27
290

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

REVISION DE LOS APUNTES DE PRINCIPIOS DE MECANICA DE YACIMIENTOS, CAPITULOS III, IV y V.

T E S I S

Que para obtener el Título de

INGENIERO PETROLERO

p r e s e n t a

ADELFO TORRES MONTIEL

DIRECTOR DE TESIS:
ING. SALVADOR MACIAS HERRERA

MEXICO, D. F. 1993

APUNTES DE PRINCIPIOS DE MECANICA DE YACIMIENTOS

APUNTES DE PRINCIPIOS DE MECANICA DE YACIMIENTOS

CONTENIDO DE LOS CAPITULOS

CONTENIDO DE LOS CAPITULOS

Página

INTRODUCCION

El trabajo comprende una revisión de la tercera parte de los Apuntes sobre la materia de "Principios de Mecánica de Yacimientos" que fue desarrollado por el pasante de Ingeniería Adelfo Torres Montiel, bajo la dirección del Ing. Salvador Macías Herrera.

En la elaboración de este trabajo donde se desarrollaron los Capitulos III, IV y V, se tomaron en cuenta publicaciones existentes sobre la materia, así como los apuntes preparados por los profesores de la asignatura.

Se contó con la valiosa colaboración de las Divisiones de Comportamiento Primario y de Reservas, de la Superintendencia de Ingeniería de Yacimientos, correspondiente a la Región Marina de Petróleos Mexicanos, en Cd. del Carmen, Campeche.

También se hace patente el reconocimiento a todas aquellas personas que de alguna manera colaboraron en la realización de este trabajo.

CAPITULO III

DETERMINACION DEL VOLUMEN ORIGINAL DE HIDROCARBUROS

CAPITULO III DETERMINACION DEL VOLUMEN ORIGINAL DE HIDROCARBUROS

En la determinación del volumen original de hidrocarburos no se involucran criterios subjetivos, sino que se obtiene bajo juicios estrictamente técnicos, empleando los métodos más avanzados, que, en muchos casos, requieren de la utilización de sistemas de cómputo de alta capacidad.

Puesto que la aproximación en el cálculo del volumen original de hidrocarburos depende de la calidad de los datos disponibles, con relativa frecuencia el valor más cercano a la realidad se obtendrá a medida que aumenta la vida productiva del yacimiento.

Mediante el análisis de los registros geofísicos de explotación y de las pruebas de laboratorio, se determinan las características petrofísicas y las correspondientes a los fluidos contenidos en la roca, que son la base de aplicación para cualquiera de los métodos volumétricos aplicables.

El volumen original de aceite se puede calcular por medio de métodos volumétricos : Cimas y bases, isopacas e isohidrocarburos y mediante estudios de ingeniería de yacimientos : Balance de materia, simulación numérica y pruebas de límites de yacimiento en función de la variación de la presión.

III.1 P O R O S I D A D E S Y S A T U R A C I O N E S M E D I A S

Los valores de porosidad y saturación de agua pueden ser obtenidos mediante la interpretación de registros geofísicos de explotación, o mediante la recuperación y el análisis petrofísico de núcleos cortados en los pozos correspondientes a un mismo yacimiento.

Los métodos de cálculo de $\bar{\phi}$ y $\bar{S}v$ se presentan a continuación :

1) Método que considera el promedio aritmético.

2) Método que pondera los parámetros ϕ y Sv con el espesor de roca.

3) Método que pondera los parámetros ϕ y Sv con el área.

4) Método que considera los planos de isoporosidades e isosaturaciones de agua.

1) Método que considera el promedio aritmético.

La expresión que permite calcular $\bar{\phi}$ para un yacimiento a partir de un número dado de valores conocidos de ϕ es la siguiente :

$$\bar{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \phi_i}{n}$$

donde :

ϕ_i : *Son los valores de porosidad conocidos.*

n : *Número total de valores conocidos de porosidad.*

La expresión que permite calcular $\bar{S}v$ para un yacimiento es similar a la anterior :

$$\bar{S}v = \frac{\sum_{i=1}^{n} Sv_i}{n}$$

donde :

Sv_i : *Son los valores de saturación conocidos.*

n : *Número total de valores conocidos de saturación.*

2) Método que pondera los parámetros de ϕ y Sv con el espesor de roca.

Este método consiste en determinar la porosidad y saturación medias considerando todos los valores de estos parámetros obtenidos de los diversos intervalos de la formación en los pozos perforados en un yacimiento.

Ponderando respecto al espesor h_i *se obtienen* $\bar{\phi}$ *y* $\bar{S}v$:

$$\bar{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i \, \phi_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i}$$

$$\bar{S}v = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i \, S_{vi}}{\sum_{i=1}^{n} h_i}$$

donde :

ϕ_i y Sv_i : *Son respectivamente la porosidad y saturación de agua del intervalo i de espesor* h_i.

n : *Número de intervalos.*

3) **Método que pondera los parámetros ϕ y Sv con el área.**

Este método consiste en determinar la porosidad y saturación medias para el yacimiento en estudio, considerando los valores de estos parámetros, así como del área asociada a cada uno de los pozos perforados.

Ponderando respecto al área, se obtienen $\bar{\phi}$ y $\bar{S}v$:

$$\bar{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \ \phi_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

$$\bar{S}v = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \ S_{vi}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

donde :

ϕ_i y Sv_i : *Son la porosidad y saturación medias del pozo i que tiene asociada el área Ai.*

n : *Número de pozos en el yacimiento.*

Como ejemplo se obtendrán los valores de $\bar{\phi}$ y $\bar{S}v$ para un yacimiento hipotético, en el que se han perforado 5 pozos, para lo cual se cuenta con la información siguiente :

POZO No.	A_i (m^2)	ϕ_i	S_{wi}	$A_i\ \phi_i$	$A_i\ S_{wi}$
1	750	0.27	0.11	202.50	82.50
2	775	0.25	0.13	193.75	100.75
3	800	0.20	0.18	160.00	144.00
4	825	0.17	0.23	140.25	189.75
5	850	0.15	0.29	127.50	246.50
$\sum$	4000			824.00	763.50

sustituyendo valores en las expresiones de $\bar{\phi}$ y $\bar{S}_w$ anteriores :

$$\bar{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \ \phi_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{824.00}{4000} = 0.21$$

$$\bar{S}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \ S_{wi}}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{763.50}{4000} = 0.19$$

estos son los valores medios de porosidad y saturación de agua respectivamente para el yacimiento hipotético.

4) **Método que considera los planos de isoporosidades e isosaturaciones de agua.**

Este método consiste en determinar los valores medios de poro - sidad y de saturación de agua a partir de la construcción de planos de isoporosidades e isosaturaciones de agua.

El primer paso consiste en la determinación del valor medio de porosidad de cada pozo.

En segundo término, en un plano de localizaciones se afecta a cada pozo de su correspondiente valor de porosidad y se configuran curvas de igual valor. A continuación se determina la superficie encerrada por cada curva de isoporosidad y se construye una gráfica con estas parejas de valores, cuya ordenada media representará el valor de la porosidad correspondiente a la formación.

El mismo procedimiento se sigue para el caso de la determinación del valor de la saturación de agua de un yacimiento.

