

300617  
24  
201



**UNIVERSIDAD LA SALLE**

**ESCUELA DE INGENIERIA  
INCORPORADA A LA U.N.A.M.**

**ANALISIS DEL FENOMENO DE CAOS EN  
CIRCUITOS ELECTRICOS**

**TESIS PROFESIONAL**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA**

**P R E S E N T A**

**HUGO GUSTAVO GONZALEZ HERNANDEZ**

**ASESOR DE TESIS: ING. GUILLERMO ARANDA PEREZ**

**MEXICO, D. F.**

**1993**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

Presentación	1
Introducción	1
1. Aspectos Teóricos	9
1.1 Sistemas Dinámicos	10
1.1.1 Sistemas Dinámicos Autónomos	10
1.1.2 Sistemas Dinámicos No-Autónomos	10
1.1.3 Comentarios útiles acerca de los Sistemas Dinámicos	11
1.1.4 Sistemas Dinámicos en Tiempo Discreto	11
1.2 Comportamiento en Estado Estable y Conjuntos Límite	12
1.2.1 Puntos de Equilibrio	14
1.2.2 Soluciones Periódicas	14
1.2.3 Soluciones Casi-Periódicas	18
1.2.4 Caos	22
2. Herramientas para el Análisis de Sistemas Dinámicos	27
2.1 Mapas de Poincaré	27
2.1.1 Definición	28
2.1.1.1 Mapas de Poincaré para Sistemas Dinámicos No-Autónomos	28
2.1.1.2 Mapas de Poincaré para Sistemas Dinámicos Autónomos	29
2.1.2 Comportamiento en Estado Estable de los Mapas de Poincaré	31
2.1.2.1 El Mapa de Poincaré y las Soluciones Periódicas	31
2.1.2.2 El Mapa de Poincaré y las Soluciones Casi-Periódicas	32
2.1.2.3 El Mapa de Poincaré y el Comportamiento Caótico	34

2.2 Estabilidad y Conjuntos Límite	37
2.2.1 Puntos de Equilibrio	37
2.2.2 Soluciones Periódicas	39
2.2.2.1 Multiplicadores Característicos para Sistemas No-Autónomos	40
2.2.2.2 Multiplicadores Característicos para Sistemas Autónomos	42
2.2.2.3 Discusión	43
2.3 Exponentes de Lyapunov	45
2.4 Métodos Numéricos	51
3. Bifurcaciones y Caos en Circuitos Eléctricos y Electrónicos No-Lineales	54
3.1 Caos en un Sistema Discreto Unidimensional	55
3.1.1 Introducción	55
3.1.2 Descripción del problema	56
3.1.3 Análisis Matemático	56
3.1.4 Descripción del Circuito	60
3.1.5 Análisis de la Respuesta	62
3.2 Sincronización y Caos en un Oscilador Electrónico No-Lineal	70
3.2.1 Introducción	70
3.2.2 Descripción del Problema	71
3.2.3 Descripción del Circuito	71
3.2.4 Resultados Experimentales y Sincronización	73
Conclusiones	79
Bibliografía	84

## **PRESENTACION**

La presente tesis va dirigida a todas aquellas personas que tienen la inquietud de conocer el comportamiento de fenómenos que son complicados de analizar matemáticamente. En particular al estudiante de Ingeniería que empieza a encontrar problemas aparentemente aleatorios para los que no se tienen soluciones analíticas exactas. Se propone una manera relativamente sencilla de complementar la información del sistema en estudio para integrar su análisis.

Está constituida por tres capítulos, una introducción, conclusiones y bibliografía. El primer capítulo es una breve descripción matemática del contexto del fenómeno caótico desde el enfoque de Teoría de Sistemas Dinámicos. El segundo capítulo analiza algunas herramientas matemáticas para el estudio de Sistemas Dinámicos No Lineales, se muestran herramientas clásicas como Mapas de Poincaré y exponentes de Lyapunov y posteriormente se proponen otras herramientas para complementar este análisis. El tercer y último capítulo de la presente tesis son observaciones de comportamiento caótico en diferentes circuitos electrónicos tanto discretos como continuos, se presentan análisis matemáticos y resultados experimentales de simulaciones en computadora.

## **INTRODUCCION.**

Desde los tiempos mas remotos, el ser humano ha tenido la noción de predicción y orden, esta noción, lo condujo posteriormente a creer en un universo completamente ordenado y predecible. Específicamente, como enfatizó Pierre Simon Laplace, la Dinámica Newtoniana que gobierna todo el mundo macroscópico es estrictamente determinista, es decir, que los estados pasados y futuros de un sistema newtoniano únicamente seguirían al estado presente. Más aún, la Mecánica Cuántica es también determinista porque aquí también el estado presente del sistema determina en forma única el estado pasado y el futuro del sistema. Para enfatizar ésto, a pesar de sus diferentes definiciones de estado, las ecuaciones de Schrödinger y las de Newton son igualmente deterministas. En consecuencia, el ser humano, a mediados del siglo XX , podía

creer en el triunfo del determinismo tanto a nivel macroscópico como a nivel microscópico.

Sin embargo, con todo y su devoción y profunda convicción en el determinismo, el ser humano se ha encontrado con sistemas newtonianos que son impredecibles y caóticos, como la rueda de una ruleta o un dado. De un interés más científico está el problema de la turbulencia en todas sus formas. Tal vez una de las más sorprendentes revelaciones en la dinámica contemporánea es que, dentro de la mecánica newtoniana, podemos encontrar una respuesta aparentemente aleatoria en un sistema completamente determinista con tan sólo dos grados de libertad. Más aún existe evidencia sustancial aunque no rigurosa de que las órbitas caóticas son la regla, y no la excepción, en los sistemas dinámicos.

### **Descripción del término Caos**

Aparentemente, determinismo y caos son términos completamente contradictorios, el fenómeno de caos lo podríamos describir con palabras como "errático", "irregular", o "aparentemente impredecible". A este tipo de situaciones se le ha relacionado con conceptos matemáticos precisos - exponentes positivos de Lyapunov, entropía topológica, atractores fractales, etc. - , específicamente, en el sentido técnico más estricto, caos es simplemente un sinónimo de aleatoriedad como revela la Teoría de Complejidad Algorítmica desarrollada por Andrei Kolmogorov, Gregory Chaitin<sup>1</sup> .

Aún no se tiene una definición generalizada de lo que es caos. En 1963 E.N. Lorenz publicó sus observaciones numéricas en un modelo simplificado de convección térmica. Él descubrió que en este sistema, -completamente determinista- de tres ecuaciones diferenciales ordinarias, todas las soluciones no periódicas eran acotadas pero inestables, éstas sufrían fluctuaciones irregulares sin haber introducido ningún elemento aleatorio al sistema.

---

<sup>1</sup> Kolmogorov A. N. (1954) Preservation of Conditionally Periodic Movements with small change in the Hamiltonian Function. KAM Theorem. Lect. Notes in Phys. 93.51 (1979).

Chaitin G.J. (1987); Algorithmic Information Theory. Cambridge University Press.

Posteriormente, Li & Yorke (1975) son los primeros en introducir el término "caos", en la literatura matemática, para denotar una respuesta aparentemente aleatoria en un sistema completamente determinista. En 1976 Robert May encuentra comportamiento dinámico muy complicado en un modelo muy simple de población y realiza interesantes estudios sobre este modelo. Más adelante viene el descubrimiento de las propiedades de escalamiento y las constantes universales en los mapeos unidimensionales hecho por Feigenbaum, este trabajo impulsa a los físicos a seguir investigando sobre el tema.

Paralelamente, existe otro camino que ha conducido a los investigadores al dominio del "caos" en la Mecánica Clásica: Sistemas Hamiltonianos no integrables. A finales del siglo pasado el desarrollo de la Mecánica Celeste y los fundamentos de la Mecánica Estadística pusieron en graves problemas a la Dinámica Clásica. Dado que el éxito de la Teoría de la Relatividad y de la Teoría Cuántica así como el rápido progreso de la tecnología moderna absorbieron la atención de casi todos los físicos, estos complicados problemas fueron tomados por los matemáticos por más de medio siglo. Sus esfuerzos se cristalizaron en la formulación del llamado teorema de KAM a principios de los años sesenta. Estudios numéricos referentes a lo que sucede cuando el teorema de KAM falla han revelado la abundancia de movimientos aleatorios en sistemas no integrables.

El fenómeno relativo a la ocurrencia de aleatoriedad e impredecibilidad en sistemas completamente deterministas se le ha llamado, por diferentes autores: "estocacidad dinámica", "caos determinista", "ruido autogenerado", "estocacidad intrínseca" o simplemente "caos". A veces es descrito como una situación en la que el sistema pierde la sincronización consigo mismo, resultando un movimiento no-periódico complejo.

### **Matemática Experimental**

Se puede tomar como ejemplo el problema de la predicción del clima, las suposiciones de los meteorólogos están fundamentadas en el principio de causalidad -causas iguales producen iguales efectos-, luego, el conocimiento de todos los datos del clima debe hacer posible una predicción exacta. Claro

que ésto es imposible ya que no podemos colocar una estación de medición en un número arbitrariamente grande de lugares, a causa de ésto los meteorólogos optaron por que -causas similares producen efectos similares-. La predicción del clima se hace simulando en computadora complicadas ecuaciones matemáticas, se recopilan datos como temperatura, presión, dirección del viento y otras variables, de la red de estaciones de medición en todo el mundo y se introducen al sistema computacional que calcula el clima resultante con base en el modelo matemático. Estrictamente, no se ha podido hacer una predicción a largo plazo del comportamiento del clima basándose en estos modelos, lo que se hace es una predicción a corto plazo ( 6 horas, típicamente) y los datos resultantes se retroalimentan al sistema.

Los modelos de clima modernos trabajan con una red de puntos del orden de sesenta milias y hasta más, se tienen que adivinar ciertos datos iniciales puesto que las estaciones terrestres y los satélites no pueden registrar todos los puntos. Pero suponiendo que la tierra pudiera ser cubierta con sensores separados una distancia de un metro uno de otro y que cada sensor pueda dar lecturas perfectamente precisas (de temperatura, presión, humedad y cualquier otra medida que un meteorólogo pudiera desear), si a mediodía una computadora de gran capacidad tomara todos los datos y calculara qué pasaría minuto a minuto, aún ésta sería incapaz de predecir si en México habría o no lluvia un mes después. En poco tiempo, el espacio entre los sensores ocultaría fluctuaciones de las cuales la computadora no tendría información, pequeñas desviaciones del promedio. Después de un minuto, estas fluctuaciones habrían dado errores a un metro de distancia. Pronto, dichos errores se multiplicarían a una escala gigantesca.

Este fenómeno ha sido denominado "Efecto Mariposa" por el título del artículo publicado por E.D. Lorenz (1964) "¿Puede el ala de una mariposa provocar un tornado en Texas?". Los cálculos para pronóstico del clima consisten en averiguar si los mecanismos de la formación de clima están en estado estable o inestable. Si se encuentran en un estado inestable no se puede hacer ninguna clase de pronósticos.

¿Por qué no es posible determinar el clima que habrá mañana cuando el movimiento de las nubes, la existencia de los vientos, de los anticiclones y de



las depresiones están regidas por unas ecuaciones que, aunque complicadas, son perfectamente bien conocidas por los hidrodinamistas? E. Lorenz tuvo la idea de simplificar estas ecuaciones para que el fenómeno se pudiera simular en las computadoras de la época. Llegó así a un modelo de tres ecuaciones muy simples y conocidas desde entonces. Simuló este modelo y tuvo un resultado sorprendente, efectivamente, las soluciones de estas ecuaciones simples se revelaron muy irregulares e imprevisibles como lo es la evolución del estado atmosférico de las que pretenden ser modelo. D. Ruelle y F. Takens que desconocían el trabajo de Lorenz, abordaron de un modo más abstracto y matemático el problema de la turbulencia. En un artículo ya famoso<sup>1</sup> llegaron a una conclusión equivalente a la de Lorenz, de que un sistema agitado por movimientos en los que sólo existen tres frecuencias independientes puede desestabilizarse, sus movimientos se hacen totalmente irregulares y erráticos. Estos dos tipos de enfoques demostraron que en sistemas muy simples se podían engendrar, teóricamente al menos, comportamientos erráticos. Para identificar su origen determinista se acostumbra llamar caóticos a dichos movimientos, mientras que el adjetivo aleatorio se reserva normalmente para hablar de aquellos fenómenos en los que no están definidos de una manera determinista y presentan trayectorias erráticas. El descubrimiento del caos determinista ha constituido una verdadera revolución conceptual.

Algunos matemáticos soviéticos como Arnold en los años 40's, llegaron a establecer resultados de alcance muy general para ciertos sistemas dinámicos, pero hay que reconocer que fueron los trabajos de precursores como Lorenz, Ruelle y Takens, junto con la llegada de las computadoras modernas los que desencadenaron la avalancha de investigaciones que se llevan a cabo desde hace algunos años, investigaciones que conciernen a campos muy diversos de la Física, Astronomía, algunos problemas de Química y Biología. Uno de los resultados más señalados a los que han llegado estas investigaciones es la confirmación de que los sistemas reales con un número muy pequeño de variables independientes pueden presentar un comportamiento caótico.

Las implicaciones de este nuevo punto de vista son varias, de entre las cuales podemos notar que se está formando una Teoría de Caos, éste es, los

---

<sup>1</sup> Ruelle & Takens (1971)

investigadores están trabajando tanto en la fundamentación teórica de este tipo de fenómenos como en las herramientas necesarias para su estudio. Algunas de esas nuevas técnicas están cambiando los métodos tradicionales de trabajo de los matemáticos originando el concepto de *Matemáticas Experimentales*. Durante siglos, los matemáticos usaron sus métodos y herramientas tradicionales -papel, lápiz y calculadoras sencillas- así, los progresos significativos típicos en Matemáticas eran demostraciones y deducciones lógicas. Ahora por primera vez algunos matemáticos están trabajando como ingenieros o físicos: el problema matemático que se está investigando es planeado y llevado a cabo como un experimento, el aparato matemático que se utiliza es la computadora y en algunos casos es frecuente que se analice el comportamiento del sistema mediante simulaciones electrónicas, sin estas herramientas, la investigación en este campo sería prácticamente imposible. Los procesos matemáticos que queremos entender son visualizados en forma gráfica en computadora, de estas gráficas se obtienen conclusiones matemáticas, el resultado es cambiado y mejorado, se experimenta con los nuevos datos y se repite el ciclo. Dos disciplinas separadas se unen para crear algo cualitativamente nuevo. La ventaja de utilizar las gráficas en computadora es que se puede hacer visible un proceso dinámico.

### **Contexto del fenómeno caótico**

De cualquier forma, para los sistemas Newtonianos que tienen solución analítica, los cuales son el corazón de los textos de la Mecánica Clásica, la aleatoriedad de las cadenas de números en las condiciones iniciales es, en general, irrelevante para obtener la solución del sistema para intervalos largos de tiempo.

El fenómeno de caos requiere, para su explicación, de teorías totalmente nuevas. Un objeto que se mueve a grandes velocidades requiere de la teoría de la relatividad. Un objeto extremadamente pequeño y con poca masa requiere de la teoría cuántica. Ambas teorías fueron revolucionarias en el sentido de que revelaron una inesperada "discontinuidad" en la velocidad continua de las masas variables y porque cada una colocó un nuevo y fundamental límite en las habilidades del hombre para conocer su entorno. Caos implica, a su vez, una complejidad más allá de la experiencia del humano e incluso del entendimiento

del humano. Objetos deterministas tan complejos son incomputables, impredecibles, indefinibles y aleatorios, tal complejidad implica otra limitación para el ser humano. Esta limitación se extiende hasta los fundamentos de nuestro sistema numérico, a la cuestión de que si la mayoría de los números reales pueden ser definidos apropiadamente y en un nivel más profundo caos nos fuerza a reconocer el significado físico del ya descuidado Teorema de Kurt Gödel que, en lenguaje común afirma que un sistema no puede ser consistente y completo simultáneamente. Antes de Gödel, se creía que para problemas simples había respuestas simples. Gregory Chaitin comprobó que aún las preguntas más simples pueden tener respuestas muy complicadas, conteniendo más información que el sistema humano de lógica, y la dinámica no lineal ha probado la existencia y unicidad de las órbitas caóticas las cuales no habían sido presenciadas anteriormente.

La dinámica determinista de Newton está muy limitada. La Teoría de la Relatividad eliminó la ilusión newtoniana del tiempo y espacio absolutos; la Teoría Cuántica eliminó el sueño de Newton de procesos en los que se pueden controlar las mediciones; y el conocimiento de Caos elimina la fantasía de Laplace de la predicción determinista.

### **Propósito del estudio de Caos**

A través de los años, "Caos" ha sido relacionado con todos los desastres, desde tumultos en la calle hasta la propia extinción del universo. En verdad un desastre incontrolable es realmente una situación temible. Sin embargo ahora el término de "caos" se viste de un encanto fascinante, la encantadora impredecibilidad de las flamas danzando alrededor de una hoguera, la variación de los patrones presentados por las olas rompiéndose en las playas, la increíble variedad de formas que toman las nubes en el cielo. Caos es dinámicamente libre de las cadenas del orden y de la predecibilidad, permite a los sistemas explorar aleatoriamente todas las posibilidades de comportamiento dinámico. ¿Podremos utilizar la aleatoriedad del Caos para generar orden? Específicamente, la naturaleza utiliza mutaciones aleatorias para proveer la gran variedad de formas de vida para satisfacer la demanda de la selección natural. En esencia podemos considerar esta evolución como un comportamiento caótico con retroalimentación.

