12
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA DE CATEGORIAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

RICARDO HERNANDEZ BARAJAS

1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION

La Teoría de Categorías inicia con la observación de que muchas propiedades de sistemas matemáticos pueden ser unificados y simplificados por una representación con diagramas de flechas. Una flecha $f : X \to Y$ representa una función; esto es, un conjunto X, un conjunto Y, y una regla $x \mapsto f(x)$. Un diagrama típico de conjuntos y funciones es

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd} ,$$

éste es conmutativo cuando $h = g \circ f$, donde $g \circ f$ es la usual composición de funciones. El mismo diagrama puede ser usado en otros contextos matemáticos; así, en la 'categoría' de espacios topológicos, la letras X, Y, y Z representan espacios topológicos mientras f, g, y h representan funciones continuas.

Muchas propiedades de construcciones matemáticas pueden ser representadas por propiedades universales de diagramas. Considérese el producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos, consistente como es usual de todas las parejas ordenadas (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$. Las proyecciones $(a, b) \mapsto a$, $(a, b) \mapsto b$ son funciones $p : A \times B \to A$, $q : A \times B \to B$. Dado C y dos funciones $f : C \to A$, $g : C \to B$, existe una única función h que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, "h"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & B \end{tikzcd}$$

Gran parte de la belleza de las matemáticas es derivada del hecho de la abstracción. Así, una de las razones para estudiar categorías es que, como otras abstracciones matemáticas, la Teoría de Categorías provee un nuevo lenguaje, un lenguaje que proporciona economía de pensamiento y expresión; un lenguaje que saca a flote las ideas básicas de los teoremas; y, por lo tanto, un lenguaje que provee un nuevo contexto en el cual se vean los problemas; un nuevo lenguaje que ayuda a determinar cuan fuerte y profundo es un resultado.

En el presente trabajo se verán conocimientos básicos en la teoría de categorías. La mayor parte del material aquí incluído es estándar y puede ser encontrado en muchos libros, algunos de los cuales son mencionados en la bibliografía. Sin embargo, la exposición difiere de los tratamientos en otras partes en diversos aspectos.

Primero, en esta exposición se introduce rápidamente la noción de 'sistema deductivo', el cual es una categoría sin las ecuaciones usuales entre flechas. De hecho, se cree que los lógicos deberían de prestar atención a las categorías, las cuales son sistemas deductivos con ecuaciones adecuadas entre pruebas.

Segundo, varios de los resultados de la Teoría de Categorías son resumidos en forma de 'eslogans'. La mayor parte de los cuales son debidos a Bill Lawvere.

Tercero, aquí se hace énfasis en la naturaleza algebraica o ecuacional de los sistemas estudiados en la Teoría de Categorías; por ejemplo para productos finitos.

El contenido de este trabajo puede dividirse en cuatro partes, la primera consta de los dos primeros capítulos, y otra parte por cada uno de los restantes.

La primera parte proporciona definiciones básicas, las cuales son ilustradas con un buen número de ejemplos que ayudan a su comprensión. También dentro de esta parte se encuentran las demostraciónes de isomorfismos entre categorías, las cuales raramente son 'totalmente' realizadas en textos que traten sobre este tema.

En los capítulos 3,4 y 5, se estudian conceptos importantes en la Teoría de Categorías, dichos conceptos a su vez, encierran otros nuevos conceptos que son objetos interesantes de estudio. Estos últimos tres capítulos y sus temas correspondientes (funtores adjuntos, límites en categorías y triples) están relacionados, y tales relaciones son citadas como proposiciones durante el desarrollo de este trabajo.

Por último, cabe señalar que este trabajo está basado en el texto de Lambek y Scott titulado **Introduction to Higher Order Categorical Logic** ; el cual utiliza el material aquí expuesto para abordar temas como el λ−cálculo.

1

CATEGORIAS Y FUNTORES

Comenzaremos este trabajo con algunos conceptos y conocimientos básicos sobre categorías. Primero, una definición un poco informal.

Definición 1.1 . Una *categoría concreta* es una colección de dos tipos de entidades llamadas *objetos* y *morfismos*. Los objetos son conjuntos que, en cierta forma, están dotados de algún tipo de estructura. Los morfismos son mapeos, esto es, funciones de un objeto a otro, que en algún sentido preservan la estructura. De entre los morfismos, hay uno ligado a cada objeto A, el *mapeo identidad* $Id_A : A \longrightarrow A$ tal que $Id_A(a) = a$ para cualquier $a \in A$. Además, los morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ pueden *componerse* y producir un morfismo $g \circ f : A \longrightarrow C$ tal que $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para cualquier $a \in A$.

Los ejemplos de categorías concretas abundan en las matemáticas; he aquí tres:

Ejemplo 1.1 . La categoría de los conjuntos, donde los objetos son conjuntos y los morfismos son funciones. A esta categoría la denotaremos por **'Sets'** .

Ejemplo 1.2 . La categoría de los monoides, donde los objetos son monoides, esto es, semigrupos con elemento unidad, y donde los morfismos son homomorfismos de monoides, es decir, funciones que preservan la operación del semigrupo y el elemento unidad. A esta categoría la denotaremos por '**Mon**'.

Ejemplo 1.3 . La categoría de los conjuntos preordenados, donde los objetos son conjuntos preordenados, es decir, conjuntos con una relación reflexiva y transitiva, y donde los morfismos son funciones monótonas o, en otras palabras, funciones que preservan la relación.

Se pueden citar muchos ejemplo más de categorías concretas, como por ejemplo la de anillos y la de espacios topológicos. De hecho, citamos la siguiente generalización, donde el término 'objeto' es entendido como 'conjunto con estructura'.

ESLOGAN I . Muchos objetos de interés en las matemáticas pueden ser pensados como categorías concretas.

Pasaremos ahora de las categorías concretas a las abstractas en tres pasos.

Definición 1.2 . Una *gráfica* consiste de dos clases y dos funciones: la clase A de *flechas*, la clase V de *objetos* o *vértices*, $Dom : A \longrightarrow V$ (la función dominio) y $Cod : A \longrightarrow V$ (la función codominio).

Uno escribe $f : A \longrightarrow B$ cuando $Dom(f) = A$ y $Cod(f) = B$. Se dice que una gráfica es *pequeña* cuando las clases de objetos y de flechas son conjuntos.

Ejemplo 1.4 . La categoría de las gráficas pequeñas (a la que denotaremos por **Graphs**) es otra categoría concreta. Sus objetos son gráficas pequeñas y sus morfismos son funciones F que mandan flechas en flechas y vértices en vértices de tal forma que, para $f : A \longrightarrow B$, $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$, esto es, $Dom(F(f)) = F(Dom(f))$ y $Cod(F(f)) = F(Cod(f))$.

Un *sistema deductivo* es una gráfica en la que cada objeto A tiene asociada una flecha $Id_A : A \longrightarrow A$ (la flecha identidad) y en la que cada par de flechas $f : A \to B$, $g : B \to C$ tiene asociada una flecha $g \circ f : A \to C$ (la composición de f con g). Un lógico puede pensar los objetos como fórmulas y las flechas como pruebas; y en consecuencia

$$\frac{f : A \to B \qquad g : B \to C}{g \circ f : A \to C}$$

la puede pensar como una regla de inferencia.

Una *categoría* es un sistema deductivo en el que valen las siguientes ecuaciones para cualesquiera $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$:

$$f \circ Id_A = f = Id_B \circ f, \quad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Por supuesto, toda categoría concreta es una categoría. Al igual que en las categorías concretas, una categoría es *pequeña* si las clases de flechas y objetos son conjuntos, así, las categorías en los ejemplos 1 a 4 no son pequeñas. Hacemos ahora la siguiente observación, resumida en otro eslogan.

ESLOGAN II . Muchos objetos de interés para los matemáticos, son en sí, categorías pequeñas.

Ejemplo 1.5 . Cualquier conjunto puede ser visto como una categoría pequeña. Los objetos son sus elementos y las únicas flechas son las necesarias flechas identidad.

Ejemplo 1.6 . Cualquier monoide puede ser visto como una categoría pequeña. Hay sólo un elemento y las flechas son los elementos del monoide. En partícular, la flecha identidad es el elemento unitario y la composición es la operación binaria del monoide.

Ejemplo 1.7 . Cualquier conjunto preordenado puede ser visto como una categoría pequeña. Los objetos son sus elementos y, para cualquier par de objetos a y b, hay a lo más una flecha $a \to b$ y exactamente una cuando $a \leq b$.

Definición 1.3 . Dadas dos categorías $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, un *funtor* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es primero que todo un morfismo de gráficas (ver ejemplo 1.4). Además, preserva identidades y composiciones, es decir

$$F(Id_A) = Id_{F(A)} \ \ y \ \ F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

En partículár tenemos el funtor identidad $Id_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ que deja fijos a los objetos y flechas.

Además, dados dos funtores $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, la composición $G \circ F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ definida por

$$(G \circ F)(A) = G(F(A)), \qquad (G \circ F)(f) = G(F(f)),$$

para cualquier objeto A de $\mathbf{A}$ y cualquier flecha $f : A \to A'$ en $\mathbf{A}$, resulta ser también un funtor. Es fácil checar que la composición de funtores es asociativa.

Ejemplo 1.8 . Una categoría no pequeña es la categoría **Cat** cuyos objetos son las categorías pequeñas y los morfismos son funtores.

Proposición 1 *Cuando conjuntos, monoides y conjuntos preordenados son considerados como categorías pequeñas, los morfismos entre ellos son lo mismo que los funtores entre ellos.*

Demostración

a). Sean A y B conjuntos. Si $f : A \to B$ es una función (morfismo en **Sets**) entonces para $Id_a : a \to a$, con $a \in A$, definimos $f(Id_a) = Id_{f(a)}$. Ya que no existen composiciones no triviales, f es un funtor entre la categoría pequeña A y la categoría pequeña B.
Recíprocamente, si $f : A \to B$ es un funtor entonces ya que $f(Id_a) = Id_{f(a)}$ se tiene que $f(a) = Dom(f(Id_a)) = Cod(f(Id_a))$ y por lo tanto, f es una función.

b). Sean $(M, *, e)$ y $(N, +, 1)$ monoides (donde la primer entrada es el conjunto subyacente y la tercer entrada denota al elemento unidad con respecto a la operación que aparece en la segunda entrada).
Si $f : M \to N$ es un morfismo de monoides entonces

$$f(e) = 1 \ \ y \ \ \forall m, m' \in M \ \ f(m * m') = f(m) + f(m').$$

Así, si M y N son vistos como categorías con $\bar{x}$ el objeto de M y $\bar{y}$ el objeto de N, definamos $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Entonces

$$f(Id_{\bar{x}}) = f(e) = 1 = Id_{\bar{y}} = Id_{f(\bar{x})},$$

además para m, m' flechas en M se tiene que

$$f(m * m') = f(m) + f(m'),$$

y por lo tanto f es un funtor entre las categorías M y N.
Recíprocamente, si $f : M \to N$ es un funtor entonces

$$f(e) = f(Id_{\bar{x}}) = Id_{f(\bar{x})} = Id_{\bar{y}} = 1,$$

también para m, m' flechas en M

$$f(m * m') = f(m) + f(m')$$

y por lo tanto f es un morfismo de monoides.

c). Sean $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ conjuntos preordenados. Si $f : A \to B$ es un morfismo de conjuntos preordenados, entonces

$$\forall a, a' \in A \;\; [a \leq a' \Rightarrow f(a) \preceq f(a')].$$

Así, si A y B son vistos como categorías, definiendo $f(a \to a') = f(a) \to f(a')$ se tiene que

$$f(Id_a : a \to a) = f(a) \to f(a) = Id_{f(a)},$$

esto por ser $Id_{f(a)}$ la única flecha de $f(a)$ en $f(a)$. Además, para $\alpha : a \to a'$ y $\beta : a' \to a''$ flechas en A se tiene también que:

$$f(\beta \circ \alpha) = f(\beta) \circ f(\alpha)$$

nuevamente por ser única la flecha de $f(a)$ en $f(a'')$. Por lo tanto f es un funtor entre las categorías A y B.
Recíprocamente, si $f : A \to B$ es un funtor entonces, si $a \leq a'$ existe una única flecha en B, $f(a) \to f(a')$, es decir $f(a) \preceq f(a')$ y por lo tanto f es un morfismo de conjuntos preordenados.

∎

La definición anterior de un funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ se aplica igualmente cuando $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ no son necesariamente pequeñas, esto es, admitimos funciones entre clases (funcionales).

Ejemplo 1.9 . Un conjunto A puede ser visto como un funtor de la categoría con un solo objeto y una sola flecha, **1**, a la categoría **Sets**, esto es

$$F : \{*\} \to \mathbf{Sets} \text{ con } F(*) = A \text{ y } f(Id_*) = Id_A.$$

Ejemplo 1.10 . Una gráfica pequeña puede ser vista como un funtor G de la categoría

$$a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$$

(donde las flechas identidad no son dibujadas) a la categoría **Sets**, de la siguiente forma:
$G(a) = A$ (flechas de la gráfica),
$G(b) = B$ (vértices de la gráfica),
$G(f) = Dom : A \to V$ y
$G(g) = Cod : A \to V$.

Ejemplo 1.11 . Si $\mu = (M, \bullet, 1)$ es un monoide visto como categoría, un $\mu -$ *conjunto* es un conjunto A junto con una función $M \times A \to A$, usualmente denotada por $(m, a) \longmapsto ma$, tal que $1a = a$ ...(1) y $(m \bullet m')a = m(m'a)$ para toda $a \in A$, m y $m' \in M$ ...(2).

Un $\mu -$ *conjunto* A puede ser visto como un funtor $F : \mu \to$ **Sets** de la siguiente forma:
$F(*) = A$ y $F(m : * \to *) = m() : A \to A$
donde, para $a \in A$
$(m())(a) = ma.$
Es claro que F es un funtor debido a que
$F(1) = 1() : A \to A = Id_A$ (1)
$F(m \bullet m') = (m \bullet m')() = m() \circ m'() = F(m) \circ F(m')$ (2).

Habiendo visto los últimos tres ejemplos, hacemos la siguiente afirmación, nuevamente, como un eslogan.

ESLOGAN III . Muchos objetos de interés para los matemáticos pueden ser vistos como funtores de categorías pequeñas en **Sets.**

Una vez que admitimos que los funtores son objetos interesantes de estudio, veremos en ellos objetos de una nueva categoría. Estudiaremos estas categorías más adelante. Por ahora mencionaremos dos manera de formar nuevas categorías a partir de otras.

Ejemplo 1.12 . Dada una categoría (o gráfica) $\mathbf{A}$, se forma una nueva categoría (o gráfica) $\mathbf{A}^{op}$ con los mismos objetos pero con las flechas invertidas, esto es, si denotamos por $Ob(\mathbf{A})$ a los objetos de la categoría $\mathbf{A}$ y por $Hom_{\mathbf{A}}(A, A')$ a la clase de flechas o morfismos en $\mathbf{A}$ con dominio A y codominio A', entonces

$Ob(\mathbf{A}^{op}) = Ob(\mathbf{A})$ y $Hom_{\mathbf{A}^{op}}(A, A') = Hom_{\mathbf{A}}(A'A)$.

$\mathbf{A}^{op}$ **es llamada la categoría opuesta o dual de $\mathbf{A}$. Veamos que efectivamente $\mathbf{A}^{op}$ es una categoría.**

Primero:

$\forall A, B, C, D \in Ob(\mathbf{A})\ \exists\ Id_A \in Hom_{\mathbf{A}}(A, A),\ Id_B \in Hom_{\mathbf{A}}(B, B)\ t.q.$

$\forall f \in Hom_{\mathbf{A}}(A, B)\ \forall g \in Hom_{\mathbf{A}}(B, C)\ \forall h \in Hom_{\mathbf{A}}(C, D)$

$$f \circ Id_A = f = Id_B \circ f, \qquad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

y por lo tanto

$\forall A, B, C, D \in Ob(\mathbf{A}^{op})\ \exists\ Id_A \in Hom_{\mathbf{A}^{op}}(A, A),\ Id_B \in Hom_{\mathbf{A}^{op}}(B, B)\ t.q.$

$\forall h \in Hom_{\mathbf{A}^{op}}(D, C)\ \forall g \in Hom_{\mathbf{A}^{op}}(C, B)\ \forall f \in Hom_{\mathbf{A}^{op}}(B, A)$

$$f \circ Id_B = f = Id_A \circ f, \qquad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

con lo que queda claro que $\mathbf{A}^{op}$ es una categoría.

Un funtor $F : \mathbf{A}^{op} \to \mathbf{B}$ es a menudo llamado un funtor *contravariante* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Ejemplo 1.13 . Dadas dos categorías $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, se forma una nueva categoría $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ en la que

$Ob(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \{(A, B) \mid A \in Ob(\mathbf{A}), B \in Ob(\mathbf{B})\}$

y

$Hom_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}((A, B), (A', B')) =$
$\{(f, g) \mid f \in Hom_{\mathbf{A}}(A, A'), g \in Hom_{\mathbf{B}}(B, B')\}$

y la composición se hace entrada por entrada. Es claro que $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es una categoría. (Para $(A, B) \in Ob(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, $Id_{(A,B)} = (Id_A, Id_B)$ es el morfismo identidad en (A, B), y la nueva composición es asociativa dado que es asociativa en cada entrada.)

Definición 1.4 . Una flecha $f : A \to B$ en una categorí es llamada un *isomorfismo* si existe otra flecha $g : B \to A$ tal que $g \circ f = Id_A$ y $f \circ g = Id_B$. Uno escribe en este caso $A \cong B$ (A es *isomorfo* a B) .

En particular, un funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo si existe otro funtor $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tal que $G \circ F = Id_{\mathbf{A}}$ y $F \circ G = Id_{\mathbf{B}}$.

Ejemplo 1.14 . Si $(G, \circ, e)$ es un grupo, entonces visto como categoría, es una categoría con un solo objeto en la que todas las flechas son isomorfismos ya que todo elemento de G tiene inverso (ver ejemplo 1.6).

Veamos ahora otros ejemplos de funtores, algunos de los cuales serán utilizados más adelante.

Ejemplo 1.15 . Dada una categoría concreta $\mathbf{A}$, definimos $U : \mathbf{A} \to$ **Sets** el funtor que "olvida" (la estructura), por: $U(A) = A$ y $U(f) = f$ con $U(A)$ siendo sólo un conjunto y $U(f)$ siendo sólo una función, donde $A, B \in Ob(\mathbf{A})$ y $f \in Hom_{\mathbf{A}}(A, B)$. Así,

$U(Id_A) = Id_A = Id_{U(A)}$ y $U(g \circ f) = g \circ f = U(g) \circ U(f)$

para $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos en $\mathbf{A}$, con lo que efectivamente, U es un funtor. Claramente U es *fiel* en el sentido de que, para cualesquiera $f, g : A \rightrightarrows B$:

$U(f) = U(g) \Rightarrow f = g$.

Ejemplo 1.16 . Dada una categoría $\mathbf{A}$ definimos

$\Delta : \mathbf{A} \to \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ y $O_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathbf{1}$

donde $\mathbf{1}$ es la categoría con un solo objeto $*$ y un solo morfismo Id_* por: dados $A, B \in Ob(\mathbf{A})$ y $f \in Hom_{\mathbf{A}}(A, B)$

$\Delta(A) = (A, A), \qquad \Delta(f) = (f, f)$

$O_{\mathbf{A}}(A) = *, \qquad O_{\mathbf{A}}(f) = Id_*$.

Así, para $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos en $\mathbf{A}$ se tiene que

$\Delta(Id_A) = (Id_A, Id_A) = Id_{(A,A)} = Id_{\Delta(A)}$,

$\Delta(g \circ f) = (g \circ f, g \circ f) = (g, g) \circ (f, f) = \Delta(g) \circ \Delta(f)$,

$O_{\mathbf{A}}(Id_A) = Id_* = Id_{O_{\mathbf{A}}(A)}$,

$$O_{\mathbf{A}}(g \circ f) = Id_* = Id_* \circ Id_* = O_{\mathbf{A}}(g) \circ O_{\mathbf{A}}(f),$$
por lo cual, tanto Δ como $O_{\mathbf{A}}$ son funtores.

Ejemplo 1.17 . Sean $\mathbf{A}$=**Sets** y $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$ un conjunto fijo. Definimos $U, F : \mathbf{A} \rightrightarrows \mathbf{A}$ de la siguiente forma: dados $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$ y $f : A \longrightarrow A'$ un morfismo en $\mathbf{A}$,

$$F(A) = C \times A, \qquad F(f) = (Id_C, f) := Id_C \times f$$
$$U(A) = A^C, \qquad U(f) = f \circ () : A^C \to A'^C,$$

donde $(f \circ ())(h) = f \circ h$. Entonces, si $f : A \to A'$ y $g : A' \to A''$ son morfismos en $\mathbf{A}$, se tiene que

$$F(Id_A) = (Id_C, Id_A) = Id_{C \times A} = Id_{F(A)} \,,$$
$$F(g \circ f) = (Id_C, g \circ f) = (Id_C, g) \circ (Id_C, f) = F(g) \circ F(f) \,,$$
$$U(Id_A) = Id_A \circ () = Id_{A^C} = Id_{U(A)} \quad \text{y}$$
$$U(g \circ f) = (g \circ f) \circ () = [g \circ ()] \circ [f \circ ()] = U(g) \circ U(f),$$

y por lo tanto F y U son funtores.

Ejemplo 1.18 . Definimos $\wp$: **Sets** $\longrightarrow$ **Sets** por: dado un conjunto A y una función $f : A \longrightarrow B$,

$$\wp(A) = \{X \subseteq A\}$$

y

$$\wp(f) : \wp(A) \to \wp(B),$$

la función definida como

$$\wp(f)(X) = f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \,.$$

Así, para cualquier conjunto A y cualquier $X \subseteq A$ ocurre que

$$\wp(Id_A)(X) = \{Id_A(x) \mid x \in X\} = X = (Id_{\wp(A)})(X) \,,$$

de lo que se sigue que

$$\wp(Id_A) = Id_{\wp(A)} \,.$$

Además, para cualesquiera $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ y $X \subseteq A$ se tiene que

$$\begin{aligned} \wp(g \circ f)(X) &= (g \circ f)[X] = \{(g \circ f)(x) \mid x \in X\} = \\ &\{g(f(x)) \mid x \in X\} = g[\{f(x) \mid x \in X\} = g[f[X]] = \\ &\wp(g)(f[X]) = \wp(g)(\wp(f)(X)) = (\wp(g) \circ \wp(f))(X), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\wp(g \circ f) = \wp(g) \circ \wp(f),$$

con lo que concluímos que $\wp$ es un funtor.

Para terminar, veamos tres isomorfismos básicos entre categorías.

Proposición 2 *Para cualesquiera categorías* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{1}\cong\mathbf{A},\quad (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}\cong\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}),\quad \mathbf{A}\times\mathbf{B}\cong\mathbf{B}\times\mathbf{A}.$$

Demostración

a). Definimos para $A,B\in Ob(\mathbf{A})$ y $f\in Hom_{\mathbf{A}}(A,B)$, $F:\mathbf{A}\times\mathbf{1}\to\mathbf{A}$ y $G:\mathbf{A}\to\mathbf{A}\times\mathbf{1}$ por:

$F((A,*))=A,\qquad F((f,Id_*))=f,$
$G(A)=(A,*),\qquad G(f)=(f,Id_*).$

Dado que para $f:A\to B$ y $g:B\to C$ morfismos en $\mathbf{A}$,

$F(Id_{(A,*)})=F((Id_A,Id_*))=Id_A=Id_{F((A,*))},$
$F((g,Id_*)\circ(f,Id_*))=F((g\circ f,Id_*))=g\circ f=$
$\quad F((g,Id_*))\circ F((f,Id_*)),$
$G(Id_A)=(Id_A,Id_*)=Id_{(A,*)}=Id_{G(A)}$ y
$G(g\circ f)=(g\circ f,Id_*)=(g,Id_*)\circ(f,Id_*)=G(g)\circ G(f),$

se tiene que tanto F como G son funtores. Además, es claro de la definición que $G\circ F=Id_{\mathbf{A}\times\mathbf{1}}$ y que $F\circ G=Id_{\mathbf{A}}$. Por lo tanto

$$\mathbf{A}\times\mathbf{1}\cong\mathbf{A}\ .$$

b). Sean $A,A'\in$ Ob($\mathbf{A}$); $B,B'\in Ob(\mathbf{B})$; $C,C'\in Ob(\mathbf{C})$; $f:A\to A'$ morfismo en $\mathbf{A}$; $g:B\to B'$ morfismo en $\mathbf{B}$; y $h:C\to C'$ morfismo en $\mathbf{C}$. Definimos

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}\ \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\ \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

como

$F(((A,B),C))=(A,(B,C)),\qquad F(((f,g),h))=(f,(g,h)),$
$G((A,(B,C)))=((A,B),C),\qquad G((f,(g,h)))=((f,g),h).$

Así, dado que para

$f:A\to A'$ y $f_1:A'\to A''$ morfismos en $\mathbf{A}$,
$g:B\to B'$ y $g_1:B'\to B''$ morfismos en $\mathbf{B}$,
$h:C\to C'$ y $h_1:C'\to C''$ morfismos en $\mathbf{C}$,

ocurre que

$F(Id_{((A,B),C)})=F(((Id_A,Id_B),Id_C))=(Id_A,(Id_B,Id_C))=$
$\quad Id_{(A,(B,C))}=Id_{F(((A,B),C))},$
$F(((f_1,g_1),h_1)\circ((f,g),h))=F(((f_1\circ f,g_1\circ g),h_1\circ h))=$

$$\begin{aligned}
&(f_1\circ f,(g_1\circ g,h_1\circ h)) = (f_1,(g_1,h_1))\circ(f,(g,h)) = \\
&\quad F(((f_1,g_1),h_1))\circ F(((f,g),h)),\\
&G(Id_{(A,(B,C))}) = G((Id_A,(Id_B,Id_C))) = ((Id_A,Id_B),Id_C) = \\
&\quad Id_{((A,B),C)} = Id_{G((A,(B,C)))}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&G((f_1,(g_1,h_1))\circ(f,(g,h))) = G((f_1\circ f,(g_1\circ g,h_1\circ h))) = \\
&\quad ((f_1\circ f,g_1\circ g),h_1\circ h) = ((f_1,g_1),h_1)\circ((f,g),h) = \\
&\quad G((f_1,(g_1,h_1)))\circ G((f,(g,h))),
\end{aligned}$$

y entonces tanto F como G son funtores.

Es claro que $G\circ F = Id_{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}}$ y que $F\circ G = Id_{\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}$, y por lo tanto

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}\cong\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \ .$$

c). Sean $A,A'\in Ob(\mathbf{A})$; $B,B'\in Ob(\mathbf{B})$; $f\in Hom_{\mathbf{A}}(A,A')$; y $g\in Hom_{\mathbf{B}}(B,B')$. Definimos

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} \ \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \ \mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

por

$$\begin{array}{ll}
F((A,B)) = (B,A), & F((f,g)) = (g,f),\\
G((B,A)) = (A,B), & F((g,f)) = (f,g).
\end{array}$$

Entonces para

$f:A\to A'$ y $f_1:A'\to A''$ morfismos en $\mathbf{A}$,
$g:B\to B'$ y $g_1:B'\to B''$ morfismos en $\mathbf{B}$,

se tiene que

$$\begin{aligned}
&F(Id_{(A,B)}) = F((Id_A,Id_B)) = (Id_B,Id_A) = \\
&\quad Id_{(B,A)} = Id_{F((A,B))},\\
&F((f_1,g_1)\circ(f,g)) = F((f_1\circ f,g_1\circ g)) = (g_1\circ g,f_1\circ f) = \\
&\quad (g_1,f_1)\circ(g,f) = F((f_1,g_1))\circ F((f,g)),\\
&G(Id_{(B,A)}) = G((Id_B,Id_A)) = (Id_A,Id_B) = \\
&\quad Id_{(A,B)} = Id_{G((B,A))},\\
&G((g_1,f_1)\circ(g,f)) = G((g_1\circ g,f_1\circ f)) = (f_1\circ f,g_1\circ g) = \\
&\quad (f_1,g_1)\circ(f,g) = G((g_1,f_1))\circ G((g,f)),
\end{aligned}$$

con lo que tanto F como G son funtores.

Por otra parte, es claro que $G\circ F = Id_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}$ y que $F\circ G = Id_{\mathbf{B}\times\mathbf{A}}$. Finalmente concluímos que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cong \mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

■

2

TRANSFORMACIONES NATURALES

En esta parte del trabajo veremos "morfismos" entre funtores, los cuales nos serán de gran utilidad para formar nuevas categorías a partir de otras.

Definición 2.1 . Dados dos funtores $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, una *transformación natural* $\tau : F \to G$ es una familia de flechas en $\mathbf{B}$

$\tau(A) := \tau_A : F(A) \to G(A)$,

una flecha por cada objeto A de $\mathbf{A}$ (a la que llamamos la *componente* A de τ) tales que los siguientes cuadrados conmutan para toda flecha $f : A \to B$ en $\mathbf{A}$:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & G(B), \end{tikzcd}$$

es decir,

$G(f) \circ \tau_A = \tau_B \circ F(f)$.

Este es el concepto del cual se dice que se necesitaba para la invención de la Teoría de Categorías. Daremos ejemplos de transformaciones naturales más adelante, por el momento nos interesaremos en otro ejemplo de categoría.

Ejemplo 2.1. Dadas dos categorías $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, la categoría $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ tiene funtores $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ como objetos y como flechas transformaciones naturales. La transformacion natural "identidad" $Id_F : F \longrightarrow F$ es por supuesto definida por

$$(Id_F)(A) = Id_{F(A)}$$

para cualquier objeto A de $\mathbf{A}$.

Definimos también la composición de transformaciones naturales de manera "natural", esto es: si $\tau : F \longrightarrow G$, $\phi : G \longrightarrow H$ son transformaciones naturales y A es un objeto de $\mathbf{A}$,

$$(\phi \circ \tau)_A = (\phi \circ \tau)(A) = (\phi)(A) \circ (\tau)(A) = \phi_A \circ \tau_A \ .$$

Veamos que, con estas definiciones, ciertamente $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ resulta una categoría.

a). Si $\alpha : A \longrightarrow A'$ es un morfismo en $\mathbf{A}$ entonces es claro que conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "Id_{F(A)}"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & F(A) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\
F(A') \arrow[r, "Id_{F(A')}"'] & F(A')
\end{tikzcd}$$

con lo que hemos visto que Id_F es una transformación natural, es decir, es cierto que Id_F es una flecha en $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$.

b). Sean $\tau : F \longrightarrow G$ y $\phi : G \longrightarrow H$ dos transformaciones naturales, con $F, G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, entonces para cualquier $f : A \longrightarrow A'$ morfismo en $\mathbf{A}$, conmutan los siguientes cuadrados:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "G(f)"'] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(A') \arrow[r, "\tau_{A'}"'] & G(A') \arrow[r, "\phi_{A'}"'] & H(A')
\end{tikzcd} \quad ,$$

por lo que es claro que conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "(\phi\circ\tau)_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(A') \arrow[r, "(\phi\circ\tau)_{A'}"] & H(A')
\end{tikzcd} \quad ,$$

y entonces es cierto que la composición de τ con ϕ, $\phi \circ \tau$, es también una transformación natural, es decir, en $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ está definida una composición.

c). Sean $\tau : F \to G$, $\phi : G \to H$ y $\psi : H \to I$ transformaciones naturales (donde F, G, H, e I son funtores de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$), entonces
$(\tau \circ Id_F)_A = \tau_A \circ Id_{F(A)} = \tau_A$ y
$(Id_G \circ \tau)_A = Id_{G(A)} \circ \tau_A = \tau_A$
para cualquier $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$ y, por lo tanto
$\tau \circ Id_F = \tau$ y $Id_G \circ \tau = \tau$,
es decir, Id_F es el morfismo identidad en $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$. Además
$$(\psi \circ (\phi \circ \tau))_A = \psi_A \circ (\phi \circ \tau)_A = \psi_A \circ (\phi_A \circ \tau_A) =$$
$$(\psi_A \circ \phi_A) \circ \tau_A = ((\psi \circ \phi) \circ \tau)_A$$
esto es, la composición es asociativa y, por lo tanto $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ es efectivamente una categoría.

Para apreciar la utilidad de las transformaciones naturales, demostraremos la siguiente proposición.

Proposición 3 *Cuando objetos tales como conjuntos, gráficas pequeñas y μ–conjuntos son vistos como funtores a* **Sets** *(ver ejemplos 1.9 a 1.11), los morfismos entre dos objetos son precisamente transformaciones naturales. Por lo tanto, las categorías de conjuntos, graficas pequeñas y μ–conjuntos pueden ser identificadas con las categorías:*

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{1}}, \quad \mathbf{Sets}^{\bullet \rightrightarrows \bullet} \quad \text{y} \quad \mathbf{Sets}^{\mu}$$

respectivamente.