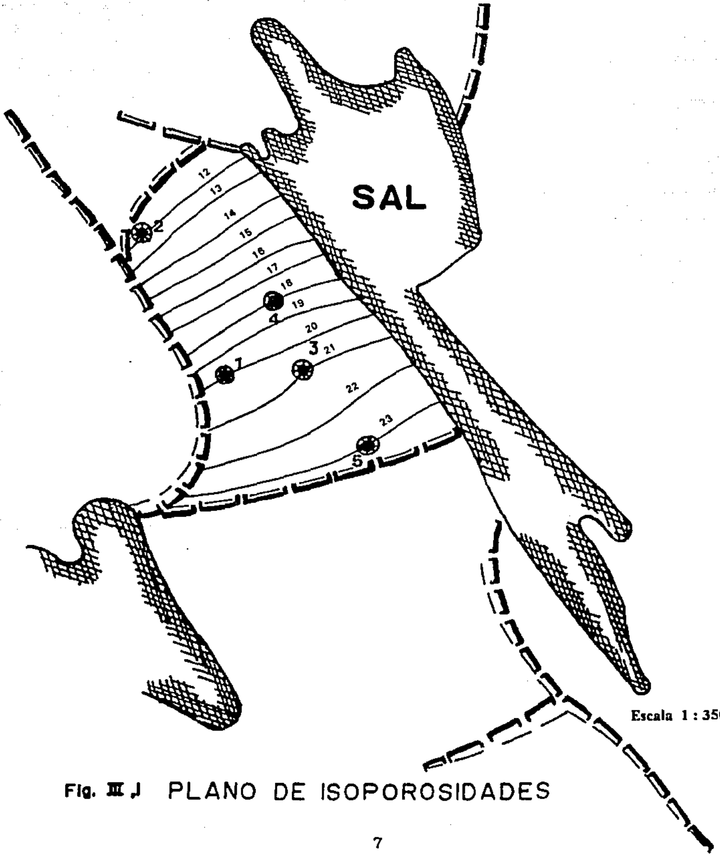
A continuación se ilustra la aplicación para un campo al que pertenecen 5 pozos cuyos valores de porosidad y de saturación de agua se consignan a continuación :

POZO	POROSIDAD ϕ_i	SATURACION DE AGUA Sw_i
1	0.20	0.17
2	0.12	0.27
3	0.21	0.16
4	0.18	0.20
5	0.23	0.15

Con estos valores se elaboraron los planos de isoporosidades e isosaturaciones de agua mostrados en las figuras III.1 *y* III.2.

A partir de ellas se construyeron las gráficas que se ilustran en las figuras III.1a *y* III.2a, *de las que se obtuvieron los valores de porosidad y saturación de agua que a continuación se indican :*

$$\bar{\phi} = 18.4\ \% \qquad \bar{S}w = 19.3\ \%$$



Escala 1 : 35000

Fig. III.J PLANO DE ISOPOROSIDADES

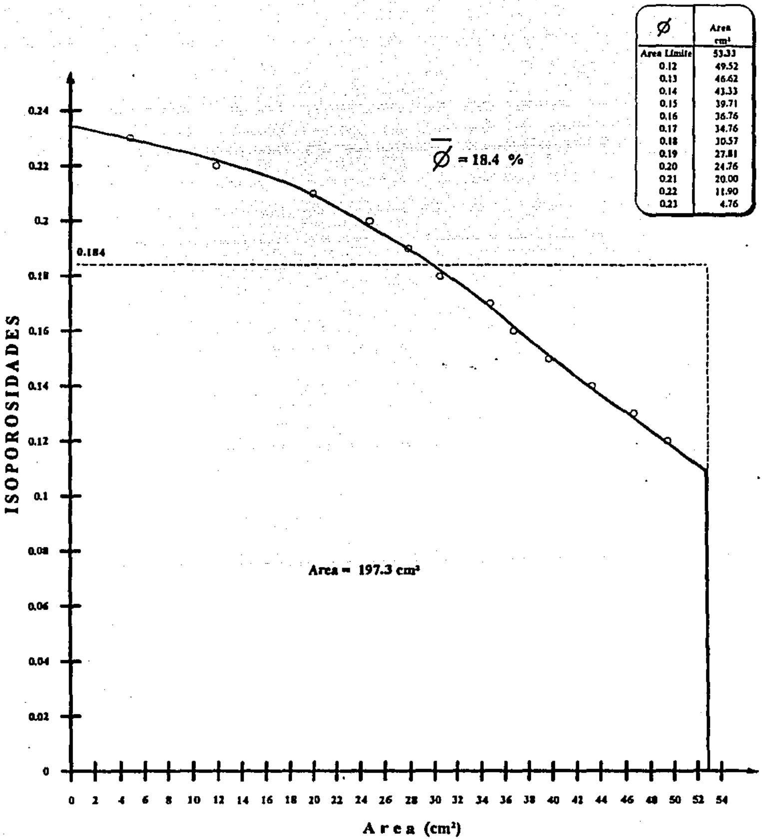
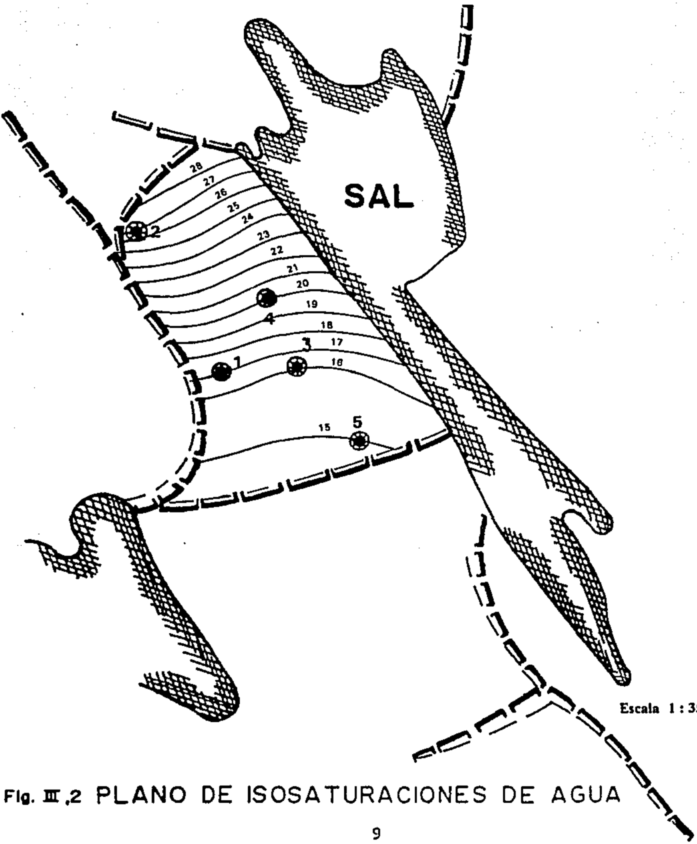
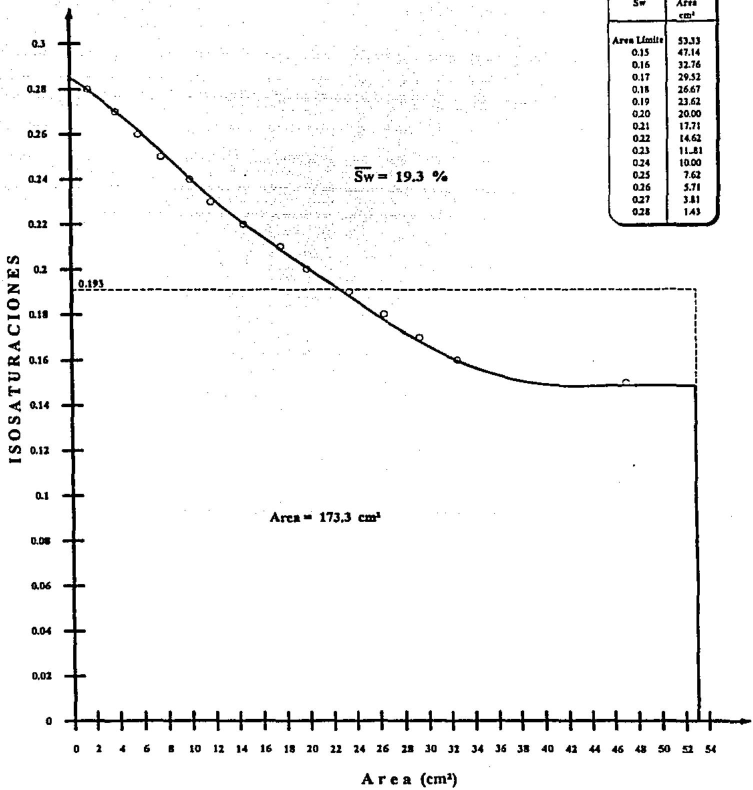

