial McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- 12).- E. Braun y Emilio Cortes: *Path integral Method Applied to the Brownian Rotation of a symmetric top*. Physica 136A (1986) 189-214.
- 13).- Nelson Wax: *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes* (S. Chandrasekhar, Stochastic Problems in Physics and Astronomy) Reviews of Modern Physics. Volumen 15, No 1. Dover Publications, Inc, New York. Enero, 1943.

OTRAS REFERENCIAS:

- 14).- Lawrence S. Schulman: *Techniques and applications of path integration*. Wiley-Interscience, New York 1981.
- 15).- Patrick Muldowney: *A general theory of integration in function spaces*. Editorial Longman Scientific & Technical, New York, 1987.
- 16).- Frank Moss & P.V.E. Mc Clintock : *Noise in nonlinear dynamical systems*. Volumenes 1, 2 y 3. Cambridge University Press. Gran Bretaña, 1989.