



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería

UN ALGORITMO PARA LA OPTIMIZACION
ESTOCASTICA DE ALGUNOS MODELOS
DINAMICOS

GILBERTO PEREZ LECHUGA

TESIS DOCTORAL
PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERIA

ASESOR: DR. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA

1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

UN ALGORITMO PARA LA OPTIMIZACION
ESTOCASTICA DE ALGUNOS MODELOS DINAMICOS

TESIS DOCTORAL
QUE PRESENTA

GILBERTO PEREZ LECHUGA

INVESTIGACION DE OPERACIONES

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F.
AGOSTO, 1993

RESUMEN

En este trabajo, se desarrolla un algoritmo de búsqueda aleatoria para problemas de optimización con funciones objetivo no diferenciables. El algoritmo utiliza estimadores estadísticos de los subgradientes (quasi gradientes estocásticos) para determinar las direcciones de descenso. La Técnica de Simulación Montecarlo es utilizada en el algoritmo para generar nuevos puntos factibles.

Se mide la eficiencia del algoritmo desarrollado en función del número de variables, y número de puntos evaluados para determinar la dirección de descenso. Se analizan los casos donde el valor esperado del quasigradiente estocástico cuenta con información a priori. Se extiende el uso del algoritmo para la determinación del valor esperado mínimo de un proceso estocástico regenerativo, a este respecto, se propone también una técnica de simulación para estimar los vectores de estado del proceso, y se discute sobre las condiciones que éste debe cumplir para que exista un vector de estado estacionario.

Se muestra el potencial aplicativo del algoritmo desarrollado, en la determinación del mínimo valor esperado de clientes en un modelo de líneas de espera con servidores múltiples y flujos aleatorios desconocidos. Se determina también la política óptima de abastecimiento en un modelo de inventarios con demanda y tiempo de entrega aleatorios con densidades desconocidas. Se discute sobre la determinación de políticas óptimas en procesos Markovianos de decisión en ausencia de información a priori.

Se reporta la experiencia computacional y se discuten las ventajas y limitaciones del algoritmo propuesto, se incluyen también los resultados teóricos de la investigación. Se hace un análisis comparativo de nuestra propuesta con otros dos algoritmos, y se efectúa un estudio de casos extremos. Finalmente, se discute sobre las posibilidades de futuras investigaciones relacionadas con el tema.

Deseo agradecer al Dr. Francisco Venegas Martínez la dirección de esta investigación y la tutoría durante mi estancia en esta División de Estudios de Posgrado. Agradezco también al Dr. Sergio Fuentes Maya su constante apoyo y continua motivación para alcanzar mis objetivos.

Mi agradecimiento también al Comité Doctoral por la revisión y adecuación de mi trabajo, en especial a los Doctores Miguel Angel Gutiérrez Andrade y Jianyu You Lin, cuyos valiosos comentarios enriquecieron bastante esta tesis.

Una mención especial para mis amigos Ing. Brisia Jon Serrano por su ayuda en la elaboración del material de cómputo, y al M. en C. Sergio de los Cobos Silva quien siempre estuviera dispuesto a auxiliarme en algunos aspectos matemáticos relacionados con este trabajo.

Agradezco finalmente a mi familia: mi esposa Elvia, mis hijas Elvia y Alexis, así como a mi Madre Cecilia Lechuga Cebada y a mi cuñada Anita por el apoyo brindado durante estos cinco años.

Hubo varias Instituciones que me apoyaron para poder realizar mis estudios doctorales: UNAM, ITP. No.20, COSNET y CONACyT, a todas ellas GRACIAS!

INDICE

INTRODUCCION

CAPITULO I	OPTIMIZACION ESTOCASTICA	1
I.1	Clasificación de los Problemas Estocásticos.	1
I.2	Algunos Aspectos Sobre la Complejidad y Eficiencia Computacional en Optimización Estocástica.	6
I.3	Metodologías más Importantes de la Optimización Estocástica.	9
I.3.1	Diseño Experimental en Simulación.	10
I.3.2	Metodología de las Superficies de Respuesta.	11
I.3.3	Análisis de Perturbación.	14
I.3.4	Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	16
I.4	Optimización por Simulación.	19
I.4.1	Optimización de Respuesta Simple.	19
I.4.2	Optimización de Respuesta Múltiple.	20
I.4.3	Optimización por Búsqueda Estocástica y Simulación.	22
CAPITULO II	OPTIMIZACION POR BUSQUEDA ESTOCASTICA	24
II.1	Definición del Problema.	24
II.2	Sucesiones Fejer y Quasi Fejer.	25
II.3	Algoritmos de Búsqueda Aleatoria.	33
II.4	Eficiencia de los Algoritmos de Búsqueda.	34
II.4.1	Una Dirección de Descenso.	34
II.4.2	Una Función de Eficiencia.	35
II.5	Selección de Parámetros y Análisis de Casos Extremos	45
II.6	Incorporación de Información Priori en Quasi Gradientes Estocásticos	48

CAPITULO III	OPTIMIZACION DE SISTEMAS ESTOCASTICOS CON CARACTERISTICAS DE REGENERATIVIDAD	62
III.1	Procesos Estocásticos Regenerativos.	62
III.2	Simulación y Optimización de los Procesos Regenerativos.	65
CAPITULO IV	APLICACIONES	70
IV.1	Superficies de Prueba para la Simulación.	70
IV.2	Diseño Optimo de una Red de Servicios.	74
IV.3	Un Modelo de Inventarios con Déficit, Flujo y Revisión Continua.	84
IV.4	Búsqueda de una Política Optima en un Proceso Markoviano de Decisión en Ausencia de Información a Priori.	95
CAPITULO V	DISCUSION FINAL Y CONCLUSIONES	97
V.1	Aspectos Computacionales.	97
V.2	Conclusiones y Recomendaciones.	107
APENDICE A		110
REFERENCIAS		112

INTRODUCCION

La optimización estocástica como parte integral de la programación matemática ha sido relativamente poco explorada a pesar de su gran utilidad y versatilidad en el modelado de problemas con incertidumbre. Los modelos estocásticos ofrecen un rico campo de posibilidades de investigación en aspectos relacionados con la optimización y el control de sistemas.

Los problemas de optimización estocástica, comprenden una clase importante de modelos dinámicos de decisión secuencial, por ejemplo, algunas versiones estocásticas de expansión de capacidad, reemplazo de equipo, problemas de planeación de la producción, etc. Estas situaciones pueden modelarse como problemas de costos estocásticos, en los cuales el decisor se encuentra en total o parcial incertidumbre y por lo tanto desconoce a priori la magnitud y el tiempo de ocurrencia (o ambas) de los eventos aleatorios.

En algunos problemas de optimización, el decisor determina un conjunto de variables de control sujetas a un conjunto de restricciones; en un problema de optimización estocástica, el decisor tiene control sobre las variables de decisión pero no sobre las variables aleatorias que intervienen en el problema.

En muchos sistemas de tiempo continuo con características estocásticas, es posible aproximar con sistemas discretos y recabar las estadísticas a intervalos fijos de tiempo mediante un proceso de simulación, ejemplos de ello se pueden encontrar en redes de comunicación, líneas de producción, sistemas flexibles de manufactura, sistemas de tráfico, etc.

Un método básico para el estudio de sistemas estocásticos; los cuales no pueden ser tratados por técnicas analíticas, consiste en su simulación por computadora digital; en la mayoría de los casos no es tan importante la simulación en sí, sino más bien, obtener a partir de ella una evaluación de las propiedades del sistema con objeto de definir cuales son sus características óptimas de operación. Así, un problema de optimización puede estar íntimamente relacionado con las técnicas de simulación. El problema entra entonces, en una clase particular de problemas de optimización estocástica llamados *problemas de optimización por simulación*.

El propósito central de este trabajo es el de desarrollar un algoritmo de búsqueda

para la optimización de algunos modelos dinámicos, utilizando para ello la Simulación Monte Carlo¹ como principal herramienta de análisis.

En este trabajo, se propone un algoritmo de búsqueda aleatoria que estima subgradiientes de una función objetivo, y que, mediante una adecuada selección del parámetro de paso, genera movimientos en la dirección de descenso que lleven a la minimización de la misma. Por lo anterior, las direcciones de búsqueda son obtenidas mediante superficies de prueba construidas alrededor de cada punto; se introduce el concepto de expansión-contracción de las superficies de prueba. La determinación del valor esperado de los quasigradiientes cuando se cuenta con información a priori es otra aportación importante de esta investigación. La extensión de estas ideas al análisis de estabilidad asintótica en procesos regenerativos, constituye un aspecto importante que se trata en este trabajo, el objetivo es mostrar que bajo ciertas condiciones de periodicidad en un proceso, es posible determinar su vector estado estacionario y el valor esperado mínimo del proceso. Se discuten también las condiciones de convergencia del algoritmo en presencia del ruido.

El algoritmo desarrollado, se compara con dos de los algoritmos más conocidos en optimización estocástica, se discute sobre sus ventajas y limitaciones, y se reporta la experiencia computacional.

Como aplicaciones del algoritmo, se determina el valor mínimo esperado de clientes en un modelo de líneas de espera con servidores múltiples, y con flujo aleatorio entre los nodos. Se determina también la política óptima de abastecimiento en un modelo de inventarios con demanda y tiempos de entrega aleatorios con densidades desconocidas. Finalmente, se discute sobre la obtención de políticas óptimas en procesos Markovianos de decisión en ausencia de información a priori.

El trabajo está organizado como sigue: En el primer capítulo, se presentan algunos antecedentes de la programación estocástica; y se da una breve clasificación de los modelos más relevantes, en la sección I.2, se proporcionan los criterios de comparación entre algoritmos y algunos aspectos relacionados con su eficiencia. En las secciones I.3 y I.4, se describe el estado del arte sobre este tema, en él, se mencionan las principales metodologías y aportaciones más relevantes que se han originado en esta área.

El capítulo II, comienza con la definición del problema motivo de esta investigación; en la sección (II.2), se describen los fundamentos teóricos en los que se basa este trabajo,

¹Véase Reuben y Weissman (1977), y Sobol (1983).

para ello, se mencionan como antecedentes los trabajos de Ermol'ev (1969) y (1983), en el campo de las sucesiones Fejer y Quasi Fejer, elementos esenciales en la construcción de los algoritmos de búsqueda aleatoria. En la sección (II.3) se muestra, brevemente, la forma en que trabajan los algoritmos de búsqueda estocástica, esta discusión sirve de entrada a la sección (II.4) en la que se propone la construcción de una dirección de descenso en base al concepto de superficie de prueba; con los resultados anteriores, se desarrolla un algoritmo de búsqueda aleatoria utilizando el concepto de quasi gradiente estocástico. La eficiencia del algoritmo propuesto, constituye el tema central de la sección (II.4); en esta parte se muestra como influyen el número de variables del problema y la simulación de la superficie de prueba en la eficiencia de la búsqueda, se finaliza la sección con la prueba de convergencia del algoritmo desarrollado. En la sección (II.5) se discute la importancia y forma de selección de los parámetros involucrados en un algoritmo de búsqueda aleatoria, en particular, se describe la forma de como seleccionar los parámetros del algoritmo propuesto; asimismo, se muestra que la presencia de ruido en los modelos estocásticos no afecta la convergencia de los algoritmos de búsqueda.

En el capítulo III, se extiende el algoritmo para la estimación puntual del valor esperado mínimo de un proceso estocástico regenerativo, para esto, se presenta en la sección (III.2) una técnica de simulación de las realizaciones del proceso, y se muestra como se puede estimar por estadísticas básicas los valores esperados del mismo.

El capítulo IV, comienza con la descripción de las superficies de prueba en simulación, se muestran algunos algoritmos para simular esferas y elipsoides n -dimensionales, y se discuten algunos aspectos relacionados con su eficiencia. En la sección (IV.2) se muestra el uso del algoritmo desarrollado en la determinación del valor esperado mínimo de clientes en un sistema con servidores múltiples (uno por cada nodo), modelado como una red estocástica de flujo. En la sección (IV.3), en una segunda aplicación, se determina la política óptima de operación de un sistema de inventarios con flujo continuo, demanda y tiempos de entrega aleatorios. El capítulo termina con una discusión acerca de la utilidad del algoritmo en el análisis de un proceso Markoviano de decisión en ausencia de información a priori.

Finalmente, en el capítulo V, se hace un análisis comparativo de la técnica propuesta con otros algoritmos. Aquí, se muestran las ventajas y limitaciones, y se elaboran algunas recomendaciones para su uso. El capítulo termina con una discusión final acerca de las posibilidades de futuras investigaciones en las técnicas de búsqueda aleatoria.

CAPITULO I

OPTIMIZACION ESTOCASTICA

Las técnicas de la programación matemática están enfocadas a la solución de problemas de optimización relacionados con actividades de tipo industrial, administrativo, financiero, económico, ingenieril, etc.

En programación lineal se incorporan coeficientes tecnológicos (precios, costos y capacidad de producción etc.), los cuales son considerados parámetros completamente conocidos. Si se desea ser más realista, estos supuestos no siempre son ciertos; en la mayoría de las veces, sólo se cuenta con valores estimados o valores promedio y por lo tanto deben considerarse como tales, es decir como observaciones probabilísticas.

Por lo anterior, cuando en un problema de optimización matemática, se tienen una o varias variables aleatorias involucradas con distribuciones conocidas o no, se dice que el modelo corresponde a un problema de optimización estocástica, también llamado de programación probabilística. En este capítulo, se da una clasificación de los problemas de optimización estocástica y los esfuerzos hechos para obtener sus soluciones.

El capítulo se organiza como sigue: En la sección I.1 se plantean algunos problemas de optimización estocástica y se da una clasificación muy general de los mismos, en la sección I.2 se estudia el aspecto de complejidad computacional y se relaciona con el concepto de eficiencia; en la sección I.3 se detallan las principales metodologías de la optimización probabilística y su forma de operar, así como las aportaciones más relevantes al campo. En la última sección, se introduce el concepto de optimización por simulación. Se introduce también el concepto de búsqueda aleatoria en la solución de problemas de algunas funciones que no aceptan diferenciabilidad, con esto se concluye el capítulo.

I.1 CLASIFICACION DE LOS PROBLEMAS ESTOCASTICOS

Los problemas de optimización estocástica se obtienen al considerar una o más variables aleatorias dentro de cualquier problema de programación matemática; así pues,

se les puede encontrar bajo la forma de problemas lineales o no lineales (cuadráticos, posinómicos, etc.), o bien, mediante otro tipo de formulaciones en términos de programación dinámica, problemas variacionales o de control óptimo.

Así por ejemplo, en un problema lineal del tipo:

$$\text{Minimizar } Z = CX$$

Sujeto a:

$$AX \leq b, X \geq 0,$$

se suponen generalmente conocidos los parámetros A, b, C . Basta con tener algún elemento de A, b o C con características aleatorias para volver aleatorio al problema, en particular si C es aleatorio, entonces la minimización debe hacerse sobre el valor esperado de la función objetivo. En este sentido, las fuentes de aleatoriedad son de muy diversa índole dependiendo de la naturaleza del objeto de estudio. En todos los casos, el problema puede estar en cualesquiera de las siguientes dos circunstancias:

1. El vector $\theta = (A, b, C)$, tiene una distribución de probabilidad conocida.
2. El vector $\theta = (A, b, C)$, se constituye solamente de observaciones muestrales y en base a ellas se debe encontrar o estimar el vector óptimo de decisiones X^* .

La optimización estocástica puede ser activa o pasiva, en el primer caso, el enfoque activo, se basa en el hecho de *espera y observa*, esto es, el analista debe esperar a que se den las realizaciones de θ y aprovechar estos resultados en la implantación de su solución obteniendo el valor de X^* que optimiza a la función. La técnica, es especialmente útil en asignación de recursos, selección del tipo de producción, costos de inversión, etc.

El segundo enfoque, es llamado *aquí y ahora*; mediante esta filosofía, la decisión es hecha sin esperar a ver las posibilidades de θ , considerando solamente sus valores esperados como elementos para minimización del problema, ya que al establecerse esta interacción, se permite la adecuación de los valores de decisión a los observados en las correspondientes variables aleatorias. Esta técnica es especialmente útil en el análisis de modelos con esperanzas finitas sobre θ y valores de dispersión pequeños. En ambos enfoques, la idea más importante es la distribución de probabilidad del vector θ , esto puede ser a la vez, una técnica de ayuda en forma interactiva entre el analista y el

problema; o bien, puede generar una serie de perturbaciones o ruidos sobre X , de ellos se toma el valor esperado que minimiza al vector de decisiones.

El enfoque pasivo, fue desarrollado por Tintner (1960) y supone que para problemas lineales, el vector $\theta = (A, b, C)$ es observable en cada iteración. La aleatoriedad de los coeficientes (A, b, C) introduce en el modelo un nuevo elemento, *la distribución de probabilidad de las ganancias óptimas y la distribución de probabilidad del vector de decisiones*.

Las contribuciones más importantes al enfoque pasivo, se encuentran en los trabajos de Bracken y Soland (1966) que consideran al vector C de la función objetivo en modelos lineales como un proceso estocástico multivariado, en este contexto el objetivo es minimizar los costos promedio. Tintner y Sengupta en (1970) introducen el concepto de programación fractil cuando las distribuciones asociadas son simétricas, [véase también Sengupta (1972)].

En general, se pueden considerar las siguientes clases de problemas de optimización estocástica dentro de los enfoques propuestos:

1. Problemas Lineales de Optimización Estocástica

El vector $\theta = (A, b, C)$ puede contener cualquiera de sus elementos en forma de variable aleatoria; en este caso, las técnicas analíticas más usuales son las de programación fractil, análisis de perturbación y la técnica de valores esperados cuando los coeficientes se distribuyen en forma normal, ji cuadrada o exponencial.

2. Programación Estocástica con Restricciones de Oportunidad (C.C.P.)

En estos modelos se maneja la estructura siguiente:

Minimizar $f(X)$.

Sujeto a:

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq b_i \right\} \geq p_i, \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

donde $X \in \mathcal{R}^n$ y f puede ser una función no lineal; el conjunto de restricciones denota la probabilidad de ocurrencia de la restricción i para una p_i conocida, y su

formulación siempre es dada en términos lineales, a este tipo de restricciones se les llama *restricciones de oportunidad*. Estos modelos tienen un elemento clave básico; la medida de tolerancia p_i que representa la probabilidad con la que puede suceder la restricción propuesta. En el caso donde las restricciones de oportunidad se consideran en forma conjunta (esto es, donde la restricción está sobre la probabilidad conjunta de un evento aleatorio multivariado), el análisis se vuelve más complicado, por lo que requiere un poco más de atención.

Muchas de las técnicas analíticas de solución de estos modelos presuponen variables aleatorias normales, ji cuadradas o exponenciales en las variables involucradas. No existen modelos generales de solución para el caso lineal con otros tipos de distribuciones; a los casos no lineales, se les puede considerar muy poco explorados.

3. Problemas de Control Optimo Estocástico

Este tipo de modelos son de carácter dinámico, las formulaciones de la función objetivo vienen dadas como funcionales cuadráticas con variables aleatorias y las restricciones son expresadas en forma de reguladores lineales; este tipo de formulación es muy común en problemas de ingeniería. El problema se formula como sigue:

Sean $A(t)$, $M(t)$ y D matrices de $n \times n$, $B(t)$ y $N(t)$ matrices $n \times m$, todas ellas de funciones continuas. Sea $U(t)$ un m vector de funciones continuas por pedazos definidas sobre un intervalo fijo $[t_0, t_1]$. Sea $X(t)$ un vector n -dimensional de funciones que corresponde a la solución de

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) + C(t)dZ(t),$$

con la condición inicial $X(t_0) = X_0$. Aquí, $C(t)$ es una matriz de $n \times n$ y $dZ(t)$ es un vector n -dimensional de movimientos Brownianos. En este caso se supone que $M(t)$, $N(t)$, y D son simétricas con $M(t)$ y D definidas no negativas, $N(t)$ es definida positiva, el problema es entonces [véase Fleming y Rishel (1975)]

$$\text{Min } J(X(t), U(t)) = \int_{t_0}^{t_1} [X^T(t)M(t)X(t) + U^T(t)N(t)U(t)] dt + X^T(t_1)DX(t_1).$$

Sujeto a:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) + C(t)dZ(t).$$

Algunas aplicaciones de la determinación de políticas óptimas de producción-inventario aparecen en Venegas (1990a) y (1992a).

Los elementos de la lista anterior, incluyen muchos modelos probabilísticos comunes; no obstante, faltan muchos elementos en ella. En este trabajo se estará interesado en problemas estocásticos del tipo:

$$\text{Minimizar } g(X) = \int \psi(X, w) dF_W(w, X) = \mathbf{E}_W \{ \psi(X, W) \}.$$

Sujeto a:

$$X \in \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n.$$

Donde X y W son vectores n y r dimensionales respectivamente y $f_W(w, X)$ es una función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria W que depende del vector X . En particular, se puede tener el caso de que $f_W(w, X) = f_W(w)$.

El conjunto restrictivo \mathcal{D} puede estar dado por:

$$g_i(X) = \int \psi_i(X, w) dF_W(w, X) = \mathbf{E} \{ \psi_i(X, W) \} \leq 0,$$

$$X \in \mathcal{R}^n, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

O bien:

$$g_i = h_i(X) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Donde $h_i(X)$ es una función lineal o no lineal. Finalmente se puede tener:

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^q a_{ij}(W) X_j \leq b_i(W) \right\} \geq p_i, \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

donde este tipo de formulación recibe el nombre de *restricción de oportunidad*.

1.2 ALGUNOS ASPECTOS SOBRE LA COMPLEJIDAD Y EFICIENCIA COMPUTACIONAL EN OPTIMIZACION ESTOCASTICA

Un problema se define como una colección de instancias, donde una instancia representa el conjunto de datos de entrada o información necesaria para obtener una solución. En este contexto, una instancia puede tener asociado un conjunto de soluciones que la resuelven, o bien puede no tener solución, en cuyo caso se dice que el conjunto de soluciones es vacío.

Un algoritmo, se define como un proceso mediante el cual se busca la solución a un problema, es decir, a cada instancia le asocia un elemento del conjunto de soluciones; así, un algoritmo se dice que resuelve a un problema dado si resuelve a cualquiera de sus instancias; resolverlo significa que si el conjunto de soluciones de la instancia es no vacío, entonces exhibe al menos un elemento del mismo; si no fuera así, se debe concluir que el conjunto de soluciones es vacío.

El tamaño de un problema, se define como el número de bits necesarios para codificar los datos de entrada del mismo, en términos generales, si la información proporcionada se da en forma de una cadena de caracteres binarios de longitud n , entonces el tiempo que requiere un algoritmo para su ejecución es una función $C(n)$. Un aspecto importante de la función $C(n)$ en complejidad computacional, es determinar su comportamiento asintótico y si $C(n)$ es polinomial o exponencial (en este sentido, una función es exponencial si el parámetro n aparece como parte del exponente).

La memoria utilizada para almacenar la información de un problema es determinante para escoger la codificación de los datos, así, una codificación se dice que es razonable [véase Gutiérrez-Andrade (1991)] si la cantidad de memoria para guardar un entero positivo n es $\lceil \log(n+1) \rceil$, donde el símbolo $\lceil x \rceil$ denota al mínimo entero mayor o igual a x ; sin embargo la clasificación de $C(n)$ en polinomial o exponencial no se ve afectada por la forma de codificación de los datos.

La complejidad computacional clasifica a los problemas en cuatro clases de acuerdo a su grado de dificultad, esto se hace con objeto de diferenciar a aquellos problemas para los que no se tiene ni se tendrá una solución, de aquellos que estando en el mismo grado de dificultad, se pueden usar técnicas similares para resolverse. El tamaño de la instancia y la calidad de los datos son dos de los aspectos más importantes para estimar la complejidad del problema y clasificarlo de acuerdo a alguno de las siguientes clases:

1. Problemas Irresolubles.- Son aquellos para los que no existe ni existirá un algoritmo para resolverlos.
2. Problemas Intratables.- Un problema se dice que es intratable si no existe ni existirá un algoritmo polinomial que lo resuelva.
3. Problemas NP (No determinista polinomial).- Un problema es de clase NP si existe un algoritmo no determinístico polinomial para resolverlo. Un algoritmo no determinístico es aquel que posee la propiedad de elegir correctamente la alternativa adecuada de un conjunto de ellas. Este término se define rigurosamente mediante el concepto de Máquina de Turing no determinista [véase Aho, Hopcroft y Ullman (1976)].
4. Problemas Polinomiales.- Se dice que un problema pertenece a la clase P de problemas resolubles polinomialmente si existe un algoritmo polinomial (conocido o no) que lo resuelve.

Por definición de NP completez, si un problema NP completo es de clase P entonces $NP = P$, es decir, basta con encontrar un algoritmo polinomial para un solo problema NP completo para tener algoritmos polinomiales para todos los demás en NP. La igualdad $NP = P$ es actualmente uno de los problemas más importantes en computación teórica.

Como ejemplos de problemas intratables, se pueden citar el problema de la parada de Turing (1937), o el de la programación cuadrática en enteros. Para un tratamiento más riguroso acerca de la teoría de la NP completez véase Garey y Johnson (1979). Finalmente, para un análisis más detallado de la clasificación de problemas en complejidad computacional y su relación con la programación combinatoria véase Gutiérrez-Andrade (1991).

La optimización estocástica por las técnicas Monte Carlo generalmente es convergente dependiendo del punto original de búsqueda, ya sea por las técnicas de gradiente o por las de búsqueda aleatoria.

Debido a la naturaleza probabilística del mismo, la complejidad en los algoritmos de búsqueda aleatoria se mide en términos del valor esperado de operaciones hechas.

Existen diferentes criterios para comparar algoritmos en optimización estocástica; usualmente, los algoritmos son comparados por sus propiedades globales o propiedades que posee el algoritmo al aplicarse sobre una instancia dada, y evaluar a este en términos

de la rapidez de convergencia, precisión en la solución, capacidad requerida de memoria etc. Este tipo de propiedades son comunes en algoritmos para optimización de modelos deterministas.

En este sentido, es posible disminuir la complejidad computacional del mismo al *eficientar la búsqueda global* mediante la disminución de operaciones en cada iteración; esto es, la complejidad del algoritmo A es una función de la eficiencia parcial, es decir, de sus propiedades locales.

Una condición necesaria para poder comparar dos algoritmos es que deben operar bajo circunstancias idénticas de prueba (funciones sobre las que se aplican) y con los mismos puntos iniciales. Desde el punto de vista probabilístico, es muy difícil dar un criterio de paro para un algoritmo de optimización estocástica; en general, se utiliza al número de iteraciones hechas como regla para detener un algoritmo, lo anterior se debe a que la presencia de ruido genera como punto de convergencia del mismo a una variable aleatoria cuya densidad es desconocida; a diferencia de la convergencia en un modelo determinista que tiene como valor límite a un punto fijo.

Cuando se comparan algoritmos de acuerdo a sus propiedades globales, es común usar cualquiera de los siguientes criterios: Fije un índice k que corresponde al mejor algoritmo de un total de S algoritmos disponibles, tal que en la iteración i :

$$a) \max_{s=1,2,\dots,S} \mathbf{P}\{|g(X_i^s) - g(X^*)| \leq \epsilon_g\} = \mathbf{P}\{|g(X_i^k) - g(X^*)| \leq \epsilon_g\}$$

con i y $\epsilon_g > 0$ conocidas.

$$b) \min_{s=1,2,\dots,S} \mathbf{E}\{\|X_i^s - X^*\|\} = \mathbf{E}\{\|X_i^k - X^*\|\},$$

donde el número de iteraciones i es conocida.

$$c) \min_{s=1,2,\dots,S} (i^s) = (i^k)$$

Sujeto a:

$$\mathbf{E}\{X_i^s\} \in [\mathcal{R}_X = \{X : \|X - X^*\| \leq \epsilon_X\}],$$

o bien

$$\mathbf{E}\{X_i^s\} \in [\mathcal{R}_g = \{X : |g(X) - g(X^*)| \leq \epsilon_g\}].$$

$$d) \max_{s=1,2,\dots,S} \mathbb{P} \{ \| X_i^s - X^* \| \leq \epsilon_X \} = \mathbb{P} \{ \| X_i^k - X^* \| \leq \epsilon_X \},$$

donde i y ϵ_X son conocidas.

$$e) \min_{s=1,2,\dots,S} (i^s) = (i^k)$$

Sujeto a:

$$\mathbb{E} \{ X_i^s \} \in [\mathcal{R}_X = \{ X : \| X - X^* \| \leq \epsilon_X \}],$$

y

$$\text{Var} \{ X_i^s \} \leq C, \quad C > 0.$$

Sin embargo, en este trabajo estaremos interesados en propiedades locales de los algoritmos; las propiedades locales son aquellas que se refieren a las propiedades que posee un algoritmo para mejorar el valor de una función objetivo en una sola iteración; usualmente a esta cualidad se le llama *eficiencia*.

I.3 METODOLOGIAS MAS IMPORTANTES DE LA OPTIMIZACION ESTOCASTICA

Con el amplio desarrollo de la computación, la simulación ha recibido mayor atención como una herramienta efectiva en la toma de decisiones. La simulación, es una técnica numérica que en base a modelos matemáticos trata de aproximar el comportamiento de los sistemas del mundo real. Por su naturaleza estocástica, la simulación es la única forma de análisis para problemas complejos, que bajo condiciones normales, no pueden ser solubles por las técnicas tradicionales; así por ejemplo, en el caso donde las alternativas constituyen un conjunto infinito, los métodos estadísticos resultan inadecuados para su estudio.

A continuación, se hace referencia a las principales metodologías que se manejan en optimización por simulación, y los esfuerzos por resolver problemas utilizando esta técnica.

1.3.1 DISEÑO EXPERIMENTAL EN SIMULACION

En general, el objetivo de un análisis de simulación es determinar el valor de k variables de decisión que optimizan m respuestas, sujeto a p condiciones no controlables, y después aproximar las relaciones existentes entre los factores controlables y las respuestas. Matemáticamente el problema puede escribirse como:

$$\text{Minimizar } G = f(\Phi | \epsilon) + e, \quad (I.1)$$

Sujeto a:

$$l_i < \Phi_i < u_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (I.2)$$

$$l_{k+j} < f_j(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k) < u_{k+j}, \quad j = 1, 2, \dots, h, \quad (I.3)$$

donde, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k)$ es el vector de condiciones controlables de dimensión $k \times 1$, ϵ es un vector de dimensión $p \times 1$, de condiciones no controlables, e es un error aleatorio con un valor esperado cero, l_i y u_i son los límites inferior y superior para los factores controlables o algunas funciones de ellos.

En este sentido, debe quedar claro que la presencia de e vuelve a la función objetivo (I.1) difícil de manejar. Así, el foco de atención del análisis se centra en $\mathbb{E}\{G\}$, la cual es teóricamente libre de ruido. Las p condiciones no controlables se refieren a los factores (o eventos) que afectan las salidas. Por ejemplo, en la simulación de una línea de espera, los factores no controlables son el tiempo de interarribo de los clientes, o bien, los tiempos de servicio que se da los mismos. Cada condición no controlable en el modelo, tiene asociada una distribución de probabilidad. Los números pseudoaleatorios¹, se usan para generar observaciones que simulan la ocurrencia de los eventos, estos valores son tomados desde una distribución generalmente dada o conocida, o bien, mediante la simulación a partir de valores muestrales de la ocurrencia de los eventos. En ciertos aspectos, los diseños estadísticos son similares a los usados en las pruebas de experimentos físicos, sin embargo, los modelos de simulación poseen características que requieren un tratamiento más completo desde el punto de vista estadístico. En la práctica, son recomendables las siguientes consideraciones para la selección de diseños experimentales eficientes en simulación:

¹Se les llama números pseudoaleatorios, a la sucesión de números obtenidos por métodos físicos, o bien por generadores congruenciales que utilizan relaciones matemáticas para su creación. Aunque estadísticamente son aceptables para experimentos de simulación, no se les considera como números aleatorios puros.

- Una evaluación a priori de los factores controlables para sus posibles agregaciones, reducciones o eliminaciones.
- El conocimiento de los procesos estocásticos relacionados con el modelo con objeto de reducir la varianza.
- El diseño previo de experimentos secuenciales, tales que cada grupo de experimentos sea suplementario de los otros, y que permitan además, elaborar hipótesis a partir de los resultados de experimentos precedentes.
- El uso del principio *split-plot* (dividir y graficar) que ayuda a minimizar el total de corridas requeridas.

En la mayoría de los casos, es posible mejorar la eficiencia en la simulación mediante una adecuada programación del problema, y es posible reducir el número de corridas de simulación si se dispone de modelos adecuados de diseño de experimentos y técnicas de reducción de varianza. Para la optimización en simulación, se debe contar además, con una técnica efectiva de optimización, con objeto de que el tiempo de cómputo dedicado al proceso sea el menor posible y lleve a una solución con un margen de error aceptable. Naturalmente, cuando el número máximo de corridas de computación es pequeño comparado con el número de variables potenciales a estimar, y si además, dentro de la misma corrida de simulación se deben aproximar para las variables involucradas, densidades, momentos, etc, entonces el trabajo se vuelve complicado. Consecuentemente, la atención del analista debe enfocarse hacia el diseño de experimentos que le ayuden a minimizar el número de corridas de computadora para obtener una solución aceptable en un plazo razonable de tiempo.

En contraste, cuando el número máximo de corridas es grande, lo más indicado, es tratar de encontrar las relaciones involucradas; las decisiones deben considerar las estrategias de optimización y un diseño de experimentos compatible. Afortunadamente la literatura al respecto es muy amplia y sustancial, y las ayudas para el diseño de experimentos están disponibles en Williams y Weeks (1974), y en Myers (1971).

1.3.2 METODOLOGIA DE LAS SUPERFICES DE RESPUESTA (RMS)

RMS puede considerarse como la unión de dos áreas de la matemática; la optimización y la estadística. El objetivo de RMS es descubrir a través de la experimentación una función aproximada para las relaciones desconocidas de la ecuación (I.1), y encontrar los

valores de las variables que optimizan la(s) respuesta(s). RMS supone que el investigador, es capaz de identificar al menos aproximadamente la región donde existen combinaciones factibles caracterizadas por las desigualdades (1.2) y (1.3). Sea g una respuesta medida en una escala continua, y sean $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ los k factores asociados a la respuesta, entonces:

$$g = f(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k) + e. \quad (1.4)$$

La ecuación anterior, usualmente no es conocida pero se le puede aproximar mediante una ecuación polinomial.