Ø
Area cm²
Area Limite 53.33
0.12 49.52
0.13 46.62
0.14 43.33
0.15 39.71
0.16 36.76
0.17 34.76
0.18 30.57
0.19 27.81
0.20 24.76
0.21 20.00
0.22 11.90
0.23 4.76
Ø = 18.4 %
0.184
Area = 197.3 cm²
ISOPOROSIDADES
A r e a (cm²)

Fig. III.1 a



Escala 1 : 35000

Fig. III,2 PLANO DE ISOSATURACIONES DE AGUA



Sw	Area cm²
Area Límite	53.33
0.15	47.14
0.16	32.76
0.17	29.52
0.18	26.67
0.19	23.62
0.20	20.00
0.21	17.71
0.22	14.62
0.23	11..81
0.24	10.00
0.25	7.62
0.26	5.71
0.27	3.81
0.28	1.43

Fig. III.2 a

III.2 METODOS EMPLEADOS PARA DETERMINAR EL VOLUMEN ORIGINAL DE ACEITE

Los métodos volumétricos por medio de los cuales se obtiene el contenido de hidrocarburos son: El de isopacas, cimas y bases y el de isohidrocarburos.

En los dos primeros métodos se determina el volumen de roca (V_r) *y a partir de este valor se obtiene el* volumen original de hidrocarburos (V_{Hc}) *aplicando la siguiente expresión :*

$$V_{Hc}\left[m^3_{Hc}\right] = V_r\left[m^3_r\right] \quad \bar{\phi} \quad \left[\frac{m^3_p}{m^3_r}\right] (1 - \bar{S}_w) \left[\frac{m^3_{Hc} @ c.y.}{m^3_p}\right]$$

$$V_{Hc} = V_r \; \bar{\phi} \; (1 - \bar{S}_w) \qquad \text{(III.1)}$$

En donde $\bar{\phi}$ y $\bar{S}_w$ representan la porosidad media y la saturación media de agua en el yacimiento o en el bloque estudiado.

El procedimiento que se emplea para la determinación del volumen de roca impregnado con hidrocarburos, es diferente para cada método.

III.2.1 METODO DE ISOPACAS

Este método y el de cimas y bases se utilizan para determinar el volumen de roca de un yacimiento, con el cual se puede obtener, con los valores correspondientes de porosidad y saturación, el volumen original de hidrocarburos, que es básico para toda actividad de la industria petrolera. Con el método de isohidrocarburos se calcula en forma directa, sin determinar previamente el volumen de roca, dicho volumen original de hidrocarburos.

El método de isopacas tiene como base la configuración de un plano con curvas de igual espesor de formación, para cuya preparación se tiene que disponer de un plano con las localizaciones de todos los pozos que constituyen el campo en estudio. Se anota en cada uno de ellos el espesor neto de la formación y se hace la configuración por interpolación o extrapolación de datos para tener curvas con valores cerrados, tal como se observa en la Fig.III.3 *, que es un plano de isopacas para un campo hipotético que se toma como ejemplo.*

Las áreas encerradas por las diferentes curvas se miden, con ayuda de un planímetro o usando fórmulas de integración numérica o por cualquier otro método conocido. Los valores encontrados se anotan en la Tabla III.1, *columna (4). En la misma tabla aparecen los espesores y las áreas convertidas a dimensiones reales.*

En la Fig. III.4, *aparece una gráfica en cuyas ordenadas están los espesores netos de la formación que fueron anotados en la columna (3) de la* Tabla III.1 *y en las abscisas, las áreas del terreno anotadas en la columna (5) de la misma tabla.*

Se determina el área bajo la curva entre los límites cero y área máxima. El valor encontrado se multiplica por la escala de la gráfica para obtener el "volumen neto de roca". Al multiplicarse este volumen neto de roca por la porosidad media de la formación y por la saturación media de hidrocarburos, da precisamente el volumen de hidrocarburos que se trata de conocer, @ c.y.

PLANO DE ISOPACAS

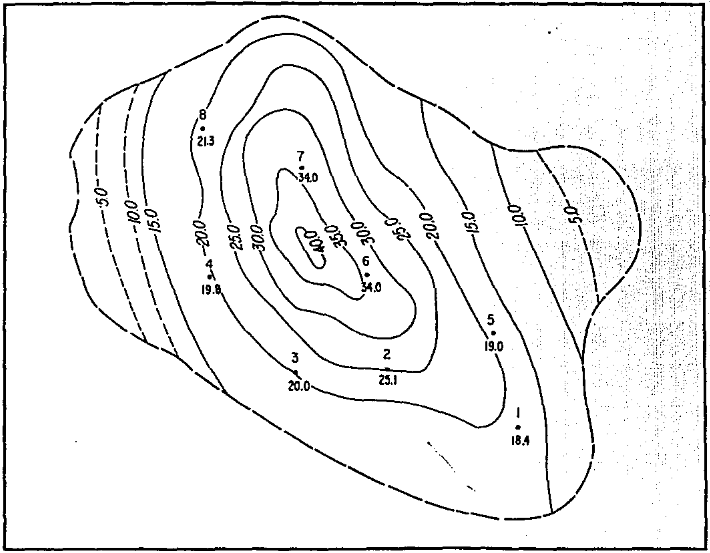


Fig. III.3 Esc. 1:50,000

GRAFICA CORRESPONDIENTE AL PLANO DE ISOPACAS

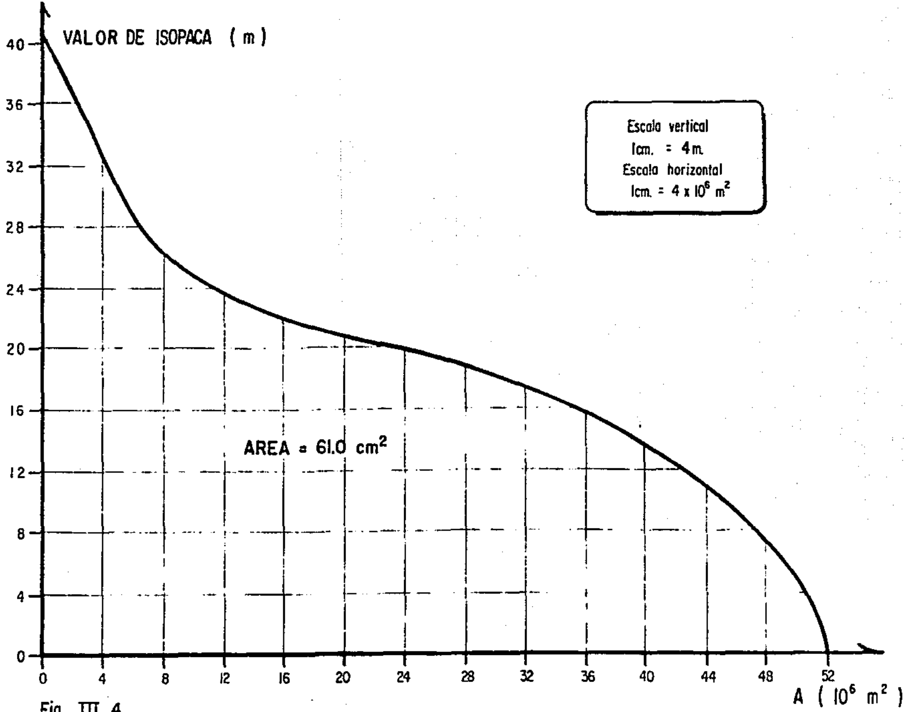


Fig. III. 4

TABLA III.1

(1) Pozo No.	(2) Espesor Neto (m)	(3) Espesor de la Isopaca en (m)	(4) Area del plano en (cm^2)	(5) Area del terreno en ($10^6 m^2$)
1	18.4	00	207.4	51.85
2	25.1	10	170.1	42.53
3	20.0	15	141.8	35.45
4	19.8	20	86.2	21.55
5	19.0	25	51.0	12.75
6	34.0	30	26.6	6.65
7	34.0	35	8.2	2.05
8	21.3	40	1.2	0.30

escala vertical : 1 cm —— 4 m (espesor)

escala horizontal : 1 cm —— 4×10^6 m^2 (terreno)

por tanto

1 cm^2 (gráfica) —— 16×10^6 m^3 (roca)

61.0 cm^2 (gráfica) —— 976×10^6 m^3 (roca)

el volumen neto de roca es igual a 976×10^6 m^3 .

