5
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROYECTO DE TEXTO PARA MATEMATICAS FINANCIERAS (ANUALIDADES)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

GENOVEVA BARRERA GODINEZ

MEXICO, D. F. 1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

I N D I C E.

I N T R O D U C C I O N

La presente tesis está hecha con la finalidad de ser accesible para todos los alumnos que esten relacionados con el área de Actuaría y tengan la necesidad de consultarla. Además se ha utilizado un lenguaje no muy formal y de rápida comprensión, para aquellos estudiantes que esten relacionados con las matemáticas financieras de otras disciplinas, y que éstos las comprendan de una manera fácil.

Este trabajo de tesis tiene la finalidad de que el alumno de Matemáticas Financieras reconozca las diferentes anualidades que existen , qué es la amortización y cómo se crea un fondo de amortización.

Ya con este conocimiento usará estas herramientas y las podrá aplicar a los problemas que se le presenten.

En los capitulos que tratan de Anualidades, el propósito es que reconozca, defina y calcule valores actuales o presentes, valores futuros o montos a un interés compuesto; manejará los diferentes factores que intervienen en una anualidad, como es la renta, la tasa de interés, tiempo o plazo.

También conocerá varios criterios para reconocer las caracteristicas de una anualidad cierta, contingente, vencida, anticipada, diferida, simple, general,etc.

Además tendrá un panorama amplio de las anualidades es decir, la diferencia que existe entre una anualidad cierta ordinaria vencida y una anualidad contingente diferida anticipada, u otra que se le presente en un problema financiero.

En lo que respecta al capitulo de amortización aprenderá los tipos de amortización que existen, creará métodos para calcular el valor de las amortizaciones, las tasas de interés, de los saldos insolutos, de los plazos y podrá elaborar tablas de amortización, que nos muestren el estado financiero de la amortización de una deuda.

Por último en los Fondos de Amortización cuáles son los factores que intervienen en ellos y sus aplicaciones, las diferentes técnicas para manejar y crear tablas de éstos; tomando en cuenta la acumulación de fondos, saldos insolutos, plazos, tasas, conforme a las inversiones que se le presenten.

Para ello presentamos este trabajo con el concepto, su clasificación y ejercicios para ilustrar el tema.

CAPITULO I

ANUALIDADES

1.1 INTRODUCCION

Se denomina anualidad a un conjunto de pagos iguales realizados a intervalos iguales de tiempo. Se conserva el nombre de anualidad por estar arraigado, aunque no siempre se refiera a periodos anuales de pago, y su notación es $a_{\overline{n}|}$.

Conceptos que se Manejan en las Anualidades

Intervalo o periodo de pago es el tiempo que transcurre entre un pago y otro.

Se denomina plazo de una anualidad al tiempo que pasa entre el inicio del primer periodo de pago y el final del último .y su notación es 'n '..

Renta es el pago periodico que se hace, cuya notación es R.

También en el concepto de anualidad se manejaran términos ya conocidos como son: interés compuesto, valor actual o capital, monto compuesto, tasa nominal, etc.

1.2 TIPOS DE ANUALIDADES.

Hay muchos tipos de Anualidades y se clasifican de acuerdo a diferentes criterios:

CRITERIO:	Tipos de Anualidades:
a) Tiempo	Ciertas Contingentes
b) Intereses	Simples Generales.
c) Pagos	Vencidas Anticipadas.
d) Iniciación	Inmediatas Diferidas.
e) Acumulación	Crecientes Decrecientes

a).- TIEMPO, este criterio de clasificación se refiere a las fechas de iniciación y de terminación de las anualidades.

* ANUALIDADES CIERTAS.- sus fechas son fijas y se estipulan de antemano, es decir conocemos la fecha iniciación y cuando se termina. De las anualidades son las más importantes pues son las más comunes y como las que más se manejan en los problemas diarios y un ejemplo de este tipo de anualidades ciertas es: las compras que se realizan a crédito, en donde se fija tanto la fecha en que se debe de hacer el primer pago, como la fecha para efectuar el último.

* ANUALIDADES CONTINGENTES.- la fecha del primer pago, la fecha del último pago ó ambas, no se fijan de antemano; depende de algún hecho que se sabe que ocurrirá, pero no se sabe cuando, y como su nombre lo indica hasta que ocurra la contingencia dará inicio la anualidad. Un caso común de este tipo de anualidad son las rentas vitalicias que se otorgan a un cónyuge tras la muerte del otro. El inicio de la renta se da al morir el cónyuge y se sabe que éste morirá, pero no se sabe cuándo.

b).- INTERESES, En este caso:

* ANUALIDAD SIMPLE: cuando el período de pago coincide con el de capitalización de los intereses.

* ANUALIDAD GENERAL: a diferencia de la anterior, el período de pago no coincide con el período de capitalización.

c).- PAGOS, de acuerdo con ellos:

* ANUALIDAD VENCIDA: también se le conoce como anualidad ordinaria y, como su primer nombre lo indica, se trata de casos en que los pagos se efectúan a su vencimiento, es decir, al final de cada período.

* ANUALIDAD ANTICIPADA: es aquella en la que los pagos se realizan al principio de cada período.

d).- INICIACION, de acuerdo con el momento en que se inician:

* ANUALIDAD INMEDIATA: es el tipo de anualidad más común. La realización de los cobros o pagos tiene lugar en el período inmediato a la formalización del trato.

* ANUALIDAD DIFERIDA: se pospone la realización de los cobros o pagos después de la formalización del trato.

e).- ACUMULACION: la anualidad dependiendo de que sufre incrementos o decrementos será:

* CRECIENTE: se considera a las anualidades que contienen un término P y una razón Q. en donde P crece en forma ya sea aritmética o en otra forma.

* DECRECIENTE: son las anualidades que tienen un término P y una razón y que en vez de acumular sufre decrementos.

1.3 Clasificación de las Anualidades

De acuerdo con las anteriores clasificaciones se puede distinguir diversos tipos de anualidades:

- Anualidades
  - Ciertas
    - Simples
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas
    - Generales
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas
  - Contingentes
    - Simples
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas
    - Generales
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas

Se tiene que considerar que estas anualidades pueden ser cada una de ellas del tipo de anualidades crecientes o decrecientes.

1.4 Anualidades Simples y Ciertas

Primero analizaremos las características más importantes en una anualidad, tomaremos el caso de las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas.

Se les llama anualidades simples, porque su periodo de pago coincide con el de capitalización. Es cierta pues las fechas de los pagos son conocidos y fijados con anticipación. Es una anualidad vencida debido a que sus pagos se realizan al final de los periodos correspondientes y se le considera del tipo inmediata, pues los pagos se comienzan a hacer desde el mismo periodo en el que se realiza la operación.

1.4.1 Valor Presente de una Anualidad.

Consideremos que nos piden que calculemos el valor presente y monto de una anualidad que es simple, cierta, vencida e inmediata.

Los elementos que intervienen en este tipo de anualidades son:

- R La renta o pago por periódo.
- i La tasa de interés por periodo de interés.
- n El número de intervalos de pago o el número de periodos de interés.
- $a_{\overline{n}|}$ El valor actual o capital de la anualidad, se considera el total de los pagos en el momento presente.
- $s_{\overline{n}|}$ El valor en el momento de su vencimiento, o monto. Es el valor de todos los pagos al final de la operación.

Consideremos una anualidad ordinaria de n$ 1 000 anuales, durante 4 años, al 5 % ; el problema lo visualizaremos en la línea de tiempo y será:

0	1	2	3	4
	1000	1000	1000	1000

periodo

El valor presente de una anualidad es la suma de los valores actuales de las Rentas, es decir:

$$a_{\overline{n}|} = 1000(1+0.05)^{-1} + 1000(1+0.05)^{-2} + 1000(1+0.05)^{-3} + 1000(1+0.05)^{-4}$$

Agrupamos y tenemos:

$$a_{\overline{n}|} = 1000\ [\ (1+0.05)^{-1}+(1+0.05)^{-2}+(1+0.05)^{-3}+(1+0.05)^{-4}\ ]$$

Vemos que hay dentro del paréntesis una suma de términos que es una progresión geométrica con:

$t_1 = 1000$ el primer término

$r = 1.05$ la razón

$n = 4$ el número de términos

y considerando la suma de términos de una progresión geométrica tenemos:

$$\Sigma = \frac{t_1\ (1 - r^n)}{1 - r} = \frac{t_1 - t_1 r^n}{1 - r}$$

Entonces

$$a_{\overline{n}|} = \frac{R(1+i)^{-1} - R\ (1+i)^{-1}[\ (1+i)^{-1}\ ]^n}{1 - (\ 1+i)^{-1}} =$$

$$= \frac{R(1+i)^{-1} - R\ (1+i)^{-1}(1+i)^{-n}}{1 - \frac{1}{(1+i)}}$$

$$= \frac{R\ (1+i)^{-1}[\ 1 - (1+i)^{-n}]}{\frac{i}{1\ +\ i}}$$

$$= \frac{(1+i)R(1+i)^{-1}\ [1-(1+i)^{-n}\ ]}{i}$$

$$a_{\overline{n}|} = R\ \frac{1 - (\ 1+i)^{-n}}{i} \quad \ldots (1)$$

recordando que $V^n = (\ 1+i)^{-n}$; $a_{\overline{n}|} = R\ \frac{1 - V^n}{i}$

$$a_{\overline{n}|} = 1000\ \frac{1 - (1.05)^{-4}}{0.05} = 1000 \frac{1 - 0.82270247}{0.05}$$

$a_{\overline{n}|}$ = N \$ 3 545.95

1.4.2 Monto de una Anualidad

Para el caso de calcular el monto de una anualidad será la suma de los montos de cada uno de los pagos, y utilizaremos nuestro diagrama

$$\underset{0}{\vphantom{|}}\text{———}\underset{1}{1000}\text{———}\underset{2}{1000}\text{———}\underset{3}{1000}\text{———}\underset{4}{1000}$$

Por lo tanto considerando los términos del monto a un interés compuesto, nuestro planteamiento será:

$$S_{\overline{n}|} = 1000(1.05)^3 + 1000(1.05)^2 + 1000(1.05)^1 + 1000$$

ó, invirtiendo el orden, tenemos:

$$S_{\overline{n}|i} = 1000 + 1000(1.05)^1 + 1000(1.05)^2 + 1000(1.05)^3$$

Se puede ver que es una progresión geométrica y considerando:

$t_1 = 1000$, el primer término.
$r = 1.05$, que es la razón.
$n = 4$, el número de términos.

Y considerando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica:

$$\Sigma = t_1 \frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{t_1 - t_1 r^n}{1-r}$$

Sustituyendo los términos de la anualidad

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{R - R(1+i)^n}{1-(1-i)} = \frac{R[1-(1+i)^n]}{1-1-i}$$

$$= \frac{R[1-(1+i)^n]}{-1} = R\,\frac{R-(1+i)^n}{-1}$$

Multiplicando la fracción por -1

$$S_{\overline{n}|} = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

recordando nuestro problema sustituimos quedandonos:

$$S_{\overline{n}|} = 1000\,\frac{(1+0.05)^4 - 1}{0.05} = \$\ 4\ 310.12$$

A veces se presentan problemas y tenemos la necesidad de conocer el importe de los pagos periódicos que se deben realizar para cancelar una deuda; o bien cuál es la mejor opción entre varias alternativas dependiendo de las tasas de interés o de los plazos que se dan para recobrar nuestro capital, estos problemas y muchos más se pueden solucionar al conocer qué es una anualidad y manejar de manera apropiada las variables que dependen de ella. Por ejemplo el cálculo de la renta cuando conocemos el monto, o calcular el interés de una anualidad conociendo la renta y el tiempo, etc.

** Cálculo de la renta R cuando se conoce el monto.

Recordando la fórmula: $S_{\overline{n}|i}$

Se obtiene $R = S \dfrac{1}{S_{\overline{n}|i}}$ y tomando en cuenta (2)

$$\frac{1}{S_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

entonces: $R = S \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Un ejemplo:

Calcular los depósitos semestrales necesarios en una cuenta de ahorros que paga el 8% con capitalización semestral, para obtener en 5 años un capital de N$ 20 000.

Nuestros datos son:

$S = N\$\ 20\ 000$

$i = 0.08 \qquad i' = \dfrac{0.08}{2} = 0.04$

$m = 2$

$n = 2\ (5) = 10$

$$R = S \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} = 20\ 000 \frac{1}{S_{\overline{10}|0.04}}$$

$$R = 20000 \frac{0.04}{(1+0.04)^{10} - 1} = 20000\ (0.08329094)$$

$R = N\ \$\ 1\ 665.82$

1.4.3** Cálculo de la renta R cuando se conoce el valor actual.

Tenemos la fórmula $A = R\, a_{\overline{n}|i}$

Se tiene $$R = A \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

tomando en cuenta la ecuación ....(1)

tenemos: $$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

por lo tanto $$R = A \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Un ejemplo de este tipo de problema:

Calcular los pagos por semestre vencido, necesarios para cancelar el valor de N$ 100 000 de una propiedad comprada a 8 años plazo con el interés del 9 % capitalizable semestralmente.

Datos:

$A = 100\ 000$ $\qquad i' = \frac{0.09}{2} = 0.045 \qquad n = 8\ (2) = 16$

$i = 0.09$

$m = 2$

Entonces nuestro problema queda:

$$R = A \left(\frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right)$$

$$R = 100\ 000 \left(\frac{0.045}{1 - (1+0.045)^{16}} \right)$$

$$R = 100\ 000\ (\ 0.08901537)$$

Pagos Semestrales R = N$ 8901 .54

1.4.4 Cálculo del Plazo de una Anualidad

Si desconocemos el plazo o tiempo de una anualidad o de un monto, primero debemos recordar nuestras fórmulas de éstos y despejamos cada uno de ellos.

Por ejemplo para el monto tenemos:

$$S = R\ \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$Si = R(1+i)^n - R$$

$$R(1 + i)^n = Si + R$$

tomamos logaritmos

$$\log R + n \log(1 + i) = \log(Si + R)$$

$$n \log(1 + i) = \log(Si + R) - \log R$$

$$n = \frac{\log(Si + R) - \log R}{\log(1 + i)}$$

Un ejemplo para para ilustrar este tipo de problemas.

¡Cuántos pagos de $43 702.46 a final de mes tendria que hacer el comprador de una lavadora que cuesta $350 000 si dá $75 000 de engache y acuerda pagar 68% de interés capitalizable mensualmente sobre el saldo?

Solución:

$n = ?$

$R = 43\ 702.46$

$A = 350\ 000 - 75\ 000 = 275\ 000$

$i = 0.68/12 = 0.05666667$

Aplicando la fórmula de anualidad y sustituyendo los valores nos resulta:

$$275\ 000 = 43\ 702.46\ \frac{1 - (1.05666667)^{-n}}{0.05666667}$$

$$1 - (1.05666667)^{-n} = \frac{275\ 000(0.05666667)}{43\ 702.46}$$

$$-(1.05666667)^{-n} = 0.35657794 - 1$$

$$(1.05666667)^{-n} = 0.64342206$$

$$\frac{1}{(1.05666667)^n} = 0.64342206\ ;$$

$$(1.05666667)^n = \frac{1}{0.643422} = 1.55418981$$

Aplicamos logaritmos a la igualdad quedando:

$$n \log 1.0566666 = \log 1.55418981$$

$$n = \frac{\log 1.55418981}{\log 1.05666667} = \frac{0.19150406}{0.02393801}$$

$$n = 8$$

Ahora la tasa i puede ser la incógnita, cuando se conocen los demás elementos de una anualidad; por lo general los valores de i los podemos calcular por interpolación, con lo que se obtienen los valores suficientemente aproximados para cualquier propósito. Este método puede ilustrarse con el siguiente ejemplo:

Una Compañia de Seguros ofrece, por un pago inmediato de $90 000, una renta de N$ 5 000 pagadera durante 30 años, al comprador o a sus herederos. ! Qué tasa de interés abona la compañia de seguros?

Datos:

A = 90 000

R = 5 000

n = 30

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{A}{R}$$

Entonces: $$a_{\overline{30}|i} = \frac{90\ 000}{5\ 000} = 18$$

Con este valor, buscamos en tablas para encontrar la $a_{\overline{n}|}$ que se encuentre comprendido el valor de 18. 000 000 y corresponde a la n = 30 con la siguiente i

Para $a_{\overline{30}|}$ = 17.29203330; i = 0.04

Para $a_{\overline{30}|}$ = 18.39204541; i = 0.035

Observese que, mientras los valores de $a_{\overline{30}|}$ aumentan, los valores de i disminuyen.

Para nuestro valor $a_{\overline{30}|}$ =18 calculamos i por interpolación lineal.

a 0.035 corresponde 18.39204541 a i corresponde a 18.000000
a 0.040 corresponde 17.29203330 a 0.04 corresponde 17.29203330

-0.005 es a 1.1001211 como i es a 0.70796670

$$\frac{-0.005}{1.100011211} = \frac{i - 0.040}{0.70796670}$$

$$i - 0.040 = -0.003218$$

$$i = 0.040 - 0.03678$$

por lo tanto i = 3.6782

NOTA:

Para comprender estos conocimientos de esta sección se sugiere comprobar los problemas resueltos y resolver otros problemas que se proponen en el apéndice en la Sección 1.

Ahora consideraremos otro tipo de anualidades que se dividirán en cuatro grupos principales que son:

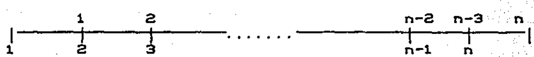
Anualidades Anticipadas
Anualidades Diferidas
Caso General de las Anualidades
Anualidades Contingentes

1.5 ANUALIDADES ANTICIPADAS

Primero consideraremos las anualidades del tipo anticipadas, que corresponderán al caso simple, es decir que el pago coincide con la capitalización, serán los pagos que se efectúan o vencen, al principio de periodo de pago.

Para empezar haremos un diagrama comparando este tipo de anualidades con las vencidas y tenemos:

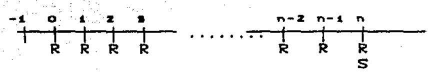
Anualidades VENCIDAS



Anualidades ANTICIPADAS

La notación que se utiliza para las anualidades ANTICIPADAS en el monto o anualidad es:

$\ddot{A}, \ddot{a}_{\overline{n}|}$ $S, S_{\overline{n}|}$



Observemos que, al agregar un último R, se obtiene el monto de una anualidad vencida de R, por periodo, pagadera durante n + 1 periodos su monto es $RS_{\overline{n+1}|i}$; restando a este valor el último R que se había agregado se obtiene el monto de una anualidad anticipada de R, por periodo, pagaderos durante n periodos.

$$S = R\, S_{\overline{n+1}|i} - R$$

$$S = R\,[S_{\overline{n+1}|i} - 1]$$

El mismo resultado puede obtenerse planteando la siguiente ecuación de equivalencia y utilizando como fecha focal (definiendose fecha focal como la fecha en que se evalua o se considera en el tiempo el cálculo del monto o de la anualidad) el final del período $n-1$. Ver el diagrama. En él, se advierte que el pago R en el período $n-1$ puede considerarse como el último pago de una anualidad vencida que se inicia en el período -1.

$$S(1+i)^{-1} = R S_{\overline{n}|i}$$

$S = R S_{\overline{n}|}\,(1+i)$ remplazando el valor $S_{\overline{n}|i}$ se tiene:

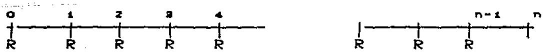
$$S = R\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\,(1+i) = R\,\frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i}$$

$$S = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i}\right] = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

$$S = R\,(S_{\overline{n+1}|i} - 1)$$

$(S_{\overline{n+1}|i} - 1)$ corresponde a una anualidad anticipada de una unidad monetaria, pagada durante n periodos, a la tasa i por período.