Por conveniencia, se pueden escoger siempre variables estandarizadas en RMS [véase Kleijnen, Van der Burg, y Van der Ham (1987) así como Safizadeh, y Thornton (1984)]. Las variables estandarizadas son bastante tratables y permiten experimentos a base de diseños ortogonales. Un diseño ortogonal tiene la propiedad de que todos los pares de sus columnas (incluyendo un vector unitario para el efecto medio) son independientes; esto es, la suma de sus productos cruzados es cero, observe además que debido a esto, los valores estimados no pueden prestarse a confusión alguna con otro valor. Sea x_{iu} el valor estandarizado de Φ_{iu}

$$x_{iu} = \frac{(\Phi_{iu} - \bar{\Phi}_i)}{S_i}, \quad (1.5)$$

donde Φ_{iu} , son observaciones de Φ_i , en este caso

$$S_i = \left(\frac{\sum_{u=1}^N (\Phi_{iu} - \bar{\Phi}_i)^2}{N} \right)^{1/2}, \quad (1.6)$$

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0 \quad y \quad \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = N.$$

La investigación normalmente empieza desde un punto cerca del óptimo; y usando algún diseño experimental (factorial), una pequeña subregión de la región experimental alrededor de las condiciones iniciales, es examinada tratando de encontrar un polinomio de orden bajo que obtenga los efectos de los estimadores anteriores.

Teniendo un polinomio apropiado de orden bajo, se pueden usar dos métodos para investigar la adecuación del mismo. Se puede usar la prueba T para comparar los modelos de pronóstico, otro método más formal, es el de comparar la magnitud de los efectos de las interacciones con sus efectos promedio. Cuando se ha optado por las variables

estandarizadas este último método puede producir un efecto de interacción que produzca resultados que no son ciertos, es por ello que la estandarización ha perdido popularidad en el campo. Por lo anterior, en cualquier razón de avance, si la magnitud relativa de los efectos de la interacción son tan pequeños como los efectos mismos, o si la prueba T es no significativa, se infiere que la mejora de la respuesta se da a lo largo del camino del ascenso acelerado (especificado por los signos de las magnitudes de los efectos medios). En este sentido, si X_n es un vector columna que representa el n -ésimo punto experimental sobre el recorrido, entonces el camino del ascenso acelerado está dado por:

$$X_{n+1} = X_n + \delta_n [\Delta g(x)], \quad (1.7)$$

donde $\Delta g(x)$ es la dirección del gradiente estimada a por medio de un polinomio de aproximación, y δ_n es la longitud del paso en el recorrido, la cuál debe optimizarse mediante un algoritmo de búsqueda o una regresión polinomial.

Una vez que δ^* (el mejor valor de δ) y consecuentemente X^* (el mejor punto sobre el recorrido del ascenso acelerado) son calculados, una nueva subregión con X^* en el centro será explorada. Nuevamente, los métodos mencionados anteriormente son aplicados a investigar la adecuación de un polinomio de orden bajo, y así sucesivamente. Cuando la prueba T es significativa, o cuando la magnitud de los efectos de las interacciones es igual o mayor que los efectos promedio, se implica que la subregión bajo consideración es curva, y debe explorarse con un polinomio de grado más alto (normalmente de segundo grado). Los diseños usados para generar un polinomio de primer orden son llamados diseños de primer orden y los de segundo son llamados diseños de segundo orden.

La discusión central de los diseños de primero y segundo orden está relacionada con el sesgo y la varianza. Dos fuentes de variación hacen que la respuesta cierta g difiera de la respuesta estimada \hat{y} . Una fuente puede ser las variaciones en el muestreo, o error de la varianza; y la otra fuente es la inadecuada selección del valor en el orden polinomial; este error es llamado, el error de sesgo. Desafortunadamente, un diseño estadístico experimental dado, puede afectar las fuentes de manera diferente; esto es, un diseño dado, puede reducir la varianza pero incrementar el error del sesgo. Así, la selección de un diseño es guiado por la relativa importancia de la minimización del sesgo y la varianza. En este sentido, el analista desconoce la magnitud del error experimental y la complejidad de la superficie de respuesta. Si el error experimental es anticipado como grande, la minimización de la varianza es más importante que la minimización del sesgo. Consecuentemente, si el error experimental se espera que sea pequeño y la función de respuesta es compleja, la minimización del sesgo es más importante que la minimización

de la varianza. Los diseños factorial y factorial fraccional son la herramienta que mejores resultados ha proporcionado en diseños de primer orden, estos diseños son ortogonales, y minimizan ambos tipos de error; sin embargo, los diseños compuestos son de mayor uso que los diseños de segundo orden, y un diseño compuesto, se obtiene por agregación experimental de puntos a los diseños factoriales completos o fraccionales. Para una lista detallada de los diseños de primero y segundo orden que minimizan sesgo y varianza véase Safizadeh y Thornton (1984).

I.3.3 ANALISIS DE PERTURBACION (PA)

La optimización en redes de líneas de espera, ha recibido un gran impulso recientemente a través del llamado análisis de perturbación (PA) [ver Ho (1985)]. PA es estructurado a través del desarrollo de ciertas estadísticas durante una corrida de simulación, de tal manera que las derivadas parciales formen parte de las salidas de la propia simulación. Así, conceptualmente hablando, PA es capaz de producir todas las derivadas parciales en una sola corrida. Para discutir el concepto de PA, suponga que se desea determinar $\frac{\partial g}{\partial \Phi_i}$ donde g y Φ_i son definidos como antes. Una forma de estimar estas derivadas parciales es hacer dos corridas de simulación, una con Φ_1 y otra con la perturbación $\Delta\Phi_1$:

$$\frac{\partial g}{\partial \Phi_1} = \frac{[\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N y(\Phi_1 + \Delta\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k | \epsilon) - \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N y(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k | \epsilon)]}{\Delta\Phi_1}, \quad (I.8)$$

donde N es la longitud de cada corrida y $1/N (\sum_{u=1}^N g_u)$ es un estimador de g basado en una realización muestral de ϵ . Usando los mismos generadores de números pseudoaleatorios, resulta razonable suponer que las condiciones de operación del sistema son similares, y que las posibles diferencias no son causadas por las condiciones experimentales. Procediendo de esta manera, si $\frac{\partial g}{\partial \Phi}$ es requerida para obtener k parámetros, entonces se requieren $k+1$ corridas de simulación. PA significa entonces, calcular todas las k derivadas parciales en una sola corrida, manteniendo con ello las estadísticas relacionadas con los tiempos en los que ciertos eventos tienen lugar. Durante una corrida, PA podría estimar lo siguiente:

$$\frac{\partial g}{\partial \Phi_1} = \mathbf{E} \left\{ \lim_{\Delta\Phi_1 \rightarrow 0} [g_u(\Phi_1 + \Delta\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k | \epsilon) - g_u(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k | \epsilon)] / \Delta\Phi_1 \right\}. \quad (I.9)$$

Observe en este caso que las diferencias $g_u(\Phi + \Delta\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k | \epsilon) - g_u(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k | \epsilon)$ son calculadas en una sola corrida.

En la ecuación (I.8), se calcula primero el valor esperado de cada corrida, después se obtiene el término con esperanza, y finalmente, se divide el resultado por $\Delta\Phi_1$. De este modo, se obtiene en forma simple la derivada parcial. En la ecuación (I.9), la derivada parcial es evaluada durante la corrida de la simulación y el valor esperado es calculado al final. Matemáticamente, se deben cumplir ciertas condiciones para poder efectuar el intercambio de las derivadas parciales; en simulación, estas condiciones requieren que la función de respuesta sea uniformemente diferenciable con respecto a los parámetros de perturbación con probabilidad uno.

Aunque PA puede usarse en cualquier simulación, los desarrollos teóricos y empíricos se refieren más bien a la teoría de las líneas de espera [véase Ho, Cao y Cassandras (1983), Ho, Eyler y Chien (1979), así como Suri (1987)]. La implantación de PA es por lo regular factible, y la estimación de las derivadas parciales es consistente y confiable. Para obtener dichas estimaciones, puede usarse directamente la misma corrida, o bien, generar la respuesta en una nueva corrida. Sin embargo, y a pesar de su utilidad, la técnica no ha avanzado tanto como para considerarse un enfoque general de optimización en simulación. En efecto, existen aún muchas preguntas teóricas acerca de la validación de los resultados reportados, Heidelberg (1987) ha discutido las limitaciones del PA infinitesimal; esta postura, sostiene que la perturbación de un parámetro, es bastante pequeña como para no cambiar el orden de los eventos en cada corrida, así, bajo esta suposición, PA calcula los cambios potenciales en el tiempo en el cual deben ocurrir los eventos. Heidelberg prueba también que para *procesos regenerativos* las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de PA no satisfacen general y satisfactoriamente muchos resultados teóricos, más aún, su análisis ha revelado que PA infinitesimal no puede estimar el estado estacionario utilizando sólo las derivadas de la función en modelos de líneas de espera que involucran diversos tipos de clientes, donde existe dependencia entre las salidas del sistema y la circulación de sus elementos.

El análisis de simulación es necesario cuando el modelo a optimizar es muy complejo o requiere de muchas convoluciones de variables aleatorias. Irónicamente, la implantación de PA es aplicado en situaciones donde no existe complejidad en los sistemas. Lo anterior, se debe quizá a que dado que la simulación es comúnmente usada cuando se sabe que la función de respuesta es muy limitada, se pueden hacer suposiciones a priori acerca de la misma con objeto de asegurarse de su comportamiento. No obstante, PA ha mostrado

ser una técnica de optimización eficiente para una clase limitada de modelos de líneas de espera, las características generales de problemas de simulación pueden verse con más amplitud en Ho, Cao, y Cassandras (1983).

1.3.4 ANALISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Otra estrategia para optimización en simulación está basada en el dominio de la frecuencia, relacionado con el análisis de series de tiempo. Este enfoque, fue inicialmente propuesto para identificar los términos significativos del polinomio que mejor aproxima las relaciones entre las respuestas y los factores controlables [véase Schruben y Cogliano (1981)].

Cuando se efectúan experimentos de simulación en el dominio de la frecuencia, el rango de los valores posibles de cada factor de entrada debe ser identificado en (I.2), y los valores dominantes de cada factor de entrada, deben modificarse en cada corrida de acuerdo a una forma sinusoidal, por ejemplo,

$$\Phi_i(t) = 1/2 (u_i + l_i) + 1/2 (u_i - l_i) \cos(2\pi\omega t), \quad (I.10)$$

donde l_i y u_i representan los límites inferior y superior de la variable i .

En análisis de series de tiempo, t es el índice de tiempo. Sin embargo en simulación t no es necesariamente el tiempo reloj de simulación, más bien, t es una variable del modelo que mantiene guardadas ciertas estadísticas durante cada corrida. Por ejemplo, para generar los tiempos de interarribo en la simulación de una línea de espera, t podría ser la variable que cuenta el tiempo entre llegadas al sistema.

En experimentos para simulación en el dominio de frecuencia, una frecuencia separada, ω , es asignada a cada factor. Basándose en el análisis de series de Fourier, ω varía entre 0 y 1/2 en múltiplos de $1/N$, donde N es el número de observaciones. La más alta frecuencia (llamada de Nyquist) se obtiene cuando ω es seleccionada igual a 1/2, y la más baja frecuencia se consigue cuando ω es igual a $1/N$.

La contribución de cada frecuencia a la variabilidad de una serie de tiempo es medida por una función llamada *espectro*, en este sentido, la teoría de los sistemas lineales establece que una entrada sinusoidal a un sistema lineal de estado estacionario, da como

resultado una salida sinusoidal de la misma frecuencia [véase Chatfield (1984)]. Consecuentemente, el espectro de salida (respuesta), $f_g(\omega)$, y el espectro de entrada (factor), $f_{\Phi_i}(\omega)$, se relacionan como sigue:

$$f_g(\omega) = G^2(\omega)f_{\Phi_i}(\omega) + f_e(\omega). \quad (I.11)$$

Donde G es llamada la ganancia de la frecuencia ω y $f_e(\omega)$ es el espectro para la perturbación aleatoria. La función de ganancia define cómo los sistemas lineales amplifican o atenúan las oscilaciones de cada frecuencia. Si se supone como un ruido blanco, entonces en teoría, $f_e(\omega)$, es constante para toda ω y no tiene efecto en el análisis; en otras palabras, el pico del espectro de una frecuencia de entrada podría dar una subida al pico del espectro de salida de la misma frecuencia, pero moderado por la ganancia. De otra forma, la frecuencia de una variable, no influye en la respuesta contenida en la región bajo estudio. Es importante observar que en la práctica el error del espectro de una sola corrida podría no ser constante o la suposición de ruido blanco podría ser imprecisa.

Repitiendo (I.11) para todos los factores de entrada y sumando los resultados se obtiene que:

$$f_g(\omega) = \sum_{i=1}^k G_i^2(\omega) f_{\Phi_i}(\omega) + f_e(\omega), \quad (I.12)$$

donde $G_i(\omega)$ corresponde a la ganancia de las oscilaciones relacionadas con Φ_i . Suponga que las oscilaciones para Φ_i son representadas por :

$$\Phi_i(\tau) = \alpha_i \cos(2\pi\omega_i\tau + \gamma_i), \quad (I.13)$$

donde α_i es la amplitud y γ_i es la fase. El espectro de salida puede tener un pico en ω_i correspondiente a α_i . Como resultado de lo anterior, el espectro de salida podría ser usado para obtener aquellos factores que afectan la respuesta en la simulación contenida en la región de investigación. Observe que cada vez que la ganancia no es cero, el espectro de respuesta podría tener picos en ciertas frecuencias independientes del espectro de entrada; consecuentemente, si se hace una corrida de control y se analiza el espectro de respuesta en ausencia de las oscilaciones de entrada, entonces la razón $\hat{f}^s(\omega_i)/\hat{f}^c(\omega_i) - \hat{f}^s(\omega_i)$, y $\hat{f}^c(\omega_i)$ son los espectros obtenidos con y sin las oscilaciones de entrada, respectivamente.

Una idea atractiva para experimentos de simulación en el dominio de frecuencia es la posibilidad de usar las frecuencias seleccionadas y las propiedades trigonométricas elementales para definir las correspondientes frecuencias para los términos de segundo y más alto orden del modelo polinomial. Por ejemplo, cuando Φ_i es representado por ω_i , el

efecto Φ_i^2 podría subir a las frecuencias 0 y $2\omega_i$. Y el efecto $\Phi_i\Phi_j$ podría aparecer en las frecuencias $(\omega_i + \omega_j)$ y $(\omega_i - \omega_j)$. Resulta muy importante seleccionar las frecuencias de tal forma que los términos en el polinomio que sean significativos no sean representados por la misma frecuencia; de otra manera, el análisis podría no indicar qué términos deben incluirse en el modelo, (usando la terminología del diseño de experimentos, los términos con la misma frecuencia podrían confundirse). Por lo anterior, la programación entera es recomendable para seleccionar las frecuencias tales que la confusión sea eliminada y que a la vez, el espacio mínimo entre las bandas de frecuencia sea maximizada.

Bajo condiciones de ganancia estandarizada, se puede probar [véase Scruben y Cogliano (1981)] que la ganancia $G_i(\omega)/\beta_i$ con β_i definida como en (1.5), es constante para toda Φ_i y ω , entonces ponderar los factores de acuerdo a los picos de sus espectros de salida, es equivalente a ponderar los factores de acuerdo a la magnitud de sus correlaciones con la respuesta. Claramente, esta información puede ser valiosa en procesos de optimización. Cuando la ganancia no es constante su estimación es problemática. Así, Scruben y Cogliano (1985), optaron por tratarla como una variable de “estorbo” y por lo tanto bloquearla. En un experimento de k factores, recomiendan un diseño de cuadrados latinos $k + 1$, tal que los factores representen los tratamientos, las bandas de frecuencia representan los efectos del bloque y las ganancias representan la interacción entre los factores y las bandas de frecuencia.

En resumen, los experimentos de simulación en el dominio de la frecuencia identifican los términos significativos del polinomio que aproxima las relaciones entre las respuestas de simulación y los factores. Claramente, el número de corridas de simulación que se requieren para identificar los términos importantes en este enfoque, es mucho más pequeño que aquellas en donde existen alternativas en competencia y las diferencias son mucho más notables conforme aumenta el valor de k . Sin embargo, el enfoque del dominio de la frecuencia, no se le puede considerar en sí como una técnica de optimización. La técnica solamente identifica los términos que deben estimarse por medio de otras técnicas. Por ejemplo en RMS, la información podría indicar que términos deben incluirse en el modelo para explorar una subregión o bien, como los efectos medios, son insignificantes; la técnica puede señalar la presencia de un óptimo local en una subregión.

El diseño de experimentos de simulación en el dominio de frecuencia, no es directo. En primer lugar, el usuario debe tener conocimiento acerca del análisis de Fourier, y análisis espectral; segundo, se debe tener mucho cuidado de que la región de investigación no sea demasiado grande. A pesar de esto, el enfoque del dominio de frecuencia, tiene un futuro

potencialmente bueno para aplicarse en optimización por simulación.

I.4 OPTIMIZACION POR SIMULACION

En términos generales, las técnicas de optimización por simulación se pueden clasificar como técnicas de respuesta simple o múltiple. La optimización de funciones de respuesta simple ha sido extensamente investigada y se conocen varias técnicas véase Fletcher (1980 y 1981). Estas técnicas, se agrupan dentro de dos categorías:

1. Técnicas de búsqueda directa
2. Técnicas de búsqueda de gradiente

En la categoría de respuestas múltiples, existen básicamente cinco estrategias para tratar las respuestas y encontrar la solución óptima. Estas estrategias son: las técnicas gráficas, las técnicas de búsqueda directa, las técnicas de optimización restringida, las técnicas de optimización no restringida, y las técnicas de programación por metas.

I.4.1 OPTIMIZACION DE RESPUESTA SIMPLE

La optimización por simulación de respuesta simple ha sido investigada ampliamente por varios autores, véase por ejemplo, Cooley y Houck (1982), Safizadeh y Thornton (1984), y Montgomery y Evans (1975). Una aplicación común de las técnicas para experimentos de simulación unirespuesta es el método de ascenso acelerado, esta técnica que es totalmente opuesta a RMS, será tratada con más detalle en el siguiente capítulo. Cuando el gradiente puede estimarse eficientemente, la aplicación de una técnica de reducción de varianza, hace que el método de ascenso acelerado proporcione mejores resultados. Debido al error aleatorio, las técnicas de búsqueda como la de Hooke-Jeeves (1961) convergen muy lentamente en simulación, sin embargo, con un gran número de corridas y generadores de números aleatorios con semillas comunes, se mejora un poco su eficiencia. En resumen, dependiendo del número de factores controlables, la complejidad de la función de respuesta y los recursos disponibles, se puede utilizar una técnica de búsqueda, previa investigación de una región factible, para el diseño de superficies de respuesta. La forma de operar en optimización estocástica de las técnicas de búsqueda aleatoria, será ampliamente discutida en el siguiente capítulo.

I.4.2 OPTIMIZACION DE RESPUESTA MULTIPLE

Los métodos gráficos de optimización multirespuesta, usualmente sobreponen todas las respuestas sobre el mismo conjunto de coordenadas, terminando por encontrar mediante esta técnica el punto óptimo buscado. Ya que las técnicas gráficas son aplicables solamente a problemas con dos variables, su uso y ayuda es bastante limitada en simulación; más aún, los cambios hechos entre las propias respuestas, complican el análisis cuando estas aumentan, [véase Montgomery y Bettencourt (1977)].

Muchos son los métodos para experimentos de simulación que han sido sugeridos [véase Biles (1979) y (1981)]. El método complex, selecciona el valor óptimo de una función objetivo sujeta a (i) restricciones de acotamiento sobre variables; (ii) restricciones en términos de funciones sobre variables. Adicionalmente, las cotas superior e inferior de las variables, pueden ser funciones de otras variables. En la primera iteración, el método usa $n \geq k + 1$ puntos o vértices, uno de los cuales es conocido y factible. Los puntos restantes, son generados, uno a la vez mediante la aplicación de números aleatorios r_j uniformemente distribuidos de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\Phi_i = l_i + r_i(u_i - l_i), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (I.14)$$

donde l_i y u_i son las cotas inferior respectivamente de la variable i .

Los puntos escogidos aleatoriamente, deben satisfacer las restricciones explícitas, pero si un punto viola una restricción implícita, debe moverse a la mitad del camino en la dirección del centroide de los puntos seleccionados a su alrededor. Este proceso se continúa hasta que se encuentra un punto satisfactorio. Los puntos sobrantes serán evaluados de la misma forma en cada vértice. Después de evaluada la función en todos los vértices, se tendrá el peor valor, el cual se refleja a través del centroide de todos los n puntos. Si el nuevo vértice vuelve a tener un peor valor, se mueve en dirección del centroide hasta la mitad del camino, y la técnica continúa hasta que alguna de las restricciones es violada. Cuando un punto no satisface alguna restricción, las coordenadas del punto son actualizadas a valores pequeños dentro de un límite apropiado. De la misma forma, si una restricción implícita es violada, el punto debe moverse la mitad del camino hacia el centro, el algoritmo se termina cuando varias evaluaciones de la función objetivo obtenidas en forma consecutiva, tienen un valor idéntico. Para probar la optimalidad global de la solución, el proceso debe repetirse en varias ocasiones partiendo siempre desde puntos diferentes, y presentar el mismo valor para el punto óptimo o al menos una buena aproximación del mismo.

En la aplicación de la técnica en optimización multirespuesta, una de las respuestas debe optimizarse, y las respuestas sobrantes serán tratadas como restricciones. De manera alterna, una función objetivo es evaluada en cada estado y los puntos peores son reflejados a través del centroide de los puntos sobrantes. Cuando una región es sospechosa de poseer un punto óptimo, debe ser investigada y la exploración se puede facilitar con un diseño de experimentos de segundo orden.

En los enfoques de optimización restringida, una de las respuestas llamada la respuesta primaria es optimizada, mientras que las otras se mantienen dentro de ciertos límites; las respuestas secundarias, las cuales normalmente muestran su impacto a través de los multiplicadores de Lagrange o funciones de penalización [véase Myers (1971) y Heller y Staats (1973)]. La inclusión de costos experimentales a través de la construcción de funciones de penalización en la optimización por superficies de respuesta hacen este enfoque potencialmente atractivo para la simulación. El costo experimental es incorporado en la función objetivo, de tal manera que pequeñas mejoras en la respuesta no den costos inaceptables. En la aplicación de las técnicas de optimización multirespuesta restringida a la simulación, se recomienda un diseño de experimentos de primer orden. La técnica es básicamente la misma que el gradiente, excepto que el gradiente, puede llevar eventualmente hacia direcciones infactibles; en este caso, las técnicas de Biles (1977) pueden extenderse mediante la aplicación de diseños de segundo orden. Los métodos de Zoutendijk (1969) de direcciones factibles son otras técnicas de optimización restringida a base de gradiente que pueden combinarse con los diseños de primero y segundo orden para optimización multirespuesta en simulación.

Biles (1977), ha discutido varias técnicas que combinan algoritmos de optimización con diseños en superficies de respuesta para aplicarse a la simulación; estas técnicas, consisten de lo siguiente:

1. Un punto inicial contenido en la región factible, ecuación (1.2), se selecciona como centro de un diseño ortogonal de primer orden.
2. Las corridas de simulación hechas para generar puntos adicionales son al menos igual al mismo número de corridas hechas para el centro. Un análisis de regresión múltiple es adaptado al diseño de puntos.
3. Una metodología de optimización, la cual combina información sobre funciones, se aplica para encontrar el centro del siguiente diseño de primer orden a explorarse.

Algunas técnicas para usarse en este caso han sido propuestas por Biles (1979), y Montgomery y Bettencourt (1977).

4. Los pasos 1 al 3 son repetidos hasta que un punto óptimo sea localizado.

Las expectativas de las técnicas de optimización basadas en el gradiente, así como las técnicas de búsqueda con los diseños de superficies de respuesta podrán ofrecer estrategias generales y para cubrir los objetivos de la optimización por simulación.

I.4.3 OPTIMIZACION POR BUSQUEDA ESTOCASTICA Y SIMULACION

La optimización estocástica, surge como técnica formal con los trabajos de Robbins y Monro (1951) quienes sugieren una técnica iterativa para encontrar los parámetros de una función de regresión medida con ruido. Kiefer y Wolfowitz (1952) sugieren a su vez una técnica para encontrar los extremos en un problema de optimización no restringido. Las técnicas de Robbins, Monro, Kiefer y Wolfowitz fueron generalizadas por Dvoretzky (1956). Durante los últimos veinte años, se ha escrito mucho material sobre el tema, véase por ejemplo, Kushner y Clark (1978) y Ermol'ev (1983) donde se trata principalmente, la rapidez de convergencia de los algoritmos. Tsytkin (1970) fue uno de los pioneros en abordar problemas en diversos campos, tales como: patrones de reconocimiento, filtrado, identificación, teoría de juegos, confiabilidad y economía, dentro del esquema de la optimización estocástica. Más aplicaciones de la optimización estocástica pueden encontrarse en Goodwin Ramadge y Caines (1981). En la actualidad, existe un gran número de posibilidades de aplicación en problemas de economía, ingeniería y ciencias.

Dentro del contexto de la optimización estocástica han recibido considerable atención los llamados algoritmos de búsqueda aleatoria adaptativa, que intentan obtener el óptimo de funciones no diferenciables mediante el uso de técnicas de aproximación de subgradientes. En este sentido, el objetivo es desarrollar un procedimiento que en base a un rastreo generado aleatoriamente, se localiza la dirección de descenso en el proceso de optimización de la función (I.1); donde la magnitud del movimiento se da por un parámetro α que se adapta paso a paso dentro del algoritmo hasta lograr la convergencia [véase Ermakov y Zhiglavski (1984), Patel y Smith (1984), y Patel, Smith y Zabinski (1985)]. Como en este trabajo, el tema central se relaciona con estas ideas, tales conceptos, se discutirán ampliamente en el capítulo II.

Dentro de las técnicas más recientes de optimización por simulación se encuentra el llamado *Algoritmo de Recocido Simulado*, propuesto por Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi (1983) para resolver problemas de optimización multiextremos en espacios discretos. Esencialmente su algoritmo presenta una modificación del algoritmo introducido en 1953 por Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller y Teller desarrollado para estimar el valor medio de ciertas cantidades en mecánica estadística a una temperatura dada. En este contexto, el algoritmo del recocido propuesto por Kirkpatrick en 1983, la temperatura del sistema disminuye a cero y el algoritmo genera una cadena de Markov no estacionaria cuyo espacio de estados está en el dominio de la función de costos que se va a minimizar. Las aplicaciones del recocido simulado se pueden hacer en problemas de optimización combinatorial en problemas de diseño en cómputo e inteligencia artificial.

Una excelente versión del modelo de recocido simulado aplicado a problemas con variables aleatorias, se puede encontrar en el trabajo de Dekkers, y Aarts. (1991), en el que formalizan el enfoque original de problemas discretos a problemas de optimización estocástica. Para un análisis detallado de la técnica del recocido simulado, y su aplicación a problemas de optimización combinatoria, véase Gutiérrez-Andrade (1991).

CAPITULO II

OPTIMIZACION POR BUSQUEDA ESTOCASTICA

A continuación, se formaliza el concepto de optimización estocástica por búsqueda aleatoria, parte central de este trabajo. En lo sucesivo, se considerarán solamente aquellos aspectos directamente relacionados con la optimización de funciones a través de las técnicas de simulación digital y por búsqueda aleatoria. En general, se supondrá que dada una función $g(X)$ con $X \in \mathcal{R}^n$, no es posible obtener gradientes o subgradientes, y la estimación de la dirección de búsqueda se hará por Simulación Montecarlo. El capítulo está organizado como sigue. En la sección II.1, se motiva el desarrollo de este trabajo, en la sección II.2, se proporciona el marco teórico que sustenta los resultados de convergencia del algoritmo propuesto, se continúa el trabajo con una amplia discusión en la sección II.3 acerca de la forma de operar de los algoritmos basados en búsqueda aleatoria; en la sección II.4, se desarrolla una función de eficiencia y se aplica en modelos de programación estocástica, de este análisis se deducen las condiciones del parámetro de paso para lograr la convergencia del mismo a lo largo de una dirección de descenso; se termina esta sección con un análisis de los efectos del ruido sobre la convergencia de la sucesión propuesta. En la Sección II.6 se hace un análisis sobre la forma que toman los quasi gradientes estocásticos cuando existe información a priori sobre la región de incertidumbre.

II.1 DEFINICION DEL PROBLEMA

En lo sucesivo, se estará interesado en problemas que tienen la siguiente estructura.

$$\text{Minimizar } g(X) = \int \psi(X, w) dF_W(w, X) = E_W \{\psi(X, W)\}. \quad (II.1)$$

Sujeto a:

$$X \in \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n, \quad (II.1a)$$

donde $\psi(X, W) \in L^1(\Omega, F_W(w, X)) \forall X \in \mathcal{R}^n$, y ψ es convexa en el primer argumento; además, X es un vector n -dimensional de variables de decisión, W es un vector

aleatorio r -dimensional en el que cada componente tiene una distribución¹ $F_{W_i}(w_i)$, y \mathcal{D} es un conjunto convexo.

En esta formulación, se ha tomado la integral de Lebesgue-Stieltjes de $F_W(w, x)$ a fin de permitir que W sea continua, discreta o una mezcla de ambas.

En este contexto, \mathcal{D} puede tener por ejemplo la siguiente forma:

$$\mathcal{D} = \{X \mid \tilde{g}_i(X) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, M.\}, \quad (II.2)$$

o bien

$$\mathcal{D} = \{X \mid \tilde{g}_i(X) = \mathbb{E}_W \psi_i(X, W) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, M.\}, \quad (II.3)$$

donde las \tilde{g}_i , $i = 1, 2, \dots, M$, son funciones convexas.

Sin embargo, en este trabajo se estará interesado en el caso sencillo $\mathcal{D} = \mathcal{R}^n$, se supondrá además que $f_W(w, X)$ es desconocida, (esto significa que solamente se tiene una muestra disponible) o bien $g(X) = \mathbb{E}_W \{\psi(X, W)\}$ no es diferenciable y que los subgradientes son complicados de evaluarse, aún cuando la densidad de W fuese conocida. Se supone además que en cada punto $X \in \mathcal{D}$ sólo es posible observar las realizaciones de $\psi(X, W)$.

Los conceptos relacionados con la optimización del problema (II.1) sujeto a las condiciones (II.2) y/o (II.3) están íntimamente vinculados a los trabajos de Ermol'ev (1969) con respecto a las sucesiones Fejer; a continuación se discuten estos aspectos.

II.2 SUCESSIONES FEJER Y QUASI FEJER

Las sucesiones Fejer y Quasi Fejer, fueron introducidas por Ermol'ev en 1969; estas constituyen la parte medular del desarrollo de algoritmos de búsqueda aleatoria, las siguientes definiciones están basadas en esta referencia.

Sea \mathfrak{S} un conjunto cerrado en \mathcal{R}^n y $\text{Conv}(\mathfrak{S})$ su envolvente convexa.

¹La notación utilizada para definir a una variable aleatoria es con letras mayúsculas y sus valores observados es con letras minúsculas. En este caso, el vector aleatorio es denotado por W y sus componentes por W_i , $i = 1, 2, \dots, r$, los valores observados de cada W_i están dados por w_i .

Definición II.1 La sucesión de variables aleatorias $\{Z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, definidas sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , se dice aleatoria Quasi Fejer con respecto al conjunto \mathfrak{S} , si $\mathbb{E} \{\|Z_0\|^2\} = \|Z_0\|^2 < \infty$ y

$$\mathbb{E} \{\|Y - Z_{k+1}\|^2 \mid (Z_0, Z_1, \dots, Z_k)\} \leq \|Y - Z_k\|^2 + g_k, \quad (II.A)$$

para Y arbitraria $\in \mathfrak{S}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Los números g_k son tales que $\sum_{k=0}^{\infty} g_k < \infty$.

Note que si $\{Z_k\}$ es una sucesión Quasi Fejer con respecto a \mathfrak{S} , es también una sucesión con respecto al conjunto $\text{Conv}(\mathfrak{S})$, en particular si $g_k = 0$, la sucesión recibe el nombre de *Sucesión Fejer*.

La importancia de las sucesiones Quasi Fejer y Fejer radica en que hacen posible estandarizar y simplificar las pruebas de convergencia de ciertos algoritmos para optimización estocástica.

Lema II.1 (Ermol'ev (1969)) Si la sucesión $\{Z_k(w)\}$ es una sucesión aleatoria Quasi Fejer, entonces:

1. El conjunto de puntos límite de $\{Z_k(w)\}$ es no vacío para casi todas las w .
2. Si $Z'(w)$ y $Z''(w)$ son puntos límite de $\{Z_k(w)\}$ que no están en $\text{Conv}(\mathfrak{S})$. Entonces, $\text{Conv}(\mathfrak{S})$ está en el plano equidistante de $Z'(w)$ y $Z''(w)$.

Corolario II.1 Si el conjunto $\text{Conv}(\mathfrak{S})$ es de dimensión² n , entonces $\{Z_k(w)\}$ tiene un punto límite único para esa w .

Corolario II.2 Si un punto límite $Z(w)$ de la sucesión $\{Z_k(w)\}$ para algún w está en $\text{Conv}(\mathfrak{S})$, entonces $Z(w)$ es único.

La prueba puede verse en Ermol'ev (1969). ◻

Definición II.2 Sea $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una función convexa no necesariamente diferenciable. El vector subgradiente en el punto $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es cualquier vector $\tilde{\nabla} g(X)$ que satisface la desigualdad:

²Formalmente, la dimensión de un conjunto convexo C es el máximo de las dimensiones de los varios simplex incluidos en C . En términos generales se puede demostrar [véase Rockafellar (1972)] que la dimensión de C viene dada por la dimensión de su envolvente afín.

$$g(Y) - g(X) \geq \langle \hat{\nabla} g(X), Y - X \rangle, \quad (II.5)$$

para Y arbitraria en \mathcal{R}^n .

De lo anterior, note que el vector $\hat{\nabla} g(X)$ forma un ángulo recto con la normal al hiperplano soporte del conjunto $\{Y \mid g(Y) \leq g(X)\}$; así, si $g(X)$ es diferenciable, entonces $\hat{\nabla} g(X)$ coincide con el gradiente de g en X , $(\nabla g(X))$.

La convergencia de $g(X)$ a un punto mínimo de g cuando $g(X)$ es convexa y $\mathcal{D} = \mathcal{R}^n$, fue investigada por Polyak en 1967 mediante una técnica de subgradiente de descenso definido mediante la relación:

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \gamma_k \hat{\nabla} g(X_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (II.6)$$

donde X_0 es un punto arbitrario, α_k es la longitud del paso y γ_k es un factor dado de normalización.³ Una característica de éste método, es que en general, la función $g(X)$ disminuye monótonamente en su valor bajo el control del parámetro α_k , que lo lleva por lo general hacia la convergencia del método. Los valores que toma α_k son tales que: $\alpha_k \geq 0$.

La relación (II.6) puede usarse cuando el cálculo del vector $\hat{\nabla} g(X_k)$ en cada punto X_k es relativamente fácil de obtener. Sin embargo, en problemas no lineales los subgradientes solamente se puede determinar en casos excepcionales.

Por lo anterior, un problema importante en optimización por simulación consiste en construir un estimador del subgradiente, también llamado un quasigradiente estocástico. Así, un quasigradiente estocástico constituye un vector aleatorio que estima al subgradiente de la función en un punto dado.