Suponiendo : $\overline{\phi} = 0.18$ y $\overline{S}_w = 0.17$

$$V_{hc} = 976 \times 10^6 * 0.18 * (1-0.17)$$

$$V_{hc} = 145.8 \times 10^6 \text{ m}^3 \text{ hc @ c.y.}$$

Otro método para determinar de manera aproximada el volumen de la zona productora a partir de lecturas con planímetro es mediante el empleo de dos ecuaciones, una calcula el volumen de un tronco de pirámide :

$$\Delta V_b = \frac{h}{3} \left(A_n + A_{n+1} + \sqrt{A_n \; A_{n+1}} \right) \qquad \text{(III.2)}$$

donde ΔV_b *es el volumen bruto en* m^3*;* A_n *el área en* m^2 *encerrada por la línea isopaca inferior;* A_{n+1}*, el área en* m^2 *encerrada por la línea isopaca superior; y* h *el intervalo en* m *entre las líneas isopacas.*

Esta ecuación calcula el volumen de roca entre dos líneas isopacas sucesivas, y el volumen total es la suma de los volúmenes individuales.

El volumen de un trapezoide se calcula mediante :

$$\Delta V_b = \frac{h}{2} \left(A_n + A_{n+1} \right)$$

en tanto que el volumen de una serie de trapezoides sucesivos se calcula mediante :

$$V_b = \frac{h}{2} \left(A_o + 2\,A_1 + 2\,A_2 \ldots 2\,A_{n-1} + A_n \right) + \bar{h}\,A_n$$

donde A_o *es el área en* m^2*, encerrada por la línea isopaca cero,* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *son las áreas, en* m^2*, encerradas por líneas isopacas sucesivas;* $\bar{h}$ *es el espesor medio, en* m*, por encima de la isopaca superior o de espesor máximo; y* h *es el intervalo entre las isopacas, en* m

Generalmente se emplea la ecuación piramidal cuando la relación entre las áreas correspondientes a dos curvas isopacas contiguas es menor de 0.5 y la trapezoidal cuando es mayor.

A continuación se realiza un ejemplo de aplicación, tanto de la ecuación piramidal, como de la trapezoidal. Se calcula el volumen neto de un yacimiento a partir de un plano de isopacas.

Se tienen como datos las áreas (determinadas con planímetro) dentro de las líneas isopacas, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. A_5 *y* A_6.

En la siguiente tabla se tienen los valores de los datos y de los cálculos así como de resultados obtenidos :

Area productora	Area $(10^6 m^2)$	Relación de áreas	Intervalo h (m)	Ecuación empleada	ΔV $(10^6 m^3)$
A_0	1.82	(contacto agua-aceite).			
A_1	1.52	0.84	1.5	Trap.	2.54
A_2	1.22	0.80	1.5	Trap.	2.09
A_3	0.93	0.76	1.5	Trap.	1.65
A_4	0.62	0.67	1.5	Trap.	1.19
A_5	0.30	0.48	1.5	Piram.	0.69
A_6	0.00	0.00	1.2	Piram.	0.12
					8.28

$$\Delta V_b = 8.28 \times 10^6 \ m^3_r$$

III.2.2 METODO DE CIMAS Y BASES

Este método tiene como base la configuración de planos con curvas de igual profundidad tanto de las cimas como de las bases de la formación, para cuya preparación es necesario disponer de planos con las localizaciones de todos los pozos que constituyen el campo en estudio. Por medio de registros geofísicos, se puede determinar la cima y la base de la formación productora para cada uno de los pozos.

En el plano de localización de los pozos se anota en cada uno de ellos la profundidad de la cima y de la base de la formación correspondiente (Tabla III.2) *y se hace la configuración por interpolación o extrapolación de datos para tener curvas con valores cerrados, tal como se observa en la* Fig.III.5.

Las áreas encerradas por las diferentes curvas se miden con la ayuda de un planímetro o usando fórmulas de integración numérica conocidas. Los valores encontrados se anotan en la Tabla III.3, *columnas (2) y (4). En la misma tabla aparecen las áreas convertidas a dimensiones reales, columnas (3) y (5).*

En la Fig. III.6, *aparece una gráfica en cuyas ordenadas están las profundidades de las cimas y bases que fueron anotadas en la columna (1) de la* Tabla III.3 *y en las abscisas las áreas del terreno anotadas en las columnas (2) y (3) de la misma tabla.*

Se determina el área delimitada por los perfiles de cimas y bases, tomando en cuenta el caso en que exista un contacto agua-aceite como en el ejemplo. El valor encontrado se multiplica por la escala de la gráfica para obtener de esta forma, el volumen bruto de roca, que al multiplicarse por la porosidad media de la formación y por la saturación media de hidrocarburos, da aproximadamente el volumen de hidrocarburos que se trata de conocer; si se conoce el factor de compacidad *del yacimiento, el volumen de hidrocarburos deberá multiplicarse por este factor para obtener un valor más real, ya que de otra manera se estaría considerando que no existen intercalaciones compactas.*

TABLA III.2

(1) Pozo No.	(2) Profundidad de las Cimas (m.b.n.m.)	(3) Profundidad de las Bases (m.b.n.m.)
1	2527	2576
2	2535	2575
3	2512	2557
4	2495	2548
5	2528	2575
6	2526	2575
7	2528	2571
8	2528	2576

TABLA III.3

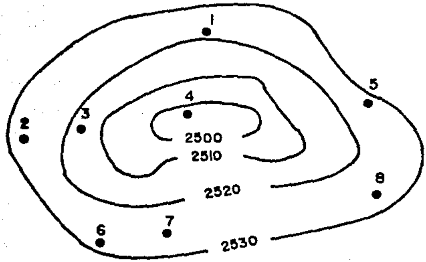
(1) Profundidad (m.b.n.m.)	(2) Area Plano (cm^2)	(3) curvas cimas Real ($10^6 m^2$)	(4) Area Plano (cm^2)	(5) curvas base Real ($10^6 m^2$)
2500	60	0.150		
2510	600	1.500		
2520	1200	3.000		
2530	2400	6.000		
2550			40	0.100
2560			400	1.000
2570			1000	2.500
2580			2300	5.750

Profundidad del contacto agua-hidrocarburos = 2540 m.

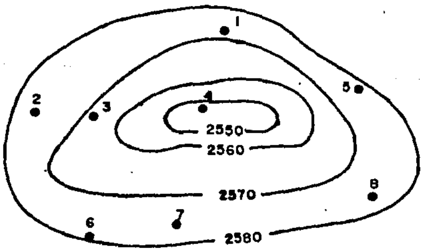
De la Fig.III.6 :

Escala vertical : 1 cm —— 10 m

Escala horizontal : 1 cm —— 0.5×10^6 m^2



Plano de cimas



Plano de bases

Fig. III .5

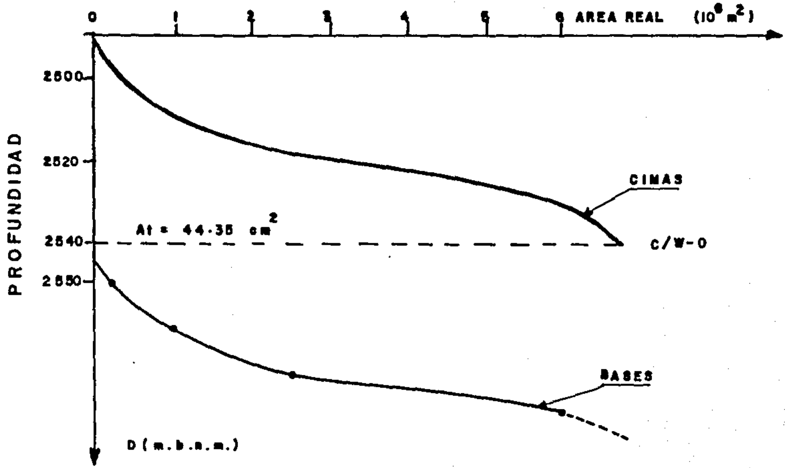

0
1
2
3
4
5
6
AREA REAL (10^6 m^2)
PROFUNDIDAD
2500
2520
2540
2550
At = 44.35 cm^2
CIMAS
C/W-O
BASES
D (m.b.n.m.)