Cálculo del valor actual de una anualidad anticipada; retomando el diagrama suprimimos el primer pago R , se considera entonces una anualidad vencida de R, por período, pagadera durante n-1 períodos.



A

Su valor actual es $R a_{\overline{n-1}|i}$ agregando a este valor el primer pago R que se había suprimido, se obtiene el valor actual de una anualidad anticipada de R, por período, pagadera durante n períodos.

$$A = R\, a_{\overline{n-1}|i} + R \qquad = R\,(a_{\overline{n-1}|i} + 1)$$

Este resultado puede obtenerse planteando la siguiente ecuación de equivalencia y utilizando como fecha focal la fecha inicial.

$$A = R\, S_{\overline{n-1}|}\,(1+i)^{-(n-1)} + R$$

$$A = R\,[\, S_{\overline{n-1}|}\,(1+i)^{-(n-1)} + 1\,]$$

$$A = R\,[\,\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i}\,(1+i)^{-(n-1)} + 1\,]$$

$$A = R\,[\,\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1\,]$$

$$A = R\,(\, a_{\overline{n-1}|} + 1)$$

$(\, a_{\overline{n-1}|} + 1)$ es el valor de una anualidad anticipada de una unidad monetaria pagadera, durante n periodos, a la tasa i por periodo.

Ejemplos de anualidades anticipadadas:

Una compañia deposita al principio de cada año N$ 20000 en una cuenta de ahorros que abona el 7% ¿ A cuánto ascenderán los depósitos al cabo de 5 años?

Datos:

R = N$ 20000

$i = 0.07$

$n = 5$

$$S = R\,(\, S_{\overline{n+1}|} - 1)$$

$$S = 20000(\, S_{\overline{6}|0.07} - 1)$$

$$= 20000(\,6.15329074)$$

= N$123 065.81

Una compañía alquila un edificio en N$ 4000 mensuales y propone al propietario pagarle el alquiler anual, a principio de cada año, con la tasa del 12 % convertible mensualmente. Hallar el valor del alquiler anual.

DATOS:

R = N$4000

$i = 0.12 \qquad i' = \dfrac{0.12}{12} = 0.01$

$m = 12$

$n = 12$

$$A = R\,(a_{\overline{n-1}|} - 1) \quad \text{sustituimos}$$

$$A = 4000\,(a_{\overline{11}|0.01} + 1)$$

$$= 4000(11.36762825) = \$\,45\,470.51$$

NOTA:

Para afirmar conocimientos, comprobar los problemas resueltos y resolver los que se proponen en la sección 1.2

1.6 Anualidades Diferidas

Las anualidades diferidas son aquellas en las que el inicio de los cobros o depósitos se pospone para un periódo posterior al de la formalización de la operación. Al igual que con las anualidades anticipadas, tampoco se requieren nuevas fórmulas, ya que se manejan con las mismas expresiones que se han venido utilizando y que se obtuvieron para las anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas. Sólo es necesario hacer las modificaciones pertinentes para tomar en consideración la posposición en el inicio de los pagos de depósitos.

1.6.1 Intervalo de Aplazamiento

Es el tiempo que transcurre entre la fecha inicial o fecha de valoración de la anualidad, y la fecha del primer pago.

Para medir el intervalo de aplazamiento se utiliza como unidad de tiempo que corresponde un periodo de pago. Así por ejemplo: si dentro de 2 años se efectuará el primer pago de una anualidad vencida de N$R semestrales y cuyo plazo es de 3 años tendremos:

Tiempo diferido = 3 periodos semestrales
Tiempo o plazo de la anualidad = 7 periodos
Tiempo total = tiempo diferido más tiempo de la anualidad.

La notación que se usa es:

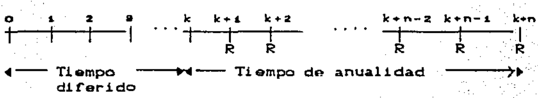
$$k/a_{\overline{n}|i} \qquad k/S_{\overline{n}|i} \quad \text{en anualidades vencidas}$$

$$k/\ddot{a}_{\overline{n}|i} \qquad k/S_{\overline{n}|i} \quad \text{en anualidades anticipadas}$$

En este tipo de problemas se tiene que considerar el análisis de un diagrama que permita encontrar el tiempo diferido, el tiempo de pago, para luego plantear las ecuaciones de equivalencia que conducen a la solución.

1.6.2 Cálculo del Valor Actual de una Anualidad Diferida.

Consideremos una anualidad vencida, diferida k periodos, de N$ R por periodo pagaderos durante n periodos, a la tasa i por periodo. Dibujando un diagrama se tiene:



Hacemos nuestra ecuación de equivalencia y utilizamos como fecha focal el final del periodo k , se tiene, siendo A el valor actual o presente en la fecha inicial,

$$A(1+i)^k = R\, a_{\overline{n|}\,i}$$

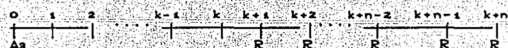
Por lo tanto $A = R(1+i)^{-k}\, a_{\overline{n|}\,i}$

Otro método para calcular el valor de las anualidades diferidas consiste en tratarlas como diferencia, entre dos anualidades no diferidas, así:

tipo I

tipo II

tipo III



El valor actual de I es $A_1 = R\, a_{\overline{k+n|}\,i}$

El valor actual de II es $A_2 = R a_{\overline{k|}\,i}$

El valor actual de III es $A_3 = A_1 - A_2$

$$A_3 = R\, a_{\overline{k+n|}\,i} - R\, a_{\overline{k|}\,i}$$

De donde el valor actual A de la anualidad diferida k periodos es:

$$A = R\,(\, a_{\overline{k+n|}\,i} - a_{\overline{k|}\,i}\,)$$

Por otro lado tenemos la siguiente igualdad:

$$a_{\overline{h+k|}\,i} = a_{\overline{h|}\,i} + (1+i)^{-h}\, a_{\overline{k|}\,i}$$

la cual demostraremos:

$$a_{\overline{h+k}|} = \frac{1-(1+i)^{-h-k}}{i}$$

$$= \frac{\overbrace{1-(1+i)^{-h}+(1+i)^{-h}}^{\text{sumamos cero}}-(1+i)^{-h-k}}{i}$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-h}}{i} + \frac{(1+i)^{-h}\,[1-(1+i)^{-k}]}{i}$$

$$a_{\overline{h+k}|} = a_{\overline{h}|i} + (1+i)^{-h}\,a_{\overline{k}|i}$$

Sustituyendo esta igualdad en nuestra ecuación tenemos:

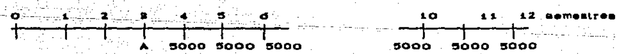
$$A = R\,[\,a_{\overline{k}|i} + (1+i)^{-k}\,a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{k}|i}\,]$$

$$A = R\,(1+i)^{-k}\,a_{\overline{n}|i}$$

Un ejemplo para ilustrar este tipo de anualidad.

Calcular el valor actual de una renta vencida de N$5000 semestrales, si el primer pago debe recibirse dentro de 2 años y el último, dentro de 6 años, si la tasa de interés es del 8 %, convertible semestralmente.

Dibujemos su diagrama



El intervalo diferido es de 3 periodos y el tiempo de pago tiene 9 periodos

$$A = R\,(\,a_{\overline{k+n}|} - a_{\overline{k}|i}\,)$$

DATOS:

$R = 5000$
$j = 0.08$
$m = 2$
$i = 0.04$
$k = 3$
$n = 9$

$$A = R\,(1+i)^{-k} a_{\overline{n}|i}$$

$$A = 5000(\, a_{\overline{12}|0.04} - a_{\overline{3}|0.04}\,)$$

$$A = 5000(9.38507376 - 2.7709103) =$$
$$= 5000(6.60998273)$$
$$= \$\ 33\ 049.91$$

Otra forma, utilizando la siguiente fórmula

$$A = R\,(1+i)^{-k}\ a_{\overline{n}|i}$$

$$A = 5000(1+0.04)^{-3}\ a_{\overline{9}|0.04}$$

$$A = 5000(0.88899636)(7.43533161) = \$33\ 049.91$$

1.6.3 Cálculo del Monto de una Anualidad Diferida

Para el cálculo del monto de una anualidad diferida es el propio monto de la anualidad, correspondiente al tiempo de pago.

Para el cálculo de la renta se despeja, según sea el caso, el valor R en las fórmula que ya tenemos

ejemplo:

$$R = \frac{A\,(1+i)^{k}}{a_{\overline{n}|i}}$$

o bien utilizando la fórmula $A = R\,(\,a_{\overline{n+k}|} - a_{\overline{k}|i}\,)$

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n+k}|i} - a_{\overline{k}|i}}$$

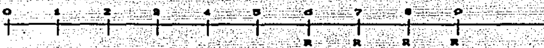
Un ejemplo para ilustrar este tipo de problemas:

Al cumplir un joven 12 años, su padre deposita N$50 000 en un fondo universitario que abona el 8% , para que al cumplir el hijo 18 años, reciba una renta anual suficiente para costear sus estudios universitarios, durante 4 años. Hallar el costo anual de los estudios.

DATOS

$A = 50\ 000 \qquad i = 0.08 \qquad k = 5 \quad n = 4$

Considerando el diagrama de este problema tenemos:



$$R = \frac{50\ 000}{a_{\overline{5+4}|0.08} - a_{\overline{5}|0.08}} = \frac{50\ 000}{6.24688791 - 3.992710004}$$

$$R = \frac{50\ 000}{2.25417787} = \text{N\$ } 422\ 181.04$$

1.6.4 CALCULO DEL TIEMPO.

Los problemas del cálculo de tiempo son menos frecuentes; hay dos tiempos distintos que pueden calcularse: el tiempo diferido y el tiempo de la anualidad.

Para el tiempo diferido se tiene

$$A = R\ (1+i)^{-k}\ a_{\overline{n}|i}$$

$$(1+i)^{-k} = \frac{A}{R\ a_{\overline{n}|i}}$$

$$(1+i)^{k} = \frac{R\ a_{\overline{n}|i}}{A}$$

Luego se procede utilizando logaritmos o interpolando.
Para el tiempo de la anualidad, se tiene:

$$A = R\ (1+i)^{-k}\ a_{\overline{n}|i}$$

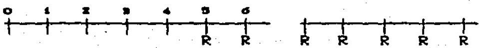
$$a_{\overline{n}|i} = \frac{A(1+i)^{k}}{R}$$

Luego se procede por interpolación o aplicando logaritmos.

Un ejemplo para ilustrar:

Una persona deposita en un banco que abona el 7%, la suma de N$100 000, para que, dentro de 5 años, le pague una renta de N$20 000 anuales, hallar el número de pagos.

$$A = R\,(1+i)^{-k} a_{\overline{n}|i}$$



A = 100 000 R = 20 000 i = 0.07 k= 4

Entonces:

$$100\ 000 = 20\ 000\ (\ 1.07)\ a_{\overline{n}|0.07}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{100\ 000(1+0.07)^{4}}{20\ 000} = 5(1.31079601)$$

$$= 6.55398005$$

Este valor está comprendido entre n=9 con valor de 6.515232225 y para n =10 con valor de 7.02358154; luego por interpolación

a 10 corresponde 7.02358154		a n corresponde 6.55398005	
a 9 corresponde 6.51523225		a 9 corresponde 6.51523225	
1 es a	0.50834929	como n-9 es a	0.03874780

$$\frac{1}{0.50834929} = \frac{n-9}{0.03874780}$$

$$n-9 = \frac{0.03874780}{0.50834929} = 0.0762227$$

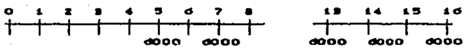
$$n = 9.0762227$$

Considerando lo práctico son 9 pagos anuales de N$20000 y un pago al final del décimo año de N$ 20 000(0.0762227) = N$1524.46

1.6.5 CALCULO DE LA TASA

Pocas veces se presentan problemas de este tipo en caso de ser anualidades diferidas. Estos problemas presentan ecuaciones de grado superior; ejemplo de ello:

Una persona entrega N$ 39 000 a un banco con el objeto de que, dentro de 5 años, le inicie el pago de 12 anualidades de N$ 6000. Hallar la tasa de interés que abona el banco.



$$A = R\,(a_{\overline{n+k}|i} - a_{\overline{k}|i})$$

DATOS

A= 39 000

R = 6 000

k = 4

n = 12

$$39000 = 6000(a_{\overline{12+4}|i} - a_{\overline{4}|i})$$

$$a_{\overline{16}|i} - a_{\overline{4}|i} = \frac{39000}{6000} = 6.5$$

Para la tasa del 6% tenemos 6.64078986 y para la tasa del 6.5% tenemos 6.34196558; si se quiere más aproximación se utiliza la interpolación lineal.

NOTA:

Para comprender esta parte se sugiere comprobar y resolver los problemas que se presentan en la sección 1.3

1.7 ANUALIDADES GENERALES

1.7.1 Introducción

Analizaremos las anualidades Generales, recordando que éstas son aquellas anualidades en las que el periodo de pago no coincide con el período de capitalización.

La fórmula más sencilla de resolver las anualidades generales es modificarlas para que se ajusten al caso simple y, luego utilizar las fórmulas ya conocidas de éstas para encontrar los valores deseados.

Existen dos principales maneras de convertir anualidades generales en anualidades simples:

1.- Encontrando la tasa de interés equivalente

2.- Encontrando la renta, o pago periódico, equivalente.

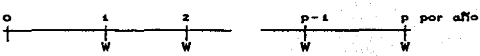
Hay dos casos de anualidades generales:

1. El período de pago es más largo que el periodo de capitalización o, al revés.

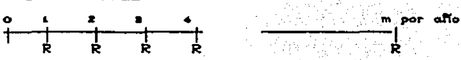
2. El período de capitalización es más largo que el período de pago.

Dibujemos el diagrama de una anualidad general ordinaria con pagos W, p veces al año a la tasa efectiva i' por período. Y dibujemos el de una anualidad simple ordinaria con m pagos por años

CASO GENERAL



CASO SIMPLE



Para la anualidad general, se tiene: pagos = W, número de pagos = p ; tasa efectiva por periodo = i' (designamos por i', para distinguirla de la tasa i de la anualidad simple).

Para la anualidad simple, se tiene: pagos = R ; número de pagos = m; tasa efectiva por periodo = i.

Monto de la anualidad general, al final del año:

$$S = W\, S_{\overline{p}|i'}$$

Monto de la anualidad simple, al final del año:

$$S = R\, S_{\overline{m}|i}$$

Los montos deben ser iguales o sea:

$$R\, S_{\overline{m}|i} = W\, S_{\overline{p}|i'}$$

o sea

$$R\,\frac{(1+i)^m - 1}{i} = W\,\frac{(1+i)^p - 1}{i'}$$

Las tasas de interés deben de ser equivalentes:

$$(1+i)^m = (1+i')^p$$

luego

$$(1+i)^m - 1 = (1+i')^p - 1$$

o sea

$$R\,\frac{1}{i} = W\,\frac{1}{i'}$$

Para expresar el valor de i' en función de i utilizamos la ecuación:

$$(1+i)^m = (1+i')^p$$

$$i' = (1+i)^{m/p} - 1$$

Sustituyendo $R\,\dfrac{1}{i} = W\,\dfrac{1}{(1+i)^{m/p} - 1}$

se tiene $R = W\,\dfrac{1}{(1+i)^{m/p} - 1}$

y recordando que: $\dfrac{i}{(1+i)^n - 1} = \dfrac{1}{S_{\overline{n}|i}}$

entonces $\dfrac{i}{(1+i)^{m/p}-1} = \dfrac{1}{s_{\overline{m/p}|i}}$ y reemplazando

$$R = W\frac{1}{s_{\overline{m/p}|i}} \text{ y considerando } k = m/p$$

$$R = W\frac{1}{s_{\overline{k}|i}}$$

Con este desarrollo demostramos que las fórmulas en que intervienen los valores $s_{\overline{n}|i}$ y $a_{\overline{n}|}$ son válidas para n entero o no . Si m/p no es entero, por lo general es una fracción que s debe de reducir lo más posible, por ejemplo p=12 y m=4 , m/p sería 4/12 o bien 1/3.

Para ayudarnos a comprender exponemos un problema:

1.7.2 Caso 1. El periodo de pago es más prolongado que el de capitalización.

Encontrar el monto de un conjunto de 4 pagos trimestrales de N$ 50 000, si el interés es del 66 % anual convertible mensualmente.

Sn = ?
R = N$ 50 000
n = 4 trimestres
i = 0.66/12 = 0.055 mensual

Se tomará que el pago es en forma vencida y que el periodo de pago es de tres meses y el de interés es de un mes, tenemos un caso de anualidad general con periodo de pago más largo que el de capitalización y utilizaremos los dos métodos mencionados para resolverla:

1.7.2.1 a) Encontrando la tasa de interés equivalente.

En cada uno de los trimestres hay tres periodos de capitalización. Si consideramos un sólo trimestre tendríamos que encontrar la tasa trimestral efectiva que es equivalente a una tasa mensual efectiva del 5.5 % y entonces:

$$i' = (1 + i)^{p} - 1$$

$$i' = (1.055)^{3} -1 = 1.17424138 - 1 = 0.17424138$$

donde

i' = la tasa efectiva por periodo de la anualidad general; en este caso es la tasa efectiva trimestral (0.17424138)

p = al número de periodos de interés por periodo de pago; 3 en este caso.