Durante mucho tiempo, este fenómeno fue considerado como una situación patológica, ahora, se ha descubierto en varias disciplinas y ciencias, de diferentes formas, en Mercados de Capital, Turbulencia, Clima, Reacciones Químicas, Crecimiento de Población, Redes Neuronales Artificiales y Circuitos Eléctricos y Electrónicos.

## 1. Aspectos teóricos

Los sistemas no lineales siempre han jugado un papel importante en el estudio de fenómenos naturales, pero en la última década se ha visto un interés más grande y un renovado vigor en la investigación de sistemas no lineales.

La razón principal de este crecimiento es la reciente disponibilidad de la potencia de cómputo. A diferencia de los sistemas lineales, donde el conocimiento de los eigenvalores y las condiciones iniciales nos permiten determinar una solución única, sólo algunos pocos sistemas no lineales poseen esta característica y, luego, las simulaciones numéricas juegan un papel crucial en el proceso de encontrar y analizar los fenómenos no lineales. Antes del advenimiento de las computadoras de bajo costo la habilidad para hacer simulaciones de sistemas no lineales estaba restringida a los investigadores que contaban con acceso a máquinas grandes, ahora, cualquier persona con acceso a una microcomputadora personal PC puede simular un sistema no lineal.

El aumento de interés en sistemas no lineales es, también, debido al descubrimiento de Caos. Una de las premisas básicas en ciencia es que los sistemas deterministas son predecibles, dadas las condiciones iniciales y el modelo matemático que gobierna el sistema se puede predecir el comportamiento del sistema para todo tiempo (existen eventos aleatorios en la naturaleza pero los científicos han usado típicamente modelos probabilísticos para describirlos). El descubrimiento de sistemas caóticos ha eliminado este punto de vista. Sencillamente un sistema caótico es un sistema determinista que presenta comportamiento aleatorio. Caos, también llamado comportamiento "extraño" es uno de los temas más excitantes en la investigación de sistemas no lineales. En este capítulo se explica cómo un sistema determinista puede ser impredecible y se presentan algunos métodos prácticos para categorizar el comportamiento en estado estable de sistemas no lineales con énfasis en clasificar comportamientos extraños.

## 1.1 Sistemas Dinámicos.

En esta sección definimos tres tipos de sistemas dinámicos y presentamos algunas notas útiles de la teoría de ecuaciones diferenciales.

### 1.1.1 Sistemas Dinámicos Autónomos (Homogéneos).

Un sistema dinámico autónomo de n-ésimo orden está definido por la ecuación de estado:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

donde  $x$  representa un vector de derivadas de las variables de estado con respecto al tiempo,  $x$  es el estado del sistema en el tiempo  $t$  y la función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es llamada el campo del vector. Partiendo de que el campo del vector no depende del tiempo, el tiempo inicial puede ser siempre tomado como  $t_0 = 0$ . La solución de (1) es llamada *trayectoria* y se denota por  $f_t(x_0)$  el mapeo  $f_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es llamado el flujo del sistema. La linealidad del sistema dinámico (1) depende directamente de la linealidad de la función  $f$ .

### 1.1.2 Sistemas Dinámicos no Autónomos (no Homogéneos).

Un sistema dinámico no autónomo de n-ésimo orden está definido por la ecuación de estado variante en el tiempo:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

El campo del vector  $f$  depende del tiempo  $y$ , a diferencia del caso autónomo el tiempo inicial no puede ser arbitrariamente fijado en 0. La solución de (2) que pasa por  $x_0$  en el tiempo  $t_0$  es  $f_t(x_0, t_0)$ . El sistema es lineal si  $f$  es lineal con respecto a  $x$ .

Si existe un  $T > 0$  tal que  $f(x, t) = f(x, t+T)$  para toda  $x$  y toda  $t$ , se dice que el sistema es periódico en tiempo. La  $T$  más pequeña se llama período

mínimo. De aquí en adelante consideraremos que todo sistema no autónomo es periódico en tiempo.

### 1.1.3 Comentarios útiles acerca de los sistemas dinámicos.

Existen varias nociones relativas a la existencia y unicidad de las soluciones de sistemas dinámicos. Estos se pueden encontrar en cualquier texto de ecuaciones diferenciales.

Asumiremos, en lo que sigue, que para cualquier  $t$ ,  $f_t$  es un difeomorfismo (una función  $f$  es un difeomorfismo si  $f^{-1}$  existe y ambas  $Df$  y  $Df^{-1}$  existen y son continuas). Esto tiene varias consecuencias:

- i)  $f_t(x) = f_t(y)$  si y solo si  $x = y$ . Por lo tanto, las trayectorias de un sistema autónomo son especificadas de manera única por sus condiciones iniciales.
- ii)  $f_t(x_0, t_0) = f_t(y_0, t_0)$  si y solo si  $x = y$ . Esto implica que, dado un tiempo inicial, una trayectoria de un sistema no autónomo queda especificada en forma única por el estado inicial; sin embargo, si  $t_0 \neq t_1$  es posible que  $f_{t_1}(x, t_0) = f_{t_1}(x, t_1)$  y  $x \neq y$  mostrando que, a diferencia de los sistemas autónomos, las trayectorias de sistemas no autónomos se pueden intersectar.
- iii) La derivada de la trayectoria con respecto a la condición inicial existe y es no singular. Consecuentemente, para  $t$  y  $t_0$  fijas,  $f_t(x, t_0)$  es continua con respecto a la condición inicial.

### 1.1.4 Sistemas Dinámicos en tiempo discreto.

Cualquier mapeo  $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  define un sistema dinámico en tiempo discreto mediante la ecuación de estado:

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{4}$$

donde  $x \in \mathcal{R}^n$  se le llama estado y  $f$  mapea el estado  $x_k$  al siguiente estado  $x_{k+1}$ . Empezando con una condición inicial  $x_0$ , repetidas aplicaciones del mapeo  $f$  dan

lugar a una secuencia de puntos  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  que se conoce como una órbita del sistema de tiempo discreto.

Los mapeos de tiempo discreto son útiles, entre otras aplicaciones, por dos razones:

1. El mapa de Poincaré -una técnica que reemplaza el análisis del flujo de un sistema de tiempo continuo por el análisis de un sistema de tiempo discreto- es una técnica extremadamente útil para el estudio de sistemas dinámicos;
2. Debido a esta correspondencia entre flujos y mapas, los mapas serán usados para ilustrar conceptos importantes sin entrar en detalles resolviendo ecuaciones diferenciales.

## 1.2 Comportamiento en Estado Estable y Conjuntos Límite.

En esta sección, los sistemas dinámicos se clasifican en términos de sus soluciones en estado estable y de sus conjuntos límite. Empezaremos definiendo algunos conceptos importantes:

El **estado estable** se refiere al comportamiento asintótico cuando  $t \rightarrow \infty$ . Se requiere que el estado estable esté limitado. La solución del sistema cuando aún no llega al estado estable se le conoce como respuesta transitoria o simplemente transitorio.

Un punto  $y$  es un **punto límite** de  $x$  si, para cada vecindad  $U$  de  $y$ ,  $\phi_t(x)$  entra repetidamente en  $U$  mientras  $t \rightarrow \infty$ .

El conjunto de todos los puntos límites de  $x$  se llama **Conjunto Límite  $L(x)$**  de  $x$ . Los conjuntos límites son cerrados e invariantes bajo  $\phi_t(x)$ , ésto es, un conjunto  $L$  es invariante bajo  $f_t(x)$  si, para toda  $x \in L$  y toda  $t$ ,  $f_t(x) \in L$ .



Un conjunto límite  $L$  es *atractor* si existe una vecindad abierta  $U$  de  $L$  tal que  $L(x) = L$  para toda  $x \in U$ .

La *Cuenca de Atracción*  $B(L)$  de un conjunto atractor  $L$  está definida como la unión de todas estas vecindades  $U$ . Cualquier trayectoria que empiece en  $B(L)$  tiende hacia  $L$  mientras  $t \rightarrow \infty$ .

Los conjuntos límite atractores son de especial interés porque los conjuntos límite no atractores no pueden ser observados en sistemas físicos o en simulaciones. Sin embargo, estos conjuntos límite no atractores pueden tener una profunda influencia en el comportamiento transitorio del sistema.

Los conjuntos límite son útiles para categorizar los tipos clásicos de comportamiento en estado estable (puntos de equilibrio, ciclos límite), pero la definición es demasiado simple para el complejo comportamiento en estado estable encontrado en sistemas caóticos. Históricamente, el término "atractor extraño" ha sido usado para describir el objeto en el cual se acumulan las trayectorias de un sistema caótico; sin embargo la cuestión de cómo definir un atractor sigue estando abierta. A lo largo del desarrollo de este trabajo usaremos indistintamente los términos conjunto límite atractor y atractor.

En un sistema lineal estable, existe solo un conjunto límite. Por tanto, el comportamiento en estado estable es independiente de las condiciones iniciales y tiene sentido hablar, por ejemplo, de estados estables senoidales. En un sistema no lineal típico, sin embargo, pueden existir varios conjuntos límite. En particular, puede haber varios atractores. Las condiciones iniciales determinan en cuál conjunto límite se establece el sistema eventualmente.

A continuación se presentan cuatro diferentes tipos de comportamiento en estado estable, empezando desde el más sencillo hasta el más complicado. Cada estado estable será descrito desde tres diferentes puntos de vista: en el dominio del tiempo, en el dominio de la frecuencia y como un conjunto límite (en el dominio del espacio de estado).

### 1.2.1 Puntos de equilibrio.

Un punto de equilibrio  $x_{eq}$  de un sistema autónomo (típicamente, los sistemas no autónomos no tienen puntos de equilibrio porque el campo del vector varía con el tiempo) es una solución constante de (1),  $f_1(x_{eq}) = x_{eq}$  para toda  $t$ . En un punto de equilibrio, el campo del vector desaparece y, excepto por unos pocos casos patológicos,  $f(x) = 0$  implica que  $x$  es un punto de equilibrio.

Un ejemplo simple, es la ecuación del péndulo forzado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -kx - \text{sen}x \end{aligned} \quad (6)$$

que es un sistema autónomo de segundo orden con un infinito número de puntos de equilibrio en  $(x, y) = (k, 0)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

El conjunto límite de un punto de equilibrio es el mismo punto de equilibrio.

### 1.2.2 Soluciones periódicas.

$f_1(x^*, t_0)$  es una solución periódica si:

$$f_1(x^*, t_0) = F_{1,T}(x^*, t_0) \quad (7)$$

para toda  $t$  y un período mínimo  $T' > 0$ .

Una solución periódica tiene una transformada de Fourier que consiste en una componente fundamental en  $f = 1/T'$  y en armónicas espaciadas en  $k/T'$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . La amplitud de algunas de estas componentes espectrales puede ser cero.

En un sistema no autónomo  $T'$  es típicamente un múltiplo  $k = 1, 2, \dots$  del período forzante  $T$ , y la solución es llamada solución de período- $k$ . Si  $k = 2$  nos referimos a la solución como *subarmónica de  $k$ -ésimo orden*. Para un sistema lineal asintóticamente estable, el estado estable senoidal es una solución de

período-1 y no aparecen subarmónicas. En la figura 1 se muestran soluciones fundamentales y subarmónicas juntas con sus transformadas de Fourier para la ecuación de Duffing:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{aligned} \quad (8)$$

En el caso autónomo, una solución periódica aislada  $\phi_1(x^*)$  se llama ciclo límite (una solución periódica es aislada si existe una vecindad de ésta que no contenga otras soluciones periódicas). Un ciclo límite es una oscilación autosostenida y no puede ocurrir en un sistema lineal.

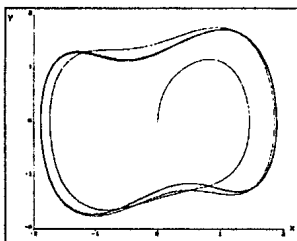


FIG. 1a Ciclo límite de la Ecuación de Duffing.

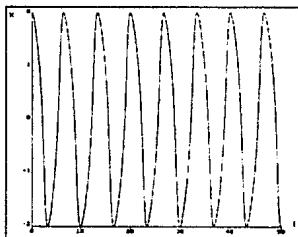


FIG. 1b Respuesta en tiempo de la Ecuación de Duffing

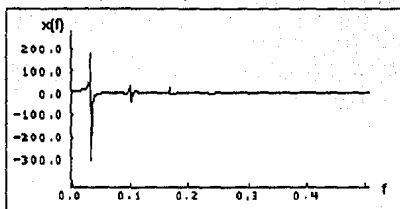


FIG. 1c Transformada rápida de Fourier de la ecuación de Duffing.

El ejemplo clásico de un ciclo límite se encuentra en la ecuación de Van der Pol:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1-x^2)y - x \end{aligned} \quad (9)$$

La existencia del ciclo límite de Van der Pol, mostrado en la figura 2, se puede explicar reescribiendo (9) en forma escalar:

$$x + (x^2 - 1)x + x = 0 \quad (10)$$

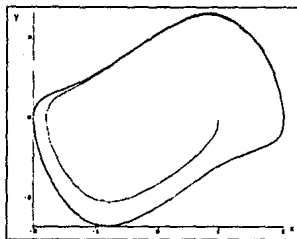


FIG. 2a Ciclo límite de la Ecuación de Van der Pol

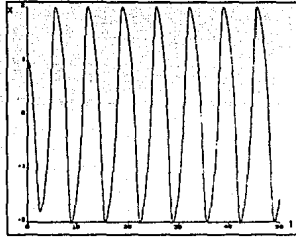


FIG. 2b Respuesta en tiempo de la Ecuación de Van der Pol

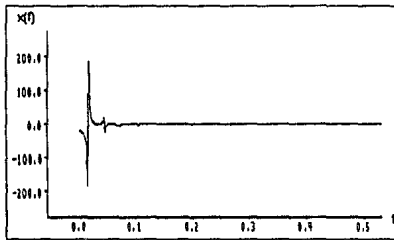


FIG. 2c Transformada rápida de Fourier para la variable x de la Ecuación de Van der Pol.

El término  $(x^2-1)$ , es negativo para  $\text{abs}(x) < 1$  implicando una solución que se expande y es positivo para  $\text{abs}(x) > 1$  indicando una solución que se contrae. Como las trayectorias cerca del origen se expanden, las regiones alejadas del origen se contraen y el único punto de equilibrio es  $x = 0$ , debe existir un ciclo límite circundante al origen; de otra forma, la trayectoria, forzada a yacer en un plano, se intersectaría así misma.

El conjunto límite correspondiente al ciclo límite es la curva cerrada trazada por  $\phi_1(x^*)$  en un período. Es conveniente pensar en un círculo cuando se habla de ciclos límite.

### 1.2.3 Soluciones casi-periódicas (quasi-periódicas)

Una solución casi-periódica es aquella que se puede escribir como una suma de funciones periódicas:

$$x(t) = \sum_i h_i(t) \quad (11)$$

donde  $h_i$  tiene un período mínimo  $T_i$  y frecuencia  $f_i = 1/T_i$ , existe un conjunto finito de frecuencias base  $\{f_1, \dots, f_p\}$  con las siguientes propiedades:

- i) Son linealmente independientes; ésto es, no existen un conjunto de  $p$  enteros  $\{k_1, \dots, k_p\}$  no todos nulos a la vez, tales que:

$$k_1 f_1 + \dots + k_p f_p = 0$$

- iii) Forman una base finita para la  $f_i$ ; ésto es, para cada  $i$ ,  $f_i = k_1 f_1 + \dots + k_p f_p$  para algunos enteros  $\{k_1, \dots, k_p\}$ .

En palabras, una forma de onda casi-periódica es la suma de formas de onda periódicas cuyas frecuencias son resultado de varias sumas y diferencias de un conjunto finito de frecuencias base. Nótese que las frecuencias base están definidas de manera única, pero  $p$  si lo está. Una solución casi periódica con  $p$  frecuencias base se llama solución de *período-p*.

Una forma de onda periódica es una forma de onda casi-periódica con  $p=1$ .

El caso más simple de una función de período-2 es:

$$x(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (12)$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  son inconmensurables (dos números reales son inconmensurables si su proporción es irracional). El espectro de tal forma de onda consiste de dos conjuntos de armónicas. El primer conjunto localizado a

las frecuencias  $k/T_1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , correspondiendo a  $h_1(t)$  y el segundo conjunto con la frecuencia fundamental en  $1/T_2$ , que corresponde a  $h_2(t)$ .

Dos ejemplos que se presentan en Ingeniería Electrónica son:

1) Amplitud Modulada:

$$x(t) = m(t) \operatorname{sen}(2\pi f_c t) \quad (13)$$

donde el mensaje  $m(t)$  es periódico. es bien conocido que el espectro de  $x(t)$  consiste de picos en frecuencias  $f_c + kf_m$  donde  $f_m$  es la frecuencia fundamental de  $m(t)$  y  $k$  es un valor entero. Si  $f_c$  y  $f_m$  son frecuencias inconmensurables, entonces  $x(t)$  es casi-periódica con  $p = 2$  y frecuencias base  $\{f_c, f_m\}$ .

2) Frecuencia Modulada:

$$x(t) = \operatorname{sen}(2\pi f_c t + m(t)) \quad (14)$$

Si  $m(t)$  es periódica con frecuencia fundamental  $f_m$ , entonces, el espectro tiene picos en los mismos valores de frecuencia que AM y si  $f_c$  y  $f_m$  son frecuencias inconmensurables,  $x(t)$  es una función periódica de período 2 con frecuencias base  $\{f_c, f_m\}$ .

Ninguno de estos ejemplos han sido presentados como soluciones de un sistema dinámico pero demuestran un punto importante: las formas de onda casi-periódicas pueden ser creadas cuando dos o más funciones periódicas interactúan entre sí en forma no lineal.