Una forma de construir un estimador, $\xi(X_k)$, del subgradiente de g en el punto X_k , es como sigue. Considere al vector $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ cuyas componentes son variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas en $[-c_1, c_2]$. Observe que en este caso, se supone que no existe información a priori, razón por la cual, θ se distribuye uniformemente. El intervalo $[-c_1, c_2]$ es considerado con objeto de permitir un rastreo en direcciones opuestas al origen. Cuando se tiene información a priori sobre θ en términos

³Un factor de normalización es un parámetro de la sucesión $\{X_i\}$ que garantiza una convergencia hacia un valor límite.

de valores esperados, el análisis requiere de especial atención, ver por ejemplo, Venegas (1990a), (1990b), (1992a) y (1992c).

Suponga que en la iteración k , se dispone de ρ_k muestras de θ de tamaño n :

$$\begin{aligned}\theta_{k1}^T &= (\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k1}^{(2)}, \dots, \theta_{k1}^{(n)}), \\ &\vdots \\ \theta_{ki}^T &= (\theta_{ki}^{(1)}, \theta_{ki}^{(2)}, \dots, \theta_{ki}^{(n)}), \\ \theta_{k\rho_k}^T &= (\theta_{k,\rho_k}^{(1)}, \theta_{k,\rho_k}^{(2)}, \dots, \theta_{k,\rho_k}^{(n)}),\end{aligned}$$

si X_k es un vector dado en la iteración k con $\Delta_k > 0$, entonces un estimador $\xi(X_k)$, del subgradiente de g en X_k se puede escribir como

$$\begin{aligned}\xi(X_k) &= \sum_{i=1}^{\rho_k} \frac{g(X_k + \Delta_k \theta_{ki}^T) - g(X_k)}{\Delta_k} \theta_{ki} = \\ &= \frac{g(X_k + \Delta_k \theta_{k1}^T) - g(X_k)}{\Delta_k} \theta_{k1} + \dots + \frac{g(X_k + \Delta_k \theta_{k\rho_k}^T) - g(X_k)}{\Delta_k} \theta_{k\rho_k}.\end{aligned}$$

En esta formulación, la esperanza condicional asociada a $\xi(X_k)$ se obtiene de la siguiente forma, de la convexidad de g se tiene que

$$\frac{g(X_k + \Delta_k \theta_{ki}^T) - g(X_k)}{\Delta_k} \theta_{ki} \geq \langle \tilde{\nabla} g(X_k), \theta_{ki}^T \rangle \theta_{ki},$$

por lo que entonces

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{g(X_k + \Delta_k \theta_{ki}^T) - g(X_k)}{\Delta_k} \theta_{ki} \mid X_k \right\} \geq$$

$$\mathbf{E} \left\{ \langle \tilde{\nabla} g(X_k), \theta_{ki}^T \rangle \theta_{ki} \mid X_k \right\} = \mathbf{E} \left\{ \langle \theta_{ki}^T, \theta_{ki} \rangle \tilde{\nabla} g(X_k) \mid X_k \right\} = \frac{n(c_2 - c_1)^2}{12} \tilde{\nabla} g(X_k).$$

Por lo tanto se tiene que

$$\mathbf{E} \{ \xi(X_k) \mid X_k \} = \frac{n(c_2 - c_1)^2 \rho_k}{12} \tilde{\nabla} g(X_k) + W_k, \quad (II.7)$$

donde en esta formulación $Y = (\theta_{ki}^j)^2$, $j = 1, 2, \dots, n$ tiene una densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(c_2 - c_1) \sqrt{y}}, & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{(c_2 - c_1)^2}{4}, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

De lo anterior, observe que el vector W_k tiene componentes acotadas, esto es: $\|W_k\| \leq$ cte. Así, resulta entonces conveniente formalizar algunas ideas.

Definición II.3 Se dice que un vector $\xi(X)$ es un vector quasigradiente estocástico de la función g en el punto X , si:

$$\mathbb{E} \{ \xi(X) \mid H(X) \} = c \tilde{\nabla} g(X) + \mathcal{U}, \quad (II.8)$$

donde c es un número y \mathcal{U} es un vector que depende de un conjunto de puntos $H(X)$.

La sucesión (II.6) se puede aplicar en la minimización de algunos modelos de optimización estocástica sin restricciones, utilizando para ello métodos a base de quasigradientes estocásticos, donde el vector $\xi(X)$ representa al estimador del subgradiente de g en el punto X . A continuación se muestra que la minimización de (II.9) a través de la sucesión (II.6) se puede llevar a cabo mediante los métodos de proyección, cuando la proyección $\pi_{\mathcal{D}}$ se puede obtener fácilmente (por ejemplo, cuando $\mathcal{D} = \{X \mid a \leq X \leq b\}$). A partir de estas ideas, se hará una extensión para el desarrollo de una sucesión similar a (II.6) que sea aplicable a modelos de optimización estocástica del tipo (II.1).

Considere el problema de minimización estocástica:

$$\text{Minimizar}_X \mathbb{E}_W \{ \psi(X, w) \}, \quad (II.9)$$

Sujeto a:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D},$$

donde \mathcal{D} es un conjunto cerrado y convexo en \mathcal{R}^n . Sea $\pi(X)$ el operador proyección sobre \mathcal{D} ; esto es para cualquier $X \in \mathcal{R}^n$, $\pi_{\mathcal{D}}(X) \in \mathcal{D}$ y

$$\|X - \pi_{\mathcal{D}}(X)\| = \min_{Y \in \mathcal{D}} \|X - Y\|.$$

Sea la sucesión aleatoria de puntos $\{X_k\}$ definida como:

$$X_{k+1} = \pi_{\mathcal{D}}(X_k - \alpha_k \gamma_k \xi_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (II.10)$$

donde X_0 es un punto arbitrario para el cual $\mathbb{E} \{\|X_0\|^2\} = \text{cte} < \infty$, α_k es la longitud del paso, γ_k es un factor de normalización, $\xi_k = (\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn})$ es un vector cuya esperanza matemática condicional viene dada por:

$$\mathbb{E} \{\xi_k \mid X_0, X_1, \dots, X_k\} = c_k \tilde{\nabla} g(X_k) + \mathcal{U}_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (II.11)$$

donde c_k es un número no negativo, $\mathcal{U}_k = (\mathcal{U}_{k1}, \mathcal{U}_{k2}, \dots, \mathcal{U}_{kn})$ es un vector, $\tilde{\nabla} g(X)$ es un subgradiente, esto es, el vector ξ_k satisface una relación de la forma (II.8); en este caso, cuando $\mathcal{D} = \mathcal{R}^n$ y $\pi(X) = X$, el método (II.10) para optimizar (II.9) es llamado *el método de los quasigradientes estocásticos generalizados* o más brevemente, *el método de los quasigradientes*.

Los valores de c_k y \mathcal{U}_k en (II.11) pueden depender de X_0, X_1, \dots, X_k . Se supondrá que existen constantes l_k y $r_k > 0$ que sólo dependen de k , tales que:

$$c_k(X_0, X_1, \dots, X_k) \geq l_k, \quad \mathcal{U}_k(X_0, X_1, \dots, X_k) \leq r_k. \quad (II.12)$$

Si \mathcal{D}^* denota el conjunto de soluciones del problema (II.9) entonces, el siguiente teorema debido a Ermol'ev (1969) garantiza la convergencia de (II.10) hacia una solución de (II.9).

Teorema II.1 *Suponga que se conocen los valores de h_k tales que $\mathbb{E} \{\|\xi_k\|^2 \mid X_0, X_1, \dots, X_k\} \leq h_k^2 \leq M_B < \infty$, y que $\|X_k\| \leq B < \infty$, $i = 0, 1, \dots, k$. Sea el factor de normalización γ_k que satisface la condición*

$$0 < \gamma_k(\tau_k \|X_k\| + h_k) < \infty,$$

donde $h_k(X_0, X_1, \dots, X_k)$, $\tau_k = 1$ si $\|\mathcal{U}_k\| > 0$, y $\tau_k = 0$ si $\|\mathcal{U}_k\| = 0$. Sean las cantidades

$$\alpha_k \geq 0, \quad c_k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty, \quad (II.13)$$

entonces, la sucesión de puntos definida por (II.10) es una sucesión Quasi Fejer con respecto al conjunto \mathcal{D}^* . Más aún, si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k l_k = \infty, \quad (II.14)$$

para casi todas las w , la sucesión $\{X_k(w)\}$ converge globalmente a la solución de (II.9).

De los resultados anteriores, observe que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ \|\xi_k\|^2 \mid X_0, X_1, \dots, X_k \} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{Var} \{ \xi_{ki} \mid X_0, X_1, \dots, X_k \} + \\ &c_k^2 \|\tilde{\nabla}g(X_k)\|^2 + 2c_k \langle \tilde{\nabla}g(X_k), \mathcal{U}_k \rangle + \|\mathcal{U}_k\|^2. \end{aligned} \quad (II.15)$$

Se sigue entonces que si la suma de las varianzas $\sum_{i=1}^n \mathbf{Var} \{ \xi_{ki} \mid X_0, X_1, \dots, X_k \}$ de las componentes del vector $\xi_k = (\xi_{k1}, \dots, \xi_{kn})$ son acotadas en \mathcal{D} ; y si también $\|\tilde{\nabla}g(X_k)\|$ es acotada, entonces $h_k = cte$, y la primera parte del teorema sería entonces obvia. La prueba completa es como sigue:

Prueba.- Sea X^* una solución arbitraria del problema (II.10), entonces por (II.11);

$$\begin{aligned} \|X^* - X_{k+1}\|^2 &= \|X^* - \pi_{\mathcal{D}}(X_k - \alpha_k \gamma_k \xi_k)\|^2 \leq \|X^* - X_k + \alpha_k \gamma_k \xi_k\|^2 = \\ &\|X^* - X_k\|^2 + 2\alpha_k \gamma_k \langle \xi_k, X^* - X_k \rangle + \alpha_k^2 \gamma_k^2 \|\xi_k\|^2. \end{aligned}$$

Tomando la esperanza matemática en ambos lados de la igualdad se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ \|X^* - X_{k+1}\|^2 \mid X_0, X_1, \dots, X_k \} &\leq \|X^* - X_k\|^2 + \\ &2\alpha_k \gamma_k c_k \langle \tilde{\nabla}g(X_k), X^* - X_k \rangle + 2\alpha_k \gamma_k \langle \mathcal{U}_k, X^* - X_k \rangle + \\ &+ \alpha_k^2 \gamma_k^2 \mathbf{E} \{ \|\xi_k\|^2 \mid X_0, X_1, \dots, X_k \}. \end{aligned} \quad (II.16)$$

En este caso, la esperanza de la norma del vector $\bar{X} = (X^* - X_{k+1}) \in \mathcal{R}^n$ se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ \|\bar{X}\| \} &= \mathbf{E} \{ \|(\bar{X}_1(\omega), \bar{X}_2(\omega), \dots, \bar{X}_n(\omega))^t\| \} = \\ &\int_{\Omega} \sqrt{\bar{X}_1^2(\omega) + \bar{X}_2^2(\omega) + \dots + \bar{X}_n^2(\omega)} P(d\omega), \end{aligned}$$

donde Ω es el espacio muestral correspondiente al espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) .

De lo anterior, por (II.5) y tomando en cuenta que $g(X^*) - g(X_k) \leq 0$, así como por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ \|X^* - X_{k+1}\|^2 \mid X_0, X_1, \dots, X_k \} &\leq \|X^* - X_k\|^2 + 2\alpha_k \gamma_k c_k [g(X^*) - g(X_k)] + \\ &2\alpha_k \gamma_k \|\mathcal{U}_k\| \|X^* - X_k\| + \alpha_k^2 \gamma_k^2 \mathbf{E} \{ \|\xi_k\|^2 \mid X_0, X_1, \dots, X_k \} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \| X^* - X_k \|^2 + 2\alpha_k \gamma_k \| \mathcal{O}_k \| (\| X^* \| + \| X_k \|) + \alpha_k^2 \gamma_k^2 \mathbb{E} \{ \| \xi_k \|^2 \mid X_0, X_1, \dots, X_k \} \leq \\
& \| X^* - X_k \|^2 + 2\alpha_k r_k [\gamma^* \| X^* \| + \gamma_k \| X_k \|] + \alpha_k^2 \gamma_k^2 M_B \leq \\
& \| X^* - X_k \|^2 + 2\alpha_k r_k [\gamma^* \| X^* \| + \gamma^* B] + \alpha_k^2 \gamma^* M_B. \tag{II.17}
\end{aligned}$$

Estas desigualdades y (II.13) prueban la primera parte del teorema. Ahora se probará que si (II.14) se cumple, entonces uno de los puntos límite de la sucesión $\{X_s(w)\}$, para casi todas w pertenece al conjunto de soluciones del problema (II.10). Usando el corolario (II.2) y tomando los resultados anteriores para la esperanza matemática se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \{ \| X^* - X_{k+1} \|^2 \} & \leq \| X^* - X_k \|^2 + 2 \sum_{k=0}^s \alpha_k l_k \mathbb{E} \{ \gamma_k \langle \tilde{\nabla} g(X_k), X^* - X_k \rangle \} \\
& + 2 [\gamma^* \| X^* \| + \gamma^* B] \sum_{k=0}^s \alpha_k r_k + \sum_{k=0}^s \alpha_k^2 \gamma^* M_B. \tag{II.18}
\end{aligned}$$

se sigue entonces de (II.18) que $\mathbb{E} \{ \| X^* - X_{k+1} \|^2 \}$ es uniformemente acotada y que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k l_k \mathbb{E} \{ \gamma_k \langle \tilde{\nabla} g(X_k), X^* - X_k \rangle \} \geq -\infty.$$

ya que $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k l_k = \infty$, se tiene que $\mathbb{E} \{ \gamma_k \langle \tilde{\nabla} g(X_k), X^* - X_k \rangle \} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Observe además que, existe una subsucesión $\{s_t\}$; $t = 0, 1, \dots$ para la cual

$$\gamma_{s_t}(w) \langle \tilde{\nabla} g(X_{s_t}(w)), X^* - X_{s_t}(w) \rangle \rightarrow 0,$$

con probabilidad uno, conforme $t \rightarrow \infty$.

Para casi todas las ω , la sucesión $\{\| X_k(\omega) \|\}$ es acotada y entonces, para casi todas las ω , la sucesión $\gamma_k(\omega)$ es también acotada, esto es, para casi todas las ω , $\langle \tilde{\nabla} g(X_{k_t}(\omega)), X - X_{k_t}(\omega) \rangle \rightarrow 0$. Entonces como $t \rightarrow \infty$, la sucesión $\{X_{k_t}(\omega)\}$ converge a la solución del problema (II.10) y el teorema está probado. \square

Observe que la sucesión (II.11) viene gobernada en gran medida por la longitud del paso α_k , y resulta de particular interés en esta investigación, analizar una técnica adecuada para la selección de α_k en términos de la función de eficiencia del algoritmo de búsqueda propuesto.

A continuación, se presenta una discusión sobre la aplicación de los conceptos anteriores al desarrollo de algoritmos de búsqueda aleatoria para la optimización del modelo (II.1).

II.3 ALGORITMOS DE BÚSQUEDA ALEATORIA

La mayoría de los métodos de búsqueda estocástica, funcionan a partir de una muestra de puntos obtenidos aleatoriamente sobre \mathcal{D} . Bajo condiciones ideales de g , se puede hacer que la probabilidad de encontrar al óptimo global sea mayor conforme el número de iteraciones aumente. Es muy deseable también que los métodos de búsqueda estocástica provean al usuario, sobre alguna información acerca de la calidad de los resultados obtenidos, tales como precisión del resultado, rapidez de convergencia, etc.

En general, estos métodos son construidos a partir de una sucesión de distribuciones de probabilidad que converge para una amplia clase de funciones, a una distribución límite centrada en el mínimo global. Los problemas de búsqueda estocástica para un mínimo global de una función han sido realmente poco investigados [véase Ermakov y Zhiglavski (1984)], y por lo tanto constituyen un campo fértil de investigación.

Los algoritmos de búsqueda aleatoria empiezan en algún punto $X_0 \in \mathcal{D}$ y generan una sucesión X_1, X_2, \dots en \mathcal{D} , por su naturaleza se les puede considerar como algoritmos de descenso en el sentido de que las sucesiones $g(X_0), g(X_1), \dots$, son monótonas decrecientes. X_{k+1} se genera desde X_k por técnicas de búsqueda aleatoria usando el principio del descenso suficiente. Este principio establece que los algoritmos no adoptan el primer punto $Y \in \mathcal{R}^n$ (encontrado por búsqueda aleatoria), satisfaciendo $g(Y) < g(X_i)$ como X_{i+1} , sino se esperan a encontrar un punto Y para el cual $g(X_i) - g(Y)$ es grande por algún criterio.

La idea central en un algoritmo de búsqueda, es determinar una dirección de descenso en forma aleatoria usando una distribución sobre una superficie de prueba alrededor de X_i y entonces encontrar un tamaño de paso apropiado. El tamaño del paso es determinado de acuerdo a la tasa de mejoras sucesivas hechas en el patrón de búsqueda con objeto de minimizar g . Dentro de los trabajos más sobresalientes a este respecto se pueden encontrar los desarrollados por Solis y Wets (1981).

II.4 EFICIENCIA DE LOS ALGORITMOS DE BUSQUEDA

A continuación, se desarrolla una propuesta para estimar una dirección de descenso cuando la función objetivo es no diferenciable, se construye con ella una sucesión de búsquedas y se demuestra que dicha sucesión converge al mínimo del problema (II.1).

II.4.1 UNA DIRECCION DE DESCENSO

En general, las técnicas de búsqueda aleatoria funcionan a partir de una sucesión de variables aleatorias $\{X_k\}$ definidas sobre \mathcal{D} que lleven a la misma hacia un punto límite X que, eventualmente puede ser el valor óptimo del problema (II.1). La aleatoriedad de la búsqueda radica en proponer un estimador del vector subgradiente que sirva para dar una dirección de descenso; el estimador es generado mediante Simulación Montecarlo y el problema más importante radica en probar que el valor esperado del estimador del subgradiente propuesto es una expresión del tipo (II.11). A continuación, se debe probar que la sucesión se mantiene dentro de la región \mathcal{D} o en su defecto se puede encontrar $X_k \in \mathcal{D}$ tal que $X_k = \pi_D(Y_k)$. Finalmente, si el punto límite X de la sucesión es tal que su convergencia coincide con el mínimo del problema (II.1) se dice que tal sucesión es un algoritmo que lo resuelve.

En lo que sigue de este trabajo, se supondrá el caso especial

$$\psi(X, W) = g(X) + W \quad (II.19)$$

donde $\mathbf{E}\{W\} = 0$; note además que $\mathbf{E}\{\psi(X, W)\} = g(X)$.

En este caso, se utiliza a la esfera unitaria n -dimensional

$$X_k - \Theta_k \mathcal{B}, \quad (II.20)$$

como superficie de prueba, entendiéndose a esta como una región acotada en \mathcal{R}^n alrededor del punto X a través de la cual se genera una dirección de descenso en un algoritmo de optimización estocástica; a este respecto, \mathcal{B} es un vector aleatorio definido sobre la superficie de la esfera unitaria n -dimensional con realizaciones \mathcal{B}_{ki} , $i = 1, 2, \dots, m$ y Θ_k es un factor de expansión-contracción de la misma, encontrado durante la simulación.

La idea esencial de la superficie de prueba, es generar una región acotada (esfera) alrededor del punto X_k y simular un conjunto de m puntos sobre su superficie. Al

iniciar la simulación, la esfera posee un radio unitario, pero este puede expandirse o contraerse mediante el coeficiente Θ_k para proporcionar *solamente una dirección de búsqueda*. Una vez obtenido el conjunto $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ en la iteración k , se procede a evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos y estimar las diferencias $\psi(X_i, W_i) - \psi(X_0, W_0)$, $i = 1, 2, \dots, m$, donde X_0 es el primer punto alrededor del cual se crea la superficie de prueba. En esta propuesta se puede iniciar a Θ con un radio $r \leq \|X_0\|$ donde X_0 , es conocido. El índice i denota el número del punto sobre la superficie de la esfera donde se evalúa la función objetivo en la iteración k . El radio de la esfera se puede disminuir en forma monótona de acuerdo a un factor dado (véase por ejemplo el capítulo IV de aplicaciones); así, el siguiente punto de la sucesión es escogido de acuerdo a

$$\begin{cases} \Upsilon_{km}^0 &= \min_{1 \leq i \leq m} \psi(X_i, W_i) - \psi(X_0, W_0) \\ \xi_k &= \Theta_k \Upsilon_{km}^0 \mathcal{B}_{km}^0 \\ X_{k+1} &= X_k - \alpha_k \gamma_k \xi_k \end{cases} \quad (II.21)$$

Donde α_k es una constante que determina la magnitud del movimiento, γ_k es un factor de normalización similar al del teorema (II.1), y \mathcal{B}_{km}^0 es la dirección de descenso, cuya forma de obtención se muestra en la siguiente sección.

II.4.2 UNA FUNCION DE EFICIENCIA

El concepto de eficiencia es una propiedad local (definida en un solo paso del algoritmo), dicho concepto provee además un criterio de selección para la magnitud de α_k en la sucesión (II.21).

Definición II.4 Sea la variable aleatoria $\Delta g_k = g(X_{k+1}) - g(X_k)$. Considere la cantidad

$$\mathbb{E} \{ \Delta g_k \}, \quad (II.22)$$

la cual define el valor esperado de las diferencias de incrementos en un solo paso, así, la eficiencia del algoritmo se define por

$$\eta_n = - \frac{\mathbb{E} \{ \Delta g_k \}}{\mathbb{E} \{ N_k \}}, \quad (II.23)$$

donde N_k es el número de puntos que requiere evaluar el algoritmo⁴ para localizar una dirección de descenso en la iteración k , y n es la dimensión del vector X_k .

De II.21 observe que X_{k+1} es una variable aleatoria, pues B_{km}^0 lo es, así el valor esperado sobre Δg_k está justificado. La definición anterior se basa en el valor esperado de las mejoras que se observan en la función durante cada avance que se lleva del algoritmo *paso por paso*. El valor negativo de la esperanza se debe a que el algoritmo busca minimizar a la función objetivo en cada paso, así $\Delta g = g(X_{k+1}) - g(X_k) \leq 0$. A efecto de comparar dos algoritmos dados **A** y **B**, es conveniente contar con la siguiente definición.

Definición II.5 Sean **A** y **B** dos algoritmos dados para resolver el problema (II.1). Se dice que **A** es más eficiente que **B**, si se cumple la relación

$$\frac{\eta_n^A}{\eta_n^B} > 1. \quad (II.24)$$

La idea de eficiencia de búsqueda como propiedad local fué introducida por Reuben en (1986); este criterio propone medir la eficiencia de la búsqueda en términos de la varianza de la variable aleatoria Δg . En este caso, la eficiencia puede definirse por

$$D_n = \frac{\eta_n}{[\text{Var}(\Delta g_k)]^{1/2}}. \quad (II.25)$$

Considere el problema de optimización estocástica definido en (II.1), y sea la sucesión

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \gamma_k \xi_k, \quad (II.26)$$

donde

$$\xi_k = \Theta_k \Upsilon_{km}^0 B_{km}^0, \quad (II.27)$$

y Θ_k es un factor de expansión-contracción, $\Upsilon_{km}^0 = \min \{\Upsilon_{k1}, \Upsilon_{k2}, \dots, \Upsilon_{km}\}$; Υ_{ki} denota la diferencia

⁴En general, este número, puede ser fijado de antemano por el usuario y por lo tanto el valor esperado $E\{N_k\}$ se sustituye por la constante prefijada m .

$$\Upsilon_{ki} = \psi(X_k + \Theta_k \mathcal{B}_{ki}, W_{ki}) - \psi(X_k, W_{k0}), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (II.28)$$

Aquí, W_{ki} y W_{k0} , $i = 1, 2, \dots, m$ son las realizaciones observadas del ruido en los puntos X_k y $X_k + \Theta_k \mathcal{B}_{ki}$, respectivamente; \mathcal{B}_{km}^0 es el vector que denota la dirección en la cual se produce el mínimo aumento, m es el número de puntos generados en la superficie de la esfera unitaria n -dimensional.

En esta parte, el supuesto más importante es que la función $\psi(X, W)$ posee un ruido aditivo $W \sim N(0, \sigma^2)$ de tal forma que:

$$\psi(X, W) = g(X) + W. \quad (II.29)$$

Observe que si $g(X_{k+1}) = g(X_k + \Delta X_k)$, entonces de la convexidad de g se tiene que:

$$g(X_k + \Delta X_k) - g(X_k) \geq \langle \Delta X_k, \tilde{\nabla} g(X_k) \rangle$$

o bien

$$\begin{aligned} g(X_{k+1}) = g(X_k + \Delta X_k) &= g(X_k) + \langle \Delta X_k, \tilde{\nabla} g(X_k) \rangle + \delta(\Delta X_k) \\ &= g(X_k) + \|\Delta X_k\| \|\tilde{\nabla} g(X_k)\| \cos(\varphi) + \delta(\Delta X_k). \end{aligned} \quad (II.30)$$

En este caso $\cos(\varphi)$ es el coseno del ángulo formado en una esfera unitaria por los vectores ΔX_k y $\tilde{\nabla} g(X_k)$, estos vectores, parten del centro de la esfera y ambos tienen norma uno, es decir, ambos determinan puntos sobre su superficie. En este contexto $\delta(\Delta X_k)$ es una función tal que $\delta(\Delta X_k) \rightarrow 0$ si $\|\Delta X_k\| \rightarrow 0$.

El análisis de la eficiencia se lleva a cabo considerando primero que no existe ruido en X_k . Posteriormente, se llevará a cabo un análisis con ruido $W \sim N(0, \sigma^2)$.

a).- El caso sin ruido.- De (II.26) observe que

$$\Delta X_k = X_{k+1} - X_k = -\alpha_k \gamma_k \Theta_k \Upsilon_{km}^0 \mathcal{B}_{km}^0, \quad (II.31)$$

por lo que sustituyendo en (II.30) se tiene que:

$$g(X_{k+1}) = g(X_k) + (\alpha_k \gamma_k \Theta_k \Upsilon_{km}^0) \|\mathcal{B}_{km}^0\| \|\tilde{\nabla} g(X_k)\| \cos(\varphi) + \delta(\Delta X_k).$$

Si suponemos que B es un vector aleatorio distribuido uniformemente sobre la esfera unitaria n -dimensional con realizaciones B_{ki} , $i = 1, 2, \dots, m$, entonces para ΔX_k suficientemente pequeño:

$$g(X_{k+1}) = g(X_k) + \alpha_k \gamma_k \Theta_k \Upsilon_{km}^0 \cos(\varphi), \quad (II.32)$$

por lo que entonces

$$\Delta g_k = g(X_{k+1}) - g(X_k) = \alpha_k \gamma_k \Theta_k \Upsilon_{km}^0 \cos(\varphi)$$

de esta manera y por (II.23) se tiene que⁵

$$\frac{\mathbf{E}\{\Delta g_k\}}{\mathbf{E}\{N_k\}} = \frac{\mathbf{E}\{[g(X_k) - g(X_{k+1})]\}}{m} = \frac{1}{m} [\alpha_k \gamma_k \Theta_k \Upsilon_{km}^0 \mathbf{E}\{\cos(\varphi)\}]. \quad (II.33)$$

Donde por la suposición de que B es un vector uniformemente distribuido sobre la superficie de la hipersfera unitaria n -dimensional y la dirección del subgradiente corresponde a $\varphi_k = 0$, la función de densidad del ángulo aleatorio φ viene dado por [véase Reuben (1982)]:

$$\zeta_n(\varphi) = \frac{\text{sen}^{n-2}(\varphi)}{\int_0^\pi \text{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi} = B_n \text{sen}^{n-2}(\varphi), \quad (II.34)$$

con $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ y donde

$$B_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma[(n-1)/2]}, \quad (II.35)$$

aquí Γ denota la función gamma, y donde en general, φ_k se puede poner como φ ya que la distribución del último valor k es independiente del nuevo k , así

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\Delta g_k\} &= h_k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\varphi) \zeta_n(\varphi) d\varphi = \\ &= 2B_n h_k \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \text{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi = \frac{2B_n h_k}{n-1}, \end{aligned}$$

⁵ $\mathbf{E}\{N_k\} = m$ ya que el algoritmo requiere evaluar m puntos antes de encontrar una dirección de descenso.

por lo que entonces

$$\frac{\mathbb{E}\{\Delta g_k\}}{\mathbb{E}\{N_k\}} = \frac{2B_n h_k}{m(n-1)}, \quad (II.36)$$

donde

$$h_k = \alpha_k \gamma_k \Theta_k \Upsilon_{km}^0. \quad (II.37)$$

b).- El caso con ruido.- Considere el evento

$$X_{k+1} = \begin{cases} X_k - \alpha_k \gamma_k \Theta_k \Upsilon_{km}^0 B_{km}^0, & \text{si } \Upsilon_{km}^0 = \min\{\Upsilon_{ki}^0\}, \\ X_k, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (II.38)$$

Donde la ocurrencia de (II.38) muestra que el movimiento hacia X_{k+1} se da solamente cuando se presenta una diferencia mínima Υ_{km}^0 . Note que para cualquier k en la iteración i , Υ_{ki} es tal que

$$\begin{aligned} \Upsilon_{ki} &= \psi(X_k + \Theta_k B_{ki}, W_{ki}) - \psi(X_k, W_{k0}) \\ &= g(X_k + \Theta_k B_{ki}) + W_{ki} - g(X_k) - W_{k0} \\ &= g(X_k + \Theta_k B_{ki}) - g(X_k), \end{aligned} \quad (II.39)$$

donde W_{ki} y W_{k0} son las realizaciones del ruido observadas como los puntos $(X_k + \Theta_k B_{ki})$ y X_k respectivamente. Así, la probabilidad del evento (II.38) viene dada por [véase el apéndice A para los detalles de este cálculo]

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \left(1 + \phi \left(\frac{|\Delta g|}{2\sigma} \right) \right), \quad (II.40)$$

donde

$$\phi(y) = \int_0^y \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt.$$

Por lo que

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \left(1 + \phi \left(\frac{|h_k \cos(\varphi)|}{2\sigma} \right) \right).$$

El valor esperado de la variable aleatoria Δg_k , se obtendrá a partir de la introducción de una nueva variable aleatoria S ; note que el valor Δg_k , puede expresarse también a partir de la magnitud aleatoria $\cos(\varphi)$ de la siguiente forma.

Sea S la variable aleatoria con densidad definida por:

$$S = \begin{cases} \cos(\varphi), & \text{con probabilidad } (\mathbf{P}), \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ -\cos(\varphi), & \text{con probabilidad } (1 - \mathbf{P}), \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

entonces para $n \geq 2$ (par o non) se tiene que ⁶

$$\mathbf{E} \{S\} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_n \mathbf{P} \cos(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_n (1 - \mathbf{P}) \cos(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi,$$

así

$$\mathbf{E} \{S\} = 2B_n \int_0^{\pi/2} \mathbf{P} \cos(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi - 2B_n \int_0^{\pi/2} (1 - \mathbf{P}) \cos(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi,$$

por lo que simplificando se obtiene

$$\mathbf{E} \{S\} = 2B_n \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) \phi \left(\frac{|\Delta g_k|}{2\sigma} \right) d\varphi,$$

y sustituyendo el valor de Δg_k , se tiene finalmente que:

$$\mathbf{E} \{S\} = 2B_n \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) \phi \left(\frac{|h_k \cos(\varphi)|}{2\sigma} \right) d\varphi,$$

con h_k definida como en (II.37). Así, por (II.23) se tiene que la eficiencia del algoritmo se puede escribir como

$$\eta_n = \frac{\mathbf{E} \{S\}}{m} = \frac{2B_n}{m} \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) \phi \left(\frac{|h_k \cos(\varphi)|}{2\sigma} \right) d\varphi. \quad (II.41)$$

Igualmente, la varianza de Δg se puede obtener a partir de: $\operatorname{Var}\{\Delta g\} = \mathbf{E} \{S^2\} - [\mathbf{E} \{S\}]^2$ pero

$$\mathbf{E} \{S^2\} = 2B_n \int_0^{\pi/2} \mathbf{P} \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi - 2B_n \int_0^{\pi/2} (1 - \mathbf{P}) \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi,$$

⁶En este caso, la magnitud aleatoria $\cos(\varphi)$ está definida en un espacio de probabilidad, y por lo tanto la esperanza matemática se obtiene a partir de la integral de Lebesgue respecto de la medida \mathbf{P} .

por lo que simplificando se tiene

$$\mathbb{E} \{S^2\} = 2B_n \int_0^{\pi/2} \phi \left(\frac{|h_k \cos(\varphi)|}{2\sigma} \right) \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi,$$

así, $\operatorname{Var} \{S\}$ se define como:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var} \{S\} &= 2B_n \int_0^{\pi/2} \phi \left(\frac{|h_k \cos(\varphi)|}{2\sigma} \right) \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi, \quad - \\ &\left[2B_n \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) \phi \left(\frac{|h_k \cos(\varphi)|}{2\sigma} \right) d\varphi \right]^2. \end{aligned} \quad (II.42)$$

Ya que para X pequeñas, $\phi(X) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(X - \frac{X^3}{2.3} + \dots \right)$, entonces $\mathbb{E} \{S\}$ y $\mathbb{E} \{S^2\}$ se pueden escribir, respectivamente como

$$\mathbb{E} \{S\} = B_n \left[\frac{1}{n-1} + \frac{h_k}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi/2} \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi \right], \quad (II.43)$$

$$\mathbb{E} \{S^2\} = B_n \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^{n+1}(\varphi) d\varphi}{n} + \frac{h_k}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi/2} \cos^3(\varphi) \operatorname{sen}^{n-1}(\varphi) d\varphi \right], \quad (II.44)$$

por lo que entonces (II.41) viene dada por

$$\eta_n = \frac{B_n}{m(n-1)} + \frac{h_k B_n}{m \sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi/2} \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi, \quad (II.45)$$

finalmente, y aplicando la aproximación para la distribución normal a D_n se tiene que

$$D_n = \frac{B_n [1 + h_k \int_0^{\pi/2} \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi) d\varphi]}{m(n-1) \operatorname{Var}\{S\}}, \quad (II.46)$$

donde $\operatorname{Var} \{S\} = \mathbb{E} \{S^2\} - [\mathbb{E} \{S\}]^2$ y h_k es definida como en (II.37).

De las expresiones (II.45) y (II.46), se puede notar que bajo hipótesis de convergencia de la sucesión $X_{k+1} = X_k - \alpha_k \Theta_k \Upsilon_{km}^0 B_{km}$, las eficiencias η_n y D_n son funciones del tipo

$$\eta_n = a + h b, \quad (II.47)$$

$$D_n = a' + h b'. \quad (II.48)$$



Figure 1: Eficiencia η_n como una función de h .

La siguiente tabla muestra algunos valores de la eficiencia η_n en función de h , para $m = 10$ y $\sigma = 1$. Finalmente, observe que las eficiencias en ambas formulaciones están dadas en relación inversa al número de puntos simulados, m , sobre la esfera n -dimensional y a la dimensión n del vector X .