Ahora, habiendo obtenido la tasa efectiva por trimestre, hemos convertido la anual en general en una simple, con:

R = N$50 000
n = 4
Sn = ?
i'= 0.7424138

y se resuelve aplicando la fórmula conocida del monto para una anualidad simple:

$$S_{\overline{n}|i} = R \frac{(1+i)^{n} - 1}{i'}$$

$$S_{\overline{n}|i} = 50\ 000\ [1.17424138]^{4} \quad -1$$

$$S_{\overline{n}|i} = 50\ 000\ (\ 5.17217849) = \$\ 258\ 608.92$$

1.7.2.2 b) Encontrando la renta equivalente

Cómo se planteó el interés capitalizable cada mes, tendríamos que encontrar la renta mensual durante tres meses que fuera equivalente a una renta trimestral de N$ 50 000 y, como puede verse es una anualidad simple con:

M = N$ 50 000 (la renta de uno de los períodos de la anualidad general)
i = 0.055
p = 3
R' = ?

y aplicando de nuevo la fórmula ya conocida :

$$S_{\overline{n}|i} = R\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

Pero con la nueva simbología:

$$S_{\overline{n}|i} = W\,\frac{(1+i)^{p}-1}{i} \qquad \text{donde}$$

W es la renta mensual equivalente a una renta trimestral de N$ 50 000.
Entonces

$$50\,000 = W\,\frac{(1.055)^{3}-1}{.055}$$

$$W = 50\ 000 / 3.168025 = \$\,15\ 782.70373$$

Ahora hay que determinar el monto de estas rentas equivalentes para el plazo completo de la anualidad:

M =
R = 15 782.70373
n = 4 trimestres por 3 meses cada uno = 12
i = 0.055

$$Sn = 15\ 782.70373\,\frac{(1.055)^{12}-1}{0.055}$$

$$= 15\ 782.70373(16.38559065)$$

$$Sn = N\$\ 258\ 608.92$$

Que es el mismo resultado que se obtuvo mediante el otro método.

1.7.3 Caso 2. El período de pago es más corto que el de capitalización

a) Encontrando la tasa de interés equivalente

Como las rentas son mensuales, es necesario encontrar el interés efectivo mensual equivalente al 30 % semestral también efectivo:

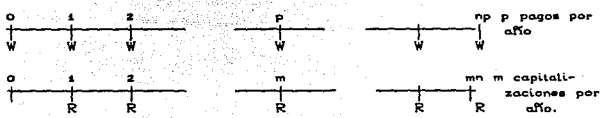
$(1 + i)^{6} = 1.30 \qquad M = 3067732.31$

que es practicamente igual al resultado anterior.

1.7.4 Anualidades Generales Anticipadas.

Se refiere a las operaciones en las que el pago o depósitos se hace al principio del período de pago. El término ''Generales '' señala que el período de pago y el de capitalización no coinciden.

La solución se obtiene convirtiendo la anualidad general en una anualidad simple y vencida equivalente.



Convertimos la anualidad general anticipada en una anualidad equivalente, simple, vencida.

El problema de la equivalencia se simplifica, si quitamos el primer pago W y agregamos un pago W al final; así, se tiene una anualidad vencida y, de acuerdo con lo demostrado se tiene:

$$R = W \frac{1}{s_{\overline{m/p}|\,j/m}}$$

$$R\, s_{\overline{mn}|\,j/m} = S' = W \frac{1}{s_{\overline{m/p}|\,j/m}} \cdot s_{\overline{mn}|\,j/m}$$

Al monto S', debemos quitarle el último pago W y agregamos el monto del primer pago acumulado en los mn periodos de capitalización a la tasa j/m, para obtener el monto S de la anualidad general anticipada.

$$S = S' + W(1 + j/m)^{mn} - W \quad \text{sustituyendo el valor de S'}$$

$$S = W \frac{1}{s_{\overline{m/n}|j/m}} s_{\overline{mn}|j/m} + W(1+j/m)^{mn} - W$$

$$S = W \left[\frac{1}{s_{\overline{m/p}|j/m}} s_{\overline{mn}|j/m} + (1+j/m)^{mn} - 1 \right]$$

$$S = W \left[\frac{j/m}{(1 + j/m)^{m/p} - 1} \cdot \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j/m} + (1+j/m)^{mn} - 1 \right]$$

$$S = W \left[\frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^{m/p} - 1} + (1+j/m)^{mn} - 1 \right]$$

$$S = W \left[\frac{(1+j/m)^{m/p+mn} - (1+j/m)^{m/p}}{(1+j/m)^{m/p} - 1} \right]$$

o sea

$$S = W(1+j/m)^{m/p} \cdot \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1+ j/m)^{m/p} - 1}$$

o en otra forma $S = W(1+j/m)^{m/p} \cdot \frac{1}{s_{\overline{m/p}|j/m}} \cdot s_{\overline{mn}|j/m}$

Para el cálculo del valor actual, se tiene:

$$A = S(1+j/m)^{-mn}$$

Sustituyendo S

$$A = W(1+j/m)^{m/p} \frac{(1+ j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^{m/p} - 1} (1+j/m)^{-mn}$$

$$A = W(1+j/m)^{m/p} \frac{1 - (1+j/m)^{-mn}}{(1+ j/m)^{m/p} - 1}$$

o en otra forma

$$A = W(1+j/m)^{m/p} \frac{1}{s_{\overline{m/p}|j/m}} a_{\overline{mn}|j/m}$$

y tomando en cuenta que relación hay entre m y p, se pueden modificar estas fórmulas.

Para el caso de m = p

$$S = W(1 + j/m)^{m/m} \frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m/m}-1}$$

$$S = W(1+j/m) \frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)-1} = W \frac{(1+j/m)^{1+mn}-(1+j/m)}{j/m}$$

de donde

$$S = W\left[\frac{(1+j/m)^{mn+1}-1}{j/m} - 1\right] \underline{III}$$

Entonces:

$$S = W(S_{\overline{mn+1}|j/m} - 1)$$

Un ejemplo de este tipo de anualidades es:

¿ Cuál es el valor actual de un conjunto de 25 pagos semestrales anticipados de N$ 100 000 si el interés es del 69% capitalizable cada cuatro meses:

Solución:

En primer lugar vemos la tasa efectiva equivalente por semestre; el 69 % capitalizable cada 4 meses equivale al 23 % efectivo cada 4 meses y la tasa efectiva equivalente por semestre es

$$i' = 1.23^{3/2} - 1 = 0.36413599$$

La fórmula para determinar el valor actual de esta anualidad tenemos:

$$C = 100\,000 + 100\,000 \frac{1 - (1.36413599)^{-24}}{0.36413599}$$

$$= 100\,000\,(1 + 2.74463399)$$

$$C = \$\ 374\,463.40$$

1.7.5 Anualidades Generales Diferidas

Son aquellas en las que el periodo de pago y de interés no coinciden y en las que, además se pospone el inicio de los pagos o depósitos para un periodo posterior al de la realización de la operación.

Un ejemplo de esta anualidad es:

Al cumplir Juan, 21 años de vida, deposita N$ 500 000 en una cuenta de inversión que produce el 62 % capitalizable mensualmente. Si desea comenzar a hacer retiros trimestralmente de N$ 800 000 el dia de su cumpleaños número 25, ¿ qué edad tendrá al realizar el último retiro menor de N$ 800 000, 3 meses después de haber hecho el último retiro completo?

Solución:

La tasa equivalente:

$$0.62/12 = 0.05166667 \text{ mensual}$$

$$(1.05166667)^{3} - 1 = 0.16314626 \text{ trimestral}$$

El valor de su depósito un trimestre antes de cumplir 25 años.

$$500\,000\ (1.16312626)^{15} = 4\,824\,862.41$$

La anualidad simple equivalente

$$4\,824\,862.41 = 800\,000\ \frac{1 - (1.16314626)^{-n}}{0.1631462}$$

$$(1.16314626)^{-n} = 1 - \frac{(4824862.41)(0.16314626)}{800\,000} =$$

$$= 0.01605218$$

$$n = -\frac{\log\ 0.01605218}{\log\ 1.16314626} = 27.34035768$$

Haremos entonces 27 retiros completos y un vigésimo octavo de menor valor . Por ello, al hacer este último retiro tendrá 25 años más 27 trimestres; o sea 31 años y 9 meses.

NOTA:

Para comprender esta sección, comprobar y resolver los problemas que se anexan en el apéndice en la sección

1.8 ANUALIDADES VARIABLES

Si ocurre que los pagos R no son iguales, se dice que la anualidad es una anualidad variable.

Una anualidad variable es aquella cuyos pagos son diferentes entre sí.

Si los n pagos son $R_1, R_2, \ldots, R_n$ y se trata de una anualidad variable, simple, cierta, vencida. Se le considera anualidad creciente si $R_1 < R_2 < R_3 < \ldots < R_n$, decreciente en caso contrario.

El monto S a la tasa i por periodo es:

$$S = R_1(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + \ldots + R_{n-1}(1+i) + R_n =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} R_h(1+i)^{n-h}$$

El valor actual a la tasa i por periodo es:

$$A = R_1(1+i)^{-1} + R_2(1+i)^{-2} + \ldots + R_n(1+i)^{-n} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} R_h (1+i)^{-h}$$

Cuando los pagos varian de acuerdo con una ley que permita determinar cada uno de ellos, como función de los números naturales; es posible reducir los términos de la sumatoria y obtener expresiones más simples para el cálculo tanto en el monto como del valor actual. Así, por ejemplo, cuando los pagos varian en progresión aritmética o en progresión geométrica.

Un ejemplo de anualidad cuyos pagos varian en forma de progresión geométrica.

Un agricultor arrienda por 15 años un terreno para un cultivo que tarda 5 años en entrar en plena producción recogiendose las primeras cosechas en el tercer año por estas razones las condiciones del contrato de arriendo se estipulan así: N$ 25000 al final de cada año durante los primeros tres años, N$30 000 al final del cuarto, N$40 000 al final del quinto, y luego N$60 000 al final de cada uno de los 10 años siguientes. Hallar, con la tasa del 8% el monto pagado al finalizar el contrato.

Solución:

Tomamos en cuenta: $\sum_{h=1}^{n} R_h\ (1+i)^{n-h}$

Datos

$h=1$, $n=15$; $R_1 = R_2 = R_3 = 25\ 000$; $R_4 = 30\ 000$

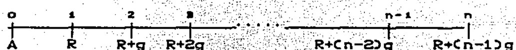
$R_5 = 40\ 000$; $R_6 = R_7 = \ldots\ R_{15} = 60\ 000$; $i = 0.08$

$$S = 25000(1+0.08)^{14} + 25000(1+0.08)^{13} + 25\ 000(1+0.08)^{12} + $$
$$+ 30\ 000(1+0.08)^{11} + 40\ 000(1+0.08)^{10} + 60000(1+0.08)^{9} + $$
$$+ 60000(1+0.08)^{8} + \ldots + 60000$$

$$S = 25000[\ 2.93719362 + 2.71962373 + 2.51817012] + $$
$$+30000(2.2331639) + 40000\ (\ 2.15892500) + 60000(14.48656247)$$
$$= N\$\ 1\ 229\ 875$$

Anualidades cuyos pagos varian en progresión aritmética.

En las anualidades cuyos pagos varian en progresión aritmética, la cantidad en que aumentan o disminuyen los pagos (razón de la progresión aritmética), recibe el nombre de gradiente



Separando la gradiente, se tiene para su valor actual que designamos AG

$$AG = g(1+i)^{-2} + 2g(1+i)^{-3} + \ldots + (n-2)g(1+i)^{-(n-1)} + $$
$$+ (n-1)g(1+i)^{-n}$$

Multiplicando AG por (1+i) y restando AG, se obtiene:

$$AG\ (i) = g(1+i)^{-1} + g(1+i)^{-2} + g(1+i)^{-3} + \ldots + g(1+i)^{-(n-1)} + $$
$$+ g(1+i)^{-n} - ng(1+i)^{-n}$$

$$AG = \frac{g}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n\ (1+i)^{-n}\right]$$

1.9 ANUALIDADES CONTINUAS

Las anualidades pueden analizarse desde dos puntos de vista, según que el pago sea continuo o el interés sea continuo.

Las anualidades de pago continuo son aquellas cuyo periodo de pago es menor, que cualquier cantidad positiva arbitrariamente escogida. En estos casos, se dice que el dinero se recibe en flujo continuo, durante el periodo de capitalización.

En las fórmulas $S = W \cdot \frac{1}{s_{\overline{m/p}|i}} \cdot s_{\overline{n}|i}$

Si el pago se efectua en forma continua, entonces $P \to \infty$

Para el análisis, modificamos la fórmula del monto, expresandola $Wp = T$, pago total en el periodo de capitalización.

$$S = \frac{Wp}{p} \cdot \frac{1}{s_{\overline{m/p}|i}} \cdot s_{\overline{n}|i}$$

$$= T \frac{1}{p\, s_{\overline{m/p}|i}} s_{\overline{n}|i} = T \frac{i}{p[\,(1+i)^{m/p} - 1\,]} \cdot s_{\overline{n}|i}$$

$\lim_{p\to\infty} p\,[\,(1+i)^{m/p} - 1\,] = \lim_{p\to\infty} \frac{(1+i)^{m/p} - 1}{1/p}$ aplicando la Regla L'Hopital se tiene:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{d/dp\,[\,(1+i)^{m/p} - 1\,]}{d/dp\ (1/p)} = \lim_{p\to\infty} \frac{(1+i)^{m/p}(-m/p^2)\ln(1+i) - 0}{-1/p^2}$$

$$\lim (1+i)^{m/p}\ m \cdot \ln(1+i) = m \cdot \ln(1+i)$$

de donde $\lim S = T \frac{i}{m \cdot \ln(1+i)} s_{\overline{n}|i}$

En la misma forma se obtiene:

$$\lim A = T \frac{i}{m \cdot \ln(1+i)} \cdot a_{\overline{n}|i}$$

1.10 ANUALIDADES A INTERESES CONTINUOS

En este caso, se efectúa un número finito de pagos por año, en tanto que el interés capitaliza en forma continua.

Sustituyendo $i = j/m$; $n = tm$ en que t es el tiempo total en años, se tiene:

$$S = W \cdot \frac{1}{s_{\overline{m/p}|i}} \cdot s_{\overline{n}|i} = W \cdot \frac{1}{s_{\overline{m/p}|j/m}} \cdot s_{\overline{m}|j/m} =$$

$$W = \frac{(1 + j/m)^{tm} - 1}{(1 + j/m)^{m/p} - 1}$$

$$\lim_{p \to \infty} (1 + j/m)^{tm} = \lim_{p \to \infty} (1 + j/m)^{m/j \; tj} = \lim_{p \to \infty} [(1 + j/m)^{m/j}]^{tj}$$

$$\lim_{m \to \infty} (1 + j/m)^{m/j} = e$$

de donde $\lim_{m \to \infty} [(1 + m/j)^{m/j}]^{tj} = e^{tj}$; en forma análoga se obtiene: $\lim_{m \to \infty} [(1 + j/m)^{m/p}] = \lim_{m \to \infty} [1 + j/m)^{m/j}] = e^{j/p}$

de donde:

$$\lim_{m \to \infty} S = W \frac{e^{jt} - 1}{e^{j/p} - 1}$$

En la misma forma, se obtiene para el valor actual A

$$\lim_{m \to \infty} A = W \frac{1 - e^{-jt}}{e^{j/p} - 1}$$

Un ejemplo: Calcular el monto al cabo de un año de una renta mensual de N$ 1000, a la tasa del 6 % con capitalización continua.

$$\lim S = W \frac{e^{jt} - 1}{e^{j/p} - 1} \quad ; \; W = 1000; \; j = 0.06 \; t = 1 \; ; p = 12$$

$$\lim S = 1000 \frac{e^{0.06} - 1}{e^{0.06/12} - 1} = 1000 \frac{e^{0.06} - 1}{e^{0.005} - 1}$$

$$y = e^{0.06} \qquad \log y = 0.06 \log e = 0.06(0.4342945) = 0.02605767$$

$$y = 1.06184 \qquad x = e^{0.005} \quad \text{por tanto } x = 1.005012$$

$$\lim S = \frac{1.06184 - 1}{1.005012 - 1} = \frac{0.06184}{0.005012} = \text{N\$ } 12\,338.39$$

1.11 ANUALIDADES A INTERES CONTINUO CON PAGOS EN FLUJO CONTINUO.

Sustituyendo $T = pW$ pagos totales en el año ; $n=tm$ en que t es el tiempo total en años, se tiene:

$$S = W \frac{1}{S_{\overline{m/p}|i}} S_{\overline{n}|i} = T \frac{(1+j/m)^{tm} - 1}{p\,[(1+j/m)^{m/p} - 1]}$$

recordando que $\lim\limits_{p \to \infty} (1 + j/m)^{tm} = e^{jt}$; en tanto para el denominador tenemos:

$$\lim p\,[\,(1 + j/m)^{m/p} - 1] = \lim_{p \to \infty} \frac{(1+j/m)^{m/j\,j/p} - 1}{1/p}$$

$$= \lim_{p \to \infty} \frac{e^{j/p} - 1}{1/p} \quad \text{y aplicando la Regla de L'Hopital para:}$$

$$\lim_{p \to \infty} \frac{e^{j/p} - 1}{1/p} \quad \text{se tiene} \lim_{p \to \infty} \frac{e^{j/p} - 1}{1/p} = \lim_{p \to \infty} j e^{j/p} = j$$

$$\text{entonces} \lim_{m,p \to \infty} S = T \frac{e^{jt} - 1}{j}$$

En la misma forma se tiene, para el valor actual A

$$\lim A = T \frac{1 - e^{-jt}}{j}$$

NOTA:

Para comprender esta sección, verificar y resolver los problemas que se proponen en la sección 1.5

Capitulo II

2. Anualidades Contingentes

2.1 Introducción

Una anualidad contingente es aquella en la que su fecha de inicio o la de terminación o ambas, dependen de algún suceso que se sabe va a ocurrir, pero no se sabe cuando.

Un ejemplo muy común de una anualidad contingente sería el pago de una pensión a una viuda por motivo del fallecimiento de su esposo ; así hay otros ejemplos.

Una renta vitalicia es una anualidad que se paga a una persona a partir de cierta fecha y mientras vive y se le podría denominar anualidad vitalicia.

Una anualidad contingente temporal es aquella en la que se paga un número fijo de rentas, a diferencia de una renta durante todo el tiempo que la persona viva.

Un dotal puro es un compromiso de pagar a una persona determinada cantidad en una fecha futura, siempre y cuando este viva para recibirla.

Son muy númerosas las aplicaciones y variaciones de las anualidades contigentes y, de hecho, su estudio exhaustivo compete el área del calculo actuarial.

2.2 Valor Actual de un Dotal Puro.

Un dotal puro es una promesa de pagar una cantidad determinada a una fecha futura, si el beneficiario continua con vida .

Ahora el valor actual de una cantidad pagadera a futuro está dado por:

$$A = S (1 + i)^{-n}$$

Por ejemplo cuál es el valor actual de N$ 500 000 pagaderos dentro de 5 años al 72% efectivo anual es:

$$A = 500\ 000\ (1.72)^{-5}$$
$$A = 500\ 000\ (0.06642901) = N\$\ 33\ 214$$

Por otro lado, la probabilidad de que una persona que tiene x años de edad permanezca viva a los x+n años está dada por:

$$_{n}P_{x} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}}$$

y si nos preguntaramos , ! cuál es la probabilidad de que una persona que tiene ahora 33 años de edad llegue con vida a los 38 años la solución :

$$l_x = l_{33} = 9633282$$
$$l_{x+n} = l_{38} = 9\ 492\ 626$$
$$nPx = \frac{9\ 492\ 626}{9\ 633\ 282} = 0.98539895$$

Combinando los resultados tenemos:

$$S\ (1 + i)\ {}_{n}P_{x} = 33\ 214.50\ (0.98539895)$$
$$= N\$32\ 729.53$$

2.3 Anualidades Vitalicias Vencidas

Podemos considerar que una anualidad vitalicia es un conjunto de dotales puros y, por ello :

El valor actual de una anualidad contingente puede contemplarse como la suma de los valores actuales de cada uno de los dotales.