Para visualizar cómo es que aparecen soluciones casi-periódicas en sistemas dinámicos, se considera la ecuación de Van der Pol (9). Esta posee un ciclo límite cuyo período natural  $T_1$  depende de los parámetros del sistema. Ahora, se suma un término senoidal forzante de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ y &= (1 - x^2)y - x + A \cos(2\pi t / T_2) \end{aligned} \quad (15)$$

La solución para el sistema forzado se podría sincronizar con algún múltiplo del período de entrada  $T_2$  resultando en una subarmónica. También es posible que en la "competencia" de ambos períodos, ninguno "gane" y se observe comportamiento casi-periódico.

La trayectoria de período-2 de la ecuación forzada de Van der Pol (15) se muestra en tiempo y en el espacio de estado en la figura 3.

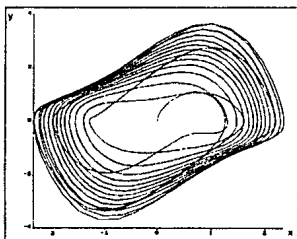


FIG. 3a Respuesta casi-periódica de la Ecuación forzada de Van der Pol. con  $T_2 = 15s$

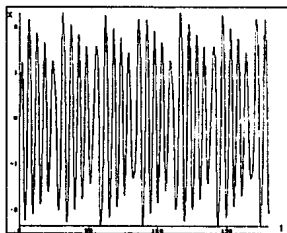


FIG. 3b Respuesta en tiempo de la Ecuación forzada de Van der Pol



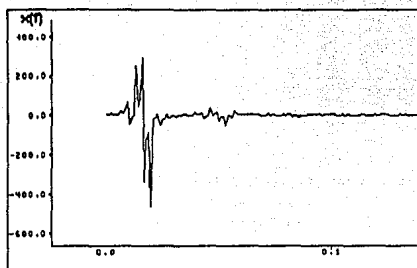


FIG. 3b Espectro de frecuencias de la Ecuación de Van der Pol Forzada.

La trayectoria está confinada a una región en forma de anillo del espacio de estado y está uniformemente distribuida en esta región. No todas las trayectorias de período-2 exhiben estas dos características, pero su presencia es un buen indicador de comportamiento de período-2. La respuesta en tiempo está modulada en amplitud y debido a que los cruces por cero no están uniformemente espaciados, también está modulada en frecuencia. El espectro de (9) es el parecido al espectro del sistema no forzado (véase figura 2).

Generalmente es difícil determinar si una solución es casiperiódica o no con solo observar el espectro. De hecho, sin confirmación adicional, se podría decir que el espectro mostrado en (3) es una solución periódica con muchas armónicas faltantes. Afortunadamente, en el espacio de estado, las trayectorias casiperiódicas aparecen muy diferentes de las trayectorias periódicas, y usando los dos criterios se pueden clasificar fácilmente estas soluciones.

Una trayectoria de período-2 yace en una copia difeomórfica del toroide-2 (toroide de dos frecuencias en el espacio de estado)  $S \times S$ , cada  $S$  representa una de las frecuencias base (véase figura 4). Como la trayectoria es una curva y el toroide-2 una superficie, no todos los puntos en el toroide yacen en la trayectoria; sin embargo, se puede demostrar que la trayectoria repetidamente pasa arbitrariamente cerca de todos los puntos del toroide y, en consecuencia, el toroide es el conjunto límite del comportamiento casi-periódico. Este es el

primer ejemplo que hemos visto de un ciclo límite que no es una trayectoria sencilla.

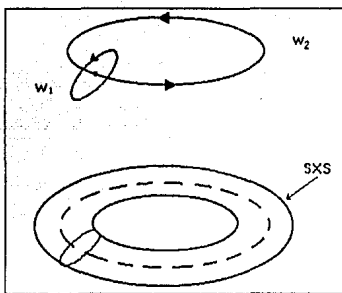


FIG. 4 toroide de dos frecuencias en el espacio de estado

Las trayectorias casiperiódicas de orden mayor pueden ocurrir en sistemas dinámicos de orden mayor. En general, una solución casi-periódica con una dimensión base  $p$  posee un conjunto límite que es un difeomorfismo de un toroide- $p$ .

#### 1.2.4 Caos

No existe una definición aceptada en forma general para caos. Desde un punto de vista práctico caos se puede definir como ninguna de las anteriores; ésto es, como un comportamiento limitado en estado estable que no es un punto de equilibrio, no es periódico y no es casi-periódico. La pregunta clave es, si no es alguna de las anteriores, ¿qué es?

Para empezar la discusión mostraremos un ejemplo de trayectoria caótica (figuras 5).

Las ecuaciones de Lorenz fueron desarrolladas por Edward N. Lorenz en 1963 en un intento de modelar clima:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= bx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - cz\end{aligned}\tag{16}$$

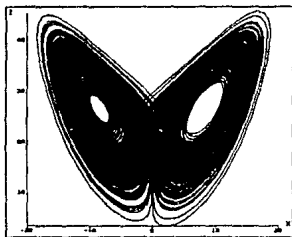


FIG. 5a Atractor de Lorenz para  $a = 10$ ,  $b = 28$ ,  $c = 2.667$

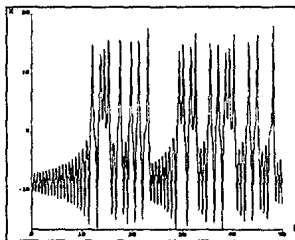


FIG. 5b Respuesta en tiempo de la Ecuación de Lorenz

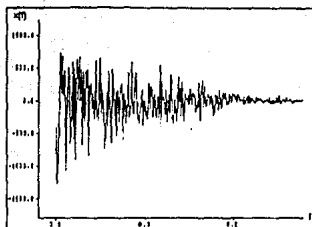


FIG. 5c Espectro de la variable  $x$  de la Ecuación de Lorenz

Es evidente que las trayectorias mostradas son limitadas, que no son periódicas y que no tienen la distribución uniforme característica de las soluciones casi-periódicas. Como se muestra en la figura (5), un espectro caótico no está compuesto solamente de frecuencias discretas, pero tiene un ancho de banda continuo. Este espectro que parece como un espectro de ruido es característico de los sistemas caóticos.

El conjunto límite del comportamiento caótico no es un objeto geométrico sencillo como un círculo o un toroide (torus) pero está íntimamente relacionado con fractales y con conjuntos de Cantor.

Otra propiedad de los sistemas caóticos es la sensibilidad a las condiciones iniciales: dadas dos diferentes condiciones iniciales arbitrariamente muy cercanas una a la otra, las trayectorias divergen en una proporción característica del sistema hasta que llegan a no estar correlacionadas (fig. 6). En la práctica, el estado inicial del sistema nunca puede ser especificado con exactitud, solamente con una cierta tolerancia  $\epsilon > 0$ ; si la diferencia de las dos condiciones iniciales  $x_0$  y  $x'_0$  es  $\epsilon$  no se podrían distinguir una de otra. Sin embargo, después de cierto tiempo,  $\phi_t(x_0)$  y  $\phi_t(x'_0)$  divergirán y aparecerán sin correlación. Así que no importando qué tan precisamente se conozcan estas condiciones iniciales, el comportamiento a largo plazo de un sistema caótico no puede ser predecible. (claro está que si la condición inicial se pudiera especificar con precisión infinita, la trayectoria se podría predecir con precisión).

A esta impredecibilidad se debe que a menudo se describan como "sistemas deterministas que presentan comportamiento aparentemente aleatorio".

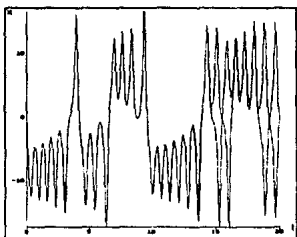


FIG. 6 Trayectoria de solución para  $x(0) = 1$  y  $x'(0) = 1.00005$

El comportamiento aleatorio en un sistema determinista puede parecer sorprendente a primera vista, pero existen algunos ejemplos simples. Uno de ellos serían los generadores de números aleatorios frecuentemente usados. Como otro ejemplo, consideremos el sistema de tiempo discreto de una dimensión que se presenta a continuación:

$$x_{k+1} = f(x_k) = 10 x_k \text{ mod } 1, \quad x_0 \in [0, 1] \quad (17)$$

Si  $x_0$  es escrito como un número decimal

$$x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} d_i 10^{-i} = 0.d_1 d_2 d_3 \dots \quad (18)$$

donde  $d_i \in \{0, \dots, 9\}$ , entonces la acción de  $f$  es encontrar  $d_1$  correr los siguientes dígitos a la izquierda:

$$x_k = \sum_{i=1}^{\infty} d_{k+i} 10^{-i} = 0.d_{k+1} d_{k+2} d_{k+3} \dots \quad (19)$$

Después de repetidas aplicaciones de  $f$  los dígitos más significativos se pierden y los dígitos menos significativos se convierten en más significativos, hasta que también ellos sean descartados uno por uno.

Para mostrar que este sistema es aparentemente aleatorio, supongamos la condición inicial exacta  $x_0 = 1/\sqrt{2} = 0.70710678\dots$ , el observador puede predecir:

$$\begin{aligned} 0.7065 < x_1 < 0.7075 \\ 0.065 < x_2 < 0.075 \\ 0.75 < x_3 < 0.75 \end{aligned} \tag{20}$$

pero no se puede decir nada acerca de  $x_4$  en adelante. Para este sistema, la condición inicial observada pierde predecibilidad conforme pasa el tiempo. Nótese también que si el observador mide el estado después de cada iteración, la condición inicial puede ser reconstruida seleccionando el primer dígito de cada medición, el observador gana información acerca del estado mientras evoluciona en tiempo.

La tasa de pérdida de predecibilidad es igual a la tasa (proporción) de ganancia de información y, de hecho, estas dos propiedades son dos diferentes formas de describir el mismo fenómeno. En este ejemplo, la tasa es un dígito por iteración. La tasa depende del sistema; si se reemplazara el 10 del sistema por 100, la tasa se convierte en dos dígitos por iteración.

Este ejemplo es un mapa no invertible y se podría argumentar que no tiene relación directa con los sistemas de tiempo continuo, recordemos que el flujo de un sistema dinámico es un difeomorfismo y, por lo tanto, invertible.

## 2. HERRAMIENTAS PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS DINAMICOS.

### 2.1 Mapas de Poincaré.

El mapa de Poincaré consiste en tomar una "rebanada", una sección transversal de las trayectorias que se observan en el espacio de estado, de tal manera que una línea, en el espacio de estado, será un simple punto en el mapa de Poincaré. El mapa de Poincaré remueve una dimensión del atractor. En este mapa se puede observar que tan cerca o lejos se encuentran las trayectorias en el espacio de estado. Por ejemplo, un atractor periódico en el espacio de estado aparece como un solo punto en el mapa de Poincaré, para un atractor extraño se observan formas producidas por puntos cercanos (trayectorias).

El proceso corresponde a muestrear el estado del sistema cada determinado tiempo, en lugar de que sea continuamente como en el caso del espacio de estado. Esto le da al investigador cierta flexibilidad para saber cuándo muestrear y dónde muestrear. El mapa que da mayor información es el que corresponde a una característica física especial. Por ejemplo, un mapa de Poincaré podría muestrear la velocidad de un péndulo cada vez que pasa por el punto más bajo, o se puede escoger el tamaño del intervalo de acuerdo a las necesidades, "congelando" estados sucesivos.

### 2.1.1 Definición.

La definición para el mapa de Poincaré es ligeramente diferente para sistemas autónomos que para sistemas no autónomos. Se presentan los dos casos por separado.

#### 2.1.1.1 Mapa de Poincaré para Sistemas No-Autónomos.

Un sistema no autónomo de  $n$ -ésimo orden (2) con período  $T$  se puede transformar en un sistema autónomo de dimensión  $n+1$  (3) en el espacio de estado cilíndrico  $\mathcal{R}^n \times S$ , como se demostró anteriormente.

Considere el hiperplano  $n$ -dimensional  $\Sigma$  en  $\mathcal{R}^n \times S$  definido por:

$$\Sigma = \{ (x, \theta) \in \mathcal{R}^n \times S \mid \theta = \theta_0 \} \quad (21)$$

Cada  $T$  segundos, la trayectoria (4) intersecta  $\Sigma$  (fig. 7). Luego, un mapa  $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$  está definido por  $P(x) = f_t(x, \theta_0, t_0)$ . A  $P$  se le llama *Mapa de Poincaré*. Nótese que  $P$  es un difeomorfismo y por lo tanto,  $P$  es biunívoca y diferenciable.

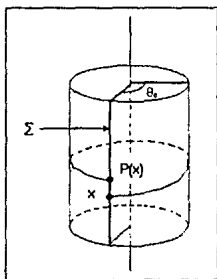


FIG. 7 Mapa de Poincaré



P tiene algunas características que conviene enunciar:

i)  $P(x)$  indica cuándo el flujo toma el valor  $x$  después de cada  $T$  segundos. A esto se le llama *Mapeo de Avance en T*.

ii) La órbita  $\{P^k(x)\}_{k=0,1,\dots}$  es un muestreo de una trayectoria cada  $T$  segundos; esto es:

$$P^k(x_0) = \phi_{kT}(x_0, t_0), \quad \text{para } k=0, 1, \dots$$

Esto es similar a la acción del flash de un estroboscopio con período  $T$ .

### 2.1.1.2 Mapa de Poincaré para Sistemas Autónomos.

Se considera el sistema autónomo de  $n$ -ésimo orden con el ciclo límite  $\Gamma$  mostrado en la figura 8.

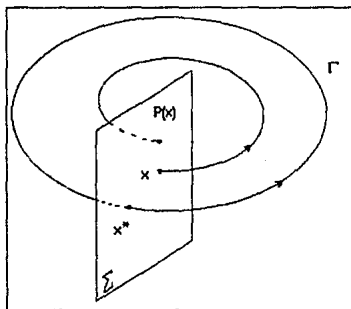


FIG. 8 Ciclo Límite de un Sistema Autónomo

Se define  $x^*$  como un punto en el ciclo límite y  $T$  como el período mínimo del ciclo límite. Se toma un hiperplano  $\Sigma$  de dimensión  $n-1$  no tangente a  $\Gamma$  en  $x^*$ . La trayectoria desde  $x^*$  tocará  $\Sigma$  en  $x^*$  en  $T$  segundos. Debido a que  $\phi_T$  es continua con respecto a la condición inicial, las trayectorias que empiezan en  $\Sigma$  en una vecindad suficientemente pequeña de  $x^*$  intersectarán  $\Sigma$  en la vecindad de  $x^*$  en aproximadamente  $T$  segundos. Luego  $f$  y  $\Sigma$  definen un mapeo  $P$  de alguna vecindad  $U \subset \Sigma$  de  $x^*$  hacia otra vecindad  $V \subset \Sigma$  de  $x^*$ . A  $P$  se le llama *Mapa de Poincaré* o *Mapa del primer retorno*.

Es importante recalcar que para sistemas autónomos, el mapa de Poincaré está definido solamente para una vecindad de  $x^*$ ; a diferencia del caso no autónomo, no está garantizado que para una trayectoria desde cualquier punto en  $\Sigma$  intersecte  $\Sigma$  nuevamente. De manera análoga al caso no autónomo, se puede demostrar que  $P$  es un difeomorfismo.

La definición presentada es la definición standard que aparece en la teoría de Dinámica de Sistemas, pero a menudo resulta impracticable para cuestiones experimentales porque requiere del conocimiento de la posición de un ciclo límite. En la práctica, se escoge un hiperplano de dimensión  $n-1$ :

$$\Sigma = \{ x : hT(x - x_T) = 0 \} \quad (22)$$

donde  $h$  es un vector normal a  $\Sigma$  y  $x_T$  es un punto sobre el hiperplano.  $\Sigma$  divide el espacio de estado en dos regiones:

$$\Sigma^+ = \{ x : hT(x - x_T) > 0 \} \quad (23a)$$

$$\Sigma^- = \{ x : hT(x - x_T) < 0 \} \quad (23b)$$

Si se escoge  $\Sigma$  apropiadamente, la trayectoria bajo observación pasa repetidamente a través de  $\Sigma$  cruzando de  $\Sigma^-$  a  $\Sigma^+$  una y otra vez. La secuencia de cruces  $\Sigma^-$  a  $\Sigma^+$  define un mapa de cruces como se muestra en la figura 9.

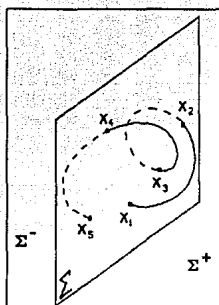


FIG. 9 Secuencia de Cruces de la Trayectoria de Solución

Este mapa, así como el definido por la secuencia  $\Sigma^+$  a  $\Sigma^-$  son llamados *Mapas de Poincaré Unilaterales* porque los únicos cruces que interesan son los de un lado de  $\Sigma$ . La secuencia completa de puntos de cruce tomada sin considerar la dirección del cruce define un *Mapa de Poincaré Bilateral*.

## 2.1.2 Comportamiento en Estado Estable del Mapa de Poincaré.

La utilidad del mapa de Poincaré reside en el hecho de que existe una correspondencia unívoca entre los diferentes tipos de comportamiento en estado estable de los sistemas dinámicos y el comportamiento en estado estable de P.

### 2.1.2.1 El Mapa de Poincaré y las Soluciones Periódicas.

Partiendo de la definición de P, una solución de período-1 corresponde a un punto fijo en el mapa de Poincaré; ésto es,  $P(x) = x$  implica que x yace en una solución periódica.