TABLA II.1 EFICIENCIA DE LA BUSQUEDA η_n			
n	B_n	$\int_0^{\pi/2} \cos^2(\varphi) \sin^{n-2}(\varphi) d\varphi$	η_n
2	1.2837	0.78539	$0.12837 + 0.04022h_k$
3	0.5641	0.33310	$0.02820 + 0.07496h_k$
4	0.5641	0.19634	$0.01880 + 0.04418h_k$
5	0.1880	0.13333	$4.70E - 3 + (1.0E - 3)h_k$
6	0.0940	0.09817	$1.88E - 3 + (3.681E - 4)h_k$

El comportamiento gráfico de (II.47) puede verse en la figura 1 de este capítulo, observe que si se desea aumentar la eficiencia η_n en función de h , conviene hacer a h suficientemente grande para una n fija, esto es, la expansión del radio de la esfera unitaria a través de la magnitud Θ_k en la iteración k debe ser lo mayor posible a efecto de localizar el siguiente punto tan cerca como se pueda del valor óptimo X^* .

Lo anterior, se puede conseguir una vez que se ha tomado sobre la superficie de la esfera una dirección de descenso B_{km}^0 generando un movimiento a lo largo de este vector; observe de la figura 2 que los valores de Θ_k y α_k pueden ajustarse adaptativamente de tal manera que al encontrar la proyección sobre \mathcal{D} encuentre al valor X_{k+1} lo más cerca

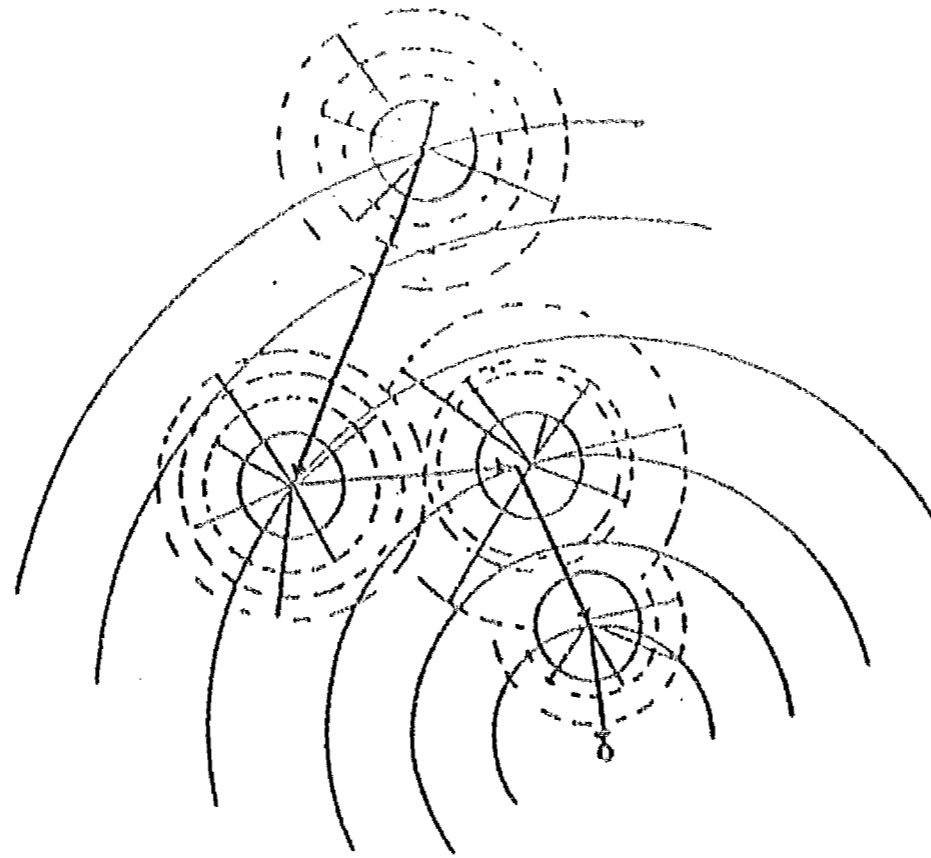


Figure 2: Trayectoria de la búsqueda.

posible del óptimo X^* . Así, resulta razonable que cuanto mayor sea la longitud del paso α , mayor es la eficiencia de la búsqueda disminuyendo así el número de iteraciones.

En este trabajo, se propone al quasi gradiente estocástico $\xi_k = \Theta_k \gamma_{km}^0 \beta_{km}^0$ como estimador del subgradiente de la función objetivo en el punto X_k . La convergencia de la sucesión (II.26) al mínimo del problema (II.1) viene formalizada en el siguiente teorema.

Teorema II.2 *Considere el problema de optimización estocástica (II.1) y sea*

$$\mathbf{E}\{\|\xi(X_k)\|^2 \mid X_k\} \leq h_k^2 < \infty, \text{ para } \|X_k\| \leq B < \infty, \|\delta_k \Theta_k\| \leq r_k, k = 1, 2, \dots$$

Suponga que el factor de normalización γ_k satisface la condición:

$$0 < \gamma_k(\tau_k \|X_k\| + h_k) < \infty,$$

donde τ_k puede tomar valores 0 ó 1, y $h_k(X_0, X_1, \dots, X_k)$. Sean las constantes α_k, c_k, r_k tales que

$$\alpha_k \geq 0, \quad c_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r_k < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k c_k = \infty.$$

Entonces, para casi todas las w , la sucesión $\{X_k(w)\}$ converge a la solución de (II.1).

Antes de efectuar la prueba del teorema, observe que la densidad de B_{km} viene dada por

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{n/2} r^{n-1}}, & \text{si } Y = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \mid \sum_{k=1}^n y_k^2 = r^2\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo anterior, la prueba completa es es como sigue:

Prueba Note que⁷:

$$\mathbb{E}\{\|\xi(X_k)\|^2 \mid X_0, X_1, \dots, X_k\} = \mathbb{E}\{\Theta_k \Upsilon_{km}^0 \mathcal{B}_{km}^0 \mid X_k\} =$$

$$\Theta_k \Upsilon_{km}^0 \mathbb{E}\{\mathcal{B}_{km}^0 \mid X_k\} = c_k \tilde{\nabla} g(X_k) + \mathcal{U}_k, \quad (II.49)$$

donde $\tau_k = 1$, si $\|\mathcal{U}_k\| > 0$, y $\tau_k = 0$, si $\|\mathcal{U}_k\| = 0$; $\xi(X_k)$ es el quasi gradiente estocástico evaluado en el punto X_k ; \mathcal{R}_Y es el dominio de la variable Y ; c_k es una constante, y el vector $\delta_k \Theta_k$ tiene componentes acotadas, esto es

$$c_k \leq M_1 < \infty, \quad \|\delta_k \Theta_k\| \leq M_2 < \infty,$$

así, la convergencia se sigue del teorema (II.1). \diamond

De los resultados anteriores, proponemos el siguiente algoritmo para la optimización de (II.1).

ALGORITMO DE BUSQUEDA ALEATORIA (RSA)

Considere el problema

$$\text{Minimizar } g(X) = \int \psi(X, w) dF_W(w, X) = \mathbb{E}_W\{\psi(X, W)\}.$$

Sujeto a:

$$X \in \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n,$$

donde $\psi(X, W) \in L^1(\Omega, F_W(w, X)) \forall X \in \mathcal{R}^n$, y ψ es convexa en el primer argumento.

Proporcione un factor de tolerancia $\epsilon > 0$, o fije el número de iteraciones deseadas para detener el algoritmo:

1. Tome $m > 1$ puntos $X_k + \Theta_k \mathcal{B}_{ki}$ sobre la superficie de una esfera n -dimensional $X_k + \Theta_k \mathcal{B}$; donde \mathcal{B} es un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre la esfera unitaria n -dimensional con realizaciones \mathcal{B}_{ki} , $i = 1, 2, \dots, m$, $\Theta_k > 0$ es un factor de expansión-contracción de \mathcal{B} .

⁷Para ver los detalles completos de este paso consulte el apéndice B.

2. Considere la sucesión de incrementos: $\Upsilon_{ki} = \psi(X_k + \Theta_k \mathcal{B}_{ki}, W_{ki}) - \psi(X_k, W_{k0})$, $i = 1, 2, \dots, m$, donde W_{k0} y W_{ki} , $i = 1, 2, \dots, m$, son los valores de las variables aleatorias W obtenidas al hacer las observaciones en los puntos X_k y $X_k + \Theta_k \mathcal{B}_{ki}$.
3. Haga $\Upsilon_{km}^0 = \min\{\Upsilon_{k1}, \Upsilon_{k2}, \dots, \Upsilon_{km}\}$ y sea \mathcal{B}_{km}^0 el vector que denota la dirección en la cual se produce el mínimo.
4. Determine el nuevo punto X_{k+1} de acuerdo a⁷:

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \gamma_k \Upsilon_{km}^0 \Theta_k \mathcal{B}_{km}^0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

5. Si $\mathbb{E}\{\|X_{k+1} - X_k\|\} < \epsilon$ o si el número de iteraciones es igual al número fijado, pare; en caso contrario vaya al paso 1.

La convergencia de RSA hacia el valor X^* que minimiza la esperanza de (II.1) es obvia del teorema (II.1).

II.5 SELECCION DE PARAMETROS Y ANALISIS DE CASOS EXTREMOS

En los algoritmos de búsqueda aleatoria la determinación del tamaño de paso óptimo requiere de experimentación. Un método práctico, consiste en explorar diversos tamaños de paso, partiendo siempre del mismo punto. La estimación del parámetro de paso por esta técnica, podría producir tamaños intermedios no explorados que a su vez, pueden eventualmente generar una mejora de la función que se va a minimizar. De lo anterior, se observa que la selección del tamaño de paso es un proceso complicado y que requiere de una buena cantidad de experimentación.

En general si la función a minimizar es continua y diferenciable, entonces $h(X) = -\nabla g(X)$ constituye una dirección de descenso acelerado para $g(X)$. En el caso no diferenciable con g convexa, el subgradiente debe estimarse a partir de los quasi gradientes estocásticos, con la propiedad dada en (II.8).

Con respecto a la sucesión propuesta note que si el tamaño de paso es muy pequeño la probabilidad de conseguir una mejora es relativamente alta (casi de 1/2), pero la mejora es muy pequeña para pasos sucesivos. De otra manera si el tamaño del paso es muy

⁷En el caso donde $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n$ acotado y convexo utilice entonces la sucesión: $X_{k+1} = \pi_{\mathcal{D}}(X_k - \alpha_k \gamma_k \Theta_k \Upsilon_{km}^0 \mathcal{B}_{km}^0)$.

grande, el nuevo valor de búsqueda podría salir del conjunto \mathcal{D} y la probabilidad de lograr una mejora es en extremo pequeña. Algunas veces, entre estos casos extremos, se puede encontrar un tamaño de paso óptimo; esto es, un tamaño de paso para el cual la probabilidad de la mejora en la función objetivo se encuentra en el intervalo $(0, 1/2)$.

A continuación, se detalla la función de cada uno de los parámetros involucrados en la sucesión (II.21), el orden de la explicación no corresponde a su presentación.

1. \mathcal{B} es un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre la superficie de una esfera unitaria n -dimensional con realizaciones generadas en la iteración k , y dadas por \mathcal{B}_{ki} , $i = 1, 2, \dots, m$. Donde m es el número de puntos que se desean simular.
2. Θ_k es un factor de expansión-contracción de la esfera unitaria n -dimensional. Al comienzo del algoritmo, Θ_0 se genera a partir de una distribución uniforme en el intervalo $[0, \varrho_k]$, con $\varrho_0 > 1$ y conforme progresa la búsqueda, ϱ_k se actualiza de acuerdo a la relación $\varrho_{k+1} = \rho_1 \varrho_k$ para $k = 1, 2, \dots$ y donde $\rho_1 < 1$. Lo anterior se hace con el objeto de que el valor esperado de Θ_{k+1} en la iteración $k+1$ sea menor al valor esperado de Θ_k , $k = 1, 2, \dots$ en la iteración k ; en particular si $\Theta_0 > 1$ entonces la esfera de radio unitario se expande, y si $\Theta < 1$ la esfera se contrae. En todos los casos, la magnitud $\Theta_k \mathcal{B}_{km}$ *solamente proporciona una dirección de descenso*.
3. γ_k es un parámetro de normalización desarrollado por Ermolév⁸ para garantizar que (II.6) es una sucesión Quasi Fejer y converge a una solución óptima del problema (II.1). En nuestro caso para un ϱ_0 finito, la suma de varianzas⁹ $\sum_{i=1}^n \text{Var}(\xi_{ki} | X_0, X_1, \dots, X_k)$ es acotada en D , por lo tanto, $h_k^2 = \text{cte}$ y γ_k puede tomarse igual a uno. En el caso acotado, γ_k se selecciona de acuerdo al teorema (II.3).
4. α_k es el parámetro que determina la magnitud del movimiento a lo largo de la dirección dada por $\Theta_k \mathcal{B}_{km}$, en este trabajo, α_k es seleccionado de tal manera que minimice

$$g(X_k - \alpha_k \gamma_k \Upsilon_{km}^0 \Theta_k \mathcal{B}_{km}^0).$$

5. Υ_{ki} mide la diferencia de incrementos obtenidos en cada iteración del algoritmo, esta constante es conjuntamente con el valor \mathcal{B}_{km}^0 los que determinan hacia donde se efectúa el movimiento.

⁸véase Ermol'ev (1969).

⁹ver Ermolév (1969) y Ermol'ev (1983).

En el capítulo (V) de aplicaciones, se muestra en cada ejemplo, cuales fueron los valores asignados a ρ , y los valores dados a α_k .

Finalmente, se puede demostrar que si el ruido W satisface ciertas condiciones, existe un punto límite único para la sucesión (II.38) sin importar que el ruido esté o no acotado, a continuación se discuten estos aspectos.

Suponga nuevamente que

$$\psi(X, W) = g(X) + W.$$

Esto es, que cada medida de la función $g(X)$ va acompañada por un ruido aditivo $W \sim N(0, \sigma^2)$. En este sentido, el ruido se distribuye independientemente de X . Sea nuevamente B un vector uniformemente distribuido sobre la superficie de la esfera unitaria con densidad $f_Y(y)$. Sea B el conjunto sobre la esfera definido por la condición $f_Y(y) > 0$ y denote por $cl(B)$ a la cerradura de B . Suponga además que el máximo:

$$\max_{B \in cl(B)} g(X + \Theta B) = g(X + \Theta B^0), \quad (B^0 \in cl(B)),$$

ocurre en el punto único $X + \Theta B^0$. El interés en esta parte se centra en el comportamiento de la sucesión de pruebas óptimas $\{B_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ definido por:

$$\psi(X + \Theta B_m^0) = \max_{1 \leq i \leq m} \psi(X + \Theta B_i). \quad (II.51)$$

Teorema II.3 (Reuben y Karnovsky (1978)) *El vector B^0 es el único vector límite de la sucesión $\{B_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ si, y sólo si el ruido W satisface:*

Para una sucesión $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ de sus realizaciones, y para cualquier $c > 0$, existe un ρ_c (en función de la sucesión) tal que:

$$W_c < \bar{W}_k + c, \quad \rho_k \leq k < \infty, \quad (II.52)$$

donde:

$$\bar{W}_k = \max_{1 \leq j \leq k-1} W_j. \quad (II.53)$$

Observe que si no hay ruido, entonces de (II.36), se tiene que la eficiencia de la búsqueda aleatoria viene dada por

$$\eta_n = \frac{2 B_n h_k}{m (n-1)}, \quad (II.54)$$

y si la probabilidad de visitar la vecindad $S(B^0, \delta)$ en cada prueba simple es α , entonces

$$\alpha = \frac{\int_{\beta} g(B) dB}{\int_{v(\omega)} g(B) dB}, \quad (II.55)$$

donde $\beta = \bar{\omega} \cap S(B^0, \delta)$; y $S(B^0, \delta)$ es la δ vecindad del valor óptimo B^0 , brevemente llamada *la región de atracción*.

Observe que la probabilidad de visitar la región de atracción en al menos una prueba es [ver Cinlar (1975)] $\mathbb{P}_m = 1 - (1 - \alpha)^m$. Si \mathbb{P} es la probabilidad (conocida) de entrar en la región de atracción, entonces para $\mathbb{P}_m > \mathbb{P}$, el número de pruebas necesarias está dado por

$$m \geq \frac{\ln(1 - \mathbb{P})}{\ln(1 - \alpha)}. \quad (II.56)$$

II.6 INCORPORACION DE INFORMACION A PRIORI EN QUASIGRADIENTES ESTOCASTICOS

La justificación del uso de métodos que optimizan medidas de información para encontrar un estimador a posteriori de una función de densidad cuando existe un estimador a priori y/o información adicional en términos de valores esperados, se encuentran en Shore y Johnson (1980) y (1981), Bernardo (1979), Berger (1985) Jaynes (1982), (1982a) y (1988) Zellner (1990).

Las distribuciones derivadas a través de la optimización de medidas de información, que vamos a estudiar, pueden ser de mínima entropía cruzada¹¹ (Kullback (1956)), y de máxima entropía¹² (Jaynes (1957)).

En la literatura existen otras distribuciones derivadas de la optimización de otras medidas de información: Las distribuciones de referencia¹³ (Bernardo (1979)) y las distribuciones de Zellner¹⁴ (1971), (1977), (1986) y (1991).

¹¹ El nombre de entropía cruzada se debe a Good(1960), este concepto ha recibido otros nombres, entre ellos se mencionan: Divergencia directa o función de discriminación de información (Kullback (1959)), peso de la evidencia (Good (1960)), Entropía relativa o número de Kullback-Leibler (Wehrl (1978)).

¹² Las distribuciones de mínima entropía cruzada y de máxima entropía coinciden bajo el supuesto de distribuciones *a priori* "uniformes".

¹³ Las distribuciones de referencia son soluciones del problema variacional de maximizar la información de Lindley (1956) sobre la clase de distribuciones *a priori* compatibles con el conocimiento inicial que se está dispuesto a aceptar.

¹⁴ Las distribuciones del tipo Zellner maximizan la diferencia entre la información media *a priori* en los datos y la información de la distribución *a priori*. Vale la pena mencionar aquí que, en general, obtener distribuciones de Zellner es más fácil que obtener distribuciones de referencia.

Los siguientes dos principios son fundamentales en el desarrollo de esta sección:

- (i) El principio de mínima entropía cruzada establece que cuando hay un estimador *a priori* de una densidad e información adicional en términos de valores esperados, se debería tomar como un estimador *a posteriori* aquella densidad que minimice la entropía cruzada con la *a priori* y que sea compatible con la información adicional.
- (ii) El principio de máxima entropía establece que entre todas las distribuciones que sean compatibles con información adicional dada en términos de valores esperados, y en ausencia de una densidad *a priori*, se debería tomar como estimador *a posteriori* aquella que maximice la entropía.

MINIMA ENTROPIA CRUZADA

Para encontrar un estimador *a posteriori* de una función de densidad cuando existe un estimador *a priori* $p(\theta)$ e información adicional en términos de valores esperados se tiene entonces

$$\int_{\Theta} a_k(\theta)\pi(\theta)d\theta = \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

así, el principio de mínima entropía cruzada nos conduce a resolver el siguiente problema variacional

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && H(\pi, p) = \int_{\Theta} \pi(\theta) \log \frac{\pi(\theta)}{p(\theta)} d\theta, \\ &\text{sujeto a} && \begin{cases} \int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_{\Theta} a_k(\theta)\pi(\theta) d\theta = \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \end{aligned}$$

La condición de primer orden (condición necesaria) del problema anterior está dada por

$$\begin{cases} \pi^*(\theta) = p(\theta) \exp \left\{ -\lambda_0 - \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k(\theta) \right\}, \\ 1 - \int_{\Theta} \pi^*(\theta) d\theta = 0, \\ \int_{\Theta} (\bar{a}_k - a_k(\theta)) \pi^*(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (II.57)$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones.

Sustituyendo π^* en las condiciones de primer orden restantes en (II.57), encontramos que

$$\begin{cases} 0 = \lambda_0 - \log \left\{ \int_{\Theta} p(\theta) \prod_{k=1}^m e^{-\lambda_k a_k(\theta)} d\theta \right\}, \\ 0 = \int_{\Theta} [a_k(\theta) - \bar{a}_k] p(\theta) \prod_{k=1}^m e^{-\lambda_k a_k(\theta)} d\theta, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (II.58)$$

el cual es un sistema no lineal homogéneo en las variables $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Cuando la integral que define a λ_0 puede resolverse, entonces los demás multiplicadores pueden encontrarse a partir de las siguientes relaciones (ver Venegas (1990a))

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_k} = -\bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (II.59)$$

MAXIMA ENTROPIA

Para encontrar un estimador a posteriori de una función de densidad cuando no existe un estimador a priori, pero se cuenta con información adicional en términos de valores espera, el principio de máxima entropía nos conduce a resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && H(\pi) = - \int_{\Theta} \pi(\theta) \log \pi(\theta) d\theta, \\ & \text{sujeto a} && \begin{cases} \int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_{\Theta} a_k(\theta) \pi(\theta) d\theta = \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \end{aligned}$$

La condición de primer orden del problema anterior está dada por

$$\begin{cases} \pi^*(\theta) = \exp \left\{ \lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k(\theta) \right\}, \\ 1 - \int_{\Theta} \pi^*(\theta) d\theta = 0, \\ \int_{\Theta} [\bar{a}_k - a_k(\theta)] \pi^*(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (II.60)$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones.

Sustituyendo π^* en las condiciones de primer orden restantes en (II.60), encontramos que

$$\begin{cases} 0 = \lambda_0 + \log \left\{ \int_{\Theta} \prod_{k=1}^m e^{\lambda_k a_k(\theta)} d\theta \right\}, \\ 0 = \int_{\Theta} [a_k(\theta) - \bar{a}_k] p(\theta) \prod_{k=1}^m e^{\lambda_k a_k(\theta)} d\theta, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (II.61)$$

el cual es un sistema no lineal homogéneo en las variables $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

De nuevo, cuando la integral que define a λ_0 puede resolverse, entonces los demás multiplicadores pueden encontrarse a partir de las relaciones

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_k} = -\bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (II.62)$$

Así pues, si

$$\xi(X_k) = \sum_{i=1}^{\rho_k} \frac{g(X_k + \Delta_k \theta_{ki}^T)}{\Delta_k} \theta_{ki},$$

donde $\theta_{ki}^T = (\theta_{ki}^{(1)}, \theta_{ki}^{(2)}, \dots, \theta_{ki}^{(n)})$, $i = 1, 2, \dots, \rho_k$ son muestras de tamaño n del vector θ , dadas en la iteración k , con $\Delta_k > 0$, entonces

$$\mathbb{E} \{ \xi(X_k) \mid X_k, \theta \} \geq n \rho_k \mathbf{G} \widehat{\nabla} g(X_k),$$

donde \mathbf{G} es de la forma

$$G_{ij} = \begin{cases} \int_{\Theta} \theta^2 p(\theta) \exp \left\{ -\lambda_0 - \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k(\theta) \right\} d\theta, & i = j, \\ \left[\int_{\Theta} \theta p(\theta) \exp \left\{ -\lambda_0 - \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k(\theta) \right\} d\theta \right]^2 & i \neq j, \end{cases}$$

cuando existe un estimador inicial $p(\theta)$ e información adicional en términos de valores esperados. En caso de que no exista un estimador inicial de la densidad y sólo se cuente con información a priori en términos de valores esperados, se tiene que \mathbf{G} toma la forma

$$G_{ij} = \begin{cases} \int_{\Theta} \theta^2 \exp \left\{ \lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k(\theta) \right\} d\theta, & i = j, \\ \left[\int_{\Theta} \theta \exp \left\{ \lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k(\theta) \right\} d\theta \right]^2 & i \neq j. \end{cases}$$

INFORMACION A PRIORI SOBRE MEDIA Y VARIANZA (CASO GAUSIANO)

Suponga que se cuenta sólo con la información inicial

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \theta \pi(\theta) d\theta = \mu_0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \mu_0)^2 \pi(\theta) d\theta = \sigma_0^2, \end{cases}$$

y que no existe un estimador a priori, entonces el principio de máxima entropía nos conduce a resolver el siguiente problema variacional

$$\text{Maximizar } H(\pi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) \log \pi(\theta) d\theta,$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \theta \pi(\theta) d\theta = \mu_0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \mu_0)^2 \pi(\theta) d\theta = \sigma_0^2. \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad, vamos a definir el siguiente cambio de variable

$$\varphi = \theta - \mu_0. \quad (II.63)$$

En este caso el problema de máxima entropía se simplifica un poco, ya que ahora π es una función par, con lo cual las restricciones se transforman en:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\varphi) d\varphi = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 \pi(\varphi) d\varphi = \sigma_0^2. \end{cases}$$

En este caso el Lagrangiano del problema variacional de máxima entropía está dado por

$$L(\pi, \lambda_0, \lambda_1) = -\pi(\varphi) \log \pi(\varphi) + \lambda_0 \pi(\varphi) + \lambda_1 \varphi^2 \pi(\varphi), \quad (II.64)$$

donde λ_0 y λ_1 son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. La ecuación de Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial \pi} \Big|_{\pi=\pi^*} = 0$ implica que

$$-1 - \log \pi^*(\varphi) + \lambda_0 + \varphi^2 \lambda_1 = 0,$$

equivalentemente

$$\pi^*(\varphi) = \gamma e^{\lambda_1 \varphi^2},$$

donde $\gamma = e^{\lambda_0 - 1}$. Los valores de γ y λ_1 son obtenidos a partir de las restricciones. Claramente, $\gamma > 0$. Note también que $\lambda_1 < 0$, ya que en caso contrario

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma e^{\lambda_1 \varphi^2} d\varphi > \infty.$$

Sea $\lambda_1 = -\delta^2$, con $\delta > 0$. Por lo tanto,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma e^{-\delta^2 \varphi^2} d\varphi = \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{\delta},$$

de donde $\gamma = \frac{\delta}{\sqrt{\pi}}$. De la otra restricción se obtiene que

$$\sigma_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} e^{-\delta^2 \varphi^2} d\varphi = \frac{1}{2} \delta^{-2}.$$

En consecuencia,

$$\delta^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^{-2}$$

y

$$\pi^*(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{\sigma_0}\right)^2\right\},$$

que corresponde a la distribución normal con media cero y varianza σ_0^2 . Aplicando la transformación (II.63), encontramos que¹⁵,

$$\pi^*(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2\right\}.$$

En este caso encontramos que la esperanza condicional del quasigradiente y su matriz de información satisfacen

$$\mathbf{E}\{\xi(X_k) \mid X_k, \theta\} \geq n\rho_k \mathbf{G} \widehat{\nabla} g(X_k),$$

$$G_{ij} = \begin{cases} \sigma_0^2 + \mu_0^2, & i = j, \\ \mu_0^2, & i \neq j. \end{cases}$$

INFORMACION A PRIORI EN VALORES Y NIVELES (CASO GAMMA CON DOS PARAMETROS)

Suponga que se cuenta con información a priori

$$\begin{cases} \int_0^\infty \log \theta \pi(\theta) d\theta = \psi(\alpha) - \log \beta, \\ \int_0^\infty \theta \pi(\theta) d\theta = \alpha \beta^{-1}, \end{cases}$$

donde ψ es la función digamma (ver Gradshteyn (1980)). Entonces de las condiciones de primer orden (II.60), se tiene que

$$-\lambda_0 = \log\left\{\int_0^\infty \theta^{\lambda_2} e^{\lambda_1 \theta} d\theta\right\}.$$

Para que esta integral sea finita es necesario que $\lambda_2 > -1$ y $\lambda_1 < 0$, con lo cual

$$\lambda_0 = (1 + \lambda_2) \log(-\lambda_1) - \log \Gamma(1 + \lambda_2)$$

¹⁵ La entropía evaluada en el óptimo satisface $H(\pi^*(\theta)) = \log(\sqrt{2\pi e \sigma_0^2})$, lo cual es independiente de μ_0 . La obtención de la distribución normal $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ es, por supuesto, independiente de la forma funcional de U con tal de que la información adicional sea sobre media y varianza. Note también que $H(\pi^*(\theta)) > 0$, si $\sigma > 1/\sqrt{2\pi e}$.

y

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_1} = (1 + \lambda_2) \lambda_1^{-1} = -\alpha \beta^{-1}, \\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_2} = \log(-\lambda_1) - \psi(1 + \lambda_2) = \log \beta - \psi(\alpha). \end{cases}$$

Por lo tanto, $\lambda_1 = -\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - 1$, y se tiene que

$$\pi^*(\theta) = \exp\{\lambda_0 + \lambda_1 \theta + \lambda_2 \log \theta\} = \frac{(\theta \beta)^{\alpha-1} \beta e^{-\beta \theta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \theta > 0,$$

que es la distribución Gamma con parámetros α y β . Ahora la esperanza condicional del quasigradiente estocástico con información a priori en términos de valores y niveles queda como

$$E\{\xi(X_k) | X_k\} \geq n \rho_k G \hat{\nabla} g(X_k).$$

En este caso la matriz de información se define como

$$G_{ij} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}, & i = j, \\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2, & i \neq j. \end{cases}$$

INFORMACION A PRIORI EN NIVELES Y POTENCIAS DE VALORES (CASO GAMMA CON TRES PARAMETROS)

Suponga que en ausencia de un estimador a priori de la función de densidad se cuenta con la siguiente información adicional en términos de valores esperados

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \log \theta \pi(\theta) d\theta = \delta^{-1} [\psi(\alpha) - \log \beta], \\ \int_0^{\infty} \theta^\delta \pi(\theta) d\theta = \beta^{-1}. \end{cases}$$

En este caso, para obtener un estimador a posteriori de la función de densidad vía máxima entropía se debe resolver el siguiente problema variacional

$$\text{Maximizar} \quad H(\pi) = - \int_0^{\infty} \pi(\theta) \log \pi(\theta) d\theta,$$

sujeto a

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_0^{\infty} \log \theta \pi(\theta) d\theta = \delta^{-1} [\psi(\alpha) - \log \beta], \\ \int_0^{\infty} \theta^\delta \pi(\theta) d\theta = \beta^{-1}. \end{cases}$$

En este caso el Lagrangiano del problema variacional de máxima entropía está dado por

$$L(\pi, \lambda_1, \lambda_2) = -\pi \log \pi + \lambda_0 \pi + \lambda_1 \pi \log \theta + \lambda_2 \theta^\delta,$$

donde λ_0 , λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. La ecuación de Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial \pi}|_{\pi=\pi^*} = 0$, implica que

$$-1 - \log \pi^*(\theta) + \lambda_0 + \log \theta \lambda_1 + \theta^\delta \lambda_2 = 0, \quad (II.65)$$

equivalentemente

$$\pi^*(\theta) = \gamma e^{\lambda_1 \log \theta + \lambda_2 \theta^\delta}, \quad (II.66)$$

donde $\gamma = e^{\lambda_0 - 1}$.

En lugar de obtener los valores de γ , λ_1 y λ_2 a partir de las restricciones, vamos a usar la propiedad de continuidad e independencia lineal de las funciones de "información" 1, $\log \theta$ y θ^δ en $(0, \infty)$, con lo cual sabemos que la solución es única.

Considere la distribución Gamma de tres parámetros α , $\alpha\beta$ y δ , y note que

$$\begin{aligned} f(\theta) &= [\Gamma(\alpha)]^{-1} \delta(\alpha\beta)^\alpha \theta^{\delta\alpha-1} e^{-\alpha\beta\theta^\delta} \\ &= \exp \{ \log[\Gamma(\alpha)^{-1} \delta(\alpha\beta)^\alpha] + (\delta\alpha - 1) \log \theta - \alpha\beta\theta^\delta \}. \end{aligned} \quad (II.67)$$

Si escribimos

$$\begin{cases} \lambda_0 - 1 = \log[\Gamma(\alpha)^{-1} \delta(\alpha\beta)^\alpha], \\ \lambda_1 = \alpha\delta - 1, \\ \lambda_2 = -\alpha\beta. \end{cases}$$

y sustituimos en (II.66), entonces obtendremos a (II.67) como solución única¹⁶.

La expresión para la esperanza condicional del quasigradiente estocástico es entonces

$$\mathbf{E} \{ \xi(X_k) \mid X_k, \theta \} \geq n \rho_k \mathbf{G} \hat{\nabla} g(X_k),$$

donde la matriz \mathbf{G} de información se define como

$$G_{ij} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha\beta + 1/\delta)}{\Gamma(\alpha)} (\alpha\beta)^{\alpha - \alpha\beta - (2/\delta)}, & i = j, \\ \left(\frac{\Gamma(\alpha\beta + (1/\delta))}{\Gamma(\alpha)} (\alpha\beta)^{\alpha - \alpha\beta - (1/\delta)} \right)^2, & i \neq j. \end{cases}$$

¹⁶ El mismo resultado puede ser aplicado a la distribución Gaussiana si $1 - \lambda_0 = -\log(\sqrt{2\pi\sigma^2}) - (\mu^2/2\sigma^2)$, $\lambda_1 = \mu/\sigma^2$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sigma^{-2}$, ya que las funciones 1, θ y θ^2 son continuas y linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

INFORMACION A PRIORI EN CUANTILES

Suponga que como información inicial se tiene que los valores de los parámetros se encuentran en la región $\Theta = (b_1, b_{m+1})$, en donde se asignan ponderaciones $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m \geq 0$, ($\sum_{k=1}^m \gamma_k = 1$), de que el valor verdadero del parámetro se encuentre en subregiones $A_k = (b_k, b_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, m-1$ y $A_m = (b_m, b_{m+1})$ con $b_1 < b_2 < \dots < b_{m+1}$, $s \geq 2$, las cuales constituyen una partición de $\Theta = (b_1, b_{m+1})$. En este caso una distribución *a priori* que representa este tipo de información inicial, está dada por

$$p(\theta) = \sum_{k=1}^m \gamma_k u_k^{-1} I_{A_k}(\theta), \quad \theta \in \Theta, \quad (II.68)$$

donde I_{A_k} son las funciones indicadoras de los conjuntos A_k y $u_k = \int_{\Theta} I_{A_k}(\theta) d\theta$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Suponga como información adicional cambios en las ponderaciones, de tal manera que ahora

$$\int_{\Theta} I_{A_k}(\theta) \pi(\theta) d\theta = \beta_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{k=1}^m \beta_k = 1. \quad (II.69)$$

Si utilizamos mínima entropía cruzada, las condiciones de primer orden dadas en (II.58) se transforman en

$$\begin{cases} 0 = \lambda_0 - \log \left\{ \int_{\Theta} p(\theta) \prod_{k=1}^m e^{-\lambda_k I_{A_k}(\theta)} d\theta \right\}, \\ 0 = \lambda_0 + \lambda_k - \log \left\{ \beta_k^{-1} \int_{\Theta} p(\theta) I_{A_k}(\theta) d\theta \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (II.70)$$

Si la integral que determina a λ_0 en la condición anterior puede resolverse, entonces los demás multiplicadores pueden encontrarse a partir de las relaciones

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_k} = -\beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

La distribución *a posteriori* de θ está dada por

$$\pi^*(\theta) = \sum_{k=1}^m \beta_k u_k^{-1} I_{A_k}(\theta), \quad \theta \in \Theta.$$

Analícemos, por un momento, qué pasa cuando la distribución *a priori* es uniforme en (b_1, b_3) . Sean $b_1 = a$, $a < b_2 = c < b$, $b_3 = b$, $\beta_1 = \beta$ y $\beta_2 = 1 - \beta$, entonces

$$\lambda_0 = \log \{ (c-a)e^{-\lambda_1} + (b-c)e^{-\lambda_2} \}$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_1} = \frac{-(c-a)e^{-\lambda_1}}{(c-a)e^{-\lambda_1} + (b-c)e^{-\lambda_2}} = -\beta, \\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_2} = \frac{-(b-c)e^{-\lambda_2}}{(c-a)e^{-\lambda_1} + (b-c)e^{-\lambda_2}} = -(1-\beta). \end{cases}$$

Por lo tanto, $\lambda_1 = \log[(c-a)/\beta]$, $\lambda_2 = \log[(b-c)/(1-\beta)]$, lo que conduce a

$$\pi^*(\theta) = \frac{\beta}{c-a} I_{(a,c]} + \frac{1-\beta}{b-c} I_{(c,b]}.$$

En el caso general, cuando la distribución *a priori* tiene la forma (II.68), si se define el cambio de variable

$$\begin{cases} \omega_0 = e^{\lambda_0}, \\ \omega_k = e^{-\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, s. \end{cases}$$

Entonces $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_s\}$ satisface la siguiente condición de primer orden expresada en el sistema lineal homogéneo (ver Venegas (1992)):

$$\begin{pmatrix} -1 & u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ -1 & v_1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & v_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (II.71)$$

en donde u_k son tomadas como en (II.68) y $v_k = \gamma_k^{-1} u_k$, $k = 1, 2, \dots, m$.