Demostración

a). Sean A y B conjuntos, y sean $F : \mathbf{1} \to \mathbf{Sets}$, $G : \mathbf{1} \to \mathbf{Sets}$ con $F(*) = A$, $F(Id_*) = Id_A$, $G(*) = B$, $G(Id_*) = Id_B$ los funtores que son identificados con A y B respectivamente.

Si $f : A \to B$ es un morfismo de conjuntos (ie: una función), defínase $\tau : F \to G$ por $\tau_* = f$, es claro que τ es una transformación natural debido a que el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A = F(*) \arrow[r, "\tau_* = f"] \arrow[d, "F(Id_*) = Id_A"] & G(*) = B \arrow[d, "G(Id_*) = Id_B"] \\
A = F(*) \arrow[r, "\tau_* = f"'] & G(*) = B
\end{tikzcd} .$$

Recíprocamente, si $\tau : F \to G$ es una transformación natural, entonces su única componente τ_* es una función $f = \tau_* : F(*) = A \to B = G(*)$.

b). Sean P y Q gráficas pequeñas y sean

$$F, G : (a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b) \to \mathbf{Sets}$$

los funtores que son identificados con P y Q respectivamente, y donde

$F(a) = A_P, \quad F(b) = V_P,$

$F(f) = Dom_P, \quad F(g) = Cod_P,$

$G(a) = A_Q, \quad G(b) = V_Q,$

$G(f) = Dom_Q, \quad G(g) = Cod_Q$.

Ahora, si $\alpha : P \to Q$ es un morfismo de gráficas, entonces

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

con

$\alpha_1 : A_P \to A_Q \ , \alpha_2 : V_P \to V_Q$

tales que

$Dom_Q \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ Dom_P$ y

$Cod_Q \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ Cod_P.$

Así, si definimos $\tau : F \to G$ como

$\tau_a = \alpha_1 \ , \quad \tau_b = \alpha_2,$

son conmutativos los siguientes cuadrados:

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "F(f)"] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(b) \arrow[r, "\alpha_2"'] & G(b) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "F(g)"] & G(a) \arrow[d, "G(g)"] \\ F(b) \arrow[r, "\alpha_2"'] & G(b) \end{tikzcd} ,$$

por lo que τ es una transformación natural.

Recíprocamente, si $\tau : F \to G$ es una transformación natural, entonces τ_a y τ_b definen un morfismo de gráficas $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (\tau_a, \tau_b)$.

c). Sean A y A' dos $\mu-conjuntos$, y sean $F, G : \mu \to$**Sets** los funtores asociados a A y A' respectivamente, es decir, si $m \in M$

$F(*) = A = G(*), \qquad F(m) = m() = G(m).$

Si $\phi : A \to A'$ es un morfismo de monoides entonces, definiendo $\tau : F \to G$ por

$\tau_* = \phi,$

para cualquier $m \in M$ conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
A = F(*) \arrow[r, "\tau_* = \phi"] \arrow[d, "F(m)=m()"'] & G(*) = A' \arrow[d, "G(m)=m()"] \\
A = F(*) \arrow[r, "\tau_* = \phi"'] & G(*) = A'
\end{tikzcd},$$

ya que, por ser ϕ un morfismo de monoides, para cualquier $a \in A$ $(m\phi(a) = \phi(ma))$. Por lo tanto ϕ es la única componente de la transformación natural τ .

Recíprocamente, si $\tau : F \to G$ es una transformación natural, entonces su única componente es un morfismo de monoides.

■

Veamos ahora tres isomorfismos básicos más en el estilo de la proposición 2 .

Proposición 4 *Para cualquier categoría* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{\mathbf{1}} \cong \mathbf{A}$.

Demostración

Identifiquemos primero como son los objetos y los morfismos de $\mathbf{A}^{\mathbf{1}}$.

Si $f \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}^{\mathbf{1}})$ entonces f es un funtor $f : \mathbf{1} \to \mathbf{A}$, determinado por la imagen del único objeto, $*$, de $\mathbf{1}$. Denotemos entonces $f \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}^{\mathbf{1}})$ por $f = f_A$ si $f(*) = A$. Por otra parte, si $\tau : f_A \to f_B$ es un morfismo en $\mathbf{A}^{\mathbf{1}}$ entonces τ es una transformación natural que queda definida por su única componente $\tau_* : A \to B$.

Definamos entonces $\psi : \mathbf{A}^{\mathbf{1}} \to \mathbf{A}$ mediante

$\psi(f_A) = A$ y $\psi(\tau) = \tau_*$.

Entonces, si $\tau : f_A \to f_B$ y $\alpha : f_B \to f_C$ son morfismos en $\mathbf{A}^{\mathbf{1}}$, sucede que

$\psi(Id_{f_A}) = (Id_{f_A})_* = Id_{f_A(*)} = Id_A = Id_{\psi(f_A)}$ y

$\psi(\alpha \circ \tau) = (\alpha \circ \tau)_* = \alpha_* \circ \tau_* = \psi(\alpha) \circ \psi(\tau)$,

así, ψ es un funtor.

Definamos ahora $\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{\mathbf{1}}$ por

$\theta(A) = f_A$ y $\theta(f) = \tau$

para $f : A \to B$ morfismo en $\mathbf{A}$ y en donde τ queda definida por

$\tau_* = f$.

Entonces, si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos en $\mathbf{A}$,

$\theta(Id_A) = \tau$ con $\tau_* = Id_A = Id_{f_A(*)} = (Id_{f_A})_*$,
con lo que queda probado que
$\theta(Id_A) = Id_{f_A} = Id_{\theta(A)}$.
Además
$\theta(g \circ f) = \tau$ (con $\tau_* = g \circ f$) y
$\theta(g) \circ \theta(f) = \phi \circ \gamma$ (con $\phi_* = g$ y $\gamma_* = f$),
por lo que
$(\phi \circ \gamma)_* = \phi_* \circ \gamma_* = g \circ f$
y por lo tanto
$\theta(g \circ f) = \theta(g) \circ \theta(f)$,
con lo que concluímos que θ es un funtor.

Finalmente, es claro que $\psi \circ \theta = Id_{\mathbf{A}}$ y $\theta \circ \psi = Id_{\mathbf{A}^1}$ y entonces

$$\mathbf{A}^1 \cong \mathbf{A}.$$

■

Proposición 5 *Para cualesquiera categorías* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} \cong (\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}} \quad .$$

Demostración

Definamos $\psi : \mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} \to (\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}}$ por: si $F \in Ob(\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}})$ entonces
$\psi(F) = F^* : \mathbf{A} \to \mathbf{C}^{\mathbf{B}}$,
donde
$F^*(A) : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$
es tal que
$F^*(A)(B) = F((A, B))$, $\quad F^*(A)(g) = F((Id_A, g))$
para $A \in Ob(\mathbf{A}); B, B' \in Ob(\mathbf{B})$ y $g : B \to B'$ morfismo en $\mathbf{B}$.

(Con esto F^* queda definido en los objetos, hay que probar que esta es una buena definición, es decir, que $F^*(A)$ es un funtor de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$.)

Para $f : A \to A'$ morfismo en $\mathbf{A}$
$F^*(f) : F^*(A) \to F^*(A')$
es la transformación natural definida por
$F^*(f)(B) = F((f, Id_B))$
para $B \in Ob(\mathbf{B})$.

(Así, F^* queda definido en los morfismos, hay que probar que está bien definido, es decir, que $F^*(f)$ es una transformación natural.)

(Con lo anterior ψ queda definido en los objetos, hay que probar que esta es una buena definición, es decir, que F^* es un funtor de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$.)

Definamos ahora, para $\tau : F \to G$ morfismo en $\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}$,

$\psi(\tau) = \tau^* : F^* \to G^*$

la transformación natural definida por

$\tau^*(A)(B) = \tau(A, B)$

para $A \in Ob(\mathbf{A})$ y $B \in Ob(\mathbf{B})$.

(Debemos probar que esta es una buena definición, es decir, que τ^* es una transformación natural.)

(Ya totalmente definido ψ, también debemos probar que efectivamente es un funtor.)

Definamos ahora $\phi : (\mathbf{C}^{\mathbf{A}})^{\mathbf{B}} \to \mathbf{C}^{\mathbf{B}\times\mathbf{A}}$ de la siguiente manera: si $\bar{F} \in Ob((\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}})$ entonces

$\phi(\bar{F}) = \bar{F}_* : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$

donde

$\bar{F}_*((A, B)) = \bar{F}(A)(B)$, $\bar{F}_*((f, g)) = \bar{F}(A')(g) \circ \bar{F}(f)(B)$

para $(A, B), (A', B') \in Ob(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ y $(f, g) : (A, B) \to (A', B')$ morfismo en $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

(Debemos mostrar que la definición de $\bar{F}_*((f, g))$ tiene sentido.)

(Debemos probar también que $\phi(\bar{F}) = \bar{F}_*$ es realmente un funtor, en otras palabras, que ϕ está bien definido en los objetos.)

Por último, definamos para $\bar{\tau} : \bar{F} :\to \bar{G}$ morfismo en $(\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}}$

$\phi(\bar{\tau}) = \bar{\tau}_* : \bar{F}_* \to \bar{G}_*$

donde

$\bar{\tau}_*((A, B)) = \bar{\tau}(A)(B)$

para $(A, B) \in Ob(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

(De esta manera, ϕ quedaría definida también en los morfismos, debemos probar que esta es una buena definición, es decir, que $\bar{\tau}_*$ es una transformación natural.)

(Finalmente, para terminar la demostración debemos probar que ϕ es un funtor y que $\phi \circ \psi = Id_{\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}}$ y $\psi \circ \phi = Id_{(\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}}}$.)

a). Probemos que $F^*(A) : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ es un funtor.

Primero

$F^*(A)(Id_B) = F((Id_A, Id_B)) = F(Id_{(A,B)}) = Id_{F((A,B))} =$
$Id_{F^*(A)(B)}$,

además, si $g : B \to B'$ y $g' : B' \to B''$ son morfismos en $\mathbf{B}$, se tiene que
$F^*(A)(g' \circ g) = F((Id_A, g' \circ g)) = F((Id_A, g')) \circ (Id_A, g)) =$
$F((Id_A, g')) \circ F((Id_A, g)) = F^*(A)(g') \circ F^*(A)(g)$.

(Hay que notar que se utiliza que $F : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ es un funtor.) Con esto hemos probado que $F^*(A)$ es un funtor.

b). Probemos que $F^*(f) : F^*(A) \to F^*(A')$ es una transformación natural.

Si $g : B \to B'$ es un morfismo en $\mathbf{B}$ entonces el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
F((A,B)) = F^*(A)(B) & \xrightarrow{F^*(f)(B) = F((f, Id_B))} & F^*(A')(B) = F((A',B)) \\
{\scriptstyle F^*(A)(g) =}\Big\downarrow{\scriptstyle F((Id_A, g))} & & {\scriptstyle F^*(A')(g) =}\Big\downarrow{\scriptstyle F((Id_{A'}, g))} \\
F((A,B')) = F^*(A)(B') & \xrightarrow[F^*(f)(B') = F((f, Id_{B'}))]{} & F^*(A')(B') = F((A',B'))
\end{array}$$

dado que
$F((Id_{A'}, g)) \circ F((f, Id_B)) = F((Id_{A'}, g) \circ (f, Id_B)) =$
$F((f, g)) = F((f, Id_{B'}) \circ (Id_A, g)) = F((f, Id_{B'})) \circ F((Id_A, g)),$

con lo cual se prueba que $F^*(f)$ es una transformación natural.

c). Probemos que $F^* : \mathbf{A} \to \mathbf{C}^{\mathbf{B}}$ es un funtor.

Para cualquier $B \in Ob(\mathbf{B})$ se tiene que
$F^*(Id_A)(B) = F((Id_A, Id_B)) = F(Id_{(A,B)}) =$
$Id_{F((A,B))} = Id_{F^*(A)(B)} = (Id_{F^*(A)})(B)$

y por lo tanto, ya que tienen las mismas componentes, concluímos que
$F^*(Id_A) = Id_{F^*(A)}$.

Además, si $f : A \to A'$ y $f' : A' \to A''$ son morfismos en $\mathbf{A}$, y B es cualquier objeto de $\mathbf{B}$, ocurre que
$F^*(f' \circ f)(B) = F((f' \circ f, Id_B)) = F((f', Id_B) \circ (f, Id_B)) =$
$F((f', Id_B)) \circ F((f, Id_B)) = F^*(f')(B) \circ F^*(f)(B) =$
$(F^*(f') \circ F^*(f))(B),$

por lo que
$F^*(f' \circ f) = F^*(f') \circ F^*(f),$

con lo que hemos probado que F^* es un funtor.

d). Probemos que $\tau^* : F^* \to G^*$ es una transformación natural.

Si $f : A \to A'$ es un morfismo en $\mathbf{A}$ y $B \in Ob(\mathbf{B})$, entonces, tomando el morfismo en $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $(f, Id_B) : (A, B) \to (A', B)$, dado que $\tau : F \to G$

es una transformación natural, es conmutativo el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
F^*(A)(B) = F((A,B)) \arrow[r, "\tau(A,B)=\tau^*(A)(B)"] \arrow[d, "F((f,Id_B))=" ', "F^*(f)(B)"] & G((A,B)) = G^*(A)(B) \arrow[d, "G^*(f)(B)=" ', "G((f,Id_B))"] \\
F^*(A')(B) = F((A',B)) \arrow[r, "\tau(A',B)=\tau^*(A')(B)" '] & G((A',B)) = G^*(A')(B)
\end{tikzcd} .$$

Ahora, dado que esto ocurre para cualquier $B \in Ob(\mathbf{B})$, entonces es conmutativo también el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
F^*(A) \arrow[r, "\tau^*(A)"] \arrow[d, "F^*(f)" '] & G^*(A) \arrow[d, "G^*(f)"] \\
F^*(A') \arrow[r, "\tau^*(A')" '] & G^*(A')
\end{tikzcd} ,$$

con lo cual se prueba que τ^* es una transformación natural.

e). Probemos que $\psi : \mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} \to (\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}}$ es un funtor.
Para cualesquiera $A \in Ob(\mathbf{A})$ y $B \in Ob(\mathbf{B})$ se tiene que
$\psi(Id_F)(A)(B) = (Id_F)^*(A)(B) = (Id_F)((A,B)) =$
$Id_{F((A,B))} = Id_{F^*(A)(B)} = (Id_{F^*(A)})(B) = (Id_{F^*})(A)(B)$
y entonces
$\psi(Id_F) = Id_{\psi(F)}$.
Además, si $\tau : F \to G$ y $\sigma : G \to H$ son morfismos en $\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}$, para cualesquiera $A \in Ob(\mathbf{A})$ y $B \in Ob(\mathbf{B})$ ocurre que
$\psi(\sigma\circ\tau)(A)(B) = (\sigma\circ\tau)^*(A)(B) = (\sigma\circ\tau)((A,B)) =$
$\sigma((A,B))\circ\tau((A,B)) = \sigma^*(A)(B)\circ\tau^*(A)(B) =$
$\psi(\sigma)(A)(B)\circ\psi(\tau)(A)(B) = (\psi(\sigma\circ\tau))(A)(B)$,
con lo que concluímos que
$\psi(\sigma\circ\tau) = \psi(\sigma)\circ\psi(\tau)$
y por lo tanto, que ψ es un funtor.

f). Veamos que la definición de $\bar{F}_*((f,g))$ tiene sentido, esto es, que tiene dominio $\bar{F}_*((A,B))$ y codominio $\bar{F}_*((A',B'))$.
$f : A \to A'$ es un morfismo en $\mathbf{A}$, entonces
$\bar{F}(f) : \bar{F}(A) \to \bar{F}(A')$,
por lo que
$\bar{F}(f)(B) : \bar{F}(A)(B) \to \bar{F}(A')(B)$,
mientras que

$\bar{F}(A') : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$
con lo que
$\bar{F}(A')(g) : \bar{F}(A')(B) \to \bar{F}(A')(B')$.
Así, $\bar{F}_*((f,g)) = \bar{F}(A')(g) \circ \bar{F}(f)(B)$ está bien definido ya que tiene el dominio y el codominio necesarios. (Nótese también que $\bar{F}(A)$ es un funtor de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ y que $\bar{F}(f)$ es una transformación natural.)

g). Probemos que $\bar{F}_* : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ es un funtor.

$$\begin{aligned}\bar{F}_*(Id_{(A,B)}) &= \bar{F}_*((Id_A, Id_B)) = \bar{F}(A)(Id_B) \circ \bar{F}(Id_A)(B) = \\ &Id_{\bar{F}(A)(B)} \circ (Id_{\bar{F}(A)})(B) = Id_{\bar{F}(A)(B)} \circ Id_{\bar{F}(A)(B)} = \\ &Id_{\bar{F}(A)(B)} = Id_{\bar{F}_*((A,B))}.\end{aligned}$$

Además, para $(f,g) : (A,B) \to (A',B')$ y $(f',g') : (A',B') \to (A'',B'')$ morfismos en $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, dado que $g : B \to B'$ es un morfismo en $\mathbf{B}$, y dado que $\bar{F}(f) : \bar{F}(A') \to \bar{F}(A'')$ es una transformación natural, se tiene que el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \bar{F}(A')(B) \arrow[r, "\bar{F}(f')(B)"] \arrow[d, "\bar{F}(A')(g)"'] & \bar{F}(A'')(B) \arrow[d, "\bar{F}(A'')(g)"] \\ \bar{F}(A')(B') \arrow[r, "\bar{F}(f')(B')"'] & \bar{F}(A'')(B') \end{tikzcd},$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}\bar{F}_*((f',g') \circ (f,g)) &= \bar{F}_*((f' \circ f, g' \circ g)) = \\ &\bar{F}(A'')(g' \circ g) \circ \bar{F}(f' \circ f)(B) = \\ &\bar{F}(A'')(g') \circ \bar{F}(A'')(g) \circ (\bar{F}(f') \circ \bar{F}(f))(B) = \\ &\bar{F}(A'')(g') \circ \bar{F}(A'')(g) \circ \bar{F}(f')(B) \circ \bar{F}(f)(B) = \\ &\bar{F}(A'')(g') \circ \bar{F}(f')(B') \circ \bar{F}(A')(g) \circ \bar{F}(f)(B) = \\ &\bar{F}_*((f',g')) \circ \bar{F}_*((f,g)),\end{aligned}$$

con lo que queda terminada la demostración de que $\bar{F}_*$ es un funtor.

h). Demostremos que $\bar{\tau}_* : \bar{F}_* \to \bar{G}_*$ es una transformación natural.
Sea $(f,g) : (A,B) \to (A',B')$ un morfismo en $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, entonces dado que $\bar{\tau} : \bar{F} \to \bar{G}$ es una transformación natural, y dado que f es un morfismo en $\mathbf{A}$, conmuta el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} \bar{F}(A) \arrow[r, "\bar{\tau}(A)"] \arrow[d, "\bar{F}(f)"'] & \bar{G}(A) \arrow[d, "\bar{G}(f)"] \\ \bar{F}(A') \arrow[r, "\bar{\tau}(A')"'] & \bar{G}(A') \end{tikzcd}$$

Además, $\bar{\tau}(A') : \bar{F}(A') \to \bar{G}(A')$ es una transformación natural entre funtores de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ y g es un morfismo en $\mathbf{B}$, con lo cual, el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \bar F(A')(B) & \xrightarrow{\bar\tau(A')(B)} & \bar G(A')(B) \\ {\scriptstyle \bar F(A')(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar G(A')(g)} \\ \bar F(A')(B') & \xrightarrow[\bar\tau(A')(B')]{} & \bar G(A')(B') \end{array} .$$

Así, de la conmutatividad de los últimos dos cuadrados, se sigue que

$\bar\tau_*((A',B')) \circ \bar F_*((f,g)) = \bar\tau(A')(B') \circ \bar F(A')(g) \circ \bar F(f)(B) =$
$\bar G(A')(g) \circ \bar\tau(A')(B) \circ \bar F(f)(B) =$
$\bar G(A')(g) \circ (\bar\tau(A') \circ \bar F(f))(B) = \bar G(A')(g) \circ (\bar G(f) \circ \bar\tau(A))(B) =$
$\bar G(A')(g) \circ \bar G(f)(B) \circ \bar\tau(A)(B) = \bar G_*((f,g)) \circ \bar\tau_*((A,B))$

y por lo tanto es conmutativo el cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} \bar F(A)(B) = \bar F_*((A,B)) & \xrightarrow{\bar\tau_*((A,B))} & \bar G_*((A,B)) = \bar G(A)(B) \\ {\scriptstyle \bar F_*((f,g))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar G_*((f,g))} \\ \bar F(A')(B') = \bar F_*((A',B')) & \xrightarrow[\bar\tau_*((A',B'))]{} & \bar G_*((A',B')) = \bar G(A')(B') \end{array} .$$

Así, concluímos que $\bar\tau_*$ es una transformación natural.

i). Probemos que $\phi : (\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}$ es un funtor.

Para cualquier $(A,B) \in Ob(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ se tiene que

$\phi(Id_{\bar F})((A,B)) = (Id_{\bar F})_*((A,B)) = (Id_{\bar F})(A)(B) =$
$(Id_{\bar F(A)})(B) = Id_{\bar F(A)(B)} = Id_{\bar F_*((A,B))} =$
$(Id_{\bar F_*})((A,B)) = (Id_{\phi(\bar F)})((A,B))$

y entonces

$\phi(Id_{\bar F}) = Id_{\phi(\bar F)}$.

Además, si $\bar\tau : \bar F \to \bar G$ y $\bar\sigma : \bar G \to \bar H$ son morfismos en $(\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}}$ entonces, para cualquier $(A,B) \in Ob(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, tenemos que

$\phi(\bar\sigma\circ\bar\tau)((A,B)) = (\bar\sigma\circ\bar\tau)_*((A,B)) = (\bar\sigma\circ\bar\tau)(A)(B) =$
$(\bar\sigma(A)\circ\bar\tau(A))(B) = \bar\sigma(A)(B)\circ\bar\tau(A)(B) =$
$\bar\sigma_*((A,B))\circ\bar\tau_*((A,B)) = (\bar\sigma_*\circ\bar\tau_*)((A,B)) =$
$(\phi(\bar\sigma)\circ\phi(\bar\tau))((A,B))$

y entonces

$\phi(\bar\sigma\circ\bar\tau) = \phi(\bar\sigma)\circ\phi(\bar\tau)$.

Así, hemos demostrado que ϕ es un funtor.

j). Demostremos que $\phi\circ\psi = Id_{\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}}$ y que $\psi\circ\phi = Id_{(\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}}}$.

Si $F,G \in Ob(\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}})$ y $\tau : F \to G$ es un morfismo en $\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}$, entonces para cualquier $(A,B) \in Ob(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

$$[(\phi \circ \psi)(F)]((A,B)) = \phi(\psi(F))((A,B)) = (\psi(F))_*((A,B)) = (F^*)_*((A,B)) = F^*(A)(B) = F((A,B)),$$

por lo cual

$$(\phi \circ \psi)(F) = F = Id_{\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}}(F),$$

y

$$[(\phi \circ \psi)(\tau)]((A,B)) = \phi(\psi(\tau))((A,B)) = (\psi(\tau))_*((A,B)) = (\tau^*)_*((A,B)) = \tau^*(A)(B) = \tau((A,B)),$$

por lo que

$$(\phi \circ \psi)(\tau) = \tau = Id_{\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}}(\tau).$$

Por lo tanto

$$\phi \circ \psi = Id_{\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}}.$$

Por otra parte, si $\bar{F}, \bar{G}$ son dos objetos y $\bar{\tau} : \bar{F} \longrightarrow \bar{G}$ es un morfismo en $(\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}}$, entonces para cualesquiera $A \in Ob(\mathbf{A})$ y $B \in Ob(\mathbf{B})$

$$[(\psi \circ \phi)(\bar{F})](A)(B) = \psi(\phi(\bar{F}))(A)(B) = (\bar{F}_*)^*(A)(B) = \bar{F}_*((A,B)) = \bar{F}(A)(B),$$

por lo cual

$$(\psi \circ \phi)(\bar{F}) = \bar{F} = Id_{(\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}}}(\bar{F}),$$

y

$$[(\psi \circ \phi)(\bar{\tau})](A)(B) = \psi(\phi(\bar{\tau}))(A)(B) = (\bar{\tau}_*)^*(A)(B) = \bar{\tau}_*((A,B)) = \bar{\tau}(A)(B),$$

por lo que

$$(\psi \circ \phi)(\bar{\tau}) = \bar{\tau} = Id_{(\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}}}.$$

Por lo tanto

$$\psi \circ \phi = Id_{(\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}}}.$$

Finalmente, habiendo probado todo lo anterior, concluímos que

$$\mathbf{C}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} \cong (\mathbf{C}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}}$$

■

Proposición 6 *Para cualesquiera categorías* **A**, **B** *y* **C**

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^{\mathbf{C}} \cong \mathbf{A}^{\mathbf{C}} \times \mathbf{B}^{\mathbf{C}}.$$

Demostración

Si $F \in Ob((\mathbf{A}\times\mathbf{B})^{\mathbf{C}})$ entonces, para $f : C \longrightarrow C'$ morfismos en $\mathbf{C}$, $F(f)$ es de la forma
$(F_1(f), F_2(f)) : (F_1(C), F_2(C)) = F(C) \longrightarrow (F_1(C'), F_2(C')) = F(C')$.
Veamos que $F_1 : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ y $F_2 : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$ son funtores.

Debido a que F es un funtor, tenemos que

$$(Id_{F_1(C)}, Id_{F_2(C)}) = Id_{(F_1(C),F_2(C))} = Id_{F(C)} = \\ F(Id_C) = (F_1(Id_C), F_2(Id_C)),$$

por lo que

$$F_1(Id_C) = Id_{F_1(C)} \text{ y } F_2(Id_C) = Id_{F_2(C)}.$$

Además, dados $f : C \to C'$ y $g : C' \to C''$ morfismos en $\mathbf{C}$

$$(F_1(g) \circ F_1(f), F_2(g) \circ F_2(f)) = \\ (F_1(g), F_2(g)) \circ (F_1(f), F_2(f)) = F(g) \circ F(f) = \\ F(g \circ f) = (F_1(g \circ f), F_2(g \circ f)),$$

por lo que

$$F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f) \text{ y } F_2(g \circ f) = F_2(g) \circ F_2(f)$$

y por lo tanto, F_1 y F_2 son funtores.

Por otra parte, si $\tau : F \to G$ es un morfismo en $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^{\mathbf{C}}$, dado $C \in Ob(\mathbf{C})$, τ_C es de la siguiente forma:

$$(\tau_1(C), \tau_2(C)) : F(C) = (F_1(C), F_2(C)) \to G(C) = (G_1(C), G_2(C)),$$

y entonces, dado un morfismo en $\mathbf{C}$, $f : C \to C'$, ya que τ es una transformación natural, conmuta el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
(F_1(C), F_2(C)) \arrow[r, "(\tau_1(C),\tau_2(C))"] \arrow[d, "(F_1(f),F_2(f))"'] & (G_1(C), G_2(C)) \arrow[d, "(G_1(f),G_2(f))"] \\
(F_1(C'), F_2(C')) \arrow[r, "(\tau_1(C'),\tau_2(C'))"'] & (G_1(C'), G_2(C'))
\end{tikzcd} .$$

Así, de la conmutatividad del cuadro anterior en la primer entrada, se sigue que, dado $f : C \to C'$ morfismo en $\mathbf{C}$, conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
F_1(C) \arrow[r, "\tau_1(C)"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & G_1(C) \arrow[d, "G_1(f)"] \\
F_1(C') \arrow[r, "\tau_1(C')"'] & G_1(C')
\end{tikzcd} ,$$

por lo que $\tau_1 : F_1 \to G_1$ es una transformación natural. De manera similar, $\tau_2 : F_2 \to G_2$ es también una transformación natural.

Definamos entonces $\psi : (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^{\mathbf{C}} \to \mathbf{A}^{\mathbf{C}} \times \mathbf{B}^{\mathbf{C}}$ de la siguiente forma: para $F \in Ob((\mathbf{A} \times \mathbf{B})^{\mathbf{C}})$

$$\psi(F) = (F_1, F_2),$$

y para $\tau : F \to G$ morfismo en $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^{\mathbf{C}}$

$$\psi(\tau) = (\tau_1, \tau_2) .$$

De las observaciones anteriores es claro que ψ está bien definida. Demostraremos ahora que ψ es un funtor.

Nótese que Id_F, donde $F \in Ob((\mathbf{A} \times \mathbf{B})^{\mathbf{C}})$, es tal que para $C \in Ob(\mathbf{C})$

$$((Id_F)_1(C), (Id_F)_2(C)) = (Id_F)_C = Id_{F(C)} = Id_{(F_1(C), F_2(C))} = (Id_{F_1(C)}, Id_{F_2(C)}),$$

por lo que

$$(Id_F)_1 = Id_{F_1} \text{ y } (Id_F)_2 = Id_{F_2},$$

y entonces

$$\psi(Id_F) = (Id_{F_1}, Id_{F_2}) = Id_{(F_1,F_2)} = Id_{\psi(F)}.$$

Además, si $\tau : F \to G$ y $\sigma : G \to H$ son morfismos en $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^{\mathbf{C}}$, para $C \in Ob(\mathbf{C})$ se tiene que

$$((\sigma \circ \tau)_1(C), (\sigma \circ \tau)_2(C)) = (\sigma \circ \tau)(C) = \sigma(C) \circ \tau(C) = (\sigma_1(C), \sigma_2(C)) \circ (\tau_1(C), \tau_2(C)) = (\sigma_1(C) \circ \tau_1(C), \sigma_2(C) \circ \tau_2(C)) = ((\sigma_1 \circ \tau_1)(C), (\sigma_2 \circ \tau_2)(C)),$$

por lo que

$$(\sigma \circ \tau)_1 = \sigma_1 \circ \tau_1 \quad \text{y} \quad (\sigma \circ \tau)_2 = \sigma_2 \circ \tau_2,$$

y entonces

$$\psi(\sigma \circ \tau) = (\sigma_1 \circ \tau_1, \sigma_2 \circ \tau_2) = (\sigma_1, \sigma_2) \circ (\tau_1, \tau_2) = \psi(\sigma) \circ \psi(\tau).$$

Con lo que hemos probado que ψ es un funtor.

Definamos ahora $\phi : \mathbf{A}^{\mathbf{C}} \times \mathbf{B}^{\mathbf{C}} \to (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^{\mathbf{C}}$ como

$$\phi((F_1, F_2)) = F', \qquad \phi((\tau_1, \tau_2)) = \tau'$$

para (F_1, F_2) objeto, y $(\tau_1, \tau_2) : (F_1.F_2) \to (G_1, G_2)$ morfismo en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}} \times \mathbf{B}^{\mathbf{C}}$, y donde

$$F'(C) = (F_1(C), F_2(C))$$

para $C \in Ob(\mathbf{C})$, y

$$F'(g) = (F_1(g), F_2(g))$$

para $g : C \to C'$ morfismo en $\mathbf{C}$,

$$\tau'(C) = (\tau_1(C), \tau_2(C))$$

para $C \in Ob(\mathbf{C})$.

(Nótese que $F_1, G_1 : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ y $F_2, G_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ son funtores, y que $\tau_1 : F_1 \to G_1$ y $\tau_2 : F_2 \to G_2$ son transformaciones naturales.)

Probaremos que esta es una buena definición, esto es, que

$$F' : \mathbf{C} \to \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

es un funtor y que

$$\tau' : F' \to G'$$

es una transformación natural.

$$F'(Id_C) = (F_1(Id_C), F_2(Id_C)) = (Id_{F_1(C)}, Id_{F_2(C)}) = Id_{(F_1(C), F_2(C))} = Id_{F'(C)},$$

además, si $f : C \to C'$ y $g : C' \to C''$ son morfismos en $\mathbf{C}$, se tiene que

$$F'(g \circ f) = (F_1(g \circ f), F_2(g \circ f)) =$$
$$(F_1(g) \circ F_1(f), F_2(g) \circ F_2(f)) =$$
$$(F_1(g), F_2(g)) \circ (F_1(f), F_2(f)) = F'(g) \circ F'(f) \ ,$$

con lo que queda demostrado que F' es un funtor.