Si denotamos por a_x el valor actual de una anualidad vitalicia ordinaria de $ 1 por año para una persona de edad x y,dado que hemos utilizado el símbolo $_{n}E_{x}$ para representar el valor actual de un dotal puro unitario, el valor actual de la anualidad sería:

$$a_x = {}_1P_x + {}_2P_x + {}_3P_x + {}_4P_x + \ldots \text{hasta } x = 99$$

$$_nE_x = (1 + i)^{-n} \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Entonces

$$a_x = (1 + i)^{-1} \frac{l_{x+1}}{l_x} + (1 + i)^{-2} \frac{l_{x+2}}{l_x}$$

(hasta el fin de la tabla)

$$= \frac{(1 + i)^{-1} l_{x+1} + (1 + i)^{-2} l_{x+2} + \ldots}{l_x}$$

(hasta el fin de la tabla)

Un ejemplo: Calcular el valor de la prima neta única de una renta vitalicia ordinaria de $20 000.00 anuales, para una persona de 35 años. La tasa del 2 1/2%

$$\text{tomando } a = \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_{36}}{D_{35}} = \frac{8\ 128\ 447.4}{381\ 996}$$

$$a = 21.278882$$

Para el valor actual de la renta vitalicia de $20 000 se tiene:

$$A = 20\ 000\ a_{35} = 20\ 000\ (\ 21.278882) = N\$\ 425\ 577.64$$

2.4 Anualidades Vitalicias Anticipadas

Una anualidad vitalicia anticipada es un conjunto de pagos (anuales) pagaderos a una persona de x años de edad mientras vive. Como los pagos se hacen al principio de cada año, la anualidad es anticipada.

Y su valor actual es también la suma de sus valores actuales de un conjunto de dotales puros; en este caso también, para simplificar el análisis supondremos un pago de $ 1 por anticipado y utilizaremos el símbolo $\ddot{a}_x$ para denotar el valor actual de una anualidad vitalicia anticipada de $ 1 anuales de una persona de edad x, pagadera mientras viva.

Como el primer pago se hace al momento de realizar la operación y como se le paga en tanto viva, el valor actual de esta anualidad es un pago al momento de formalizar la operación más el valor actual de una anualidad contingente vencida y unitaria, o

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

sustituyendo $a_x = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$ tenemos

$$\ddot{a}_x = 1 + N_{x+1}/D_x = D_x + N_{x+1}/D_x$$

$$= \frac{D_x + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Un ejemplo: Hallar la prima neta única de una renta vitalicia inmediata de N$ 10 000, para una persona de 30 años de edad. Utilizando la tasa del 2.5 %

utilizando x= 30 en la fórmula $\ddot{a} = \dfrac{N_{30}}{D_{30}} = \dfrac{10\ 594\ 280}{440\ 801} =$

$\ddot{a}_{30}$ = 24.034 156 y multiplicando por $ 10 000, se tiene el valor de la prima pedida.

$$A = 10\ 000\ \ddot{a}_{30} = 10\ 000(24.034156) = N\$\ 240\ 341.56$$

2.5 Anualidades Vitalicias Diferidas

Son las anualidades pagaderas a una persona de x años de edad pero posponiendo el inicio del pago durante k- años . Se pueden presentar dos casos:

* Que el primer pago se haga unos años después de expirar el periodo de aplazamiento (k) en cuyo caso tendríamos una anualidad vitalicia diferida vencida.

* Que el primer pago se haga al momento de expirar el periodo de aplazamiento. En este caso se tiene una anualidad vitalicia diferida anticipada.

Analizaremos los dos casos por separado.

2.6 ANUALIDADES VITALICIAS DIFERIDAS VENCIDAS

A una persona de edad x se le va a pagar una anualidad de $1 anuales. El primer pago se realizará después de k años y, como se trata de una anualidad vencida, el primer pago se hace un año después de vencer el periodo de aplazamiento, o sea el año k+1 . Para denotar el valor actual (prima neta única) de una anualidad vitalicia vencida de $1 , diferida durante k años . Tenemos entonces que:

$$k/ a_x = \frac{{}_{k+1}E_x + {}_{k+2}E_x + {}_{k+3}E_x \text{ hasta el final de la tabla}}{l_x}$$

$$= \frac{(1+i)^{-(x+k+1)} l_{x+k+1} + (1+i)^{-(x+k+1)} l_{x+k+2} + \text{ hasta el final de la tabla}}{l_x}$$

multiplicando tanto el numerador como el denominador de la expresión anterior por $(1+i)^{-x}$

$$k/a_x = \frac{(1+i)^{-(x+k+1)} l_{x+k+1} + (1+i)^{-(x+k+2)} l_{x+k+2} +}{(1+i)^{-x} l_x}$$

$$= \frac{D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + D_{x+k+3} + \text{ hasta el final de tabla}}{D_x}$$

Por lo que:

$$k/a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

Tomando de nuevo en cuenta, el valor actual de una anualidad vitalicia vencida de $ R anuales, pagadera a una persona de edad x y diferida durante k años es:

$$A = R k/a_x$$

$$A = R \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

Un ejemplo: Hallar la prima neta única que debe de pagar una persona de 20 años de edad, para obtener una anualidad vitalicia de N$ 10 000, si el primer pago lo recibirá un año después de cumplir 55 años, utilizando la tasa de 2.5% .

Para nuestros datos k= 35 ; x= 20; i= 0.025 se tiene

$$_{35/}a_{20} = \frac{N_{20+35+1}}{D_{20}} = \frac{N_{56}}{D_{20}} = \frac{2\ 560\ 828.2}{580\ 662} = 4\ 410\ 187$$

Multiplicando por N$ 10 000 se obtiene la prima neta pedida

A = 10 000 (4 410 187) = N$ 44 101.87

2.7 Anualidad Vitalicia Diferida Anticipadas

Este tipo de anualidades tiene el primer pago el dia en que se vence el periodo de aplazamiento o diferimiento. Y tomando en cuenta el desarrollo anterior, tenemos que el valor actual de una anualidad vitalicia anticipada de $ 1 y diferida k-años es:

$$k/\ddot{a}_x = N_{x+k} / D_x$$

También tomando el valor actual de una anualidad vitalicia anticipada de $ R , diferida durante k años es:

$$A = R_k/\ \ddot{a}_x \qquad A = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

Un ejemplo, del problema anterior, el primer pago debe recibirlo el beneficiario al cumplir 55 años, se tiene:

Datos: para una k = 35; una x = 20; i = 0.025

tenemos:

$$_{35|}\ddot{a}_{20} = \frac{N_{20+35}}{D_{20}} = \frac{2\ 754\ 768.8}{580\ 662} = 4.\ 744186$$

Multiplicando por 10 000 se obtiene la prima neta única pedida

A = 10 000(4.744186) = N$ 47 441.86

Nota: el problema también se puede resolver , considerando la anualidad como vencida y aplicando:

$$_{k|}a_x \quad \text{para } x = 20 \text{ y } k = 34$$

2.8 ANUALIDADES CONTINGENTES TEMPORALES

Es una anualidad que se paga durante un número especificado de periodos y termina al cubrir este número de pagos (aunque el rentista siga vivo) o a su muerte si ocurre antes de cubrir todos los pagos.

2.8.1 Anualidades Contingentes Temporales Vencidas

Si consideramos la anualidad contingente temporal y consideramos que es una anualidad vitalicia vencida, es posible apreciar que esta parte se puede contemplar como una anualidad vitalicia vencida diferida durante n años (n es el número de pagos de la anualidad temporal) Y, de esto se puede considerar que la anualidad contingente temporal es igual a una anualidad vitalicia vencida menos una anualidad vitalicia diferida n años.

Para el caso de una anualidad de N$ 1 y utilizando el símbolo $a_{x:n}$ para denotar el valor actual de una anualidad temporal de $1 pagadera a una persona de x años de edad y durante x años de edad y durante n años tenemos:

$$a_{\overline{x+n}|} = a_{\overline{x}|} - n|a_x$$

y recordando que $$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \quad \text{y} \quad n|a_k = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$a_{\overline{x:n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \quad \text{y} \quad A = R\,\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Un ejemplo: Hallar el valor actual de una anualidad ordinaria contingente temporal, de N$10 000 pagadera durante 20 años, a una persona de 35 años de edad.

Para x = 35; n=20; i = 0.025 se tiene:

$$a_{\overline{35:20}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = \frac{8\,128\,447.4 - 2\,560\,828.2}{381\,996} =$$

= 14.575072, multiplicando por $10 000 se obtiene la prima neta

A 10 000(14.575072) = N$ 145 750.72

2.8.2 Anualidades Contingentes Temporales Anticipadas

Tenemos que el primer pago se hace al principio del primer periodo de pago y tomando los desarrollos anteriores vemos que el valor actual o prima neta única es de este tipo de anualidades y está dado

$$A = R\, \ddot{a}_{\overline{x:n}|}$$

en donde

$$A = R \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

2.9 ANUALIDADES CONTINGENTES EQUIVALENTES.

Un problema que se presenta en los seguros, es el de reeplazar cierto tipo de anualidad, por otro diferente que corresponda a un mismo precio; en este sentido, se tienen dos anualidades son equivalentes, si en un mismo instante sus valores actuales, o sea, sus primas netas únicas son iguales. Por medio de equivalencias, se resuelven varios problemas. Por ejemplo por medio de primas anuales pagadas a una persona puede obtener una renta vitalicia cuyos pagos se inicien en una fecha futura bien definida.

Un ejemplo: Un comerciante debe pensionar a su empleado al llegar a la edad de 60 años, será jubilado con una anualidad vitalicia de N$12 000. Hallar la prima anual que debe comenzar a pagar a una Compañía que opera con el 2.5 % para proveer la pensión vitalicia del empleado.

Primero hay que pensar que la pensión que recibirá el empleado es una anualidad vitalicia anticipada, diferida 40 años; su valor actual se obtiene mediante la fórmula:

$$_{k|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

Las primas anuales que deben pagar forman una anualidad anticipada contingente temporal y su valor actual es :

$$\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Formamos una equivalencia:

$$R'\frac{N_{x+k}}{D_x} = R\,\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad \text{para } x = 20,\ k = 40;\ R' = 12000$$

$$R\ \frac{N_{20} - N_{60}}{D_{20}} = 12\,000\,\frac{N_{60}}{D_{20}} \qquad R = 12000\,\frac{N_{60}}{N_{20} - N_{60}}$$

$$= 12000\,\frac{1\,865\,613.6}{15\,744216 - 1\,865613.6} = N\$\ 1\,613.09$$

2.10 RENTAS PERPETUAS

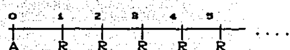
Una renta perpetua es una anualidad, cuyo plazo no tiene fin. Que pueden presentarse en forma anticipada, vencida, diferida, etc.

2.10.1 Monto de una Renta Perpetua Simple

Puesto que los pagos de una renta perpetua nunca cesarán, resulta imposible calcular su monto.

Valor Actual o Presente de una Renta Perpetua Simple Ordinaria

Consideremos la renta perpetua de N$R pagaderos, al final de cada período a la tasa i por período



Se deduce que el valor actual de la renta perpetua es aquella cantidad A que, en un período, produce como intereses la suma R, o sea

$$R = Ai \quad \text{de donde } A = R\,\frac{1}{i}$$

El factor $1/i = a_{\overline{\infty}|i}$ es el valor actual de una renta perpetua vencida de una una unidad monetaria por período, a la tasa i por período. También podemos obtenerla, pensandolo como el límite de $Ra_{\overline{n}|i}$ cuando n crece indefinidamente

$$\lim_{n \to \infty} R\,a_{\overline{n}|i} = \lim R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \lim R\,\frac{1-\frac{1}{(1+i)^{n}}}{i}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1+i)^n} = 0 \quad \text{de donde} \lim R\, a_{\overline{\infty}|i} = R\,\frac{1}{i}$$

o sea $A = R\ 1/i$

Un ejemplo: El testamento de una persona establece que parte de sus bienes se invertirán de modo que el Hospital de ancianos reciba a perpetuidad, una renta de N$100 000 cada final de año, si en la localidad la tasa de interés del 8%, hallar el valor actual de la donación.

$$A = R\,\frac{1}{i} \qquad A = 100\,000\,\frac{1}{0.08} = \text{N\$}1\ 250\ 000$$

2.10.2 Valor Actual de las Rentas Perpetuas Simples Anticipadas.

Cuando el pago de la renta perpetua es de inmediato, dibujando en el diagrama, tenemos, que el valor actual es equivalente al de una renta perpetua vencida, aumentada en el primer pago que debe de efectuarse de inmediato.

0	1	2	3	4	5	...
R	R	R	R	R	R	
A						

Vemos que el valor actual de la renta perpetua anticipada es aquella cantidad A que, disminuida en la primera cuota R, como intereses la suma R, o sea

$(A-R)i = R$ de donde

$A = R + R/i$ Si el pago que debe efectuarse de inmediato es W distinto de R, se tiene, para el valor actual

$$A = W + R/i$$

Un ejemplo: Al fallecer una persona, deja un legado a un sanatorio, estipulando así: N$ 600 000 para la adquisición de ciertos equipos y $ 80 000 anuales, para su mantenimiento. Hallar el valor actual del legado, si la tasa es del 8%

$A = 600\ 000$; $R = 80\ 000$; $i = 0.08$

tenemos;

$A = W + R/i = 600\ 000 + 1/0.08 = \text{N\$}1\ 600\ 000.$

Nota para la mejor comprensión del capítulo ver los problemas de esta Sección

C A P I T U L O III

3 AMORTIZACION

3.1 GENERALIDADES

Amortización del latín mors, mortis, significa extinguir una deuda mediante pagos periódicos generalmente iguales en los que se incluye tanto interesés como capital.

Uno de los procedimientos más usuales utilizados para liquidar una deuda consiste en abonar una cantidad periódica uniforme que contenga una parte de capital e intereses de tal manera que en el término previsto sea saldada la deuda. El pago periódico tiene un doble objeto: pagar los intereses del capital y abonar una parte de capital a fin de reducir el adeudo y al término previsto lograr que la deuda se extinga.

Principio básico de las Amortizaciones.

El interés que se paga debe cancelarse al final de cada periodo calculado sobre el saldo de los capitales adeudados.

En algunas prácticas comerciales, suelen introducirse modificaciones en los sistemas de amortización de pago de intereses vencidos sobre saldos insolutos; estas modificaciones que llamaremos variantes espúreas, tienen el objeto disimulado de obtener intereses a tasas mayores que las pactadas en el documento, una de estas modalidades es cobrar los intereses por adelantado.

DEMOSTRACION: Sea una deuda de monto S a la tasa i por periodo con plazo de un periodo. Si los intereses se cobran por adelantado se tiene:

Suma que recibe el deudor = $S(1-i)$ el interes actua como tasa de descuento

Suma que debe de pagar = S

```
o                           1
|---------------------------|
S(1+i)                      S
```

Sea la r la tasa real cobrada sobre los saldos insolutos

$$S(1+i)(1+r) = S$$

$$1+r = \frac{1}{1-i} \quad \text{con } i \neq 1 \; ; \; \frac{1}{r} = \frac{1-i}{i} \qquad r > 0;\ i > 0$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{i} - 1 \quad \text{de donde } \frac{1}{r} < \frac{1}{i} \quad \text{o sea } r > i$$

3.3 AMORTIZACION GRADUAL

Si tenemos un sistema de amortización por cuotas de valor constante, con intereses sobre saldos. En la amortización gradual los pagos son iguales y se hacen a intervalos iguales de tiempo. Esta forma de amortización es la más generalizada y de mayor aplicación.

Estos pagos forman una anualidad y consecuentemente los problemas involucrados en la amortización de un adeudo son análogos a los tratados en la anualidad, es decir, dada la deuda, tasa, y término.encontra del pago periódico o renta; dado la deuda renta y plazo, déterminar la tasa; finalmente dada la deuda, renta y tasa, déterminar el plazo.

Consideremos que tenemos el siguiente problema:

Una deuda de \$ 5 000 con intereses al 5 % convertible semestralmente se va a amortizar mediante pagos semestrales iguales R en los próximos 3 años, el primero con vencimiento al término de 6 meses. Hallar el pago

Solución:

Los 6 pagos R constituyen una anualidad cuyo valor presente es de \$5 000.

```
*_______R___________R___________R__________R___________R_________R
0       1           2           3          5           5         6
5 000
```

Por tanto:

$R\ a_{6} = 5\ 000$ entonces $R = 5\ 000 \dfrac{1}{a}$

Entonces $R = \$\ 907.75$

Amorticemos una deuda A amparada con un documento que causa intereses, mediante una serie de n pagos de R cada uno, como el ejemplo que estamos elaborando; cada pago R se aplica en primer lugar para el pago de interés vencido en la fecha de pago; la diferencia se utiliza para disminuir la deuda. Por lo tanto, la cantidad disponible para disminuir la deuda aumenta con el transcurso del tiempo.

La parte de la deuda no cubierta en una fecha dada se conoce como saldo insoluto en la fecha. El capital insoluto al inicio del plazo es la deuda original. El capital insoluto al final del plazo es 0 en teoria, sin embargo, debido a la practica de redondear al centavo más próximo, puede variar ligeramente de 0. El capital insoluto justo después de que se ha efectuado un pago es el valor presente de todos los pagos que aún faltan de hacerse.

En algunas ocasiones, es necesario contar con un registro que indique periódo por periodo la parte del pago que se aplica de interesés y la parte que se destina para abonar parte de capital; de esta manera se podrá decir de inmediato con qué suma de contado se podrá liquidar el adeudo. Este registro recibe el nombre de Tabla de Amortización.

NOTA: en la Sección 3 encontrará ejemplos y ejercicios para ilustrar estos temas.

3.4 TABLA DE AMORTIZACION

El registro del destino del pago periódico e interese y capital recibe el nombre de tabla de amortización y se deriva de esta manera:

Se considera que la deuda sea de un capital $a_{\overline{n}|}$ entonces la renta anual para liquidar este adeudo será la unidad.

$$a_{\overline{n}|} = V^1 + V^2 + V^3 + \dots + V^{n-1} + V^n.$$

Un año después de recibido el prestamo $a_{\overline{n}|}$, los intereses que hay que pagar sobre el mismo serán : $i\,a_{\overline{n}|} = 1 - V^n$.