El determinante en (II.71) está dado por

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^m \gamma_k - 1}{\prod_{k=1}^m \gamma_k} \right) \prod_{k=1}^m u_k,$$

lo que garantiza que existe una solución no trivial cuando $\sum_{k=1}^m \gamma_k = 1$. De hecho, en este caso, la solución es $\Omega^* = \{1, v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots, v_s^{-1}\}$, con lo cual

$$\pi^*(\theta) = \sum_{k=1}^m v_k^{-1} I_{A_k}(\theta).$$

Así, si la información *a priori* está dada por

$$\int_{\Theta} I_{A_k}(\theta) \pi(\theta) d\theta = \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

entonces

$$G_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \gamma_k (b_k^2 + b_k b_{k+1} + b_{k+1}^2), & i = j, \\ \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \gamma_k (b_k + b_{k+1}) \right)^2, & i \neq j. \end{cases}$$

UN EJEMPLO DE INFORMACION REDUNDANTE (CASO EXPONENCIAL)

Suponga que se cuenta con información sobre θ de la forma

$$\int_0^{\infty} \theta \pi(\theta) d\theta = \beta^{-1}. \quad (II.72)$$

En este caso el Lagrangiano del problema variacional de máxima entropía está dado por

$$L(\pi, \lambda_1, \lambda_2) = -\pi(\theta) \log \pi(\theta) + \lambda_0 \pi(\theta) + \lambda_1 \theta \pi(\theta),$$

donde λ_0 y λ_1 son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. La ecuación de Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial \pi}|_{\pi=\pi^*} = 0$ implica que

$$-1 - \log \pi^* + \lambda_0 + \theta \lambda_1 = 0,$$

equivalentemente

$$\pi^*(\theta) = \gamma e^{\lambda_1 \theta},$$

donde $\gamma = e^{\lambda_0 - 1}$. Los valores de γ y λ_1 son obtenidos a partir de las restricciones. Claramente, $\gamma > 0$, note también que $\lambda_1 < 0$, ya que en caso contrario

$$\int_0^{\infty} \gamma e^{\lambda_1 \theta} d\theta > \infty.$$

Sea $\lambda_1 = -\delta$, con $\delta > 0$. Por lo tanto,

$$1 = \int_0^{\infty} \gamma e^{-\delta \theta} d\theta = \frac{\gamma}{\delta},$$

de donde $\gamma = \delta = -\lambda_1$. De la otra restricción se obtiene que

$$\beta^{-1} = \int_0^{\infty} \delta \theta e^{-\delta \theta} d\theta = \delta^{-1}.$$

En consecuencia, $\delta = \beta$ y

$$\pi^*(\theta) = \beta e^{-\beta \theta}, \quad \theta > 0,$$

que corresponde a la distribución exponencial con parámetro β . Note que $H(\pi^*) = \log(e/\beta)$, y $H(\pi^*) > 0$ cuando $\beta < e$.

Ahora vamos a suponer que la información adicional obtenida está dada por (II.73) y por

$$\int_0^{\infty} \log \theta \pi(\theta) d\theta = -\mathcal{K} - \log \beta. \quad (II.73)$$

Se resuelve ahora el problema

$$\text{Maximizar } H(\pi) = - \int_0^{\infty} \pi(\theta) \log \pi(\theta) d\theta,$$

sujeto a

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_0^{\infty} \theta \pi(\theta) d\theta = \beta^{-1}, \\ \int_0^{\infty} \log \theta \pi(\theta) d\theta = -\mathcal{K} - \log \beta, \end{cases}$$

donde $\mathcal{K} (\approx 0.5772)$ es la constante de Euler¹⁷, entonces, al igual que antes, se puede verificar que la distribución exponencial con parámetro β es la solución del problema anterior. Es claro que, la restricción incorporada, $\int_0^{\infty} \log \theta \pi(\theta) d\theta = -\mathcal{K} - \log \beta$, es información redundante, ya que no produce cambio alguno en π^* . Se observa también que el correspondiente multiplicador de Lagrange es cero.

Otras restricciones que proporcionan información redundante con correspondientes multiplicadores iguales a cero, son, por ejemplo:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} (\log \theta)^2 \pi(\theta) d\theta = \frac{\pi^2}{6} + (\mathcal{K} + \log \beta)^2, \\ \int_0^{\infty} (\log \theta)^3 \pi(\theta) d\theta = - \left[(\mathcal{K} + \log \beta)^3 + \frac{\pi^2}{2} (\mathcal{K} + \log \beta) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(m+1)^3} \right]. \end{cases}$$

Por supuesto, la información adicional obtenida al aplicar el procedimiento en forma recursiva no es siempre redundante. Suponga, por ejemplo, que en lugar de (II.73), la información que se tiene es

$$\int_0^{\infty} \log(\theta) \pi(\theta) d\theta = \psi(\alpha) - \log \alpha \beta, \quad \alpha > 0,$$

entonces se puede demostrar fácilmente que en este caso π^* es una distribución Gamma con parámetros α y $\alpha\beta$, es decir

$$\pi^*(\theta) = [\Gamma(\alpha)]^{-1} [\alpha\beta]^{\alpha-1} \theta^{\alpha-1} e^{-\alpha\beta\theta}, \quad \theta > 0.$$

Por lo que el valor esperado del quasigradiente estocástico con información a priori está dado por

$$\mathbb{E} \{ \xi(X_k) | X_k \} \geq n \rho_k \mathbf{G} \hat{\nabla} g(X_k),$$

y la matriz de información toma la forma

$$G_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\alpha \beta^2} + \frac{1}{\beta^2} \right), & i = j, \\ \frac{1}{\beta^2}, & i \neq j. \end{cases}$$

¹⁷ Para más información sobre \mathcal{K} ver Gradshteyn y Ryzhik (1980).

**INFORMACION ADICIONAL EN NIVELES, VALORES Y POTENCIAS
(CASO WEIBULL)**

Suponga que la información inicial sobre θ está dada por

$$\int_0^{\infty} \theta \pi(\theta) d\theta = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(1 + \alpha^{-1}). \quad (II.74)$$

La solución del problema de máxima entropía es

$$\pi^*(\theta) = \{\beta^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(1 + \alpha^{-1})\}^{-1} \exp\{-\{\beta^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(1 + \alpha^{-1})\}^{-1} \theta\}, \quad \theta > 0.$$

Suponga ahora que la información inicial sobre θ consiste de (II.77) y de

$$\int_0^{\infty} \log \theta \pi(\theta) d\theta = \psi[\Gamma(1 + \alpha^{-1})] - \alpha^{-1} \log \beta. \quad (II.75)$$

Se resuelve ahora el problema de máxima entropía sujeto a

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_0^{\infty} \theta \pi(\theta) d\theta = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(1 + \alpha^{-1}), \\ \int_0^{\infty} \log \theta \pi(\theta) d\theta = \psi[\Gamma(1 + \alpha^{-1})] - \alpha^{-1} \log \beta. \end{cases}$$

Entonces la solución del problema variacional, $\pi^{**}(\theta(\pi^*))$, es la distribución Gamma con parámetros $\beta^{\frac{1}{\alpha}}$, y $\Gamma(1 + \alpha^{-1})$.

Vamos ahora a ver qué pasa si en lugar de (II.75) se tiene que

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \theta^{\alpha} \pi(\theta) d\theta = \beta^{-1}, \\ \int_0^{\infty} \log \theta \pi(\theta) d\theta = -\alpha^{-1} \mathcal{K} - \alpha^{-1} \log \beta. \end{cases}$$

Se resuelve ahora el problema de máxima entropía sujeto a

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_0^{\infty} \theta \pi(\theta) d\theta = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(1 + \alpha^{-1}), \\ \int_0^{\infty} \theta^{\alpha} \pi(\theta) d\theta = \beta^{-1}, \\ \int_0^{\infty} \log \theta \pi(\theta) d\theta = -\alpha^{-1} \mathcal{K} - \alpha^{-1} \log \beta. \end{cases}$$

Entonces la solución del problema variacional de máxima entropía, es la distribución Weibull con parámetros α y β , es decir,

$$\pi^*(\theta) = \alpha\beta\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta^\alpha}, \quad \theta > 0. \quad (II.76)$$

Este ejemplo muestra la sensibilidad del modelo al tipo de información adicional.

Finalmente, el valor esperado del quasigradiente estocástico viene dado por la expresión

$$\mathbb{E}\{\xi(X_k) | X_k\} \geq n\rho_k \mathbf{G} \widehat{\nabla}g(X_k).$$

Donde la matriz de información para este caso viene dada por

$$G_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right), & i = j, \\ \left[\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma(1 + \alpha)^{-1}\right]^2, & i \neq j. \end{cases}$$

De lo anterior, el valor de B_{km}^0 en el algoritmo RSA, es modificado ahora por el valor $B_{km}^0(\theta)$ que indica la búsqueda sobre una dirección de descenso en la que existe información a priori.

CAPITULO III

OPTIMIZACION DE SISTEMAS ESTOCASTICOS CON CARACTERISTICAS DE REGENERATIVIDAD

En la práctica, muchos problemas de optimización estocástica involucran cadenas de Markov de parámetro discreto o continuo. En esta parte de la investigación, se desea simular la trayectoria de un proceso en un horizonte infinito (en la práctica, esto se entiende como un horizonte suficientemente grande) y obtener un estimador de su valor esperado. En general este problema es muy complejo en términos de convergencia, pero se demostrará a continuación que es posible simplificar su análisis cuando el proceso se mueve dentro de una región acotada y convexa.

III.1 PROCESOS ESTOCASTICOS REGENERATIVOS

Los procesos estocásticos regenerativos, son también procesos de renovación. El proceso de renovación más conocido es el proceso de Poisson, donde los tiempos de llegada constituyen variables aleatorias exponenciales independientes e idénticamente distribuidas. Una generalización natural, es considerar un proceso de conteo para el cual los tiempos de llegada, no son variables exponenciales aunque estén idénticamente distribuidas.

Sea $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes y con la misma distribución F , suponga además que $F(0) = \mathbf{P}\{T_n = 0\} \leq 1$. En este caso, T_n representa el tiempo entre la ocurrencia del n y el $n + 1$ eventos. Sea

$$\mu_T = \mathbf{E}\{T_n\} = \int_0^{\infty} t dF(t),$$

la media entre eventos sucesivos. Note que de los supuestos $T_n \geq 0$ y $F(0) < 1$, se sigue entonces que $0 < \mu_T \leq \infty$. Haciendo

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n T_i, \quad n \geq 1,$$

se sigue que S_n es el tiempo de ocurrencia del n -ésimo evento, por lo que el número de eventos ocurridos al tiempo $N(t)$ está dado por

$$N(t) = \sup \{n : S_n \leq t\}.$$

Así, el proceso $\{N(t)\}$ determina un *proceso de renovación*. En este caso, los eventos coinciden con las renovaciones del proceso por lo que en lo sucesivo se empleará el término renovación como sinónimo de evento.

Una variable aleatoria T que toma valores en $[0, \infty)$, es un tiempo de paro [véase Cinlar (1975)] si para toda t finita $t \geq 0$, la ocurrencia o no ocurrencia del evento $T \leq t$ puede determinarse de la historia $\{X(s) \mid s \leq t\}$ del proceso sobre el tiempo t .

Un proceso estocástico $X = \{X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_d(t))^T \mid t \geq 0\}$ en un espacio Euclidiano d -dimensional es llamado *regenerativo*, si existen tiempos aleatorios de paro que determinan un proceso de renovación, tal que en cada tiempo, el futuro de X es una réplica independiente de su pasado. Tales tiempos aleatorios son llamados *tiempos de regeneración* de X y por lo tanto, se dice que el proceso X es regenerativo.

Los tiempos $\{t_i \mid t_i \geq 0\}$ son llamados tiempos de regeneración si la parte del proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$ definida entre cualquier par de tiempos sucesivos es estadísticamente independiente y una réplica de cualquier otra parte del proceso en cualquier otro par de tiempos sucesivos [véase Wolf (1989), pag.82].

La magnitud de tiempo $\tau_i = t_{i-1} - t_i$ es llamada la longitud del i -ésimo ciclo, y formalmente un proceso estocástico regenerativo se da si existe una sucesión de tiempos de paro t_0, t_1, \dots tales que:

1. $T = \{T_l \mid l \in \{1, 2, \dots\}\}$ es un proceso de renovación.
2. Para cualquier $L, m \in \{0, 1, 2, \dots\}, t_1, t_2, \dots, t_l > 0$, y cualquier función medible f

$$\mathbb{E} \{f(X_{t_m+t_1}, \dots, X_{t_m+t_l}) \mid X_k, k \leq t_m\} = \mathbb{E} \{f(X_{t_1}, \dots, X_{t_l})\}.$$

Por su importancia dentro de este análisis, conviene ahora introducir el concepto de estacionariedad en procesos regenerativos.

Definición III.1 *Un proceso estocástico $\{X(t) : t \geq 0\}$ se dice que es estacionario si: $\mathbf{P}\{X(t) \geq x\} \rightarrow \mathbf{P}\{X \geq x\}$ cuando $t \rightarrow \infty$. Al vector X obtenido de esta forma se le llama vector de probabilidades estado estacionario.*

Sea $f : \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}$ una función acotada, y sea

$$\mathbf{E}\{f(X)\}, \quad (III.1)$$

el valor esperado del proceso $\{X(t) \mid t \geq 0\}$. El objetivo en esta parte de la investigación, es estimar el valor mínimo de (III.1), donde el número $\mathbf{E}\{f(X)\}$ puede interpretarse como el costo promedio por unidad de tiempo en una corrida de simulación.

Considere la variable aleatoria:

$$Y_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(X(t))dt, \quad (III.2)$$

donde Y_i representa la penalización o recompensa asociada a $X(t)$ durante el ciclo $\tau_i = t_i - t_{i-1}$. Obviamente, Y_i es una variable aleatoria, pues τ_i y $f(X(t))$ lo son. Las siguientes proposiciones, se siguen de la estructura de los procesos regenerativos, su importancia radica en mostrar las propiedades de la sucesión $\{Y_i, \tau_i\}$ en términos de su distribución e independencia, la prueba puede verse en Crane e Iglehart (1975).

Proposición III.1 *La sucesión $\{(Y_i, \tau_i) : i \geq 1\}$ consiste de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos.*

Se dice que τ es una variable aleatoria periódica con período π , si con probabilidad uno toma valores en el conjunto $0, \pi, 2\pi, \dots$, y π es el mayor de tales números. Si no existe tal π , se dice entonces que τ es aperiódica. La periodicidad de τ se relaciona directamente con el estimador de (III.1) de la siguiente manera

Proposición III.2 *Si τ es aperiódica, $\mathbf{E}\{\tau_1\} < \infty$ y $\mathbf{E}\{|f(X)|\} < \infty$, entonces*

$$r = \mathbf{E}\{f(X)\} = \frac{\mathbf{E}\{Y_1\}}{\mathbf{E}\{\tau_1\}}. \quad (III.3)$$

La proposición (III.1), establece que el patrón de comportamiento del proceso durante ciclos diferentes es estadísticamente independiente e idénticamente distribuido. La proposición (III.2), establece como estimar el valor de r (el cual es el mismo, $r = \frac{\mathbf{E}\{Y_i\}}{\mathbf{E}\{\tau_i\}}$, para cualquier i) por métodos estadísticos elementales.

Sea F la función de distribución de la variable aleatoria que denota la longitud de los ciclos $\{\tau_i : i \geq 1\}$ donde $\mathbf{E}\{\tau\} < \infty$. Se dice que F es aritmética, si con probabilidad

uno puede tomar valores del conjunto $\{0, \vartheta, 2\vartheta, \dots\}$. El mayor de tales ϑ es llamado el período de F .

La existencia de un vector de estado estacionario cuando F es o no aritmética viene garantizada por la siguiente proposición.

Proposición III.3

1. Si F es no aritmética con media $\mu < \infty$, entonces existe un vector aleatorio finito X tal que $X(t) \Rightarrow X$. Donde el símbolo \Rightarrow expresa convergencia en probabilidad.
2. Si F es aritmética con período π , entonces existe un vector aleatorio finito X , tal que, cuando $n \rightarrow \infty$, $X(n\pi) \Rightarrow X$.

Prueba véase Crane e Iglehart (1975). •

Los resultados anteriores, forman la base para efectuar la simulación de los procesos regenerativos. Estos resultados conducirán a su vez a la solución del problema (III.1).

La forma en que se lleva a cabo la simulación mediante la estimación del vector de probabilidades de estado, y la obtención de las condiciones de estacionariedad se discuten en la siguiente sección.

III.2 SIMULACION Y OPTIMIZACION DE LOS PROCESOS REGENERATIVOS

Las propiedades regenerativas de un proceso, constituyen la parte medular en el análisis de los mismos. Para las aplicaciones en simulación se supondrá que el proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$ es constante por pedazos, continuo por la derecha y efectúa un número finito de saltos en cada intervalo de tiempo finito.

Se entenderá por simulación de un evento discreto a la simulación de las realizaciones de los procesos estocásticos $\{T(t) : t \geq 0\}$ y $\{X(t) : t \geq 0\}$, los cuales cambian de estado en tiempos finitos $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$. El proceso $\{T(t) : t \geq 0\}$, determina un vector $T_n = T(t_n)$ que es un listado cronológicamente ordenado de los tiempos en los que se observa la regeneración del proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$. El vector $X_n = X(t_n)$ está formado por las variables que describen los estados del proceso en el tiempo t_n ; claramente las

dimensiones de ambos vectores son iguales, y existe una relación directa componente a componente.

Para fines de simulación, la dimensión de los vectores $X(t_n)$ y $T(t_n)$ pueden coincidir con el número de veces en que el proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$ se regenera. En este caso, el reloj de simulación puede manejarse de dos maneras (véase Geoffrey (1981)):

1. Avanzando el reloj a intervalos discretos e iguales de tiempo y registrando las estadísticas que el proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$ genera. Es de particular interés en este procedimiento, el registro de los tiempos de renovación t_i , la longitud del ciclo generado $\tau_i = t_{i-1} - t_i$, y el valor de la variable aleatoria (III.2).
2. Avanzar el reloj cada vez que se registra un cambio en el sistema, en este caso, cada vez que el proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$ genera una transición hacia otro estado, se registran las estadísticas del mismo (tales como nuevo estado al que visita, tiempo de permanencia en ese estado, etc.).

En este caso, el reloj se moverá de acuerdo al inciso 1, por ser más conveniente debido a la naturaleza del problema que se está estudiando.

En cuanto a la forma de la función f en $\mathbf{E}\{f(X)\}$, ésta puede elegirse para producir, por ejemplo los momentos de X , la función de densidad de X o algunas funciones de costo del vector estado estacionario X .

Algunas funciones de interés relacionadas con cadenas de Markov irreducibles y ergódicas son¹

a).- $f^i(j) = 1$ si $j = k$, $f^i(j) = 0$ de otra manera, aquí:

$$\mathbf{E}\{f(X^i)\} = \mathbf{P}_k^i. \quad (III.4)$$

¹Una cadena de Markov cuya matriz de transición es \mathbf{P} se llama irreducible si para cada par de estados $i, j \in \mathcal{S}$, la probabilidad de pasar a j desde i es positiva y la transición se hace en un número finito de pruebas, matemáticamente

$$\forall i, j \quad \exists n \geq 1 \mid (\mathbf{P}^n)_{ij} > 0.$$

Un criterio simple para identificar a una matriz irreducible es probando que cualquier estado j es accesible desde cualquier estado i .

Una matriz se llama ergódica si todos sus estados son positivos recurrentes, esto es: $\Pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{ij}^n > 0$. En este caso, $\{\Pi_j, j = 0, 1, 2, \dots\}$ es una distribución estacionaria.

b).- $f^i(j) = c_j =$ costo de permanecer en el estado j ; o bien.

$$\mathbf{E}\{f(X^i)\} = \sum_{j \in I} c_j \mathbf{P}\{X^i = j\}. \quad (III.5)$$

donde

$$\mathbf{E}\{f(X^i)\} = \sum_{j \in I} f^i(j) \mathbf{P}\{X^i = j\} = \sum_{j \in I} f^i(j) \mathbf{P}_j^i, \quad (III.6)$$

$$\mathbf{P}_j^i = \mathbf{P}\{X^i = j\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{X_m^i = j\}, \quad (III.7)$$

es el vector estado estacionario asociado a la distribución.

La manera de obtener por Simulación Montecarlo las probabilidades de estado del proceso, vienen dadas por la relación del tiempo que permanece el proceso en el estado j con respecto a la longitud del ciclo; este proceso repetitivo, aporta un estimador insesgado del vector estado estacionario X . A continuación se expone esta idea.

Teorema IV.1 Sean $\{t_1, t_2, \dots\}$ eventos en los cuales ocurre la renovación de un proceso, si las longitudes de los ciclos tienen distribución F , con densidad definida sobre un intervalo y si $\mathbf{E}\{t_1\} < \infty$ entonces:

$$\mathbf{P}_j \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{X(t) = j\} = \frac{\mathbf{E}\{CTEC\}}{\mathbf{E}\{TC\}}, \quad (III.8)$$

donde $\mathbf{E}\{CTEC\}$ es el valor esperado del tiempo que el proceso permanece en el estado j durante un ciclo; y $\mathbf{E}\{TC\}$ es el valor esperado de la duración de un ciclo.

Corolario III.1 Para un proceso regenerativo tal que $\mathbf{P}\{\mathbf{E}\{\tau_1\} < \infty\} = 1$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Tiempo en } j \text{ durante } [0, t]}{t} = \frac{\mathbf{E}\{CTEC\}}{\mathbf{E}\{TC\}}. \quad (III.9)$$

Prueba Véase Sheldon (1983). ©

El teorema 3 y el corolario (III.1) aportan información acerca de como estimar el vector de estado del proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$ cuando se ha simulado un número de ciclos suficientemente grande. Note que (III.9) es un estimador para \mathbf{P}_j cuando $t \rightarrow \infty$. Sin embargo, cuando se desea encontrar el vector de estado por simulación Monte Carlo, ¿qué

tan grande es t ?, ¿existe un criterio para determinar la condición de estacionariedad del proceso $\{X(t) \mid t \geq 0\}$? Las respuestas a estas preguntas se pueden obtener a partir de un criterio de que tan grande debe ser t . Dado que el estado estacionario es una función de la edad del proceso, se propone entonces que dada la i -ésima renovación, un posible criterio de estabilidad viene dado por

$$\mathbf{E} \{ \| X(t_{k+1}) - X(t_k) \| \} \leq \epsilon, \quad (III.10)$$

donde $X(t_k)$ y $X(t_{k+1})$ son los vectores de estado obtenidos mediante el estimador (III.10) al efectuarse las renovaciones del proceso en los tiempos t_k y t_{k+1} , y $\epsilon > 0$ es un número suficientemente pequeño preasignado.

Finalmente, se puede ver que todo proceso estocástico regenerativo, posee la propiedad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ a \leq \{X(t) : t \geq 0\} \leq b \mid a > -\infty; b < \infty \} = 1, \quad (III.11)$$

esto es, si la longitud de los ciclos del proceso es una variable aleatoria con esperanza finita, entonces el proceso se mueve dentro de una región $[a, b]$ que también es finita. Por lo anterior, si un proceso dado es función de un parámetro λ , entonces dicho parámetro debe ser tal que mantenga al proceso dentro de $[a, b]$.

Así, la minimización de (III.1), cuando el proceso depende de un parámetro λ se hace en una región cerrada y convexa. Es inmediato que una ligera modificación del algoritmo RSA propuesto en el capítulo II de este trabajo genera una nueva versión para aplicarse a la minimización de (III.1). Por lo anterior, dado el problema

$$\min_{\lambda \in \mathcal{D}} \mathbf{E} \{ f(x) \}, \quad (III.12)$$

donde λ es el parámetro de control del proceso y $\mathcal{D} = \{ \lambda \mid a \leq \lambda \leq b \}$ es su dominio de definición, el siguiente algoritmo es una alternativa para obtener una solución por métodos de búsqueda aleatoria.

ALGORITMO MODIFICADO DE BUSQUEDA ALEATORIA (MRSA)

Especifique $\epsilon > 0$, sea $\mathcal{D} = \{ \lambda_k \mid \lambda_k \text{ mantienen al proceso dentro de } [a, b] \}$.

1. Seleccione $m > 1$ puntos $\lambda_k + \Theta_k \mathcal{B}_{ki}$ sobre la superficie $\{X_k + \Theta_k \mathcal{B}\}$ donde \mathcal{B} se distribuye uniformemente sobre la esfera unitaria n -dimensional con realizaciones

B_{ki} , $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots, m$ y $\Theta_k > 0$ es un factor de expansión-contracción de B .

2. Obtenga los valores esperados del proceso

$$\Upsilon_{ki} = \mathbf{E} \{f(X_k, \lambda_k + \Theta_k B_{ki})\} - \mathbf{E} \{f(X_k, \lambda_k)\}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

3. Defina $\Upsilon_{km}^0 = \min\{\Upsilon_{k1}, \Upsilon_{k2}, \dots, \Upsilon_{km}\}$ y sea B_{km}^0 el vector que denota la dirección en la cual se produce el mínimo.

4. Actualice el nuevo λ de acuerdo a:

$$\lambda_{k+1} = \pi_{\mathcal{D}} \{\lambda_k - \alpha_k \gamma_k \Upsilon_{km}^0 \Theta_k B_{km}^0\}.$$

5. Si $\mathbf{E} \{\|\lambda_{k+1} - \lambda_k\|\} < \epsilon$, o si el número de iteraciones es igual al deseado, pare, en caso contrario vaya al paso 1 ²

El conjunto \mathcal{D} viene dado de manera natural en algunos casos de modelos de líneas de espera [véase el ejemplo IV.2]. En otras circunstancias, \mathcal{D} se debe elegir de tal manera que se cumpla la condición (III.11) hasta alcanzar el estado estacionario del proceso. La prueba de convergencia de MRSA es similar a la formulada en el teorema 3.

²En este caso, λ representa un vector en \mathcal{R}^n .

CAPITULO IV

APLICACIONES

A continuación, se hacen algunas aplicaciones del algoritmo RSA, en cada caso, se construye un estimador de la función objetivo y se aplica el algoritmo desarrollado para la minimización de la función dada. El capítulo está organizado como sigue: En la sección IV.1 se presenta la técnica de simulación de la variable aleatoria B_{ik} sobre la esfera n -dimensional, manteniendo también la posibilidad de un elipsoide. A continuación en la sección IV.2 se utiliza el algoritmo en el diseño óptimo de un sistema interconectado con flujos y movimientos aleatorios. El mismo ejemplo se vuelve a resolver, pero esta vez se parte del vector de estado estacionario asociado al proceso; se discute también sobre la forma en como se obtiene dicho vector. Una variante en la función objetivo del problema conduce a dos nuevos casos que son resueltos en condiciones de estado estacionario. En la sección IV.3 se muestra la segunda aplicación en un modelo de inventarios con demanda aleatoria desconocida; en este caso, se determina la política óptima de operación en términos de la intensidad del abastecimiento (parámetro de control). Finalmente, en la sección IV.5 se discute sobre el potencial de aplicaciones a modelos de toma de decisiones bajo incertidumbre y sin información a priori; en este caso, se desea encontrar una política \mathcal{P} que minimice el costo esperado al tomar una decisión sobre el proceso.

IV.1 SUPERFICIES DE PRUEBA PARA LA SIMULACION

Las superficies de prueba más comunes son esferas n -dimensionales, elipsoides n -dimensionales o un símplex en \mathcal{R}^n . El objetivo de la superficie de prueba, es proporcionar una región geométrica de búsqueda para definir una dirección de descenso en problemas de optimización estocástica de funciones no diferenciables.

En este trabajo, se utilizará una esfera n -dimensional como región de prueba (fig. 1), aunque también se explicará la forma de como se puede simular un elipsoide en \mathcal{R}^n ; para la simulación de vectores uniformemente distribuidos sobre un símplex n -dimensional, se recomienda ver Reuben (1982).

En el caso de la esfera n -dimensional de radio r , la función de densidad de un vector

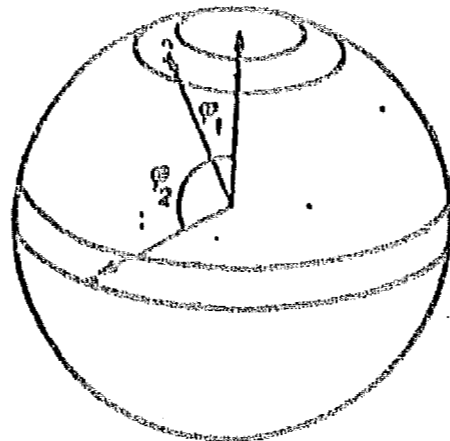


Figure 1: Esfera unitaria en dos dimensiones

aleatorio uniformemente distribuido sobre su superficie viene dada por

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2} r^{n-1}}, & \text{si } y = \{(y_1, y_2, \dots, y_n), \sum_{i=1}^n y_i^2 = r^2\}, \\ 0, & \text{de otra manera,} \end{cases}$$

Lo anterior se debe a que para $n \geq 3$, la superficie de una esfera n -dimensional¹, viene dada por

$$\frac{2\pi^{n/2} r^{n-1}}{\Gamma(n/2)}.$$

En este caso, cualquier punto Y_i sobre la superficie de la esfera, puede ser proyectado hacia su interior y obtener un punto X_i en su cerradura dado por:

$$X_i = U^{1/Q} Y_i, \quad U \sim u(0,1), \quad (IV.1)$$

donde Q es una constante.

ALGORITMO DE ACEPTACION RECHAZO

Uno de los algoritmos más simples en simulación de superficies esféricas es el algoritmo de aceptación rechazo, que en esencia es una variante de los métodos desarrollados por Newman (1951), su descripción es como sigue

1. Genere u_i , $i = 1, 2, \dots, n$, uniformemente sobre $(0, 1)$.

¹para $n = 2$ se obtiene la longitud de la circunferencia de un círculo de radio r .

2. Haga $x_i = 1 - 2u_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $y^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.
3. Si $y^2 < 1$ considere al vector $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, uniformemente distribuido sobre la superficie de la esfera unitaria, donde $z_i = x_i/y$, $i = 1, 2, \dots, n$. En caso contrario pase a 1.

Una ventaja importante en este algoritmo es la simplicidad de su uso sin embargo, para grandes valores de n se le considera poco eficiente. La eficiencia viene dada por la razón

$$\frac{1}{C} = \frac{\text{Volumen de la esfera}}{\text{Volumen del cubo}},$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{n 2^{n-1} n 2^{n-1} \Gamma(n/2)} \pi^{n/2}$$

donde si $n = 2m$ entonces

$$\frac{1}{C} = \frac{\pi^m}{m! 2^{2m}} = \frac{1}{m!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^m 2^{-m},$$

y por lo tanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{C} = 0.$$

Otro algoritmo para la generación de vectores uniformemente distribuidos sobre la superficie de una esfera unitaria n -dimensional viene dado en el siguiente teorema

Teorema IV.1 Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias distribuidas $N(0, 1)$. Entonces el vector

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \left(\frac{X_1}{Z}, \frac{X_2}{Z}, \dots, \frac{X_n}{Z}\right),$$

donde $Z = (\sum_{i=1}^n X_i^2)^{1/2}$, está distribuido uniformemente sobre la superficie de la esfera unitaria n -dimensional, $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$.

Prueba.- Considere la siguiente transformación de variables

$$\begin{cases} z = v, \\ x_i = v y_i, \end{cases}$$

el Jacobiano asociado a esta transformación es $J = z^n$, por lo tanto

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n, V}(y_1, y_2, \dots, y_n, v) = v^n \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(y_i v)^2}{2}\right) =$$

$$v^n \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Ya que

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{z}\right)^2 = \frac{1}{z^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1,$$

se obtiene

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n, V}(y_1, y_2, \dots, y_n, v) = v^n \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-v^2/2},$$

de los resultados anteriores, observe que el vector (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) y V son independientes, note además que el vector (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) está uniformemente distribuido sobre la superficie de la esfera unitaria $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$. \odot

La prueba sobre la distribución uniforme de Z en la superficie de la esfera n -dimensional, para el algoritmo de aceptación rechazo, es similar y por lo tanto no se anexa.

Observe que los algoritmos anteriores, pueden producir puntos uniformemente distribuidos sobre la superficie de la esfera n -dimensional que a su vez, pueden proyectarse hacia su interior y viceversa. Considere por ejemplo al vector $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ uniformemente distribuido sobre la superficie de la esfera n -dimensional, entonces el vector $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ con componentes $X_i = U^{1/n} Y_i$, está distribuido uniformemente en el interior de la esfera n -dimensional donde U se distribuye uniformemente en el intervalo $(0, 1)$. Considere ahora al vector $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ uniformemente distribuido en el interior de la esfera n -dimensional, entonces el vector $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ con componentes $Y_i = (\sum_{i=1}^n X_i^2)^{-1/2} X_i$ está distribuido uniformemente sobre la superficie de la esfera n -dimensional. Esto es, Y es una proyección desde el interior hacia la superficie de la esfera.

Para el algoritmo de aceptación rechazo, $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ se distribuye uniformemente en la superficie de la esfera de radio unitario.

Para consulta sobre otros algoritmos que generan vectores uniformemente distribuidos sobre la superficie de una esfera en \mathcal{R}^n puede verse Reuben (1982).