FIG. III. 6

por tanto

$$1 \ cm^2 \ \text{(gráfica)} \quad \text{——} \quad 5.0 \times 10^6 \ m^3 \ \text{(roca)}$$

$$44.35 \ cm^2 \ \text{(gráfica)} \ \text{——} \ 221.75 \times 10^6 \ m^3 \ \text{(roca)}$$

por lo que el volumen bruto de roca es igual a $221.75 \times 10^6 \ m^3$.

Suponiendo : $\overline{\phi} = 0.18$ *y* $\overline{S}_w = 0.17$

$$V_{hc} = 221.75 \times 10^6 * 0.18 + (1-0.17)$$

$$V_{hc} = 33.13 \times 10^6 \ m^3 \ hc \ @ \ c.y.$$

III.2.3 METODO DE ISOHIDROCARBUROS

Este método es el de mayor aproximación al valor real del volumen original de hidrocarburos debido a que considera las variaciones de porosidad, tanto vertical como horizontalmente.

El método de isohidrocarburos tiene gran similitud con el de isopacas, pero proporciona resultados más aproximados.

El Indice de Hidrocarburos, *se define como el volumen de hidrocarburos asociado a la unidad de área de terreno y se expresa matemáticamente de la siguiente manera:*

$$I_{hc} = h\ \phi\ (1-S_w) = \frac{m^3\ hc\ @\ c.y.}{m^2\ _{roca}}$$

de la expresión anterior se observa que si se multiplica un área por su Indice de Hidrocarburos, *se obtendrá el volumen de hidrocarburos contenido en ella.*

Físicamente, el índice de hidrocarburos es una medida del volumen de hidrocarburos, a condiciones del yacimiento, que existe en la roca proyectada sobre una área de un metro cuadrado (m^2) de yacimiento.

También se parte de la construcción de un plano, en este caso de isohidrocarburos (Fig. III.7).

A continuación se construye una gráfica de Indice de Hidrocarburos vs áreas *del terreno, de tal manera que el área encerrada bajo la curva será la correspondiente al volumen total de hidro - carburos medidos a condiciones del yacimiento; esta área se obtiene como las anteriores, mediante el uso del planímetro* (Fig. III.8).

En el ejemplo que sigue a continuación se obtiene el volumen total de hidrocarburos en el yacimiento.

PLANO DE ISOHIDROCARBUROS

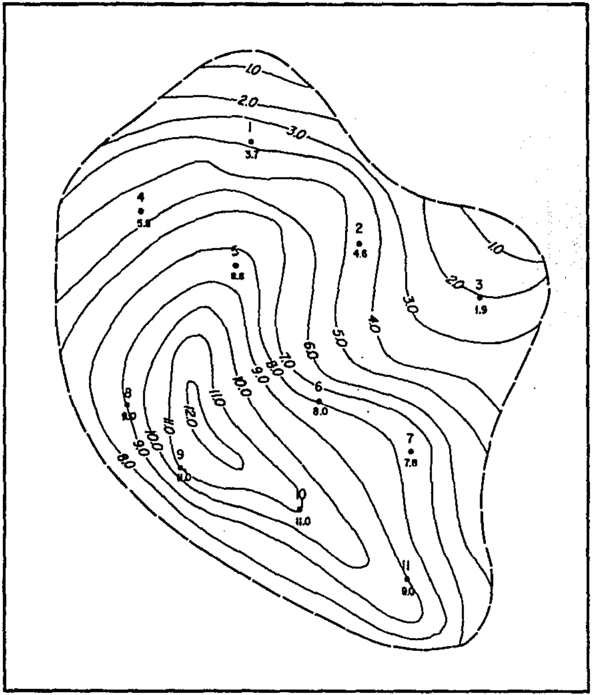


Fig. III.7

Ejemplo :

A partir de datos de los pozos se obtiene la Tabla III.4. *La configuración correspondiente de isohidrocarburos está en la* Fig. III.7; *de la medición con un planímetro de cada una de las áreas encerradas por las diferentes curvas de isohidrocarburos, se obtuvo para este ejemplo la* Tabla III.5 .

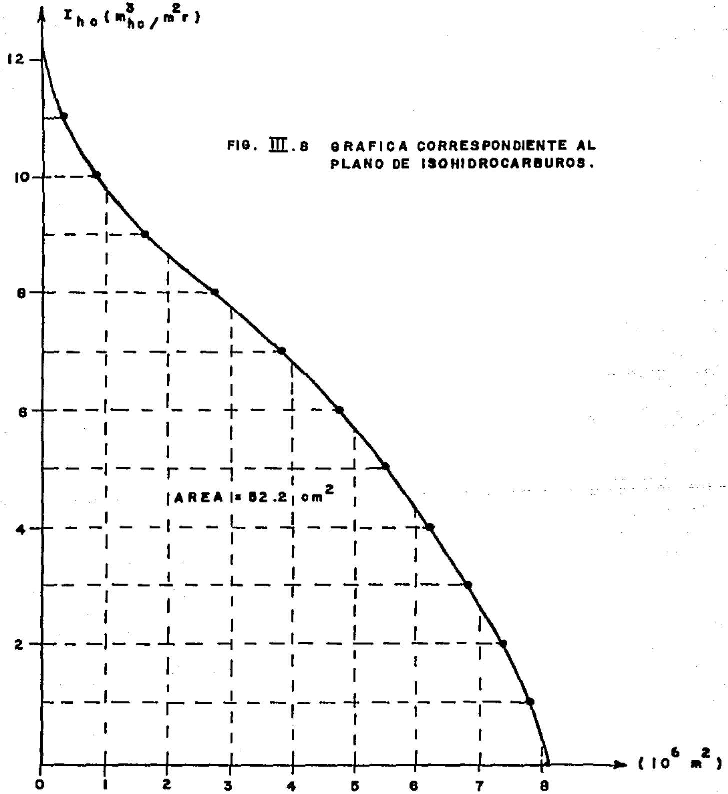
TABLA III.4

Pozo No.	I_{hc} (m^3hc/m^2roca)
1	3.7
2	4.6
3	1.9
4	5.8
5	8.6
6	8.0
7	7.8
8	9.0
9	11.0
10	11.0
11	9.0

TABLA III.5

Indice de Iso-hidrocarburos ($m^3hc/m^2terreno$)	Area del Plano (cm^2)	Area del Terreno (10^6 m^2)
0	200.2	8.01
2	186.0	7.44
3	170.9	6.84
4	153.9	6.16
5	136.2	5.45
6	116.1	4.64
7	96.4	3.86
8	70.5	2.82
9	41.9	1.68
10	21.3	0.85
11	7.8	0.31
12	1.5	0.06

FIG. III.8 GRAFICA CORRESPONDIENTE AL PLANO DE ISOHIDROCARBUROS.



Con los datos anteriores se construye la Fig.III.8, se puede obtener el volumen de hidrocarburos a condiciones de yacimiento midiendo el área bajo la curva entre la abscisa cero y la abscisa de área máxima.