Para sistemas no autónomos, una órbita cerrada de  $P$  con período  $k$ , corresponde a una subarmónica de  $k$ -ésimo orden del flujo. En el caso autónomo, existen ciertas circunstancias (bifurcaciones de período-2) donde una órbita cerrada de  $P$  puede ser pensada como una subarmónica del sistema autónomo. Se debe tener cuidado con esta interpretación, sin embargo, partiendo de que, a diferencia de los sistemas no autónomos, no existe un período único en términos del cual se puede definir una subarmónica.

### 2.1.2.2 El Mapa de Poincaré y las Soluciones Casi-periódicas.

El mapa de Poincaré es útil para detectar tanto comportamiento periódico como casi-periodico. Hemos visto anteriormente que una solución biperiódica yace en una copia difeomórfica del toroide-2 en  $S \times S$ .

Utilizando coordenadas  $(\theta_1, \theta_2)$  en el toroide, una trayectoria biperiódica puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= 2\pi f_1 t \bmod 2\pi \\ \theta_2(t) &= 2\pi f_2 t \bmod 2\pi\end{aligned}\tag{24}$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son frecuencias inconmensurables.

En el caso no autónomo, una de las frecuencias, digamos  $f_1$ , es la frecuencia forzante del sistema. Una órbita del mapa de Poincaré corresponde a muestrear (24) cada  $1/f_1$  segundos:

$$\begin{aligned}\theta_1(k/f_1) &= 2\pi k \bmod 2\pi \\ \theta_2(k/f_1) &= 2\pi k f_2/f_1 \bmod 2\pi\end{aligned}\tag{25a}$$

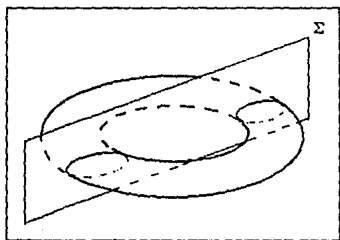
ó

$$\begin{aligned}\theta_1(k/f_1) &= 0 \\ \theta_2(k/f_1) &= 2\pi k f_2/f_1 \bmod 2\pi\end{aligned}\tag{25b}$$

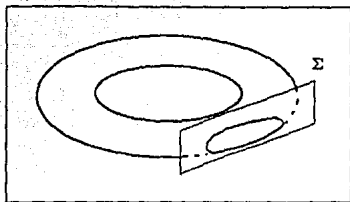
Así, el mapa de Poincaré actúa como un estroboscopio; "congela" cualquier componente del comportamiento que ocurra a la frecuencia de muestreo. Como  $t_1$  y  $t_2$  son inconmensurables,  $\{\theta_2(k/t_1)\}_{k=0}^{\infty}$  no es periódica y aparece repetidamente de manera arbitraria cerca de cada punto en el intervalo  $(0, 2\pi)$ . Así, en el sistema de coordenadas  $(\theta_1, \theta_2)$  el conjunto límite del mapa de Poincaré es el círculo  $S$ . En el sistema original de coordenadas Euclidianas, el conjunto límite es una copia difeomórfica del círculo.

En el caso no autónomo biperiódico, la geometría del conjunto límite de Poincaré depende de la orientación de la sección transversal  $\Sigma$  con respecto al toroide-2 y si se ha usado un mapa unilateral o bilateral. Si  $\Sigma$  pasa a través del "hoyo" del toroide, el ciclo límite del mapa unilateral es (una copia difeomórfica de) un círculo y si se usa un mapa bilateral se obtendrán dos círculos (figura 10a). Si  $\Sigma$  no pasa a través del hoyo del toroide, el conjunto límite del mapa unilateral es un arco del círculo, y para el mapa bilateral será el círculo completo (figura 10b).

Resumiendo, para ambos casos autónomo y no autónomo, el conjunto límite del mapa de Poincaré para el comportamiento biperiódico es una copia difeomórfica de un círculo (suponiendo la selección apropiada del mapa unilateral o bilateral para sistemas autónomos).



(a)



(b)

FIG. 10 Diferentes Cortes para el Mapa de Poincaré

### 2.1.2.3 El Mapa de Poincaré y el Comportamiento Caótico.

Las órbitas de Poincaré en estado estable de sistemas caóticos son distintas y, a menudo muy bellas. En la figura 11 el Atractor Caótico correspondiente al sistema (26). Se muestra una órbita de Poincaré en la figura 12. Esta órbita corresponde al sistema mostrado a continuación.

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dV_{c1}}{dt} &= -g(V_{c2} - V_{c1}) \\
 C_2 \frac{dV_{c2}}{dt} &= -g(V_{c2} - V_{c1}) - i_L \\
 L \frac{di_L}{dt} &= V_{c2}
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

donde:

$$g(v) = -m_0 v + 0.5(m_0 + m_1)[|v + E_1| - |v - E_1|]$$

Esta ecuación representa la dinámica de un oscilador electrónico inestable<sup>1</sup>. El circuito se muestra en la figura 13.

<sup>1</sup> Matsumoto, T. "A Chaotic Attractor from Chua's Circuit". IEEE Trans. Circuits Syst. Dec. 1984.

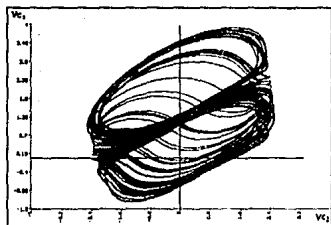


FIG.11 Atractor Caótico del Sistema de la Ecuación (26)

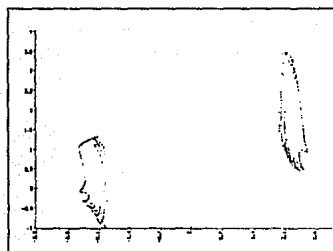


FIG. 12 Corte Transversal del Atractor de la Ecuación (26) para  $I_L=0$

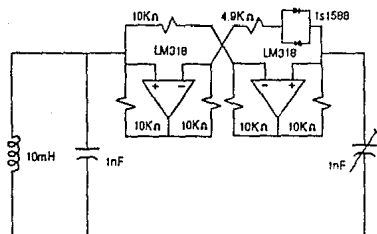


FIG. 13 Realización del oscilador de la Ecuación (26)

Observando estas órbitas, quedan claros dos puntos: primero, las órbitas en estado estable no son objetos geométricos sencillos como lo son en los casos de comportamiento periódico o casi-periódico. Segundo, el atractor tiene una estructura fina. Esta estructura fina es típica de los sistemas caóticos y se discutirá posteriormente.



## 2.2 Estabilidad y Conjuntos Límite.

Los conjuntos límite atractores son de suma importancia tanto en preparaciones experimentales como en numéricas porque éstas son el único tipo de conjuntos límite que pueden ser observados. En esta sección examinaremos las condiciones para que un conjunto límite sea atractor.

Empezaremos con el caso de los eigenvalores en un punto de equilibrio, después analizaremos los multiplicadores característicos de una solución periódica para continuar con los exponentes de Lyapunov.

### 2.2.1 Puntos de Equilibrio.

Considere un punto de equilibrio  $x_{eq}$  de (1). Es bien conocido que el comportamiento local del flujo cerca de  $x_{eq}$  se determina linealizando  $f$  en  $x_{eq}$ . Particularmente el campo del vector lineal:

$$\delta x' = D f(x_{eq}) \delta x \quad (27)$$

gobierna la evolución en tiempo de las perturbaciones cerca del punto de equilibrio.

La trayectoria con la condición inicial  $x_{eq} + \delta x_0$  es:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_{eq} + \delta x_0) & \\ &= x_{eq} + \delta x(t) \end{aligned} \quad (28a)$$

$$= x_{eq} + e^{Df(x_{eq})t} \delta x_0 \quad (28b)$$

$$= x_{eq} + C_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \eta_n e^{\lambda_n t} \quad (28c)$$

donde  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  y  $\{\eta_i\}_{i=1}^n$  son los eigenvalores y eigenvectores de  $D f(x_{eq})$  y  $\{C_i\}_{i=1}^n$  son constantes escalares escogidas de acuerdo a la condición inicial<sup>1</sup>. La parte

<sup>1</sup> Para la expresión 28c se asume que  $\lambda_i$  son distintas; sin embargo, los siguientes resultados para estabilidad son válidos en general.

real de  $\lambda_i$  da la tasa de expansión (si  $\text{Re}[\lambda_i] > 0$ ) o contracción (si  $\text{Re}[\lambda_i] < 0$ ) en la vecindad del punto de equilibrio a lo largo de la dirección de  $\eta_i$ .

Si  $\text{Re}[\lambda_i] < 0$  para toda  $\lambda_i$ , entonces todas las perturbaciones suficientemente pequeñas tienden a cero mientras  $t \rightarrow \infty$  y  $x_{\text{eq}}$  es asintóticamente estable. Si alguna  $\text{Re}[\lambda_i] > 0$ , entonces  $x_{\text{eq}}$  no es estable y puede ser inestable (si todas  $\text{Re}[\lambda_i] > 0$ ) o no estable (algunas  $\text{Re}[\lambda_i] < 0$  y algunas  $\text{Re}[\lambda_i] > 0$ ). La diferencia entre inestable y no estable es de gran ayuda porque «n punto de equilibrio se convierte en estable en tiempo revertido y el punto de equilibrio no estable permanece no estable cuando el flujo es revertido. Un punto de equilibrio no estable es llamado frecuentemente *punto de silla de montar* o *punto de silla*<sup>1</sup>.

Si alguno de los eigenvalores tiene la parte real igual a cero, entonces no se puede determinar la estabilidad solamente a partir de los eigenvalores. Los puntos de equilibrio donde todos los eigenvalores tienen la parte real diferente de cero se llaman *hiperbólicos*. Los puntos de equilibrio hiperbólicos tienen la útil propiedad de estabilidad estructural, ésto es, existen aún bajo pequeñas perturbaciones del campo del vector y el punto de equilibrio perturbado tiene el mismo tipo de estabilidad. Típicamente, los puntos de equilibrio no hiperbólicos no son estables estructuralmente, por lo tanto, no pueden ser observados experimentalmente o en simulaciones.

---

<sup>1</sup> Saddle Point

## 2.2.2 Soluciones Periódicas.

La estabilidad de una solución periódica está determinada por sus *multiplicadores característicos*, también llamados *multiplicadores de Floquet*. Los multiplicadores característicos son una generalización de los valores propios en un punto de equilibrio.

Una solución periódica corresponde a un punto fijo del mapa de Poincaré P. La estabilidad de la solución periódica está determinada por la estabilidad del punto fijo. Análogamente a un punto de equilibrio, la estabilidad de un punto fijo  $x^*$  de P se determina linealizando P en  $x^*$ . El sistema de tiempo discreto lineal

$$\delta x_{k+1} = DP(x^*)\delta x_k \quad (29)$$

gobierna el comportamiento local de P cerca de  $x^*$ . Permitamos que p sea la dimensión de  $DP(x^*)$ ; p es igual a n para sistemas no autónomos y es igual a n-1 para sistemas autónomos. La órbita de P para una condición inicial  $x_0 + \delta x_0$  es<sup>1</sup> (en breve se demostrará que  $m_i = e^{\lambda_i}$  cerca de un punto de equilibrio):

$$x_k = x^* + \delta x_k \quad (30a)$$

$$= x^* + DP(x^*)^k \delta x_0 \quad (30b)$$

$$= x^* + C_1 \eta_1 m_1^k + \dots + C_p \eta_p m_p^k \quad (30c)$$

donde  $\{m_i\}_{i=1}^p$  y  $\{\eta_i\}_{i=1}^p$  son los eigenvalores y eigenvectores de  $DP(x^*)$ , y  $\{C_i\}_{i=1}^p$  son constantes escalares escogidas para la condición inicial (se asume que  $m_i$  son diferentes; sin embargo, los resultados son válidos en general).

Los eigenvalores  $\{m_i\}_{i=1}^p$  son los multiplicadores característicos del punto fijo, y determinan la cantidad de contracción ( $|m_i| < 1$ ) o expansión ( $|m_i| > 1$ ) cerca de  $x^*$  en la dirección de  $\eta_i$  para una iteración del mapa P.

<sup>1</sup> Las ecuaciones (30) son una versión discretizada en tiempo de las ecuaciones (28)

Se ha demostrado que si  $\Sigma$  es transversal a la solución periódica, los multiplicadores característicos son independientes de la orientación y posición de la sección transversal  $\Sigma$ , y tiene sentido hablar de multiplicadores característicos de la solución periódica.

Los multiplicadores característicos determinan la estabilidad de la solución periódica. Si todos los  $m_i$  yacen dentro del círculo unitario, entonces la solución periódica es asintóticamente estable. Si todos  $|m_i| > 1$ , la solución periódica es inestable. Si algunos de los multiplicadores característicos yacen dentro del círculo unitario otros fuera de él, entonces la solución periódica es no estable.

Si uno de los multiplicadores característicos yace dentro del círculo unitario, entonces, la estabilidad de la solución periódica no puede ser determinada solamente por los multiplicadores. Análogamente con los puntos de equilibrio, las soluciones periódicas con ningún multiplicador característico dentro del círculo unitario se llaman *hiperbólicas*.

Se ha establecido que los eigenvalores de  $DP(x^*)$  son de especial interés, pero ¿cómo se puede calcular  $DP(x^*)$ ?

### 2.2.2.1 Multiplicadores Característicos para Sistemas no Autónomos.

En el caso no autónomo,  $P(x) = \phi_T(x, t_0)$  así que

$$DP(x^*) = D_{x_0} \phi_T(x^*, t_0) := \Phi_T(x^*, t_0) \quad (31)$$

donde  $\Phi_T(x^*, t_0)$  denota la derivada de  $\phi_T(x^*, t_0)$  con respecto a la condición inicial. (La notación  $D_{x_0}$  significa la derivada parcial con respecto a  $x_0$ .  $D_{x_0} \phi_T(x^*, t_0)$  es la matriz Jacobiano del  $n$ -vector  $\phi_T(x_0, t_0)$  con respecto al  $n$ -vector  $x_0$  evaluado en  $x_0 = x^*$ ).

$\Phi_T(x_0, t_0)$  es la solución de la *ecuación variacional*, la cual se puede definir formalmente diferenciando (2) con respecto a la condición inicial.

Primero, se sustituye  $\phi_1(x_0, t_0)$  por  $x$  en (2)

$$\phi_1'(x_0, t_0) = f(\phi_1(x_0, t_0), t)$$

$$f_{t_0}(x_0, t_0) = x_0 \quad (32)$$

y diferenciando con respecto a  $x_0$

$$D_{x_0} \phi_1'(x_0, t_0) = D_x f(\phi_1(x_0, t_0), t) D_{x_0} \phi_1(x_0, t_0)$$

$$D_{x_0} \phi_{t_0}(x_0, t_0) = 1 \quad (33a)$$

reescribiendo (33a) con la notación  $\Phi$  definida en (31):

$$\Phi_1'(x_0, t_0) = D_x f(\phi_1(x_0, t_0), t) \Phi_1(x_0, t_0)$$

$$\Phi_{t_0}(x_0, t_0) = 1 \quad (33b)$$

que se puede abreviar como:

$$\Phi' = D_x f(\phi_1(x_0, t_0), t) \Phi$$

$$\phi_0 = 1 \quad (33c)$$

Las ecuaciones (33) son diferentes formas de la ecuación variacional.

Comentarios:

i)  $D_x f(\phi_1(x_0, t_0), t)$  es una matriz variante en el tiempo y, en consecuencia, la ecuación variacional es un sistema lineal variante en el tiempo de orden  $n^2$ .

ii)  $\Phi_1(x_0, t_0)$  es la matriz de transición de estados del sistema

$$\delta x' = D_x f(\phi_1(x_0, t_0), t) \delta x$$

$$\delta x(t_0) = \delta x_0 \quad (34)$$

ésto es,  $\delta x(t) = \Phi_t(x_0, t_0)\delta x_0$ , aquí,  $\delta x$  se puede pensar como una pequeña perturbación de la condición inicial del sistema original (2). Luego,  $\Phi_t(x_0, t_0)$  gobierna la evolución en tiempo de las pequeñas perturbaciones:

$$\Phi_t(x_0 + \delta x, t_0) = \Phi_t(x_0, t_0) + \Phi_t(x_0, t_0)\delta x_0 \quad (35)$$

para  $t$  fijo y  $\delta x_0$  suficientemente pequeño. Esta interpretación tiene sentido puesto que  $\Phi$  está definida como la derivada de  $\phi_t(x_0, t_0)$  con respecto a la condición inicial.

iii) La ecuación variacional es la linealización del campo del vector a lo largo de una trayectoria específica  $\phi_t(x_0, t_0)$ . Si la trayectoria se altera cambiando  $x_0$  ó  $t_0$ , la ecuación variacional también cambia.

### 2.2.2.2 Multiplicadores Característicos para Sistemas Autónomos.

Encontrar una expresión para  $DP(x^*)$  es, generalmente, imposible por que no existe una expresión explícita para  $P$  en un sistema autónomo. Sin embargo, no nos interesa  $DP(x^*)$ ; lo que realmente se quiere son sus  $(n-1)$  valores propios. Los eigenvalores se pueden encontrar a partir de la ecuación variacional.

Para el caso autónomo la ecuación variacional es:

$$\Phi' = Df(\phi_t(x_0))\Phi \quad \Phi_0 = 1 \quad (36)$$

cuya solución es  $\Phi_t(x_0)$ . Se ha demostrado que los  $n$  eigenvalores de  $\Phi_T(x^*)$  son los  $(n-1)$  multiplicadores característicos junto con un eigenvalor que siempre es 1. El hecho de que este eigenvalor de  $\Phi_T(x^*)$  sea siempre igual a 1 para  $x^*$  en un ciclo límite se puede demostrar encontrando una perturbación  $\Delta x_0$  tal que  $\Delta x_0 = \Phi_T(x^*) \Delta x_0$ . Se escoge la perturbación tangente a  $\Phi_t(x^*)$ , ésto es,

---

1 Chua, L.O. & Parker T.S. (1987)

$\Delta x_0 = \epsilon f(x^*)$  para una  $\epsilon$  pequeña. Entonces  $x^* + \Delta x_0$  yace en el ciclo límite (de hecho,  $x^* + \Delta x_0 \equiv \Phi_\epsilon(x^*)$ ) y, luego, después de  $T$  segundos, la trayectoria perturbada regresará a  $x^* + \Delta x_0$ . Por lo tanto, la perturbación  $\Delta x_0$  mapea a  $\Delta x_0$  en  $T$  segundos, lo que implica que  $\Delta x_0 = \Phi_T(x^*)\Delta x_0$ .