Ahora, dado que τ_1 y τ_2 son transformaciones naturales, se tiene que, para cualquier morfismo $f : C \to C'$ en $\mathbf{C}$, conmutan los cuadrados

$$\begin{tikzcd} F_1(C) \arrow[r, "\tau_1(C)"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & G_1(C) \arrow[d, "G_1(f)"] \\ F_1(C') \arrow[r, "\tau_1(C')"'] & G_1(C') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F_2(C) \arrow[r, "\tau_2(C)"] \arrow[d, "F_2(f)"'] & G_2(C) \arrow[d, "G_2(f)"] \\ F_2(C') \arrow[r, "\tau_2(C')"'] & G_2(C') \end{tikzcd} \ ,$$

con lo cual es claro que conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} F'(C) \arrow[r, "\tau'(C)"] \arrow[d, "F'(f)"'] & G'(C) \arrow[d, "G'(f)"] \\ F'(C') \arrow[r, "\tau'(C')"'] & G'(C') \end{tikzcd} \ ,$$

y por lo tanto τ' es una transformación natural.

Ahora demostraremos que ϕ es un funtor. Si $C \in Ob(\mathbf{C})$ entonces

$$\phi(Id_{(F_1,F_2)})(C) = \phi((Id_{F_1}, Id_{F_2}))(C) =$$
$$((Id_{F_1})(C), (Id_{F_2})(C)) = (Id_{F_1(C)}, Id_{F_2(C)}) =$$
$$Id_{(F_1(C),F_2(C))} = Id_{F'(C)} = (Id_{F'})(C) = (Id_{\phi((F_1,F_2))})(C),$$

por lo que

$$\phi(Id_{(F_1,F_2)}) = Id_{\phi((F_1,F_2))} \ .$$

Además, si $(\tau_1, \tau_2) : (F_1, F_2) \to (G_1, G_2)$ y $(\sigma_1, \sigma_2) : (G_1, G_2) \to (H_1, H_2)$ son morfismos en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}} \times \mathbf{B}^{\mathbf{C}}$, para $C \in Ob(\mathbf{C})$,se tiene que

$$\phi((\sigma_1, \sigma_2) \circ (\tau_1, \tau_2))(C) = \phi((\sigma_1 \circ \tau_1, \sigma_2 \circ \tau_2))(C) =$$
$$((\sigma_1 \circ \tau_1)(C), (\sigma_2 \circ \tau_2)(C)) = (\sigma_1(C) \circ \tau_1(C), \sigma_2(C) \circ \tau_2(C)) =$$
$$(\sigma_1(c), \sigma_2(C)) \circ (\tau_1(C), \tau_2(C)) = \sigma'(C) \circ \tau'(C) =$$
$$(\sigma' \circ \tau')(C) = [\phi((\sigma_1, \sigma_2)) \circ \phi((\tau_1, \tau_2))](C)$$

por lo que

$$\phi((\sigma_1, \sigma_2) \circ (\tau_1, \tau_2)) = \phi((\sigma_1, \sigma_2)) \circ \phi((\tau_1, \tau_2))$$

y entonces ϕ es un funtor.

Por último, es claro que $\phi \circ \psi = Id_{(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^{\mathbf{C}}}$ y que $\psi \circ \phi = Id_{\mathbf{A}^{\mathbf{C}} \times \mathbf{B}^{\mathbf{C}}}$ con lo que queda terminada la demostración.

■

Ahora haremos mención de como las transformaciones naturales pueden componerse con funtores.

Definición 2.2 . En la situación

$$\mathbf{D} \xrightarrow{L} \mathbf{A} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathbf{B} \xrightarrow{K} \mathbf{C},$$

(donde $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, y $\mathbf{D}$ son categorías y, F, G, L y K son funtores), si $\tau : F \to G$ es una transformación natural, se obtienen dos nuevas transformaciones naturales

$K\tau : KF \to KG, \quad \tau L : FL \to GL$

definidas por:

$(K\tau)_A = K(\tau_A), \quad (\tau L)_D = \tau_{L(D)}$

para $A \in Ob(\mathbf{A})$ y $D \in Ob(\mathbf{D})$.

Veamos que, en efecto, tanto $K\tau$ como τL son transformaciones naturales.

Si $f : A \to A'$ es un morfismo en $\mathbf{A}$, dado que τ es una transformación natural, el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\tau_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd} ,$$

por lo cual

$$K(G(f)) \circ K(\tau_A) = K(G(f) \circ \tau_A) = K(\tau_{A'} \circ F(f)) = K(\tau_{A'}) \circ K(F(f)),$$

con lo cual el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K(F(A)) \arrow[r, "K(\tau_A)"] \arrow[d, "K(F(f))"'] & K(G(A)) \arrow[d, "K(G(f))"] \\ K(F(A')) \arrow[r, "K(\tau_{A'})"'] & K(G(A')) \end{tikzcd} ,$$

y por lo tanto $K\tau$ es una transformación natural.
(Nótese que en lo anterior se utilizó que un funtor manda cuadrados conmutativos en cuadrados conmutativos.)

Por otra parte, si $g : D \to D'$ es un morfismo en $\mathbf{D}$, entonces $L(g) : L(D) \to L(D')$ es un morfismo en $\mathbf{A}$ y, dado que τ es una transformación natural, conmuta el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} F(L(D)) \arrow[r, "\tau_{L(D)}"] \arrow[d, "F(L(g))"'] & G(L(D)) \arrow[d, "G(L(g))"] \\ F(L(D')) \arrow[r, "\tau_{L(D')}"'] & G(L(D')) \end{tikzcd} ,$$

y por lo tanto τL es también una transformación natural.

Además, si en la definición anterior, $H : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es otro funtor y $\sigma : G \to H$ es otra transformación natural, se cumplen las siguientes "leyes distributivas":

$$K(\sigma \circ \tau) = K\sigma \circ K\tau, \qquad (\sigma \circ \tau)L = \sigma L \circ \tau L,$$

lo cual es claro ya que si $A \in Ob(\mathbf{A})$ y $D \in Ob(\mathbf{D})$ ocurre que

$$\begin{aligned} (K(\sigma \circ \tau))_A &= K((\sigma \circ \tau)_A) = K(\sigma_A \circ \tau_A) = \\ &K(\sigma_A) \circ K(\tau_A) = (K\sigma)_A \circ (K\tau)_A = (K\sigma \circ K\tau)_A \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} ((\sigma \circ \tau)L)_D &= (\sigma \circ \tau)_{L(D)} = \sigma_{L(D)} \circ \tau_{L(D)} = \\ &(\sigma L)_D \circ (\tau L)_D = (\sigma L \circ \tau L)_D. \end{aligned}$$

Como hemos mencionado, algunos objetos de interés en Matemáticas pueden ser vistos como categorías concretas o como funtores de categorías pequeñas en **Sets**. Nos preguntamos ahora:¿qué categorías pueden ser vistas como categorías de funtores a **Sets**? Para dar una respuesta a esta pregunta, necesitamos primero otra definición.

Definición 2.3 . Si en una categoría $\mathbf{A}$ pasa que $Hom_{\mathbf{A}}(A, A')$ es un conjunto para cualesquiera $A, A' \in ob(\mathbf{A})$, se dice que $\mathbf{A}$ es *localmente pequeña*.

Un propósito de esta definición es describir el siguiente funtor.

Ejemplo 2.2 . Si $\mathbf{A}$ es localmente pequeña entonces hay un funtor $H \equiv Hom_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A} \to \mathbf{Sets}$ definido por: para un objeto (A, B) de $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A}$,

$H((A, B)) = Hom_{\mathbf{A}}(A, B)$,

y para un morfismo $(g, h) : (A, B) \to (A', B')$ de $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A}$, $H((g, h))$ manda $f \in Hom_{\mathbf{A}}(A, B)$ a $h \circ f \circ g \in Hom_{\mathbf{A}}(A', B')$, esto es

$$
\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{Sets} \\
 & & \\
(A, B) & & Hom_{\mathbf{A}}(A, B) \\
{\scriptstyle (g,h)}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle h\circ()\circ g} \\
(A', B') & & Hom_{\mathbf{A}}(A', B') \quad .
\end{array}
$$

Hay que recordar que en $\mathbf{A}$, g es de la forma $A' \to A$, y con esto, es claro que H está bien definido. Veamos ahora que, efectivamente es un funtor.

$H(Id_{(A,B)}) = H((Id_A, Id_B)) = Id_B \circ () \circ Id_A =$
$\quad Id_{Hom_{\mathbf{A}}(A,B)} = Id_{H((A,B))}$.

Además, si $(g, h) : (A, B) \to (A', B')$ y $(g', h') : (A', B') \to (A'', B'')$ son morfismos en $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A}$, se tiene que para $f \in Hom_{\mathbf{A}}(A, B)$

$H((g', h') \circ (g, h))(f) = H((g' \circ g, h' \circ h))(f) =$
$\quad [(h' \circ h) \circ () \circ (g \circ g')](f) = h' \circ h \circ f \circ g \circ g' =$
$\quad [h' \circ () \circ g'](h \circ f \circ g) = [h' \circ () \circ g']([h \circ () \circ g](f)) =$
$\quad ([h' \circ () \circ g'] \circ [h \circ () \circ g])(f) = [H((g', h')) \circ H((g, h))](f)$,

y por lo tanto

$H((g', h') \circ (g, h)) = H((g', h')) \circ H((g, h))$,

con lo cual queda probado que $H = Hom_{\mathbf{A}}$ es un funtor.

Así, aplicando el isomorfismo $\psi : \mathbf{Sets}^{\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A}} \to (\mathbf{Sets}^{\mathbf{A}})^{\mathbf{A}^{op}}$ de la proposición 3 de este capítulo, obtenemos un funtor

$H^* = Hom^*_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{op} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{A}}$

y dualmente un funtor

$Hom^*_{\mathbf{A}^{op}} : \mathbf{A} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{A}^{op}}$.

Veremos después que el último funtor nos permite afirmar que $\mathbf{A}$ es isomorfo a una "subcategoría plena" de $\mathbf{Sets}^{\mathbf{A}^{op}}$, en el sentido de la siguiente definición.

Definición 2.4 . Una *subcategoría* $\mathbf{C}$ de una categoría $\mathbf{B}$ es una categoría $\mathbf{C}$ cuyas clases de objetos y flechas están contenidas en las clases de objetos y flechas de $\mathbf{B}$ respectivamente, y la cual es cerrada bajo las operaciones dominio, codominio, identidad y composición. Decimos que $\mathbf{C}$ es *plena* si para cualesquiera dos objetos C, C' de $\mathbf{C}$, ocurrre que:

$$Hom_{\mathbf{C}}(C, C') = Hom_{\mathbf{B}}(C, C').$$

Por ejemplo, un subgrupo propio de un grupo es una subcategoría que no es plena, pero la categoría de grupos abelianos es una subcategoría plena de la categoría de todos los grupos.

Las flechas $F \to G$ en $\mathbf{Sets}^{\mathbf{A}^{op}}$ son transformaciones naturales, así, escribiremos $Nat(F, G)$ en lugar de $Hom(F, G)$ en $\mathbf{Sets}^{\mathbf{A}^{op}}$.

Los objetos de la categoría $\mathbf{Sets}^{\mathbf{A}^{op}}$ son llamados a veces "contravariantes" de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{Sets}$. Entre ellos está el funtor $h_A \equiv Hom_{\mathbf{A}}(-, A)$ con $A \in Ob(\mathbf{A})$ que manda el objeto A' de $\mathbf{A}$ en $Hom_{\mathbf{A}}(A', A)$ y la flecha $f : A' \to A''$ en $\mathbf{A}$ a $Hom_{\mathbf{A}}((f, Id_A)) : Hom_{\mathbf{A}}((A'', A) \to Hom_{\mathbf{A}}(A', A)$.

Veamos que h_A es, ciertamente, un funtor. Si denotamos nuevamente $H = Hom_{\mathbf{A}}$ entonces

$h_A(Id_{A'}) = H((Id_{A'}, Id_A)) = Id_A \circ () \circ Id_{A'} =$

$Id_{Hom_{\mathbf{A}}(A', A)} = Id_{h_A(A')}$

y, si $f : A' \to A''$ y $g : A'' \to \bar{A}$ son morfismos en $\mathbf{A}$

$h_A(g \circ f) = H(((g \circ f), Id_A)) = H((g, Id_A) \circ (f, Id_A)) =$

$H((g, Id_A)) \circ H((f, Id_A)) = h_A(g) \circ h_A(f)$,

por lo cual h_A es un funtor.

La siguiente proposición es conocida como **Lema de Yoneda.**

Proposición 7 *Si* $\mathbf{A}$ *es localmente pequeña,* A *es un objeto de* $\mathbf{A}$ *y* F : $\mathbf{A}^{op} \to \mathbf{Sets}$ *es un funtor, entonces hay una correspondencia biyectiva entre* $Nat(h_A, F)$ *y* $F(A)$.

Demostración

Definimos $\phi : F(A) \to Nat(h_A, F)$ por: si $a \in F(A)$,

$\phi(a) : h_A \to F$

es la transformación natural tal que

$\phi(a)(B) : h_A(B) = Hom_{\mathbf{A}}(B, A) \to F(B)$

manda $g \in Hom_{\mathbf{A}}(B, A)$ a $F(g)(a)$. (Nótese que F es contravariante y por eso $F(g) : F(A) \to F(B)$.)

Probemos primero que $\phi(a)$ es una transformación natural. Si $f : B \longrightarrow B'$ es un morfismo en $\mathbf{A}^{op}$, entonces para $g \in Hom_{\mathbf{A}}(B, A)$, $f \circ g$ es un morfismo en $\mathbf{A}^{op}$ y así, el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
h_A(B) = Hom_{\mathbf{A}}(B,A) & \xrightarrow{\phi(a)(B)} & F(B) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle h_A(f)=()\circ f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F(f)} \\
h_A(B') = Hom_{\mathbf{A}}(B',A) & \xrightarrow[\phi(a)(B')]{} & F(B')
\end{array} ,$$

porque

$$(F(f) \circ \phi(a)(B))(g) = F(f)(\phi(a)(B)(g)) = F(f)(F(g)(a)) =$$
$$(F(f) \circ F(g))(a) = F(f \circ g)(a) = \phi(a)(B')(f \circ g) =$$
$$\phi(a)(B')(h_A(f)(g)) = (\phi(a)(B') \circ h_A(f))(g) ,$$

con lo que queda probado que $\phi(a)$ es una transformación natural.

Definimos también $\psi : Nat(h_A, F) \rightarrow F(A)$ como

$$\psi(\tau) = \tau_A(Id_A),$$

que claramente pertenece a $F(A)$ ya que $\tau_A : Hom_{\mathbf{A}}(A, A) \rightarrow F(A)$.

Demostraremos ahora que ϕ y ψ son inversos el uno del otro.

Sea $\tau \in Nat(h_A, F)$, si $B \in Ob(\mathbf{A}^{op})$ y $g : A \rightarrow B$ es un morfismo en $\mathbf{A}^{op}$ entonces es conmutativo el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathbf{A}}(A,A) = h_A(A) & \xrightarrow{\tau_A} & F(A) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle ()\circ g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F(g)} \\
Hom_{\mathbf{A}}(B,A) = h_A(B) & \xrightarrow[\tau_B]{} & F(B)
\end{array}$$

y ya que $Id_A \in Hom_{\mathbf{A}}(A, A)$,

$$(\phi \circ \psi)(\tau)(B)(g) = \phi(\psi(\tau))(B)(g) = F(g)(\psi(\tau)) =$$
$$F(g)(\tau_A(Id_A)) = \tau_B(g) = \tau(B)(g),$$

por lo cual

$$(\phi \circ \psi)(\tau)(B) = \tau(B)$$

y entonces

$$\phi \circ \psi = Id_{Nat(h_A,F)} .$$

Por otra parte, si $a \in F(a)$

$$\psi(\phi(a)) = (\phi(a)(A))(Id_A) = F(Id_A)(a) = Id_{F(A)}(a) = a$$

con lo cual

$$\psi \circ \phi = Id_F(A).$$

Así, ψ es una biyección entre $Nat(h_A, F)$ y $F(A)$.

■

Para terminar con esta sección veremos un importante corolario de la proposición anterior, para esto, veamos primero una definición.

Definición 2.5 . Se dice que un funtor $H : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es *fiel* si las funciones $Hom_{\mathbf{A}}(A, A') \to Hom_{\mathbf{B}}(H(A), H(A'))$ que mandan $f : A \to A'$ a $H(f) : H(A) \to H(A')$ son inyectivas para cualesquiera $A, A' \in Ob(\mathbf{A})$. Si son suprayectivas se dice que H es *pleno.*

Corolario 1 *Si* $\mathbf{A}$ *es localmente pequeña, el funtor de Yoneda*

$$Hom^*{}_{\mathbf{A}^{op}} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{A}^{op}}$$

es fiel, pleno e inyectivo en los objetos.

Demostración

Escribiendo $H \cong Hom^*{}_{\mathbf{A}^{op}}$, H es tal que, para $f : A \to A'$ un morfismo en $\mathbf{A}$,
$H(f) : H(A) = Hom_{\mathbf{A}}(-, A) \to Hom_{\mathbf{A}}(-, A') = H(A'),$
donde
$H(f)(B) = Hom_{\mathbf{A}^{op}}((f, Id_B)) =$
$Hom_{\mathbf{A}}((Id_B, f)) : Hom_{\mathbf{A}}(B, A) \to Hom_{\mathbf{A}}(B, A'),$
Así, vemos que la función
$\phi : F(A) = Hom_{\mathbf{A}}(A, A') \to Nat(Hom_{\mathbf{A}}(-, A), Hom_{\mathbf{A}}(-, A'))$
definida en la proposición anterior (donde $F \cong Hom_{\mathbf{A}}(-, A') : \mathbf{A} \to \mathbf{Sets}$) es tal que para, para $f \in Hom_{\mathbf{A}}(A, A')$,
$\phi(f) : Hom_{\mathbf{A}}(-, A) \to Hom_{\mathbf{A}}(-, A')$
es la transformación natural que, para $B \in Ob(\mathbf{Sets})$ y $g \in Hom_{\mathbf{A}}(B, A)$
$\phi(f)(B)(g) = Hom_{\mathbf{A}}(-, A')(g)(f) = Hom_{\mathbf{A}}((g, Id'_A))(f) =$
$Id_{A'} \circ f \circ g = f \circ g = f \circ g \circ Id_B =$
$Hom_{\mathbf{A}}((Id_B, f))(g) = H(f)(B)(g),$
por lo cual
$\phi(f) = H(f),$
es decir, la correspondencia $f \longmapsto H(f)$ es una biyección y por lo tanto H es fiel y pleno.

Por último, para mostrar que H es inyectivo en los objetos, supóngase que $H(A) = H(A')$, entonces
$Hom_{\mathbf{A}}(A, A) = H(A)(A) = H(A')(A) = Hom_{\mathbf{A}}(A, A')$,
y ya que $Id_A \in Hom_{\mathbf{A}}(A, A)$ concluímos que $A = A'$.

■

3

FUNTORES ADJUNTOS

Los 'funtores adjuntos' son el concepto más importante que sirvió para formular la Teoría de Categorías. Aquí iniciaremos con uno de los conceptos motivadores.

Definición 3.1 . Un funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ entre dos conjuntos preordenados $\mathbf{A} = (A, \leq)$ y $\mathbf{B} = (B, \leq)$ vistos como categorías es una función $F : A \to B$ que preserva el orden. Se dice que un funtor $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ es *adjunto izquierdo* de F si:

$$\forall a \in A \;\; \forall b \in B \;\; (F(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq G(b)).$$

Usualmente se le llama una *correspondencia de Galois* a un par de funciones (F, G) que satisfaga la condición anterior.

Observación 1 *Si* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, *y* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ *forman una correspondencia de Galois entonces* $G \circ F : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ *es una operación de cerradura, esto es:*
$\forall a, a' \in A$
$1) a \leq GF(a),$
$2) GFGF(a) \leq GF(a),$
$3) a \leq a' \Rightarrow GF(a) \leq GF(a').$
Similarmente, $F \circ G : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *puede ser llamada una operación interior, ya que satisface las condiciones duales, esto es:*
$\forall b, b' \in B$
$1') FG(b) \leq b,$

2')$FG(b) \leq FGFG(b)$,
3')$b \leq b' \Rightarrow FG(b) \leq FG(b')$.

Demostración

Sean $a, a' \in A$, y $b, b' \in B$.
1)Ya que en B , $F(a) \leq F(a)$, se sigue por definición que $a \leq GF(a)$.
1')Análogamente, $G(b) \leq G(b) \Rightarrow FG(b) \leq b$.
2)Utilizando 1', haciendo $b = F(a)$, obtenemos que $FGF(a) \leq F(a)$ y por lo tanto $GFGF(a) \leq GF(a)$.
2')Similar a 2 (con $a = G(b)$ y utilizando 1).
3,3')Se siguen de que tanto F como G preservan el orden.

■

En un conjunto preordenado $a \cong a'$ si $a \leq a'$ y $a' \leq a$. (En un conjunto parcialmente ordenado $a \cong a'$ no es otra cosa que $a = a'$, ya que vale la antisimetría.) Nótese que de la observación anterior se sigue que $GFGF(a) \cong GF(a)$ y dualmente, $FGFG(b) \cong FG(b)$, para cualesquiera $a \in A$, $b \in B$.

La consecuecia más interesante de una correspondencia de Galois es la siguiente.

Proposición 8 *Dados dos funtores $F : A \rightarrow \mathbf{B}$, $G : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ de una correspondencia de Galois (F, G), existe una correspondencia biyectiva entre $\mathbf{A}_o$, el conjunto de las clases de isomorfismos de elementos 'cerrados' de $\mathbf{A}$, y $\mathbf{B}_o$, el conjunto de clases de isomorfismos de elementos 'abiertos' de $\mathbf{B}$, donde $a \in A$ es cerrado si $GF(a) \cong a$ y $b \in B$ es abierto si $FG(b) \cong b$. El siguiente diagrama ilustra lo antes mencionado y a lo que llamaremos el principio de la unidad de los opuestos.*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_o \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, hook, "\text{inclusión}"'] & \mathbf{B}_o \arrow[d, hook, "\text{inclusión}"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbf{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

Demostración

Sea $\psi : \mathbf{A}_o \longrightarrow \mathbf{B}_o$ definida por

$\psi([(a)]) = [F(a)]$

donde '[ ]' denota la clase de equivalencia. Nótese que si $[a] \in \mathbf{A}_o$ entonces $GF(a) \cong a$ y así, $FGF(a) \cong F(a)$ y por lo tanto ψ está bien definida. Es claro que para $[b] \in \mathbf{B}_o$,

$[b] = \psi(G(b))$

ya que

$FG(b) \cong b$.

Además

$\psi([a]) = \psi([a']) \Rightarrow F(a) \cong F(a')$,

y por lo tanto

$a \cong GF(a) \cong GF(a') \cong a'$

con lo cual queda probado que ψ es inyectiva.

∎

Veamos ahora algunos ejemplos de correspondencias de Galois.

Ejemplo 3.1 . Tómense $\mathbf{A} = \mathbf{B} = (\omega, \leq)$ el conjunto de los números naturales con el orden usual , y sean $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ definidos por

$F(0) = 0, \quad F(a) = p_a$

$G(b) = |\{p \in P \ \ tq \ \ p \leq b\}|$

donde p_a denota al a–ésimo primo y P denota al conjunto de los números primos.

Es claro que tanto F como G preservan el orden y que $F(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq G(b)$. Por lo tanto (F, G) es una correspondencia de Galois o, en otras palabras, un par de funtores adjuntos. Ahora,

$\mathbf{A}_o = \{n \in \omega \mid GF(n) = n\} = \{n \in \omega \mid G(p_n) = n\} =$
$\qquad \{n \in \omega \mid n = n\} = \omega$

y

$\mathbf{B}_o = \{n \in \omega \mid FG(n) = n\} =$
$\qquad \{n \in \omega \mid F(|\{p \in P \mid p \leq n\}|) = n\} = P$,

por lo tanto, en este ejemplo, la unidad de los opuestos describe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números primos.

Ejemplo 3.2 . Dados X, Y conjuntos y una relación binaria $R \subseteq X \times Y$, tomamos $\mathbf{A} = (\wp(X), \subseteq)$ el conjunto de subconjuntos de X ordenados por la inclusión, y $\mathbf{B} = (\wp(Y), \supseteq)$ el conjunto de subconjuntos de Y ordenados por la inclusión inversa.

Definamos $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ como

$F(A) = \{y \in Y \mid \forall x \in A \ (x,y) \in R\} = \bigcap_{x \in A} R(x)$,

$G(B) = \{x \in X \mid \forall y \in B \ (x,y) \in R\} = \bigcap_{y \in B} R^{-1}(y)$.

Entonces, para $A, A' \in \mathbf{A}$ y $B, B' \in \mathbf{B}$ se cumple que

$A \subseteq A' \Rightarrow \bigcap_{x \in A} R(x) \supseteq \bigcap_{x \in A'} R(x) \Rightarrow F(A) \supseteq F(A')$

y

$B \supseteq B' \Rightarrow \bigcap_{y \in B} R^{-1}(y) \subseteq \bigcap_{y \in B'} R^{-1}(y) \Rightarrow G(B) \subseteq G(B')$,

y así, tanto F como G preservan el orden.

Ahora, si $F(A) \supseteq B$, es decir $\bigcap_{x \in A} R(x) \supseteq B$, entonces dado $z \in A$ pasa que para toda $y \in B, z \in R^{-1}(y)$ (esto debido a que $y \in B$ implica que $y \in R(x)$ para todo $x \in A$, y ya que habíamos tomado $z \in A$, $z \in R^{-1}(y)$). Por lo tanto,

$z \in A \Rightarrow z \in \bigcap_{y \in B} R^{-1}(y) = G(B)$

esto es,

$A \subseteq G(B)$

con lo que concluímos que

$F(A) \supset B \Rightarrow A \subseteq G(B)$.

Recíprocamente, si $A \subseteq G(B)$, entonces dado $b \in B$, se tiene que para toda $x \in A$, $b \in R(x)$ (esto debido a que $x \in A$ implica $x \in R^{-1}(y)$ para toda $y \in B$, y ya que habíamos tomado $b \in B$, $(x,b) \in R$). Por lo tanto

$F(A) \supseteq B$,

con lo que concluímos finalmente que

$A \subseteq G(B) \Leftrightarrow F(A) \supseteq B$.

En resumen, F y G son un par de funtores adjuntos. Esta situación es llamada polaridad y proporciona un isomorfismo entre la retícula completa $\mathbf{A}_o$ de subconjuntos cerrados de X y la retícula completa $\mathbf{B}_o$ de subconjuntos cerrados de Y .

Ejemplo 3.3 . En el ejemplo anterior tómese X el conjunto de los puntos del plano y Y el conjunto de semiplanos. Defínase $R \subseteq X \times Y$ como $(x,y) \in R$ si $x \in y$. Entonces, para cualquier $A \in \wp(X)$, $GF(A)$ es la intersección de todos los semiplanos que contienen a A, en otras palabras,el convexo generado por A. En este caso, la unidad de los opuestos nos muestra dos formas equivalentes de describir a un conjunto convexo: con los puntos que lo constituyen o con los planos que lo contienen.

Ejemplo 3.4 . Si (F, G) es una correspondencia de Galois entre dos conjuntos parcialmente ordenados $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, $S \subseteq \mathbf{A}$ y S tiene un supremo x, con $x \in A$, entonces

(1) $\forall y \in S \;\; y \leq x$,

(2) $\forall x' \in A \;\; [(\forall y \in S \,.\, y \leq x') \Rightarrow x \leq x']$.

Así, de (1) se sigue que

(1') $\forall y \in S \;\; F(y) \leq F(x)$.

Además, si existe $b \in B$ tal que $F(y) \leq b$ para cualquier $y \in S$, entonces $y \leq G(b)$ para cualquier $y \in S$ y por (2) se tiene que $x \leq G(b)$ y por lo tanto $F(x) \leq b$. Con lo que hemos visto que

(2') $\forall b \in B \;\; [(\forall y \in S \;\; F(y) \leq b) \Rightarrow F(x) \leq b]$.

Es decir, $F(x)$ es un supremo en $F[S]$, (F preserva supremos). Análogamente G preserva ínfimos.

Nótese además que si $G'(b) = Sup\{a \in \mathbf{A} \;\mid\; F(a) \leq b\}$ entonces

$FG(b) \leq b$,

y por lo tanto

$G(b) \leq G'(b)$.

Recíprocamente, ya que $F(a) \leq b$ *sii* $a \leq G(b)$, se tiene que $G(b)$ es una cota para el conjunto $\{a \in \mathbf{A} \;\mid\; F(a) \leq b\}$ y entonces

$G'(b) \leq G(b)$

y por lo tanto,

$G(b) = G(b')$.

Ejemplo 3.5 . En el ejemplo 3.2, dado un anillo conmutativo C, tomemos X como el conjunto de elementos de C y Y el conjunto de ideales primos de C. Definamos $R \subseteq X \times Y$ por $(x, y) \in R$ si $x \in y$. Entonces, para cualquier $A \in \wp(X)$, $GF(A)$ es la intersección de todos los ideales primos de C que contienen a A, así, como sabemos,

$GF(A) = \{x \in X \;\mid\; \exists n \in \omega \;\; tq \;\; x^n \in A\}$,

el también llamado radical de A. También es sabido que FG es una operación de cerradura en $\wp(Y)$ que hace a Y un espacio topológico compacto llamado *el espectro de* C. (Para mayor información consultar 4.) Aquí la unidad de los opuestos describe una biyección entre los subespacios cerrados del espectro y los ideales que son iguales a su radical.

Ejemplo 3.6 . Tómese $\mathbf{A}$=$\mathbf{B}$ el conjunto preordenado de fórmulas del cálculo proposicional ($A \leq A'$ *sii* $A \Rightarrow A'$). Para una fórmula fija C, defínanse $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ por: para cualquier fórmula A ,

$F(A) = (C \wedge A)$ y $G(A) = (C \Rightarrow A)$.

Entonces,debido a que

$F(A) \leq B \Leftrightarrow (C \wedge A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Leftrightarrow A \leq G(B)$,

F y G son un par de funtores adjuntos.

Ahora, como

$A \in \mathbf{A}_o \Leftrightarrow (A \equiv (C \Rightarrow (C \wedge A)))$

y

$B \in \mathbf{B}_o \Leftrightarrow (B \equiv (C \wedge (C \Rightarrow B)))$,

si C es verdadera , la unidad de los opuestos nos proporciona una biyección entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ ya que cualquier proposición sería abierta y cerrada; por otra parte, si C es falsa, la unidad de los opuestos nos proporciona una biyección entre las proposiciones verdaderas y las falsas.

Ahora generalizaremos la noción de funtor adjunto para conjuntos preordenados a funtores adjuntos para categorías arbitrarias. Para esto cambiaremos nuestra notación a la que usan la mayoría de los categoristas y reemplazaremos la letra G por la letra U. ('U' es por 'underlying' y 'F' por 'free'.)

Definición 3.2 . Una *adjunticidad* entre categorías $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es una tétrada $(F, U, \eta, \varepsilon)$ donde

$F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$

son funtores,

$\eta : Id_{\mathbf{A}} \to UF$ y $\varepsilon : FU \to Id_{\mathbf{B}}$

son transformaciones naturales de tal modo que

$U\varepsilon \circ \eta U = Id_U$ y $\varepsilon F \circ F\eta = Id_F$.

Se dice que U es *adjunto derecho* de F o que F es *adjunto izquierdo* de U, mientras que a η y a ε se les llama adjunciones.

Antes de ir a los ejemplos, daremos otra definición que nos llevará a un concepto equivalente.

Definición 3.3 . Una solución $(F, \eta, *)$ al problema del mapeo universal para un funtor $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ está dada por: para cualquier objeto A de $\mathbf{A}$ existen un objeto $F(A)$ en $\mathbf{B}$ y un morfismo $\eta_A : A \to UF(A)$ en $\mathbf{A}$, de tal forma que, para cualquier objeto B en $\mathbf{B}$ y cualquier morfismo $f : A \to U(B)$ en $\mathbf{A}$, existe un único morfismo $f^* : F(A) \to B$ en $\mathbf{B}$ tal que

$U(f^*) \circ \eta_A = f$, es decir:

$$\begin{array}{ccc} UF(A) & & \\ {\scriptstyle \eta_A}\uparrow & \searrow{\scriptstyle U(f^*)} & \\ A & \xrightarrow[f]{} & U(B) \end{array} \qquad \begin{array}{cc} F(A) & \\ & \searrow{\scriptstyle f^*} \\ & B \end{array}$$

es conmutativo.

Ejemplo 3.7 . Sea **B** la categoría de los monoides, **A** la categoría de los conjuntos, es decir, **B**=**Mon**, **A**=**Sets**. Sea $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ el funtor que olvida. Se define

$F(A) = \{a_1 a_2 a_3 ... a_n \mid n \in \omega, a_i \in A\}$,

y

$\circ : F(A) \times F(A) \to F(A)$

por

$(a_1 a_2 ... a_n) \circ (b_1 b_2 ... b_m) = (a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_m)$.

Es claro que si definimos 1 como la sucesión vacía de elementos de A, $(F(A), \circ, 1)$ es un monoide.