Escala vertical : $1\ \mathrm{cm}_{\text{(gráfica)}}$ —— $1\ \left[\frac{m^3\ hc\ @\ c.y.}{m^2\ roca} \right]$

Escala horizontal : $1\ \mathrm{cm}_{\text{(gráfica)}}$ —— $1 \times 10^6\ m^2_{\text{(roca)}}$

$1\ cm^2_{\text{(plano)}}$ —— $1 \times 10^6\ m^3\ hc\ @\ c.y.$

Por tanto, el volumen original de hidrocarburos a condiciones de yacimiento será :

$$V_{hc}\ @\ c.y. = 52.2 \times 10^6\ m^3\ @\ c.y.$$

III.3 BREVE DESCRIPCION DE OTROS METODOS

A los métodos vistos con anterioridad se les conoce como métodos volumétricos para determinar el volumen original de hidrocarburos. Existen otras técnicas para este fin, a las cuales se les llama métodos de balance de materia; consisten básicamente en considerar que, a un tiempo dado de explotación del yacimiento, la masa de hidrocarburos remanentes más los extraidos es igual a la masa de los mismos que había al iniciarse la extracción; es decir, los métodos de balance de materia se basan en el principio de conservación de masa. Involucrando diferentes condiciones de presión y temperatura, entrada de agua, etc. se obtienen las ecuaciones con las que, además de calcular el volumen original de hidrocarburos, es posible predecir el comportamiento de los yacimientos, al someterlos a diferentes políticas de explotación.

CAPITULO IV

FUERZAS QUE INTERVIENEN EN EL MOVIMIENTO DE FLUIDOS

CAPITULO IV FUERZAS QUE INTERVIENEN EN EL MOVIMIENTO DE FLUIDOS

Si se analizan los principios fundamentales de la hidrodinámica, se encuentra que son aplicaciones de los principios de la mecánica clásica, adaptados al flujo de fluidos; por ello, aunque éstos no son sistemas rígidos, están sujetos a diversas leyes como son la de conservación de la materia, la segunda Ley de Newton y otras; en el caso de flujo de fluidos en medios porosos, se tienen que caracterizar los fluidos dinámicamente y establecer cómo reaccionan a gradientes de presión y a fuerzas externas.

El flujo de fluidos a través de medios porosos está relacionado con 5 tipos de fuerzas :

1) *De Presión.*
2) *De Segregación Gravitacional.*
3) *De Viscosidad.*
4) *Capilares.*
5) *Cinéticas.*

IV.1 FUERZA DE PRESION

Para realizar el estudio y análisis de los procesos de desplazamiento de fluidos en el medio poroso, supóngase que un volumen diferencial de un fluido dV *se encuentra en un yacimiento donde existe una distribución de presiones semejante a la mostrada en la* Fig. IV.1, *donde las líneas curvas representan las trazas de las superficies isobáricas en un plano horizontal.*

La fuerza de presión que actúa sobre el volumen de fluido supuesto puede representarse por el vector $\vec{F_p}$:

$$\vec{F}p = - \vec{\nabla} P \, dV$$

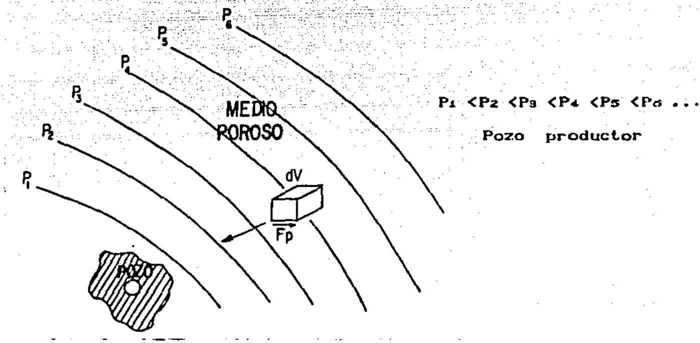


Fig. IV.1 Distribución de presiones en la vecindad de un pozo.

Donde:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

es el operador vectorial denominado nabla; por consiguiente :

$$\vec{\nabla} P = \frac{\partial P}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}$$

realizando el análisis dimensional se demuestra que $\vec{\nabla}P \, dV$ *es una fuerza:*

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{L}\right); \qquad P = \frac{F}{A}\left(\frac{F}{L^2}\right); \qquad dV\,(L^3)$$

$$\therefore \quad \vec{\nabla} P\, dV = \vec{F}p \qquad (F)$$

esto último es sólo para efectos del análisis dimensional; el signo menos en la ecuación original indica que la fuerza es en el sentido en que disminuye la presión.

La fuerza de presión $\vec{F}p$ *desplaza el volumen supuesto* dV *hacia las zonas de menor presión en dirección normal a las superficies isobáricas.*

IV.2 FUERZA DE SEGREGACION GRAVITACIONAL

Mediante el mecanismo de drene gravitacional se logran altas eficiencias de explotación en yacimientos de aceite; este mecanismo se desarrolla favorablemente cuando la permeabilidad vertical es alta, el aceite es de baja viscosidad, el echado es pronunciado o la formación es de gran espesor, prevaleciendo aún cuando se tienen altos gastos de producción.

La fuerza de Segregación Gravitacional $\vec{F}sg$ *en un yacimiento es originada por el efecto combinado de dos fuerzas, en las cuales intervienen las densidades de los fluidos y la aceleración de la gravedad; éstas son la fuerza de empuje debida a la diferencia de densidades entre el gas y el aceite y la fuerza de gravedad debida a los pesos del gas y el aceite.*

F U E R Z A   D E   E M P U J E

El empuje que recibe el volumen considerado dV *se obtiene aplicando el principio de flotación de Arquímedes, el cual expresa que la fuerza de flotación sobre un cuerpo actúa verticalmente hacia arriba y es igual al peso del volumen desplazado por él mismo. Vectorialmente se representa :*

$$\vec{F}e = \rho_1 \; g \; dV \; \hat{k}$$

donde ρ_1 *es la densidad del fluido desalojado.*

Sus dimensiones son:

$$\vec{F}e \left(\frac{m\,L}{t^2}\right) = \rho_1 \left(\frac{m}{L^3}\right) \; g \left(\frac{L}{t^2}\right) \; dV \; (L^3) \quad \hat{k}$$

F U E R Z A   D E   G R A V E D A D

Esta fuerza actúa verticalmente hacia abajo debido a la atracción terrestre y será exclusivamente el peso del cuerpo diferencial dV *; este peso se obtiene multiplicando el peso especifico del fluido por el volumen diferencial* dV.

Sabiendo que :

Peso especifico = ρ g

se tiene que :

Fuerza de gravedad = ρ g dV

vectorialmente se representa como:

$$\vec{F}g = - \rho_2 \; g \; dV \; \hat{k}$$

donde ρ_2 *es la densidad del fluido que constituye el volumen* dV *considerado.*

La resultante de $\vec{F}e$ *y* $\vec{F}g$ *es la fuerza debida a la acción de la segregación gravitacional.*

$$\vec{F}sg = \vec{F}e + \vec{F}g = (\rho_2 - \rho_1) \; g \; dV \; \hat{k} = \Delta \rho \; g \; dV \; \hat{k}$$

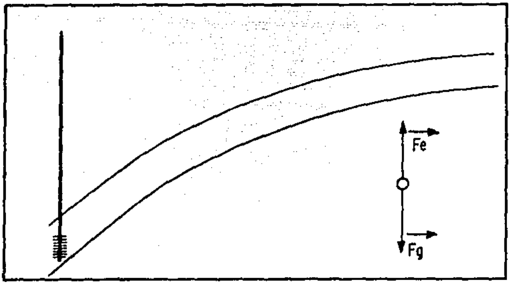


Fig. IV. 2 Fuerza de segregación gravitacional.

IV.3 FUERZA DE VISCOSIDAD

La fuerza de viscosidad se opone al movimiento de un fluido. Esto es cierto para medios porosos y no porosos.