### 2.2.2.3 Discusión.

Resumiendo, los multiplicadores característicos dan la cantidad de contracción o expansión por período cerca de una solución periódica. Los  $n$  multiplicadores característicos de una solución periódica para un sistema no-autónomo son los eigenvalores de  $\Phi_T(x^*, t_0)$ . En el caso autónomo, al menos uno de los eigenvalores de  $\Phi_T(x^*)$  es siempre igual a 1; los  $(n-1)$  eigenvalores restantes son los multiplicadores característicos del ciclo límite.

Las órbitas cerradas  $\{x^*_k\}_{k=1}^K$  del mapa de Poincaré con período  $K$  corresponden a subarmónicas de  $K$ -ésimo orden del sistema dinámico bajo estudio. Como  $x^*_1$  es un punto fijo del mapa de Poincaré doblado  $k$  veces  $PK$ , la estabilidad de las subarmónicas está determinada por  $DPK(x^*_1)$  que pueden encontrarse a partir de  $\Phi_{KT}(x^*_1, t_0)$  para el caso no-autónomo o de  $\Phi_{KT}(x^*_1)$  para el caso autónomo. Es arbitrario cual de los  $K$  puntos de la órbita cerrada sea llamado  $x^*_1$ , y se puede usar cualquiera de los  $\Phi_{KT}(x^*_k, t_0)$ ,  $k = 1, \dots, K$  para calcular los multiplicadores característicos.

Ahora se presenta un ejemplo diseñado para ilustrar que los multiplicadores característicos son una generalización de los eigenvalores en un punto de equilibrio. Se define  $x_{eq}$  como un punto de equilibrio de un sistema autónomo. Se escoge un período  $T > 0$ .  $x_{eq}$  puede ser tratado como un ciclo límite con período  $T$  (no mínimo). Para encontrar los multiplicadores característicos de este "ciclo límite" se necesita calcular  $\Phi_T(x_{eq})$ .  $\phi_T(x_{eq}) = x_{eq}$ , así que la ecuación variacional es:

$$\Phi' = Df(x_{eq})\Phi, \quad \Phi_0 = 1 \quad (37)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal variante en el tiempo con una matriz de transición de estados  $\Phi_1(x_{eq}) = e^{D(x_{eq})t}$ . Definamos los eigenvalores de  $Df(x_{eq})$  como  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ . Por el Teorema de Mapeo Espectral<sup>1</sup>, los  $\lambda_i$  y los multiplicadores característicos  $m_i$ , están relacionados mediante  $m_i = e^{\lambda_i T}$ . Como  $|m_i| < 1$  si y sólo si  $\text{Re}[\lambda_i] < 0$  y  $|m_i| > 1$  si y sólo si  $\text{Re}[\lambda_i] > 0$ ,  $m_i$  y  $\lambda_i$  dan la misma información acerca de la estabilidad del sistema.

---

<sup>1</sup> Desoer C.A. Notes for a Second Course on Linear Systems. New York, N.Y., van Nostrand Reinhold.(1970)



## 2.3 Exponentes de Lyapunov.

Los exponentes de Lyapunov son una generalización de los valores propios en un punto de equilibrio y de los multiplicadores característicos. Se utilizan para determinar la estabilidad de cualquier tipo de comportamiento en estado estable incluyendo soluciones casi-periódicas y caóticas.

Los exponentes de Lyapunov están definidos en términos de la solución de la ecuación variacional de la siguiente manera: se define  $\{m_i(t)\}_{i=1}^n$  como los valores propios o eigenvalores de  $\Phi_1(x_0)$ . Los exponentes de Lyapunov se definen como:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)| \quad (38)$$

donde  $i = 1, \dots, n$ , la cual es sólo válida si el límite existe.

Como ejemplo, se ven los exponentes de Lyapunov para un punto de equilibrio  $x_{eq}$ : sean  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  y  $\{\eta_i\}_{i=1}^n$  los eigenvalores y los eigenvectores de  $Df(x_{eq})$  respectivamente (generalmente se usa la letra  $\lambda$  indistintamente para denotar ya sea eigenvalores o exponentes de Lyapunov. En esta sección se usará  $\lambda_i$  para denotar los valores propios). Como se demostró en la sección anterior,  $\Phi_1(x_{eq}) = e^{Df(x_{eq})t}$ . Entonces  $m_i(t) = e^{\lambda_i t}$  y:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |e^{\lambda_i t}| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \operatorname{Re}[\lambda_i'(t)] = \operatorname{Re}[\lambda_i'(t)] \end{aligned} \quad (39)$$

Por lo tanto, en este caso especial, los exponentes de Lyapunov son iguales a las partes reales de los valores propios en un punto de equilibrio e

Indican la contracción ( $\lambda_i < 0$ ) o expansión ( $\lambda_i > 0$ ) cerca del punto de equilibrio.

Se supone que  $x_0 \neq x_{eq}$ , pero  $\Phi_T(x_0) \rightarrow x_{eq}$  mientras  $t \rightarrow \infty$ , ésto es,  $x_0$  está en la cuenca de atracción de  $x_{eq}$ . Como los exponentes de Lyapunov están definidos en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , cualquier transitorio finito puede ser despreciado, y así, los exponentes de Lyapunov de  $x_0$  y de  $x_{eq}$  son idénticos. En general, cualquier punto en la cuenca de atracción de un atractor tiene los exponentes de Lyapunov que el atractor.

De la misma manera se puede demostrar que los exponentes de Lyapunov  $\lambda_i$  para un ciclo límite están relacionados con los  $(n-1)$  multiplicadores característicos:

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln |m_i(t)|$$

para  $i = 1, \dots, n-1$ . Un exponente de Lyapunov  $\lambda_i$  es siempre igual a cero. Este corresponde al valor propio de  $\Phi_T(x^*)$  que es siempre 1.

Así como demuestran los ejemplos de punto de equilibrio y ciclo límite,  $\lambda_i$  es la tasa promedio de contracción ( $\lambda_i < 0$ ) o de expansión ( $\lambda_i > 0$ ) en una dirección particular cerca de una trayectoria particular. ¿Qué significa en una "dirección particular"? Se ordenan los  $\lambda_i$  tal que  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Usando este ordenamiento existen  $n$  subespacios lineales,  $W_1 \supset \dots \supset W_n$ , con dimensiones  $\dim W_1 = n$ ,  $\dim W_2 = n-1, \dots, \dim W_n = 1$ , tales que casi todas las perturbaciones en  $W_i$  evolucionen como  $e^{\lambda_i t}$ .

Como un ejemplo, se considera un sistema lineal de tercer orden con un punto de equilibrio en el origen, eigenvalores  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ , y eigenvectores correspondientes  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ . Como los eigenvalores son reales, son iguales a los exponentes de Lyapunov.  $W_3 = \text{span}\{\eta_3\}$  y todas las condiciones iniciales  $x_0 \in W_3$  evolucionan como  $x_0 e^{\lambda_3 t}$ .  $W_2 = \text{span}\{\eta_2, \eta_3\}$  y todas las condiciones iniciales  $x_0 \in W_2 \setminus W_3$  evolucionan como  $C_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \eta_3 e^{\lambda_3 t}$ . Como  $\lambda_2 > \lambda_3$  el

término  $\lambda_3$  es despreciable después de un tiempo finito y, mientras  $t \rightarrow \infty$ , la trayectoria evoluciona como  $e^{\lambda_1 t}$ .  $W_1 = \text{span} \{ \eta_1, \eta_2, \eta_3 \}$  y cualquier  $x_0 \in W_1$  eventualmente evoluciona como  $e^{\lambda_1 t}$ . En el caso no-lineal, es claro que se debe hablar de una perturbación infinitesimal que evoluciona en promedio como  $e^{\lambda_1 t}$  o, equivalente, de una solución del sistema linealizado (34) que evoluciona en promedio como  $e^{\lambda_1 t}$ .

La comprobación de que un multiplicador característico de un ciclo límite es siempre igual a 1 se puede generalizar para demostrar que cualquier atractor limitado de un sistema autónomo, excepto para un punto de equilibrio, un exponente de Lyapunov es siempre cero<sup>1</sup>.

Es conveniente utilizar los exponentes de Lyapunov para categorizar el comportamiento en estado estable. Para un atractor, la contracción debe ser mayor que la expansión, así que:

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i < 0$$

Los atractores se clasifican de la siguiente manera. Para puntos de equilibrio estables,  $\lambda_i < 0$  para toda  $i$ . Para ciclos límite estables,  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_i < 0$  para  $i = 2, \dots, n$ . Para toroides estables (torus),  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  y  $\lambda_i < 0$  para  $i=3, \dots, n$ .

Una de las características de caos es la sensibilidad a condiciones iniciales. Como se explicó en secciones anteriores, la sensibilidad a condiciones iniciales sucede para un flujo que se expande. Por lo tanto, lo que distingue a un atractor extraño de otros tipos de atractor es la existencia de al menos un exponente de Lyapunov positivo. En el caso de tres dimensiones, tomando en cuenta que  $\sum \lambda_i < 0$ , la única posibilidad para los exponentes de Lyapunov un atractor extraño es  $(+ 0 -)$ , ésto es,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ . En sistemas de cuatro dimensiones se pueden dar dos casos:  $(+ 0 - -)$  y  $(+ + 0 -)$ . no se han observado casos de tipo  $(+ 0 0 -)$ . El esquema de clasificación se resume en la siguiente tabla:

---

<sup>1</sup> Haken H. (1983)

ESTADO ESTABLE	FLUJO	MAPA DE POINCARÉ	EXPONENTES DE LYAPUNOV	DIMENSIÓN
Punto de Equilibrio	Punto	-----	$0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n$	0
Periódico	Curva Cerrada	Punto	$\lambda_1 = 0$ $0 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$	1
Bi-periódico	Toroide	Curva Cerrada	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $0 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n$	2
K-Periódico	K-Toroide	(K-1)-Toroide	$\lambda_1 = \dots = \lambda_{K-1} = 0$ $0 > \lambda_K > \dots > \lambda_n$	K
Caótico	Tipo Cantor	Tipo Cantor	$\lambda_1 > 0$ $\sum \lambda_i < 0$	No Entera

Como se observa en la tabla anterior, la dimensión de un Atractor Caótico es no entera. Esta es una característica típica de este tipo de atractores. A continuación se mencionará brevemente a qué se refiere una dimensión no entera.

Los atractores caóticos se pueden clasificar el concepto de dimensión. Un atractor puede definirse como n-dimensional si<sup>1</sup>, en la vecindad de cada punto, parece un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Por ejemplo, un ciclo límite es unidimensional porque parece un intervalo localmente. Un toroide es bidimensional porque localmente se asemeja a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Un punto de equilibrio es considerado de dimensión cero. El vecindario de cualquier punto de un atractor extraño, sin embargo, tiene una fina estructura (véase figura 11) y no se asemeja a ningún espacio Euclidiano. De tal forma que los atractores extraños no son variedades y no tienen dimensión entera. Existen varias formas de generalizar la dimensión para el caso fraccionario de las cuales se presenta solamente una: la Dimensión de Hausdorff o Dimensión de Capacidad.

El volumen del espacio de fase en un sistema disipativo se contrae en el proceso de evolución y el movimiento está confinado a cierto atractor en el límite

<sup>1</sup> Así es como se define la dimensión de una variedad en la geometría diferencial.

cuando  $t \rightarrow \infty$ . La dimensión  $D$  del atractor es menor que la dimensión  $N$  del espacio de fase original. Utilizando cualquier definición razonable de dimensión, se puede calcular fácilmente que la dimensión de los atractores triviales es entera:  $D = 0$  para puntos fijos,  $D = 1$  para ciclos límite,  $D = 2$  para un toroide de dos ciclos (2-toroide ó toroide-2), etc. De cualquier forma se ha encontrado que la dimensión de atractores extraños es un valor fraccionario.

Hausdorff introdujo una definición generalizada de dimensión en 1919. Esto puede ser explicado de la siguiente manera. Tomemos un objeto geoméricamente regular, digamos un cubo, doblemos su tamaño lineal en cada dirección en el espacio. Tendremos un cubo cuyo volumen es 8 veces mayor que el cubo original, porque  $2^3 = 8$ . En general si tomamos un objeto de dimensión  $D$  e incrementando en su tamaño lineal en cada dirección espacial  $L$  veces, tendremos este volumen incrementado a  $k = L^D$  veces del original. Invertiendo esta relación simple tendremos una nueva definición para la dimensión:

$$D = \frac{\ln K}{\ln L} \quad (40)$$

Una definición precisa de la dimensión de Hausdorff requiere el conocimiento de la medida de Hausdorff  $z$ , pero la expresión (40) es suficiente para nuestras necesidades prácticas. Empezaremos con el ejemplo más simple de un objeto geométrico que tiene una dimensión no entera: el conjunto de Cantor (Figura 14).

---

<sup>2</sup> Mandelbrot B. B. Fractals, Forms, Chance and Dimension (1977)

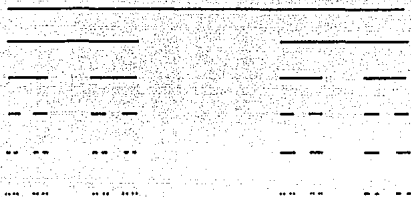


FIG. 14 El Conjunto de Cantor

Se toma el intervalo  $(0,1)$  y se elimina el tercio central  $(1/3,2/3)$ , se repite la operación para los segmentos resultantes una y otra vez *ad infinitum*, se considera el conjunto de puntos del segmento izquierdo  $(0,1/3)$ , incrementando su tamaño lineal en un factor  $L=3$ , se tendrán dos copias ( $k=2$ ) del mismo objeto, entonces:

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309... \quad (39)$$

De hecho, muchos atractores extraños tienen una estructura del tipo del conjunto de Cantor.

Se pueden resumir las características de un atractor caótico, (comúnmente llamado también Atractor Extraño) como:

- i) Es un objeto geométrico, en el espacio de estado del sistema, cuya dimensión es fraccionaria (Fractal).
- ii) El mapa de Poincaré de un sistema caótico también es fractal.
- iii) El sistema es extremadamente sensible a condiciones iniciales.

## 2.4 Métodos Numéricos.

Antes de llegar a lo que son los métodos numéricos. Haré una observación en contra del estudio numérico de caos usando computadoras digitales. El punto es que se trabaja con un campo finito de números racionales representable en una computadora digital mediante una longitud palabra que es finito, es imposible realizar aún procesos casi-periódicos verdaderos sin mencionar órbitas caóticas. Esto se puede solucionar. Los números irracionales pueden ser aproximados por números racionales, las regiones caóticas están rodeadas por regímenes periódicos. La estrategia en el estudio de caos con computadora consiste en aprovechar la máxima longitud de palabra disponible de la máquina, es decir, cómo alcanzar resoluciones de alta frecuencia en experimentos numéricos.

En algunas ocasiones es útil obtener las proyecciones de una trayectoria en espacios de menor dimensión. Los mapas de Poincaré que son los puntos de intersección de una trayectoria dada con una superficie fija en el espacio de estado, ofrecen un medio efectivo para explorar la naturaleza del movimiento. Un problema práctico consiste en comparar la precisión del esquema de interpolación usado para localizar el punto de intersección con aquél que da el algoritmo de integración.

El objetivo de esta tesis no es hacer un análisis exhaustivo de los diferentes métodos numéricos existentes (para ésto se puede consultar alguna de las referencias citadas en la bibliografía con respecto al tema). Aquí solo se presentan las diferentes opciones para simular un Sistema no-lineal en una computadora personal, con el mínimo de requerimientos de software.

Las simulaciones presentadas en este trabajo fueron desarrolladas en diferentes simuladores, de los cuales haré una breve descripción.

## SIMCAOS

Este simulador fue desarrollado en la Universidad La Salle por el Sr. José Carlos Ángeles Fernández, estudiante de la Carrera de Ingeniería Cibernética y en Sistemas Computacionales de la ULSA y por el autor de esta tesis. Consta de dos programas: FUNC: este programa auxiliar se encarga de convertir un archivo ASCII que contiene el modelo matemático del sistema, en otro archivo que pueda ser enlazado y compilado por el compilador de Borland C++®. El programa principal, SIMCAOS, se encarga de hacer la simulación. Algunas de las características de este simulador son:

### Características Generales.

- i) Máxima precisión en los cálculos, usando la máxima longitud de palabra permitida por el compilador de Borland C++®.
- ii) Interfaz sencilla y amigable.
- iii) Variación de cualquiera de los parámetros del sistema que se esté analizando.
- iv) Eliminación de estados transitorios.
- v) Amplificación de secciones de la gráfica desplegada en pantalla.
- vi) Cursor de coordenadas.
- vii) Resolución VGA estándar (640X480 pixels en 16 colores)
- viii) Opción de gráficas en blanco y negro para impresión
- ix) No se necesita una computadora de gran capacidad para ejecutar el programa, es suficiente una PC con procesador 80286, no requiere coprocesador matemático aunque se recomienda.