ALGORITMO DE LA ELIPSE

Una elipse con centro en el origen puede representarse por la ecuación

$$X^T A X = r^2,$$

donde $A = CC^T$ es una matriz de tamaño $n \times n$, simétrica y positiva definida y T es el operador transpuesto; C es una matriz triangular inferior, cuya existencia se garantiza de las propiedades de A . En particular, si $A = I$, se tiene una esfera de radio r .

De lo anterior, el vector $Y = CX$ está distribuido uniformemente sobre la superficie de la elipse n -dimensional, y el algoritmo para su obtención es como sigue:

1. Genere el vector $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uniformemente distribuido sobre la superficie de la n -esfera con radio r , por cualquiera de los algoritmos mencionados anteriormente.
2. Encuentre la matriz A definida por: $A = CC^T$.
3. Defina a $Y = CX$.

para obtener los elementos c_{ij} , se pueden usar varias técnicas que simplifican las operaciones de manera sustancial, véase por ejemplo Reuben (1982). El uso de las superficies de prueba en la optimización de modelos dinámicos estocásticos, se muestra a continuación.

IV.2 DISEÑO OPTIMO DE UNA RED DE SERVICIOS

Un modelo común en el diseño de estaciones de servicio tales como redes de cómputo, estaciones de telecomunicaciones, centrales telefónicas, o bien servicios simples como cajas de pago en un supermercado, estaciones de ensamble en un proceso productivo, etc., pueden modelarse en términos de redes, donde los nodos representan las estaciones, y los arcos representan las posibilidades de intercambiar flujos de nodo a nodo. En una red estocástica, tales flujos se consideran aleatorios y las probabilidades de transición son conocidas.

Considere una red estocástica donde los nodos reciben flujos aleatorios a una cierta intensidad de llegadas, los clientes son atendidos a una tasa de servicio que puede controlarse a voluntad del decisor y eventualmente, se puede pasar de nodo a nodo con cierta probabilidad de transición conocida.

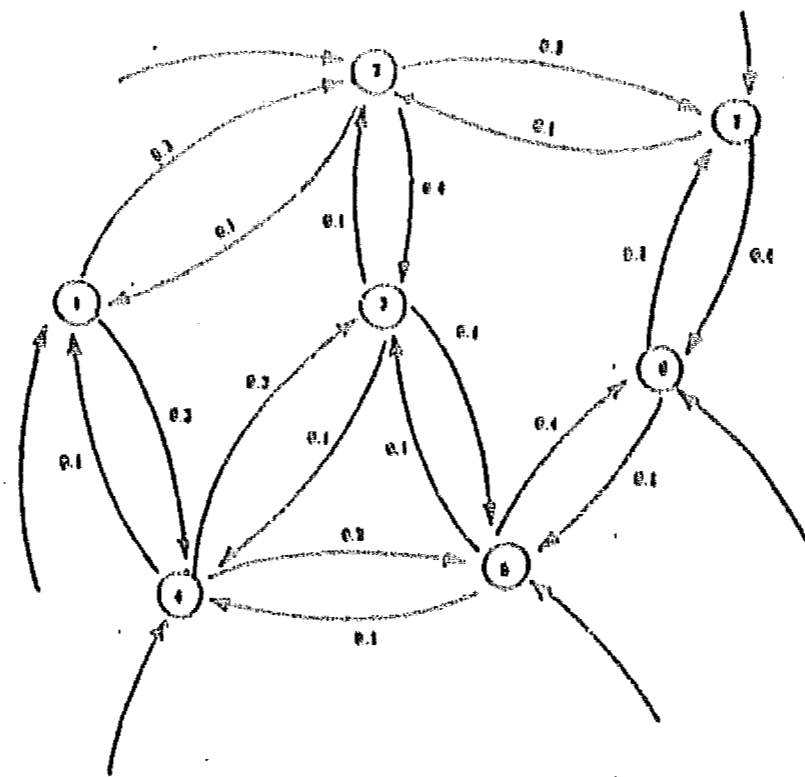


Figure 2: Una red de servicios con siete nodos

Obviamente, la relación entre la tasa de llegadas y la tasa de servicio se mantiene de tal forma que el proceso estocástico definido por $N(t) =$ número de clientes en la cola en el instante t , se mantenga bajo las condiciones de estabilidad dadas por la ecuación (III.11). En general para el sistema $G/G/1$ la estabilidad viene dada por $\rho < 1$; donde $\rho = \lambda/\gamma$ es la intensidad de tráfico del sistema, λ y γ son las intensidades de llegadas y de servicios, respectivamente.

Considere la red de servicios dada en la figura (2); en cada nodo, existe una estación de servicio cuya intensidad X_i se distribuye exponencialmente. Existe un flujo autónomo de clientes con intensidad $\gamma_i = 10/7$ y además, una cierta proporción de clientes abandona el sistema después de ser servidos en el nodo i (es por ello que la matriz de transición R es una matriz relajada y las filas no suman uno). Los otros clientes se mueven desde i hacia j con probabilidad r_{ij} .

Sea Z_i el número aleatorio de clientes en cola en el nodo i , $i = 1, 2, \dots, n$. El problema consiste en encontrar la distribución óptima de intensidades X_i de servicio en cada nodo i con $i = 1, 2, \dots, n$, bajo la condición de no exceder las capacidad instalada D ; es decir

$$\text{Minimizar } f(X) = E_X\{H(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)\}. \quad (IV.2)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq D. \quad (IV.3)$$

donde $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$, y $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. La función $H(Z)$ toma usual-

mente las siguientes formas

$$H(Z) = \sum_{i=1}^n (Z_i)^{1/2}, \quad (IV.4)$$

$$H(Z) = \sum_{i=1}^n Z_i^2, \quad (IV.5)$$

$$H(Z) = \sum_{i=1}^n Z_i, \quad (IV.6)$$

donde en (IV.7), se obtiene la longitud total de la cola en el sistema. En este caso, se consideran a los flujos X_i , como variables aleatorias Poisson. La matriz de transición viene dada por la matriz relajada

$$R = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

Sean Z_1, Z_2, \dots, Z_7 los números de clientes en la cola de los nodos 1 al 7, respectivamente. El problema se define entonces como:

$$\text{Minimizar } f(X) = \mathbf{E}_X \left\{ \sum_{i=1}^7 Z_i \right\}. \quad (IV.7)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^7 X_i \leq 35. \quad (IV.8)$$

Observe que si $H(Z) = \sqrt{\sum Z_i}$ o $H(Z) = \sum_i Z_i^2$ la solución analítica se vuelve imposible debido a que no existe una forma directa de obtener la esperanza de $H(Z)$; en el caso de la expresión (IV.7), la solución analítica se puede obtener a partir de las siguientes ecuaciones [véase Kleinrock (1975), p. 147].

Si $f(X)$ denota el número esperado de clientes en el sistema, entonces:

$$f(X) = \mathbf{E}_X\{H(Z)\} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X_i - \lambda_i},$$

donde $\lambda_i = \gamma_i + \sum_j \lambda_j r_{ji}$ es la tasa total de arribos promedio al nodo i .

En este caso, la condición $\lambda_i < \gamma_i$ garantiza la condición de estabilidad de la cadena ergódica de Markov para nodos con un solo servidor; así el dominio de búsqueda \mathcal{D} para $X \in \mathcal{R}^7$ es compacto.

Resolviendo el sistema: $\lambda_i = \gamma_i + \sum_j \lambda_j r_{ji}$, $i = 1, 2, \dots, 7$, y utilizando la matriz R definida anteriormente, se tiene que:

$$\lambda_1 = 1.9659; \quad \lambda_2 = 2.6441; \quad \lambda_3 = 3.6503;$$

$$\lambda_4 = 2.7288; \quad \lambda_5 = 3.4548; \quad \lambda_6 = 3.8533; \quad \lambda_7 = 2.6071.$$

Aplicando las condiciones de Kuhn-Tucker, la solución del problema (IV.8), sujeto a (IV.9) viene dada por

$$X_i = \lambda_i + \sqrt{\lambda_i} \left(\frac{D - \sum \lambda_i}{\sum \lambda_i} \right),$$

por lo que entonces, para $D = 35$, se tiene que:

$$X_1^* = 3.6092, \quad X_2^* = 4.5499,$$

$$X_3^* = 5.8895, \quad X_4^* = 4.6688,$$

$$X_5^* = 5.6332, \quad X_6^* = 6.1526,$$

$$X_7^* = 4.995, \quad f(X) = 10.26.$$

Observe que el problema anterior, constituye un proceso Markoviano de tiempo continuo; esto representa una fuerte dificultad computacional pues se requiere en la mayoría de los casos, hacer observaciones del proceso en forma discreta sin que se pierda su distribución estacionaria. En este caso, si se desea discretizar un proceso conservando las probabilidades de transición, se puede recurrir al siguiente cambio de variable [véase Hordick, Iglehart y Schabberger (1976)].

Si $Q = (q_{ij})$ es la matriz de transición del proceso Markoviano en tiempo continuo y si $|q_{ij}| < n$ para toda i, j , entonces $P = (p_{ij})$ con

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{n}, & \text{si } i \neq j, \\ 1 - \frac{1}{n} \sum_{k \neq i} q_{ik}, & \text{si } j = i, \end{cases}$$

es la matriz de transición de un proceso en tiempo discreto con distribución estacionaria idéntica al proceso en tiempo continuo; en este caso $n = 35$.

Por lo anterior, el experimento de simulación se puede hacer mediante la técnica de avanzar el reloj en intervalos pequeños y uniformes, determinando en cada intervalo el número total de clientes en el sistema. Esta técnica es llamada *reloj orientado a intervalos* [véase Geoffrey (1987)].

A continuación, se procederá a resolver el sistema propuesto aplicando el algoritmo MRSA y la Simulación Montecarlo del mismo, la estrategia de simulación es la siguiente:

Considere un sistema donde se tiene una fuente única de clientes que suministra las entidades a razón de $\gamma = 10/7$ con distribución exponencial. Para asignar las entidades a los nodos, se supone que cada uno tiene la misma probabilidad de recibir a la k -ésima entidad; su tiempo de servicio es calculado a partir de valores obtenidos de la simulación de una distribución exponencial con parámetro desconocido X ; donde $X > \gamma$; el reloj de simulación, se mueve a intervalos de cinco minutos cada uno, donde al cabo de los mismos se observa el valor que toma el proceso discretizado sobre T .

La simulación comienza con el sistema vacío y se seleccionan los puntos regenerativos del proceso t_n como los tiempos en las cuales ocurren los arribos de los clientes sin que previamente existan clientes a la izquierda (ver fig. (3)). Aquí; $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ representa la longitud del intervalo de regeneración, y la cantidad:

$$Y_k = \sum_{t_{n-1}}^{t_n} \{N(t) : t \geq 0\}, \quad (IV.9)$$

representa el total de clientes servidos en el k -ésimo intervalo. Observe que el comportamiento de t_n es completamente independiente de su historia pasada. Así, un estimador sesgado, pero consistente del valor esperado del proceso que define al número total de

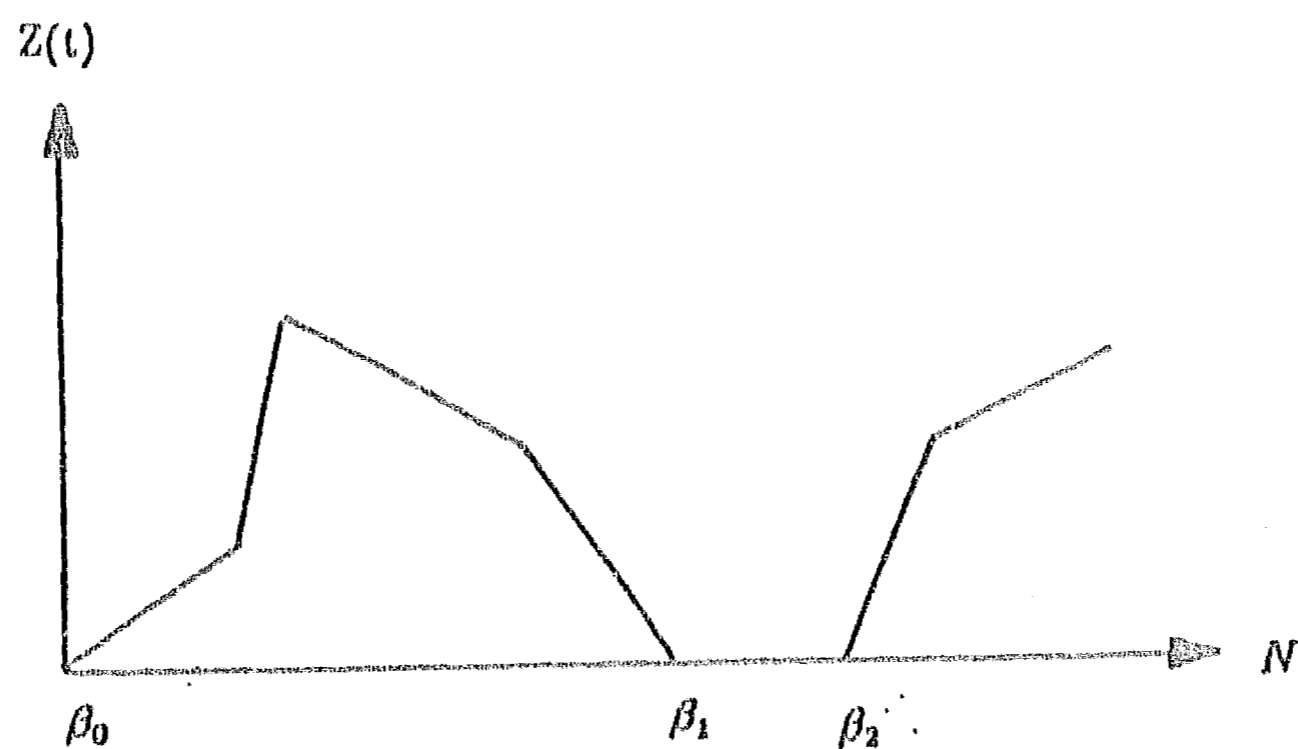


Figure 3: Puntos de regeneración del proceso $Z(t)$

clientes en el sistema en el instante g viene dado por:

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{k=1}^N Y_k}{\sum_{k=1}^N \tau_k}, \quad (IV.10)$$

donde N = número de ciclos completados hasta el instante g .

La obtención del vector $X^* \in \mathcal{R}^7$ que minimiza al número esperado de clientes en el sistema viene dado por la aplicación del algoritmo MRSA de la siguiente manera:

$j \rightarrow 0$, fije $\epsilon > 0$.

1. Seleccione $X_j \in \mathcal{R}^7$ de tal manera que $X_j > \gamma$, $s = 1, 2, \dots, 7$. Este paso garantiza la estabilidad del proceso [véase (III.11)].
2. Evalúe \bar{Z}_j , mediante la simulación de N ciclos del proceso $\{Z_n : n > 0\}$.
3. Obtenga $m > 1$ puntos $X_0 + \Theta B_{jk}$ sobre la superficie de la esfera unitaria n -dimensional, B .
4. Estime los valores esperados del proceso con el parámetro $X_0 + \Theta B_{jk}$ y calcule con ello las esperanzas \bar{Z}_{jk} , $k = 1, 2, \dots, m$.
5. Calcule $Y_{jk} = \bar{Z}_{jk} - \bar{Z}_j$, $k = 1, 2, \dots, m$.
6. Obtenga $\Upsilon_{jm}^0 = \min\{Y_{j1}, Y_{j2}, \dots, Y_{jm}\}$ y sea B_{jm} el vector que denota la dirección en la cual se produce el mínimo.

7. Actualice X de acuerdo a la relación² :

$$X_{j+1} = \pi_{\mathcal{D}}\{X_j - \alpha_j \gamma_j \Upsilon_{jm}^0 \Theta_j B_{jm}\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

8. Si $\mathbb{E}\{\|X_{j+1} - X_j\|\} \leq \epsilon$ o si el número de iteraciones es igual al descado, detenga el proceso; de otra manera, haga $j = j + 1$ y vaya al paso 1.

Los resultados aplicando MRSA al problema descrito se resumen como sigue:

- Número total de iteraciones: 7

- Valores óptimos:

$$X_1^* = 3.55823, \quad X_2^* = 4.52938, \quad X_3^* = 5.80823, \quad X_4^* = 4.66342,$$

$$X_5^* = 5.63827, \quad X_6^* = 6.13728, \quad X_7^* = 5.51983, \quad f^*(X^*) = 10.28.$$

- Tiempo real total de simulación: 14 minutos.

- Tiempo reloj de Simulación: 2400 minutos.

- Máxima longitud de la cola: 15 clientes (minuto 1808, nodo 1).

- Mínima extensión de la cola: 0 clientes (en varios minutos nodos 5 y 6).

- Número de entidades generadas en el sistema: 1457

- Nodos con mayor flujo de clientes (internos y externos): 3 y 7

Finalmente, note que en el caso extremo, γ puede estimarse a partir de un valor muestral de la misma e implantar una subrutina de simulación para su obtención.

Considere nuevamente el problema del diseño óptimo de instalaciones, de (IV.3) se puede obtener el valor esperado del proceso mediante una estimación del mismo, sin embargo, también se puede encontrar el valor esperado (suponiendo tiempos de renovación finitos) aplicando la ecuación (III.10), que a continuación se reproduce

²En este caso, $\mathcal{D} = \{X_s \mid \sum_{s=1}^7 X_s \leq 35\}$.

$$P_j \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = j\} = \frac{E\{CTEC\}}{E\{TC\}}.$$

Donde *CTEC* es la cantidad de tiempo que permanece el proceso en el estado *i* durante un ciclo; y *TC* es el tiempo de duración de ese ciclo. Así, simulando el proceso $N(t) =$ número de clientes en el sistema en el instante t con $t = 5k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, (con objeto de discretizar el parámetro de estado) durante un total de 2700 corridas, se encuentra que el vector de probabilidades de estado, para un número de 20 estados posibles viene dado por:

Vector de Probabilidades de Estado N(2700)									
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0.0	0.0	0.0012	0.0013	0.0019	0.0085	0.0120	0.0185	0.0219	0.0824

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
0.0995	0.1655	0.2771	0.1417	0.0871	0.0811	0.000	0.000	0.000	0.0

Continuando con la simulación, y después de 4500 ciclos, se obtiene el vector de estado estacionario, los siguientes valores de $N(4500)$ y $N(4520)$ muestran que se ha alcanzado la estabilidad, después de 7 minutos de simulación en tiempo real:

Vector de Estado Estacionario N(4500)									
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0.0	0.0	0.01000	0.01200	0.01801	0.0870	0.0126	0.0187	0.0223	0.0826

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
0.1000	0.1660	0.2100	0.2214	0.0071	0.0313	0.000	0.000	0.000	0.000

Vector de Estado Estacionario N(4520)									
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0.000	0.000	0.01000	0.0198	0.0179	0.0869	0.0126	0.0187	0.022	0.08259

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
0.1001	0.1660	0.2101	0.2214	0.0072	0.0314	0.000	0.000	0.000	0.000

De los vectores $N(4500)$ y $N(4520)$; note que

$$\| N(4500) - N(4520) \| = \epsilon$$

dado que $\epsilon = 0.0078$ se puede entonces considerar que el error es aceptable para que el proceso $\{N(t) \mid t \geq 0, t = 5k, k = 0, 1, \dots\}$ sea estable.

El cálculo del valor esperado del proceso $\{N(t)\}$, esta vez a partir del vector de estado estacionario, lleva a los siguientes resultados:

$$X_1^* = 3.9992, X_2^* = 4.2503, X_3^* = 5.6884, X_4^* = 4.6654,$$

$$X_5^* = 5.9332, X_6^* = 6.9545, X_7^* = 4.9004, f(X) = 12.323.$$

Como podría esperarse, estos cálculos son mucho más precisos que los obtenidos en el ejemplo IV.3. Como complemento del análisis se obtuvo además:

- Tiempo real total de simulación: 22.5 minutos.
- Tiempo reloj de simulación: 2530 minutos.
- Máxima longitud de la cola en el sistema: 17 clientes.
- Mínima extensión de la cola: 0 clientes
- Número de entidades generadas: 2750
- Nodo con mayor influjo de clientes: 3

Finalmente, de los resultados observados, se puede concluir que la aplicación del algoritmo a este problema, cuando se tienen las condiciones de estado estacionario, mejora considerablemente la precisión del resultado, aunque consume mayor cantidad de tiempo máquina de simulación (aproximadamente 5 minutos) y mayor cantidad de memoria al guardar consecutivamente los vectores de estado del proceso.

El algoritmo MRSA se aplicó también para minimizar las funciones $H(Z)$ definidas en (IV.4) y (IV.5) sujetas a la restricción (IV.3), los resultados se obtienen a partir del estado estacionario del proceso y son los siguientes.

Para el problema estocástico de minimización

$$\text{Minimizar } f(X) = \mathbf{E}_X \left\{ \sum_{i=1}^7 (Z_i)^{1/2} \right\}. \quad (IV.11)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^7 X_i \leq 35,$$

se obtiene

- Número total de iteraciones: 8
- Valores optimos:

$$X_1^* = 5.59595, \quad X_2^* = 3.64072, \quad X_3^* = 3.70984 \quad X_4^* = 4.20468$$

$$X_5^* = 3.67604, \quad X_6^* = 4.20684, \quad X_7^* = 4.34228, \quad f^*(X^*) = 16.12$$

- Tiempo real de simulación: 15 minutos.
- Máxima longitud de la cola: 6 clientes.
- Mínima extensión de la cola en el sistema: 0 clientes.
- Número de entidades generadas en el sistema: 1965
- Nodos con mayor flujo de clientes: 3 y 5.

Para el problema estocástico de minimización

$$\text{Minimizar } f(X) = \mathbb{E}_X \left\{ \sum_{i=1}^7 Z_i^2 \right\}. \quad (IV.12)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^7 X_i \leq 35,$$

se obtiene

• Número total de iteraciones: 9

• Valores óptimos:

$$X_1^* = 4.01077, \quad X_2^* = 4.04995, \quad X_3^* = 4.91356, \quad X_4^* = 3.21176$$

$$X_5^* = 2.82255, \quad X_6^* = 2.356517, \quad X_7^* = 2.95047223, \quad f(X^*) = 6.71$$

- Tiempo real total de simulación: 15 minutos.
- Tiempo reloj de simulación: 2680 minutos.
- Máxima longitud de la cola: 25 clientes.
- Mínima extensión de la cola: 0 clientes.
- Número de entidades generadas en el sistema: 1589
- Nodo con mayor flujo de clientes: 3

IV.3 UN MODELO DE INVENTARIOS CON DEFICIT, FLUJO Y REVISION CONTINUA

Una compañía minera, beneficia oro y plata, triturando el mineral nativo para obtener los minerales auriargentíferos por reacciones físico-químicas a base de cianuración. En la primera fase, el mineral proveniente de minas es almacenado en un sistema de tolvas con capacidad total de 4200 toneladas y el surtimiento desde las minas se lleva a cabo por medio de botes con capacidad de 5 toneladas cada uno. El mineral es demandado de

las tolvas en cantidades aleatorias a intervalos de tiempo aleatorio, asimismo, los botes surtidores descargan su producto en intervalos de tiempo que también son variables aleatorias.

Observe que en este sistema un excesivo retraso en el llenado de tolvas provoca discontinuidad en la producción y una tasa de entrega alta genera un sobrellenado.

Dado que se tiene un control sobre la tasa λ de llenado en tolvas se desea operar el sistema a un costo esperado del inventario mínimo. La modelación es la siguiente:

Considere 3 costos básicos: $C_1 =$ costo por inventario promedio, $C_2 =$ costo por déficit promedio y $C_3 =$ costo asociado al número de reemplazos en el sistema. Las figuras (4) y (5) representan una realización típica del sistema, así como el caso con inventario positivo entre dos períodos y el caso con déficit respectivamente.

Sean:

- $j =$ Número de períodos en el horizonte de la simulación.
- $X_j =$ Inventario disponible al inicio del período j en toneladas.
- $S_j =$ Demanda en toneladas/minuto durante el período j .
- $q_j =$ Inventario en toneladas que se tiene al final del período j en toneladas.
- $R =$ Cantidad constante agregada al inventario al final de cada ciclo, su valor es de 5 toneladas.
- $T =$ Variable aleatoria que denota el tiempo de entrega del inventario en minutos.
- $\lambda =$ tasa de entrega del mineral en tolvas en toneladas / minuto.
- $\bar{S} =$ Demanda promedio al final del período k en toneladas / minuto.

Dado que este modelo admite déficit, q_j puede ser mayor, menor o igual a cero. Las siguientes relaciones son obvias de la definición de variables:

$$q_j = X_j - S_j, \quad (IV.13)$$

$$X_{j+1} = q_j + 5. \quad (IV.14)$$

Sean ahora:

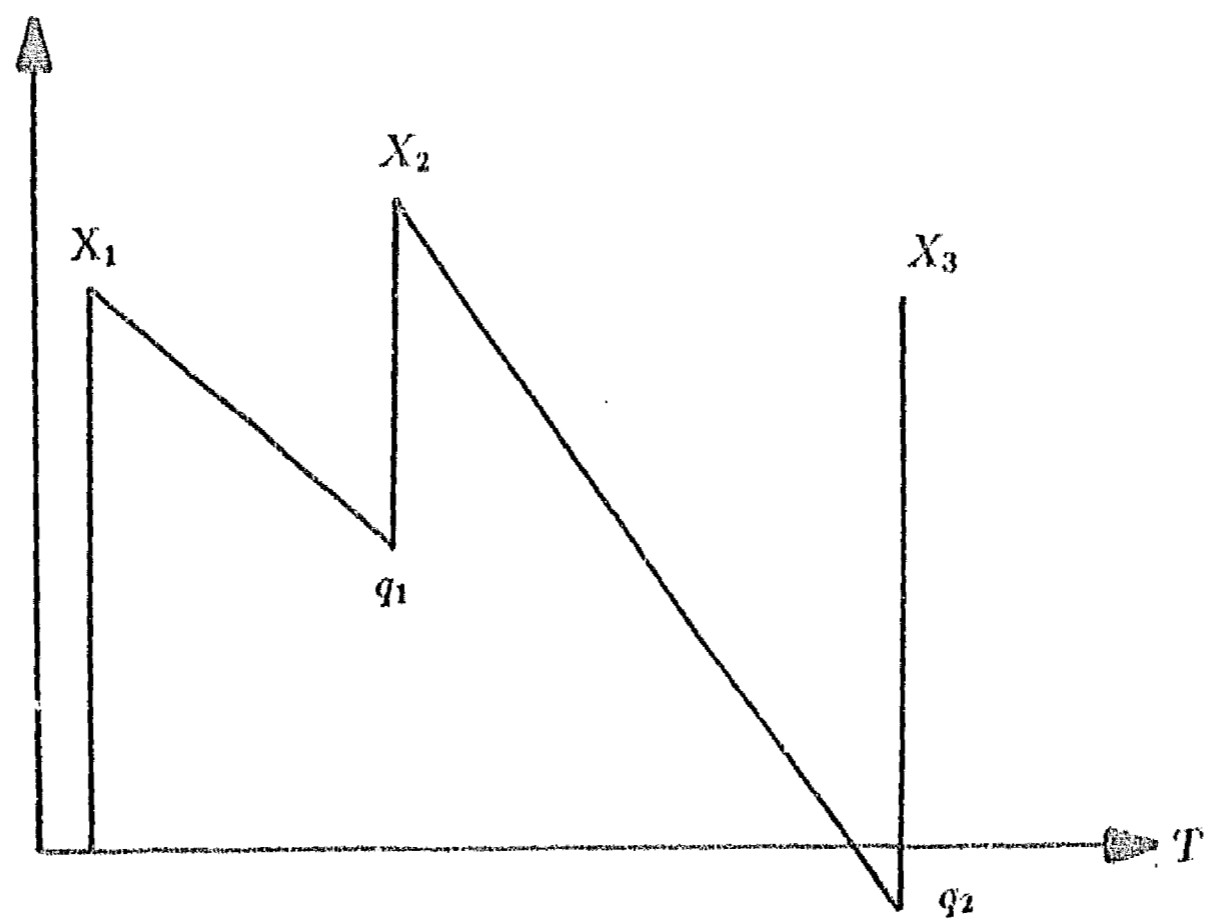


Figure 4: Realización típica del sistema

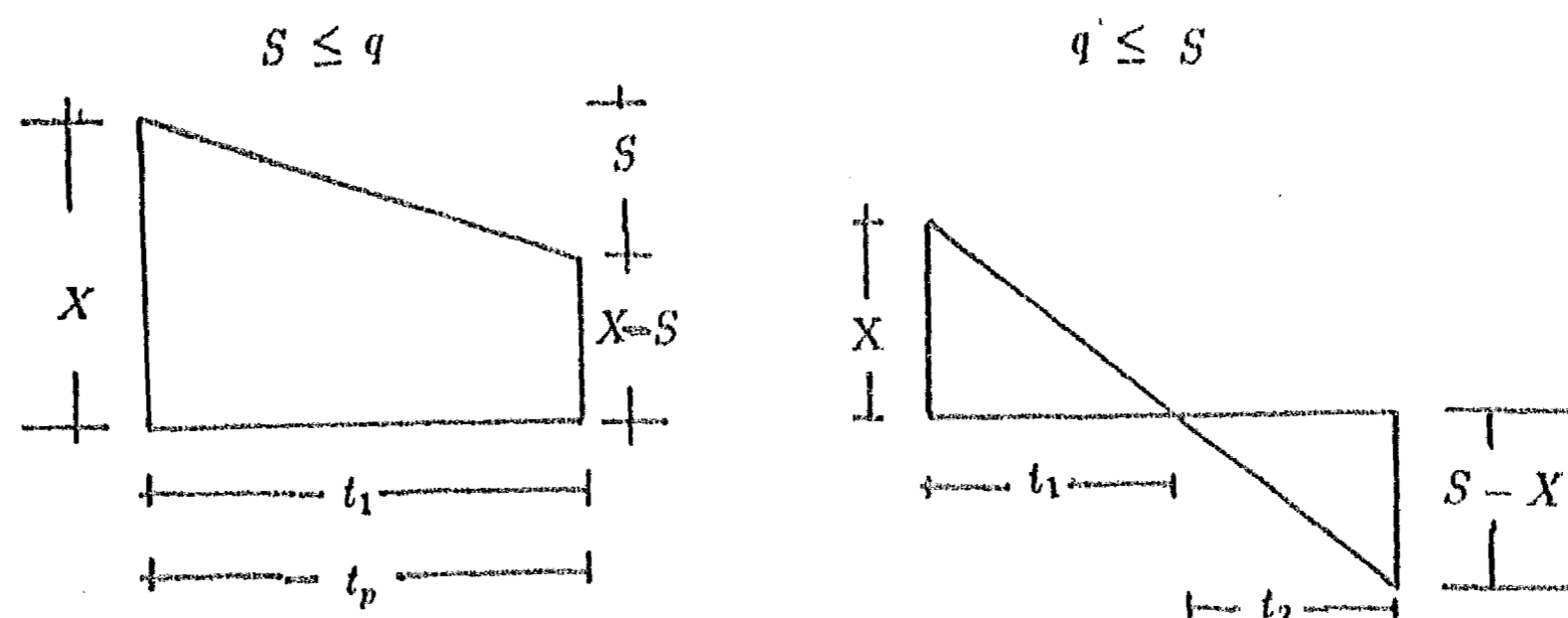


Figure 5: Casos posibles del inventario

- I_1 = Inventario promedio esperado en toneladas.
- I_2 = Déficit promedio esperado en el inventario en toneladas.
- I_3 = Número esperado de reemplazos del material.

Cálculo de I_1, I_2, I_3 . De las figuras (4) y (5) se hace el siguiente análisis para cada I_i .
 Observe que de la figura (5) caso $S \leq q$

$$\frac{St_1}{2} + t_1(X - S) = \frac{St_p}{2} + t_p(X - S),$$

por lo que el inventario promedio es entonces

$$\frac{S}{2} + (X - S) = X - \frac{S}{2}, \quad \text{si } S \leq X. \quad (IV.15)$$

Para el caso $q \leq S$, se tiene que

$$\frac{Xt_1}{2}, \quad \text{y} \quad \frac{Xt_1}{2t_p},$$

representan el inventario por período e inventario promedio respectivamente, por lo que

$$\frac{Xt_1}{2t_p} = \frac{X^2}{2S} \quad \text{con } S \geq X. \quad (IV.16)$$

De un análisis similar se tiene que el déficit por período es $\frac{(S-X)t_2}{2}$ y por lo tanto, el déficit promedio está dado por

$$\frac{S - X}{2} \frac{t_2}{t_p} = \left(\frac{S - X}{2}\right) \left(\frac{S - X}{S}\right) = \frac{(S - X)^2}{2S}, \quad (IV.17)$$

por lo anterior, se tiene que

$$I_1(S) = \begin{cases} X - S/2, & \text{si } S \leq X, \\ X^2/2S, & \text{si } S \geq X, \end{cases}$$

$$I_2(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } S \leq X, \\ \frac{(S-X)^2}{2S}, & \text{si } S \geq X. \end{cases}$$

De esta manera, los correspondientes valores de I_1 , I_2 e I_3 son:

$$I_1 = \int_{X=0}^{X_{\max}} \left[\int_{S=0}^X \left(X - \frac{S}{2} \right) f_S(s) ds + \int_{S=X}^{\infty} \left(\frac{X^2}{2S} \right) f_S(s) ds \right] G_X(x) dx, \quad (IV.18)$$

$$I_2 = \int_{X=0}^{X_{\max}} \left[\int_{S=X}^{\infty} \frac{(S-X)^2}{2S} f_S(s) ds \right] G_X(x) dx, \quad (IV.19)$$

$$I_3 = \int_{X=0}^{X_{\max}} \int_{S=0}^{S_{\max}} f_S(s) G_X(x) H(X, S) ds dx. \quad (IV.20)$$

Donde $G_X(x)$ es la función de densidad del inventario al inicio del período X y la función de Heaviside $H(X, S)$ se define como:

$$H(X, S) = \begin{cases} 1, & \text{si se efectúa un reemplazo,} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Los costos C_1 , C_2 y C_3 del modelo se consideran conocidos así, el modelo pedido es:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda \in \mathcal{D}}(\lambda, S, X) = & C_1 \int_{X=0}^{X_{\max}} \left\{ \int_{S=0}^X \left(X - S/2 \right) f_S(s) ds + \int_{S=X}^{\infty} \left(\frac{X^2}{2S} \right) f_S(s) ds \right\} G_X(x) dx + \\ & C_2 \int_{X=0}^{X_{\max}} \left\{ \int_{S=X}^{\infty} \frac{(S-X)^2}{2S} f_S(s) ds \right\} G_X(x) dx + \\ & C_3 \int_{X=0}^{X_{\max}} \int_{S=0}^{S_{\max}} f_S(s) G_X(x) H(X, S) ds dx. \end{aligned} \quad (IV.21)$$

EL MODELO DE SIMULACION

Una manera de formular el modelo anterior en términos de un modelo de simulación, para estimar el valor de la función objetivo, en el que se trabajarán \bar{m} períodos contados a partir de un período que puede ser el cero es como sigue:

$$I_k(S) = \frac{1}{\bar{m}} \sum_{j=a}^{a+\bar{m}-1} I_{kj}(S), \quad k = 1, 2, 3, \quad (IV.22)$$

donde

$$I_{1j} = \begin{cases} \frac{Q_j + q_j}{2}, & \text{si } q_j \geq 0, \\ \frac{Q_j^2}{2S_j}, & \text{si } q_j \leq 0; Q_j \geq 0, \\ 0, & \text{si } q_j \leq 0, Q_j \leq 0, \end{cases} \quad (IV.23)$$

$$I_{2j} = \begin{cases} 0, & \text{si } q_j \geq 0, \\ \frac{q_j^2}{2S_j}, & \text{si } q_j \leq 0; Q_j \geq 0, \\ -\frac{(Q_j + q_j)}{2}, & \text{si } q_j \leq 0; Q_j \leq 0, \end{cases} \quad (IV.24)$$

$$I_{3j} = \lambda. \quad (IV.25)$$

Aquí λ representa la tasa de entrega del producto y Q_j es el inventario al inicio del período j .