Definamos también $\eta_A : A \to UF(A)$ como la función inclusión (es decir $\eta_A(a) = a$).

Para un morfismo en **A**, $f : A \to U(B)$, defínase $f^* : F(A) \to B$ como $f^*(a_1 ... a_n) = f(a_1) ... f(a_n)$, es claro que f^* es un morfismo en **B** y que conmuta el triángulo

$$\begin{array}{ccc} UF(A) = F(A) & & \\ {\scriptstyle i = \eta_A}\uparrow & \searrow{\scriptstyle U(f^*) = f^*} & \\ A & \xrightarrow[f]{} & U(B) = B \end{array} \quad ,$$

además, si $\bar{f} : F(A) \to B$ es un morfismo en **B** tal que conmuta el triángulo

$$\begin{array}{ccc} UF(A) & & \\ {\scriptstyle i = \eta_A}\uparrow & \searrow{\scriptstyle U(\bar{f}) = \bar{f}} & \\ A & \xrightarrow[f]{} & U(B) = B \end{array} \quad ,$$

debe pasar que para $a \in A$

$f(a) = \bar{f}(a)$,

y por lo tanto

$\bar{f}(a_1 ... a_n) = \bar{f}(a_1) ... \bar{f}(a_n) = f(a_1) ... f(a_n) = f^*(a_1 ... a_n)$.

Así, f^* es única.

Concluímos finalmente que $(F, \eta, *)$ es una solución al problema del mapeo universal para el funtor U.

Ejemplo 3.8 . Sean $\mathbf{A}$=**Ab** la categoría de grupos abelianos, **B** su subcategoría de grupos abelianos libres de torsión y $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ el funtor inclusión. Para $A \in \mathbf{A}$ defínase

$$F(A) = A/_{T(A)},$$

con $T(A)$ el subgrupo de torsión de A. Definamos también

$$\eta_A = \pi : A \to UF(A) = A/_{T(A)},$$

donde

$$\pi(a) = \bar{a}.$$

Entonces, dado $f : A \to U(B)$, un morfismo en $\mathbf{A}$, se tiene que conmuta

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\bar{0}"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & A/_{T(A)} = UF(A) \\ & B = U(B) & \end{tikzcd}$$

y por lo tanto existe un único $f^* : A/_{T(A)} \to B$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\bar{0}"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & A/_{T(A)} \arrow[dl, "f^*"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

así, existe un único $f^* : F(A) \to B$ tal que conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd} UF(A) = A/T(A) \arrow[dr, "U(f^*)=f^*"] & \\ A \arrow[u, "\pi=\eta_A"] \arrow[r, "f"'] & U(B) = B \end{tikzcd}$$

Nuevamente, concluímos que $(F, \eta, *)$ es una solución al problema del mapeo universal para el funtor U.

Con las siguientes proposiciones observaremos que los conceptos de adjunticidad y de solución al problema del mapeo universal son equivalentes.

Proposición 9 *Dadas dos categorías* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *y una adjunticidad* $(F, U, \eta, \varepsilon)$, *existe una solución al problema del mapeo universal para* $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

Demostración

Sea A un objeto de $\mathbf{A}$, es claro $F(A)$ es un objeto de $\mathbf{B}$ y que $\eta_A : A \to UF(A)$ es un morfismo en $\mathbf{A}$. Ahora, sea B un objeto de $\mathbf{B}$ y $f : A \to U(B)$ un morfismo en $\mathbf{A}$.
Nuestro objetivo es probar que existe un único morfismo $f^* : F(A) \to B$ en $\mathbf{B}$ de tal forma que hace conmutativo el triángulo:

$$\begin{tikzcd} UF(A) \arrow[dr, "U(f^*)"] & \\ A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "f"'] & U(B) \end{tikzcd} .$$

Proponemos $f^* = \varepsilon_B \circ F(f)$. Entonces
$U(f^*) \circ \eta_A = U(\varepsilon_B \circ F(f)) \circ \eta_A = U(\varepsilon_B) \circ UF(f) \circ \eta_A =$
$U(\varepsilon_B) \circ \eta_{U(B)} \circ f = (U\varepsilon \circ \eta U)_B \circ f = Id_{U(B)} \circ f = f$,
donde la tercera igualdad se sigue de que $\eta : Id_A \to UF$ es una transformación natural y por lo tanto, para $f : A \to U(B)$, es conmutativo el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & UF(A) \arrow[d, "UF(f)"] \\ U(B) \arrow[r, "\eta_{U(B)}"'] & UFU(B) \end{tikzcd} ,$$

y la cuarta igualdad se sigue de la hipótesis de que $(F, U, \eta, \varepsilon)$ es una adjunticidad.

Así, queda probada la existencia del morfismo f^*.

Para terminar la demostración, supóngase que $\bar{f} : F(A) \to B$ es un morfismo en $\mathbf{B}$. Entonces, dado que $\varepsilon : FU \to Id_{\mathbf{B}}$ es una transformación natural, se tiene que conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} FUF(A) \arrow[r, "\varepsilon_{F(A)}"] \arrow[d, "FU(\bar{f})"'] & F(A) \arrow[d, "\bar{f}"] \\ FU(B) \arrow[r, "\varepsilon_B"] & B \end{tikzcd} .$$

Así, si $\bar{f}$ satisface que $U(\bar{f}) \circ \eta_A = f$ entonces dado que $(F, U, \eta, \varepsilon)$ es una adjunticidad se tiene que

$$\begin{aligned} f^* &= \varepsilon_B \circ F(f) = \varepsilon_B \circ F(U(\bar{f}) \circ \eta_A) = \\ &\varepsilon_B \circ FU(\bar{f}) \circ F(\eta_A) = \bar{f} \circ \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = \\ &\bar{f} \circ (\varepsilon F \circ F\eta)_A = \bar{f} \circ Id_{F(A)} = \bar{f}. \end{aligned}$$

con lo cual queda probada la unicidad de f^*.

■

Proposición 10 *Dada una solución $(F, \eta, *)$ al problema del mapeo universal para un funtor $U : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, existe una adjunticidad $(F, U, \eta, \varepsilon)$.*

Demostración

a). Para un morfismo $h : A \longrightarrow A'$ en $\mathbf{A}$, defínase

$$F(h) = (\eta_{A'} \circ h)^* : F(A) \rightarrow F(A')$$

donde $(\eta_{A'} \circ h)^*$ es el único morfismo en $\mathbf{B}$ tal que conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd} UF(A) \arrow[dr, "U((\eta_{A'} \circ h)^*)"] & \\ A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "\eta_{A'} \circ h"'] & UF(A') \end{tikzcd} .$$

Veamos que $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es un funtor.

i). Nótese que $Id_{F(A)} : F(A) \rightarrow F(A)$ es un morfismo en $\mathbf{B}$ tal que el siguiente triángulo es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} UF(A) \arrow[dr, "U(Id_{F(A)})"] & \\ A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "\eta_A \circ Id_A"'] & UF(A) \end{tikzcd} .$$

Así, por ser $F(Id_A)$ el único morfismo que hace conmutativo el triángulo anterior, tenemos que

$F(Id_A) = (\eta_A \circ Id_A)^* = Id_{F(A)}$.

ii). Sean $A \xrightarrow{h} A' \xrightarrow{k} A''$ dos morfismos en **A**, entonces $F(h) : F(A) \to F(A')$ es el único morfismo en **B** tal que conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd} UF(A) \arrow[dr, "UF(h)"] & \\ A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "\eta_{A'} \circ h"'] & UF(A') \end{tikzcd} ,$$

o, visto desde otra perspectiva, conmuta el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & UF(A) \arrow[d, "UF(h)"] \\ A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & UF(A') \end{tikzcd} .$$

Análogamente, $F(k)$ es el único morfismo en **B** tal que conmuta el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "k"'] & UF(A') \arrow[d, "UF(k)"] \\ A'' \arrow[r, "\eta_{A''}"'] & UF(A'') \end{tikzcd} .$$

Por lo tanto

$$U(F(k) \circ F(h)) \circ \eta_A = UF(k) \circ UF(h) \circ \eta_A = UF(k) \circ \eta_{A'} \circ h = \eta_{A''} \circ k \circ h,$$

con lo cual es conmutativo el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd} UF(A) \arrow[dr, "U(F(k) \circ F(h))"] & \\ A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "\eta_{A''} \circ k \circ h"'] & UF(A'') \end{tikzcd} .$$

Por otra parte, dado que $F(k \circ h)$ es el único morfismo que hace conmutativo el triángulo anterior, se tiene que

$F(k \circ h) = F(k) \circ F(h)$,

con lo cual concluímos que F es un funtor.

b). Sea $h : A \to A'$ un morfismo en **A**, entonces es claro de la definición de $F(h)$, que conmuta el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & UF(A) \arrow[d, "UF(h)"] \\
A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & UF(A')
\end{tikzcd} \quad .$$

Por lo tanto $\eta : Id_{\mathbf{A}} \to UF$ es una transformación natural.

c). Definimos $\varepsilon : FU \to Id_{\mathbf{B}}$ como
$\varepsilon_B = (Id_{U(B)})^*$
para B un objeto de $\mathbf{B}$. Es claro que ε está bien definida, veamos que es una transformación natural.

Si $k : B \to B'$ es un morfismo en $\mathbf{B}$, entonces por definición de ε_B, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
UFU(B) \arrow[dr, "U(\varepsilon_B)"] & \\
U(B) \arrow[u, "\eta_{U(B)}"] \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "U(k)"'] & U(B) \arrow[dl, "U(k)"] \\
U(B') &
\end{tikzcd} \quad ,$$

y en consecuecia conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd}
UFU(B) \arrow[dr, "U(k)\circ U(\varepsilon_B)"] & \\
U(B) \arrow[u, "\eta_{U(B)}"] \arrow[r, "U(k)"'] & U(B')
\end{tikzcd} \quad ,$$

con lo cual se concluye que
$k \circ \varepsilon_B = (U(k))^*$.

Por otra parte, del hecho de que $\eta : Id_{\mathbf{A}} \to UF$ sea una transformación natural y de la definición de $\varepsilon_{B'}$, se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
UFU(B) \arrow[r, "UFU(k)"] & UFU(B') \arrow[dr, "U(\varepsilon_{B'})"] & \\
U(B) \arrow[u, "\eta_{U(B)}"] \arrow[r, "U(k)"'] & U(B') \arrow[u, "\eta_{U(B')}"] \arrow[r, "Id_{U(B')}"'] & U(B')
\end{tikzcd} \quad ,$$

y por lo tanto
$(U(k))^* = \varepsilon_{B'} \circ FU(k)$.

Así, para $k : B \to B'$ morfismo en **B**, el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} FU(B) \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, "FU(k)"'] & B \arrow[d, "k"] \\ FU(B') \arrow[r, "\varepsilon_{B'}"'] & B' \end{tikzcd} ,$$

ya que

$\varepsilon_{B'} \circ FU(k) = (U(k))^* = k \circ \varepsilon_B$.

Así, hemos probado que ε es una transformación natural.

d). Por definición de ε_B , conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd} UFU(B) \arrow[dr, "U(\varepsilon_B)"] & \\ U(B) \arrow[u, "\eta_{U(B)}"] \arrow[r, "Id_{U(B)}"'] & U(B) \end{tikzcd} .$$

Por lo tanto, para cada objeto B de **B** se tiene que

$(U\varepsilon \circ \eta U)_B = U(\varepsilon_B) \circ \eta_{U(B)} = Id_{U(B)} = (Id_U)_B$,

con lo que hemos demostrado que

$U\varepsilon \circ \eta U = Id_U$

e). Como ya habíamos hecho notar, para un objeto A de **A**, se tiene que

$Id_{F(A)} = F(Id_A) = (Id_A \circ \eta_A)^* = \eta_A{}^*$.

Por otra parte, ya que η es una transformación natural, conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} UF(A) \arrow[r, "UF(\eta_A)"] & UFUF(A) \arrow[dr, "U((Id_{UF(A)})^*)"] & \\ A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "\eta_A"'] & UF(A) \arrow[u, "\eta_{UF(A)}"] \arrow[r, "Id_{UF(A)}"'] & UF(A) \end{tikzcd} ,$$

con lo cual también se tiene que

$(\eta_A)* = (Id_{UF(A)})^* \circ F(\eta_A)$.

En resumen, para cada objeto A de **A** se tiene que

$(\varepsilon F \circ F\eta)_A = \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = (Id_{UF(A)})^* \circ F(\eta_A) =$
$(\eta_A)^* = Id_{F(A)} = (Id_F)_A$,

y por lo tanto

$\varepsilon F \circ F\eta = Id_F$.

Así, queda completa la demostración de que $(F, U, \varepsilon, \eta)$ es una adjunticidad.

■

Podemos enunciar las últimas dos proposiciones en un teorema .

Teorema 1 *Dadas dos categorías* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$*, hay una correspondencia uno-a-uno entre las adjunticidades* $(F, U, \eta, \varepsilon)$ *y soluciones* $(F, \eta, *)$ *del problema del mapeo universal para* $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

■

En vista de el teorema anterior, los ejemplos 3.7 y 3.8 son ejemplos de funtores adjuntos . Mostraremos algunos ejemplos más tarde, por ahora pasaremos a otro nuevo concepto que nuevamente tendrá relación con los anteriores.

Proposición 11 *Una adjunticidad* $(F, U, \eta, \varepsilon)$ *entre categorías localmente pequeñas* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *proporciona un 'isomorfismo natural'*
$\psi : Hom_{\mathbf{A}}(-, U(-)) \to Hom_{\mathbf{B}}(F(-), -)$
entre funtores de $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$ *en* **Sets**. *(Donde isomorfismo natural se le llama a una transformación natural cuyas componentes son biyectivas.)*

Demostración

Sea $(F, \eta, *)$ la solución al problema del mapeo universal proporcionada por $(F, U, \eta, \varepsilon)$.

Definimos
$\psi : Hom_{\mathbf{A}}(-, U(-)) \to Hom_{\mathbf{B}}(F(-), -)$
de la siguiente forma: dada $(A, B) \in \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$,
$\psi_{(A,B)} : Hom_{\mathbf{A}}(A, U(B)) \to Hom_{\mathbf{B}}(F(A), B)$
es tal que
$\psi_{(A,B)}(f) = f^*$.
Es claro que ψ está bien definida. Nuestro objetivo es demostrar que ψ es una transformación natural y que sus componentes son biyectivas.

a). Es obvio que para $g : F(A) \longrightarrow B$ conmuta el triángulo

$$\begin{array}{ccc} UF(A) & & \\ \eta_A \uparrow & \searrow U(g) & \\ A & \xrightarrow[U(g)\circ\eta_A]{} & U(B) \end{array} ,$$

y por lo tanto

$g = (g \circ \eta_A)^* = \psi_{(A,B)}(g \circ \eta_A)$

con lo que hemos probado que $\psi_{(A,B)}$ es suprayectiva.

b). Supóngase que $f, \bar{f} \in Hom_{\mathbf{A}}(A, U(B))$ y que $\psi_{(A,B)}(f) = \psi_{(A,B)}(\bar{f})$, entonces $f^* = \bar{f}^*$ y, dado que conmutan los siguientes triángulos:

$$\begin{array}{ccc} UF(A) & & \\ \eta_A \uparrow & \searrow U(f^*) & \\ A & \xrightarrow[f]{} & U(B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} UF(A) & & \\ \eta_A \uparrow & \searrow U(\bar{f}^*) & \\ A & \xrightarrow[\bar{f}]{} & U(B) \end{array} .$$

se tiene que

$f = U(f^*) \circ \eta_A = U(\bar{f}^*) \circ \eta_A = \bar{f}$,

con lo que hemos probado que $\psi_{(A,B)}$ es inyectiva.

c). Veamos ahora que ψ es una transformación natural.
Sea $(f, g) : (A, B) \longrightarrow (A', B')$ un morfismo en $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$. Sabemos que $\eta : Id_{\mathbf{A}} \longrightarrow UF$ es un transformación natural y por lo tanto el siguiente diagrama es conmutativo para $k : A \longrightarrow U(B)$

$$\begin{array}{ccccccc} UF(A) & \xrightarrow{UF(f)} & UF(A) & & & & \\ \eta_{A'} \uparrow & & \eta_A \uparrow & \searrow U(k^*) & & & \\ A' & \xrightarrow[f]{} & A & \xrightarrow[k]{} & U(B) & \xrightarrow[U(g)]{} & U(B') \end{array} ,$$

lo que afirma que

$(U(g) \circ k \circ f)^* = g \circ k^* \circ F(f)$.

Así, el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathbf{A}}(A, U(B)) & \xrightarrow{\psi_{(A,B)}} & Hom_{\mathbf{B}}(F(A), B) \\ \downarrow U(g)\circ(\,)\circ f & & \downarrow g\circ(\,)\circ F(f) \\ Hom_{\mathbf{A}}(A', U(B')) & \xrightarrow[\psi_{(A',B')}]{} & Hom_{\mathbf{B}}(F(A'), B') \end{array} ,$$

y por lo tanto ψ es una transformación natural.

■

Proposición 12 *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son dos categorías localmente pequeñas, un isomorfismo natural* $\psi : Hom_{\mathbf{A}}(-, U(-)) \to Hom_{\mathbf{B}}(F(-), -)$ *entre funtores de* $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$ *en* **Sets** *proporciona una adjunticidad* (F, U, η, ϵ) .

Demostración

Lo que haremos para probar esta afirmación, será construír, a partir del isomorfismo natural ψ, una solución $(F, \eta, *)$ al problema del mapeo universal para $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

Primero, definimos para $A \in Ob(\mathbf{A})$
$\eta_A : A \to UF(A)$
de tal forma que
$\psi_{(A,F(A))}(\eta_A) = Id_{F(A)}$
lo cual es válido ya que $\psi_{(A,F(A))}$ es biyectiva.
También definimos, para $f : A \to U(B)$
$f^* : F(A) \to B$
donde
$\psi_{(A,B)}(f) = f^*$.

Veamos entonces que con estas definiciones, $(F, \eta, *)$ es una solución al problema del mapeo universal para $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

Para un morfismo $(Id_A, f^*) : (A, F(A)) \to (A, B)$ en $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$, dado que ψ es una transformación natural, conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{A}}(A, UF(A)) \arrow[r, "\psi_{(A,F(A))}"] \arrow[d, "U(f^*)\circ()"] & Hom_{\mathbf{B}}(F(A), F(A)) \arrow[d, "f^*\circ()"] \\ Hom_{\mathbf{A}}(A, U(B)) \arrow[r, "\psi_{(A,B)}"'] & Hom_{\mathbf{B}}(F(A), B) \end{tikzcd} .$$

Utilizando esto y que $\eta_A \in Hom_{\mathbf{A}}(A, UF(A))$ se tiene que
$f^* = f^* \circ Id_{F(A)} = f^* \circ \psi_{(A,F(A))}(\eta_A) =$
$\psi_{(A,B)}(U(f^*) \circ \eta_A)$,
y entonces, como $\psi_{(A,B)}$ es biyectiva, concluímos que
$U(f^*) \circ \eta_A = f$,

es decir, conmuta el siguiente triángulo

$$\begin{tikzcd} UF(A) \arrow[dr, "U(f^*)"] & \\ A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "f"'] & U(B) \end{tikzcd} .$$

Para terminar veamos la unicidad de f^*. Si $g : F(A) \to B$ es tal que conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd} UF(A) \arrow[dr, "U(g)"] & \\ A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "f"'] & U(B) \end{tikzcd} ,$$

dado que $\psi_{(A,B)}$ es biyectiva y que $U(\psi_{(A,B)}(g)) \circ \eta_A = g$ tenemos que $\psi^{-1}{}_{(A,B)}() = U() \circ \eta_A$.
En resumen,
$U(g) \circ \eta_A = f \Rightarrow \psi^{-1}{}_{(A,B)}(g) = \psi^{-1}{}_{(A,B)}(f^*) \Rightarrow f^* = g$

■

Así, las últimas dos proposiciones las enunciamos juntas de la manera siguiente.

Teorema 2 *Para cualesquiera dos categorías localmente pequeñas* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$*, existe una correspondencia uno-a-uno entre las adjuticidades* $(F, U, \eta, \varepsilon)$ *y los isomorfismos naturales* ψ *de* $Hom_{\mathbf{A}}(-, U(-))$ *en* $Hom_{\mathbf{B}}(F(-), -)$ *funtores de la categoría* $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$ *en* **Sets**.

■

Utilizando el teorema anterior y el ejemplo 3.6, existe una biyección entre las pruebas $C \wedge A \vdash B$ y $A \vdash C \Rightarrow B$. Este y otros puntos de vista debidos a Lawvere, pueden ser resumidos en otro eslogan.

ESLOGAN IV. Muchos conceptos importantes en las matemáticas provienen de la idea de adjunto izquierdo o derecho, de funtores ya conocidos.

Enunciaremos ahora dos propiedades importantes de los funtores adjuntos.

Proposición 13 *Un funtor F entre categorías localmente pequeñas* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *determina su adjunto de manera única excepto por isomorfismo natural.*

Demostración

Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor y $U, U' : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ adjuntos derechos de F, entonces por el teorema anterior, existe un isomorfismo natural
$\Upsilon : Hom_{\mathbf{A}}(-, U(-)) \to Hom_{\mathbf{A}}(-, U'(-))$.
(Queremos exhibir un isomorfismo natural $\psi : U \to U'$.)

Definimos para B en los objetos de $\mathbf{B}$
$\psi_B = \Upsilon_{(U(B),B)}(Id_{U(B)}) : U(B) \to U'(B)$.
Es claro que esta definición tiene sentido.

Para probar que ψ es una transformación natural tómese $g : B \to B'$ un morfismo en $\mathbf{B}$, considerense ahora los morfismos en $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$, $(Id_{U(B)}, g)$ y $(U(g), Id_{B'})$. Entonces, dado que Υ es una transformación natural conmutan los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{A}}(U(B),U(B)) \arrow[r, "\Upsilon_{(U(B),B)}"] \arrow[d, "U(g)\circ()"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & Hom_{\mathbf{A}}(U(B),U'(B)) \arrow[d, "U'(g)\circ()"] \\
Hom_{\mathbf{A}}(U(B),U(B')) \arrow[r, "\Upsilon_{(U(B),B')}"] \arrow[dr, phantom, "II"] & Hom_{\mathbf{A}}(U(B),U'(B')) \\
Hom_{\mathbf{A}}(U(B'),U(B')) \arrow[r, "\Upsilon_{(U(B'),B')}"'] \arrow[u, "()\circ U(g)"'] & Hom_{\mathbf{A}}(U(B'),U'(B')) \arrow[u, "()\circ U(g)"']
\end{tikzcd} .$$

Tomando ahora que $Id_{U(B)} \in Hom_{\mathbf{A}}(U(B), U(B))$ y que I es conmutativo, tenemos que
$\Upsilon_{(U(B),B')}(U(g)) = U'(g) \circ \psi_B$.
Por otra parte, del hecho que II sea conmutativo y dado que $Id_{U(B')} \in Hom_{\mathbf{A}}(U(B'), U(B'))$ tenemos que
$\Upsilon_{(U(B),B')}(U(g)) = \psi_{B'} \circ U(g)$.
Por lo tanto el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
U(B) \arrow[r, "\psi_B"] \arrow[d, "U(g)"'] & U'(B) \arrow[d, "U'(g)"] \\
U(B') \arrow[r, "\psi_{B'}"'] & U'(B')
\end{tikzcd} ,$$

con lo cual queda demostrado que ψ es una transformación natural.

Finalmente debemos demostrar que ψ_B es una biyección para cualquier $B \in Ob(\mathbf{B})$.

Es claro checar que, al igual que definimos $\psi_B = \Upsilon_{(U(B),B)}(Id_{U(B)})$ y se probó que ψ es una transformación natural, podemos definir $\phi : U' \to U$ como

$\phi_B = (\Upsilon_{(U'(B),B)})^{-1}(Id_{U'(B)})$

y ϕ es también un isomorfismo natural. (Es fácil verificar que si $\alpha : H \to I$ es un isomorfismo natural, donde $H, I : \mathbf{C} \rightrightarrows \mathbf{D}$ son funtores, entonces $\alpha^{-1} : I \to H$ definida por $(\alpha^{-1})_D = (\alpha_D)^{-1}$ es también un isomorfismo natural.)

Demostraremos que ϕ_B es inverso de ψ_B, con lo cual quedará terminada la demostración.

Tomemos los morfismos en $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$

$(\psi_B, Id_B) : (U'(B), B) \to (U(B), B)$ y

$(\phi_B, Id_B) : (U(B), B) \to (U'(B), B)$,

entonces son conmutativos los siguientes cuadrados:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{A}}(U'(B),U(B)) \arrow[r, "\Upsilon_{(U'(B),B)}"] \arrow[d, "()\circ\psi_B"'] \arrow[dr, phantom, "III"] & Hom_{\mathbf{A}}(U'(B),U'(B)) \arrow[d, "()\circ\psi_B"] \\
Hom_{\mathbf{A}}(U(B),U(B)) \arrow[r, "\Upsilon_{(U(B),B)}"'] \arrow[d, "()\circ\phi_B"'] \arrow[dr, phantom, "IV"] & Hom_{\mathbf{A}}(U(B),U'(B)) \arrow[d, "()\circ\phi_B"] \\
Hom_{\mathbf{A}}(U'(B),U(B)) \arrow[r, "\Upsilon_{(U'(B),B)}"'] & Hom_{\mathbf{A}}(U'(B),U'(B))
\end{tikzcd}$$

Así, de la conmutatividad de III y ya que $\phi_B \in Hom_{\mathbf{A}}(U'(B), U(B))$ se sigue de la definición de ϕ_B que

$\psi_B = Id_{U'(B)} \circ \psi_B = (() \circ \psi_B)(Id_{U'(B)}) =$

$(() \circ \psi_B)(\Upsilon_{(U'(B),B)}(\phi_B)) = \Upsilon_{(U(B),B)}(\phi_B \circ \psi_B)$.

Como $\Upsilon_{(U(B),B)}$ es inyectiva y como también se tiene que por definición

$\psi_B = \Upsilon_{(U(B),B)}(Id_{U(B)})$

concluímos que

$\phi_B \circ \psi_B = Id_{U(B)}$.

Por otra parte, de la conmutatividad de IV y del hecho que $Id_{U(B)} \in Hom_{\mathbf{A}}(U(B), U(B))$, se tiene de manera análoga que

$\psi_B \circ \phi_B = Id_{U'(B)}$.

■

Proposición 14 *Si (U, F) y (U', F') son dos pares de funtores adjuntos con*

$$\mathbf{C} \underset{F'}{\overset{U'}{\rightleftarrows}} \mathbf{B} \underset{F}{\overset{U}{\rightleftarrows}} \mathbf{A} \quad ,$$

donde $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ ***y*** $\mathbf{C}$ ***son localmente pequeñas, entonces*** $(UU', F'F)$ ***es también un par de funtores adjuntos.***

Demostración

Por hipótesis sabemos que existen isomorfismos naturales
$\psi : Hom_{\mathbf{B}}(F(-), -) \to Hom_{\mathbf{A}}(-, U(-))$,
$\phi : Hom_{\mathbf{C}}(F'(-), -) \to Hom_{\mathbf{B}}(-, U'(-))$.
(Nuestro objetivo es probar que existe un isomorfismo natural
$\Upsilon : Hom_{\mathbf{C}}(F'F(-), -) \to Hom_{\mathbf{A}}(-, UU'(-))$.)

Sea $(f, g) : (A, C) \to (A', C')$ un morfismo en $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{C}$, entonces, dado que
$(F(f), g) : (F(A), C) \to (F(A'), C')$ y
$(f, U'(g)) : (A, U'(C)) \to (A', U'(C'))$
son morfismos en $\mathbf{B}^{op} \times \mathbf{C}$ y $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$ respectivamente, se sigue que los siguientes cuadrados son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{C}}(F'F(A), C) \arrow[r, "\phi_{(F(A),C)}"] \arrow[d, "g\circ()\circ F'F(f)"] \arrow[dr, phantom, "I"] & Hom_{\mathbf{B}}(F(A), U'(C)) \arrow[d, "U'(g)\circ()\circ F(f)"] \\
Hom_{\mathbf{C}}(F'F(A'), C') \arrow[r, "\phi_{(F(A'),C')}"] & Hom_{\mathbf{B}}(F(A'), U'(C'))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{B}}(F(A), U'(C)) \arrow[r, "\psi_{(A,U'(C))}"] \arrow[d, "U'(g)\circ()\circ F(f)"] \arrow[dr, phantom, "II"] & Hom_{\mathbf{A}}(A, UU'(C)) \arrow[d, "UU'(g)\circ()\circ f"] \\
Hom_{\mathbf{B}}(F(A'), U'(C')) \arrow[r, "\psi_{(A',U'(C'))}"'] & Hom_{\mathbf{A}}(A', UU'(C'))
\end{tikzcd} \quad .$$

Definiendo entonces, para (A, C) objeto de $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$,
$\Upsilon_{(A,C)} = \psi_{(A,U'(C))} \circ \phi_{(F(A),C)}$,
de la conmutatividad de I y II, se sigue que conmuta el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{C}}(F'F(A), C) \arrow[r, "\Upsilon_{(A,C)}"] \arrow[d, "g\circ()\circ F'F(f)"] & Hom_{\mathbf{A}}(A, UU'(C)) \arrow[d, "UU'(g)\circ()\circ f"] \\
Hom_{\mathbf{C}}(F'F(A'), C') \arrow[r, "\Upsilon_{(A',C')}"'] & Hom_{\mathbf{A}}(A', UU'(C'))
\end{tikzcd} \quad ,$$

con lo que hemos demostrado que Υ es una transformación natural.

Además, para cualquier $(A,C) \in Ob(\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B})$, $\Upsilon_{(A,C)}$ es composición de biyecciones y por lo tanto biyección, con lo que Υ es un isomorfismo natural.

■

Veamos ahora, dos ejemplos más de adjunticidades.

Ejemplo 3.9 . Sean $\mathbf{A}=\mathbf{B}=\mathbf{Sets}$, C un conjunto fijo y F, G los funtores definidos en el ejemplo 1.17 . Veamos que (F, G) es una pareja de funtores adjuntos. Para esto, definiremos un isomorfismo natural $\psi : Hom(F(-), -) \to Hom(-, G(-))$.

Defínase, para $(A, B) \in \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$
$\psi_{(A,B)} : Hom(A \times C, B) \to Hom(A, B^C)$
por

$$\begin{array}{rccc} \psi_{(A,B)}(f): & A & \longrightarrow & B^C \\ & a & \longmapsto & \psi_{(A,B)}(f)(a) \end{array} ,$$

donde
$\psi_{(A,B)}(f)(a)(c) = f(a,c)$.
Es claro que $\psi_{(A,B)}$ está bien definida. Además:
$f, g \in Hom(A \times C, B) \ \wedge \ \psi_{(A,B)}(f) = \psi_{(A,B)}(g) \ \Rightarrow$
$\forall a \in A \ \ \psi_{(A,B)}(f)(a) = \psi_{(A,B)}(g)(a) \ \Rightarrow$
$\forall a \in A, \forall c \in C \ \ f(a,c) = \psi_{(A,B)}(f)(a)(c) =$
$\psi_{(A,B)}(g)(a)(c) = g(a)(c) \ \Rightarrow \ f = g$,
y así, se sigue que $\psi_{(A,B)}$ es inyectiva.

Por otra parte, para $k : A \to B^C$, definiendo $\bar{k} : A \times C \to B$ tal que $\bar{k}(a,c) = k(a)(c)$, es claro que $\psi_{(A,B)}(\bar{k}) = k$. Por lo tanto $\psi_{(A,B)}$ es también suprayectiva.

Por último veamos que ψ es una transformación natural.
Sea $(f,g) : (A,B) \to (A',B')$ un morfismo en $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{B}$, debemos probar la

conmutatividad de el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} Hom(A\times C,B) \arrow[r, "\psi_{(A,B)}"] \arrow[d, "g\circ()\circ(f,Id_C)"] \arrow[dr, phantom, "I"] & Hom(A,B^C) \arrow[d, "{[g\circ()]\circ()\circ f}"] \\ Hom(A'\times C,B') \arrow[r, "\psi_{(A',B')}"'] & Hom(A',(B')^C) \end{tikzcd} ,$$

esto es, si $k \in Hom(A \times C, B)$ debemos probar que

$g \circ \psi_{(A,B)}(k) \circ f = \psi_{(A',B')} \circ g \circ k \circ (f, Id_C)$.

Sea $a' \in A'$, $c \in C$ entonces

$[g \circ \psi_{(A,B)}(k) \circ f](a')(c) = g[\psi_{(A,B)}(k)[f(a')(c)]] =$
$g[k(f(a'),c)] = [g \circ k \circ (f, Id_C)](a',c) =$
$[\psi_{(A',B')} \circ g \circ k \circ (f, Id_C)](a')(c)$.