### Gráficas y Diagramas.

- i) Trayectoria de solución en tiempo
- ii) Diagramas de Bifurcación
- iii) Mapas de Poincaré
- iv) Desplegado en pantalla de Atractores Caóticos en dos y tres dimensiones.
- v) Rotación de gráficas en tres dimensiones.
- vii) El método de integración es seleccionado por el usuario



### SIMNON™. (Simulator Language for Non-Linear Systems)

Este programa fue desarrollado en el Departamento de Control Automático en el Instituto Tecnológico de Lund, Suecia por Karl Åström y cols. En este programa se pueden simular sistemas tanto lineales como no lineales, expresados en términos de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. No es tan flexible como el SIMCAOS. No es posible obtener diagramas de Bifurcación, ni tampoco es posible obtener gráficas tridimensionales del atractor, ni Mapas de Poincaré. Requiere de coprocesador matemático o de un emulador para poder ejecutarse.

### SIGSYS ( A Signals & Systems Interpreter)

Fue desarrollado por Kwakernaak y cols. en la Universidad de Twente en el Departamento de Matemáticas Aplicadas. Este programa está enfocado al análisis de señales, por lo que es posible hacer análisis tanto en tiempo como en frecuencia de una señal, además de tener una gran variedad de comandos para el análisis como convolución en tiempo, convolución en frecuencia, Transformada Rápida de Fourier (FFT), integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Todos los programas anteriores son útiles en la simulación del comportamiento dinámico de un sistema físico. Estos se complementan entre sí. Existen otros programas como el Mathematica® pero no son de propósito específico como los mencionados aquí.

Quiero terminar este capítulo aclarando que el análisis numérico no sustituye al análisis formal del sistema. Para la mayoría de los sistemas no lineales no se tienen soluciones analíticas, por lo que se hacen análisis de estabilidad y otros tipos de análisis, para comprender y estudiar la naturaleza de su comportamiento, y en algunos casos su controlabilidad<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Isidori A., NonLinear Control Systems, Springer-Verlag, 1985

### **3 Bifurcaciones y caos en circuitos eléctricos y electrónicos no lineales.**

Los más completos y bellos resultados en caos han sido obtenidos en circuitos no-lineales, porque las condiciones experimentales pueden ser manipuladas con cierta precisión y los circuitos pueden ser representados por ecuaciones diferenciales ordinarias con muy pocas variables.

Son muchos y muy variados los experimentos desarrollados en electrónica que presentan comportamiento caótico. En el presente trabajo se muestran algunos de ellos representativos de los diferentes caminos que toma este fenómeno para mostrarse. Estos circuitos son relativamente sencillos y fáciles de construir. Se desarrollaron enteramente en la Universidad La Salle con equipo de la Universidad y material comprado. De entre los objetivos de este trabajo y los propósitos de la presente tesis, el más importante es demostrar que en México, y en particular en nuestra Universidad se pueden realizar investigaciones y proyectos a nivel nacional e internacional de primera línea.

La idea del trabajo es demostrar que existe comportamiento caótico en circuitos relativamente sencillos en los que se tienen respuestas aparentemente aleatorias, es decir, respuestas que tienen un espectro continuo en frecuencia, junto con otras características que se han mencionado anteriormente y se analizarán para cada caso particular estudiado para esta tesis y que, debido al relativamente reciente descubrimiento de este fenómeno no se estudia en los cursos tradicionales de Ecuaciones Diferenciales, Dinámica de Sistemas Físicos, Control Analógico, Análisis de Sistemas Discretos o Matemáticas Avanzadas, sin contar los cursos de Análisis de Circuitos Eléctricos o Electrónica Analógica. Dichos cursos se restringen al estudio de sistemas lineales que se comportan de manera predecible, es decir, conociendo la dinámica del sistema y sus condiciones iniciales se puede conocer la respuesta futura del sistema a largo plazo y el conocimiento de estas condiciones iniciales no requiere de excesiva precisión como para los sistemas no lineales que presentan comportamiento caótico, en los cuales es necesario medir con extremada precisión estas condiciones iniciales debido a la sensibilidad a estas condiciones explicada en capítulos anteriores, obtener condiciones iniciales con infinita precisión generalmente es casi imposible.

### **3.1 Caos en un Sistema Discreto Unidimensional.**

#### **3.1.1 Introducción.**

Dentro de la ciencia contemporánea, uno de los descubrimientos más importantes es el fenómeno caótico, entendiéndose por éste un fenómeno que presenta una organización matemática diferente, es decir, son fenómenos no desordenados. A principios de siglo se desarrollaron técnicas matemáticas que nos permiten analizar este tipo de sistemas (exponentes de Lyapunov, mapas de Poincaré). A menudo, la aplicación de estas técnicas se dificulta por el grado de complejidad matemática de las mismas. En este trabajo se implementó tanto electrónicamente como computacionalmente, una familia de ecuaciones cuyo comportamiento, bajo ciertas condiciones, es caótico. Estas simulaciones nos permiten analizar de una manera más sencilla este tipo de comportamiento. En esta implementación en particular se puede realizar un estudio paramétrico de estas ecuaciones, es decir, nos permite también analizar las transiciones de estado que presenta el sistema, desde que presenta comportamiento periódico, casi-periódico hasta que llega a ser caótico.

Este sistema presenta comportamiento caótico vía bifurcaciones sucesivas y duplicación de periodo (period doubling). La idea central del diseño y desarrollo del circuito se llevó a cabo en la Universidad La Salle y consiste en modelar electrónicamente una ecuación en diferencias que describe el comportamiento de una población y simular dicho comportamiento por medio de una computadora personal. Este sistema está inspirado en el modelo de R. May (1976).

### 3.1.2 Descripción del problema.

El fenómeno de caos se ha encontrado en sistemas que pueden ser descritos mediante ecuaciones diferenciales o en diferencias no lineales. En este trabajo se construyó un circuito electrónico y se realizó una simulación en computadora para el análisis paramétrico la siguiente ecuación en diferencias que presenta un ordenamiento matemático superior:

$$x_{n+1} = 1 - Ax_n^2 \quad (40)$$

donde:  $x_n$  es una variable discreta y  
 $A$  es una constante

El circuito representa la evolución en tiempo de las variables gobernadas por la ecuación (40). Con ayuda de un osciloscopio se pueden observar diferentes estados del sistema.

### 3.1.3 Análisis Matemático.

La ecuación (40) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = f^n(A, x_0) \quad (41)$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$  donde  $f^n$  es la  $n$ -ésima iteración (no derivada) de  $f$  y algunas veces es útil tener otra notación específica para ésta:

$$F(n, A, x) \equiv f^n(A, x) \equiv f(A, f(A, \dots f(A, x) \dots)) \quad (42)$$

$n$  veces.

Para este caso:

- i) El máximo está localizado en  $x = 0$ ,
- ii)  $f(A,x)$  es monótonamente creciente en  $x < 0$  y monótonamente decreciente cuando  $x > 0$ .

En este caso el intervalo cerrado  $I = [-1, 1]$  y  $A \in (0,2)$ . Se observa que aún cuando  $x$  puede tener valores en todo el intervalo  $I$ ,  $f(A,x)$  no necesariamente abarca el intervalo  $I$ , de ahí el nombre de endomorfismo (endo=interno) en el intervalo.

Regresando a la secuencia  $\{x_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$ , a menudo, después de algunos puntos transitorios, se establece en uno de dos tipos de patrones estacionarios: periódicos o no periódicos. Un patrón periódico de período  $p$ :  $x_{i+p} = x_i$ ,  $x_{i+k} \neq x_i$  para toda  $k < p$ , es también llamado órbita de período  $p$  o ciclo- $p$  para el mapeo  $f$ . A continuación se asume que los transitorios han sido eliminados. El caso particular  $p=1$  corresponde a un punto fijo para  $f$ :

$$x^* = f(A, x^*)$$

Por definición, todos los puntos de un ciclo- $p$  de  $f$  deben ser puntos fijos de la  $p$ -ésima iteración de  $f$ . Esto es:

$$x_i = F(p, A, x_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Es importante analizar la estabilidad de los puntos fijos, ésto es, si  $x_n$  se elige muy cerca al punto fijo  $x^*$ :

$$x_n = x^* + \epsilon_n$$

¿qué pasará con la siguiente iteración?

$$x_{n+1} = x^* + \epsilon_{n+1}$$

Si:

$$|\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n| < 1 \quad (43)$$

decimos que el punto fijo  $x^*$  es estable. La condición de estabilidad (43) es equivalente a decir que

$$|f'(A, x^*)| < 1 \quad (44)$$

De manera similar, un ciclo-p es estable si:

$$|F'(p, A, x_j)| = \left| \prod f'(A, x_j) \right| < 1 \quad (45)$$

donde  $j = 1, 2, \dots, p$  y se ha usado la regla de la cadena para la diferenciación.

El caso más favorable para la estabilidad aparece cuando:

$$F'(p, A, x_i) = 0 \quad (46)$$

para  $i = 1, 2, \dots, p$ ; entonces se tiene convergencia cuadrática hacia ese punto fijo. La condición de estabilidad (43) se cumple sólo para un valor particular  $A'$  en algún lugar dentro de una ventana periódica. Este valor de  $A'$  corresponde a un período superestable, que es representativo de todos los ciclos-p de la misma ventana periódica. Con estas convenciones para  $f$  podemos decir que cualquier ciclo que contiene el punto  $x=0$  puede ser superestable, partiendo de que  $f'(A, 0) = 0$  conduce a que  $F'(p, A, 0) = 0$  para toda  $p$ . Esto da una idea para determinar el valor superestable  $A'$ , resolviendo la ecuación de punto fijo  $F'(p, A, 0) = 0$ . Pero se debe mencionar un mejor método. Se puede con una calculadora las primeras ventanas periódicas del mapa logístico:

$p=1$	$0 < A < A_1 = 0.75$
$p=2$	$A_1 < A < A_2 = 1.25$
$p=4=2^2$	$A_2 < A < A_3 = 1.3680989 \dots$
$p=8=2^3$	$A_3 < A < A_4 = 1.3940461 \dots$
...	...

Esta es una "cascada" de bifurcaciones de periodo-2 con período  $p = 2^n$ , la cual converge rápidamente a una órbita aperiódica cuando  $n \rightarrow \infty$ , el valor de  $A_\infty = 1.401155\dots$  se puede aproximar a una serie geométrica de la forma:

$$A_n \equiv A_\infty - A/\delta^n, \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (47)$$

donde  $\delta = 4.66920\dots$  es una constante universal que fue primeramente descubierta por M. J. Feigenbaum<sup>1</sup>.

Lo que sucede cuando  $A$  es mas grande es que  $A_\infty$  es más interesante desde el punto de vista de caos. En el rango del parámetro ( $A_\infty, 2$ ) existe un número infinito de ventanas periódicas inmersas en el régimen caótico.

Si se examina más cuidadosamente la distribución de puntos en el régimen aperiódico, entonces se puede observar que las iteraciones que aparecen entre los subintervalos  $2^n$  (islas) del intervalo  $I$  con  $n$  decreciendo desde infinito hasta cero, entonces  $A$  va desde  $A_\infty$  hasta 2. Esto también se llama "reversión" o secuencias de período-mitad de las bandas caóticas, que se parece a una imagen de espejo de una secuencia de bifurcaciones de periodo-2 directa con respecto a  $A_\infty$ . Esta estructura global puede ser vista del diagrama de bifurcaciones obtenido graficando algunos cientos de respuestas estacionarias de la iteración del mapa descrito en (40) contra el parámetro  $A$ .

Si lo descrito antes se restringe solamente a un mapeo específico como (40), entonces tendríamos un caso particular. Sin embargo, este tipo de estructura de bifurcación con sus características numéricas universales, como la constante de Feigenbaum, aparece cada vez más en modelos matemáticos no lineales y en experimentos reales.

---

<sup>1</sup> Feigenbaum, M. J. 1978

### 3.1.4 Descripción del circuito.

A continuación se presenta un diagrama a bloques del sistema:

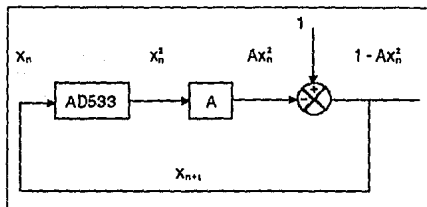


FIG. 15 Diagrama a bloques del circuito

Para el bloque se utiliza un multiplicador analógico AD533 para elevar la señal al cuadrado. El voltaje de salida del multiplicador es proporcional a  $X_n^2$  y es introducido a amplificadores operacionales para efectuar las operaciones que requieren las ecuaciones del sistema, obteniendo así un voltaje proporcional a  $X_n$ .

El valor de A puede ser variado de 0 a 2 mediante resistencias variables. El voltaje de salida  $X_{n+1}$  es retroalimentado al multiplicador como  $X_n$ , pasando a través de dos sample-and-hold LM398 que son disparados por pulsos para producir el retardo necesario de la señal y permitir la su retroalimentación. Estos pulsos son proporcionados al sistema mediante un circuito de base de tiempos. Esta parte del circuito compuesta por un temporizador 555 y dos flip-flops J-K, trabaja a dos velocidades 5 KHz (rápida) y 5 Hz (lenta), ésta última es utilizada para observar la sucesión de puntos en el osciloscopio. La salida del circuito son dos pulsos, uno de ellos retrasado la mitad del período con respecto al otro con el fin de proveer un retardo en la señal  $X_n$  y poder calcular el nuevo valor de la variable. El diagrama electrónico para el bloque se muestra en la siguiente figura:



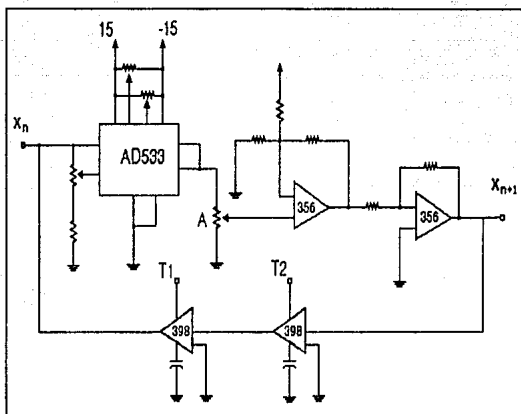


FIG. 16 Diagrama electrónico para la simulación de (40)

En la figura (17) se muestra el diagrama electrónico de la base de tiempos:

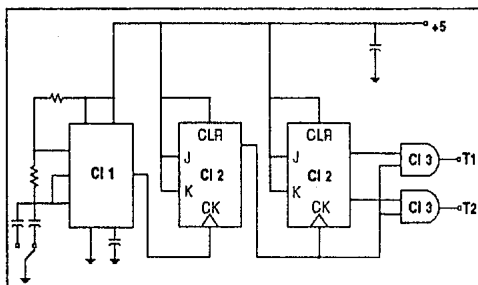


FIG. 17 Diagrama electrónico para la base de tiempos.

### 3.1.5 Análisis de la respuesta.

El mapa de la función se puede observar en el osciloscopio conectando las salidas  $X_n$  y  $X_{n+1}$  a los canales X y Y del mismo.

Cuando se incrementa el valor del parámetro A, la respuesta del sistema empieza a tomar alternadamente dos valores en tiempo, este fenómeno se conoce como bifurcación de período-2. Al incrementar aún más el valor de este parámetro el sistema presenta bifurcaciones sucesivas. Para un aumento mayor de A, la respuesta del sistema empieza a ser no periódica y posteriormente caótica, presentando estados de período-3. Las bifurcaciones sucesivas y el estado de período-3 son representativos del fenómeno de caos. A continuación se muestra la respuesta del sistema en osciloscopio para los diferentes valores de A tanto en tiempo como en el mapa de la función.

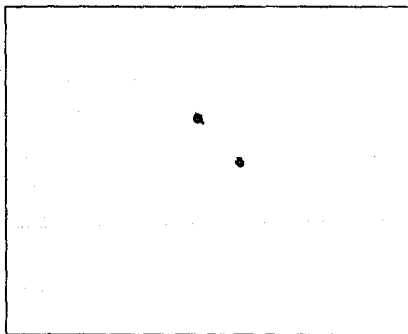


FIG. 18 Oscilograma de  $X_{n+1}$  en el eje horizontal contra  $X_n$  en el eje vertical. Período-2

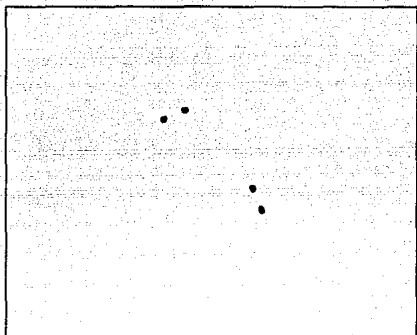


FIG. 19 Oscilograma de  $X_{n+1}$  en el eje horizontal contra  $X_n$  en el eje vertical. Período-4

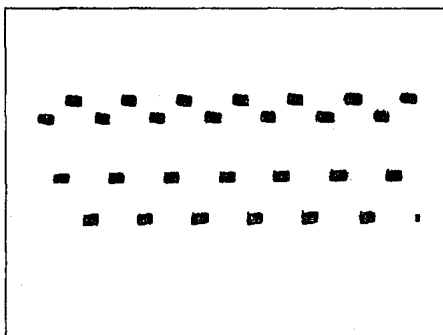


FIG. 20 Oscilograma de tiempo para señal de período-4

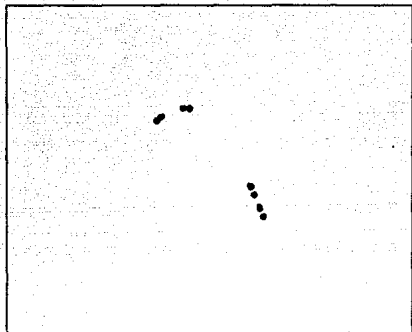


FIG. 21 Oscilograma de  $X_{n+1}$  en el eje horizontal contra  $X_n$  en el eje vertical. Período-8

Se ha demostrado<sup>1</sup> que si un sistema muestra una señal de período-3, éste es caótico pues implica que existen señales con todas las frecuencias.