En este modelo, se supone que $G_X(x)$ no es conocida, y solamente se tiene un valor muestral de X , $f_S(s)$ se supondrá también desconocida, y su sorteo en la simulación se hará a partir de valores muestrales, los tiempos de entrega se supondrán exponenciales con parámetro λ .

ALGUNAS RELACIONES IMPORTANTES

De las proposiciones del modelo, observe que el valor de la demanda media para un período k se puede obtener por la demanda media sobre un intervalo de \bar{m} períodos que anteceden inmediatamente al período k de la siguiente manera:

$$\bar{S} = \frac{1}{\bar{m}} \sum_{j=k-\bar{m}+1}^k S_j, \quad (IV.26)$$

note además que:

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= \int_{X=0}^{X_{max}} \left[\int_{S=0}^X (X - S/2) f_S(s) ds + \int_{S=X}^{\infty} \left(\frac{X^2}{2s} \right) f_S(s) ds \right] - \\
&\quad \left[\int_{S=X}^{\infty} \frac{(S - X)^2}{2S} f_S(s) ds \right] G_X(x) dx = \\
&\quad \int_{X=0}^{X_{max}} \left[\int_{S=0}^X (X - S/2) f_S(s) + \int_{S=X}^{\infty} \left\{ \frac{X^2}{2S} - \frac{(S - X)^2}{2S} \right\} f_S(s) ds \right] G_X(x) dx.
\end{aligned}$$

Simplificando términos, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\int_{X=0}^{X_{max}} \left[\int_{S=0}^X (X - S/2) f_S(s) + \int_{S=X}^{\infty} (X - S/2) f_S(s) ds \right] G_X(x) dx = \\
&\int_{X=0}^{X_{max}} \int_{S=0}^{\infty} X f_S(s) ds G_X(x) dx - \int_{X=0}^{X_{max}} \int_{S=0}^{\infty} (S/2) f_S(s) ds G_X(x) dx = \\
&\bar{X} - \bar{S}/2. \tag{IV.27}
\end{aligned}$$

Donde \bar{X} es la cantidad promedio esperada en inventario al inicio de cada período.

Observe que S viene definida en términos del tiempo, asimismo resulta razonable suponer que si el valor esperado de S es $E\{S\}$, entonces $C E\{S\}$ es el valor esperado de la variable aleatoria: $X' =$ Número de toneladas de mineral demandado en C minutos; así, dado que T es la variable que denota el tiempo de entrega del producto, la demanda requerida en el proceso en C minutos es X' , y esta cantidad es actualizada en el proceso de simulación para ser congruentes con el valor del tiempo. Lo anterior es justificable en el sentido de que el proceso es continuo observe también que del valor muestral dado se podría considerar a X como una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2 , donde $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$ y $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ constituyen los estimadores insesgados para la media y la varianza, respectivamente. El ajuste de curva es un ejercicio elemental de estadística y no se anexa al trabajo.

El siguiente teorema justifica el hecho de tomar valores muestrales mediante combinaciones convexas de los mismos para generar la actualización de la variable X a X' en el supuesto de normalidad.

Teorema IV.2 Sean $S_1(t_1)$ y $S_2(t_2)$ valores muestrales de la demanda en el tiempo t_i , tales que $S_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $S_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Sea $\alpha \in (0, 1)$, y sea ξ el conjunto convexo y compacto, definido como: $\xi = \{t_i \mid t_1 \leq t_i \leq t_2\}$. Entonces, la variable aleatoria:

$$S_3(t_3) = \alpha S_1(t_1) + (1 - \alpha) S_2(t_2), \quad (IV.28)$$

se distribuye normalmente con media y varianzas respectivas:

$$\alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2, \quad (IV.29)$$

$$\sigma^2 S_3(t_3) = \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2, \quad (IV.30)$$

donde $t_1 \leq t_3 \leq t_2$ y $t_3 = \alpha t_1 + (1 - \alpha) t_2$.

Prueba. La primera parte es trivial a partir de la función característica de la densidad dada; y la segunda se sigue de la convexidad de ξ . •

De este resultado, basta con conocer a μ_1 y σ_1 en t_1 , así como μ_2 y σ_2 en t_2 para describir completamente a $S_3(t_3)$; este valor es actualizado dentro del modelo de simulación al conocer a t ; note que:

$$\Delta t = t_3 - t_1 = \hat{t} \quad \text{por lo tanto} \quad t_3 = \alpha(t_1 - t_2) + t_2,$$

de donde:

$$\alpha = \left(\frac{\hat{t}}{t_1 - t_2} \right) + 1 = \left(\frac{t_3 - t_1}{t_1 - t_2} \right), \quad (IV.31)$$

de esta manera, (IV.31) queda definido completamente.

En la práctica, se pueden realizar muestreos del proceso a intervalos de 45 a 60 minutos para determinar los valores de las cotas de cada intervalo; en particular, dentro del proceso de simulación se utilizará el siguiente valor para α : $\alpha = 0.9830 - t_3/59$, con $t_3 \geq 1$.

SOBRE LA ESTABILIDAD DEL PROCESO.- Como puede observarse los valores muestrales de la siguiente tabla; la demanda media del proceso es de aproximadamente 4 toneladas por minuto por lo tanto, una tasa de entrega de $\lambda \approx 1$ viaje por minuto con capacidad de 5 toneladas mantiene al sistema dentro de la condición de estabilidad de

la ecuación (III.11). Se puede ver mediante un número grande de corridas, que para $\lambda = 0.25$ viajes por minuto ≈ 4 minutos por viaje, el proceso se mantiene en condiciones de estabilidad. En este ejemplo, el experimento se simuló a un total de 40000 ciclos, produciéndose valores totalmente confiables en términos de (III.11). La siguiente tabla, reproduce los valores muestrales en los que se basa el simulador que actúa dentro de este ejemplo:

3.591	11.274	3.384	7.003	3.289	2.029
6.008	4.889	2.274	5.828	7.410	2.540
11.760	4.625	0.405	5.016	1.590	4.356
2.166	0.364	7.712	0.895	5.029	3.288

De este conjunto, se tiene que: $\bar{X} = 4.359$ y $S^2 = 2.921$.

Finalmente, observe que mediante una serie de pruebas de simulación; es posible obtener un conjunto muestral para \bar{X} mediante la relación $I_1 - I_2 = \hat{X} - \hat{S}/2$, de donde $\hat{X} = I_1 - I_2 + \hat{S}/2$.

El algoritmo para obtener λ^* que minimiza el costo esperado del inventario viene dado por:

$k \rightarrow 0$

1. Seleccione a λ_k muy próximo a \bar{X} con objeto de conservar la estabilidad del proceso.
2. Obtenga el valor del costo esperado del inventario mediante la simulación del proceso y defínalo por C_k .
3. Obtenga $m > 1$ puntos $\lambda_k + \Theta_k B_{jk}$.
4. Determine para cada punto la cantidad $C_{jk} =$ costo esperado del inventario a una tasa $\lambda_k + \Theta B_{jk}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

5. Evalúe las diferencias $\Upsilon_{jk} = \{C_{jk} - C_k\}$ y defina:
 $\Upsilon_{km}^0 = \min\{\Upsilon_{k1}, \Upsilon_{k2}, \dots, \Upsilon_{km}\}$. Sea B_{km} , la dirección en la cual se produce el mínimo de la función.

6. Actualice λ de acuerdo a la relación:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \alpha_k \gamma_k \Upsilon_{km}^0 \Theta_k B_{km}.$$

7. Si $\mathbf{E}\{\|\lambda_{k+1} - \lambda_k\|\} \leq \epsilon$ o si el número de iteraciones pedidas es igual al deseado, detenga el proceso, si no, haga $k = k + 1$ y vaya al paso 2.

A continuación, se resumen los resultados de varias corridas de simulación de este problema; en primer lugar, se muestra el efecto de cambiar λ en cada corrida. Al aplicar la búsqueda para seleccionar su valor óptimo, se observan los distintos costos esperados como una función del número de ciclos simulados y el valor λ . (tabla IV.2). En este caso, $C_1 = 4$; $C_2 = 15$; $C_3 = 0.5$; asimismo, los estimadores insesgados de μ y σ son dados por \bar{X} y S^2 respectivamente.

Posteriormente, se observan los valores del costo esperado, para inventarios iniciales distintos y simulados al mismo número de ciclos; el objetivo de este experimento, es el de observar el comportamiento del costo de operación esperado bajo la selección dada λ y con las mismas condiciones para los demás parámetros (semilla del generador), ver tabla (IV.3). Los tiempos de operación del algoritmo se describen para cada condición de trabajo, y la comparación final, discusión y complementos se dan con más detalle en el siguiente capítulo de este trabajo. Finalmente, en el apéndice B3, se anexan los diagramas de flujo que resuelven este problema en forma detallada.

<i>II</i>	λ_i	<i>IP</i>	<i>DP</i>	<i>NC</i>	<i>CE</i>
500	4.300	83.217	599.971	2000	1.866E7
500	4.254	92.730	526.725	2000	1.654E7
500	4.156	54.029	402.429	2000	1.250E7
500	4.987	49.424	344.330	2000	1.072E7
500	4.067	347.502	15.983	2000	3259525
500	4.001*	353.451	8.919	2000	3095207

El significado de las variables en las tablas (IV.2) y (IV.3) son:

- II , Inventario inicial al comenzar la simulación (Tons).
- λ , Valores del parámetro de control encontrados secuencialmente por MRSA (en la tabla 3) y valores propuestos al inicio de la simulación (en la tabla 4).
- IP , Inventario promedio al final de la simulación (Tons).
- DP , Déficit promedio al final de la simulación (Tons).
- NC , Número de ciclos simulados.
- CE , Costo mínimo esperado del proceso.
- λ^* , Valor óptimo del parámetro de control.

Los valores afectados por $*$ son los que se obtienen cuando la simulación alcanza el valor óptimo para el parámetro de control.

La tabla siguiente resume los resultados de la simulación del proceso, variando el inventario inicial y aplicando MRSA para el cálculo de λ^* en cada caso.

II	λ	IP^*	DP^*	CE	NC	λ^*
70	4.127	5.4756	431.4011	6492918	1000	4.1934
150	4.234	1.4522	505.534	7588832	1000	4.2298
200	4.78	22.48	339.80	518705	1000	4.2123
600	4.456	584.86	0	2339458	1000	4.1478
1000	4.976	677.954	0.3642	2717282	1000	4.000
1900	4.765	1245.909	0	4983637	1000	3.998
2500	4.860	2152.903	0	8611611	1000	4.001

Como nota final, observe que los valores de λ^* cuanto más próximos son a 4 más se acercan a la optimalidad de la función; lo anterior, se debe quizá a la cercanía con el valor

IV.4 BUSQUEDA DE UNA POLITICA OPTIMA EN UN PROCESO MARKOVIANO DE DECISION EN AUSENCIA DE INFORMACION A PRIORI

En este ejemplo, se considera un proceso de decisiones sobre un horizonte dado; con un número finito de estados, en este tipo de problemas, se modelan las probabilidades de transición de estado a estado como cadenas de Markov. Mediante la simulación, es posible encontrar los valores estimados de las probabilidades de estado. La formulación y análisis del proceso de decisiones es como sigue:

Considere un sistema de I estados: S_1, S_2, \dots, S_I , en cada estado, una de M posibles decisiones D_1, D_2, \dots, D_M debe hacerse, denote por $S(n)$ y $D(n)$ el estado y la decisión hecha en el estado n respectivamente, $n = 1, 2, \dots$. Si $S(n) = S_i$ y $D(n) = D_k$, entonces el sistema se mueve al siguiente estado $n + 1$ y alcanza la posición j con una probabilidad *desconocida a priori*.

$$\Pi_{ij}^k = \mathbf{P} \{ S(n+1) = S_j \mid S(n) = S_i, D(n) = D_k \}, \quad (IV.32)$$

esta transición, si ocurre, es seguida por una recompensa aleatoria (o penalización) C_{ij}^k con un valor esperado desconocido.

El pago esperado en el estado S_i , después de hacer la decisión D_k está dado por:

$$\phi_i^k = \sum_{j=1}^I \Pi_{ij}^k C_{ij}^k. \quad (IV.33)$$

Una política, es un vector $\mathcal{P} = (k_1, k_2, \dots, k_I)$, el cual determina que decisión debe hacerse en cada estado. Para $i = 1, 2, \dots, I$, k_i es un entero entre 1 y M , en el estado S_i , se hace la decisión D_{k_i} . Suponga que se mantiene alguna política fija $\mathcal{P} = (k_1, k_2, \dots, k_I)$.

El sistema entonces constituye una cadena de Markov con probabilidades de transición

$$\mathbf{P} \{ S(n+1) = S_j \mid S(n) = S_i \} = \Pi_{ij}^k. \quad (II.34)$$

En lo sucesivo, se supondrá que para toda política \mathcal{P} , la correspondiente cadena de Markov es ergódica.

Denote por: $\Pi_1^{\mathcal{P}}, \Pi_2^{\mathcal{P}}, \dots, \Pi_I^{\mathcal{P}}$ las probabilidades de estado estacionario de la cadena, esto es

$$\Pi_i^{\mathcal{P}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ S(n) = S_i \}, \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (IV.35)$$

El problema, consiste entonces en encontrar una política \mathcal{P} para la cual el pago esperado:

$$W^p = \sum_{i=1}^I \Pi_i^p \phi_i^k, \quad (IV.36)$$

sea mínimo.

Sea $W_m = W^{p_m}$. El problema es entonces, escoger la política con el menor valor de W_m . El proceso regenerativo $\{X^m(t); t \geq 0\}$ correspondiente a la política \mathcal{P}_m es la cadena de Markov con estados S_1, S_2, \dots, S_I , cuyas probabilidades de transición son Π_{ij}^k , $i, j = 1, 2, \dots, I$. Los tiempos de regeneración t_n^m , $n = 1, 2, \dots$, para esta política, son los tiempos de visita a un cierto estado fijo, digamos S_1 .

Ya que el algoritmo RMSA no requiere de información a priori acerca del proceso regenerativo $\{X^m(t) : t > 0\}$, $m = 1, 2, \dots, N$, ni de los valores de W_1, W_2, \dots, W_N , este algoritmo puede aplicarse para encontrar una política óptima para el proceso Markoviano de decisión descrito anteriormente.

CAPITULO V

DISCUSION FINAL Y CONCLUSIONES

Para terminar este trabajo, se formula a continuación una discusión sobre la eficiencia del algoritmo desarrollado y se compara con otros algoritmos. Se muestra que bajo ciertas circunstancias, el algoritmo es mejor en aspectos tales como rapidez de convergencia y precisión de la solución.

Este capítulo se organiza como sigue: en la sección V.1, se discuten algunos aspectos comparativos entre el algoritmo de búsqueda aleatoria desarrollado en este trabajo, y los algoritmos RPS y G1-1 que en principio, optimizan también modelos del tipo II.1. Esta sección termina con un conjunto de tablas comparativas que muestran las propiedades de los tres algoritmos en términos de la precisión de la solución y el número de iteraciones. En la sección V.2, se formula la conclusión final de esta investigación, y se proponen líneas para futuras investigaciones en este campo.

V.1 ASPECTOS COMPUTACIONALES

A continuación, se hace un análisis comparativo de nuestra propuesta con los algoritmos (RPS) y (G1-1), desarrollados por Schumer y Steiglitz (1986) y Reuben y Weissman (1977); los algoritmos mencionados así como el algoritmo propuesto son ejecutados en una microcomputadora PC con las siguientes características : CPU 80286/AT, 25 MHz 00376, 2MB de memoria en RAM.

ALGORITMO DE BUSQUEDA ALEATORIA (RPS)

El funcionamiento de este algoritmo es similar al algoritmo propuesto aunque su estructura es más sencilla. Este trabajo, debido a Schumer y Steiglitz (1986) se puede resumir como sigue.

Considere nuevamente la superficie de prueba dada por la esfera n -dimensional, con

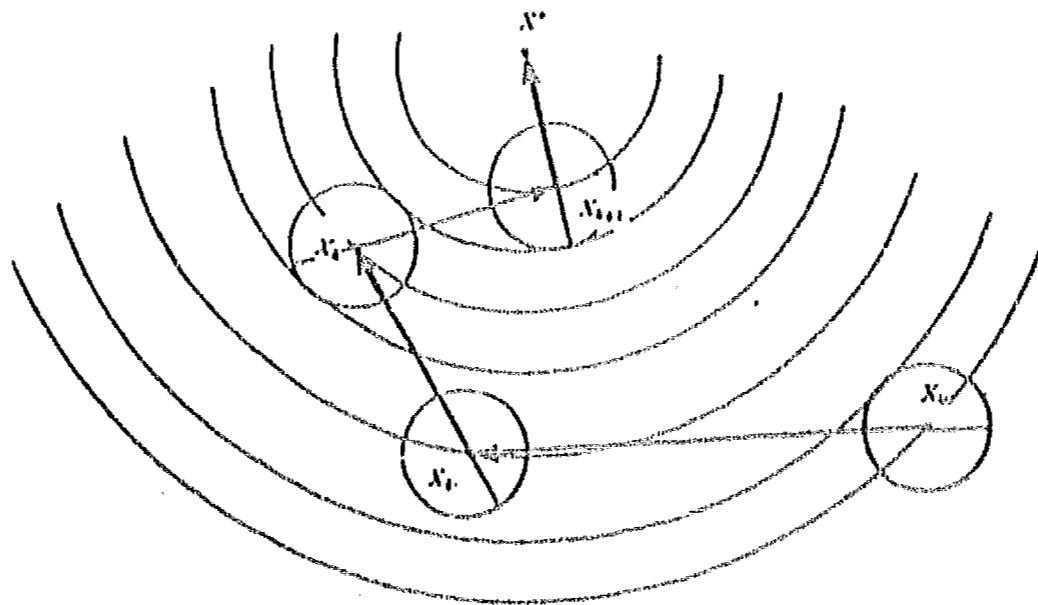


Figure 1: Representación gráfica del algoritmo RPS

radio r_k

$$X_k + r_k \mathcal{B}$$

donde r_k es una magnitud que disminuye monótonamente conforme el algoritmo progresa en la búsqueda. Considere también el problema de optimización estocástica definido en II.1, entonces la sucesión

$$X_{k+1} = \begin{cases} X_k + r_k \mathcal{B}_k, & \text{si } \psi(X_k + r_k \mathcal{B}_k, W_k) - \psi(X_k, W_{k-1}) \leq 0, \\ X_k - r_k \mathcal{B}_k, & \text{si } \psi(X_k + r_k \mathcal{B}_k, W_k) - \psi(X_k, W_{k-1}) > 0, \end{cases}$$

se puede aplicar en la optimización del problema (II.1). En este caso, el valor de r_k es monótonamente disminuido por un factor $\rho < 1$ tal que $r_{k+1} = \rho r_k$ y que en la mayoría de los casos, lo lleva hacia una convergencia del método. La aplicación repetitiva de esta técnica aporta en general buenos resultados, aunque el tiempo de convergencia es relativamente grande, debido a que solamente explora dos puntos opuestos sobre la superficie de prueba. Asimismo, la precisión de los resultados es más deficiente que el algoritmo propuesto, lo anterior se debe a que el rastreo en solamente dos puntos de una esfera fija, elimina la posibilidad de buscar en otras direcciones, las que con alta probabilidad¹ aportarían un mayor descenso en el valor de la función objetivo.

En la figura 1 de este capítulo, se muestra esquemáticamente la forma en que trabaja este algoritmo.

En este caso, el valor inicial r_0 debe seleccionarse de tal manera que permita la convergencia del algoritmo en un número razonable de iteraciones con una precisión

¹El valor de esta probabilidad aumenta conforme mayor es el número de puntos simulados en la superficie de prueba.

previamente fijada por el analista, por lo que en general la forma de hacer esta selección es una de las principales desventajas del método.

En este trabajo el valor de r_0 es seleccionado en cada ejemplo de acuerdo al siguiente criterio

$$r_0 < \| X_0 \|,$$

donde para un tiempo de cómputo fijo, se selecciona la sucesión $\{r_k\}$ en forma conjunta con el valor ρ que proporciona la mejor convergencia; para el caso de los ejemplos donde se aplica esta técnica los valores tomados por r_k y el correspondiente ρ se muestran en las tablas (V1), (V4), y (V7) de este capítulo.

Como parte también del análisis comparativo, considere el algoritmo de Reuben y Weissman (1977) para la optimización de modelos del tipo (II.1); esta técnica se describe a continuación.

ALGORITMO DE BUSQUEDA ALEATORIA G1-1

1. Obtenga aleatoriamente los puntos X_1, X_2, \dots, X_N sobre la región \mathcal{D} . En el caso de problemas restringidos, la obtención sobre \mathcal{D} se hace simulando los puntos X_i mediante un generador de variables uniformemente distribuidas entre las fronteras. En el caso donde $\mathcal{D} = \mathcal{R}^n$, el problema se resuelve al incorporar información a priori acerca de la localización de la región de búsqueda del punto mínimo. En general esta característica constituye una limitante del método.
2. Obtenga $Y_k = \psi(X_k, W_k) = g(X_k) + W_k$, $k = 1, 2, \dots, N$.
3. Estime el valor óptimo de la función por

$$g^* = \min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}.$$

Observe que aunque en apariencia, este algoritmo parece muy primitivo, aporta en general resultados de muy buena calidad para modelos con pocas variables; en este caso, la rapidez de convergencia es muy buena en las primeras iteraciones, pero disminuye rápidamente su eficiencia conforme se acerca al valor óptimo del modelo consumiendo demasiado tiempo en la localización del mismo. En general, la precisión de los resultados es buena, y el único inconveniente que presenta es de requerir un conocimiento previo acerca de la región que contiene al punto mínimo.

A efecto de comparar la propuesta hecha, se implantaron los algoritmos RPS, G1-I y RSA en la solución del problema (IV.7); el objetivo, es determinar la precisión de la solución y rapidez de convergencia bajo las mismas condiciones de operación. La comparación tendrá como marco de referencia la solución analítica dada a este problema en el capítulo anterior. A continuación se muestra la experiencia computacional obtenida de estas pruebas.

La tabla (V.1) resume los resultados de aplicar RPS al problema (IV.7), la letra i representa el número de la iteración donde se encuentra el resultado marcado, y el valor de $\rho = 0.2512$.

i	Punto	$f(X)$	Tiempo en min.	r_i
0	(6, 3, 4, 5, 5, 4, 8)	20.916324	--	
1	(5.30, 3.38, 4.80, 4.80, 5.32, 5.34, 6.54)	21.358074	1	5.344
2	(4.85, 4.12, 4.97, 4.73, 5.43, 5.85, 6.12)	20.266718	3	1.232
3	(4.53, 4.27, 5.13, 4.68, 5.50, 5.92, 5.79)	18.390684	5	0.271
4	(4.38, 4.36, 5.41, 4.68, 5.57, 6.12, 5.60)	16.605292	7	$5.68E - 2$
5	(4.26, 4.43, 5.59, 4.67, 5.58, 6.13, 5.53)	15.946204	8	$1.42E - 2$
6	(4.18, 4.47, 5.65, 4.67, 5.56, 6.13, 5.42)	14.991029	10	$2.98E - 3$
7	(4.08, 4.49, 5.70, 4.67, 5.58, 6.14, 5.45)	13.678308	12	$6.25E - 4$
8	(3.70, 4.51, 5.83, 4.66, 5.59, 6.15, 5.43)	10.656183	14	$1.31E - 4$

De la misma forma, los resultados de aplicar el algoritmo G1-I al problema (IV.7) vienen resumidos en la siguiente tabla.

i	Punto	$f(X)$	Tiempo en min.
0	(6, 3, 4, 5, 5, 4, 8)	21.010374	--
1	(4.14, 3.85, 5.54, 4.86, 5.57, 5.86, 5.69)	20.678391	--
2	(3.83, 4.32, 5.63, 4.71, 5.59, 6.14, 5.43)	17.890239	--
3	(3.71, 4.43, 5.69, 4.67, 5.61, 6.16, 5.22)	13.321937	6
4	(3.67, 4.49, 5.72, 4.67, 5.69, 6.18, 5.15)	11.768204	9
5	(3.65, 4.52, 5.77, 4.66, 5.65, 6.17, 5.09)	10.480274	19

Finalmente, para el algoritmo propuesto, y con $\rho = 2.4$ se tiene

i	Punto	$f(X)$	tiempo en min.	α_i
0	(6, 3, 4, 5, 5, 4, 8)	20.20	--	-
1	(4.05, 4.39, 5.35, 4.95, 5.51, 5.98, 6.98)	17.547234	3	3.4623
2	(3.86, 4.47, 5.63, 4.70, 5.61, 5.96, 6.22)	15.949702	5	0.8587
3	(3.56, 4.56, 5.67, 4.70, 5.60, 6.08, 6.01)	12.790899	7	0.3952
4	(3.56, 4.55, 5.72, 4.71, 5.62, 6.06, 5.70)	11.218766	9	0.3109
5	(3.55, 4.54, 5.74, 4.65, 5.62, 6.12, 5.57)	11.011832	10	0.1499
6	(3.55, 4.53, 5.79, 4.65, 5.63, 6.13, 5.53)	10.319088	10	$6.05E - 2$
7	(3.55, 4.52, 5.80, 4.66, 5.63, 6.13, 5.51)	10.280933	12	$2.54E - 2$

Las tablas (V.4), (V.5) y (V.6) presentan los resultados obtenidos al aplicar RPS, G1-1, y RSA al problema de minimización estocástica (IV.11) sujeto a (IV.3). Los resultados de la tabla (V.4), se obtuvieron empleando un valor de $\rho = 0.989$; y los de la tabla (V.6) con $\rho = 1.89$.

i	Punto	$f(X)$	Tiempo en min.	r_i
0	(6, 3, 4, 5, 5, 4, 4)	27.435121	--	--
1	(5.98, 3.05, 3.98, 4.94, 4.90, 4.02, 4.03)	26.142303	--	--
2	(5.97, 3.10, 3.97, 4.89, 4.82, 4.04, 4.05)	25.13178	--	4.946
3	(5.95, 3.15, 3.97, 4.85, 4.74, 4.06, 4.08)	24.11711	3	4.897
4	(5.94, 3.19, 3.96, 4.81, 4.67, 4.08, 4.10)	24.09112	4	4.852
5	(5.93, 3.23, 3.95, 4.77, 4.61, 4.10, 4.12)	23.55727	4	4.810
6	(5.92, 3.27, 3.94, 4.73, 4.54, 4.11, 4.14)	22.90488	5	4.772
7	(5.91, 3.30, 3.93, 4.70, 4.49, 4.13, 4.16)	22.35472	7	4.736
8	(5.91, 3.34, 3.93, 4.67, 4.44, 4.14, 4.18)	21.94375	8	4.704
9	(5.90, 3.36, 3.92, 4.64, 4.39, 4.15, 4.20)	20.11175	10	4.673
10	(5.89, 3.39, 3.92, 4.61, 4.34, 4.17, 4.21)	19.091112	12	4.645
11	(5.88, 3.42, 3.91, 4.59, 4.30, 4.18, 4.22)	18.457735	14	4.619
12	(5.88, 3.44, 3.91, 4.57, 4.27, 4.19, 4.24)	18.017137	17	4.596
13	(5.87, 3.46, 3.90, 4.55, 4.23, 4.20, 4.25)	17.998727	18	4.574
14	(5.87, 3.48, 3.90, 4.53, 4.20, 4.20, 4.26)	17.984564	18	4.553
15	(5.86, 3.50, 3.90, 4.51, 4.17, 4.21, 4.27)	17.954382	19	4.534

TABLA V.5 RESULTADOS NUMERICOS DEL PROBLEMA (IV.11) CON G1-I.

i	Punto	$f(X)$	Tiempo en minutos
0	(6, 3, 4, 5, 5, 4, 4)	27.435121	--
1	(5.93, 3.02, 4.00, 4.68, 4.84, 4.01, 3.85)	28.072833	--
2	(5.61, 3.12, 3.98, 4.56, 4.18, 3.74, 3.72)	26.112322	--
3	(5.54, 3.12, 3.75, 4.47, 4.03, 3.43, 3.53)	23.928234	4
4	(5.53, 3.21, 3.75, 4.35, 3.98, 3.41, 3.51)	22.735533	4
5	(5.51, 3.26, 3.72, 4.25, 3.83, 3.40, 3.51)	20.812229	8
6	(5.50, 3.28, 3.70, 4.24, 3.72, 3.35, 3.50)	20.630893	9
7	(5.48, 3.35, 3.63, 4.21, 3.64, 3.29, 3.37)	19.873029	12
8	(5.42, 3.43, 3.59, 4.13, 3.61, 3.24, 3.34)	18.427444	15
9	(5.40, 3.49, 3.44, 4.11, 3.54, 3.30, 3.26)	17.82923	18

TABLA V.6 RESULTADOS NUMERICOS DEL PROBLEMA (IV.11) CON RSA.

i	Punto	$f(X)$	Tiempo en minutos	α_i
0	(6, 3, 4, 5, 5, 4, 4)	27.435121	--	--
11	(5.91, 3.03, 4.00, 4.82, 4.32, 4.01, 4.02)	26.1423203	--	0.7004
2	(5.84, 3.18, 3.99, 4.53, 4.16, 4.09, 4.08)	24.117211	3	0.3754
3	(5.75, 3.22, 3.98, 4.31, 3.91, 4.12, 4.12)	23.663253	6	0.3351
4	(5.71, 3.36, 3.91, 4.30, 3.81, 4.15, 4.22)	22.834374	7	0.1232
5	(5.68, 3.39, 3.82, 4.29, 3.75, 4.15, 4.27)	21.238444	9	0.1101
6	(5.62, 3.45, 3.80, 4.25, 3.69, 4.16, 4.29)	20.028333	10	0.1009
7	(5.60, 3.59, 3.71, 4.21, 3.69, 4.18, 4.32)	18.872531	12	0.0123
8	(5.59, 3.64, 3.70, 4.20, 3.67, 4.20, 4.34)	16.123527	14	$9.12E - 2$

En una nueva aplicación, se presentan a continuación las tablas (V.7), (V.8), y (V.9) que muestran los resultados numéricos de aplicar los anteriores algoritmos al problema de optimización estocástica (IV.12) sujeto a la restricción (IV.3). En este caso, para la obtención de los resultados de la tabla (V.7) se utilizó un $\rho = 0.964$, y para la tabla (V.9), $\rho = 1.97$.

i	Punto	$f(X)$	Tiempo en min.	r_i
0	(5, 5, 6, 4, 4, 4, 4)	27.435152	--	0.0919
1	(4.91, 4.92, 5.91, 3.93, 3.87, 3.82, 3.90)	20.371261	--	0.0886
2	(4.88, 4.90, 5.89, 3.92, 3.84, 3.77, 3.88)	17.273153	--	0.0855
3	(4.86, 4.88, 5.87, 3.90, 3.80, 3.71, 3.85)	10.112652	4	0.0824
4	(4.83, 4.86, 5.84, 3.88, 3.76, 3.66, 3.82)	9.231649	4	0.0795
5	(4.81, 4.84, 5.82, 3.86, 3.73, 3.62, 3.80)	9.016523	5	0.0766
6	(4.79, 4.82, 5.80, 3.85, 3.70, 3.57, 3.77)	8.831437	7	0.0739
7	(4.76, 4.81, 5.78, 3.83, 3.67, 3.52, 3.75)	7.951647	10	0.0712
8	(4.74, 4.79, 5.76, 3.82, 3.64, 3.84, 3.73)	7.438185	12	0.0287
9	(4.40, 4.51, 5.43, 3.51, 3.15, 2.78, 3.36)	7.058145	14	0.0012
10	(4.18, 4.33, 5.22, 3.41, 2.83, 2.32, 3.13)	6.914741	17	0.0009

i	Punto	$f(X)$	Tiempo en minutos
0	(5, 5, 6, 4, 4, 4, 4)	26.98345	--
1	(4.45, 4.62, 5.91, 3.85, 3.34, 3.59, 3.98)	23.983345	--
2	(4.41, 4.58, 5.56, 3.60, 3.31, 3.57, 3.943)	21.625622	--
3	(4.39, 4.49, 4.82, 3.56, 3.26, 3.53, 3.87)	19.092783	1
4	(4.32, 4.43, 4.76, 3.55, 3.23, 3.48, 3.74)	18.820354	2
5	(4.29, 4.38, 4.72, 3.51, 3.21, 3.42, 3.57)	17.920349	3
6	(4.26, 4.35, 4.70, 3.48, 3.18, 3.40, 3.42)	15.837342	4
7	(4.23, 4.33, 4.65, 3.43, 3.12, 3.37, 3.37)	14.782311	5
8	(4.21, 4.29, 4.53, 3.41, 3.07, 3.32, 3.28)	12.923298	9
9	(4.18, 4.29, 4.51, 3.36, 2.97, 3.26, 3.19)	10.950147	12
10	(4.17, 4.26, 4.48, 3.29, 2.91, 3.20, 3.17)	10.431865	14
11	(4.15, 4.18, 4.43, 3.23, 2.85, 2.75, 3.11)	9.951455	16
12	(4.12, 4.16, 4.42, 3.19, 2.78, 2.58, 3.11)	7.717431	18
13	(3.92, 4.16, 4.42, 3.19, 2.64, 2.52, 3.12)	6.821263	23

i	Punto	$f(X)$	Tiempo en minutos	α_i
0	(5, 5, 6, 4, 4, 4, 4)	24.2938447	—	0.2211
1	(4.91, 5.00, 5.81, 3.99, 3.98, 3.90, 3.95)	20.0982275	—	0.2112
2	(4.82, 5.00, 5.78, 3.87, 3.74, 3.87, 3.21)	18.2039563	1	0.1876
3	(4.81, 4.79, 5.72, 3.76, 3.58, 3.83, 3.19)	18.8203574	2	0.1523
4	(4.26, 4.35, 5.20, 3.48, 3.18, 3.40, 3.13)	15.8373452	3	0.1222
5	(4.23, 4.33, 5.15, 3.43, 3.12, 3.37, 3.11)	14.7827311	5	0.1076
6	(4.18, 4.29, 5.12, 3.36, 2.97, 3.26, 3.06)	10.9517547	7	0.0912
7	(4.17, 4.26, 4.99, 4.29, 2.81, 3.20, 3.00)	10.4318845	9	0.0839
8	(4.15, 4.18, 4.96, 3.23, 2.65, 2.58, 2.99)	9.9514845	11	0.0612
9	(4.01, 4.04, 4.91, 3.21, 2.28, 2.35, 2.95)	6.7174491	14	0.0586

Para continuar con este análisis, en la tabla (V.10), se muestran los tiempos promedio utilizados por cada algoritmo al efectuarse 10 corridas con distinto número de nodos para la minimización del problema (IV.7) sujeto a la restricción (IV.8). Los valores de los parámetros de cada algoritmo, se escogieron de forma similar a los ejemplos anteriores, los valores de $f(X^*)$ pertenecen a RSA y los valores de la matriz R_l , $l = 5, 6, 7$ utilizados en este ejemplo, fueron tomados de la matriz original R al considerar las primeras l filas con las primeras l columnas; en R_8 y R_9 , se utilizaron las siguientes probabilidades de transición

$$r_{8,2} = 0.3, \quad r_{8,5} = 0.1, \quad r_{9,3} = 0.4, \quad r_{9,8} = 0.1.$$

# de nodos	RPS	G1-1	RSA	$f(X^*)$
5	10.1721	15.1714	10.4112	18.4712
6	13.4111	17.1424	12.1752	14.8114
7	14.8514	25.6418	13.7132	10.1547
8	23.8762	40.7283	19.8622	8.8433
9	32.9855	65.7122	25.8762	8.0235

En la tabla (V.11), se muestra también el resultado de los tiempos promedio, pero esta vez los valores corresponden al problema (IV.11) sujeto a la restricción (IV.3).