Por lo tanto, I es conmutativo, con lo cual hemos demostrado que ψ es una transformación natural.

Ejemplo 3.10 . Sean **A**=**Sets**, **B**=**Cat** y $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ el funtor que olvida. Defínase para $A \in Ob(\mathbf{A})$ la categoría $F(A)$ de la siguiente forma:

$Ob(F(A)) = A$

y, para $a, a' \in A$, si $a = a'$ entonces

$Hom_{\mathbf{B}}(a,a') = \{Id_a\}$,

y si $a \neq a'$ entonces

$Hom_{\mathbf{B}}(a,a') = \emptyset$.

Defínase también

$\eta_A = Id_A : A \to UF(A)$

y, dada $f : A \to U(B)$ una flecha en **A**,

$f^* : F(A) \to B$

como

$f^*(a) = f(a)$ y $f^*(Id_a) = Id_{f(a)}$.

Con las definiciones anteriores, es claro que conmuta el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd} UF(A) \arrow[dr, "U(f^*)"] & \\ A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "f"'] & U(B) \end{tikzcd} .$$

Recíprocamente, si $g : F(A) \to B$ hace conmutativo el triángulo

$$
\begin{array}{ccc}
UF(A) & & \\
\eta_A \uparrow & \searrow^{U(g)} & \\
A & \xrightarrow[f]{} & U(B)
\end{array} ,
$$

entonces

$g(a) = U(g)(a) = U(g)(a) \circ Id_A = U(g)(a) \circ \eta_A = f(a)$,

y análogamente

$g(Id_a) = f(Id_A)$.

Con lo cual se ha probado la unicidad de f^* y por lo tanto que $(F, \eta, *)$ es una solución al problema del mapeo universal para U y, en virtud del teorema 1 , U tiene un adjunto izquierdo.

Para finalizar éste capítulo, extenderemos la 'unidad de los opuestos' a categorías generales. Extendamos primero la noción de 'equivalencia'.

Definición 3.4 . Decimos que una ajunticidad $(F, U, \eta, \varepsilon)$ es una *equivalencia adjunta* si η y ε son isomorfismos naturales.

Una generalización de la anterior definición es la siguiente.

Definición 3.5 . Una *equivalencia* entre categorías $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ está dada por un par de funtores $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tales que $UF \cong Id_{\mathbf{A}}$ y $FU \cong Id_{\mathbf{B}}$.

Veamos que efectivamente, cualquier equivalencia proporciona una equivalencia adjunta.

Proposición 15 *Dada una equivalencia entre categorías* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *con*

$$\mathbf{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{B}$$

funtores y, con los isomorfismos naturales

$\eta : Id_{\mathbf{A}} \to UF, \quad \bar{\varepsilon} : FU \to Id_{\mathbf{B}}$,

se obtiene una equivalencia adjunta $(F, U, \eta, \varepsilon)$.

Demostración

Definimos $\varepsilon : FU \to Id_{\mathbf{B}}$ por: para cuaquier objeto B de $\mathbf{B}$,
$\varepsilon_B = \bar{\varepsilon}_B \circ F((U(\bar{\varepsilon}_B) \circ \eta_{U(B)})^{-1}) =$
$\bar{\varepsilon}_B \circ F((\eta_{U(B)})^{-1} \circ U((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}))$,
la cual es un buena definición dado que se tiene la composición

$$U(B) \xrightarrow{U((\bar{\varepsilon}_B)^{-1})} UFU(B) \xrightarrow{(\eta_{U(B)})^{-1}} U(B) \quad ,$$

y por lo tanto la composición

$$FU(B) \xrightarrow{F((\eta_{U(B)})^{-1} \circ U((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}))} FU(B) \xrightarrow{\bar{\varepsilon}_B} B \quad .$$

Demostremos primero que ε es una transformación natural. Sea $g : B \to B'$ un morfismo en $\mathbf{B}$. Ahora, del hecho que $\bar{\varepsilon}$, η^{-1} y $\bar{\varepsilon}^{-1}$ sean transformaciones naturales se sigue que son conmutativos lo siguientes cuadrados:

$$\begin{tikzcd}
FU(B) \arrow[r, "\bar{\varepsilon}_B"] \arrow[d, "FU(g)"'] & B \arrow[d, "g"] \\
FU(B') \arrow[r, "\bar{\varepsilon}_{B'}"] & B'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
UFU(B) \arrow[r, "(\eta_{U(B)})^{-1}"] \arrow[d, "UFU(g)"'] & U(B) \arrow[d, "U(g)"] \\
UFU(B') \arrow[r, "(\eta_{U(B')})^{-1}"] & U(B')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "(\bar{\varepsilon}_B)^{-1}"] \arrow[d, "g"'] & FU(B) \arrow[d, "FU(g)"] \\
B' \arrow[r, "(\bar{\varepsilon}_{B'})^{-1}"'] & FU(B')
\end{tikzcd} \quad .$$

Así,
$g \circ \varepsilon_B = g \circ \bar{\varepsilon}_B \circ F((\eta_{U(B)})^{-1}) \circ FU((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) =$
$\bar{\varepsilon}_{B'} \circ FU(g) \circ F((\eta_{U(B)})^{-1}) \circ FU((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) =$
$\bar{\varepsilon}_{B'} \circ F(U(g) \circ (\eta_{U(B)})^{-1}) \circ FU((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) =$
$\bar{\varepsilon}_{B'} \circ F((\eta_{U(B')})^{-1} \circ UFU(g)) \circ FU((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) =$
$\bar{\varepsilon}_{B'} \circ F((\eta_{U(B')})^{-1}) \circ FUFU(g) \circ FU((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) =$
$\bar{\varepsilon}_{B'} \circ F((\eta_{U(B')})^{-1}) \circ FU(FU(g) \circ (\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) =$
$\bar{\varepsilon}_{B'} \circ F((\eta_{U(B')})^{-1}) \circ FU((\bar{\varepsilon}_{B'})^{-1} \circ g) =$
$\bar{\varepsilon}_{B'} \circ F((\eta_{U(B')})^{-1}) \circ FU((\bar{\varepsilon}_{B'})^{-1}) \circ FU(g) = \varepsilon_{B'} \circ FU(g)$,
con lo cual hemos demostrado que es conmutativo el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
FU(B) \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, "FU(g)"'] & B \arrow[d, "g"] \\
FU(B') \arrow[r, "\varepsilon_{B'}"'] & B'
\end{tikzcd} \quad ,$$

y por lo tanto ε es una transformación natural.

Para terminar la demostración, bastará probar que $U\varepsilon \circ \eta U = Id_U$ y que $\varepsilon F \circ F\eta = Id_F$.

Primero, del hecho que η sea una transformación natural y que para cualquier $B \in Ob(\mathbf{B})$
$U((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) : U(B) \to UFU(B)$, $(\eta_{U(B)})^{-1} : UFU(B) \to U(B)$
sean morfismos en $\mathbf{A}$, se sigue que conmutan los siguientes cuadrados:

$$\begin{tikzcd} U(B) \arrow[r, "\eta_{U(B)}"] \arrow[d, "U((\bar{\varepsilon}_B)^{-1})"'] & UFU(B) \arrow[d, "UFU((\bar{\varepsilon}_B)^{-1})"] \\ UFU(B) \arrow[r, "\eta_{UFU(B)}"'] & UFUFU(B) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} UFU(B) \arrow[r, "\eta_{UFU(B)}"] \arrow[d, "(\eta_{U(B)})^{-1}"'] & UFUFU(B) \arrow[d, "UF((\eta_{U(B)})^{-1})"] \\ U(B) \arrow[r, "\eta_{U(B)}"'] & UFU(B) \end{tikzcd} .$$

Así, para cualquier $B \in Ob(\mathbf{B})$ pasa que
$(U\varepsilon \circ \eta U)_B = U(\varepsilon_B) \circ \eta_{U(B)} =$
$U(\bar{\varepsilon}_B \circ F((\eta_{U(B)})^{-1} \circ U((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}))) \circ \eta_{U(B)} =$
$U(\bar{\varepsilon}_B) \circ UF((\eta_{U(B)})^{-1}) \circ UFU((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) \circ \eta_{U(B)} =$
$U(\bar{\varepsilon}_B) \circ UF((\eta_{U(B)})^{-1}) \circ \eta_{UFU(B)} \circ U((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) =$
$U(\bar{\varepsilon}_B) \circ \eta_{U(B)} \circ (\eta_{U(B)})^{-1} \circ U((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) =$
$U(\bar{\varepsilon}_B) \circ U((\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) = U(\bar{\varepsilon}_B \circ (\bar{\varepsilon}_B)^{-1}) = U(Id_B) =$
$Id_{U(B)} = (Id_U)_B$,
y por lo tanto
$U\varepsilon \circ \eta U = Id_U$.

Ahora, en vista que η es una transformación natural y que para $A \in Ob(\mathbf{A})$, $(\eta_A)^{-1} : UF(A) \to A$ es un morfismo en $\mathbf{A}$, conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} UF(A) \arrow[r, "\eta_{UF(A)}"] \arrow[d, "(\eta_A)^{-1}"'] & UFUF(A) \arrow[d, "UF((\eta_A)^{-1})"] \\ A \arrow[r, "\eta_A"] & UF(A) \end{tikzcd} ,$$

por lo que

$(\eta_{UF(A)})^{-1} = UF((\eta_A)^{-1})$.

Además, dado que $\bar{\varepsilon}$ es una transformación natural, y ya que

$F((\eta_A)^{-1}) : FUF(A) \to F(A)$ y

$(\bar{\varepsilon}_{F(A)})^{-1} : F(A) \to FUF(A)$

son morfismos en $\mathbf{B}$, conmutan los siguientes cuadrados:

$$\begin{tikzcd} FUFUF(A) \arrow[r, "\varepsilon_{FUF(A)}"] \arrow[d, "FUF((\eta_A)^{-1})"'] & FUF(A) \arrow[d, "F((\eta_A)^{-1})"] \\ FUF(A) \arrow[r, "\varepsilon_{F(A)}"'] & F(A) \end{tikzcd} .$$

$$\begin{tikzcd} FUF(A) \arrow[r, "\varepsilon_{F(A)}"] \arrow[d, "FU((\varepsilon_{F(A)})^{-1})"'] & F(A) \arrow[d, "(\varepsilon_{F(A)})^{-1}"] \\ FUFUF(A) \arrow[r, "\varepsilon_{FUF(A)}"'] & FUF(A) \end{tikzcd} .$$

Así, para cualquier $A \in Ob(\mathbf{A})$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon F \circ F\eta)_A = \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = \\
&\quad \bar{\varepsilon}_{F(A)} \circ F(((\eta_{UF(A)})^{-1} \circ U((\bar{\varepsilon}_{F(A)})^{-1}))) \circ F(\eta_A) = \\
&\quad \bar{\varepsilon}_{F(A)} \circ F((\eta_{UF(A)})^{-1}) \circ FU((\bar{\varepsilon}_{F(A)})^{-1}) \circ F(\eta_A) = \\
&\quad \bar{\varepsilon}_{F(A)} \circ FUF((\eta_A)^{-1}) \circ FU((\bar{\varepsilon}_{F(A)})^{-1}) \circ F(\eta_A) = \\
&\quad F((\eta_A)^{-1}) \circ \bar{\varepsilon}_{FUF(A)} \circ FU((\bar{\varepsilon}_{F(A)})^{-1}) \circ F(\eta_A) = \\
&\quad F((\eta_A)^{-1}) \circ (\bar{\varepsilon}_{F(A)})^{-1} \circ \bar{\varepsilon}_{F(A)} \circ F(\eta_A) = \\
&\quad F((\eta_A)^{-1}) \circ F(\eta_A) = F((\eta_A)^{-1} \circ \eta_A) = \\
&\quad F(Id_A) = Id_{F(A)} = (Id_F)_A,
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$\varepsilon F \circ F\eta = Id_F$.

■

Lema 1 *Dada una adjunticidad* $(F, U, \eta, \varepsilon)$ *entre categorías* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$, *son equivalentes:*

(1) $\eta UF = UF\eta$,

(2) ηU *es un isomorfismo,*

(3) $\varepsilon FU = FU\varepsilon$,

(4) εF *es un isomorfismo.*

Demostración

(1) $\Rightarrow$ (2)). Supongamos por el momento que η_A tiene inverso izquierdo $g : UF(A) \to A$, aseguramos que, en presencia de (1), g es también inverso derecho, debido a que

$$\eta_A \circ g = UF(g) \circ \eta_{UF(A)} = UF(g) \circ UF(\eta_A) = UF(g \circ \eta_A) = UF(Id_A) = Id_{UF(A)} ,$$

donde la primera igualdad se sigue de que η es una transformación natural y en consecuencia conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} UF(A) \arrow[r, "\eta_{UF(A)}"] \arrow[d, "g"'] & UFUF(A) \arrow[d, "UF(g)"] \\ A \arrow[r, "\eta_A"'] & UF(A) \end{tikzcd} .$$

Ahora, por definición de adjunticidad, para cualquier $B \in Ob(\mathbf{B})$, $\eta_{U(B)}$ tiene inverso izquierdo $U(\varepsilon_B)$, por lo tanto, $\eta_{U(B)}$ es un isomorfismo, con lo cual se demuestra (2).

(2) $\Rightarrow$ (3)). Si $\eta_{U(B)}$ es un isomorfismo, entonces por definición de adjunticidad, $U(\varepsilon_B)$ es su inverso.

Ahora, aunque en principio la composición $\varepsilon_{FU(B)} \circ Id_{FU(B)}$, no tiene sentido, vemos que la siguiente composición si lo tiene:

$$(FU)^2(B) \xrightarrow{FU(\varepsilon_B)} FU(B) \xrightarrow{F(\eta_{U(B)})} (FU)^2(B) \xrightarrow{\varepsilon_{FU(B)}} FU(B) .$$

Así, por (2) se tiene que

$$\varepsilon_{FU(B)} \circ F(\eta_{U(B)}) \circ FU(\varepsilon_B) = \varepsilon_{FU(B)} \circ F(\eta_{U(B)} \circ U(\varepsilon_B)) = \varepsilon_{FU(B)} \circ F((\eta U \circ U\varepsilon)_B) = \varepsilon_{FU(B)} \circ F(Id_{U(B)}) = \varepsilon_{FU(B)} \circ Id_{FU(B)} ,$$

de tal modo que no tenemos problemas en ver que , para $B \in Ob(\mathbf{B})$

$$\varepsilon_{FU(B)} = \varepsilon_{FU(B)} \circ Id_{FU(B)} = \varepsilon_{FU(B)} \circ F(\eta_{U(B)}) \circ FU(\varepsilon_B) = (\varepsilon F \circ F\eta)_{U(B)} \circ FU(\varepsilon_B) = Id_{FU(B)} \circ FU(\varepsilon_B) = FU(\varepsilon_B),$$

por lo que concluímos que

$$\varepsilon FU = FU\varepsilon .$$

(3) $\Rightarrow$ (4)). Al igual que (1) $\Rightarrow$ (2), supóngamos que ε_B tiene inverso derecho $g : B \to FU(B)$, entonces, por (3), g es inverso izquierdo ya que, del hecho que ε sea una transformación natural, el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} FU(B) \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, "FU(g)"'] & B \arrow[d, "g"] \\ FUFU(B) \arrow[r, "\varepsilon_{FU(B)}"'] & FU(B) \end{tikzcd} ,$$

y por lo tanto

$$g \circ \varepsilon_B = \varepsilon_{FU(B)} \circ FU(g) = FU(\varepsilon_B) \circ FU(g) =$$
$$FU(\varepsilon_B \circ g) = FU(Id_B) = Id_{FU(B)} .$$

Así, ya que por definición de adjunticidad $\varepsilon_{F(A)}$ tiene inverso derecho $F(\eta_A)$, concluimos que $\varepsilon_{F(A)}$ es un isomorfismo.

(4) $\Rightarrow$ (1) Dado un objeto A de $\mathbf{A}$ ocurre que

$$(UF\eta)_A = UF(\eta_A) \circ Id_{UF(A)} = UF(\eta_A) \circ (U\varepsilon \circ \eta U)_{F(A)} =$$
$$UF(\eta_A) \circ U(\varepsilon_{F(A)}) \circ \eta_{UF(A)} =$$
$$U(F(\eta_A) \circ \varepsilon_{F(A)}) \circ \eta_{UF(A)} = U(Id_{F(A)}) \circ \eta_{UF(A)} =$$
$$Id_{UF(A)} \circ \eta_{UF(A)} = \eta_{UF(A)} = (\eta UF)_A ,$$

y por lo tanto

$$UF\eta = \eta UF .$$

■

Como corolario a este lema y lo demostrado anteriormente, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 16 *Una adjunticidad $(F, U, \eta, \varepsilon)$ entre categorías $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ induce una equivalencia adjunta entre subcategorías $\mathbf{A}_o$ de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}_o$ de $\mathbf{B}$, donde*

$$\mathbf{A}_o = \{A \in \mathbf{A} \mid \eta_A \text{ es un isomorfismo}\}$$
$$\mathbf{B}_o = \{B \in \mathbf{B} \mid \varepsilon_B \text{ es un isomorfismo}\} .$$

Además, ηU es un isomorfismo si y sólo si εF lo es.

■

4

LIMITES EN CATEGORIAS

En esta sección estudiaremos el concepto de límite, el cual contiene como casos especiales muchas construcciones importantes, por ejemplo productos, igualadores y productos fibrados, así como también sus duales. Comencemos con la siguiente definición.

Definición 4.1 . Se dice que un objeto T de una categoría $\mathbf{A}$ es un *objeto terminal* si para cada objeto A de $\mathbf{A}$ existe una única flecha $O_A : A \to T$, esto es: $h \in Hom_{\mathbf{A}}(A,T) \Rightarrow h = O_A$).

Es fácil verificar que T es único salvo isomorfismo, esto es, si T' es otro objeto terminal entonces $T \cong T'$. Así, hablaremos de "el" objeto terminal. Por ejemplo, en la categoría Sets, cualquier conjunto con un solo elemento es terminal y, en la categoría **Group**, cualquier grupo con un solo elemento es terminal. Un objeto terminal en $\mathbf{A}^{op}$ es también llamado un *objeto inicial* en $\mathbf{A}$.

Ahora, para mostrar otro ejemplo de la importancia de los funtores adjuntos y ejemplificar nuevamente el eslogan IV, hagamos la siguiente observacion.

Observación 2 *Dada una categoría pequeña* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ *tiene objeto terminal si y sólo si el funtor* $O_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathbf{1}$ *tiene adjunto derecho.*

Demostración

Sea $U : \mathbf{1} \to \mathbf{A}$ tal que $Hom(O_{\mathbf{A}}(-), -) \cong Hom(-, U(-))$. Entonces para todo objeto A de $\mathbf{A}$ se tiene que
$\{Id_*\} = Hom(*, *) = Hom(O_{\mathbf{A}}(A), *) \cong Hom(A, U(*))$
y por lo tanto $U(*)$ es objeto terminal en $\mathbf{A}$.

Recíprocamente, si T es un objeto terminal de $\mathbf{A}$, defínase el funtor $U : \mathbf{1} \to \mathbf{A}$ por:
$U(*) = T, \quad U(Id_*) = Id_T$.
Es fácil verificar que U es adjunto izquierdo de $O_{\mathbf{A}}$.

■

Definición 4.2 . Para un conjunto I y una familia $\{A_\imath \mid \imath \in I\}$ de objetos en una categoría $\mathbf{A}$, su *producto* está dado por un objeto P y una familia de *proyecciones* $\{p_\imath : P \to A_\imath \mid \imath \in I\}$ con la siguiente propiedad universal: para cualquier objeto Q y cualquier familia de flechas $\{q_\imath : Q \to A_\imath \mid \imath \in I\}$, existe una única flecha $f : Q \to P$ tal que los siguientes diagramas son conmutativos para toda $\imath \in I$

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q_\imath"'] & & P \arrow[dl, "p_\imath"] \\ & A_\imath & \end{tikzcd}$$

esto es,
$\forall \imath \in I \quad p_\imath \circ f = q_\imath$.

Si demostráramos que la clase de familias de flechas $\{q_\imath : Q \to A_\imath \mid \imath \in I\}$ forman una categoría $\mathbf{A}'$, la anterior definición sería equivalente a la definición de un objeto terminal en $\mathbf{A}'$. Veamos que esto es cierto.

Observación 3 *Dados los objetos $\{q_\imath : Q \to A_\imath \mid \imath \in I\}$, que son familias de morfismos en $\mathbf{A}$, se obtiene una nueva categoría $\mathbf{A}'$ definiendo los morfismos en $\mathbf{A}'$ como: para cualesquiera dos objetos $\{q_\imath : Q \to A_\imath \mid \imath \in I\}$ y $\{r_\imath : R \to A_\imath \mid \imath \in I\}$, $f : Q \to R$ es un morfismo en $\mathbf{A}'$ si para cualquier $\imath \in I$ conmutan los siguientes diagramas:*

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q_\imath"'] & & R \arrow[dl, "r_\imath"] \\ & A_\imath & \end{tikzcd}$$

Demostración

Sean $\{q_i : Q \to A_i\} \xrightarrow{f} \{r_i : R \to A_i\} \xrightarrow{g} \{s_i : S \to A_i\}$ dos flechas en $\mathbf{A}'$, entonces, para cada $i \in I$, es conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "q_i"'] & R \arrow[r, "g"] \arrow[d, "r_i"] & S \arrow[dl, "s_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd},$$

y por lo tanto $g \circ f$ hace conmutativo, para cada $i \in I$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "q_i"'] & & S \arrow[dl, "s_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}.$$

Con lo que hemos demostrado que en $\mathbf{A}'$ está definida una composición (que es la misma que en $\mathbf{A}$).

Además, es claro que el morfismo en $\mathbf{A}$, Id_Q, hace conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "Id_Q"] \arrow[dr, "q_i"'] & & Q \arrow[dl, "q_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd},$$

y por lo tanto, ya que la composición en $\mathbf{A}'$ es la misma que en $\mathbf{A}$, Id_Q es el morfismo identidad en $\mathbf{A}'$ y la composición en $\mathbf{A}'$ es asociativa. Concluímos, de todo lo anterior, que $\mathbf{A}'$ es una categoría.

∎

Es fácil verificar que el objeto P es único salvo isomorfismo, por lo tanto, hablaremos de "el" producto y lo denotaremos por $\prod_{i \in I} A_i$.

En la categoría **Sets**, los productos son los productos cartesianos. En muchas categorías concretas los productos son construídos con los conjuntos subyacentes y la estructura natural inducida. También existen productos para las categorías de monoides **Mon** , de grupos **Group**, de anillos **Ring**, etc., así como de los espacios topológicos **Top**.

Un producto en $\mathbf{A}^{op}$ es también llamado un *coproducto* en $\mathbf{A}$. Por ejemplo, en **Sets** los coproductos son uniones ajenas.

Hay que hacer notar que si $I = \emptyset$, la existencia de un producto P afirma que, para cada objeto Q , existe una única flecha $Q \to P$, en otras palabras, que P es objeto terminal.

Vale la pena observar el producto de dos objetos A y B de una categoría $\mathbf{A}$ con más detalle. Éste está dado por un objeto $A \times B$ con proyecciones $\pi_{A,B} : A \times B \to A$ y $\pi'_{A,B} : A \times B \to B$ tales que, para cualesquiera flechas $f : C \to A$ y $g : C \to B$ existe una única flecha $< f,g >: C \to A \times B$ que satisface las siguientes ecuaciones:

$\pi_{A,B} \circ < f,g >= f$ y $\pi'_{A,B} \circ < f,g >= g$.

Nótese que la unicidad de $< f,g >$ puede ser expresada ecuacionalmente como

$< \pi_{A,B} \circ h, \pi'_{A,B} \circ h >= h$

para cualquier $h : C \to A \times B$.

Pasemos ahora a otros conceptos que más adelante demostraremos están relacionados con los productos.

Definición 4.3 . En una categoría $\mathbf{A}$, un par de flechas

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

se dice que tienen un *igualador* $e : C \to A$ si: $f \circ e = g \circ e$ y para toda $h : D \to A$ tal que $f \circ h = g \circ h$, existe una única flecha $k : D \to C$ tal que $e \circ k = h$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ D \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Es fácil verificar que el objeto igualador C es único salvo isomorfismo.

Por ejemplo en la categoría **Sets** o en la categoría **Group**, puede tomarse $C = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ y $e : C \to A$ la función inclusión.

Un igualador en $\mathbf{A}^{op}$ es también conocido como un *coigualador* en $\mathbf{A}$. Por ejemplo en **Sets**, un coigualador de dos funciones $f,g : B \to A$ está dado por una función $e : A \to C$ donde $C = A/_{\sim}$ con $'\sim'$ la menor relación de equivalencia en A tal que $f(b) \sim g(b)$ para cualquier $b \in B$ y, e definida por $e(a) = [a]$.

La siguiente discusión es una versión de las ideas de Burroni sobre igualadores.

Para cualquier diagrama $f, g : A \rightrightarrows B$, denotemos por $E(f,g) \xrightarrow{\alpha(f,g)} A$ a su igualador. Así, por definición, tenemos la ecuación

$(B1)$ $f \circ \alpha(f,g) = g \circ \alpha(f,g)$.

Considerando ahora la propiedad universal de $\alpha(f,g)$, dada una flecha $h : D \longrightarrow A$ tal que $f \circ h = g \circ h$, existe una única flecha $\beta(f,g,h) : D \longrightarrow E(f,g)$ tal que

$(*)$ $\alpha(f,g) \circ \beta(f,g,h) = h$.

Observamos que $(*)$ depende de la condición $f \circ h = g \circ h$. Consideraremos dos casos especiales de $\beta(f,g,h)$ en los cuales tal condición se cumple automaticamente.

Primero, considérese cualquier flecha $h : D \longrightarrow A$, entonces es claro que

$f \circ h \circ \alpha(f \circ h, g \circ h) = g \circ h \circ \alpha(f \circ h, g \circ h)$,

con lo cual encontramos una única flecha

$\gamma(f,g,h) \equiv \beta(f,g,h \circ \alpha(f \circ h, g \circ h)) : E(f \circ h, g \circ h) \longrightarrow E(f,g)$

que satisface como caso especial de $(*)$:

$(B2)$ $\alpha(f,g) \circ \gamma(f,g,h) = h \circ \alpha(f \circ h, g \circ h)$.

Segundo, es obvio que para cualquier flecha $f : A \rightarrow B$, $f \circ Id_A = f \circ Id_A$, con lo cual existe una única flecha $\delta(f) \equiv \beta(f,f,Id_A) : A \longrightarrow E(f,f)$ que satisface como caso especial de $(*)$:

$(B3)$ $\alpha(f,f) \circ \delta(f) = Id_A$.

De los anteriores casos especiales, podemos definir $\beta(f,g,h)$ en general de la siguiente forma: suponiendo que $f \circ h = g \circ h$, defínase

$(*')$ $\beta(f,g,h) \equiv \gamma(f,g,h) \circ \delta(f \circ h)$.

Entonces, por (B2) y (B3) se tiene que

$\alpha(f,g) \circ \beta(f,g,h) = \alpha(f,g) \circ \gamma(f,g,h) \circ \delta(f \circ h) =$

$h \circ \alpha(f \circ h, g \circ h) \circ \delta(f \circ h) = h \circ Id_D = h$,

con lo cual se cumple $(*)$.

Por último, para expresar la unicidad de $\beta(f,g,h)$ ecuacionalmente, supóngase que $\alpha(f,g) \circ k = h$, queremos que esto implique que $k = \beta(f,g,h)$. Así, es claro que lo anterior es expresado por

$(B4)$ $\beta(f,g,\alpha(f,g) \circ k) = k$.

Además, también es claro que β puede ser sustituída en (B4) por γ y δ usando $(*')$.

Resumimos la anterior discusión de igualadores en la siguiente proposición.

Proposición 17 *(Burroni). Un igualador para cualquier par de flechas* $f, g : A \rightrightarrows B$ *está dado por: una flecha* $\alpha(f,g) : E(f,g) \to A$*, una familia de flechas* $\gamma(f,g,h) : E(f \circ h, g \circ h) \to E(f,g)$ *(una flecha para cada* $h : D \to A$*), y una flecha* $\delta(f) : A \to E(f,f)$ *que satisfacen*

(*B*1) $f \circ \alpha(f,g) = g \circ \alpha(f,g)$,

(*B*2) $\alpha(f,g) \circ \gamma(f,g,h) = h \circ \alpha(f \circ h, g \circ h)$,

(*B*3) $\alpha(f,f) \circ \delta(f) = Id_A$ *y*

(*B*4) $\gamma(f,g,\alpha(f,g) \circ k) \circ \delta(f \circ \alpha(f,g) \circ k) = k$.

■

Definición 4.4 . Un *producto fibrado* para un diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

es otro diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

de tal forma que conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

y donde además, para cualquier otro diagrama

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

tal que haga conmutativo el cuadrado correspondiente, existe una única flecha $Q \to P$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& P \arrow[r] \arrow[d] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Es fácil verificar que P es único salvo isomorfismo. Un producto fibrado en $\mathbf{A}^{op}$ es llamado un *coproducto fibrado* en $\mathbf{A}$.

Como ejemplo, si una categoría tiene un objeto terminal T y productos, los productos binarios son casos especiales de productos fibrados , esto es, cuando $B \cong T$.

Mostraremos ahora como los productos fibrados pueden ser construídos a partir de productos e igualadores.

Proposición 18 *Si una categoría tiene productos binarios e igualadores, los productos fibrados pueden ser construídos de la siguiente forma:*

$$\begin{tikzcd}
P = E(f \circ \pi, g \circ \pi') \arrow[dr, "\alpha(f \circ \pi, g \circ \pi')"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \times B \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

(donde $\pi \equiv \pi_{A,B}$ *y* $\pi' \equiv \pi'_{A,B}$ *) .*

Demostración

Por (B1) se tiene que

$f \circ \pi \circ \alpha(f \circ \pi, g \circ \pi') = g \circ \pi' \circ \alpha(f \circ \pi, g \circ \pi')$,

es decir, conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi' \circ \alpha(f \circ \pi, g \circ \pi')"] \arrow[d, "\pi \circ \alpha(f \circ \pi, g \circ \pi')"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd} .$$

Supóngase ahora que es conmutativo el cuadrado

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd} ,$$

entonces por definición de producto, existe una única flecha

$< h, k >: Q \rightarrow A \times B$

tal que

$\pi \circ < h, k >= h$ y $\pi' \circ < h, k >= k$,

de lo cual se sigue que

$f \circ \pi \circ < h, k >= g \circ \pi' \circ < h, k >$

y, por definición de igualador, existe una única flecha

$s : Q \rightarrow P$

tal que

$\alpha(f \circ \pi, g \circ \pi') \circ s =< h, k >$,

y entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, "s"] \arrow[drr, "k"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\ & P \arrow[r, "\pi' \circ \alpha(f \circ \pi, g \circ \pi')"'] \arrow[d, "\pi \circ \alpha(f \circ \pi, g \circ \pi')"] & B \\ & A & \end{tikzcd} .$$

Por último, si $t : Q \rightarrow P$ hace conmutativo un diagrama semejante al anterior, entonces

$\pi' \circ \alpha(f \circ \pi, g \circ \pi') \circ t = k = \pi' \circ < h, k >$

y

$\pi \circ \alpha(f \circ \pi, g \circ \pi') \circ t = h = \pi \circ < h, k >$,

con lo cual se concluye que

$\alpha(f \circ \pi, g \circ \pi') \circ t =< h, k >$

y por lo tanto

$t = s$.

■

Definición 4.5 . Dada una categoría $\mathbf{I}$ (a la que se llama la categoría índice), un funtor $\Gamma : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ es llamado un $\mathbf{I}$-*diagrama*. Un *límite* de Γ es una pareja (A, t) con $A \in Ob(\mathbf{A})$ y $t : K(A) \to \Gamma$ (donde $K(A) : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ es el funtor constante A), de manera que: para toda pareja $(B, \tau : K(B) \longrightarrow \Gamma)$ existe un único morfismo en $\mathbf{A}$, $f : B \longrightarrow A$, tal que $t_i \circ f = \tau_i$.