Ahora, la renta es la unidad, la parte destinada al pago de capital será: $1 - i a_{\overline{n}|} = 1 - (1 - V)^n = V^n$; una vez efectuada el pago unitario, el capital que se adeuda se reduce quedando:

$$a_{\overline{n}|} - V^n.$$

El capital que se adeuda en cada periodo recibe el nombre de capital insoluto.

TABLA DE AMORTIZACION.

Número de Pago	Capital Insoluto al principio del periodo	Interés contenido en el pago	Capital contenido en el pago
1	$a_{\overline{n}|i}$	$i a_{\overline{n}|i} = 1 - V_i^n$	V_i^n
2	$a_{\overline{n}|i} - V^n = a_{\overline{n-1}|i}$	$i a_{\overline{n-1}|i} = 1 - V_i^{n-1}$	V_i^{n-1}
k	$a_{\overline{n-k+1}|i}$	$i a_{\overline{n-k+1}|i} = 1 - V_i^{n-k+1}$	V_i^{n-k+1}
n	$a_{\overline{1}|i} = V$	$i a_{\overline{1}|i} = 1 - V_i$	V_i
Suma	$n - a_{\overline{n}|i} / i$	$n - a_{\overline{n}|i}$	$a_{\overline{n}|i}$

De nuestro ejemplo tenemos:
La siguiente tabla:

Periodo	Capital insoluto al principio del periodo	Interes vencido al final del periodo	Capital pagado al final del periodo
1	5 000.00	125.00	782.75
2	4 217.25	105.43	802.32
3	3 414.93	85.37	822.38
4	2 592.55	64.81	842.94
5	1 749.61	43.74	864.01
6	885.60	22.14	885.61
totales		446.49	5 000.01

3.4.1 Análisis de la Tabla de Amortización

En la Tabla de amortización podemos apreciar:

a).- Los pagos: la cantidad que se paga en cada periodo y que en parte sirve para pagar los interese correspondientes y en parte para amortizar el saldo de la deuda.

b).- Las amortizaciones: la parte de cada pago (pago menos intereses) que se aplica a la reducción del saldo deudor.

Tenemos también , que en general, en cualquier operación de amortización de una deuda, y en cualquier momento:

Derechos del deudor + derechos del acreedor = valor de la operación.

De nuestro ejemplo tenemos que para llenar la tabla hicimos lo siguiente:
El capital insoluto al principio del primer periodo es la deuda original de $5 000.00, el interés vencido al final de ese mismo periodo es de 5000(0.025) = 125 ; el pago semestral es 907.75 de los cuales se utilizan $125 para el pago de interés. y $ 907.75- 125 = 782.75 se utilizan para el pago de capital. Al principio del segundo periodo el capital insoluto es 5000 - 782.75 = 4217.25. Al término de este periodo el interés vencido es 4217.25 (0.025) = 105.43 y así sucesivamente. Otra forma es considerar el capital insoluto P justamente después del 4o. pago es el valor presente de los 6-4 = 2 pagos que aún faltan por hacerse en consecuencia

$$P = 907.75 \ A_{\overline{2}|} \text{ al interes de } 0.025 = 1749.62$$

3.5 Interés en el Valor de un Bien Adquirido.

Cuando tenemos el problema de encontrar el interés en determinada fecha, nos encontramos con que al comprarse un bien mediante una serie de pagos parciales, el interés del comprador del bien, en cualquier tiempo, es aquella parte del precio del bien que ha pagado. Al mismo tiempo , el interés del vendedor del bien , es aquel que queda por pagarse, esto es, el capital insoluto en la fecha. Claramente vemos:

interés del comprador + interés del vendedor = precio de venta

Un ejemplo: Una persona compra una casa en $25 000; paga $10 000 de cuota inicial y el saldo lo amortiza con intereses al 6% convertible mensualmente, mediante pagos iguales al final de cada mes en los próximos 10 años. ¿ Cuál es el interés justamente después de hacer el 50o. pago periodico?

Solución:

No. de pagos totales 120; $i = .06/12 = 0.005$

El pago periodico es $R = A \dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}}$ entonces tenemos:

$$R = 15000 \frac{1}{a_{\overline{120}|.005}} = \$\ 166.53$$

El capital insoluto justamente después del 50o. pago periodico

es $166.53\ a_{\overline{70}|.005} = \$\ 9815.18$ Del precio de venta de $25 000, esta persona debe aún $ 9815. Su interés en la propiedad es de 25 000 - 9815.18 = $ 15 184.82

3.6 Extinción de Deudas Consolidadas

Cuando se tiene una deuda contraida mediante la emisión de bonos con intereses es amortizada, cada pago se aplica para cubrir los intereses correspondientes vencidos y para redimir un cierto número de bonos.

Los pagos periodicos no pueden permanecer iguales, sin embargo tienen que ser lo más similares que sea posible. Por ejemplo: si la denominación de los bonos es de $100 y se dispone de $ 712.86, serán redimidos 7 bonos; si se dispone de $ 763.49, se redimirán 8 bonos.

Un ejemplo: Construir una tabla para la liquidación mediante 6 pagos anuales, lo más iguales posibles, de una deuda de $30 000 contraida mediante la emisión de bonos de $100 con intereses al 5%.

Para calcular la deuda de $30 000 con i= 0.05, con n=6 pagos anuales iguales de:

$$R = 30\ 000 \frac{1}{a_{\overline{6}|.05}} = \$\ 5910.52$$

Al término del primer año, el cargo de interés es 30 000(0.05) = 1500; quedando disponibles 5910.52 - 1500 = 4 410.52 para el retiro de 44 bonos, quedando 300-44 = 256 bonos que representan insoluto al principio del segundo año $ 25 600. Al final del segundo año el cargo por intereses es 25600(0.05)= $1280, hay disponibles 5910.52 - 1280 = $ 4630.52 para el retiro de 46 bonos; quedando entonces 256 - 46 = 210 bonos, que representan un capital insoluto al principio del tercer año de $ 21 000 y así sucesivamente, construyendo la siguiente tabla:

Tabla que muestra los pagos para la extinción de una Deuda Consolidada.

Periodo	Capital Insoluto al principio del periodo.	Interés Vencido	Número de bonos retirados	Pago periodico
1	30 000.00	1500.00	44	5 900.00
2	25 600.00	1280.00	46	5 880.00
3	21 000.00	1050.00	49	5 950.00
4	16 100.00	805.00	51	5 905.00
5	11 000.00	550.00	54	5 950.00
6	5 600.00	280.00	56	5 880.00
Totales		5465.00	300	35 465.00

3.7 Derechos Adquiridos por el Deudor y Saldo a Favor del Acreedor.

Vemos que en una operación de compra-venta a crédito, después de que el deudor ha realizado algunos pagos, ha adquirido parcialmente el bien, mientras que el acreedor, al haber recibido esos pagos, ya no es propietario de todos los derechos sobre el bien sino sólo de una parte (el saldo a su favor). En general en cualquier operación de amortización de una deuda, y en cualquier momento:

Derecho del deudor + derechos del acreedor = valor operación

Un ejemplo para ilustrar esto:
Se tiene una deuda de \$100 000 contratada al 55 % convertible semestralmente que se iba a liquidar con 6 pagos semestrales de \$35 843.53 .

Hacemos nuestra tabla de amortización y tenemos:

Fecha	Pago Semestral	27.5 Interés sobre saldo	Amortización	Saldo
				100 000
1	35 843.53	27 500.00	8 343.53	91 656.47
2	35 843.53	25 205.53	10 638.00	81 018.47
3	35 843.53	22 280.08	13 563.45	67 455.02
4	35 843.53	18 550.13	17 293.40	50 161.62
5	35 843.53	13 794.45	22 049.08	28 112.54
6	35 843.53	7 730.95	28 112.54	

Tenemos que si \$ 81 018.47 es el saldo final del segundo semestre son los derechos aún en propiedad del acreedor y, al mismo tiempo, los derechos del deudor serían

$$100\ 000 - 81\ 018.47 = \$\ 18\ 981.53$$

. Si no tuvieramos la tabla se podría calcular de la siguiente manera:

$$100\ 000(\ 1.275)^2 - 35\ 843.53\ \frac{(1.275)^2 - 1}{0.275} = 16000 - 81544.03$$

$= 81\ 018.47$ de donde

Los \$162 562.50 son el valor de la deuda al cabo de los dos semestres.

Los \$81 544.03 son el valor de los pagos realizados al final del segundo semestre.

Y los derechos del deudor son:

$$35\ 843.53\ \frac{(1.275)^2 - 1}{0.275} - [100\ 000(\ 1.275)^2 100\ 000] =$$

$$= 81\ 544.03 - 62\ 562.50 = \$\ 18\ 981.53$$

en donde, otra vez, los \$ 81 544.03 son el valor de los dos pagos realizados al final del segundo semestre y los \$ 62 562.50 son los intereses ocasionados por el uso o disfrute (usufructo) de los \$100 000 objeto del préstamo.

3.8 Número de Pagos en una Amortización.

Un ejemplo de cómo se puede realizar:

Cuántos pagos mensuales de \$25 000 son necesarios para saldar una deuda de \$ 300 000 contratada hoy al 66% convertible semestralmente?

$A = 300\ 000 \qquad i = 0.66/12 = 0.055 \qquad R = 25\ 000$

$n = ?$

De $A = R\,\dfrac{1(1+i)^{-n}}{i} \rightarrow A\,i/R - 1 = -(1-i)^{n}$

$(1+i)^{-n} = 1 - Ai/R$ tomamos log.

$-n \log (1+i) = \log (1 - Ai/R)$ despejando n

$n = 20.14931282$ de aqui

se hacen 19 pagos de \$25 000 y un pago final mayor o 20 pagos de \$25 000 y un pago final menor.

3.9 AMORTIZACION CON PAGOS ANTICIPADOS

Supongamos una serie de pagos de valor 1 que se hacen al principio de cada año, durante n años y asociados a una tasa efectiva de interés anual igual a i.

El valor presente de esta serie de pagos estará dada por:

$$a_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

Y considerando el valor del capital remanente, después de efectuarse el primer pago al inicio del primer año, tendremos el siguiente valor: $a_{\overline{n}|i} - 1 = a_{\overline{n-1}|i}$

ya que el pago sería acreditado completamente a amortizar el capital, pues no se ha devengado interés. Entonces

$i a_{\overline{n-1}|i} = 1 - V_i^{n-1}$ que representa el valor del interés contenido en el segundo pago y por lo tanto $1-(1-V_i^{n-1}) = V_i^{n-1}$ representará el valor de la amortización contenida en el segundo pago. De manera general V_i^{n-k+1} representará el valor de la amortización contenida en el pago k-ésimo efectuado al al inicio del año k.

Así, $1 - v_i^{n-k+1}$ representará el valor del interés contenido en el pago k-ésimo, efectuado al inicio del año k.

Un ejemplo: Supongamos que se recibe un préstamo de \$1 000 000que se debe de amortizar mediante 5 pagos anuales iguales al principio de cada año y que estan asociados a una tasa efectiva de interés anual del 10% . Determinar el valor de la amortización contenida en el tercer pago y construir la tabla de amortización.

El valor del pago anual será :

$$1\ 000\ 000/\ \ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1\ 000\ 000/\ 4.169865$$
$$= 239\ 815.892$$

El valor de la amortización contenida en el tercer pago:

$$239\ 815.892\ v_i^{5-3+1} = 239\ 815.892(0.751315)$$
$$= 180\ 177.229$$

No. Pago	Año	Capital al inicio del año	Interes devengado	Valor de la amortización	Capital remanen
1	0	1,000,000.000		239,815.892	760184
2	1	760,184.108	76,018.411	163,797.481	596386.6
3	2	596,386.628	59,638.663	180,177.229	416209.3
4	3	416,209.399	41,620.940	198,194.952	218014.4
5	4	218,014.447	21,801.445	218,014.447	

3.10 OTROS CASOS DE AMORTIZACION

3.10.1 Cuando tenemos Pagos Desiguales.

Para este caso pondremos un ejemplo: Una deuda de \$600 000 se habrá de amortizar mediante 5 pagos mensuales vencidos; los dos primeros por \$150 000 y el tercero y cuarto por \$100 000. Calcular el importe del quinto pago para saldar totalmente la deuda si la operación se pactó al 57 % anual convertible mensualmente.

Solución:

Conviene visualizar la operación a través de una tabla.

Datos i = 4.75

Fecha	Pago	Interés Sobre Saldo	Amortización	Saldo
al contratar la operación				600 000
1	150 000	28 500.00	121 500.00	478 500
2	150 000	22 728.75	127 271.25	351 228.75
3	100 000	16 683.37	83 316.63	267 912.12
4	100 000	12 725.83	87 274.17	180 637.95
5	189 218.25	8 580.30	180 637.95	———
TOTALES	689 218.25	89 218.25	600 000.00	

Al llegar al fin del quinto mes sabemos que el importe del pago final debe cubrir tanto el saldo al cuarto mes como los correspondientes intereses o:

180 637.95 + 8 580.30 = $ 189 218.25

que es, precisamente, el importe del último pago que se buscaba.

Otro Caso en Cambios en la Tasa de Interés. Amortización Constante.

Ejemplo:

Hacer una tabla de amortización para un crédito que se contrata el 3 de junio por $ 800 000 que habrá de pagarse mediante cuatro pagos bimestrales, si en los cuatro primeros meses se aplica una tasa del 65% anual y en los últimos cuatro meses se aplica la tasa, de 60 % ambas con capitalización bimestral, y si, además se debe amortizar una cuarta parte de la deuda por cada pago.

Fecha	Pago	Interés sobre Saldo	Amortización	Saldo
3 junio				800 000.00
3 agosto	286 666.67	86 666.67	200 000.00	600 000.00
3 octubre	265 000.00	65 000.00	200 000.00	400 000.00
3 dic.	240 000.00	40 000.00	200 000.00	200 000.00
3 febrero	220 000.00	20 000.00	200 000.00	
TOTALES	1 011 666.67	211 666.67	800 000.00	

3.10.2 Amortización Variable

Ejemplo. Hacer una tabla de amortización para una deuda de $500 000 a pagar en tres meses mediante abonos vencidos, con el 33% semestral con capitalización mensual, amortizando 50, 30 y 20% de la deuda en el primero, segundo y tercer pagos, respectivamente.

Solución

Fecha	Pago	Interés sobre el saldo 5.5% mensual	Amortización	Saldo
al contratar				500 000
1	277 500	27 500	250 000	250 000
2	163 750	13 750	150 000	100 000
3	105 500	5 500	100 000	
TOTALES	546 750	46 750	500 000	

3.10.3 Derechos Sobre un Bien que se Paga por Cuotas

Los derechos de propiedad sobre un bien que se compra a plazos sólo se adquieren, al pagar la última cuota. Con frecuencia ocurre que es necesario determinar en algún momento, dentro del proceso de pago, la parte que corresponde al comprador y la parte que corresponde al vendedor. Para estos casos la ecuación de equivalencia se hace con los mismos factores convenidos en la deuda y queda así:

Parte amortizada + saldo insoluto = Precio de venta

La parte amortizada es el derecho del comprador y el saldo insoluto es el derecho del vendedor, por esto la igualdad anterior puede escribirse:

Derechos del Comprador + derechos del Vendedor = Precio de Compra.

Para préstamos a largo plazo, y en particular en planes de vivienda se han creado sistemas de amortización entre los que citaremos:

3.10.4 Amortización Constante

A diferencia de la amortización gradual, mantiene un valor igual para la amortización en cada periodo y, como en consecuencia , la cuota de pago periodico es variable decreciente, por ser decrecientes los intereses sobre saldos.

3.10.5 Amortización por cuotas incrementadas

Este sistema consiste en incrementar la cuota periodicamente, en un porcentaje de las cuotas anteriores. Este porcentaje de incremento se supone depende del mejoramiento económico del deudor. En algunos modelos, el saldo insoluto crece en algunos periodos, para luego decrecer.

3.10.6 Amortización decreciente.

En este sistema de amortización el deudor paga cuotas mayores en los primeros periodos, este diseño tiene cierta importancia, si el clima económico es de desvalorización monetaria y se prevé un aumento futuro en las cuotas, por corrección monetaria.

NOTA en la Sección 3 se encontrará diferentes ejemplos y ejercicios para comprobar de cada uno de los temas tratados en el capitulo III.

C A P I T U L O   IV

FONDO DE AMORTIZACION

Para algunos autores, el concepto de fondo de amortización es el inverso del de amortización; ya que en el primero, la deuda a pagar es una cantidad en valor actual, mientras que, en el caso de fondo se habla de una cantidad o deuda a pagar a futuro, para lo cual se acumulan los pagos periodicos en un fondo con el objeto de tener en esa fecha futura la cantidad necesaria.

En el fondo de amortización se distingue porque aquí la deuda se va amortizar , se plantea a futuro y lo que se hace es constituir una reserva o fondo depositando determinadas cantidades (generalmente iguales y periódicas)en cuentas que devengan intereses con el fin de acumular la cantidad o monto que permita pagar la deuda a su vencimiento.

Otro punto de vista de ver el fondo de amortización es por ejemplo considerar que se tiene una deuda de un total de $1 amortizable en n años, mediante pagos anuales, que inluyen capital e interés, asociados a una tasa efectiva anual igual a i.

Entonces: $a_{\overline{n}|i} = 1$ y por lo tanto $1/a_{\overline{n}|i}$ = pago anual

También hemos visto anteriormente que este pago puede ser considerado compuesto por dos cantidades:

** La correspondiente para cubrir el interés sobre el valor total del Principal o capital a la tasa de interés convenida

** La correspondiente a la amortización del capital, que al ser reinvertida periodicamente a una cierta tasa de interés convenida , permite la recuperación del capital total al finalizar el plazo estipulado para la operación.

O sea que,

$$\text{pago} = i + 1/S_{\overline{n}|i} \quad \text{ya que el valor del}$$

capital es igual a \$1 y por lo tanto:

$$1/a_{\overline{n}|i} = i + 1/S_{\overline{n}|}$$

Este resultado observese se puede obtener algebráicamente ya que,

$$\begin{aligned} i + 1/S_{\overline{n}|i} &= i + i/[(1+i)^n - 1] \\ &= [i(1+i)^n - i + i]/[(1+i)^n - 1] \\ &= i/(1 - V^n) \\ &= 1/a_{\overline{n}|i} \end{aligned}$$

Considerando que el pago $= i + S_{\overline{n}|i}$ se cumplirá siempre y cuando se cumpla tambien la condición que las cantidades que representan la amortización al capital en cada uno de los pagos, puedan ser reinvertidas a la tasa de interés convenida igual a i . Con este análisis permite en la posibilidad de otras formas de operaciones financieras que pudieran involucrar tasas de interés diferentes, una asociada al pago de intereses y otra asociada a la reinversión de las amortizaciones.