En 1846 Poiseville derivó la siguiente ecuación para el flujo de un fluido en un tubo capilar:

$$q = \frac{\pi r^4 \Delta P}{\beta \mu \Delta L}$$

donde:

q : *Gasto*

r : *Radio del tubo capilar*

ΔP : *Caída de presión en* ΔL

β : *Constante adimensional*

μ : *Viscosidad*

$$q \left(\frac{L^3}{t}\right) = \frac{\pi r^4}{\beta} (L^4) \quad \Delta P \left(\frac{m L}{t^2 L^2}\right) \quad \frac{1}{\mu} \left(\frac{L t}{m}\right) \quad \frac{1}{\Delta L} \left(\frac{1}{L}\right)$$

como $q = v A$:

$$v A = \frac{\pi r^4 \Delta P}{\beta \mu \Delta L} = \frac{\pi r^2 r^2 \Delta P}{\beta \mu \Delta L} \qquad (IV.1)$$

por otra parte, la fuerza de viscosidad en el tubo capilar es igual y de sentido contrario a la resultante $\vec{F}$ *de las fuerzas de presión (ver apuntes de Mecánica de Fluidos de la F.I.), como se aprecia en la Fig.IV.3; es decir* $F = F_1 - F_2$. *Esto es para el caso en que la velocidad es constante* .

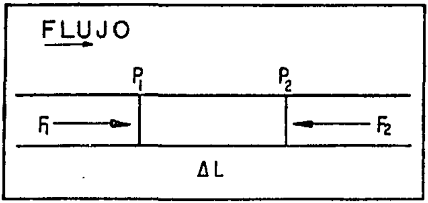


Fig.IV.3 Fuerzas de presión en las secciones 1 y 2 de un elemento de fluido de longitud ΔL. La fuerza de viscosidad es igual y de sentido contrario a la resultante de F_1 y F_2 .

$F_1 = P_1 A$

$F_2 = P_2 A$

$$\therefore \quad F\mu = A (P_1 - P_2) = - A \quad \Delta P$$

donde $\Delta P = P_2 - P_1$*; el signo (-) indica que* $F\mu$ *es de sentido contrario al flujo. El área del capilar es:* πr^2.

Sustituyendo en la Ec. IV.1 y despejando v :

$$v = \frac{A r^2 \Delta P}{A \beta \mu \Delta L}$$

como $A \Delta L = \Delta V$, *se tiene:*

$$v = -\frac{r^2 (A\ \Delta P)}{\beta\ \mu\ \ \Delta V} = -\frac{r^2\ F\mu}{\beta\ \mu\ \ \Delta V}$$

por consiguiente

$$F\mu = -\ v\ \mu\ \frac{\beta}{r^2}\ \Delta V = -\ \frac{v\ \mu\ \Delta V}{r^2 / \beta}$$

r^2 / β *puede hacerse igual a la permeabilidad del medio poroso* K *ya que son dimensionalmente iguales, quedando por determinarse* β.

$$k\ \ (L^2) = \frac{r^2}{\beta}\ \ (L^2) \qquad \therefore \qquad F\mu = -\ \frac{v\ \mu\ \Delta V}{k}$$

expresando vectorialmente la ecuación anterior para el volumen diferencial dV *considerado se tiene :*

$$\vec{F}\mu = -\ \frac{\vec{v}\ \mu\ \ dV}{k}$$

IV.4 FUERZA DE CAPILARIDAD

Las fuerzas capilares en el medio poroso son originadas por la acción combinada de las tensiones superficiales e interfaciales, de las propiedades de mojabilidad del sistema roca-fluidos (fuerzas de adhesión y cohesión) y de aspectos geométricos tales como forma y tamaño de los poros.

Para obtener la expresión de la Fuerza capilar $\vec{F_c}$ *se tomará como referencia la fuerza que actúa en un capilar* Fig. IV. 4.

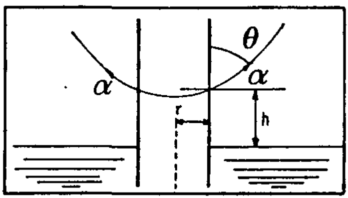


Fig. IV. 4 Tubo capilar.

Definiendo los siguientes conceptos, basándose en la figura anterior :

$\vec{\sigma} \cos \theta$ = *fuerza capilar vertical hacia arriba, por unidad de longitud.*

$2 \pi r$ = *longitud de la circunferencia en la que el líquido y el sólido están en contacto:*

$\pi r^2 h$ = *volumen del líquido que asciende interiormente por el capilar.*

Se tiene que :

$\vec{F}_c$ = *fuerza capilar* = $2 \pi r \vec{\sigma} \cos \theta$ (IV.2)

si $dV \cong \pi r^2 h$

multiplicando la Ecuación IV.2 por dV/dV y sustituyendo dV del denominador :

$$\vec{F}_c = 2 \pi r \vec{\sigma} \cos \theta \frac{dV}{\pi r^2 h}$$

simplificando :

$$\therefore \quad \vec{F}_c = \frac{2 \vec{\sigma} \cos \theta}{r h} dV$$

que es la expresión para la fuerza capilar aplicada al elemento diferencial dV.

IV.5 FUERZA DE INERCIA

La expresión para la fuerza de inercia se desarrollará a continuación empleando análisis dimensional :

$$\vec{F}i\ (m\frac{L}{t^2}) = \lambda\ \vec{a}\ \rho z\ (\frac{m}{L^3})\ v^2\ (\frac{L^2}{t^2})\ \frac{1}{d}\ (\frac{1}{L})\ \Delta V\ (L^3)$$

que para dV *es :*

$$\vec{F}i = \frac{\lambda\ \vec{a}\ \rho z\ v^2\ dV}{d}$$

donde :

λ = *constante adimensional*

$\vec{a}$ = *vector unitario*

d = *diámetro del poro*

ρz= *densidad del fluido que constituye el volumen* dV

v = *velocidad del fluido.*

La dirección y sentido del vector $\vec{F}i$ *corresponden a la de la aceleración y se indican mediante el vector unitario* $\vec{a}$.

IV.6 E C U A C I O N D E D A R C Y

Matemáticamente, la Segunda Ley de Newton aplicada al sistema de fuerzas analizado, se expresa :

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{F}p + \vec{F}sg + \vec{F}\mu + \vec{F}c + \vec{F}i = \vec{0}$$

sustituyendo la ecuación correspondiente para cada fuerza en la ecuación anterior, se tiene :

$$-\vec{\nabla} P \; dV + \Delta \rho \; \vec{g} \; dV - \frac{\vec{v} \; \mu \; dV}{k} + \frac{2 \; \vec{\sigma} \; \cos \theta \; dV}{r \; h} + \frac{\lambda \; \vec{a} \; \rho_2 \; v^2 \; dV}{d} = \vec{0}$$

donde :

$$\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$$

$$\vec{g} = g \; \hat{k}$$

las velocidades de escurrimiento en medios porosos son generalmente muy bajas, flujo laminar; por lo que se puede despreciar el término que contiene v^2 *(la fuerza de inercia).*

Factorizando dV *y simplificando se tiene :*

$$\left(-\vec{\nabla} P + \Delta \rho \; \vec{g} - \frac{\vec{v} \; \mu}{k} + \frac{2 \; \vec{\sigma} \; \cos \theta}{r \; h} + \frac{\lambda \; \vec{a} \; \rho_2 \; v^2}{d} \right) dV = \vec{0}$$

$$-\vec{\nabla} P + \Delta \rho \; \vec{g} - \frac{\vec{v} \; \mu}{k} + \frac{2 \; \vec{\sigma} \; \cos \theta}{r \; h} = \vec{0}$$

a continuación se despeja $\vec{v}$:

$$\therefore \quad \vec{v} = - \frac{k}{\mu} \left(\vec{\nabla} P - \Delta \rho \; \vec{g} - \frac{2 \; \vec{\sigma} \; \cos \theta}{r \; h} \right)$$

que es la Ecuación General de Darcy.