En otras palabras, es conmutativo el 'cono'

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "t_i"'] \arrow[d, "t_j"] \arrow[dr, "t_k"] & \\ \Gamma(i) \arrow[r, "\Gamma(\alpha)"'] & \Gamma(j) \arrow[r, "\Gamma(\beta)"'] & \Gamma(k) \end{tikzcd}$$

(con $\alpha : i \longrightarrow j$, $\beta : j \longrightarrow k$ morfismos en $\mathbf{I}$) y, si también es conmutativo el cono

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\tau_i"'] \arrow[d, "\tau_j"] \arrow[dr, "\tau_k"] & \\ \Gamma(i) \arrow[r, "\Gamma(\alpha)"'] & \Gamma(j) \arrow[r, "\Gamma(\beta)"'] & \Gamma(k) \end{tikzcd} ,$$

entonces existe un único morfismo $f : B \longrightarrow A$ de tal forma que son conmutativos los triángulos

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[ddl, "\tau_i"'] \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, "\tau_j"] & \\ & A \arrow[dl, "t_i"'] \arrow[dr, "t_j"] & \\ \Gamma(i) \arrow[rr, "\Gamma(\alpha)"'] & & \Gamma(j) \end{tikzcd} .$$

Es fácil probar que A es único salvo isomorfismo. Por otra parte, también puede verificarse que se obtienen como casos especiales de límites, productos (cuando $\mathbf{I}$ es discreta), igualadores (cuando $\mathbf{I}$ es $\bullet \rightrightarrows \bullet$) y productos fibrados (cuando $\mathbf{I}$ es $\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix} \rightrightarrows \bullet$).

Los límites en $\mathbf{A}^{op}$ son llamados *colímites* en $\mathbf{A}$. Además, si $\mathbf{I}$ es un conjunto dirigido, a los límites se les llama usualmente *límites inversos* o *proyectivos*, y a los colímites, *límites directos* o *inductivos*. El límite de Γ es denotado algunas veces por $\varprojlim \Gamma$ y el colímite por $\varinjlim \Gamma$.

Proposición 19 *Si una categoría tiene productos e igualadores, los límites para un* **I***-diagrama pueden ser construídos de la siguiente forma:*

Sea $\phi : \prod_{i \in I} \Gamma(i) \longrightarrow \prod_{\alpha : i \longrightarrow j} \Gamma(j)$ *el morfismo obtenido por la propiedad universal del producto que hace conmutativos los diagramas*

$$\begin{tikzcd} \prod \Gamma(i) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_k"'] & \prod \Gamma(j) \arrow[d, "p_\beta"] \\ \Gamma(k) \arrow[r, "\Gamma(\beta)"'] & \Gamma(\ell) \end{tikzcd}$$

para cualquier $\beta : k \longrightarrow \ell$ *en* **I** *y donde* p_k *denota la proyección en el factor* k. *Análogamente sea* ψ *el morfismo que hace conmutativos los diagramas*

$$\begin{tikzcd} \prod \Gamma(i) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p_\ell"'] & \prod \Gamma(j) \arrow[dl, "p_\beta"] \\ \Gamma(\ell) & \end{tikzcd}$$

Sea ahora $\alpha \equiv \alpha(\psi, \phi) : E \longrightarrow \prod \Gamma(i)$ *el igualador de* ψ *y* ϕ. *Entonces* (E, σ) *es limite para* Γ, *donde* $\sigma_i = p_i \circ \alpha$.

$$\begin{tikzcd} & \Gamma(\ell) \arrow[d, "p_\ell"'] & \\ E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\sigma_k"'] & \prod \Gamma(i) \arrow[r, shift left, "\psi"] \arrow[r, shift right, "\phi"'] \arrow[d, "p_k"] & \prod \Gamma(j) \arrow[ul, "p_\beta"'] \arrow[d, "p_\beta"] \\ & \Gamma(k) \arrow[r, "\Gamma(\beta)"'] & \Gamma(\ell) \end{tikzcd}$$

Demostración

Primero, para cualquier morfismo en **I** , $\beta : k \longrightarrow \ell$, se tiene que
$\Gamma(\beta) \circ \sigma_k = \Gamma(\beta) \circ p_k \circ \alpha = p_\beta \circ \phi \circ \alpha = p_\beta \circ \psi \circ \alpha =$
$p_\ell \circ \alpha = \sigma_\ell$,
con lo cual se prueba la conmutatividad del cono

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\sigma_k"'] \arrow[d, "\sigma_\ell"] \arrow[dr, "\sigma_m"] & \\ \Gamma(k) \arrow[r, "\Gamma(\beta)"'] & \Gamma(\ell) \arrow[r, "\Gamma(\gamma)"'] & \Gamma(m) \end{tikzcd} .$$

Segundo, nótese que si $(\bar{E}, \tau)$ hace conmutativo el cono

$$\begin{tikzcd} & \bar{E} \arrow[dl, "\tau_k"'] \arrow[d, "\tau_\ell"] \arrow[dr, "\tau_m"] & \\ \Gamma(k) \arrow[r, "\Gamma(\beta)"'] & \Gamma(\ell) \arrow[r, "\Gamma(\gamma)"'] & \Gamma(m) \end{tikzcd} ,$$

entonces

$p_\beta \circ \phi \circ \tau = \Gamma(\beta) \circ p_k \circ \tau = \Gamma(\beta) \circ \tau_k =$

$\tau_\ell = p_\ell \circ \tau = p_\beta \circ \psi \circ \tau$,

por lo cual

$\phi \circ \tau = \psi \circ \tau$,

es decir, τ 'iguala' a ϕ y a ψ, y entonces, por definición de igualador, existe un único morfismo $\theta : \bar{E} \to E$ de tal forma que conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] & \prod \Gamma(\iota) \\ & \bar{E} \arrow[u, "\tau"'] \arrow[ul, "\theta"] \end{tikzcd} ,$$

esto es: para cualquier $\iota \in I$ pasa que

$\tau_\iota = p_\iota \circ \alpha \circ \theta = \sigma_\iota \circ \theta,$

y por lo tanto son conmutativos los triángulos

$$\begin{tikzcd} & \bar{E} \arrow[ddl, "\tau_k"'] \arrow[d, "\theta"] \arrow[ddr, "\tau_\ell"] & \\ & E \arrow[dl, "\sigma_k"] \arrow[dr, "\sigma_\ell"'] & \\ \Gamma(k) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)"'] & & \Gamma(\ell) \end{tikzcd} .$$

Además, si $\theta' : \bar{E} \to E$ haca conmutativos triángulos similares, entonces

$p_\iota \circ \alpha \circ \theta' = \sigma_\iota \circ \theta' = \tau_\iota$,

y con esto,

$\alpha \circ \theta' = \tau$,

y por la unicidad de θ, concluímos que

$\theta = \theta'$.

■

Las siguientes tres proposiciones ilustran relaciones entre límites y funtores adjuntos.

Proposición 20 *Para cualesquiera categorías* $\mathbf{I}$ *y* $\mathbf{A}$ *y cualquier* $\mathbf{I}$*-diagrama* $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathbf{A}$, Γ *tiene límite (respectivamente colímite) si y sólo si el funtor 'constancia'* $K : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{\mathbf{I}}$ *que asocia a cada objeto* A *de* $\mathbf{A}$ *el funtor* $K(A) : \mathbf{I} \to \mathbf{A}$, *tiene adjunto derecho (respectivamente adjunto izquierdo).*

Demostración

Dualizando la definición 3.2, se tiene que $K : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{\mathbf{I}}$ tiene adjunto derecho L , si y sólo si : para cualquier $\Gamma \in Ob(\mathbf{A}^{\mathbf{I}})$ existe un objeto $L(\Gamma)$ en $\mathbf{A}$ y una transformación natural $\varepsilon(\Gamma) : KL(\Gamma) \to \Gamma$ tal que, para cualquier transformación natural $t : K(A) \to \Gamma$ existe una única transformación natural $t^* : A \to L(\Gamma)$ que satisface

(1) $\varepsilon(\Gamma) \circ K(t^*) = t$.

Pero esto último es afirmar que $(L(\Gamma), \varepsilon(\Gamma))$ es límite de Γ ya que:
a) por ser $\varepsilon(\Gamma)$ una transformación natural, es conmutativo el cono

$$\begin{tikzcd} & L(\Gamma) = KL(\Gamma)(i) \arrow[dl, "(\varepsilon(\Gamma))_i"'] \arrow[d, "(\varepsilon(\Gamma))_j"] \arrow[dr, "(\varepsilon(\Gamma))_k"] & \\ \Gamma(i) \arrow[r, "\Gamma(\alpha)"'] & \Gamma(j) \arrow[r, "\Gamma(\beta)"'] & \Gamma(k) \end{tikzcd} ,$$

y
b) si es conmutativo el cono

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "t_i"'] \arrow[d, "t_j"] \arrow[dr, "t_k"] & \\ \Gamma(i) \arrow[r, "\Gamma(\alpha)"'] & \Gamma(j) \arrow[r, "\Gamma(\beta)"'] & \Gamma(k) \end{tikzcd} ,$$

entonces por (1) se tiene que existe un único morfismo t^* tal que conmutan los triángulos

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "t_\imath"'] \arrow[d, "t^*"] \arrow[dr, "t_\jmath"] & \\
 & L(\Gamma) \arrow[dl, "\varepsilon(\Gamma)_\imath"'] \arrow[dr, "\varepsilon(\Gamma)_\jmath"] & \\
\Gamma(\imath) \arrow[rr, "\Gamma(\alpha)"'] & & \Gamma(\jmath)
\end{tikzcd} .$$

■

Proposición 21 *Si* **A** *es una categoría localmente pequeña y* $A \in Ob(\mathbf{A})$*, entonces* $Hom(A,-) : \mathbf{A} \to$ **Sets** *preserva límites, esto es, si* $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathbf{A}$ *tiene límite* A_o *entonces* $Hom(A, \Gamma(-)) : \mathbf{I} \to$ **Sets** *tiene límite* $Hom(A, A_o)$.

Demostración

Obsérvese primero que si $h^A \equiv Hom(A,-)$ entonces claramente $h^A(K(A_o)) = K(h^A(A_o))$.
Ahora, por ser (A_o, t_o) limite de Γ, conmuta el cono en **A**

$$\begin{tikzcd}
 & A_o \arrow[dl, "t_{o_\imath}"'] \arrow[dr, "t_{o_\jmath}"] & \\
\Gamma(\imath) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)"'] & & \Gamma(\jmath)
\end{tikzcd} ,$$

y dado que $h^A = Hom(A,-)$ es un funtor, conmuta el cono en **Sets**

$$\begin{tikzcd}
 & h^A(A_o) \arrow[dl, "t_{o_\imath} \circ ()"'] \arrow[dr, "t_{o_\jmath} \circ ()"] & \\
h^A(\Gamma(\imath)) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)\circ()"'] & & h^A(\Gamma(\jmath))
\end{tikzcd} .$$

Bastará probar entonces que, si X es un conjunto y $\tau : K(X) \to h^A(\Gamma)$ hace conmutativo el cono (1)

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\tau_\imath"'] \arrow[dr, "\tau_\jmath"] & \\
h^A(\Gamma(\imath)) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)\circ()"'] & & h^A(\Gamma(\jmath))
\end{tikzcd} ,$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

existe un único morfismo $\psi : X \to h^A(A_o)$ de tal forma que conmutan los triángulos (2)

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\psi"] \arrow[ldd, bend right, "\tau_\imath"'] \arrow[rdd, bend left, "\tau_\jmath"] & \\
& h^A(A_o) \arrow[ld, "t_{o_\imath}\circ()"'] \arrow[rd, "t_{o_\jmath}\circ()"] & \\
h^A(\Gamma(\imath)) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)\circ()"'] & & h^A(\Gamma(\jmath))
\end{tikzcd} .$$

Así, es claro que si definimos para $x \in X$ y para $\imath \in \mathbf{I}$, $(\tau_x)_\imath = \tau_\imath(x)$, $\tau_x : K(A) \to \Gamma$ resulta ser una transformación natural (debido a (1)), esto es , conmuta el cono

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[ld, bend right, "(\tau_x)_\imath"'] \arrow[rd, bend left, "(\tau_x)_\jmath"] & \\
\Gamma(\imath) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)"'] & & \Gamma(\jmath)
\end{tikzcd} .$$

Entonces, dado que (A_o, t_o) es límite de Γ, para cualquier $x \in X$ existe un único morfismo $\psi_x : A \to A_o$ tal que conmutan los triángulos

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "\psi_x"] \arrow[ldd, "(\tau_x)_\imath"'] \arrow[rdd, "(\tau_x)_\jmath"] & \\
& A_o \arrow[ld, "t_{o_\imath}"'] \arrow[rd, "t_{o_\jmath}"] & \\
\Gamma(\imath) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)"'] & & \Gamma(\jmath)
\end{tikzcd} .$$

Por lo tanto, definimos $\psi : X \to A$ de modo que
$\psi(x) = \psi_x$,
es claro entonces que conmutan los triángulos (2) . Finalmente, la unicidad de ψ se sigue de la unicidad de ψ_x.

■

Proposición 22 *Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tiene adjunto izquierdo $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, entonces U preserva límites (recíprocamente F preserva colímites) .*

Demostración

Sean $\varepsilon : FU \to Id_{\mathbf{B}}$ y $\eta : Id_{\mathbf{A}} \to UF$ las adjunticidades para (U, F). Supongamos que $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathbf{B}$ tiene límite $(B, t : K(B) \to \Gamma)$, demostraremos que $(U(B), U(t))$ es límite para $U\Gamma$ (esto es, que $U(\underline{\ell im}\Gamma) \cong \underline{\ell im}(U\Gamma)$).

Dado que (B, t) es límite de Γ, se tiene que:
(a) conmuta el cono

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "t_i"'] \arrow[dr, "t_j"] & \\ \Gamma(i) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)"'] & & \Gamma(j) \end{tikzcd}$$

y,
(b) si conmuta el cono

$$\begin{tikzcd} & \bar{B} \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\sigma_j"] & \\ \Gamma(i) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)"'] & & \Gamma(j) \end{tikzcd} ,$$

entonces existe un único morfismo $f : \bar{B} \to B$ tal que conmutan los triángulos

$$\begin{tikzcd} & \bar{B} \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, "\sigma_i"'] \arrow[ddr, "\sigma_j"] & \\ & B \arrow[dl, "t_i"'] \arrow[dr, "t_j"] & \\ \Gamma(i) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)"'] & & \Gamma(j) \end{tikzcd} .$$

Debemos mostrar que:
(a') conmuta el cono

$$\begin{tikzcd} & U(B) \arrow[dl, "U(t_i)"'] \arrow[dr, "U(t_j)"] & \\ U\Gamma(i) \arrow[rr, "U\Gamma(\beta)"'] & & U\Gamma(j) \end{tikzcd}$$

y,
(b') si conmuta el cono

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\tau_i"'] \arrow[dr, "\tau_j"] & \\ U\Gamma(i) \arrow[rr, "U\Gamma(\beta)"'] & & U\Gamma(j) \end{tikzcd} ,$$

entonces existe un único morfismo $g : A \to U(B)$ tal que conmutan los triángulos

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "g"] \arrow[ddl, "\tau_i"'] \arrow[ddr, "\tau_j"] & \\ & U(B) \arrow[dl, "U(t_i)"'] \arrow[dr, "U(t_j)"] & \\ U\Gamma(i) \arrow[rr, "U\Gamma(\beta)"'] & & U\Gamma(j) \end{tikzcd} .$$

(a') se sigue trivialmente de (a) y de que U es un funtor y por lo tanto, manda diagramas conmutativos en diagramas conmutativos.

(b'). Supóngase que existe un cono conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\tau_i"'] \arrow[dr, "\tau_j"] & \\ U\Gamma(i) \arrow[rr, "U\Gamma(\beta)"'] & & U\Gamma(j) \end{tikzcd} ,$$

entonces, debido a que ε es una transformación natural, se tiene que son conmutativos los cuadrados

$$\begin{tikzcd} FU\Gamma(\imath) \arrow[r, "\varepsilon_{\Gamma(\imath)}"] \arrow[d, "FU\Gamma(\beta)"'] & \Gamma(\imath) \arrow[d, "\Gamma(\beta)"] \\ FU\Gamma(\jmath) \arrow[r, "\varepsilon_{\Gamma(\jmath)}"'] & \Gamma(\jmath) \end{tikzcd} .$$

Así, se tiene que

$\Gamma(\beta) \circ \varepsilon_{\Gamma(\imath)} \circ F(\tau_\imath) = \varepsilon_{\Gamma(\jmath)} \circ FU\Gamma(\beta) \circ F(\tau_\imath) =$
$\varepsilon_{\Gamma(\jmath)} \circ F(U\Gamma(\beta) \circ \tau_\imath) = \varepsilon_{\Gamma(\jmath)} \circ F(\tau_\jmath)$,

es decir, el siguiente cono en $\mathbf{B}$ es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & F(A) \arrow[dl, bend right, "\varepsilon_{\Gamma(\imath)} \circ F(\tau_\imath)"] \arrow[dr, bend left, "\varepsilon_{\Gamma(\jmath)} \circ F(\tau_\jmath)"'] & \\ \Gamma(\imath) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)"'] & & \Gamma(\jmath) \end{tikzcd} .$$

Utilizando entonces (b), se tiene que existe un único morfismo $\phi : F(A) \rightarrow B$ tal que conmutan los triángulos

$$\begin{tikzcd} & F(A) \arrow[ddl, "\varepsilon_{\Gamma(\imath)} \circ F(\tau_\imath)"'] \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddr, "\varepsilon_{\Gamma(\jmath)} \circ F(\tau_\jmath)"] & \\ & B \arrow[dl, "t_\imath"] \arrow[dr, "t_\jmath"'] & \\ \Gamma(\imath) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)"'] & & \Gamma(\jmath) \end{tikzcd} .$$

Así, definimos $\psi : A \rightarrow U(B)$ como

$\psi \equiv U(\phi) \circ \eta_A$.

Obsérvese que del hecho de que η es una transformación natural, se sigue que son conmutativos los cuadrados

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\tau_\imath"'] & UF(A) \arrow[d, "UF(\tau_\imath)"] \\ U\Gamma(\imath) \arrow[r, "\eta_{U\Gamma(\imath)}"'] & UFU\Gamma(\imath) \end{tikzcd} ,$$

y entonces

$$\begin{aligned}
&U(t_i)\circ\psi = U(t_i)\circ U(\phi)\circ\eta_A = U(t_i\circ\phi)\circ\eta_A = \\
&\qquad U(\varepsilon_{\Gamma(i)}\circ F(\tau_i))\circ\eta_A = U(\varepsilon_{\Gamma(i)})\circ UF(\tau_i)\circ\eta_A = \\
&\qquad U(\varepsilon_{\Gamma(i)})\circ\eta_{U\Gamma(i)}\circ\tau_i = (U\varepsilon\circ\eta U)_{\Gamma(i)}\circ\tau_i = \\
&\qquad Id_{U\Gamma(i)}\circ\tau_i = \tau_i\ ,
\end{aligned}$$

es decir, son conmutativos los triángulos

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\psi"] \arrow[ddl, "\tau_i"'] \arrow[ddr, "\tau_j"] & \\
 & U(B) \arrow[dl, "U(t_i)"] \arrow[dr, "U(t_j)"'] & \\
U\Gamma(i) \arrow[rr, "U\Gamma(\beta)"'] & & U\Gamma(j)
\end{tikzcd} .$$

Para terminar la demostración, supóngase que $\theta : A \to U(B)$ hace conmutativos los triángulos

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\theta"] \arrow[ddl, "\tau_i"'] \arrow[ddr, "\tau_j"] & \\
 & U(B) \arrow[dl, "U(t_i)"] \arrow[dr, "U(t_j)"'] & \\
U(\Gamma(i)) \arrow[rr, "U\Gamma(\beta)"'] & & U\Gamma(j)
\end{tikzcd} ,$$

nuestro objetivo es demostrar que $\theta = \psi$.

Dado que ε es una transformación natural, conmutan los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
FU(B) \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, "FU(t_i)"'] & B \arrow[d, "t_i"] \\
FU\Gamma(i) \arrow[r, "\varepsilon_{\Gamma(i)}"'] & \Gamma(i)
\end{tikzcd} ,$$

de lo que se obtiene que

$$\begin{aligned}
&t_i\circ\varepsilon_B\circ F(\theta) = \varepsilon_{\Gamma(i)}\circ FU(t_i)\circ F(\theta) = \\
&\qquad \varepsilon_{\Gamma(i)}\circ F(U(t_i)\circ\theta) = \varepsilon_{\Gamma(i)}\circ F(\tau_i)\ ,
\end{aligned}$$

es decir, conmutan los triángulos

$$\begin{tikzcd}
& F(A) \arrow[d, "\varepsilon_B \circ F(\theta)"] \arrow[ddl, bend right, "\varepsilon_{\Gamma(i)} \circ F(\tau_i)"'] \arrow[ddr, bend left, "\varepsilon_{\Gamma(j)} \circ F(\tau_j)"] & \\
& B \arrow[dl, "t_i"'] \arrow[dr, "t_j"] & \\
\Gamma(i) \arrow[rr, "\Gamma(\beta)"'] & & \Gamma(j)
\end{tikzcd} ,$$

y entonces, de la unicidad de ϕ, concluímos que
$\phi = \varepsilon_B \circ F(\theta)$.
Además, ya que η es una transformación natural, conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\theta"'] & UF(A) \arrow[d, "UF(\theta)"] \\
U(B) \arrow[r, "\eta_{U(B)}"'] & UFU(B)
\end{tikzcd} ,$$

y por lo tanto

$$\psi = U(\phi) \circ \eta_A = U(\varepsilon_B \circ F(\theta)) \circ \eta_A = U(\varepsilon_B) \circ UF(\theta) \circ \eta_A =$$
$$U(\varepsilon_B) \circ \eta_{U(B)} \circ \theta = (U\varepsilon \circ \eta U)_B \circ \theta = Id_{U(B)} \circ \theta = \theta \ .$$

■

Ejemplo 4.1 . En el ejemplo 3.6 , dado que (U, F) es un par de funtores adjuntos, por la proposición anterior, F preserva colímites. Además, es claro que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\
& A \vee B &
\end{tikzcd}$$

es un coproducto y por lo tanto un colímite.

Así, $F(A \vee B)$ es colímite de $F(A)$ y $F(B)$, pero también es claro que $F(A) \vee F(B)$ es otro colímite. Por lo tanto

$$C \wedge (A \vee B) = F(A \vee B) \cong F(A) \vee F(B) = (C \wedge A) \vee (C \wedge B).$$

Definición 4.6 . Decimos que una categoría **A** es *completa* (*cocompleta*) si existen límites (colímites) para todo **I**-diagrama $\Gamma : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$, siempre que **I** sea categoría pequeña.

Proposición 23 *Para cualquier categoría completa* **A**, **A** *tiene un objeto inicial si y sólo si tiene una subcategoría* **C** *pequeña plena 'preinicial', esto es, para cualquier objeto A de* **A** *existe un objeto C de* **C** *y una flecha $f : C \longrightarrow A$ en* **A**.

Demostración

$\Rightarrow$) Definamos **C** la categoría cuyo único objeto es el objeto inicial. Es claro que **C** es subcategoría pequeña plena preinicial de **A**.

$\Leftarrow$) Sea $(A_o, t : K(A_o) \longrightarrow \Gamma)$ limite de el funtor inclusión $\Gamma : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$. Entonces, para cualquier objeto C de **C** existe una flecha $t_C : A_o \longrightarrow C$.

Así, como por hipótesis, podemos encontrar $C \in Ob(\mathbf{C})$ y una flecha $f : C \longrightarrow A$, es claro que existe una flecha $f \circ t_C : A_o \longrightarrow A$.

Para terminar la demostración mostraremos que hay una única flecha $A_o \longrightarrow A$.

Supóngase que existen dos flechas $g, h : A_o \rightrightarrows A$, sea entonces $\alpha = \alpha(g,h) : E \longrightarrow A_o$ su igualador. Mostraremos que α tiene inverso derecho, con lo cual habremos probado que $g = h$. Por hipótesis, existen $C' \in Ob(\mathbf{C})$ y una flecha $f' : C' \longrightarrow E$. Así, para cualquier objeto C de **C**, por ser (A_o, t) limite de Γ, y ya que $t_C \circ \alpha \circ f'$ es una flecha en la subcategoría plena **C**, conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & A_o \arrow[dl, "t_{C'}"'] \arrow[dr, "t_{C'}"] & \\
C' \arrow[rr, "t_C \circ \alpha \circ f'"'] & & C
\end{tikzcd},$$

y entonces existe una única flecha $e : A_o \longrightarrow A_o$ tal que conmutan los triángulos

$$
\begin{tikzcd}
 & A_0 \arrow[d, "e"] \arrow[ddl, "t_{C'}"'] \arrow[ddr, "t_C"] & \\
 & A_0 \arrow[dl, "t_{C'}"] \arrow[dr, "t_C"'] & \\
C' \arrow[rr, "t_C \circ \alpha \circ f'"'] & & C'
\end{tikzcd} .
$$

Es claro que $e = Id_{A_0}$ y por lo tanto, dado que $\alpha \circ f' \circ t_{C'}$ también hace conmutativos tales triángulos, concluimos que

$$\alpha \circ f' \circ t_{C'} = e = Id_{A_0}$$

es decir, $f' \circ t_{C'}$ es inverso dercho de α.

■

Para 'ejemplificar' la proposición anterior demostraremos la siguiente.

Proposición 24 *Dados dos funtores $F, G : \mathbf{A} \rightrightarrows \mathbf{B}$, se define una nueva categoría $(F;G)$ cuyos objetos son parejas $(A, b : F(A) \to G(A))$, con $A \in Ob(\mathbf{A})$, y cuyas flechas $(A, B) \to (A', b')$ son flechas $a : A \to A'$ en $\mathbf{A}$, tales que conmutan los cuadrados*

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "F(a)"'] & G(A) \arrow[d, "G(a)"] \\
F(A') \arrow[r, "b'"'] & G(A')
\end{tikzcd} .
$$

Además, si $\mathbf{A}$ es completa y G preserva limites entonces $(F;G)$ tiene una subcategoría pequeña plena preinicial.

Demostración

(Demostremos primero que $(F;G)$ es, efectivamente, una categoría.) Trivialmente, $Id_A : A \to A$ hace conmutativo, para cualquier $b : F(A) \to G(A)$ el cuadrado

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "F(Id_A)"'] & G(A) \arrow[d, "G(Id_A)"] \\ F(A) \arrow[r, "b"'] & G(A) \end{tikzcd} .$$

Entonces, para mostrar que $(F;G)$ es una categoría basta que demostremos que: si $a : (A,b) \to (A',b')$ y $a' : (A',b') \to (A'',b'')$ son morfismos en $(F;G)$ entonces $a' \circ a : (A,b) \to (A'',b'')$ es también un morfismo en $(F;G)$.

Si

$(A,b) \xrightarrow{a} (A',b') \xrightarrow{a'} (A'',b'')$

son morfismos en $(F;G)$, ocurre que conmutan los cuadrados

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "F(a)"'] & G(A) \arrow[d, "G(a)"] \\ F(A') \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "F(a')"'] & G(A') \arrow[d, "G(a')"] \\ F(A'') \arrow[r, "b''"'] & G(A'') \end{tikzcd} ,$$

y por lo tanto conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "F(a'\circ a)= F(a')\circ F(a)"'] & G(A) \arrow[d, "G(a'\circ a)= G(a')\circ G(a)"] \\ F(A'') \arrow[r, "b''"'] & G(A'') \end{tikzcd} .$$

Una vez visto que $(F;G)$ es categoría, probaremos que bajo las hipótesis de que $\mathbf{A}$ sea completa y que G preserva limites, $(F;G)$ es completa; con lo cual quedaría demostrada la proposición.

Sea $\Gamma : \mathbf{I} \to (F;G)$ un $\mathbf{I}$-diagrama con $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Nuestro objetivo es demostrar que Γ tiene limite.

Es claro que Γ puede 'restringirse' y verse sólo como un $\mathbf{I}$-diagrama $\bar{\Gamma} : \mathbf{I} \to \mathbf{A}$ (con $\bar{\Gamma}(\imath) = A_\imath$ si $\Gamma(\imath) = (A_\imath, b_\imath)$), así, dado que $\mathbf{A}$ es completa, $\bar{\Gamma}$ tiene limite (A_o, τ), es decir:

(a) conmuta el cono

$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[dl, "\tau_i"'] \arrow[dr, "\tau_j"] & \\ A_i \arrow[rr, "a_i"'] & & A_j \end{tikzcd}$$

y,
(b) si conmuta el cono

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\sigma_j"] & \\ A_i \arrow[rr, "a_i"'] & & A_j \end{tikzcd} \quad ,$$

entonces existe un único morfismo $f : A \to A_0$ tal que conmutan los triángulos

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, "\tau_i"'] \arrow[ddr, "\tau_j"] & \\ & A_0 \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\sigma_j"] & \\ A_i \arrow[rr, "a_i"'] & & A_j \end{tikzcd} \quad .$$

Ahora, como $a_i : (A_i, b_i) \to (A_j, b_j)$ son morfismos en $(F;G)$, conmutan los cuadrados

$$\begin{tikzcd} F(A_i) \arrow[r, "b_i"] \arrow[d, "F(a_i)"'] & G(A_i) \arrow[d, "G(a_i)"] \\ F(a_j) \arrow[r, "b_j"'] & G(a_j) \end{tikzcd} \quad ,$$

de lo cual se sigue que
$G(a_i) \circ b_i \circ F(\tau_i) = b_j \circ F(a_i) \circ F(\tau_i) =$

$$b_j \circ F(a_i \circ \tau_i) = b_j \circ F(\tau_j) \ ,$$

es decir, conmuta el cono ...(c)

$$\begin{tikzcd} & F(A_o) \arrow[dl, "b_i \circ F(\tau_i)"'] \arrow[dr, "b_j \circ F(\tau_j)"] & \\ G(A_i) \arrow[rr, "G(a_i)"'] & & G(A_j) \end{tikzcd} .$$

Por otra parte, dado que G preseva limites, $(G(A_o), G(\tau))$ es limite para $G\bar{\Gamma}$ y por lo tanto existe un único morfismo $\psi : F(A_o) \to G(A_o)$ tal que conmutan los triángulos ...(d)

$$\begin{tikzcd} & F(A_o) \arrow[ddl, "b_i \circ F(\tau_i)"'] \arrow[d, "\psi"] \arrow[ddr, "b_j \circ F(\tau_j)"] & \\ & G(A_o) \arrow[dl, "G(\tau_i)"] \arrow[dr, "G(\tau_j)"'] & \\ G(A_i) \arrow[rr, "G(a_i)"'] & & G(A_j) \end{tikzcd} .$$

Mostraremos que $((A_o, \psi), \tau)$ es lmite para Γ. Primero, es claro que $\tau_i : A_o \to A_i$ es un morfismo en $(F; G)$ ya que, debido a (d), conmutan los cuadrados

$$\begin{tikzcd} F(A_o) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "F(\tau_i)"'] & G(A_o) \arrow[d, "G(\tau_i)"] \\ F(A_i) \arrow[r, "b_i"'] & G(A_i) \end{tikzcd} .$$

Segundo, es claro también que, utilizando (a), conmuta el cono en $(F; G)$

$$\begin{tikzcd} & (A_o, \psi) \arrow[dl, "\tau_i"] \arrow[dr, "\tau_j"'] & \\ (A_i, b_i) \arrow[rr, "a_i"'] & & (A_j, b_j) \end{tikzcd} .$$

Por último, supóngase que es conmutativo el cono en $(F;G)$

$$\begin{tikzcd}
 & (A,\bar{b}) \arrow[dl, "t_i"'] \arrow[dr, "t_j"] & \\
(A_i,b_i) \arrow[rr, "a_i"'] & & (A_j,b_j)
\end{tikzcd} ,$$

entonces conmuta el cono en **A**

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "t_i"'] \arrow[dr, "t_j"] & \\
A_i \arrow[rr, "a_i"'] & & A_j
\end{tikzcd} ,$$

con lo cual, debido a (b), existe un único morfismo $\phi : A \to A_o$ tal que conmutan los triángulos ...(e)

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddl, "t_i"'] \arrow[ddr, "t_j"] & \\
 & A_o \arrow[dl, "\tau_i"'] \arrow[dr, "\tau_j"] & \\
A_i \arrow[rr, "a_i"'] & & A_j
\end{tikzcd} .$$

Así, si probamos que ϕ es un morfismo en $(F;G)$, es decir, que conmuta el cuadrado ...(f)

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\bar{b}"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & G(A) \arrow[d, "G(\phi)"] \\
F(A_o) \arrow[r, "\psi"'] & G(A_o)
\end{tikzcd} ,$$

habremos terminado la demostración.