4.2 Depósitos a un Fondo de Amortización

Debemos considerar en el fondo de amortización que la deuda que se va a amortizar se plantea a futuro y lo que se hace es constituir una reserva o fondo depositando determinadas cantidades (generalmente iguales y periódicas) en cuentas que devengan intereses, con el fin de acumular la cantidad o monto que permita pagar la deuda a su vencimiento

De estas consideraciones ilustraremos con un ejemplo:

Una deuda de \$ 5000 con vencimiento al término de 5 años, sin intereses, va a ser liquidada mediante el sistema de fondo de amortización. Si se van a hacer 5 depósitos anuales iguales, el primero con vencimiento en un año, en un fondo donde gana el 3% , hallar el importe de cada depósito.

Solución:

Para calcular el monto de los 5 depósitos anuales de R cada uno, después de efectuado el último es $ 5 000;

$$R\, S_{\overline{5}|.03} = 5000 \text{ entonces } R = 5000 \frac{1}{S_{\overline{5}|03}} = \$941.78$$

En un fondo de amortización, cada partida o suma que se reserva periodicamente es una anualidad que gana intereses que se capitalizan, en cada período de capitalización y que tiene una problemática parecida a una anualidad.

Un ejemplo: Una deuda de $5 000 que devenga interés al 5% convertible semestralmente va a ser liquidada mediante el método de fondo de amortización. Si se van a hacer 8 depósitos semestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses, en un fondo que paga el 3 % convertible semestralmente, hallar el importe R de cada depósito, y el costo semestral C de la deuda.

Solución:

$$5000 = R\, S_{\overline{8}|0.015} \text{ entonces}$$

...

$$R = 5\ 000 \frac{1}{S_{\overline{8}|0.015}} = \$\ 592.92$$

El cargo semestral por intereses es 5000(0.025)= $125

El costo semestral de la deuda es el cargo por interesesmás el depósito periodico en el fondo de amortización, en consecuencia.

$$C = 125 + 592.92 = \$\ 717.92$$

AMORTIZACION E INFLACION

Se debe de considerar que hay problemas asociados a la amortizacion como la inflación, que es de tomarse en cuenta por los altos indices inflacionarios que se dan en varios paises. Se debe analizar pues este problema adquiere mayor importancia como en los casos en que los créditos se extienden a largo plazo y las tasas de interés asociadas a las distintas operaciones de crédito se mantienen fijas durante todo el tiempo de contratación, todavia cuando los indices inflacionarios no presentan altos niveles. La inflación va depender del nivel de las tasas de interés vigentes en un momento dado en el mercado financiero. También la inflación influye en las diferentes tasas de interés, a que vayan hacia el alza o baja y con ello los efectos en la amortización de los créditos contratados a una tasa de interés fijo, durante el tiempo que dure la operación. Es decir si la tasa de interés prevaleciente en el mercado durante el periodo de amortización del crédito se incrementa, entonces el comprador, (otorgante del crédito) sufrirá un quebranto, por la imposibilidad de obtener un mejor rendimiento por la inversión de su capital, como por el deterioro del mismo originado por la inflación. Por su parte el emisor (solicitante del crédito), se veria favorecido al presentarse esta situación, ya que el valor de los pagos, también fijos, contiene el deterioro del capital originado por la inflación y además mantiene su crédito a una tasa de interés inferior a la tasa vigente en el mercado.

4.4 TABLA DE FONDO DE AMORTIZACION

La forma analítica de calcular la tabla de fondo de amortización correspondiente a la liquidación de un crédito mediante un fondo de amortización a tasa real.

Consideremos, que sea:

- C = valor del crédito
- r= tasa real efectiva de interés anual(remunerativa y recuperativa)
- n = plazo en años, para la liquidación del crédito.
- I = tasa anual de inflación

Analisemos en primer lugar el caso en que las tasas remunerativa y recuperativa son iguales y además se refieren a tasas reales. Es importante hacer notar la presencia de la inflación durante todo el tiempo que dura la operación financiera, pues debe considerarse que el valor del capital al final del plazo convenido deberá de conservar su poder adquisitivo original, es decir, que el capital se deberá de reintegrar al comprador al final del plazo, deberá de estar ajustado por la inflación acumulada desde que se inicia la operación hasta el momento en que finaliza la misma.

Entonces tenemos:

$$R_o = C\,(r + 1/S_{\overline{n}|r}) \quad y \quad A_o = C/ S_{\overline{n}|r}$$

En esta tabla de amortización de un crédito cuyo valor presente es igual a C, que debe ser liquidado en n años mediante pagos anuales vencidos, con valor suficiente para cubrir el pago de los intereses devengados por el monto total del crédito, a una tasa real r y ajustando en cada año por la inflación que corresponda, que proporcionará el capital suficiente para ir formando un fondo que permita, al final del plazo convenido para la liquidación del préstamo, acumular el valor total del crédito, revalorizando con la inflación total $(1+i)^n$, acumulada, desde que se inicia la operación, hasta que finaliza, suponiendo que la inflación permanece constante.

4.5 TABLA CON VALORES AJUSTADOS CON LA INFLACION AL FINAL DEL AÑO.

Año	Capital Inicial	Capital	Interés	Pago Anual
1	C	$(1+I)C$	$r\ C(1+I)$	$R_o(1+I)$
2	$(1+I)C$	$(1+I)^2C$	$r\ C(1+I)^2$	$R_o(1+I)^2$
...				
k	$(1+I)^{k-1}\ C$	$(1+I)^kC$	$r\ C(1+I)^k$	$R_o(1+I)^k$
...				
n	$(1+I)^{n-1}\ C$	$(1+I)^nC$	$r\ C(1+I)^n$	$R_o(1+I)^n$

	Amortización	Fondo Acumulado
1	$(1+I)(R_o-rC)$	$A_o(1+I)S_{\overline{1}\rceil r}$
2	$(1+I)^2(R_o-rC)$	$A_o(1+I)^2\ S_{\overline{2}\rceil r}$
k	$(1+I)^k(R_o-rC)$	$A_o(1+I)^k\ S_{\overline{k}\rceil r}$
n	$(1+I)^n(R_o-rC)$	$A_o(1+I)^n\ S_{\overline{n}\rceil r}$

4.6 FONDO DE AMORTIZACION CUANDO SE INVOLUCRAN DOS TASAS DE INTERES

Consideremos el siguiente problema con las siguientes consideraciones:

La presencia de un emisor de una serie de pagos futuros y un inversionista comprador en este momento, de dicha serie de pagos. y que ambos estan de acuerdo en que la operación se realice bajo las siguientes condiciones:

El comprador recibirá anualmente una retribución equivalente al pago del interés correspondiente, al aplicar una cierta tasa de interés convenida, sobre el valor total de la deuda o principal. El emisor se compromete a regresar al comprador, el valor total del principal al finalizar el plazo de la operación.

Bajo estas circunstancias el comprador podrá fijar una cierta tasa de interés j para ser aplicada sobre el valor total del principal, dentro de todo el tiempo que dure la operación y a su vez el emisor podrá fijar una cierta tasa de interés i que le permitirá acumular el valor del principal al final del plazo convenido, mediante la reinversión anual de las amortizaciones que correspondan a cada año. A la tasa de interés j se le denomina remunerativa y a la tasa de interés i se le denomina recuperativa.

Consideremos que el emisor recibe en este momento una cantidad de $1 por la serie de pagos futuros que debe hacerle al comprador, cada año, durante n años y que las tasas asociadas a la operacion son j e i Entonces:

$a_{\overline{n}|i,j}$ que representará

el valor presente de la serie de pagos; por lo tanto:

$1/a_{\overline{n}|i,j} = j + 1/ S_{\overline{n}|i}$ será el valor del pago anual

que también se puede escribirse como $1/ a_{\overline{n}|i,j} = (j-i) + 1/a_{\overline{n}|i}$

o bien $a_{\overline{n}|i,j} = a_{\overline{n}|i} / [1 + (j-i)\, a_{\overline{n}|i}]$ notese que cuando

$j = i$

$a_{\overline{n}|i,j} = a_{\overline{n}|i}$ en todos los casos se ha considerado que $j > i$

Un ejemplo:

Una persona obtiene un prestámo hipotecario para la adquisición de una casa por $80 000 000 que debe ser liquidado en 5 años mediante amortizaciones anuales iguales que contengan capital e intereses al final de cada año. Determinar el pago anual si la tasa de interés asociada a la operación corresponde a una tasa remunerativa del 35 % efectiva anual y recuperativa del 30 % efectiva anual.

Tenemos entonces:

$$R = 80\ 000/ a_{\overline{5}|.30,.35}$$

$$R = 80\ 000\ [\ (.35 - .30) + 1/a_{\overline{5}|.30}$$

$$= 4\ 000\ 000 + 32,\ 846,523.87$$

$$= 36\ 846\ 523.87$$

Nuestra tabla queda:

Año	Principal al inicio del año.	Interés Anual contenido en el Pago (a tasa j)	Amortización Anual conte-- nida en Pago	Amortizaciones Acumuladas al final del año (a la tasa i)
1	80 000	28 000	8 846 523.87	8 846 523.87
2	80 000	28 000	8 846 523.87	20 347 004.89
3	80 000	28 000	8 846 523.87	35 297 630.23
4	80 000	28 000	8 846 523.87	54 733 443.18
5	80 000	28 000	8 846 523.87	80 000 000.00

Si aplicamos que tenemos dos tasas diferentes tenemos: una nueva tabla de amortización, que se corregirá en la columna correspondiente a los valores del interés, los cuales deberán ser aumentados en $ 4 000 000 producto del diferencial entre las tasas j e i.

La nueva Tabla quedaría como sigue:

Considerando la Amortización anual aplicada para la reducción del Principal y el Pago de Intereses sobre el principal remanente.

Pago anual: $ 36 846 523.87

Año	Principal Remanente al inicio del año	Interés Pagado en el año	Amortización Contenida en Pago anual	Principal en Remanente final de año
1	80 000 000.00	24 000 000.00	8 846 523.87	71 153 476.13
2	71 153 476.13	25 346 042.84	11 500 481.03	59 652 995.10
3	59 652 995.10	21 895 898.53	14 950 625.33	44 702 369.76
4	44 702 369.76	17 410 710.93	19 435 812.94	25 266 566.82
5	25 266 566.82	11 579 967.05	25 266 556.82	

Observese que estos resultados son equivalentes a la amortización de una deuda de $80 000 000, mediante 5 pagos anuales iguales que incluyen capital e interés, asociados a una tasa efectiva anual del 36.248706 % y por ende

$$a_{\overline{5}|i} = 2.171168 \text{ y por lo tanto}$$

$$R = 80\ 000\ 000 / 2.171168 = 36\ 846\ 523.81$$

NOTA: en la Sección 4 encontraras ejemplos y ejercicios que ilustran este capitulo.

A P E N D I C E

Fórmulas Especiales para el Cálculo de la Tasa en las Anualidades.

Para el cálculo de la tasa en las anualidades hemos utilizado la interpolación lineal, también se puede usar la tangencial, la fórmula de Newton, que son los valores que se dan en las tablas, otras las hemos resuelto por tanteo en las ecuaciones de grado superior, para lograr determinar cierto tipo de interés. Para tener otro punto de vista de como se puede también calcular el interés se encuentra la Fórmula de Baily,un actuario inglés que logró una expresión para la tasa verdadera, sobre todo cuando el plazo de la renta es muy elevado.

Este procedimiento se funda en la corrección de un tipo de interés estimado que de algún modo se determine en la interpolación en las tablas financieras. Si llamamos a i' a este tanto aproximado podemos suponer que le falta la cantidad δ para ser igual a i, lo que permite escribir:

$$i = i' + \delta$$

Sustituyendo en la fórmula de una anualidad i por $i'+\delta$, se tiene:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - V^n}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1 - (1+i'+\delta)^{-n}}{i'+\delta}$$

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|}\,(i'+\delta) &= 1 - [(1+i') + \delta\,]^{-n} \\ &= 1 - [(1+i')^{-n} - n(1+i')^{-n-1}\,\delta + \dots] \\ &= 1 - [(1+i')^{-n} - n(1+i')^{-(n+1)}\delta + \dots] \\ &= 1 - (1+i')^{-n} + n(1+i')^{-(n+1)}\;\delta - \dots \end{aligned}$$

Se han despreciado en el desarrollo del binomio los términos en δ los potencia superiores; por lo tanto:

$$a_{\overline{n}|}i' + a_{\overline{n}|}\delta \cong 1 - (1+i')^{-n} + n\,(\,1+i')^{-(n+1)}\delta$$

$$\delta[\,a_{\overline{n}|i} - n(1+i')^{-(n+1)}] \cong 1 - (1+i')^{-n} - i'\,a_{\overline{n}|i}$$

de donde:

$$\delta \cong \frac{1 - (1+i')^{-n} - i'a_{\overline{n}|}i}{a_{\overline{n}|i} - n(1+i')^{-(n+1)}} = i'\frac{a_{\overline{n}|i'} - a_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i} - nv'^{\,n+1}}$$

Agregando δ al tanto i' tenemos

$$i \cong i' + \delta = i' + i' \frac{a_{\overline{n}|i'} - a_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i} - n\, v'^{\,n+1}} =$$

$$= i' + i \frac{\dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}} - \dfrac{1}{a_{\overline{n}|i'}}}{\dfrac{1}{a_{\overline{n}|i'}} - \dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}} \times \dfrac{1}{a_{\overline{n}|i'}} \times n v'^{\,n+1}}$$

Sustituyendo $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ y desarrollando el binomio del numerador

$$= \frac{ni - \dfrac{n(n+1)}{2!} i^2 + \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3!} i^3 - \cdots}{i}$$

$$= n - \frac{n(n+1)}{2!} i + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} i^2 - \cdots \cong$$

$$\cong n \left[1 - \frac{n+1}{2} i + \frac{(n+1)(n+2)}{6} i^2 \right];$$

$$\frac{a_{\overline{n}|i}}{n} \cong 1 - \frac{n+1}{2} i + \frac{(n+1)(n+2)}{6} i^2$$

Al encontrarnos en este punto, eleva la igualdad a la potencia: $-\dfrac{2}{n+1}$;considerando como uno solo los dos primeros términos del segundo miembro.

$$\left(\frac{a_{\overline{n}|i}}{n} \right)^{-\frac{2}{n+1}} = \left(\frac{n}{a_{\overline{n}|i}} \right)^{\frac{2}{n+1}} =$$

$$\left[\left(1 - \frac{n+1}{2} i\right) + \left(\frac{(n+1)(n+2)}{6} i^2\right) \right]^{-\frac{2}{n+1}} =$$

$$= \left[1 - \frac{(n+1)}{2} \cdot i \right]^{-2/n+1} - \frac{2}{n+1} \cdot \left[1 \; \frac{n+1}{2} i \right]^{-2/n+1}$$

$$\cdot \left[1 - \frac{n+1}{2} i \right]^{-n+3/n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{6} \cdot i^2 +$$

$$+\frac{\frac{2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+1}}{24}\cdot\left(1-\frac{n+1}{2}\cdot i\right)^{-4+2n/n+1}\left[\frac{(n+1)(n+2)}{6}\right]^{2}\cdot i^{4}-\ldots$$

Aplicando de nuevo el desarrollo del binomio de Newton al segundo miembro y despreciando términos que contienen i con exponente mayor que 2, se halla:

$$\left(\frac{n}{a_{\overline{n}|i}}\right)^{2/n+1}\cong 1+\frac{2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot i\ +$$

$$+\frac{\frac{2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+1}}{2(}\cdot\frac{(n+1)^{2}}{4}\cdot i^{2}+\ldots-\frac{2}{n+1}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{6}\cdot i^{2}\cong$$

$$\cong 1+i+\frac{n+3}{4}\cdot i^{2}-\frac{n+2}{3}\cdot i^{2}=1+i-\frac{n-1}{12}\,i^{2}$$

De aqui

$$\left(\frac{n}{a_{\overline{n}|i}}\right)^{2/n+1}-1=i-\frac{n-1}{12}\,i^{2}$$

el primer miembro es independiente de i, y su valor se calcula, por tanto, en seguida, lo representaremos por P; y nos queda entonces la igualdad anterior:

$\frac{n-1}{12}\cdot i^{2}-i+P=0$ y observamos que i es la incógnita de una ecuación de segundo grado, la cual despejada sería,

$$i=\frac{1\pm\sqrt{1-4P.(n-1)/12}}{(n-1)/6}=\frac{6\,(1\pm\sqrt{1-P\,(n-1)/3}}{n-1}$$

Baily que el valor de i no era del todo simple y rápido que decidió resolver la ecuación de 2° grado por aproximación.

De la ecuación que le aplicamos la solución de 2° grado la escribimos

$i\,.[\,(n+1)/12.i\ -1]+P=0$ despejando i.

$$i=\frac{P}{1-\frac{(n-1)}{12}\cdot i}=\frac{12P}{12-(n-1)i}$$ y como el segundo miembro

depende de la incógnita i, sustituida ésta por un valor aproximado y despreciando el término i^2 queda:

$i' = (n/a_{\overline{n}|i})^{2/n+1} - 1 = P$ y por lo que tenemos:

$$i \cong \frac{12P}{12 - (n-1)P}$$

y con el propósito de lograr una mayor aproximación en esta ecuación volvemos hacer una nueva sustitución quedando:

$$i \cong \frac{12P}{12-(n-1)\dfrac{12P}{12-(n-1)P}} = \frac{12P[12-(n-1)P]}{12[12-(n-1)P]-12P(n-1)} =$$

$$= \frac{12P-(n-1)P^2}{12-(n-1)P-P(n-1)} = P\,\frac{12-(n-1)P}{12-2(n-1)P}$$

Esta notable fórmula da una gran aproximación cuando el tiempo es muy elevado y se requiere fácilmente en la memoria.

El cálculo de $P = (n/a_{\overline{n}|i})^{2/n+1} - 1$ generalmente se calcula por logaritmos o bien por la ayuda de una calculadora.

Un ejemplo de la aplicación de esta fórmula es:

Se requiere saber el tipo de interés que rige en una operación por medio de la cual va a cancelarse un prestámo de N$300 000 , durante 10 años. abonando una anualidad vencida de N$3500.

Fórmula de Baily: $i \cong P\,\dfrac{12-(n-1)P}{12-2(n-1)P}$

Cálculo de P: $(n/a_{\overline{n}|i})^{2/n+1} - 1 = \left(\dfrac{10}{300000/35000}\right)^{2/11} - 1$

$$P = (35000/300000)^{2/11} - 1 = (7/6)^{2/11} - 1 = 0.028425$$

Entonces

$$i \cong 0.028425\,\frac{12-9\times 0.028425}{12-18\times 0.028425} = 0.02905$$

$i \cong 2.905\%$

La fórmula de Baily se puede aplicar en las Rentas diferidas ; se sigue el mismo procedimiento de cálculo que para la inmediata, por lo cual no se repite. Siendo d el tiempo diferido la fórmula final es

$$i \cong P \frac{12(n+1+2d)-P(n^2-1)}{12(n+1+2d)-2P(n^2-1)}$$ y ahora P vale para este caso:

$$P = (n/d| a_{\overline{n|}i})^{2/n+1+2d} - 1$$

obsérvese que en la inmediata es d=0

Haciendo las mismas consideraciones que hizo Baily se pueden obtener los demás cálculos en las rentas anticipadas o rentas de pago adelantado, etc.