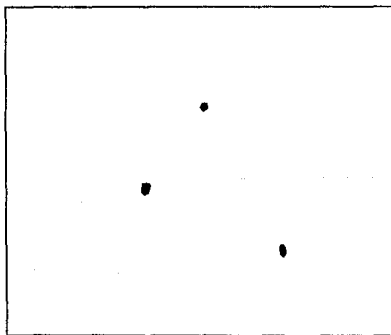


FIG. 22 Oscilograma de  $X_{n+1}$  en el eje horizontal contra  $X_n$  en el eje vertical. Período-3.

<sup>1</sup> Li & Yorke, 1975. Period-3 Implies Chaos.

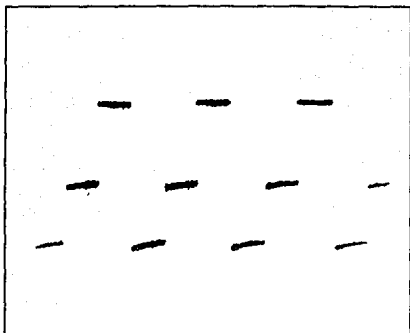


FIG. 23 Oscilograma de tiempo para una señal de período-3

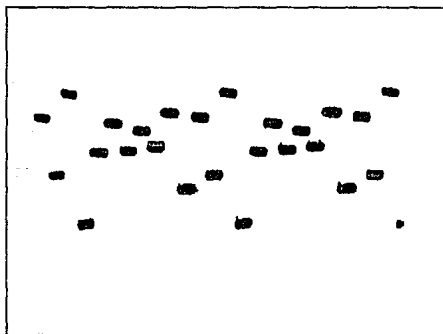


FIG. 24 Oscilograma de tiempo para una señal de período-11

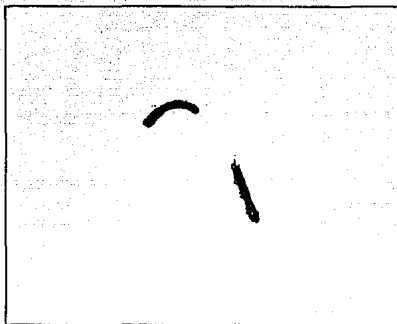


FIG. 25 Oscilograma de  $X_{n+1}$  en el eje horizontal contra  $X_n$  en el eje vertical para  $A = 1.5$

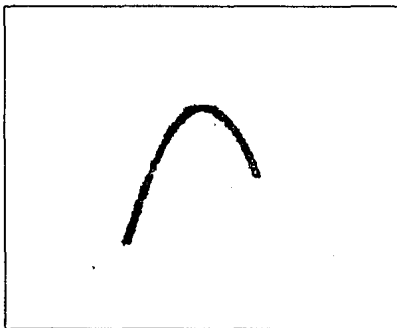


FIG. 26 Oscilograma de  $X_{n+1}$  en el eje horizontal contra  $X_n$  en el eje vertical para  $A = 1.9$ : Caos

## Bifurcaciones.

Para un análisis más completo de la respuesta se requiere del mapa de bifurcaciones, este mapa requiere de cálculos que serían casi imposibles de realizar sin la ayuda de una computadora, en nuestro laboratorio se desarrolló un programa para simulación en lenguaje C que nos permite obtener este diagrama de bifurcaciones<sup>1</sup>. Este diagrama nos permite observar de una manera más clara para qué valores de los parámetros la respuesta del sistema es periódica de período-2, período-3, o es caótica.

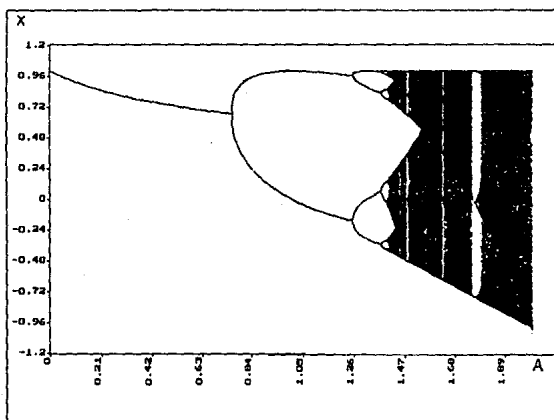


FIG. 27 Diagrama de Bifurcaciones

En este mapa o diagrama de bifurcaciones podemos observar los valores que toma la variable a través de la simulación para diferentes valores del parámetro A. Se observan aquí bifurcaciones de período-2, bifurcaciones sucesivas, crisis de los atractores, bifurcaciones tangentes, situaciones de

<sup>1</sup> J.C. Angeles Fernández, Graficador de Sistemas Caóticos, XXXIV Congreso Nacional de Física, México D.F. (1991)

período-3, situaciones de período diferente de  $2n$ , ventanas periódicas y comportamiento caótico.

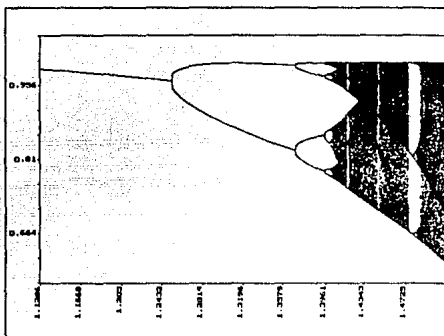


FIG. 28 Ampliación de una región del Mapa de Bifurcaciones: Estructura Fractal

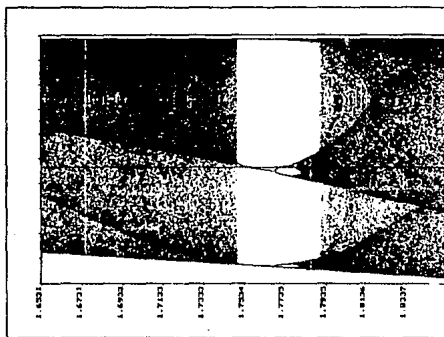


FIG. 29 Ventana Periódica de período-3 y Bifurcación tangente.

El análisis numérico permite fácilmente observar no solo el mapa de  $X_n$  contra  $X_{n+1}$  sino también los mapas de  $X_n$  contra  $X_{n+k}$  para valores enteros de  $k$ .



Todos estos mapas dan información acerca de para qué valores de  $A$  tenemos, por ejemplo, bifurcaciones tangentes, ventanas periódicas de período- $n$ .

La ventaja de este tipo de implementación es significativa ya que se puede visualizar de una manera sencilla y práctica el comportamiento caótico, así como manipular directamente los parámetros del sistema, a fin de analizar experimentalmente las condiciones bajo las cuales este sistema de ecuaciones tiene un orden superior, paradójicamente llamado caos. La simulación, tanto electrónica como computacional de dicho sistema nos permite, usando técnicas más sencillas, analizar y entender este fenómeno.

## 3.2 Sincronización y Caos en un Oscilador Electrónico No-Lineal

### 3.2.1 Introducción

El fenómeno de sincronización ha sido ampliamente usado en electrónica (televisores, radares, osciloscopios, relojes electrónicos). En general una pequeña señal periódica de sincronización con un período dado es usada para manejar un sistema que puede producir una señal más grande con período de un valor cercano al de la pequeña señal de tal forma que la señal controlada se ajuste al período de la pequeña señal (o a algún múltiplo o submúltiplo de ésta).

Existen muchos mecanismos posibles para esto, pero el más común en Teoría de Circuitos Eléctricos es el mecanismo de umbral, en el cual, el sistema controlado produce una salida que depende de que se alcance o no un cierto nivel llamado de umbral. En este caso la señal de sincronización actúa causando que el nivel de umbral se alcance en un tiempo controlado.

Una sincronización exitosa depende de las relaciones apropiadas entre los niveles de la señal y de otros parámetros y del sistema a sincronizar. Cuando los parámetros están fuera de cierto rango, el sistema no está sincronizado y la salida no es periódica.

Para una amplia clase de sistemas que podemos analizar en detalle, la salida muestra características que son normalmente descritas como caos. Es decir que las soluciones son no-periódicas, inestables bajo cierto rango, la señal exhibe un amplio espectro, caso continuo, y el sistema es hipersensible a cambios pequeños en las condiciones iniciales; esto es que dos estados iniciales, muy cercanos uno del otro, presentan trayectorias de solución que divergen a largo plazo hasta llegar a no tener correlación alguna. En este trabajo, se presenta y analiza, tanto electrónica como computacionalmente un sistema caótico sincronizado por una señal de otro. Aunque estos sistemas son independientes entre sí, y sus comportamientos no se correlacionan, es posible, bajo ciertas condiciones, sincronizar un subsistema de un sistema caótico, con otro sistema caótico independiente, enviando una señal del sistema caótico al subsistema. La sincronización se lleva a cabo utilizando un generador de caos con un oscilador inestable de segundo orden y un elemento de histéresis.

### 3.2.2 Descripción del problema

Caos se ha descrito como una situación en la que un sistema pierde sincronización consigo mismo, resultando en un complejo movimiento aperiódico. Si dos sistemas caóticos independientes tienen las mismas condiciones iniciales, cualquier pequeña diferencia en estas condiciones crecerá hasta que las soluciones sean totalmente diferentes. Sin embargo es posible sincronizar dos sistemas no lineales, a pesar de su comportamiento caótico si son sincronizadas con una señal apropiada. En este trabajo se muestra una forma de sincronizar un subsistema de un sistema caótico, con una señal de éste último, de tal manera que las señales correspondientes de los dos sistemas sean idénticas. Se construyó un generador de caos sencillo basado en un circuito desarrollado por Newcomb y Sathian<sup>1</sup>.

### 3.2.3 Descripción del circuito

El circuito electrónico se muestra en la figura 29. Este circuito contiene un oscilador inestable de segundo orden que oscila a menos de 1KHz. El oscilador se conecta a un elemento de histéresis. La salida del elemento de histéresis provee la polarización que mueve el origen de un valor positivo a negativo para tener oscilaciones inestables. La amplitud de estas oscilaciones crecerá hasta que el voltaje  $X_1$  alcance la región de cambio del elemento de histéresis. Esto cambia el signo de la salida del elemento de histéresis moviendo el centro de la oscilación a un nuevo punto y manteniendo acotado el voltaje  $X_1$ . Una vez que este punto central ha sido movido, el valor del voltaje  $X_1$  empieza a aumentar repitiendo el proceso. La histéresis añade el tercer grado de libertad.

---

<sup>1</sup> Newcomb, R.W. & Sathian S. "An RC op amp Chaos Generator". IEEE Transactions on Circuits and Systems. vol. CAS-30, 1983.

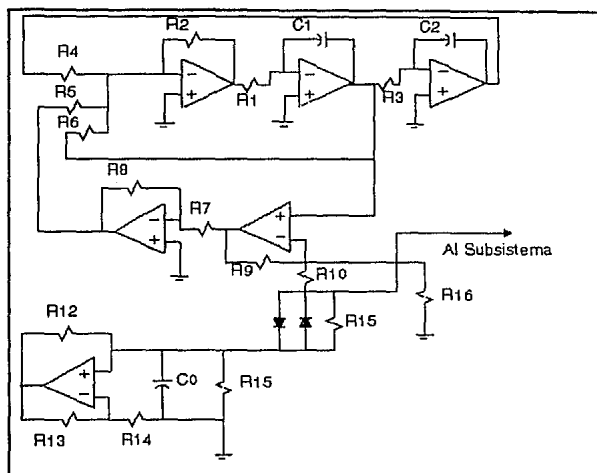


FIG. 30 Oscilador No-Lineal con Histéresis

El circuito se puede modelar mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma x_1 + c x_3$$

$$\dot{x}_2 = -\omega x_1 + \delta_2 x_2$$

$$\epsilon \dot{x}_3 = (1 - x_3^2)(S x_1 - D + x_3) - \delta_3 x_3$$

donde  $\gamma = R_2 / R_6$ ,  $c = R_2 / R_5$ ,  $\omega = R_1 C_1 / R_2 C_3$ ,  $\delta_2$  y  $\delta_3$  son parámetros de amortiguamiento que modelan las pérdidas en el sistema.

Las ecuaciones para  $X_1$  y  $X_2$  modelan el oscilador inestable de segundo orden de la parte superior del circuito mostrado en la figura anterior. La ecuación para  $X_3$  está basada en una función usada por Rössler para modelar

histéresis<sup>1</sup>. El voltaje  $X_3$  presenta histéresis dependiendo del voltaje  $X_1$ . La constante  $\epsilon$  es un valor pequeño lo cual ocasiona que la histéresis alcance rápidamente el valor de saturación mientras el voltaje  $X_1$  llega al punto de disparo. Las variables S y D se obtienen a partir de los voltajes de disparo superior e inferior ( $V_s$  y  $V_i$ ).

$$S = \frac{2}{(V_s - V_i)} \quad ; \quad D = SV_i + 1$$

Para el régimen caótico se tiene  $\gamma = 0.2$ ,  $c = 2.2$ ,  $\delta_2 = 0.001$ ,  $\delta_3 = 0.001$ ,  $\omega = 10$ ,  $\epsilon = 0.3$ ,  $S = 1.667$  y  $D = 0.0$ .

### 3.2.4 Resultados Experimentales y Sincronización.

Se ha analizado formalmente la dinámica del oscilador<sup>2</sup>, encontrando que presenta, bajo ciertas circunstancias, comportamiento caótico por lo que me restringiré a la parte de análisis experimental.

Considero importante aclarar que los oscilogramas presentados en esta tesis fueron fotografiados directamente de la pantalla del osciloscopio, posteriormente, se digitalizaron estas fotografías usando un scanner y por último fueron procesadas. El hecho de que hayan sido fotografiados impide ver el atractor en su totalidad ya que el tiempo de apertura de la cámara no es lo suficientemente lento. En la mayoría de los oscilogramas solo es posible ver un intervalo de tiempo de la trayectoria de solución del sistema. A continuación se muestran algunas gráficas y oscilogramas.

---

<sup>1</sup> Rössler, O. E. "The chaotic hierarchy". Z. Naturforsch, vol. 38a, 1983.

<sup>2</sup> Artículo citado.



FIG. 31 Atractor del Oscilador No-Lineal. Intervalo de tiempo. Proyección al plano  $X_1$ - $X_3$

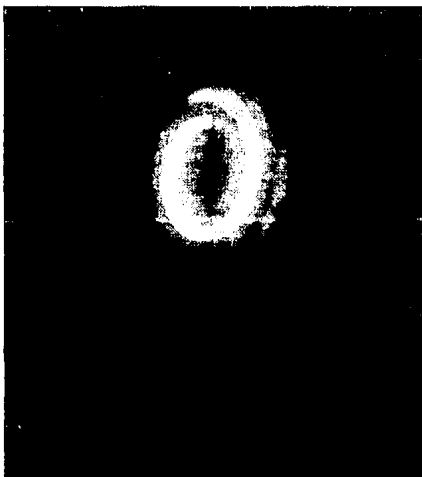


FIG. 32 Atractor del Sistema no Lineal. Proyección al plano  $X_1$ - $X_2$

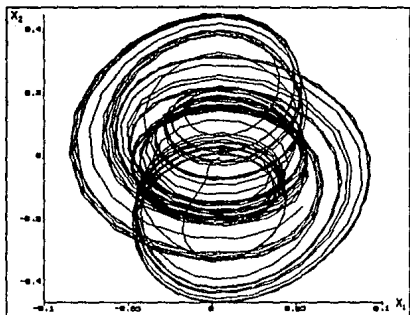


FIG. 33 Simulación del Atractor. Proyección en  $X_1$ - $X_2$

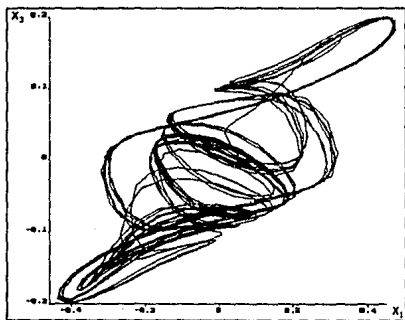


FIG. 34 Simulación del Atractor. Proyección en  $X_1$ - $X_3$

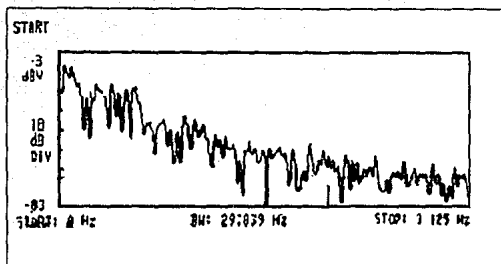


FIG. 35 Respuesta en frecuencia del Oscilador para  $X_3$

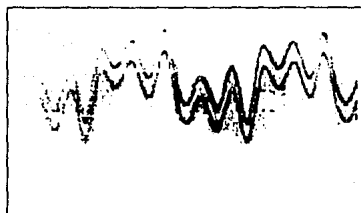


FIG. 36 Sistemas sincronizados.

En el circuito a sincronizar se usa una resistencia variable para  $R(r)$ . Esto nos permite hacer un circuito-respuesta idéntico o no, a la parte correspondiente del circuito sincronizador. La figura 37 muestra un oscilograma de  $X_2'$  ( $X_2$ ) donde  $X_2'$  es el voltaje  $X_2$  del circuito a sincronizar para una  $R(r) = 20K\Omega = R$ . En este caso los dos circuitos están sincronizados ya que forman una recta a  $45^\circ$  y las señales  $X_2'$  y  $X_2$  son iguales.