Es claro de (c) que conmuta el cono

$$\begin{tikzcd}
& F(A) \arrow[d, "F(\phi)"] & \\
& F(A_o) \arrow[dl, "b_i \circ F(\tau_i)"'] \arrow[dr, "b_j \circ F(\tau_j)"] & \\
G(A_i) \arrow[rr, "G(a_i)"'] & & G(A_j)
\end{tikzcd} ,$$

y entonces, dado que $(G(A_o), G(\tau))$ es limite de $G\Gamma$, existe un único morfismo $\theta : F(A) \to G(A_o)$ tal que conmuta los triángulos

$$\begin{tikzcd}
& F(A) \arrow[d, "\theta"] \arrow[ddl, "b_i \circ F(\tau_i) \circ F(\phi)"'] \arrow[ddr, "b_j \circ F(\tau_j) \circ F(\phi)"] & \\
& G(A_o) \arrow[dl, "G(\tau_i)"] \arrow[dr, "G(\tau_j)"'] & \\
G(A_i) \arrow[rr, "G(a_i)"'] & & G(A_j)
\end{tikzcd} .$$

Además, por ser $t_i : A \to A_i$ un morfismo en $(F; G)$, conmutan los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\bar{b}"] \arrow[d, "F(t_i)"'] & G(A) \arrow[d, "G(t_i)"] \\
F(A_i) \arrow[r, "b_i"'] & G(A_i)
\end{tikzcd}$$

y, utilizando (e) y (d) obtenemos que

$$G(\tau_i) \circ [G(\phi) \circ \bar{b}] = G(\tau_i \circ \phi) \circ \bar{b} = G(t_i) \circ \bar{b} = b_i \circ F(t_i) =$$
$$b_i \circ F(\tau_i \circ \phi) = b_i \circ F(\tau_i) \circ F(\phi)$$

y que

$$G(\tau_i) \circ [\psi \circ F(\phi)] = (G(\tau_i) \circ \psi) \circ F(\phi) = b_i \circ F(\tau_i) \circ F(\phi),$$

y por lo tanto

$$G(\phi) \circ \bar{b} = \theta = \psi \circ F(\phi),$$

es decir, (f) es conmutativo.

■

5

TRIPLES

Recordemos que una operación de cerradura en un conjunto preordenado $\mathbf{A} = (A, \leq)$ es una función $T : A \to A$ con las siguientes propiedades:

$a \leq a' \Rightarrow T(a) \leq T(a'), \quad a \leq T(a), \quad TT(a) \leq T(a),$

para cualesquiera elementos $a, a' \in A$. En este capítulo generalizaremos esta noción a categorías arbitrarias en lo que se conoce como 'construcción estandard', 'triple' o 'mónada'. Aquí, nosotros utilizaremos el término de triple que es el más ampliamente usado.

Definición 5.1 . Un *triple* en $\mathbf{A}$ es una terna (T, η, μ) donde $T : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ es un funtor, $\eta : Id_{\mathbf{A}} \to T$ y $\mu : T^2 \to T$ son transformaciones naturales, de manera tal que conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\circ\eta"] \arrow[d, "\eta\circ T"'] \arrow[dr, "Id_T"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu\circ T"] \arrow[d, "T\circ\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} .$$

Proposición 25 *(Huber). Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es adjunto izquierdo de $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, con adjunciones $\eta : Id_{\mathbf{A}} \to UF$ y $\varepsilon : FU \to Id_{\mathbf{B}}$, entonces*

$(UF, \eta, U\varepsilon F)$ es un triple.

Demostración

$UF : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ es un funtor, $\eta : Id_{\mathbf{A}} \to UF$ es una transformación natural y $U\varepsilon F : (UF)^2 \to UF$ es una transformación natural.

Basta probar entonces la conmutatividad de:

$$\begin{tikzcd}
UF \arrow[r, "UF\circ\eta", "(1)"'] \arrow[d, "\eta\circ UF"'] \arrow[dr, "Id_{UF}"] & (UF)^2 \arrow[d, "U\varepsilon F"] \\
(UF)^2 \arrow[r, "U\varepsilon F"'] \arrow[u, phantom, "(2)", shift left=4] & UF
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(UF)^3 \arrow[r, "U\varepsilon F\circ UF"] \arrow[d, "UF\circ U\varepsilon F"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & (UF)^2 \arrow[d, "U\varepsilon F"] \\
(UF)^2 \arrow[r, "U\varepsilon F"'] & UF.
\end{tikzcd}$$

Para verificar las igualdades de las transformaciones naturales involucradas, veamos que tienen las mismas componentes.

(1). Si $A \in Ob(\mathbf{A})$, entonces

$$\begin{aligned}
&[U\varepsilon F \circ (UF \circ \eta)]_A = (U\varepsilon F)_A \circ (UF \circ \eta)_A = \\
&\quad U(\varepsilon_{F(A)}) \circ UF(\eta_A) = U[\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A)] = U[(\varepsilon F \circ F\eta)_A] = \\
&\quad U[(Id_F)_A] = U(Id_{F(A)}) = Id_{UF(A)} = (Id_{UF})_A \ ,
\end{aligned}$$

y por lo tanto (1) es conmutativo.

(2). Si $A \in Ob(\mathbf{A})$, entonces

$$\begin{aligned}
&[U\varepsilon F \circ (\eta \circ UF)]_A = (U\varepsilon F)_A \circ [\eta \circ UF]_A = \\
&\quad U(\varepsilon_{F(A)}) \circ \eta_{UF(A)} = (U\varepsilon \circ \eta U)_{F(A)} = \\
&\quad (Id_U)_{F(A)} = Id_{UF(A)} = (Id_{UF})_A \ ,
\end{aligned}$$

y por lo tanto (2) es conmutativo.

(3). Sea $A \in Ob(\mathbf{A})$, entonces, dado que ε es una transformación natural y, $\varepsilon_{F(A)} : FUF(A) \to F(A)$ es un morfismo en $\mathbf{B}$, el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
FUFUF(A) \arrow[r, "\varepsilon_{FUF(A)}"] \arrow[d, "FU(\varepsilon_{F(A)})"'] & FUF(A) \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"] \\
FUF(A) \arrow[r, "\varepsilon_{F(A)}"'] & F(A)
\end{tikzcd} \quad ,$$

de lo cual se sigue que

$$[U\varepsilon F \circ (U\varepsilon F \circ UF)]_A = (U\varepsilon F)_A \circ (U\varepsilon F \circ UF)_A =$$
$$U(\varepsilon_{F(A)}) \circ U\varepsilon F(UF(A)) = U(\varepsilon_{F(A)}) \circ U(\varepsilon_{FUF(A)}) =$$
$$U(\varepsilon_{F(A)} \circ \varepsilon_{FUF(A)}) = U(\varepsilon_{F(A)} \circ FU(\varepsilon_{F(A)})) =$$
$$U(\varepsilon_{F(A)}) \circ U(FU(\varepsilon_{F(A)})) = (U\varepsilon F)_A \circ (UF \circ U\varepsilon F)_A =$$
$$[U\varepsilon F \circ (UF \circ U\varepsilon F)]_A ,$$

y por lo tanto (3) es conmutativo.

■

Veremos después que el recíproco de esta proposición también es cierto, pero antes veamos algunos ejemplos de triples.

Ejemplo 5.1 . Sea $\mu = (M, *, e)$ un monoide. Definimos

$$T = M \times - : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Sets}$$

de tal forma que, para un conjunto A y una función $f : A \to B$:

$$(M \times -)(A) = M \times A ,$$
$$(M \times -)(f) = Id_M \times f = (Id_M, f) .$$

Es claro que T es un funtor (véase el ejemplo 1.17).

Ahora, definimos $\eta : Id_{\mathbf{Sets}} \to T$ de modo que, dado un conjunto A y $a \in A$

$$\eta_A(a) = (e, a).$$

Veamos que η es una transformación natural.

Si $f : A \to B$ es una función entonces, dada $a \in A$ se tiene que

$$(\eta_B \circ f)(a) = \eta_B(f(a)) = (e, f(a)) = (Id_M(e), f(a)) =$$
$$(Id_M, f)(e, a) = (Id_M, f)(\eta_A(a)) = [(Id_M, f) \circ \eta_A](a) ,$$

y por lo tanto, η es una transformación natural ya que es conmutativo el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & T(A) = M \times A \arrow[d, "T(f)=(Id_M, f)"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & T(B) = M \times B \end{tikzcd} .$$

Enseguida definamos $\mu : T^2 \to T$ tal que, dado un conjunto A y $a \in A$

$$\mu_A((m_1, (m_2, a))) = (m_1 * m_2, a) .$$

Veamos que μ es una transformación natural.

Si $f : A \to B$ es una función entonces, para cualquier $(m_1, (m_2, a)) \in T^2(A) = M \times (M \times A)$, ocurre que

$$[\mu_B \circ (Id_M,(Id_M,f))]((m_1,(m_2,a))) = \mu_B((m_1,(m_2,f(a)))) =$$
$$(m_1 * m_2, f(a)) = (Id_M,f)(m_1 * m_2, a) =$$
$$(Id_M,f)[\mu_A((m_1,(m_2,a)))] = [(Id_M,f)\circ \mu_A]((m_1,(m_2,a))) \ ,$$

es decir, el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} T^2(A) = M \times (M \times A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "T^2(f)=(Id_M,(Id_M,f))"'] & T(A) = M \times A \arrow[d, "T(f)=(Id_M,f)"] \\ T^2(B) = M \times (M \times B) \arrow[r, "\mu_B"'] & T(B) = M \times B \end{tikzcd} \quad .$$

Por último, veamos que (T,η,μ) es un triple, para lo cual bastará probar la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \times - \arrow[r, "(M\times -)\circ\eta"] \arrow[d, "\eta\circ(M\times -)"'] \arrow[dr, "Id_{M\times -}"] \arrow[d, phantom, shift left=20, "(1)"] & (M \times -)^2 \arrow[d, "\mu"] \arrow[dl, phantom, shift right=3, "(2)"] \\ (M \times -)^2 \arrow[r, "\mu"'] & M \times - \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (M \times -)^3 \arrow[r, "\mu\circ(M\times -)"] \arrow[d, "(M\times -)\circ\mu"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & (M \times -)^2 \arrow[d, "\mu"] \\ (M \times -)^2 \arrow[r, "\mu"'] & M \times - \end{tikzcd} \quad .$$

(1). Para cualquier conjunto A y cualquier $(m,a) \in M \times A$ se tiene que

$$[\mu \circ (\eta \circ (M \times -))]_A(m,a) = (\mu_A \circ \eta_{M\times A})(m,a) =$$
$$\mu_A((e,(m,a))) = (e * m, a) = (m,a) =$$
$$Id_{M\times A}(m,a) = (Id_{M\times -})_A(m,a) \ ,$$

y por lo tanto (1) es conmutativo. (Nótese que se utilizó que e es neutro izquierdo en M .)

(2). Para cualquier conjunto A y cualquier $(m,a) \in M \times A$ pasa que

$$[\mu \circ ((M \times -)\circ \eta)]_A(m,a) = [\mu_A \circ ((M \times -)(\eta_A))](m,a) =$$
$$[\mu_A \circ (Id_M, \eta_A)](m,a) = \mu_A((m,(e,a))) =$$
$$(m * e, a) = (m,a) = Id_{M\times A}(m,a) = (Id_{M\times -})_A(m,a) \ ,$$

y entonces (2) es conmutativo. (Nótese que ahora se utilizó que e es neutro derecho en M .)

(3). Para cualquier conjunto A y cualquier $(m_1,(m_2,(m_3,a))) \in (M \times -)^3(A) = M \times (M \times (M \times A)))$ ocurre que

$$[\mu \circ (\mu \circ (M \times -))]_A((m_1,(m_2,(m_3,a)))) =$$
$$(\mu_A \circ \mu_{M\times A})((m_1,(m_2,(m_3,a)))) =$$
$$\mu_A((m_1 * m_2,(m_3,a))) = ((m_1 * m_2) * m_3, a) \ ,$$

por otro lado

$$[\mu \circ ((M \times -) \circ \mu)]_A((m_1,(m_2,(m_3,a)))) =$$
$$(\mu_A \circ (Id_M, \mu_A)((m_1,(m_2,(m_3,a)))) =$$
$$\mu_A((m_1,(m_2 * m_3,a))) = (m_1 * (m_2 * m_3), a),$$

pero ya que M es un monoide, vale la asociatividad y por lo tanto, (3) es conmutativo.

Ejemplo 5.2 Sea $\wp$: **Sets** $\to$ **Sets** el funtor definido en el ejemplo 1.18 .

Definimos

$$\eta : Id_{\mathbf{Sets}} \to \wp$$

de forma tal que, dado un conjunto A y $a \in A$

$$\eta_A(a) = \{a\} \ .$$

Definimos también

$$\mu : \wp^2 \to \wp$$

como, dado un conjunto A y $X \in \wp(\wp(A))$,

$$\mu_A(X) = \cup X \ .$$

Veamos que tanto η como μ son transformaciones naturales.

Sea $f : A \to B$ una función, debemos mostrar que conmutan los siguientes cuadrados:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, phantom, "(I)"] & & \wp(A) \arrow[d, "\wp(f)"] \\ B \arrow[rr, "\eta_B"'] & & \wp(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \wp(\wp(A)) \arrow[rr, "\mu_A"] \arrow[d, "\wp(\wp(f))"'] \arrow[drr, phantom, "(II)"] & & \wp(A) \arrow[d, "\wp(f)"] \\ \wp(\wp(B)) \arrow[rr, "\mu_B"'] & & \wp(B) \end{tikzcd} \ .$$

(I). Si $a \in A$ entonces

$$(\wp(f) \circ \eta_A)(a) = \wp(f)(\{a\}) = \{f(a)\} = \eta_B(f(a)) = (\eta_B \circ f)(a) \ ,$$

y por lo tanto (I) es conmutativo.

(II). Si $X \in \wp(\wp(A))$ entonces

$$(\wp(f) \circ \mu_A)(X) = \wp(f)(\cup X) = f[\cup X] =$$
$$\{f(y) \mid y \in \cup X\} = \{f(y) \mid y \in z \ \ p.a. \ \ z \in X\} =$$
$$\cup\{f[z] \mid z \in X\} = \mu_B(\{f[z] \mid z \in X\} =$$
$$(\mu_B \circ \wp(\wp(f)))(X) \ ,$$

y por lo tanto (II) es conmutativo.

Por último observemos que $(\wp, \eta, \mu)$ es un triple, para lo cual, por lo mostrado anteriormente, bastará ver que conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\wp \arrow[r, "\wp\circ\eta", "(2)"'] \arrow[d, "\eta\circ\wp"'] \arrow[dr, "Id_\wp"] \arrow[dr, phantom, "(1)", very near start, shift right=3] & \wp^2 \arrow[d, "\mu"] \\
\wp^2 \arrow[r, "\mu"'] & \wp
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\wp^3 \arrow[r, "\mu\circ\wp"] \arrow[d, "\wp\circ\mu"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \wp^2 \arrow[d, "\mu"] \\
\wp^2 \arrow[r, "\mu"'] & \wp
\end{tikzcd} .$$

(1). Dado un conjunto A y $x \in \wp(A)$ tenemos que

$$[\mu\circ(\eta\circ\wp)]_A(x) = (\mu_A\circ\eta_{\wp(A)})(x) = \mu_A(\{x\}) = x = Id_{\wp(A)}(x) = (Id_\wp)_A(x) ,$$

con lo cual (1) es conmutativo.

(2). Si A es un conjunto y $x \in \wp(A)$ entonces

$$[\mu\circ(\wp\circ\eta)]_A(x) = (\mu_A\circ\wp(\eta_A))(x) = \mu_A(\eta_A[x]) = \mu_A(\{\{y\} \mid y\in x\}) = x = Id_{\wp(A)}(x) = (Id_\wp)_A(x) ,$$

y entonces (2) es conmutativo.

(3). Para cualquier conjunto A y cualquier $\bar{X} \in \wp^3(A)$ se tiene que

$$[\mu\circ(\mu\circ\wp)]_A(\bar{X}) = (\mu_A\circ\mu_{\wp(A)})(\bar{X}) = (\mu_A(\mu_{\wp(A)}(\bar{X})) = \mu_A(\cup\bar{X}) = \cup(\cup\bar{X}) = \mu_A(\cup\bar{X}) = \mu_A(\mu_A[\bar{X}]) = (\mu_A\circ\wp(\mu_A))(\bar{X}) = (\mu\circ(\wp\circ\mu))_A(\bar{X})$$

y por lo tanto (3) es conmutativo.

Regresemos a la pregunta:¿es cierto el recíproco en la proposición 5.1 ?, esto es,¿dado un triple en **A**, existe un par de funtores adjuntos

$\mathbf{A}\xrightarrow{F}\mathbf{B}\xrightarrow{G}\mathbf{A}$?

La respuesta, como ya habíamos mencionado, es sí, pero la categoría **B** no es única. De hecho aquí mostraremos dos, la categoría $\mathbf{A}^T$ y la categoría $\mathbf{A}_T$.

Definición 5.2 . Dado un triple (T, η, μ) en una categoría $\mathbf{A}$, se define la categoría de *Eilenberg-Moore*, $\mathbf{A}^T$, de forma que

$Ob(\mathbf{A}^T) = \{(A, \phi : T(A) \to A) \mid \text{conmutan}(1) \text{ y } (2)\}$,

donde

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "Id_A"'] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "(1)"] & T(A) \arrow[d, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T^2(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "T(\phi)"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & T(A) \arrow[d, "\phi"] \\ T(A) \arrow[r, "\phi"'] & A \end{tikzcd} .$$

Además, $\alpha : (A, \phi) \to (A', \phi')$ es un morfismo en $\mathbf{A}^T$ si:

$\alpha \in Hom_{\mathbf{A}}(A, A')$

y conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "\phi"'] & T(A') \arrow[d, "\phi'"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & A' \end{tikzcd} .$$

Para probar que $\mathbf{A}^T$ es una categoría bastará probar los siguientes dos puntos:

(a) $Id_A \in Hom_{\mathbf{A}^T}((A, \phi), (A, \phi))$ para cualquier $(A, \phi) \in Ob(\mathbf{A}^T)$.

(b) $\alpha \in Hom_{\mathbf{A}^T}((A, \phi), (A', \phi'))$ *y* $\alpha' \in Hom_{\mathbf{A}^T}((A', \phi'), (A'', \phi'')) \Rightarrow$
$\alpha' \circ \alpha \in Hom_{\mathbf{A}^T}((A, \phi), (A'', \phi''))$.

La primera condición se cumple dado que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(Id_A)=Id_{T(A)}"] \arrow[d, "\phi"'] & T(A) \arrow[d, "\phi"] \\ A \arrow[r, "Id_A"'] & A \end{tikzcd}$$

es conmutativo trivialmente.

La segunda condición se sigue de que $T(\alpha' \circ \alpha) = T(\alpha') \circ T(\alpha)$ y de que por hipótesis, los cuadrados

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "\phi"'] & T(A') \arrow[r, "T(\alpha')"] \arrow[d, "\phi'"] & T(A'') \arrow[d, "\phi''"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & A' \arrow[r, "\alpha'"'] & A'' \end{tikzcd}$$

conmutan.

De ahora en adelante, a los objetos de $\mathbf{A}^T$ les llamaremos 'T–álgebras' y a los morfismos entre objetos, morfismos de T-álgebras.

Ejemplo 5.1 (continuación) . Dado el triple $(M \times -, \eta, \mu)$, veamos cuáles son las T-álgebras en $(\mathbf{Sets})^T$.

Por definición, una T-álgebra es una pareja $(A, \phi : M \times A \to A)$, donde A es un conjunto y tal que conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "Id_A"'] & M \times A \arrow[d, "\phi"] \arrow[dl, phantom, "(1)"] \\ & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \times (M \times A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "T(\phi) = (Id_M, \phi)"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & M \times A \arrow[d, "\phi"] \\ M \times A \arrow[r, "\phi"'] & A \end{tikzcd} .$$

Si denotamos $\phi((m, a)) = m \bullet a$, lo que la conmutatividad de (1) nos dice es que $e \bullet a = a$ para cualquier $a \in A$; mientras que la conmutatividad de (2) afirma que para cualesquiera $m, m' \in M$ y para cualquier $a \in A$ ocurre que $(m * m') \bullet a = m \bullet (m' \bullet a)$.

Por lo tanto, las álgebras son los $\mu - conjuntos$.

Ahora observemos como son los morfismos de álgebras en $(\mathbf{Sets})^T$.

Un morfismo $\alpha : (A, \phi) \to (A', \phi')$ es una función $\alpha : A \to A'$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} M \times A \arrow[r, "(Id_M, \alpha)"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & M \times A' \arrow[d, "\phi'"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & A' \end{tikzcd} .$$

Así, si denotamos $\phi(m, a) = m \bullet a \cdot$ y $\phi'(m, a) = m \circ a$, debe ocurrir que para cualquier $m \in M$ y para cualquier $a \in A$, $\alpha(m \bullet a) = m \circ \alpha(a)$.

Por lo tanto, los morfismos son morfismos de $\mu - conjuntos$.

Ejemplo 5.2 (continuación). Dado el triple $(\wp, \eta, \mu)$, observemos como son las $\wp$-álgebras en $(\mathbf{Sets})^{\wp}$.

Una $\wp$-álgebra es una pareja $(A, \phi : \wp(A) \to A)$ de tal forma que conmutan

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "Id_A"'] & \wp(A) \arrow[d, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \wp(\wp(A)) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "\wp(\phi)"'] & \wp(A) \arrow[d, "\phi"] \\ \wp(A) \arrow[r, "\phi"'] & A \end{tikzcd} .$$

Así, debe ocurrir que para cualquier $a \in A$ y cualquier $\bar{X} \in \wp(\wp(A))$,

(i) $\phi(\{a\}) = a$,

(ii) $\phi(\cup\bar{X}) = \phi(\phi(\bar{X}))$.

Mostraremos a partir de (i) y (ii) que las álgebras en $\mathbf{Sets}^{\wp}$ son retículas completas.

Definimos la relación $' \leq '$ en A por:

$$a \leq b \;\; si \;\; b = \phi(\{b\}) = \phi(\{a, b\}) .$$

Primero veamos que $\leq$ es una relación de orden en A.

a). (reflexividad) Sea $a \in A$, entonces, debido a que $\{a\} = \{a, a\}$, se tiene que

$$a = \phi(\{a\}) = \phi(\{a, a\}),$$

y por lo tanto

$$a \leq a\,.$$

b). (transitividad) Supóngase que $a \leq b$ y que $b \leq c$, entonces

$$b = \phi(\{a, b\}) \;\text{ y }\; c = \phi(\{b, c\})\,,$$

y utilizando (i) y (ii) se tiene que

$$c = \phi(\{b,c\}) = \phi(\{\phi(\{a,b\}), \phi(\{c\})\}) = \phi(\cup\{\{a,b\},\{c\}\}) = \phi(\cup\{\{a\},\{b,c\}\}) = \phi(\{\phi(\{a\}), \phi(\{b,c\})\}) = \phi(\{a,c\}),$$

y por lo tanto

$$a \leq c\,.$$

c). (antisimetría) Supóngase que $a \leq b$ y que $b \leq a$, entonces

$$b = \phi(\{a, b\}) \;\text{ y }\; a = \phi(\{b, a\}),$$

y por lo tanto

$$a = b\,.$$

Así, $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Para terminar de demostrar que una $\wp$-álgebra es una retícula completa basta definir una función $\bigvee : \wp(A) \to A$ que funcione como supremo. Es decir: si $X \subseteq A$:

(I) $\forall x \in X, (x \leq \bigvee(X))$,

(II) $\forall b \in A,\; [(x \leq b \;\; \forall x \in X) \Rightarrow \bigvee(X) \leq b]$.

Mostraremos que $\bigvee = \phi$, cumple con ambas condiciones.

(I) Sean $X \subseteq A$, $x \in X$, entonces

$$\phi(\{x, \phi(X)\}) = \phi(\{\phi(\{x\}), \phi(X)\}) = \phi(\cup\{\{x\}, X\}) = \phi(\cup\{X\}) = \phi(\{\phi(X)\}) = \phi(X),$$

y por lo tanto

$$x \leq \phi(X)\,.$$

(II) Sea $b \in A$ tal que para cualquier $x \in X$, $x \leq b$, es decir $\phi(\{x, b\}) = b$. Entonces

$$\phi(\{\phi(X), b\}) = \phi(\{\phi(X), \phi(\{b\})\}) = \phi(\cup\{X, \{b\}\}) = \phi(\cup\{\{x, b\} \mid x \in X\}) = \phi(\{\phi(\{x, b\}) \mid x \in X\}) = \phi(\{b\}) = b,$$

y por lo tanto

$$\phi(X) \leq b\,.$$

En resumen, $(A, \leq, \phi, \bigwedge, \bigvee)$ es una retícula completa. (Donde $\bigwedge$: $\wp(A) \to A$ funciona como ínfimo y está definido por :

$$\bigwedge(X) = \phi(\{b \in A \mid \forall x \in X(b \leq x)\})\,.$$

Observemos ahora como son los morfismos entre $\wp$-algebras.
Un morfismo entre $\wp$-algebras (A,ϕ), (A',ϕ') es una función $\alpha : A \longrightarrow A'$ tal que conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\wp(A) \arrow[r, "\wp(\alpha)"] \arrow[d, "\phi"'] & \wp(A') \arrow[d, "\phi'"] \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & A'
\end{tikzcd},$$

es decir,

$$\phi'(\alpha(X)) = \alpha(\phi(X)) .$$

Así, α es una función que preserva supremos y por lo tanto, también preserva el orden.

Definición 5.3 . Dado un triple (T,η,μ) en una categoría $\mathbf{A}$, una *resolución* para éste es una tétrada $(\mathbf{B},U,F,\varepsilon)$. Donde $\mathbf{B}$ es una categoría, $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $U : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ son un par de funtores adjuntos tales que $UF = T$, donde las adjunciones son $\eta : Id_{\mathbf{A}} \longrightarrow UF$, $\varepsilon : FU \longrightarrow Id_{\mathbf{B}}$, y además se satisface que $U\varepsilon F = \mu$.

Proposición 26 *Las resoluciones para un triple (T,η,μ) en $\mathbf{A}$ forman una categoría $\mathbf{R}$ cuyos morfismos $\phi : (\mathbf{B},U,F,\varepsilon) \longrightarrow (\mathbf{B}',U',F',\varepsilon')$ son funtores $\phi : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}'$ tales que $\phi\varepsilon = \varepsilon'\phi$ y conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{B} \arrow[dr, "U"] \arrow[dd, "\phi"] & \\
\mathbf{A} \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F'"'] & & \mathbf{A} \\
 & \mathbf{B}' \arrow[ur, "U'"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración

Para cualquier resolución $(\mathbf{B},U,F,\varepsilon)$ es claro que $Id_{\mathbf{B}}$ es un morfismo de resoluciones, ya que $Id_{\mathbf{B}}\varepsilon = \varepsilon Id_{\mathbf{B}}$ y ya que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{B} \arrow[dr, "U"] \arrow[dd, "Id_{\mathbf{B}}"] & \\
\mathbf{A} \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathbf{A} \\
 & \mathbf{B}' \arrow[ur, "U"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, dado que la composición de funtores es asociativa, bastará probar que si

$\phi : (\mathbf{B}, U, F, \varepsilon) \to (\mathbf{B}', U', F', \varepsilon')$, $\phi' : (\mathbf{B}', U', F', \varepsilon') \to (\mathbf{B}'', U'', F'', \varepsilon'')$
son morfismos de resoluciones entonces

$\phi' \circ \phi : (\mathbf{B}, U, F, \varepsilon) \to (\mathbf{B}'', U'', F'', \varepsilon'')$
es también un morfismo de resoluciones. Para esto, notemos que $\phi\varepsilon = \varepsilon'\phi$, $\phi'\varepsilon' = \varepsilon''\phi'$ y que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{B} \arrow[dr, "U"] \arrow[d, "\phi"] & \\
\mathbf{A} \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "F'"] \arrow[dr, "F''"'] & \mathbf{B}' \arrow[r, "U'"] \arrow[d, "\phi'"] & \mathbf{A} \\
 & \mathbf{B}'' \arrow[ur, "U''"'] &
\end{tikzcd}$$

,

de lo que se sigue que

$(\phi' \circ \phi)\varepsilon = \phi'(\phi\varepsilon) = \phi'(\varepsilon'\phi) = (\phi'\varepsilon')\phi = (\varepsilon''\phi')\phi = \varepsilon''(\phi' \circ \phi)$
y que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{B} \arrow[dr, "U"] \arrow[dd, "\phi' \circ \phi"] & \\
\mathbf{A} \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F''"'] & & \mathbf{A} \\
 & \mathbf{B}'' \arrow[ur, "U''"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\phi' \circ \phi$ es una resolución.

■

Proposición 27 *La categoría de Eilenberg-Moore* $\mathbf{A}^T$ *del triple* (T, η, μ) *en* $\mathbf{A}$, *proporciona una resolución* $(\mathbf{A}^T, U^T, F^T, \varepsilon^T)$ *que es un objeto terminal en* $\mathbf{R}$. *Además,* U^T *es fiel.*

Demostración

a). Definimos $U^T : \mathbf{A}^T \to \mathbf{A}$ de la manera siguente: dado un objeto (A, ϕ) en $\mathbf{A}^T$ y un morfismo $\alpha : (A, \phi) \to (A', \phi')$

$U^T((A, \phi)) = A, \quad U^T(\alpha) = \alpha.$

U^T puede interpretarse como un funtor que olvida , con lo cual es claro que es un funtor y que es fiel.

b). Definimos $F^T : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^T$ por: si A es un objeto de $\mathbf{A}$ y $f; A \to A'$ es un morfismo en $\mathbf{A}$ entonces

$F^T(A) = (T(A), \mu_A)$ y $F^T(f) = T(f)$.

Para ver que la definición anterior tiene sentido, obsérvese que conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "\eta_{T(A)}"] \arrow[dr, "Id_{T(A)}"'] & T^2(A) \arrow[d, "\mu_A"] \\ & T(A) \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} T^3(A) \arrow[r, "\mu_{T(A)}"] \arrow[d, "T(\mu_A)"'] & T^2(A) \arrow[d, "\mu_A"] \\ T^2(A) \arrow[r, "\mu_A"'] & T(A) \end{tikzcd} \quad ,$$

esto gracias a que (T, η, μ) es un triple y, por lo tanto son conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "To\eta"] \arrow[d, "\eta oT"'] \arrow[dr, "Id_T"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu oT"] \arrow[d, "To\mu"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \quad .$$

Por lo tanto, F^T está bien definido en los objetos.

Ahora, $\mu : T^2 \to T$ es una transformación natural, de lo que se sigue que, dado el morfismo en $\mathbf{A}$, $f : A \to A'$, conmuta el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} T^2(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \\ {\scriptstyle T^2(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(f)} \\ T^2(A') & \xrightarrow[\mu_{A'}]{} & T(A') \end{array} ,$$

con lo que se observa que F^T está bien definido en los morfismos.

Por último, que F^T es un funtor es una consecuencia de que T es un funtor.

c). Definimos $\varepsilon^T : F^T U^T \to Id_{\mathbf{A}^T}$ de la siguiente forma: dado un objeto (A, ϕ) de $\mathbf{A}^T$,
$\varepsilon^T{}_{(A,\phi)} = \phi$.

Nótese que debido a que (A, ϕ) es un objeto de $\mathbf{A}^T$, conmuta el siguiente cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} T^2(A) & \xrightarrow{T(\phi)} & T(A) \\ {\scriptstyle \mu_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ T(A) & \xrightarrow[\phi]{} & A \end{array} ,$$

y por lo tanto $\phi : (T(A), \mu_A) \to (A, \phi)$ es efectivamente un morfismo de álgebras, es decir, ε^T está bien definida.

Por otra parte, si $\alpha : (A, \phi) \to (A', \phi')$ es un morfismo en $\mathbf{A}^T$, se tiene por definición que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{T(\alpha)} & T(A') \\ {\scriptstyle \phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi'} \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & A' \end{array} ,$$

con lo que hemos demostrado que ε^T es una transformación natural.

d). Probemos que $U^T F^T = T$.
Dados $A \in \mathbf{A}$, y $f : A \to A'$ un morfismo en $\mathbf{A}$, se tiene que

$$U^T F^T(A) = U^T(F^T(A)) = U^T((T(A), \mu_A)) = T(A)$$

y

$$U^T F^T(f) = U^T(F^T(f)) = U^T(T(f)) = T(f)\ ,$$

y por lo tanto

$$U^T F^T = T$$

e). Si A es un objeto de $\mathbf{A}$ entonces

$$(U^T \varepsilon^T F^T)_A = U^T({\varepsilon^T}_{F^T(A)}) = U^T({\varepsilon^T}_{(T(A),\mu_A)}) = U^T(\mu_A) = \mu_A,$$

y por lo tanto

$$U^T \varepsilon^T F^T = \mu\ .$$

f). Demostremos que (U, F) es una pareja de funtores adjuntos.
Para cualesquiera A y (A, ϕ) objetos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^T$ respectivamente, dado que (T, η, μ) es un triple, conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, "Id_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ & T \end{tikzcd} ,$$

y dado que (A, ϕ) es una álgebra en $\mathbf{A}^T$ conmuta el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "Id_A"'] & T(A) \arrow[d, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd} .$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}(\varepsilon^T F^T \circ F^T\eta)_A &= (\varepsilon^T F^T)_A \circ (F^T\eta)_A = {\varepsilon^T}_{F^T(A)} \circ F^T(\eta_A) = \\ &{\varepsilon^T}_{(T(A),\mu_A)} \circ T(\eta_A) = \mu_A \circ T(\eta_A) = Id_{T(A)} = Id_{(T(A),\mu_A)} = \\ &Id_{F^T(A)} = (Id_{F^T})_A\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(U^T\varepsilon^T \circ \eta U^T)_{(A,\phi)} &= U^T({\varepsilon^T}_{(A,\phi)}) \circ \eta_{U^T((A,\phi))} = U^T(\phi) \circ \eta_A = \\ &\phi \circ \eta_A = Id_A = Id_{U^T((A,\phi))} = (Id_{U^T})_{(A,\phi)}\ ,\end{aligned}$$

con lo que se tiene que

$$\varepsilon^T F^T \circ F^T\eta = Id_{F^T} \text{ y } U^T\varepsilon^T \circ \eta U^T = Id_{U^T}.$$

Por lo tanto, (F, U) es una pareja de funtores adjuntos.