La fórmula de Baily también se puede aplicar en la obtención del monto. Sabemos que el monto de una renta es el mismo para las inmediatas, las diferidas y las anticipadas. La expresión del monto es:

$$S_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$ la multiplicamos por 1,

resultando: $$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i(1+i)^{-n}}$$ esta fórmula es la de una

renta diferida, y con la fórmula de Baily bastará hacer la para encontrar el valor de i cuando nos den como dato el monto y por lo tanto será:

$$i \cong P \frac{12[n+1+2(-n)]-P(n^2-1)}{12[n+1+2(-n)]-2P(n^2-1)} = P\frac{12(1-n)-P(n^2-1)}{12(1-n)-2P(n^2-1)}$$

$$= P\frac{12+P(n+1)}{12+2P(n+1)} \qquad P= (n/S_{\overline{n|}i})^{2/1-n} -1 = (S_{\overline{n|}i}/n)^{2/n-1} - 1$$

Si la renta fuese de pago adelantado se tendría

$$S_{\overline{n|}i} = (1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i(1+i)^{-(n+1)}}$$ de aquí tenemos

aplicando la fórmula de Baily

$$i \cong P\frac{12[n+1+2[-(n+1)]]-P(n^2-1)}{12[n+1+2[-(n+1)]]-2P(n^2-1)} = P\frac{12[-(n+1)]-P(n^2-1)}{12[-(n+1)]-2P(n^2-1)} =$$

$$= P\frac{12+P(n-1)}{12+2P(n-1)} \qquad P = [\, n/S_{\overline{n}|i}\,]^{-2/n+1} - 1 =$$

$$P = [S_{\overline{n}|i} \;/n\;]^{2/n+1} - 1$$

Un ejemplo para ilustrar este tema:

Se deposita en un Banco una anualidad de N$10 000 durante 10 años, al cabo de los cuales el capital acumulado es de $132 067.87 ¿ A qué tanto porciento funcionó el depósito?

Con nuestros datos los sustituimos y tenemos en la fórmula de Baily y tenemos:

$$i \cong P\,\frac{4+3P}{4+6P} = 0.051872\,\frac{4+3(0.051872)}{4\;+6(0.051872)} = 0.499999$$

$$\cong 5\%$$

Para calcular P se hizo lo siguiente:

$$P = [\, S_{\overline{n}|i} \;/n]^{2/n+1} -1 = (\frac{13267.87}{10000x10})^{2/11} -1 =$$

$$P = 0.051872$$

Este apendice tiene la finalidad de dar una opción para encontrar de otra forma el interés, que se pudierá aplicar en una anualidad o en un monto con más exactitud, para los cálculos requeridos

EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS

Sección 1.

Ejemplo 1.- ¿Cuál es el valor en efectivo de una anualidad de N$ 10.00 al final de cada tres meses durante 5 años, suponiendo un interés anual del 56% convertible trimestralmente?

Solución:

R = 10

n= 5(4)=20 cinco por cuatro trimestres cada año

i = 0.56/4 = 0.14

Sustituyendo en nuestra fórmula tenemos:

$$A = 10\,\frac{1 - (1.14)^{-20}}{0.14} = 10(6.62313055)$$

$$A = N\$\ 66.231$$

Ejemplo 2.- ¿Cuántos pagos mensuales de N$ 45 serán necesarios para liquidar una deuda de N$2 000 contraída hoy con intereses del 65 % anual convertible mensualmente?

Solución:

A = N$2 000

$$2000 = 45\,\frac{1 - (1.05416667)^{-n}}{0.05416667}$$

R = N$45

i = 0.65/12 = 0.05416667

n = ?

Ejercicio 1.- UNA PERSONA QUE VIAJA FUERA DE LA LOCALIDAD DEJA UNA PROPIEDAD EN ALQUILER POR 5 AÑOS, CON LA CONDICIÓN QUE SE PAGUE N$9 POR TRIMESTRE VENCIDO QUE SERÁN CONSIGNADOS EN UNA CUENTA DE AHORROS QUE PAGA EL 8% NOMINAL ANUAL. HALLAR EL MONTO EN LOS 5 AÑOS Y EL VALOR ACTUAL DEL CONTRATO DEL ALQUILER.

SOLUCIÓN: S = N$ 218.67

A = N$ 147.16

EJERCICIO 2.- UNA PERSONA DESEA COMPRAR UNA RENTA DE N$20 PAGADERA SEMESTRALMENTE, DURANTE LOS PRÓXIMOS 10 AÑOS. HALLAR A LA TASA DEL 6% EL COSTO DE LA ANUALIDAD.

SOLUCIÓN A = N$ 297.55

Sección 1.2

Ejemplo 1.- Calcúlese el valor actual de 9 pagos bimestrales de N$50 con interés de 10.28 por ciento bimestral:

a) Si se hacen por anticipado

b) Si se hacen vencidos

c) Determine y explique la diferencia entre a) y b)

Solución:

$A = ?$

$n = 9$

$R = 50$

$i = 0.01028$

a) Aplicando la fórmula de una anualidad anticipada y sustituyendo, tenemos

$$A = 50 \left[1 + \frac{1 - (1.1028)^{-9+1}}{0.1028} \right]$$

$$A = 50 \left[1 + 5.28097770 \right] = \text{N\$ } 314.049$$

b)

$$A = 50 \; \frac{1 - (1.1028)^{-9+1}}{0.1028} = \text{N\$ } 284.774$$

c) Es mayor a) con respecto a b) debido a que es una anualidad anticipada, y ésta comienza primero a generar intereses.

EJERCICIO 1.- EN UNA TIENDA SE VENDE UNA BICICLETA POR N$80.00 AL CONTADO O MEDIANTE 5 ABONOS MENSUALES ANTICIPADOS. SI EL INTERÉS ES DE 72.24 POR CIENTO CONVERTIBLE MENSUALMENTE, CÁLCULE EL VALOR DEL PAGO.

SOLUCIÓN $R = $ N$17.92

EJERCICIO 2.- EN UN ALMACÉN SE VENDE UN MUEBLE DE COMEDOR POR N$280.00 AL CONTADO MEDIANTE PAGOS MENSUALES ANTICIPADOS DE N$29.285. SI EL INTERÉS ES DE 60.36 % CONVERTIBLE MENSUALMENTE , ¿ CUÁNTOS PAGOS ES NECESARIO HACER?

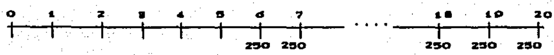
SOLUCIÓN $N = 10$ PAGOS

Sección 1.3

Ejemplo 1.- Calcular el valor actual de una renta semestral de N$250 durante 7 años, si el pago semestral se realiza dentro de 3 años y el interés es del 27% semestral

Solución

Haremos primero el diagrama para reconocer nuestro problema:



son 7 años equivalente a 14 semestres, que se inician al final del sexto periodo 19, aplicando la fórmula tenemos:

$$A = 250 \; \frac{1 - (1.27)^{-14}}{0.27} \; (1.27)^{-5}$$

$$A = 250(3.5737171)(0.30267838) = N\$270.388$$

EJERCICIO 1.- EL 14 DE MAYO DEL AÑO 1 SE DEPOSITARON N$750 EN UN FONDO DE INVERSIONES CON EL OBJETO DE RETIRAR 10 MENSUALIDADES A PARTIR DEL 14 DE FEBRERO DEL AÑO 3. SI LOS INTERESES QUE GANA LA INVERSIÓN SON DEL 57.48% CAPITALIZABLE CADA MES. HALLAR EL VALOR DE LAS MENSUALIDADES QUE SE PODRÁN RETIRAR.

SOLUCIÓN R = N$245.077

EJERCICIO 2.- SI SE DEPOSITAN N$2 000 EN UNA CUENTA DE INVERSIONES QUE PAGA EL 66% CAPITALIZABLE MENSUALMENTE ¿ CUÁNTOS RETIROS MENSUALES DE N$250 SE PODRÁN HACER COMENZANDO DENTRO DE 6 MESES?

SOLUCIÓN N = 15.9942280 BIEN 15 MENSUALIDADES DE N$250 Y UNA DE N$288.25

Sección 1.4.1

Ejemplo 1.- ¿Cuál es el monto y el valor actual de un conjunto de 24 pagos bimestrales de N$ 45 si el interés es del 18% trimestral efectivo? Utilice la tasa equivalente.

Solución

Se requiere encontrar qué tasa efectiva bimestral es equivalente a la tasa efectiva trimestral:

$(1+i')^{3/2} = 1.18 \qquad 1 + i' = 1.18^{2/3} \qquad i' = 0.11666097$ efectiva bimestral

$$S = 45 \frac{(1.11666097)^{24} - 1}{0.11666097} = 45\,(112.5399641) = 564.298$$

y el valor presente conociendo el monto:

$$A = 5\ 064.298(\ 1.11666097)^{-24} = 5\ 064.298(0.07077831)$$
$$= N\$\ 358.432$$

o en forma de anualidad:

$$A = 45\ \frac{1 - (1.116667097)^{-24}}{0.116667097} = 45(\ 7.965163347) = N\$\ 358.432$$

Ejemplo 2.- ¿ Qué pago quincenal es equivalente a uno trimestral de N$250 si el interés es del 68% capitalizable semestralmente?
Solución

Hay que ver que el 68% capitalizable semestralmente produce el 34% efectivo semestral. Luego encontrando la tasa quincenal equivalente tendremos 12 quincenas por semestre:

$$(1+i')^{12} = 1.34 \qquad 1+ i' = 1.34^{1/12} \qquad i' = 0.02468898$$

y planeando la anualidad equivalente tenemos:

$$S = R\ \frac{(1+i')^{n} -1}{i'} \qquad 250 = R\ \frac{(1.02468898)^{6} -1}{0.02468898}$$

$$250 = R\ 6.38275359 \qquad R = \frac{250}{6.38275359} = N\$\ 39.168$$

Es de notarse que no sólo eran distintos los periodos de pago y de capitalización, sino que también se incluía otro período de pago diferente a esos dos.

EJERCICIO 1.- UN EMPLEADO ADQUIERE UN SEGURO PARA SU AUTOMÓVIL A TRAVÉS DE LA POLIZA GRUPAL DE LA EMPRESA DONDE TRABAJA. SI EL VALOR DE CONTADO DEL SEGURO ES DE N$175 000, LA VIGENCIA DE LA PÓLIZA ES DE UN AÑO, EL INTERÉS ES DEL 48% CAPITALIZABLE MENSUALMENTE Y VA A PAGAR MEDIANTE DESCUENTOS QUINCENALES POR NÓMINA, ¿ CUÁNTO ES LO QUE LE DESCONTARÁN CADA QUINCENA?

SOLUCIÓN $R = N\$9\ 291.90$

EJERCICIO 2.-¿ A QUÉ TASA DE INTERÉS EFECTIVA ANUAL TENDRÁ QUE HACERSE 15 DEPÓSITOS BIMESTRALES DE N$50 PARA QUE ARROJEN UN MONTO DE N$1600 AL MOMENTO DE HACER EL ÚLTIMO PAGO ?

SOLUCIÓN $i'= 0.10089965$
ES LA TASA BIMESTRAL Y PARA ENCONTRAR LA TASA EFECTIVA ANUAL

$$(1.10089965)^{6} - 1 = 0.78027217$$

Sección 1.4.2

Ejemplo 1.- Cuál es el valor actual de un conjunto de 25 pagos semestrales anticipados de N$ 100 si el interés es el 69% capitalizable cada cuatro meses.

Solución

Tenemos que la tasa efectiva equivalente por semestre es:el 69 % capitalizable cada 4 meses equivale al 23 % efectivo cada 4 meses y la tasa efectiva equivalente por semestre es:

$$i' = 1.23^{3/2} - 1 = 0.36413599$$

Ahora consideremos el valor actual de esta anualidad, y sustituyamos los valores y tenemos entonces:

$$A = 100 + 100\,\frac{1 - (1.36413599)^{-24}}{0.36413599} = 100\,[\,1 + 2.74463399]$$

$$A = N\$\ 374.463$$

EJERCICIO 1.- SE PUEDE COMPRAR UN ARTÍCULO QUE CUESTA N$300 MEDIANTE 9 PAGOS MENSUALES DE N$45, COMENZANDO AL MOMESNTO DE LA COMPRA ¿ QUÉ INTERÉS EFECTIVO ANUAL SE PAGA EN LA OPERACIÓN?
SOLUCIÓN $i' = 0.08370716$ Y EL INTERÉS EFECTIVO ANUAL ES:

$$i' = 1.08370716^{12} - 1 = 1.62887604 \quad \text{ó} \quad 162.90\%$$

Sección 1.4.3

Ejemplo 1.- El 2 de marzo del año 1, la Compañía Comercial , S.A. contrae una deuda de N$ 7 000 al 2 de junio del año 2. Poco tiempo antes de que venciera su adeudo, la Comercial le ofrece a su acreedor cambiar ese pago único, al 2 de junio de 5 pagos mensuales a realizar el primero el 2 de octubre del mismo año 2. Si acuerdan un interés efectivo anual del 65%, ¿ de cuánto deben ser los pagos mensuales?

Solución

La tasa equivalente :

$$(1 + i')^{12} = 1.65 \qquad i' = 1.65^{1/12} - 1 = 0.04261426$$

el valor del adeudo al 2 de septiembre del año 2

$$7000(1.04261426)^{3} = N\$\ 7\,933.577$$

La anualidad simple equivalente

$$7\,933.577 = R\,\frac{1 - (1.04261426)^{-5}}{0.04261426} = R\,(4.41931604)$$

$$R = N\$\ 1\ 772.577$$

Sección 1.5

Ejemplo 1.- Calcular el monto al cabo de un año de una renta mensual de N$1,000 a la tasa de 6% con capitalización continua.
Solución

Recordando nuestra fórmula de monto continuo tenemos:

$$\lim S = W \frac{e^{jt} - 1}{e^{j/p} - 1}$$

$W = 1\,000$, $j = 0.06$, $t = 1$, $p = 12$

$$\lim S = 1000 \frac{e^{0.06} - 1}{e^{0.06/12} - 1} = 1000 \frac{e^{0.06} - 1}{e^{0.005} - 1}$$

$y = e^{0.06}$, $\log y = 0.06(0.43421945) = 0.02605767$

$y = 1.06184$

$x = e^{0.005}$

$\log x = 0.005$, $\log e = 0.005(0.4342945) = 0.00217147$

$x = 1.005012$

$$\lim S = \frac{1.06184 - 1}{1.005012 - 1} = \frac{0.06184}{0.005012} = \text{N\$ } 12,\ 338.39$$

Ejemplo 2.- Hallar el valor actual de una anualidad cuyos pagos por periodo vencido son: $1,\ (1+r),\ (1+r)^2,\ \dots,(1+r)^{n-1}$
Solución

$$A = v + v^2(1+r) + v^3(1+r)^2 + \dots + v^n(1+r)^{n-1}$$

$$A = v[\,1 + v(1+r) + v^2(1+r)^2 + \dots + v^{n-1}(1+r)^{n-1}]$$

$$A = v\,\frac{(1+r)v^n - 1}{(1+r)v - 1}$$ reemplazando V por su valor tenemos $v = \dfrac{1}{1+i}$

se tiene:

$$A = \frac{\left[\frac{1+r}{1+i}\right]^n - 1}{r - i}$$

EJERCICIO 1.- HALLAR EL VALOR ACTUAL DE UNA RENTA SEMESTRAL DE N$20 PAGADERA DURANTE 3 AÑOS, CON LA TASA DEL 8% CON CAPITALIZACIÓN CONTINUA.

SOLUCIÓN A = N$ 72.459

EJERCICIO 2.-HALLAR EL VALOR ACTUAL DE 6 PAGOS ANUALES VENCIDOS, CON RAZÓN GEOMÉTRICA Q=1.3, SI EL PRIMER PAGO ES DE N$20 Y LA TASA DE INTERÉS DEL 8%.

SOLUCIÓN A= N$185.61

EJERCICIO 3.- UNA EMPRESA DE TRANSPORTES RECIBE N$50 DIARIOS EN FLUJO CONTINUO; HALLAR EL VALOR ACTUAL DEL INGRESO ANUAL CON LA TASA DEL 8% CON CAPITALIZACIÓN CONTINUA.

SOLUCIÓN A = N$ 17 539.08

Sección 2

Ejemplo 1.- ¿ Cuál es el valor actual de N$500.00 dentro de 5 años al 72% efectivo anual de una persona que tiene ahora 33 años de edad y esperamos que llegue a la edad de 38.?

Solución:

Corresponde a un Dotal puro, $_nE_x$ el valor actual de un N$1pagadero a una persona que tenga ahora la edad x y alcance la edad x+n para cobrar, se tiene:

$$_nE_x = (1+i)^{-n}\frac{l_{x+n}}{l_x} = (1.72)^{-5}\frac{9\ 492\ 626}{9\ 633\ 282} = 0.06546$$

y el valor actual del dotal es N$500 tenemos:

A = 500(0.6546) =N$ 32. 730

EJERCICIO 1.- ¿ CUÁL ES EL VALOR ACTUAL DE UN DOTAL PURO DE UN MILLÓN DE NUEVOS PESOS PAGADERO A UNA PERSONA DE 25 AÑOS SI VIVE PARA CUMPLIR 65 AÑOS, SI AHORA TIENE 32 Y EL INTERÉS ES DEL 18% ANUAL?

SOLUCIÓN A= N$ 958.90

Ejemplo 2.- Hallar la Prima Neta única de una anualidad vitalicia ordinaria de N$1 000 anuales para una persona de 30 años de edad.

Solución: Recordando que $a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$ entonces tenemos:

$$1000a_{30} = 1000\frac{N_{31}}{D_{30}} = 1000\frac{10\ 153.48}{440.801} = \text{N\$ } 23\ 034.16$$

Ejemplo 3 .- Hallar la Prima neta única de una anualidad vitalicia anticipada de N$50 anuales, para una persona de 20 años de edad.

Solución: recordando $\ddot{a} = \frac{N_x}{D_x} = \frac{N_{20}}{D_{20}}$ tenemos entonces

$$50\ \ddot{a}_{20} = 50\frac{15744216}{580662} = \text{N\$ } 1355.71$$

EJERCICIO 2.- UNA VIUDA DE 55 AÑOS DESEA QUE SE LIQUIDE LA SUMA ASEGURADA DE N$25 EN FORMA DE UNA ANUALIDAD DE VITALICIA ANTICIPADA. HALLAR LA RENTA ANUAL DE LA ANUALIDAD.