En la figura 38 se muestra el oscilograma de  $X_2'$  ( $X_2$ ) para una  $R(r) = 22K\Omega$ . Los circuitos no están sincronizados y las dos señales son diferentes. Para un aumento en  $R(r)$  la diferencia entre las señales  $X_2'$  y  $X_2$  aumenta y por lo tanto los sistemas no están sincronizados.

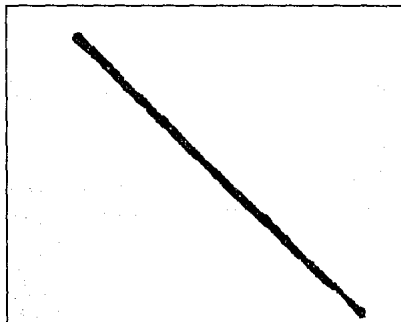


FIG. 37 Sistemas Sincronizados



FIG. 38 Sistemas no sincronizados

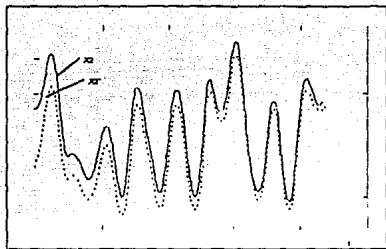


FIG. 39 Sistemas sincronizados. Simulación.

Quando los dos sistemas están sincronizados, las señales correspondientes en los dos sistemas son idénticas, si los dos sistemas tienen diferentes condiciones iniciales, la trayectoria del subsistema sincronizado converge a la trayectoria del sistema sincronizador exponencialmente en tiempo. En la figura 39 se muestran las dos señales  $X_2'$  y  $X_2$  en tiempo con diferentes condiciones iniciales.

## CONCLUSIONES

Caos es un campo de estudio que se expande rápidamente, muchas personas están involucradas en este relativamente nuevo tema de investigación. Físicos, matemáticos, ingenieros, ecólogos, químicos y muchos más, han aportado importantes contribuciones al desarrollo de esta investigación. A través de los años el ser humano ha tratado de modelar, predecir e interpretar el Universo para poder comprenderlo. Una de los encantos que tiene este fenómeno, recientemente descubierto, es que es un nuevo campo donde lo estudiado en los cursos normales de Licenciatura no es suficiente para entender esta familia de fenómenos y, luego, uno tiene que estudiar un poco más para poder entenderlos y que son fenómenos reales, no abstractos que se presentan en diferentes disciplinas y particularmente en Ingeniería Eléctrica-Electrónica.

La investigación en México a veces tiene un panorama desalentador, aunque se dan fenómenos de "crecimiento desigual y combinado", es decir, que se tengan personas de primera calidad haciendo investigación tanto básica como aplicada mientras que no podemos resolver problemas propios de un país en vías de desarrollo como la deuda externa, la creciente contaminación, la ideología tercermundista y la barrera de que no se puede hacer ciencia ni tecnología de punta en México. Cuando alguien empieza a hacer Ciencia o Tecnología, piensa en qué tan importante sea el tema para el desarrollo del País, de la comunidad a la que pertenece y el desarrollo personal. Al elegir un tema de tesis se debe de pensar en estos factores. En este momento se piensa en que hacer algo en Ciencia básica es un poco arriesgado en el sentido de qué tan útil sea, sobre todo en una tesis de Ingeniería. Actualmente se han descubierto casos de caos en muchas ciencias y disciplinas, particularmente en Ingeniería Electrónica se tiene caos en Teoría de Osciladores y en Teoría de Control.

La Dinámica de Sistemas no se restringe exclusivamente al estudio de los Sistemas Lineales, como se nos da a entender en los cursos de Licenciatura, y no solo saber que existen sino también que tienen comportamientos totalmente diferentes a puntos de equilibrio o soluciones periódicas, lo más que se puede esperar de un curso en Licenciatura es el

estudio de sistemas con respuesta casi-periódica ( AM, FM). Claro que sería obsoleto estudiar este tipo de fenómenos si fueran productos de formulaciones abstractas y no existieran en la naturaleza, pero hay personas que aseguran que la naturaleza se comporta de manera no lineal y que los fenómenos lineales son "casos especiales".

El ser humano ha hecho esfuerzos increíbles para tratar de linealizar problemas, es decir de incorporar un problema, objeto de estudio, a un cuerpo de Análisis (estructura Matemática) que, en algunos casos no es suficientemente completo para abarcar el comportamiento en sí, precisamente por que las herramientas matemáticas que abarcan los Sistemas No-Lineales son, en ocasiones demasiado complicadas, y resulta que llegamos a un problema más complicado que el que se tenía originalmente.

A lo largo de la presente tesis se propusieron métodos para completar el análisis de este tipo de fenómenos, con la ayuda de esta metodología se puede comprender éstos de una forma más fácil. Estos métodos resultan imposibles de aplicar si no se tienen bases matemáticas sólidas. Otros métodos como Dinámica Simbólica<sup>1</sup> y el Grupo de Renormalización<sup>2</sup>, cuya base es Teoría de Grupos o los Métodos de Melnikov<sup>3</sup> y Shilnikov<sup>4</sup> que involucran conceptos de Topología Diferencial están fuera del alcance del presente trabajo.

Se puede analizar un sistema dinámico simulando su comportamiento en una computadora personal (PC) con relativamente pocos requerimientos como un coprocesador, y suficiente memoria RAM. Las desventajas de este tipo de simulación dependen de la computadora que se utilice, es decir, será tanto más precisa la simulación como potente sea la máquina. Existen simuladores semicomerciales para el estudio de Sistemas no Lineales como el SIMNON (Simulator on Nonlinear Systems) desarrollado en el Departamento de Control Automático del Instituto Tecnológico de Lund (Suecia); el INSITE (Interactive Nonlinear Systems Investigative Toolkit for Everyone) desarrollado

---

<sup>1</sup> Metropolis N., Stein M.L. & Stein P.R. (1973)

<sup>2</sup> Hirsch J.E. & Neuemberg M. (1982)

<sup>3</sup> Melnikov V.K. (1963)

<sup>4</sup> Shilnikov L.P. (1965)

específicamente para el estudio de Sistemas Caóticos en la Universidad de California en Berkeley y otros más. Por nuestra parte hemos desarrollado un simulador de Sistemas Caóticos<sup>5</sup> implementado en PC que se sigue desarrollando actualmente en la Universidad La Salle en México D.F.

También se pueden analizar Sistemas Caóticos mediante la simulación electrónica. En este campo se pueden hacer dos modalidades: tener el modelo matemático e implementarlo electrónicamente o tener el circuito electrónico y analizar su respuesta mediante visualización en osciloscopio. Solo basta con tener nociones básicas de Dinámica de Sistemas no Lineales para poder analizar las trayectorias en el espacio de estado visto en el osciloscopio.

Estos tipos de implementación tienen grandes ventajas porque se pueden analizar Sistemas complicados de una manera sencilla y sobre todo, como ya se mencionó en capítulos anteriores, en las implementaciones electrónicas y computacionales podemos variar parámetros y analizar la respuesta para diferentes valores del parámetro de bifurcación que escojamos, así podemos visualizar de una manera sencilla la respuesta, tanto en tiempo como en el espacio de estado o con respecto al parámetro que se esté variando (diagramas de bifurcaciones).

Estas simulaciones son de gran utilidad para poder observar las características esenciales del fenómeno caótico como lo son la extraordinaria sensibilidad a condiciones iniciales, la estructura fractal de los atractores caóticos en el espacio de estado.

Un fractal es un fenómeno que presenta siempre una estructura igual, cualquiera que sea la escala considerada. Los atractores extraños que describen los comportamientos caóticos son también fenómenos fractales.

Las trayectorias de un atractor extraño llenan una cierta proporción del espacio (sin llenarla nunca por completo) y formando unas "hojas" que aparecen cada vez más apretadas a medida que se contemplan a escalas cada vez más

---

<sup>5</sup> Angeles Fernández J.C., González Hernández H. & Gómez Ramírez E. (1991)

pequeñas. Esto significa que nos encontramos con una estructura fractal. Esta propiedad se le conoce también como "autosimilitud". La podemos ver en cientos de formas en la naturaleza, por ejemplo, en un árbol, aunque su estructura requiera de ciertos ajustes para que se cumpla, también en las estructuras cristalinas formadas después de una noche de lluvia, en los copos de nieve o en la estructura de las montañas.

Esta característica fractal es una propiedad genérica de los atractores extraños. Se trata de una consecuencia directa del modo como se construyen dichos atractores, es decir, de las leyes a las que obedece la dinámica representada en el espacio de estado.

El estudio del caos presenta un interés práctico evidente: la comprensión del porqué y del cómo un sistema mecánico, por ejemplo, deja de tener un comportamiento regular para evolucionar de un modo desordenado, permite evitar importantes contrariedades. Lo mismo se puede decir de la aparición del caos en un sistema electrónico, una reacción química, un láser, etc. Dicho esto, los atractores extraños que caracterizan el caos no se encuentran tan fácilmente alrededor de nosotros como los árboles en el campo, su búsqueda se parece más bien a la recolección de setas, hay que saber cómo y cuándo buscarlos. Hasta principios de los años 80's cabía incluso preguntarse por la posibilidad de que estos objetos particulares, así como la dinámica que representan, no existieran mas que en la mente de los teóricos o en los modelos matemáticos poco realistas.

Paralelamente al estudio de los fenómenos caóticos se ha desarrollado toda una teoría en matemáticas experimentales para poder entender este tipo de formas que abundan en la naturaleza.

Este tipo de atractores se encuentran a menudo en sistemas físicos, químicos y biológicos no-lineales que no son integrables y que por consiguiente muestran un comportamiento impredecible. De hecho, los casos estudiados en los libros de texto, fácilmente integrables, son excepciones singulares ahora reconocidas; el mundo real, fuera de los libros de texto, permanece imprevisible, ahí nos podemos encontrar con atractores extraños, y a veces, muy extraños.

Para finalizar solamente resta recalcar que Caos es un orden diferente, con características propias. Es solamente un nombre que se le ha dado a fenómenos a los que no estamos acostumbrados a manejar en Ingeniería y que sin embargo se presentan en sistemas sencillos como los descritos en capítulos anteriores y que definitivamente es necesario conocer analizar y entender para un mayor desarrollo de la Ciencia y Tecnología. Es una herramienta más para entender el Universo.

## BIBLIOGRAFIA

- Angeles Fernández, J.C. González Hernández, H., Gómez Ramírez, E. & Figueroa Nazuno, J. (1991). Graficador para el análisis paramétrico de sistemas caóticos. XXXIV Congreso Nacional de Física. México, D.F. del 21 al 25 de Octubre de 1991.
- Aranda Pérez, G. Gómez Ramírez E., González Hernández, H. & Figueroa Nazuno, J., (1990). CAOS II: Un sistema electrónico que simula el fenómeno de caos. XXXIII Congreso Nacional de Física. Ensenada B.C. México, del 22 al 26 de Octubre de 1990.
- Chirikov, B. V.,(1979). A universal instability of many oscillator systems, Phys. Reports 52, 265.
- Derrida B., Gervois A., & Pomeau Y., (1979). Universal metric properties of bifurcations and endomorphisms. J. Phys. A12, 269.
- Derrida B. , (1980). "Critical properties of one-dimensional mappings," in Bifurcations Phenomena in Mathematical Physics and Related Topics, ed C. Bardos and D. Bessis, p.137, D. Riedel, Boston.
- Desoer, C. A., (1970). Notes for a second course on linear systems. New York, N. Y. van Nostrand Reinhold.
- Farmer J. D., Ott, E., Yorke, J. A., (1983). The dimension of Chaotic Attractors. Physica 7D, 153.
- Feigenbaum, M. J., (1978). Quantitative Universality for a class of non-linear transformations, J. Stat. Phys. 21, 669.
- Feigenbaum, M. J., (1983). Universal behaviour in non-linear systems, Physica, 7d, 16.
- Feigenbaum, M. J., (1980d). The metric universal properties of period-doubling bifurcations and the spectrum for a route to turbulence, Ann. N. Y., Acad. Sci. 357, 330.
- Gollub J. P. & Brunner, T. O., (1978). Periodicity and chaos on non-linear oscillators, Science, 200,48.
- Gómez Ramírez, E., González Hernández, H. & Figueroa Nazuno J. (1990). Implementación de un circuito electrónico para el estudio paramétrico de caos. XXXIII Congreso Nacional de Física, Ensenada B.C., México, del 22 al 26 de Octubre.



- González Hernández, H., Gómez Ramírez, E., Ibarra Ramírez, E. & Figueroa Nazuno, J. (1989). Simulador electrónico de sistemas caóticos. XXXII Congreso Nacional de Física. León, Gto., México, del 23 al 27 de Octubre.
- González Hernández, H., Gómez Ramírez, E. & Angeles Fernández, J.C. (1991). Análisis del comportamiento caótico y su implementación electrónica y en computadora. Centro Nacional de Cálculo, IPN, México del 6 al 8 de Noviembre.
- González Hernández, H. (1991) Análisis por técnicas computacionales y electrónicas del comportamiento caótico. Seventh International Conference, Computers in Institutions of Education and Research, CU, UNAM, Octubre 23-25, 1991.
- González Hernández, H., Gómez Ramírez E. & Figueroa Nazuno, J. (1991). Análisis paramétrico del comportamiento caótico, implementación electrónica y computacional. II Congreso de la Asociación Nacional de Instituciones de Educación e Informática, Aguascalientes, Ags., México 23-25 de Octubre de 1991.
- González Hernández, H. (1992). El desarrollo y estudio de sistemas caóticos. tercer Congreso Internacional de Electrónica y Comunicaciones CONIELECOM '91. UDLA. Cholula, Pue., México, 17-20 de Febrero de 1992.
- Grassberger, P., (1981). On the Hausdorff dimension of fractal attractors, J. Stat. Phys. 26, 173.
- Grassberger, P., (1983b). On the fractal dimension of the Henon attractor. Phys. Lett. 97A, 224.
- Grassberger, P. & Procaccia, I., (1983b). Characterization of strange attractors, Phys. Rev. Lett. 50, 346.
- Guckenheimer, J., (1980b). Dynamics of the van der Pol equation, IEEE Trans. on Circuits and Systems T-CAS 27, 983.
- Haken, H., (1983). At least one Lyapunov exponent vanishes if a trajectory of an attractor does not contain a fixed point, Phys. Lett. 94A, 71.
- Hao, B. -L. & Zhang, S. -Y., (1982a). Subharmonic stroboscopy as a method to study period-doubling bifurcations, Phys. Lett. 87A, 267.
- Hao, B. -L., (1983). Bifurcation, chaos, strange attractors, turbulent and all that, Progress in Physics 3, 329.
- Henon, M. (1982). On the numerical computation of Poincare maps, Physica 5D, 412.
- Ikeda, K., Daido, H. & Akimoto, O., (1980). Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity, Phys. Rev. Lett. 45, 709.

- Kolmogorov, A. N., (1954). Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamiltonian function, Akad. Nayk SSSR Doklady 98, 527; english translation in Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, ed. G. Casati, J. Ford, p. 51, Springer Verlag, 1979.
- Landau, L. D., (1944). On the problem of turbulence, C. R. Acad. Sci. URSS, 44, 311.
- Li, T. Y. & Yorke, J. A., (1975). Period three implies chaos. Am. Math. Monthly 82, 985.
- Lorenz, E. N., (1963). Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos. Sci. 20, 130.
- Lorenz, E. N., (1980a). Noisy periodicity and reverse bifurcation, Ann. N. Y. Acad. Sci. 26, 282.
- Mandelbrot B. B., (1977). Fractals: Form, Chance and Dimension, San Francisco, CA, Freeman.
- Matsumoto, T., Chua, L. O. & Komuro, M., (1985). The double scroll, IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-32.
- Matsumoto, T., Chua, L. O. & Tanaka, S., (1984). Simplest chaotic nonautonomous circuit, Phys. Rev. A30.
- May, R. M., (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature 261, 459.
- Melnikov, V. K., (1963). On the stability of the center for time periodic perturbations, Trans. Moscow Math. Soc. 12, 1.
- Metropolis, N., Stein, M. L. & Stein, P. R., (1973). Onm the finite limit sets for transformations on the unit interval, J. Comb. Theor. A15, 25.
- Oono, Y., (1978a). Period  $NE 2^{*n}$  implies chaos, Prog. Theor. Phys. 59, 1029.
- Parker, T. S. & Chua, L. O., (1987). Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. New York, N. Y. Springer Verlag.
- Rössler, O. E., (1979a). Chaotic oscillations -an example of hyperchaos," in Nonlinear Oscillations in Biology, ed. F. C. Hoppensteadt, Lect. Notes in Appl. Math. Vol. 17, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- Rössler, O. E., (1979b). An equation for hyperchaos, Phys. Lett. &1A, 155.
- Ruelle, D. & Takens, F., (1971). On the nature of turbulence, Commun. Math. Phys. 20, 167.

- Silnikov, L. P., (1965). A case of existence of a denumerable set of periodic motions, Sov. Math. Dokl. 6,163.
- Smale, S., (1965). "Diffeomorphisms with many periodic points," in Differential and Combinatorial Topology, p.63, Princeton.
- Swinney, H. L. & Gollub, J. P., (1978). Transition of turbulence, Phys. Today 31, 41.
- Ueda, Y., Hayashi, C. & Akamatsu, N., (1973). Computer simulation of nonlinear ordinary differential equations and nonperiodic oscillations, Electronics and Commun. in Japan 56A, 27.
- Young, L. S., (1983). Entropy, Lyapunov exponents and Hausdorff dimension in differentiable dynamic systems, IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-30 No. 8.