Con lo anterior hemos demostrado que $(\mathbf{A}^T, U^T, F^T, \varepsilon^T)$ es una resolución para el triple dado, demostremos ahora que tal resolución es un objeto terminal en $\mathbf{R}$.

g). Sea $(\mathbf{B}, U, F, \varepsilon)$ otra resolución para el mismo triple, construíremos el funtor $K^T : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}^T$ (llamado el funtor de comparación), mostraremos que es un morfismo de resoluciones y que es el único con las propiedades requeridas.

g1). Definimos $K^T : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}^T$ por: dado un objeto B de $\mathbf{B}$ y un morfismo $g : B \longrightarrow B'$ un morfismo en $\mathbf{B}$,

$K^T(B) = (U(B), U\varepsilon(B))$ y $K^T(g) = U(g)$.

Veamos que esta es una buena definición.

Primero, debido a que $U\varepsilon \circ \eta U = Id_U$ se tiene que conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd} U(B) \arrow[r, "\eta_{U(B)}"] \arrow[dr, "Id_{U(B)}"'] & T(U(B)) \arrow[d, "U\varepsilon(B)"] \\ & U(B) \end{tikzcd} .$$

Segundo, dado que $\varepsilon : FU \longrightarrow Id_{\mathbf{B}}$ es una transformación natural y $\varepsilon_B : FU(B) \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathbf{B}$, entonces conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} FUFU(B) \arrow[r, "\varepsilon_{FU(B)}"] \arrow[d, "FU(\varepsilon_B)"'] & FU(B) \arrow[d, "\varepsilon_B"] \\ FU(B) \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & B \end{tikzcd} .$$

Además, $\mu = U\varepsilon F$ y $UF = T$. Por lo tanto se tiene que

$$U\varepsilon(B) \circ \mu_{U(B)} = U\varepsilon(B) \circ (U\varepsilon F)_{U(B)} =$$
$$U(\varepsilon_B) \circ U(\varepsilon_{FU(B)}) = U(\varepsilon_B \circ \varepsilon_{FU(B)}) = U(\varepsilon_B \circ FU(\varepsilon_B)) =$$
$$U\varepsilon(B) \circ UF(U\varepsilon(B)) = U\varepsilon(B) \circ T(U\varepsilon(B)) ,$$

y por lo tanto el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T(T(U(B))) \arrow[r, "\mu_{U(B)}"] \arrow[d, "T(U\varepsilon(B))"'] & T(U(B)) \arrow[d, "U(\varepsilon(B))"] \\
T(U(B)) \arrow[r, "U(\varepsilon(B))"'] & U(B)
\end{tikzcd} .$$

Con lo anterior queda probado que K^T está bien definido en los objetos, o lo que es lo mismo, que $K^T(B) = (U(B), U\varepsilon(B))$ es una álgebra.

Tercero,dado que $\varepsilon : FU \to Id_{\mathbf{B}}$ es una transformación natural, para cualquier morfismo $g : B \to B'$ en $\mathbf{B}$, tenemos que conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
FU(B) \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, "FU(g)"'] & B \arrow[d, "g"] \\
FU(B') \arrow[r, "\varepsilon_{B'}"'] & B'
\end{tikzcd} ,$$

de lo que se sigue que

$U(g) \circ U(\varepsilon_B) = U(\varepsilon_{B'}) \circ UFU(g)$,

y así, el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
UFU(B) \arrow[r, "UFU(g)"] \arrow[d, "U\varepsilon_B"'] & UFU(B') \arrow[d, "U(\varepsilon_{B'})"] \\
U(B) \arrow[r, "U(g)"'] & U(B')
\end{tikzcd} .$$

Con lo anterior hemos demostrado que $U(g) = K^T(g)$ es un morfismo de álgebras, es decir, K^T está bien definido en los morfismos.

En vista de que $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ es un funtor, es claro que K^T resulta ser también un funtor.

g2). Demostremos que $K^T \in Hom_{\mathbf{R}}((\mathbf{B}, U, F, \varepsilon), (\mathbf{A}^T, U^T, F^T, \varepsilon^T))$, es decir que:

$(i)\varepsilon^T K^T = K^T \varepsilon$,

y que

(ii) es conmutativo el diagrama I

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{B} \arrow[dr, "U"] \arrow[dd, "K^T"] & \\
\mathbf{A} \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F^T"'] & & \mathbf{A} \\
 & \mathbf{A}^T \arrow[ur, "U^T"'] &
\end{tikzcd}$$

(i). Sea $B \in Ob(\mathbf{B})$, entonces

$$(\varepsilon^T K^T)_B = \varepsilon^T{}_{K^T(B)} = \varepsilon^T{}_{(U(B),U\varepsilon(B))} = U\varepsilon(B) = K^T(\varepsilon(B)) = (K^T\varepsilon)_B \ ,$$

y por lo tanto

$$\varepsilon^T K^T = K^T\varepsilon \ .$$

(ii). Para cualesquiera $A \in Ob(\mathbf{A})$, $B \in Ob(\mathbf{B})$, $f : A \to A'$ (morfismo en $\mathbf{A}$) y $g : B \to B'$ (morfismo en $\mathbf{B}$), se tiene que

$$(K^T F)(A) = K^T(F(A)) = (UF(A), U\varepsilon(F(A))) = (T(A), \mu_A) = F^T(A) \ ,$$

$$(K^T F)(f) = K^T(F(f)) = UF(f) = T(f) = F^T(f)$$

y

$$(U^T K^T)(B) = U^T(K^T(B)) = U^T((U(B), U\varepsilon(B))) = U(B) \ ,$$

$$(U^T K^T)(g) = U^T(K^T(g)) = U^T(U(g)) = U(g),$$

y por lo tanto, el diagrama (I) es conmutativo.

g3). Para terminar la demostración, debemos mostrar que $(\mathbf{A}^T, U^T, F^T, \varepsilon^T)$ es un objeto terminal en $\mathbf{R}$, esto es, que K^T es el único morfismo de resoluciones de $(\mathbf{B}, U, F, \varepsilon)$ en $(\mathbf{A}^T, U^T, F^T, \varepsilon^T)$.

Supongamos que $\phi : \mathbf{B} \to \mathbf{A}^T$ es un morfismo de resoluciones con

$$\phi(B) = (\phi_1(B), \phi_2(B)) \in Ob(\mathbf{A}^T)$$

para $B \in Ob(\mathbf{B})$. Ahora, debe satisfacerse que

$$U^T\phi = U \ ,$$

por lo tanto

$$U(B) = U^T(\phi(B)) = U^T((\phi_1(B), \phi_2(B))) = \phi_1(B) \ .$$

Por otra parte, dada $g : B \to B' \in Mor(\mathbf{B})$, debe pasar que

$$\phi(g) = U(g),$$

y así

$$\phi(\varepsilon_B) = U\varepsilon(B) \ .$$

Además, ϕ debe satisfacer que

$$\varepsilon^T\phi = \phi\varepsilon,$$

y en consecuencia ocurre que

$$U\varepsilon(B) = \phi(\varepsilon(B)) = (\phi\varepsilon)_B = (\varepsilon^T\phi)_B = \varepsilon^T{}_{(\phi_1(B),\phi_2(B))} = \phi_2(B),$$

y por lo tanto

$$\phi = K^T \ .$$

■

La categoría $\mathbf{R}$ de todas las resoluciones para un triple dado, tiene también un objeto inicial.

Definición 3.4 . La categoría de *Kleisli* $\mathbf{A}_T$ para un triple (T, η, μ) en una categoría $\mathbf{A}$, se define por:
1) $Ob(\mathbf{A}_T) = Ob(\mathbf{A})$,
2) los morfismos $f : A \to A'$ en $\mathbf{A}_T$ serán morfismos $f : A \to T(A')$ en $\mathbf{A}$.
3) la composición en $\mathbf{A}_T$ (que denotaremos $*$) de $f : A \to A'$ con $g : A' \to A''$
se define como $g * f = \mu_{A''} \circ T(g) \circ f$.

Observemos que efectivamente, lo anterior define una categoría.

Primero, si $f : A \to T(A')$ es un morfismo en $\mathbf{A}$, dado que $\eta : Id_{\mathbf{A}} \to T$ es una transformación natural y (T, η, μ) es un triple en $\mathbf{A}$, conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\
T(A') \arrow[r, "\eta_{T(A')}"'] & T^2(A')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[d, "\eta T"'] \arrow[dr, "Id_T"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd} ,$$

y entonces

$$f * \eta_A = \mu_{A'} \circ T(f) \circ \eta_A = \mu'_A \circ \eta_{T(A')} \circ f = Id_{T(A')} \circ f = f$$

y

$$\eta_{A'} * f = \mu_{A'} \circ T(\eta_{A'}) \circ f = Id_{T(A)} \circ f = f,$$

y por lo tanto $\eta_A : A \to T(A)$ sirve como morfismo identidad, es decir,

$\eta_A = Id_A : A \to A$ en $\mathbf{A}_T$.

Para mostrar la asociatividad de la nueva composición, tómense

$f : A \to A', \quad g : A' \to A'', \quad h : A'' \to A'''$ morfismos en $\mathbf{A}_T$,

ahora, utilizando que $\mu : T^2 \to T$ es una transformación natural, que (T, η, μ) es un triple y que $h : A'' \to T(A''')$ es un morfismo en $\mathbf{A}$, se tiene que son conmutativos los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
T^2(A'') \arrow[r, "\mu_{A''}"] \arrow[d, "T^2(h)"'] & T(A'') \arrow[d, "T(h)"] \\
T^3(A''') \arrow[r, "\mu_{T(A''')}"] \arrow[d, "T(\mu_{A'''})"'] & T^2(A''') \arrow[d, "\mu_{A'''}"] \\
T^2(A''') \arrow[r, "\mu_{A'''}"'] & T(A''')
\end{tikzcd} ,$$

y por lo tanto

$(h * g) * f = \mu_{A'''} \circ T(h * g) \circ f = \mu_{A'''} \circ T(\mu_{A'''} \circ T(h) \circ g) \circ f =$
$\mu_{A'''} \circ T(\mu_{A'''}) \circ T^2(h) \circ T(g) \circ f = \mu_{A'''} \circ T(h) \circ \mu_{A''} \circ T(g) \circ f =$
$(\mu_{A'''} \circ T(h)) \circ (\mu_{A''} \circ T(g) \circ f) = \mu_{A'''} \circ T(h) \circ (g * f) =$
$h * (g * f)$.

Por lo tanto la composición es asociativa y con esto queda probado que $\mathbf{A}_T$ es una categoría.

Ejemplo 5.2 (continuación) . Veamos como es la categoría de Kleisli para el triple $(\wp, \eta, \mu)$ en **Sets**.

Un morfismo $f : A \to B$ en $\mathbf{Sets}_T$ es un morfismo $f : A \to \wp(B)$ en **Sets**, al cual podemos ver como una relación

$$R_f \subseteq A \times B \text{ donde } (a,b) \in R_f \text{ denota } b \in f(a).$$

Así, dados $f : A \to B$, $g : B \to C$ morfismos en $\mathbf{Sets}_T$, de acuerdo con la definición, tenemos que: si $a \in A$ entonces

$(g * f)(a) = (\mu_C \circ \wp(g) \circ f)(a) = \mu_C(\wp(g)(f(a))) =$
$\bigcup\{g(b) \mid b \in f(a)\}$,

de lo que se sigue que

$(a,c) \in R_{g*f} \Leftrightarrow c \in (g * f)(a) \Leftrightarrow \exists b \in f(a) \;\; tq \;\; c \in g(b)$
$\Leftrightarrow \exists b \in B \;\; tq \;\; b \in f(a) \;\; y \;\; c \in g(b)$
$\Leftrightarrow \exists b \in B \;\; tq \;\; (a,b) \in R_f \;\; y \;\; (b,c) \in R_g \Leftrightarrow (a,c) \in R_g \circ R_f$,

y por lo tanto la composición de funciones en $\mathbf{Sets}_T$ puede verse como la composición de relaciones.

Además, el morfismo identidad en $\mathbf{Sets}_T$ es el morfismo $\eta_A : A \to \wp(A)$ en $\mathbf{A}$, el cual manda $a \in A$ en $\{a\} \in \wp(A)$. Así,

$(a,a') \in R_{\eta_A} \Leftrightarrow a' \in \{a\}$,

es decir, R_{η_A} es la relación identidad en A .

Concluímos que $\mathbf{Sets}_T$, la categoría de Kleisli del triple $(\wp, \eta, \mu)$, es isomorfa a la categoría cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son relaciones binarias.

Proposición 28 *La categoría de Kleisli $\mathbf{A}_T$ para el triple (T, η, μ) en $\mathbf{A}$ proporciona una resolución $(\mathbf{A}_T, U_T, F_T, \varepsilon_T)$ que es un objeto inicial en la categoría $\mathbf{R}$ de todas las resoluciones. Además, F_T es biyectivo en los objetos.*

Demostración

a). Definimos $U_T : \mathbf{A}_T \longrightarrow \mathbf{A}$ como: dados A, B objetos,y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathbf{A}_T$,

$U_T(A) = T(A), \;\; U_T(f) = \mu_B \circ T(f)$.

Es claro que U_T está bien definido. Demostremos entonces que U_T es un funtor.

Del hecho que (T, η, μ) sea un triple y que $\mu : T^2 \longrightarrow T$ sea una transformación natural, se sigue que, dado un morfismo $g : A' \longrightarrow A''$ en $\mathbf{A}_T$, conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[d, "\eta T"'] \arrow[dr, "Id_T"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T^2(A') \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "T^2(g)"'] & T(A') \arrow[d, "T(g)"] \\
T^3(A'') \arrow[r, "\mu_{T(A'')}"] \arrow[d, "T(\mu_{A''})"'] & T^2(A'') \arrow[d, "\mu_{A''}"] \\
T^2(A'') \arrow[r, "\mu_{A''}"'] & T(A'')
\end{tikzcd} \quad ,$$

y por lo tanto

$U_T(Id_A) = U_T(\eta_A) = \mu_A \circ T(\eta_A) = Id_{T(A)} = Id_{U_T(A)}$

y, si

$$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$$

son morfismos en $\mathbf{A}_T$,

$U_T(g * f) = \mu_{A''} \circ T(g * f) = \mu_{A''} \circ T(\mu_{A''} \circ T(g) \circ f) =$
$\mu_{A''} \circ T(\mu_{A''}) \circ T^2(g) \circ T(f) = \mu_{A''} \circ T(g) \circ \mu_{A'} \circ T(f) =$
$(\mu_{A''} \circ T(g)) \circ (\mu_{A'} \circ T(f)) = U_T(g) \circ U_T(f).$

Por lo tanto, concluimos que U_T es un funtor.

b).Definimos $F_T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_T$ por: para cualquier A objeto de $\mathbf{A}$ y para cualquier $f : A \longrightarrow B$ morfismo en $\mathbf{A}$,

$F_T(A) = A, \quad F_T(f) = \eta_B \circ f$.

Claramente, F_T está bien definido y es biyectivo en los objetos. Además,

$F_T(Id_A) = \eta_A \circ Id_A = \eta_A = Id_{F_T(A)}$.

Por otra parte, si

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

son morfismos en $\mathbf{A}$, dado que $\eta : Id_{\mathbf{A}} \longrightarrow T$ es una transformación natural, conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "g"'] & T(B) \arrow[d, "T(g)"] \\ C \arrow[r, "\eta_C"'] & T(C) \end{tikzcd} ,$$

y nuevamente, debido a que (T, η, μ) es un triple, se tiene que

$F_T(g \circ f) = \eta_C \circ (g \circ f) = Id_{T(C)} \circ \eta_C \circ g \circ f =$
$(\mu \circ T\eta)_C \circ T(g) \circ \eta_B \circ f = \mu_C \circ T(\eta_C \circ g) \circ \eta_B \circ f =$
$(\eta_C \circ g) * (\eta_B \circ f) = F_T(g) * F_T(f)$,

y por lo tanto, F_T es un funtor.

c). Definimos $\varepsilon_T : F_T U_T \longrightarrow Id_{\mathbf{A}_T}$ de la siguiente manera: dado un objeto A de $\mathbf{A}_T$,

$(\varepsilon_T)_A = Id_{T(A)}$ (morfismo en $\mathbf{A}$).

La definición anterior tiene sentido debido a que, si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathbf{A}_T$ pueden realizarse las composiciones $f * Id_{T(A)}$ y $Id_{T(B)} * F_T U_T(f) = Id_{T(B)} * (\eta_{T(B)} \circ \mu_B \circ T(f))$. Veamos entonces que son iguales, es decir, que el siguiente cuadrado en $\mathbf{A}_T$ es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F_TU_T(A) = T(A) \arrow[r, "Id_{T(A)}"] \arrow[d, "F_TU_T(f) = \eta_{T(B)}\circ\mu_B\circ T(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\
F_TU_T(B) = T(B) \arrow[r, "Id_{T(B)}"'] & B
\end{tikzcd} ,$$

para lo cual usaremos nuevamente que (T,η,μ) es un triple y entonces $\mu\circ\eta T = Id_T$.

$Id_{T(B)} * (\eta_{T(B)}\circ\mu_B\circ T(f)) =$
$\mu_B\circ T(Id_{T(B)})\circ\eta_{T(B)}\circ\mu_B\circ T(f) =$
$\mu_B\circ Id_{T^2(B)}\circ\eta_{T(B)}\circ\mu_B\circ T(f) = \mu_B\circ\eta_{T(B)}\circ\mu_B\circ T(f) =$
$(\mu\circ\eta T)_B\circ\mu_B\circ T(f) = Id_{T(B)}\circ\mu_B\circ T(f) = \mu_B\circ T(f) =$
$\mu_B\circ T(f)\circ Id_{T(A)} = f * Id_{T(A)}$,

con lo cual queda demostrado que ε_T es una transformación natural.

d). Dado un objeto A de **A**, se tiene que

$U_TF_T(A) = U_T(F_T(A)) = U_T(A) = T(A)$,

además, si $f : A \to B$ es un morfismo en **A**, como (T,η,μ) es un triple en **A**, se tiene que $\mu\circ T\eta = Id_T$ y por lo tanto

$U_TF_T(f) = U_T(F_T(f)) = U_T(\eta_B\circ f) = \mu_B\circ T(\eta_B\circ f) =$
$\mu_B\circ T(\eta_B)\circ T(f) = (\mu\circ T\eta)_B\circ T(f) = Id_{T(B)}\circ T(f) = T(f)$.

Concluímos que $U_TF_T = T$.

e). Si A es un objeto de **A**, ocurre que

$(U_T\varepsilon_TF_T)_A = U_T((\varepsilon_T)_{F_T(A)}) = U_T((\varepsilon_T)_A) = U_T(Id_{T(A)}) =$
$\mu_A\circ T(Id_{T(A)}) = \mu_A\circ Id_{T^2(A)} = \mu_A$,

y por lo tanto

$U_T\varepsilon_TF_T = \mu$.

f). Demostremos ahora que (U,F) es un par de funtores adjuntos.
Si A es un objeto de **A** entonces

$(\varepsilon_TF_T * F_T\eta)_A = (\varepsilon_TF_T)_A * (F_T\eta)_A = (\varepsilon_T)_{F_T(A)} * F_T(\eta_A) =$
$(\varepsilon_T)_A * (\eta_{T(A)}\circ\eta_A) = Id_{T(A)} * (\eta_{T(A)}\circ\eta_A) =$
$\mu_A\circ T(Id_{T(A)})\circ(\eta_{T(A)}\circ\eta_A) = \mu_A\circ Id_{T^2(A)}\circ\eta_{T(A)}\circ\eta_A =$
$\mu_A\circ\eta_{T(A)}\circ\eta_A = (\mu\circ\eta T)_A\circ\eta_A = Id_{T(A)}\circ\eta_A =$
$\eta_A = Id_{F_T(A)} = (Id_{F_T})_A$,

y por lo tanto

$\varepsilon_TF_T * F_T\eta = Id_{F_T}$.

Por otra parte,

$$(U_T\varepsilon_T \circ \eta U_T)_A = (U_T\varepsilon_T)_A \circ (\eta U_T)_A = U_T((\varepsilon_T)_A) \circ \eta_{U_T(A)} =$$
$$U_T(Id_{T(A)}) \circ \eta_{T(A)} = \mu_A \circ T(Id_{T(A)}) \circ \eta_{T(A)} =$$
$$\mu_A \circ Id_{T^2(A)} \circ \eta_{T(A)} = (\mu \circ \eta T)_A =$$
$$Id_{T(A)} = Id_{F_T(A)} = (Id_{F_T})_A,$$

y por lo tanto

$$U_T\varepsilon_T \circ \eta U_T = Id_{F_T} \ ,$$

con lo cual terminamos de demostrar que (U, F) es un par de funtores adjuntos.

Con los seis puntos anteriores queda probado que $(\mathbf{A}_T, U_T, F_T, \varepsilon_T)$ es una resolución para el triple dado. Demostraremos ahora que tal resolución es un objeto inicial en $\mathbf{R}$, esto es, que dada otra resolución $(\mathbf{B}, U, F, \varepsilon)$, existe un único morfismo de resoluciones de $(\mathbf{A}_T, U_T, F_T, \varepsilon_T)$ en $(\mathbf{B}, U, F, \varepsilon)$

g). Sea $(\mathbf{B}, U, F, \varepsilon)$ otra resolución para el mismo triple, construiremos un funtor $K_T : \mathbf{A}_T \to \mathbf{B}$ y mostraremos que es el único con las propiedades deseadas.

Para cualquier objeto A de $\mathbf{A}_T$ y cualquier morfismo $g : A \to A'$ en $\mathbf{A}_T$, definimos $K_T : \mathbf{A}_T \to \mathbf{B}$ por:

$$K_T(A) = F(A), \quad K_T(g) = \varepsilon_{F(A')} \circ F(g) \ .$$

Es claro que K_T está bien definido en los objetos, además, en $\mathbf{B}$ se tiene el morfismo

$$F(A) \xrightarrow{F(g)} FT(A') = FUF(A') \xrightarrow{\varepsilon_{F(A')}} F(A')$$

y por lo tanto K_T está bien definido en los morfismos. ($UF = T$ debido a que $(\mathbf{B}, U, F, \varepsilon)$ es una resolución para el triple (T, η, μ) .)

Demostremos entonces que K_T es un funtor.

$$K_T(\eta_A) = \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = (\varepsilon F \circ F\eta)_A = Id_{F(A)} = Id_{K_T(A)}$$

(Recuérdese que $\eta_A : A \to A$ en $\mathbf{A}_T$ es el morfismo identidad en A y que, por ser $(\mathbf{B}, U, F, \varepsilon)$ una resolución, se tiene que $\varepsilon F \circ F\eta = Id_F$).
Por otra parte, sean

$$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$$

morfismos en $\mathbf{A}_T$, probaremos que $K_T(g * f) = K_T(g) \circ K_T(f)$, para lo cual necesitamos observar primero los siguientes dos puntos:

(i). $\varepsilon : FU \to Id_{\mathbf{B}}$ es una transformación natural y por lo tanto, dado que $F(g) : F(A') \to FT(A'') = FUF(A'')$ y $\varepsilon_{F(A'')} : FUF(A'') \to F(A'')$ son morfismos en $\mathbf{B}$, conmutan los siguentes cuadrados:

$$\begin{tikzcd}
FUF(A') \arrow[r, "\varepsilon_{F(A')}"] \arrow[d, "FUF(g)"'] & F(A') \arrow[d, "F(g)"] \\
FUFUF(A'') \arrow[r, "\varepsilon_{FUF(A'')}"'] & FUF(A'')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FUFUF(A'') \arrow[r, "\varepsilon_{FUF(A'')}"] \arrow[d, "FU(\varepsilon_{F(A'')})"'] & FUF(A'') \arrow[d, "\varepsilon_{F(A'')}"] \\
FUF(A'') \arrow[r, "\varepsilon_{F(A'')}"'] & F(A'')
\end{tikzcd} \quad .$$

(ii). $\mu = U\varepsilon F$ ya que $(\mathbf{B}, U, F, \varepsilon)$ es una resolución para el triple (T, η, μ). Así,

$$\begin{aligned}
K_T(g) \circ K_T(f) &= (\varepsilon_{F(A'')} \circ F(g)) \circ (\varepsilon_{F(A')} \circ F(f)) = \\
&\varepsilon_{F(A'')} \circ [(F(g) \circ \varepsilon_{F(A')}) \circ F(f)] = \\
&\varepsilon_{F(A'')} \circ [(\varepsilon_{FUF(A'')} \circ FUF(g)) \circ F(f)] = \\
&(\varepsilon_{F(A'')} \circ \varepsilon_{FUF(A'')}) \circ (FUF(g) \circ F(f)) = \\
&(\varepsilon_{F(A'')} \circ FU(\varepsilon_{F(A'')})) \circ (FUF(g) \circ F(f)) = \\
&(\varepsilon_{F(A'')} \circ F(\mu_{A''})) \circ (F(T(g)) \circ F(f)) = \\
&\varepsilon_{F(A'')} \circ F(\mu_{A''} \circ T(g) \circ f) = \\
&K_T(\mu_{A''} \circ T(g) \circ f) = K_T(g * f) \ ,
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado que K_T es un funtor.

h). Demostremos ahora que $K_T \in Hom_{\mathbf{R}}((\mathbf{A}_T, U_T, F_T, \varepsilon_T), (\mathbf{B}, U, F, \varepsilon))$, es decir, que $K_T\varepsilon_T = \varepsilon K_T$ y que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{A}_T \arrow[dr, "U_T"] \arrow[dd, "K_T"] & \\
\mathbf{A} \arrow[ur, "F_T"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathbf{A} \\
 & \mathbf{B} \arrow[ur, "U"'] &
\end{tikzcd}$$

h1). Si A es un objeto de $\mathbf{A}$ entonces

$$(K_T\varepsilon_T)_A = K_T(\varepsilon_T(A)) = K_T(Id_{T(A)}) = \varepsilon_{F(A)} \circ F(Id_{T(A)}) = \varepsilon_{F(A)} \circ Id_{FT(A)} = \varepsilon_{F(A)} = \varepsilon_{K_T(A)} = (\varepsilon K_T)_A \ ,$$

y por lo tanto

$$K_T\varepsilon_T = \varepsilon K_T \ .$$

h2). Si A es un objeto de $\mathbf{A}$ y $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathbf{A}$ entonces

$$(K_T F_T)(A) = K_T(F_T(A)) = K_T(A) = F(A)$$

y

$$(K_T F_T)(f) = K_T(F_T(f)) = K_T(\eta_B \circ f) = \varepsilon_{F(B)} \circ F(\eta_B \circ f) = \varepsilon_B \circ F(\eta_B) \circ F(f) = (\varepsilon F \circ F\eta)_B \circ F(f) = Id_{F(B)} \circ F(f) = F(f)$$

y por lo tanto

$$K_T F_T = F \ .$$

h3). Dados un objeto A de $\mathbf{A}_T$ y un morfismo $g : A \to A'$ en $\mathbf{A}_T$, se tiene que

$$(UK_T)(A) = U(K_T(A)) = U(F(A)) = T(A) = U_T(A)$$

y

$$(UK_T)(g) = U(K_T(g)) = U(\varepsilon_{F(A')} \circ F(g)) = U(\varepsilon_{F(A')}) \circ UF(g) = (U\varepsilon F)_{A'} \circ T(g) = \mu'_A \circ T(g) = U_T(g),$$

y por lo tanto

$$UK_T = U_T \ .$$

i). Por último, veamos la unicidad de K_T .
Si $\phi \in Hom_{\mathbf{R}}((\mathbf{A}_T, U_T, F_T, \varepsilon_T), (\mathbf{B}, U, F, \varepsilon))$ debe ocurrir que $\phi F_T = F$, entonces, si $A \in Ob(\mathbf{A}_T)$, se tiene que

$$F(A) = (\phi F_T)(A) = \phi(A) \ .$$

También debe ocurrir que $\phi\varepsilon_T = \varepsilon\phi$ y así,

$$\phi(Id_{T(A)}) = \varepsilon_{F(A)} \ .$$

Por otro lado, para un morfismo $g : A \to A'$ en $\mathbf{A}_T$, ocurre que

$$Id_{T(A')} * (\eta_{T(A')} \circ g) = \mu_{A'} \circ T(Id_{T(A')}) \circ \eta_{T(A')} \circ g = \mu_{A'} \circ Id_{T^2(A')} \circ \eta_{T(A')} \circ g = \mu_{A'} \circ \eta_{T(A')} \circ g = (U\varepsilon F)_{A'} \circ \eta_{UF(A')} \circ g = U(\varepsilon_{F(A')}) \circ \eta_{UF(A')} \circ g = (U\varepsilon \circ \eta U)_{F(A')} \circ g = Id_{UF(A')} \circ g = g,$$

así, debe ocurrir que

$$\phi(g) = \phi(Id_{T(A')} * (\eta_{T(A')} \circ g) = \phi(Id_{T(A')}) \circ \phi(\eta_{T(A')} \circ g)) = \varepsilon_{F(A')} \circ \phi(F_T(g)) = \varepsilon_{F(A')} \circ F(g) = K_T(g),$$

y por lo tanto

$\phi = K_T$,
con lo cual terminamos la demostración.

■

Corolario 2 *Sea $L_T : \mathbf{A}_T \to \mathbf{A}^T$ el caso especial del funtor de comparación K^T cuando $\mathbf{B} = \mathbf{A}_T$ (o para K_T cuando $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$)), entonces tenemos los funtores*

$$\mathbf{A} \xrightarrow{F_T} \mathbf{A}_T \xrightarrow{L_T} \mathbf{A}^T \xrightarrow{U^T} \mathbf{A}$$

con $F^T = L_T F_T$ adjunto izquierdo de U^T y $U_T = U^T L_T$ adjunto derecho de F_T . Además, F_T es biyectivo en los objetos, U^T es fiel y L_T es fiel.

Demostración

Unicamente falta probar que L_T es fiel. Así, obsérvese que dado un morfismo $g : A \to A'$ en $\mathbf{A}_T$ ($g : A \to T(A')$ en $\mathbf{A}$), debido a que $\eta : Id_{\mathbf{A}} \to T$ es una transformación natural, conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "g"'] & T(A) \arrow[d, "T(g)"] \\ T(A') \arrow[r, "\eta_{T(A')}"'] & T^2(A') \end{tikzcd} .$$

Además, dentro de la demostración de la unicidad en la proposición anterior, se probó que
$g = Id_{T(A')} * (\eta_{T(A')} \circ g) = \mu_{A'} \circ \eta_{T(A')} \circ g$.
Así, de las anteriores observaciones y del hecho que
$L_T(g) = K^T(g) = U_T(g) = \mu_{A'} \circ T(g)$,
se tiene que
$g = \mu_{A'} \circ \eta_{T(A')} \circ g = \mu_{A'} \circ T(g) \circ \eta_A = L_T(g) \circ \eta_A$.

Para terminar, usando las observaciones anteriores se sigue que: dados dos morfismos $g, \bar{g} : A \to A'$ en $\mathbf{A}_T$:
$L_T(g) = L_T(\bar{g}) \Rightarrow g = L_T(g) \circ \eta_A = L_T(\bar{g}) \circ \eta_A = \bar{g}$.
Por lo tanto L_T es fiel.

■

BIBILOGRAFIA

(1). *Lambek, J., Scott P.J.,* **Introduction to higher order categorical logic** , Cambridge University Press, Great Britain, 1986, pp. 293.

(2). *Jacobson, N.,* **Basic Algebra II**, W.H. Freeman and Company, U.S.A., 1989, pp. 325.

(3). *Herrlich, H., Strecker, G.,* **Category Theory an Introduction**, Heldermann Verlag Berlin, 1979, pp. 400.

(4). *Atiyah, M.F., Macdonald, I.G.,* **Introduction to Commutative Algebra**, Addison-Wesley, Great Britain, 1969, pp. 128.