SOLUCIÓN: R = N$1760.05

EJERCICIO 3.- EL SR. LÓPEZ RECIBE N$10 000 DE UN FONDO DE RETIRO AL CUMPLIR 57 AÑOS DE EDAD. ¿ QUÉ PAGO ANUAL RECIBIRÁ SI UTILIZA DICHA CANTIDAD EN LA COMPRA DE:

(a) UNA ANUALIDAD VITALICIA

(b) UNA ANUALIDAD VITALICIA CUYO PRIMER PAGO VENCE A LOS 65 AÑOS DE EDAD

SOLUCIÓN

(a) R = N$ 808.98

(b) R = N$1 516.50

EJERCICIO 4.- LA SRITA MARTÍNEZ, CUYA EDAD ES DE 25 AÑOS, PLANEA RETIRARSE A LOS 55 AÑOS. COMPRA UNA ANUALIDAD ACORDANDO HACER PAGOS ANUALES IGUALES, EL PRIMERO EL DIA DE HOY Y EL ÚLTIMO AL CUMPLIR 54. HALLAR EL PAGO ANUAL REQUERIDO R PARA ADQUIRIR LA ANUALIDAD.

SOLUCIÓN R= N$ 807.28

EJERCICIO 5.- EL SR. HERNÁNDEZ, QUE TIENE 25 AÑOS, PAGA EL DIA DE HOY N$ 150 EN UN FONDO DE RETIRO Y PAGARÁ N$150 ANUALES HASTA LOS 60 AÑOS INCLUSIVE. EL SR. HERNÁNDEZ RECIBIRÁ AL INICIAR LOS 65 AÑOS UNA PENSIÓN ANUAL VITALICIA R. ¿CUÁL ES EL VALOR DE R

SOLUCIÓN R = N$1 448.66

EJERCICIO 6.- DON JOSÉ A LOS 31 AÑOS DE EDAD TOMA UNA POLIZA DE SEGURO DE VIDA, PAGANDO PRIMAS DE N$56.25 AL PRINCIPIO DE CADA AÑO, POR TODA LA VIDA. HALLAR EL VALOR PRESENTE DE LAS PRIMAS.

SOLUCIÓN R = N$1 332.81

EJERCICIO 7.- ¿ CUÁL ES EL IMPORTE DE LA PRIMA ANUAL DEL PROBLEMA ANTERIOR SI DON JOSÉ ACUERDA PAGAR 20 PRIMAS.

SOLUCIÓN P = $87.39

Sección 3

Ejemplo 1.- Una persona adquiere un automóvil a crédito. El auto cuesta \$1 800 000. Si da un enganche de \$800 000 y comienza a pagar mensualidades vencidas de \$80 000 ¿ Qué proporción del saldo habrá amortizado exactamente al pagar la décima segunda mensualidad si se pactó un interés de 65% convertible mensualmente?

Solución:

Primero calculamos el monto de los valores adquiridos por el deudor al momento del pago número 12

$A = 1\ 800\ 000 - 800\ 000 = 1\ 000\ 000$

$R = 80\ 000$

$n = 12$

$i = 0.65/12 = 0.05416667$ entonces

$$80\ 000\ \frac{(1.05416667)^{12} - 1}{0.05416667} - [\ 1000\ 000(1.05416667)^{12} - 100000]$$

$= 1\ 304\ 513.96 - 883\ 264.72 = 421\ 249.24$

Hasta el pago 12 ha amortizado \$421 249. 24 y la proporción que ha amortizado sobre el sldo de 1000 000 es proximadamente de 42.12%

Ejemplo 2.- Una persona recibe una herencia de \$3 000 000 y decide depositarla en una cuenta que paga el 57% convertible mensualmente con la intención de hacer retiros mensuales de \$250 000. ¿ Cuántos retiros completos de esa cantidad podrá hacer antes que se agote su herencia?

Solución

$A = 3\ 000\ 000$

$R = 250\ 000$

$i = 57/12 = 0.0475$

$n = ?$

$$3000\ 000 = 250\ 000\ \frac{1 - (1.0475)^{-n}}{0.0475}\ ;\ \frac{0.0475*3000000}{250\ 000} - 1 = -1.0475^{-n}$$

$1.0475^{-n} = 0.43$ tomamos logaritmos y tenemos:

$-\ n \log 1.0475 = \log 0{,}043$

$n = -\log 0.43/ \log 1.0475 \qquad n = 18.1865123$

Ejemplo 3.- En septiembre un almacén ofrece en venta un aparato de televisión en \$115 000 a pagar en 6 abonos mensuales iguales con el 66% de interés convertible mensualmente. El primer pago se debe realizar el 31 de enero del año siguiente. Si una persona adquiere uno de estos aparatos el 31 de octubre;

a) ¿Cuál es el valor de cada uno de los pagos?

b) Construya una tabla de amortización que muestre el comportamiento de la operación.

Solución

El cliente disfrutará del televisor desde el 31 de octubre, por lo que contrae la deuda desde ese día, y por ello el valor de su compromiso al 31 de diciembre es:

$$115\ 000(1.055)^2 = 115(1.113025) = 127\ 997.88$$

El comportamiento de esta operación corresponde a una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

$A = 127\ 997.88 \qquad i = 0.055 \qquad n = 6 \qquad R = ?$

por lo que el pago que debe realizar el cliente cada mes es de:

$$A = R\,\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \qquad R = \frac{C\,i}{1 - (1+i)^{-n}}$$ sustituyendo

valores tenemos R = \$25 622.48

y b) la tabla de amortización

Fecha	Pago	0.055 de interés sobre el saldo	amortización	Saldo
31 de oct.	---	---	---	115 000.00
30 de nov.	---	6 325.00	---	121 325.00
31 de dic.	---	6 672.88	---	127 997.88
31 de ene.	25 622.48	7 039.88	18 582.60	109 415.28
28 de feb	25 622.48	6 017.84	19 604.64	89 810.64
31 de mar.	25 622.48	4 939.59	20 682.89	69 127.75
30 de abr.	25 622.48	3 802.03	21 820.45	47 307.30
31 de may.	25 622.48	2 601.90	23 020.58	24 286.72
31 de jun.	25 622.48	1 335.77	24 286.71	----
Totales	153 734.88	38 734.89	127 997.87	

EJERCICIO 1.- HACER UNA TABLA DE AMORTIZACIÓN PARA UN CRÉDITO QUE SE CONTRATA EL 3 DE JUNIO POR $800 000 QUE HABRÁ DE PAGARSE MEDIANTE CUATRO PAGOS BIMESTRALES, SI EN LOS CUATRO PRIMEROS MESES SE APLICA UNA TASA DEL 65% ANUAL Y EN LOS ÚLTIMOS CUATRO MESES SE APLICA LA TASA, DE 60%, AMBAS CON CAPITALIZACIÓN BIMESTRAL, Y SI, ADEMÁS SE DEBE AMORTIZAR UNA CUARTA PARTE DE LA DEUDA POR CADA PAGO.

SOLUCIÓN

FECHA	PAGO	INTERÉS SOBRE EL SALDO	AMORTIZACIÓN	SALDO
3 DE JUN.	---	----	----	800 000.00
3 DE AGO.	286 666.67	86 666.67	200 000.00	600 000.00
3 DE OCT.	265 000.00	65 000.00	200 000.00	400 000.00
3 DE DIC.	240 000.00	40 000.00	200 000.00	200 000.00
3 DE FEB.	220 000.00	20 000.00	200 000.00	
TOTALES	1011 666.67	211 666.67	800 000.00	

EJERCICIO 2.- HACER UNA TABLA DE AMORTIZACIÓN PARA UNA DEUDA DE $500 000 A PAGAR EN TRES MESES MEDIANTE ABONOS VENCIDOS, CON EL 33% SEMESTRAL CON CAPITALIZACIÓN MENSUAL, AMORTIZANDO EL 50, 30 Y 20% DE LA DEUDA EN EL PRIMERO, SEGUNDO Y TERCER PAGOS, RESPECTIVAMENTE.

SOLUCIÓN:

FECHA	PAGO	INTERÉS SOBRE EL SALDO 5.5% MENSUAL (0.33/6)	AMORTIZACIÓN	SALDO
AL CONTRATAR LA OPERACIÓN	---	---	---	500 000.00
FIN MES 1	277 500.00	27 500.00	250 000.00	250 000.00
FIN MES 2	163 750.00	13 750.00	150 000.00	100 000.00
FIN MES 3	105 500.00	5 500.00	100 000.00	---
TOTALES	546 750.00	46 750.00	500 000.00	

EJERCICIO 3.- UNA DEUDA DE $500 000 SE DEBE AMORTIZAR EN 5 AÑOS CON PAGOS ANUALES IGUALES CON EL 8% EFECTIVO SOBRE SALDOS INSOLUTOS. HALLAR EL VALOR DE CADA PAGO Y HACER LA TABLA DE AMORTIZACIÓN DE LA DEUDA.

8% DE INTERÉS

FECHA	PAGO ANUAL	SOBRE SALDOS	AMORTIZACIÓN	SALDO
COMIENZO AÑO				500 000.00
FIN AÑO 1	125 228.23	40 000.00	85 228.23	414 771.77
FIN AÑO 2	125 228.23	33 181.74	92 046.49	322 725.28
FIN AÑO 3	125 228.23	25 818.02	99 410.21	223 315.07
FIN AÑO 4	125 228.23	17 865.21	107 363.02	115 952.05
FIN AÑO 5	125 228.23	9 276.16	115 952.05	000.00
TOTALES	626 141.13	126 141.13	500 000.00	

EJERCICIO 4.-UNA DEUDA DE $100 000.00 DEBE AMORTIZARSE EN 2 1/2 AÑOS, CON 4 ABONOS SEMESTRALES DE $25 000 POR SEMESTRE VENCIDO Y UN ABONO AL FINAL DEL QUINTO SEMESTRE QUE EXTINGA TOTALMENTE LA DEUDA CON LA TASA DEL 10% CAPITALIZABLE SEMESTRALMENTE SOBRE SALDOS INSOLUTOS. ¿ CUÁL ES EL VALOR DEL QUINTO PAGO?

SOLUCIÓN

EL PAGO QUE EXTINGUE LA DEUDA ES LA SUMA DE LOS INTERESÉS, MÁS EL SALDO FINAL DEL CUARTO SEMESTRE $ 14 487.30

Sección 4

Ejemplo 1.- Con el objeto de ampliar su negocio, un comerciante contrae una deuda de 5 años por $600 000 con el 10% de interés convertible semestralmente. Para cancelar la deuda, establece una reserva cada final de semestre, en una cuenta de ahorros que paga el 8% convertible semestralmente. Hallar (a) el desembolso semestral que tiene el comerciante; (b) la tasa nominal de interés que paga el comerciante.

Solución

(a)

$S = 600\ 000 \quad j = 0.04 \quad m=2 \quad i=0.04 \quad n = 5(2)=10$

de la fórmula:

$S = R\, s_{\overline{n}|i}$ despejando R y sustituyendo los valores tenemos:

valor Reserva $R = \$49\ 974.56$ semestrales

cargo por interesés = 600 000(0.05) = \$ 30 000 semestrales

desembolso semestral = 30 000.00 + 49 974.56 = 79 974.56

(b)

Si la suma de $79 974.56 que paga el comerciante semestralmente, se destinará a cancelar la deuda, se tendría:

$A = R\, a_{\overline{n}|i} \quad A = 600\ 000 \quad R = 79\ 974.56 \quad m=2 \quad n=10$

despejando la anualidad y sustituyendo valores tenemos:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{600000}{79\ 974.56} = 7.50238578$$ se interpola y se tiene

una $i = 0.056$ 5.6% semestral

Ejemplo 2.- Demostrar que en un fondo de amortización con cuotas R por periodo, el total de los intereses agregados al fondo en el periodo k-ésimo es:

$$\text{total de intereses agregados} = R\,\frac{(1+i)^{k-1} - 1 - ki}{i}$$

Demostración: El monto S acumulado en el fondo, hasta el periodo k-ésimo, es:

$$S = R\, s_{\overline{k}|i} = \frac{(1+i)^k - 1}{i}$$ restando el valor de las cuotas pagadas se tiene:

$$\text{intereses agregados} = S - kR = R\,\frac{(1+i)^k - 1}{i} - kR$$

$$\text{intereses agregados} = R\,\frac{(1+i)^k - 1 - ki}{i}$$

Ejemplo 3.-Sandra compra un refrigerador que cuesta \$120 000 al contado, paga 40 000 de enganche y conviene en amortizar el resto mediante 6 pagos bimestrales iguales pagando intereses a razón del 60% convertible semestralmente. a) Encontrar el valor de los pagos, b) construir una tabla que muestre la forma en que se va amortizando la deuda y c) determinar el valor de los derechos que el comprador ha adquirido sobre el refrigerador inmediatamente antes del cuarto pago.

Solución:

a)

$A = 120\ 000 - 40\ 000 = 80\ 000 \quad n=6 \quad i = 0.60/6 = 0.10$

despejando a R y sustituyendo valores tenemos:

$$R = \frac{A\ i}{1-(1+i)^{-n}} = \$\ 18\ 368.59$$

b)

FECHA	PAGO BIMESTRAL	10% DE INTERES SOBRE SALDO	AMORTIZACIÓN	SALDO
AL MOMENTO DE LA OPERACIÓN				80 000
FIN BIMESTRE				
1	18 368.59	8 000.00	10 368.59	69 631.41
2	18 368.59	6 963.14	11 405.45	58 225.96
3	18 368.59	5 822.60	12 545.99	45 679.97
4	18 368.59	4 568.00	13 800.59	31 879.38
5	18 368.59	3 187.94	15 180.65	16 698.73
6	18 368.59	1 669.87	16 698.73	-----
TOTALES	110 211.55	30 211.55		

c) Los intereses devengados en cuatro meses por la posesión del refrigerador son:

$$80\ 000[(1.1)^4 - 1] = 37\ 128$$

El valor de los tres primeros pagos al momento de realizar el tercero es :

$$18\ 368.59\ \frac{1.1^3 - 1}{0.1} = 60\ 800.03$$ y este valor al final del cuarto pago es 60 800.03* 1.1 = 66 880.04

por lo que los derechos adquiridos por el comprador en el cuarto pago es 66 880.04 - 37 128 = \$ 29 752.04

EJERCICIO 1.- UNA PAREJA DESEA REUNIR 4000 DOLARES PARA PAGAR UNA ENTRADA DE UNA CASA EL 1- 08- 76 , PARA ELLO TIENE PREVISTO EFECTUAR DEPÓSITOS SEMESTRALES EN UNA INSTITUCIÓN DE AHORRO, EL PRIMERO DE ELLOS EL 1- 08- 72 Y EL ÚLTIMO EL 1 -02 -76. SI LA INSTITUCIÓN PAGA DE AHORRO PAGA EL 4% CONVERTIBLE SEMESTRALMENTE EL 1 DE FEBRERO Y EL 1 DE AGOSTO. ¿ CUÁNTO DEBERÁ DEPOSITAR ESTA PAREJA CADA SEMESTRE?

SOLUCIÓN

DEPÓSITOS DE 456.91 DOLARES QUE GENERAN UN MONTO DE 4000.08 DOLARES.

EJERCICIO 2.- UNA EMPRESA OBTIENE UN CRÉDITO DE 80 000 DOLARES POR 12 AÑOS AL 4%. SI PARA REEMBOLSAR ESTE CRÉDITO SE CONSTITUYEN UNOS FONDOS AL 3% ¿CUÁL SERÁ EL COSTO TOTAL ANUAL DEL CRÉDITO?

SOLUCIÓN EL COSTE SERÁ DE 8836 DOLARES.

C O N C L U S I O N E S

La presente tesis, tal y como se denominó, no pretende ser una guía perfecta, si no una opción sencilla, útil y practica, para aquellos alumnos de la carrera de Actuaría, especificamente en lo referente a la materia de Matemáticas Financieras.

En el presente trabajo se abordaron temas de sumo interés, ya que el tratar de anualidades, amortizaciones y fondos de amortización, es hablar de lo que será el quehacer cotidiano del actuario en funciones, por tanto, se puede decir, que todo aquel estudiante que pretenda vivir de su carrera tiene por fuerza que saber el manejo de estos conceptos, ya que un error podría ocsionar pérdidas a la compañía en que trabaje, caso contrario, el buen manejo traerá ganancias tanto a la empresa como al actuario.

Es menester resaltar, que se trató de elaborar algo sencillo y que resultará interesante, para aquel que lo consultara, mas sin embargo, no por ser sencillo significa que sea incompleto, es todo lo contrario, ya que solo en el capitulo de anualidadesse podrá apreciar que se trataron, la definición, clasificaciones de las mismas, considerando los diversos criterios de los diferentes autores ya conocidos.

En lo relativo a las amortizaciones, normalmente son tratados en forma árida y pesada, por tanto se pretende en este capitulo darle cierta dinámica, así como un interés al lector para continuar la lectura de este proyecto de texto.

En lo concerniente a los fondos de amortización, se continuo con la misma tónica tocando los temas de mayor importancia y frecuencia considerando la economía y la politica económica actual.

Si consideramos que los actuarios son en cierta forma los profesionistas de enlace con el resto de las disciplinas, entonces tenemos que utilizar un lenguaje apropiado para cada una de estas ramas del conocimiento, que sea entendible y manejable.

Por último y teniendo en cuenta lo expresado en el párrafo anterior es menester que a una de las materias de mayor interés en nuestra carrera y la que por desgracia no ha sido suficientemente valorada, se le dé la importancia que tiene y para ello es importante que los alumnos entiendan en forma sencilla y sumamente practica la materia de Matemáticas Financieras y muy especialmente lo relativo a las anualidades, amortizaciones y fondos de amortización, ya que al hacerlo tendrán mayores y mejores resultados.

B I B L I O G R A F I A.

Teoria del Interés y Apliacaciones Financieras; Salas Torá Jorge. Copyright, Jorge Salas Torá,1992 p.p. 43-136.

Cálculos Financieros ; Alcaráz; Fondo de Cultura Económica, México, Buenos Aires, 1958. p.p. 1-700; 910- 1216.

Matemáticas Financieras; Lincoyan Portus Goviden, Tercera Edición, Mc. Graw -Hill, 1975 ed.1990; p.p. 129 -342; 123- 345.

Matemáticas Financieras; A. Diaz Mata , V. M. Aguilera Gómez Ed. Mc. Graw Hill, 1988; p.p. 138- 245; 415- 430.

Matemáticas Financieras Benjamin de la Cueva G. Textos Universitarios, 1971; p.p. 51-95.

Matemáticas Financieras. Moore
Justin Herlley, 1984,
p.p. 134-285

Matemáticas Financieras, Schams
Ed. Mc. Graw Hill , 1985
p.p. 88- 151

Mathematics of Finance
Theory and Practice;Donal
Schutle and Jame Morris;
Second Edition,
p.p. 43 -213

Matemáticas Financieras
Cissell, Ed. CEC S A Ed.
Continental, 1981;
p.p. 167-300; 391-416.