# de nodos	RPS	G1-1	RSA	$f(X^*)$
5	9.87721	15.432	10.1249	21.1734
6	12.783	16.9224	11.9323	18.0362
7	15.032	28.1233	13.5487	16.0584
8	24.143	43.2804	18.6596	14.8732
9	32.231	64.8722	25.1587	11.1284

Finalmente, en la tabla (V.12) se muestra una comparación entre los valores óptimos obtenidos por los algoritmos sometidos a prueba al solucionar el problema (IV.7) sujeto a la restricción (IV.8); se muestra también el error absoluto cometido entre cada algoritmo con respecto a la solución óptima obtenida analíticamente en el capítulo IV (denotada en la tabla por X^{**} cuando se trata del vector de soluciones; y como x^{**} cuando se trata de sus componentes).

	$ x_i^* - x_i^{**} $	$f(X^*)$	$ f(X^*) - f(X^{**}) $
RPS	(0.10, 0.03, 0.05, 0.00, 0.06, 0.00, 0.44)	10.6561	0.3961
G1-1	(0.04, 0.02, 0.11, 0.00, 0.02, 0.02, 0.10)	10.4802	0.2202
RSA	(0.05, 0.02, 0.08, 0.00, 0.00, 0.02, 0.01)	10.2809	0.0209

Los algoritmos RPS, G1-1 y RSA fueron también aplicados en la solución del problema estocástico de inventarios (IV.21). A continuación, en la tabla (V.13) se presentan los resultados obtenidos en estas corridas; el significado de las variables empleadas en la tabla son:

- λ^* , Valor óptimo del parámetro de control.
- IP^* , Inventario promedio asociado al control óptimo al término de la simulación.
- DP^* , Déficit promedio asociado al control óptimo al término de la simulación.
- CE^* , Costo mínimo esperado.

Los valores inicialmente dados fueron:

- No. de ciclos de simulación = 2000
- Inventario Inicial = 600 tons.

• $\lambda_0 = 5.72$

En el cálculo de λ^* por RPS, se empleó un valor de $\rho = 0.8765$; y para RSA $\rho = 2.34$.

TABLA V.13 SOLUCIONES Y TIEMPOS PROMEDIO PARA EL PROBLEMA (IV.21)					
	λ^*	IP^*	DP^*	CE^*	Tiempo en min.
RPS	4.5312	605.81	0	3164125	14.653
GI - 1	4.751	615.76	0	3357521	30.17
RSA	4.1416	587.91	0	2299575	9.634

El ejercicio fué repetido nuevamente, pero esta vez a partir de las siguientes condiciones iniciales:

- No. de ciclos de simulación = 1500
- Inventario Inicial = 50 tons.
- $\lambda_0 = 4.38$
- $\rho = 2.34$

Los resultados obtenidos se resumen en la tabla (V.14); el valor utilizado por RPS para este caso es de $\rho = 0.6395$

TABLA V.14 SOLUCIONES Y TIEMPOS PROMEDIO PARA EL PROBLEMA (IV.21)					
	λ^*	IP^*	DP^*	CE^*	Tiempo en min.
RPS	3.879	9.562	563.728	7435655	12.098
GI - 1	3.764	12.873	612.653	12873803	34.63
RSA	3.98	8.913	578.562	6876678	8.234

De los resultados anteriores, RSA genera soluciones más precisas que los otros dos algoritmos, esto se debe a que utiliza mayor número de evaluaciones que RPS para localizar la dirección de descenso, y una vez localizada esta, evita la evaluación de puntos que no contribuyen a la minimización de la función como en el caso de GI-1. No obstante lo anterior, requiere algunas veces de un tiempo mayor que RPS en casos donde el punto inicial está cercano a la solución óptima; esta diferencia no es mayor de un 7% en el peor de los casos.

En situaciones normales, el tiempo de convergencia de RSA es menor que el de los dos algoritmos comparados, y su utilidad es más marcada en aquellos casos donde el modelo presenta mayor complejidad; por lo anterior, el uso de RSA se recomienda en situaciones donde el problema de minimización estocástica requiera de un considerable esfuerzo computacional para determinar tanto las direcciones de descenso, como el valor asociado a la función objetivo.

Finalmente, se recomienda que en el uso del algoritmo desarrollado RSA, el número de puntos simulados sobre la superficie de prueba disminuya en razón inversa de la dimensión del problema, aconsejándose un mínimo de 4 valores simulados. Lo anterior se basa en los resultados obtenidos en la ecuación (II.45). Note que este caso, la principal desventaja de RSA cuando aumenta la dimensión del problema es la disminución de su eficiencia en la búsqueda; este problema es parcialmente corregible si se selecciona el valor de h_k lo más grande posible que permita el problema. Para este caso, el valor inicial de h_k fué tomado como 10, con una eficiencia en el algoritmo del 38.69 %.

V.2 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo, se ha desarrollado un algoritmo de búsqueda aleatoria para la optimización de sistemas dinámicos. Se ha presentado asimismo, su prueba de convergencia, basándose ésta, en los resultados obtenidos por Ermol'ev sobre las sucesiones Quasi Fejer. La propuesta fué aplicada a problemas de líneas de espera e inventarios, y se presenta la experiencia computacional ligada a cada aplicación; en términos generales, el algoritmo es "bueno" para la optimización por simulación de modelos de esta especie. La técnica propuesta, puede funcionar tanto para modelos de optimización estocástica definidos explícitamente como para modelos en donde la función objetivo es difícil de evaluar o bien cuando esta sea no diferenciable. Asimismo, su implantación y operación es relativamente sencilla para usuarios con conocimientos elementales de simulación digital y con una PC con memoria mínima de 1 mega en RAM, recomendándose además una velocidad de 25 Mhz para tener acceso a las soluciones en tiempos razonablemente cortos.

Las técnicas de programación matemática estocástica constituyen, un atractivo campo de investigación, la potencialidad estriba en que la función objetivo y las restricciones, suponen total o parcial información a priori, por ejemplo unimodalidad, convexidad, etc. no obstante, si tales condiciones no son fáciles de probar por la naturaleza estocástica de las funciones, la simulación es la única salida. Al respecto se pueden mencionar una

gran variedad de trabajos relacionados con la estimación de los gradientes y Hessianas asociados a funciones estocásticas. Este nuevo concepto recibe el nombre de *análisis de perturbación* [véase por ejemplo Reiman y Weis (1988)].

Existen en la literatura, una gran cantidad de trabajos relacionados con la potencialidad de la simulación en la optimización de modelos dinámicos. Así por ejemplo, Simmons (1972) ha investigado sobre políticas óptimas en modelos de inventarios usando simulación bajo el concepto de costos sobrepuestos. Más recientemente, Curry y Hartfiel (1983) han combinado técnicas simulación con algoritmos para minimización y han obtenido soluciones eficientes con estructuras sólo conocidas parcialmente (bajo incertidumbre).

Muchos desarrollos recientes dan promesas muy halagadoras a la optimización por simulación; en este sentido, el análisis de perturbación puede, eventualmente dar una buena alternativa en la optimización de sistemas dinámicos a gran escala. Al respecto, Suri y Leung (1987) han utilizado el análisis de perturbación en conexión con métodos estocásticos de aproximación por las técnicas Robbins y Monro (1951), así mismo, Kiefer y Wolfowitz (1952) han reportado resultados interesantes al aplicar estas combinaciones a modelos de líneas de espera M/M/1. La estrategia de aproximación estocástica en simulación, fué sugerida por Glynn (1986), estos dos métodos de optimización aplicados a procesos regenerativos han sido tratados como casos especiales en la estimación de tasas de valores medios [véase por ejemplo Fishman (1980)]. Posteriores trabajos teóricos y empíricos han sido destinados para evaluar la factibilidad de aplicar los métodos de aproximación estocástica via simulación digital, ver por ejemplo Deckers y Aarts (1992).

De igual forma, los experimentos de simulación para el análisis de frecuencia dominante ofrecen otra muy buena perspectiva para aplicarse dentro de la optimización por simulación, sin embargo, esta técnica conlleva a otras dificultades en su implantación.

Un área más que requiere de futuras investigaciones es la técnica de superficies de respuesta basada en la aproximaciones gráficas [véase Daughety y Turnquist (1980)], finalmente, se menciona como un caso muy interesante, el considerar la inclusión de los costos de simulación en el análisis de la optimización.

En cuanto a la eficiencia de la simulación, se han dado grandes avances en el desarrollo de las técnicas de reducción de varianzas. Estas, reducen la varianza de algunos parámetros deseados a expensas de aumentar la varianza en términos que son insignifi-

cantes. A este respecto, Schruben y Margolin (1978) proponen una estrategia de técnicas de reducción de varianza con propósitos de naturaleza secuencial en diseños de superficies de respuesta. Mas recientemente Nozari, Arnold y Pegden (1987), así como Tew y Wilson (1987) han desarrollado estrategias estadísticas para aplicarse a los modelos propuestos por Schruben y Margolin para estrategias por simulación.

APENDICE A

CALCULO DE PROBABILIDADES DE TRANSICION HACIA X_{i+1}

Antes de efectuar el cálculo de la probabilidad de transición, conviene detallar algunos aspectos relacionados con la función de error para el argumento x , $\text{fer}(x)$. Por definición

$$\text{fer}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy,$$

al hacer el cambio de variable $t = y\sqrt{2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \text{fer}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x\sqrt{2}} e^{-t^2/2} dt = \\ &= 2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x\sqrt{2}} e^{-t^2/2} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2} dt \right] = \\ &= 2 [F_X(x\sqrt{2}) - 1/2], \end{aligned}$$

así

$$\text{fer}(x) = 2 [F_X(x\sqrt{2}) - 1/2],$$

Por lo anterior

$$F_X(x\sqrt{2}) = \frac{1}{2} [\text{fer}(x) + 1]. \quad (I)$$

Considere a la función $\psi(X, W)$ como una función aditiva del tipo

$$\psi(X_i + \Theta_i B_{ik}, W_{ik}) = g(X_i + \Theta_i B_{ik}) + W_{ik},$$

análogamente:

$$\psi(X_i, W_{i0}) = g(X_i) + W_{i0},$$

La transición desde X_i hasta X_{i+1} genera una variable aleatoria $\overline{\Delta g}$ definida por:

$$\overline{\Delta g} = \psi(X_i + \Theta_i B_{ik}, W_{ik}) - \psi(X_i, W_{i0}) = g(X_i + \Theta_i B_{ik}) + W_{ik} - g(X_i) - W_{i0} =$$

$$[g(X_i + \Theta_i B_{ik}) - g(X_i)] + (W_{ik} - W_{i0}) = \Delta g + W,$$

donde $W_{ik} \pm W_{i0} = W \sim N(0, 2\sigma^2)$. Ya que el cambio de la función puede darse tanto positiva como negativamente, se debe entonces tomar el valor de dicho incremento en términos de su valor absoluto

$$\mathbf{P} \{ \overline{\Delta g} \leq |\Delta g| \} = \text{fer} \left(\frac{|\Delta g|}{\sqrt{2}\sigma} \right),$$

donde por (I), se tiene que

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \left(1 + \text{fer} \left(\frac{|\Delta g|}{2\sigma} \right) \right).$$

APENDICE B

ESPERANZA DEL ESTIMADOR DEL QUASI GRADIENTE

Sea \hat{X}_{k+1} un punto¹ sobre la superficie de la esfera n -dimensional centrada en X_k ; entonces \hat{X}_{k+1} es encontrado de acuerdo a

$$\hat{X}_{k+1} = X_k + Y_k,$$

donde $Y_k = (y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \dots, y_k^{(n)})$ es tal que

$$\sum_{j=1}^n (y_k^j)^2 = 1. \quad (1)$$

Una forma de construir un estimador $\xi(X_k)$ del subgradiente de g en X_k viene dada por [véase Ermolev 1983]

$$\xi(X_k) = \sum_{i=1}^{\rho_k} \frac{g(X_k + \Delta_k Y_{ki}^T) - g(X_k)}{\Delta_k} Y_{ki}, \quad (2)$$

donde se supone que en la iteración k se cuenta con ρ_k muestras de tamaño n :

$$Y_{ki}^T = (y_{ki}^{(1)}, y_{ki}^{(2)}, \dots, y_{ki}^{(n)}), \quad i = 1, 2, \dots, \rho_k.$$

En nuestro caso se tiene que

$$\mathbf{E}\{\xi(X_k) \mid X_k\} = \mathbf{E}\{\Theta_k \Upsilon_{km}^0 \mathcal{B}_{km}^0 \mid X_k\} = \Theta_k \Upsilon_{km}^0 \mathbf{E}\{\mathcal{B}_{km}^0 \mid X_k\}, \quad (3)$$

donde por (2)

$$\xi(X_k) = \Theta_k \Upsilon_{km}^0 \sum_{i=1}^{\rho_k} [g(X_k + Y_{ki}^T) - g(X_k)] Y_{ki}, \quad (4)$$

¹En este caso se usa la notación \hat{X}_{k+1} para identificar al punto sobre la superficie de la esfera, a diferencia de la notación convencional X_{k+1} que denota al valor subsecuente encontrado por la sucesión propuesta.

aquí, $\Delta_k = 1$.

Por la convexidad de g se tiene que

$$[g(X_k + Y_{ki}^T) - g(X_k)]Y_{ki} \geq \langle \tilde{\nabla}g(X_k), Y_{ki}^T \rangle Y_{ki},$$

por lo que entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ [g(X_k + Y_{ki}^T) - g(X_k)] Y_{ki} \mid X_k \} &\geq \mathbf{E} \langle \tilde{\nabla}g(X_k), Y_{ki}^T \rangle Y_{ki} = \\ &\mathbf{E} \{ \langle Y_{ki}^T, Y_{ki} \rangle \tilde{\nabla}g(X_k) \mid X_k \} = \tilde{\nabla}g(X_k), \end{aligned}$$

donde

$$\langle Y_{ki}^T, Y_{ki} \rangle = \sum_{j=1}^n (y_{ki}^j)^2 = 1.$$

Así, de (3) y (4) y considerando la sumatoria se tiene finalmente que

$$\mathbf{E} \{ \xi(X_k) \mid X_k \} = \rho_k \Theta_k \Upsilon_{km}^0 \tilde{\nabla}g(X_k) + \mathcal{U} = c \tilde{\nabla}g(X_k) + \mathcal{U}.$$

REFERENCIAS

- Aho, A.V., Hopcroft, J.E. and Ullman, J.D. (1976), "The Design and Analysis of Computer Algorithms", *Addison Wesley*.
- Berger, J.O. (1985), "Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis", *Springer Series in Statistics*.
- Bernardo, J.M. (1979), "Reference Posterior Distribution for Bayesian Inference", *J.R. Statist. Soc.*, **B,41**, pp. 113-147.
- Bromsky, T. P. (1967), "A General Method of Solving Extremal Problems", *DAN SSSR*, Vol. **174**, No. 1, Moscú.
- Biles, W. E. (1977), "Strategies for Optimization Of Multiple Response Simulation Models", *Proceedings of the Winter Simulation Conference*, pp. 145-142.
- Biles, W.E. and Swain, J.J. (1979), "Mathematical Programming and the Optimization of Computer Simulation", M. Avriel and R. Denbo, Eds. *Mathematical Programming Study*, Vol. **11**, North Holland, Amsterdam, pp. 189-207.
- Biles, W.E. (1981), "Complex Search and Second Order Response Surface Analysis", *Proceedings of the Winter Simulation Conference*, pp. 23-35.
- Biles, W. E. and Swain, J.J. (1980), "Optimization and Industrial Experimentation", *Wiley and Sons Interscience*, New York.
- Bracken, J. M. and Soland, R.M. (1966), "Statistical Decision Analysis of Stochastic Linear Programming Problems", *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol. **13**, pp. 205-226.
- Chatfield, C. (1984), "The Analysis of Time Series: An Introduction", *Chapman and Hall London*.
- Cinlar, E. (1975), "Introduction to Stochastics Processes", *Prentice Hall, Inc.*, Englewood Cliffs. N.J.
- Clarke, F.M. (1975), "Generalized Gradients and Application", *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. **205**, pp. 247-262
- Cooley, B.J. and Houck, E.C. (1982), "A Variance Reduction Strategy for RMS Simulation Studies", *Decision Sciences*, Vol. **13**, pp. 303 - 321.
- Crane, A. M. and Iglehart, L. D. (1975), "Simulation Stable Stochastics Systems; III Regenerative Process and Discrete Event Simulations", *Op. Res.*, Vol. **23**, No.1, pp. 33-45.
- Curry, G.L. and Hartfield, D. J. (1983), "A Simulation Optimization Method: Its Convergence and Utility", *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol. **30**, pp. 227-236.

- Daughety, A.F. and Turnquist, M.A. (1980), "Simulation Optimization Using Response Surfaces Based on Spline Approximations", *Proceedings of the Winter Simulation Conference*, pp. 183-193.
- Deckers, A. and Aarts, E. (1991), "Global Optimization and Simulated Annealing", *Mathematical Programming*, Vol. 50, pp. 367-393 North Holland.
- Dvoretzky, M.N. (1956), "On Stochastic Approximation in Proceeding of the Third Berkely Symposium On Mathematical Statistical and Probablility", Vol. 1, pp. 39-55.
- Ermakov, S.M. and Zhiglavsky, A.A. (1984), "On Random Search For a Global Extremum", *Theory. Prob. Its. Applic*, Vol. XXV, pp. 136-141.
- Ermol'ev, Yu. M. (1966), "Methods of Solution of Nonlinear Extremal Problems", *Kibernetika*, Vol. 4, Kiev.
- Ermol'ev, Yu. M. (1969), " On the Method of Generalized Stochastic Gradients and Quasi Fejer Sequences", *Cybernetics*, Vol. 5, No. 2, pp. 208-220. (Translated from *Kibernetika*, Vol. 5, No.2, pp. 73-84 (1969), IK. AN Ukssr, Kiev.).
- Ermol'ev, Yu. (1983), "Stochastics Quasi Gradienete Methods and Their Applications to System Optimization", *Stochastic's*, Vol. 9, pp. 1-36.
- Fishman, G.S. (1980), "Concepts and Methods in Discrete Event Digital Simulation", *John Wiley and Sons*, New York.
- Fleming, H.W. and Rishel, R.W. (1975), "Deterministic and Stochastic Optimal Control", *Springer - Verlag*, Berlin Heidelberg New York.
- Fletcher, R. (1980), "Practical Optimization Methods", *John Wiley and Sons*, New York. Vol. I.
- Fletcher, R. (1981), "Practical Optimization Methods", *John Wiley and Sons*, New York. Vol. II.
- Fridman, L.W. (1986), "The Analysis of Multiple Response Simulation Output Data: Experiments of Comparison", *Computers and Operations Research*, Vol. 13, pp. 647-652.
- Garey, M.R., and Jhonson, D.S. (1979), "Computer and Intractability: a Guide to the Theory of NP Completeness", *Freeman*, Su Francisco.
- Geofrey, G. (1981), "System Simulation", *Prentice Hall*.
- Glynn, P.W. (1986), "Stochastic Approximation for Monte Carlo Optimization", *Proceedings of Winter Simulation Conference*, pp. 356-364.
- Good, I.J. (1960), "Weight of Eviidence, Corroboration, Explanatory Power, Information and the Utility of Experiments", *J.R. Statist. Soc.*, bf 22, pp. 319-331.
- Goodwin, G. C., Ramadge, P.E. and Caines, P.E. (1981), "Discrete Time Stochastic Adaptative Control",

SIAM J. Cont. Opt., Vol. 19, pp. 829-853.

Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (1980), "Table of Integrals, Series and Products" New York. Academic Press.

Gutierrez, A. M.A. (1991), "La Técnica de Recocido Simulado y sus Aplicaciones", *Tesis Doctoral*, División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Hartfiel, D. J. and Curry, G.L. (1981), "On Optimization Functions Which are Defined in Part by an Approximate Process", *Mathematical Programming*, Vol. 20, pp. 63-80.

Heidelberg, P., Cao, X. R., Zasaniz, M.A. and Suri, R. (1987), "Convergence Properties of Infinitesimal Perturbation Analysis Estimate", *IBM Thomas J. Watson Research Center*.

Heller, N.B. and Staats, G.E. (1973), "Response Surface Optimization When Experimental Factors are Subject to Costs and Constrains", *Technometrics*, Vol. 15, pp. 113-123.

Ho, Y. C. (1985), "A Survey of Perturbation Analysis of Discrete Events Dynamic Systems", *Annals of Op. Res.*, Vol. 3, pp. 393-402.

Ho, Y.C., Cao, X.R. and A Cassandras, C. (1983), "Infinitesimal and Finite Perturbation Analysis of Queuing Networks", *Automatica*, Vol. 19, pp. 439-445.

Ho, Y.C. Eyler, M. A, and Chien, T.T . (1979), "A Gradient Technique for General Buffer Storage Design in a Production Line", *International Journal of Production Research*, Vol. 17, pp. 557-580.

Hooke, R. and Jeeves, T. (1961), " Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems", *J. Assn. Comp. Mach.*, Vol. 8, pp. 212-229.

Hordijk, A., Iglehart, D.L. and Schassberger (1976), "Discrete Time Methods for Simulating Continuous Time Markov Chains", *Adv. Appl. Prob.*, Vol. II.

I. Reiman, Martin. and Weiss, Alan. (1989), "Sensitivity Analysis for Simulation Via Likelihood Ratios", *Operations Research*, Vol. 37, No.5.

Jaynes, E.T. (1957), "Information Theory and Statistical Mechanics I", *Phis. Rev.*, 106, pp. 620-630.

Jaynes, E.T. (1982), " How should we use entropy en economics ?" , (*Some half-backed ideas in need of criticism*, manuscript.

Jaynes, E.T. (1982a), " On the Rationale of Maximum-Entropy Methods " , *Proc. of the IEEE*, 70, pp. 939-952.

Jaynes, E.T. (1988), "Comment"; *American Statistician* , 42, pp. 280-281.

King, A.J. and Wets, R.J.B. (1991), "Epi Consistency of Convex Stochastic Programs", *Stochastic Reports*, Vol. 34, pp. 83-92.

- Kiefer, J. and Wolfowitz, J. (1952), "Stochastic Estimation of the Maximum of Regression Function", *Ann. Math. Stat.*, Vol. 23, pp. 462 - 466.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D. and Vecchi, M.P. (1983), "Optimization by Simulated Annealing", *Science*, 220, No. 4598, pp. 671-680.
- Kleijnen, J.P.C. , Van der Burg, A.J, and Van der Ham. R. Th. (1979), "Generalization Of Simulation Results Practicality of Statistical Methods", *European Journal of Operation Research*, Vol. 3, pp. 50-64.
- Kleinrock, L. (1975), "Queuing System Theory", *John Willey and Sons*, New York New., Vol. I.
- Kullback, S. (1956), "Information Theory and Statistics", New York, Wiley.
- Kusner, C.Y. and Clark, D.S. (1978), "Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems", *Springer Verlag* , New York.
- Metropolis, N.A., Rosenbluth, W., Rosenbluth, M.N., Teller, A. and Teller, H. (1953), "Equations Of State Calculations by Fast Computing Machines", *Chem. Phys.*, Vol. 21, pp. 1087-1091.
- Montgomery, D.C., and Evans, D.M. (1975), "Second Order Response Surface Designs in Computer Simulation", *Simulation*, Vol. 25, pp. 169-178.
- Montgomery, D.C. and Bettencourt, V.M. (1977), "Multiple Response Surface Methods in Computer Simulation", *Simulation*, Vol. 26, pp. 113-121.
- Muller, H. E. (1959), "A Note On a Method for Generating Points Uniformly on N Dimensional Spheres", *Comm. Acm.* , Vol. 2, pp. 19-20.
- Myers, R.H. (1971), "Response Surface Methodology", *Allyn And Bacon*, Boston.
- Myers, R. H. and Carter, W. H. (1973), "Response Surface Techniques for Dual Response Systems", *Technometrics*, Vol. 15, pp. 301-317.
- Newman, Von. J. (1951), "Various Techniques Used in Connection with Random Digits", *U.S. Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser.*, No. 12, pp. 36-38.
- Nozary, A., Arnold, S.F. and Pegden, C. D. (1987), "Statistical Analysis for Use With the Schruben and Margolin Correlation Induction Strategy", *Oper. Res.*, Vol. 35, pp. 127-139.
- Patel, N.R, and Smith, R.L. (1984), "The Asymptotic Extreme Value Distribution of the Sample Minimum of a Concave Function Under Linear Constrain", *Op. Res*, Vol. 31, No. 4 pp. 789-794.
- Patel, N.R., Smith, R. L. and Zabinsky. K.M. (1985), "Pure Applied Search in Monte Carlo Optimization", *Manuscript, Dept. Of Industrial And Operations Engineering*, University Of Michigan, Ann Arbor.
- Pincus, Martin. (1968), "A Closed Form Solution of Certain Programming Problems", *Operations*

Research, Vol. 16.

Pincus, Martin. (1969), "A Monte Carlo Method for the Approximate Solution of Certain Types of Constrained Optimization Problems", *Operations Research*, Vol. 18.

Polak, E. and Sangiovanni, A. (1979), "Theoretical and Computational Aspects of the Optimal Design Centering Tolerancing and Tuning Problem", *IEEE Transactions On Circuits and Systems*, Vol. 26, No. 9.

Polyak, B. T. (1967), "A General Method of Solving Extremal Problems", *DAN SSR*, 174 Vol. 1, Moscú.

Rockafellar, R. T. (1964), "Minimax Theorems and Conjugate Saddle Functions", *Math. Scand.*, Vol. 14, pp. 151-173.

Rockafellar, R.T. (1967), "Duality and Stability in Extremum Problems Involving Convex Functions", *Pacific J. of Math.*, Vol. 21, pp. 167-187.

Rockafellar, R.T. (1972), "Convex Analysis", *Princeton University Press*.

Reuben Y. and Karnovsky (1977), "Local and Integral Properties of a Search Algorithm of the Stochastic Approximation Type", *Stochastics Processes and Their Applications*, Vol. 6, pp. 129-134.

Reuben Y. (1980), "Selecting The Best Stable Stochastic System", *Stochastic Processes and their Applications*, Vol 10, pp. 75-85.

Reuben, Y. R. and Weissman, I. (1977), "The Monte Carlo Method for Global Optimization", *Cah. Cen. Etud. Rech. Opér*, Vol. 21, No. 2, pp. 143-419.

Reuben, Y. R. (1982), "Generating Random Vectors Uniformly Distributed Inside and on the Surface of Different Regions", *Euro., J.O.R.*, Vol. 10, pp. 205-209.

Reuben, Y. R. and Samarodtzky, G. (1986), "The efficiency of the Random Search Méthod", *Math. And Comp. Simulation*, Vol. 24, pp. 257-268.

Reuben, Y. R. (1989), "Sensitivity Analysis and Performance Extrapolation for Computer Simulation Models", *Op. Res* Vol. 37, No. 1.

Reiman, I.M. and Weis, A. (1988), "Sensitivity Analysis For Simulations Via Likelihood Ratios", *Operations Research*, Vol. 37, No.5.

Ronald, W. W. (1989), "Stochastic Modelling and the Theory of Queues", *Prentice Hall*.

Robbins, H.S., and Monro, S. (1951), "Stochastic Aproximation Methods", *Ann. Math. Stat.*, Vol. 22, pp. 400-407.

Safizadeh, M.H. and Thornton, B.M. (1984), "Optimization in Simulation Experiments Using Responses

- Surface Metodology", *Computers and Industrial Engineering* Vol. 1, pp. 11-27.
- Schruben, L. A. and Margolin, B.H. (1978), "Pseudorandom Number Assignment in Statistically Designed Simulation And Distribution Sampling Experiments", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 73, pp. 504-520.
- Schruben, L. W. and Cogliano, V.J. (1981), "Simulation Sensitivity Analysis: A Frequency Domain Approach", *Proceedings of the Winter Simulation Conference*, pp. 455-459.
- Schruben, L.W and Cogliano, V.J. (1985), "An Experimental Procedure for Simulation Response Surface Identification", *Technical Report No. 669*, Cornell University.
- Schumer, M.A. and Steiglitz, K. (1986), "Adaptative Steep Size Random Search", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. A.C. 13, pp. 270-276.
- Sengupta, J.K. (1972), "Stochastic Programming: Methods and Applications", *Iowa State University, and Indian Institute of Management (Calcutta)*.
- Sheldon, M.R. (1983), "Stochastic Processes", *John Wiley and Sons*.
- Shore, J.E. and Johnson, R.W. (1980), "Axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of minimum cross entropy", *IEEE, Trans. Inform. Theory*, IT-26, pp. 26-37.
- Shore, J. E. and Johnson, R.W. (1981), "Properties of cross-entropy minimization", *IEEE, Trans. Inform. Theory*, IT-27, pp. 472-482.
- Simmons, D.M. (1972), "Optimal Inventory Policies Under a Hierarchical of Setup Costs", *Man. Sci*, Vol. 18, 591-599.
- Smith, D.E., (1973), "Requirements of an Optimizer for Computer Simulation", *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol. 20, pp. 161-179.
- Sobol, I.M. (1983), "Método de Monte Carlo", *Editorial MIR*, Moscú Rusia.
- Solis, F.J. and Wets, R.J. (1981), "Minimization by Random Search Techniques", *Math. Oper. Res.*, Vol. 3, pp. 619-630.
- Suri, R. (1987), "Infinitesimal Perturbation Analysis for General Discrete Event Systems", *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 34, pp. 686-717.
- Suri, R. and Leung, Y.T. (1987), "Single Run Optimization of Discrete Event Simulations: An Empirical Study Using M/M/1 Queue", *Technical Report*, No. 87 - 3, University of Wisconsin.
- Tew, J.D. and Wilson, J.R. (1987), "Metamodel Estimation Using Integrated Correlation Methods", *Proceedings of the Winter Simulation Conference*, pp. 409-413.
- Tintner, G. (1960), "A Note On Stochastic Linear Programming", *Econometrica*, Vol. 28, pp. 490-495.

- Tintner, G. and Sengupta, J.K. (1970), "Stochastic Economics", *Stochastic Process Control and Programming*, New York. Academic. Press, Vol. I.
- Tintner, G. and Sengupta, J.K. (1972), "Stochastic Economics: Stochastic Processes", *Control and Programming*, New York: Academic Press, Vol. II.
- Tsytkin, Y. Z. (1970), "Adaptation and Learning in Automatic System", *Academic Press*, New York.
- Tsytkin, Y. Z. (1982), "Optimal Parameter Estimation Algorithms in Identification Problems", *Automate Remote Control*, Vol. 12, pp. 9-23.
- Turing (1937), "On Computable Numbers, With an Application to the Entscheidungs Problem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 2-42, pp. 230-265.
- Vajda, S. (1975), "Probabilistic Programming", *University of Birmingham*, Birmingham Engl.
- Venegas, F. (1990a), "On Regulatory and Optimality Conditions for Maximum Entropy Priors" *Revista Brasileira de Probabilidade y Estadística*, REBRAPE, Vol. 4, pp. 105-136.
- Venegas, F. (1990b), "Información Suplementaria a Priori, Aspectos Computacionales y Clasificación" *Interamerican Statistical Institute*, IASI, Vol. 42, No.39, pp. 64-80.
- Venegas, F. (1993), "On Optimal Production-Inventory Policies for a Multiple-Plant Firm with Correlated Demands", Submitted Paper to the Econometric Society.
- Venegas, F. (1992a), "Aprendizaje Sobre Utilidad a Través de la Optimización de Medidas de Información", *Recent Advances in Bayesian Statistics and Econometrics*, Caracas, Venezuela.
- Venegas, F. (1992b), "On Optimal Production Planning Under a Randomly Disturbed Demand", *IV Latin Ibero-American Meeting on Operations Research and Systems Engineering*, México City.
- Venegas, F. (1992c), "Entropy Maximization and Cross-Entropy Minimization on Quantiles, a Matrix Approach", *Agrociencia, Serie Matemáticas Aplicadas, Estadística y Computación*, Vol. 2, No.3, pp. 71-76.
- Wardi Y. (1989), "Random Search Algorithms With Sufficient Descent For Minimization of Functions", *Math. Oper. Res.*, Vol. 14, No. 2, pp. 343-353.
- Wehrl, A. (1978), "Entropy", *Rev. Mod. Phys.*, 50, pp. 221-260.
- Wilson, B. V. D., French, J.B.C., and Telgen, J. (1983), "Randomly Generated Polytopes for Testing Mathematical Programming Algorithms", *Math. Programming*, Vol. 26. pp. 172-181.
- Williams, D.R and Weeks, E.D. (1974), "A Technique for Testing Designing and Augmenting Simulation Experiments" *Management Sci.*, Vol. 20, pp. 73-85.
- Wolf, W. Ronald (1988), "Stochastic Modeling and the Theory of Queues" *Prentice Hall International*

Series in Industrial and Systems Engineering.

Zellner, A. (1971) "An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics and Statistics", *A. Zellner, ed.*, Amsterdam, North-Holland.

Zellner, A. (1990), "Bayesian Methods and Entropy in Economics and Econometrics ", *manuscript, Graduate School of Business, University of Chicago.*

Zoutendij, G. (1960), "Methods of Feasible Directions" *Elsevier*, New York.