En la ecuación anterior, si se desprecian la acción de la gravedad y los efectos capilares, se tiene que :

$$\vec{v} = - \frac{k}{\mu} \vec{\nabla} P \qquad \text{Ecuación de Muskat.}$$

Obsérvese que la velocidad es proporcional a la relación k/μ, *esta relación se denomina movilidad.*

Supóngase que el volumen diferencial considerado corresponde al de un gas que se desplaza en un yacimiento y que dicho volumen se encuentra alejado de los pozos productores, por lo cual el gradiente de presión $\vec{\nabla} P$ *es pequeño. Las fuerzas que actúan sobre el elemento diferencial* dV *se muestran en la* Fig. IV.5 a, *donde se observa que la resultante de* $\vec{F}_p$, $\vec{F}_g$ *y* $\vec{F}_e$ *tenderá a desplazar* dV *hacia la parte superior del yacimiento donde formará parte del casquete de gas.*

En la zona vecina al pozo productor, el gradiente de presión es grande y una burbuja de gas será arrastrada hacia el pozo a pesar de su tendencia a segregarse, Fig. IV.5 b.

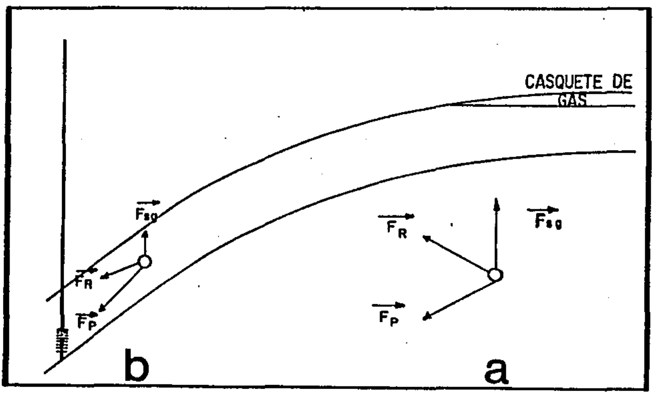


Fig. IV.5.

La fuerza de viscosidad se opone al movimiento; su dirección es por lo tanto la de la resultante determinada por $\vec{F}_p$ y $\vec{F}_{sg}$ y su sentido contrario como se aprecia en la Fig.IV.6. *La fuerza $\vec{F}_R$ resultante de todas las anteriores será la que en última instancia rige el desplazamiento de la burbuja de gas considerada* (Fig. IV.6).

En el caso de tener un volumen dV *de aceite en un medio poroso gaseoso, se observará que el sentido de $\vec{F}_{sg}$ es hacia arriba puesto que $\vec{F}_o$ es mucho mayor que $\vec{F}_g$, ya que el gas es el que recibe el mayor empuje.*

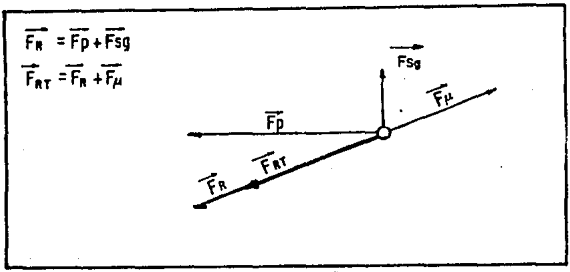


Fig.IV.6.

Otro enfoque en el estudio de la Ecuación de Darcy se lleva a cabo analizando los principios físicos que rigen el comportamiento de flujo de fluidos viscosos en tuberías, los cuales fueron estudiados inicialmente por Navier-Stokes entre otros investigadores de la Hidrodinámica, cuya base es la distribución del campo de velocidades en cualquier sistema fluyente, estableciendo el equilibrio dinámico entre las fuerzas de inercia, viscosas, fuerzas externas y la distribución interna de presiones del fluido.

Los estudios anteriores sirvieron de base para que Henry Darcy realizara experimentos en filtros empacados con arena en los que hacia fluir agua, que lo llevaron a desarrollar su teoría de flujo de fluidos homogéneos en un medio poroso.

Esta teoría se ha extendido al movimiento de otros fluidos, incluyendo dos o más no miscibles, en rocas consolidadas y otros medios porosos.

Darcy encontró que el gasto que pasaba a través de un filtro de arena, Fig. IV.7, era proporcional al gradiente de presión aplicado al área transversal al flujo; la longitud ya está incluida en el gradiente .

Matemáticamente :

$$q = \alpha A \frac{h_1 - h_2}{L}$$

donde :

q = *gasto de agua que fluye hacia la parte inferior, a través del empacamiento.*

A = *área transversal del empacamiento.*

L = *longitud del empacamiento.*

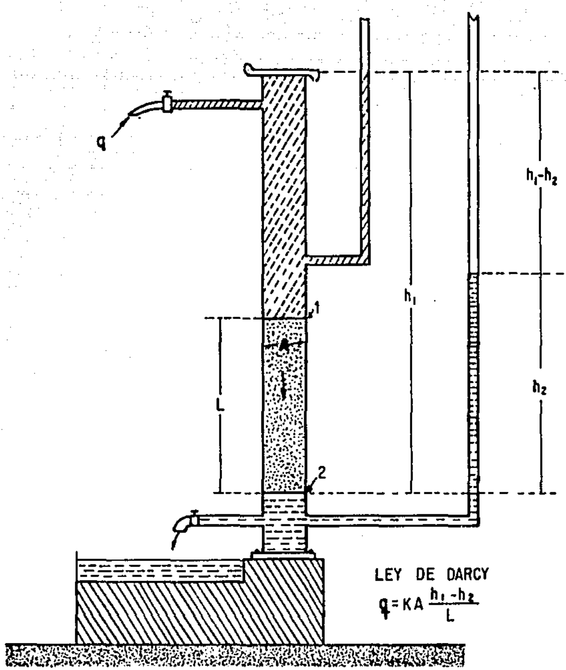
h_1, h_2 = *alturas del nivel de agua en los manómetros colocados a la entrada y a la salida del empacamiento respecto al nivel de referencia.*

α = *constante de proporcionalidad, característica del empacamiento.*

Al aplicarse este principio a otros fluidos se encontró que la constante α podía ser considerada como k/μ .

La forma general de la ecuación de Darcy para el flujo de fluidos a través de un medio poroso es :

$$\vec{V}_{s} = -\frac{k}{\mu}\left(\vec{\nabla} P - \rho \vec{g} - \frac{2\,\vec{\sigma}\cos\theta}{r\,h}\right)$$



EXPERIMENTO DE DARCY

FIG. IV.7

donde :

$$V_s\,[\,cm/s\,],\quad \mu\,[\,cp\,],\quad \rho\,[\,g/cm^3\,],\quad r\,[\,cm\,],\quad h\,[\,cm\,]$$

$$\sigma\,[\,dina/cm\,],\quad P\,[\,atm\,]\ \ y\ \ K\,[\,d\,]$$

a éstas se les denomina unidades de Darcy. Lo anterior se expresa con palabras de la siguiente manera :

> *'Un medio poroso tiene una permeabilidad de un darcy si al hacer pasar un fluido a través de él, de viscosidad de un centipoise, con un área transversal al flujo de 1 cm^2, una longitud de medio poroso de 1 cm, con un gasto de 1 cm^3/s, ocurre una caída de presión de una atmósfera'.*

Como la caída de presión aumenta en la dirección al flujo, el signo negativo de la Forma General de la Ecuación de Darcy se requiere para contrarrestar el signo negativo del gradiente.

La Ec. de Darcy presupone las consideraciones siguientes :

a) Fluido homogéneo (una sola fase).
b) No existen reacciones químicas entre el fluido y el medio poroso.
c) La permeabilidad es independiente del fluido, de la temperatura, de la presión y de la localización.
d) Régimen laminar.
e) No existe efecto de Klinkenberg.
f) Flujo permanente e incompresible.
g) El fluido satura 100 % al medio poroso.

Se debe hacer notar que la velocidad a la que se refiere la ecuación de Darcy es la velocidad aparente, por lo que si se desea evaluar la velocidad real habrá que dividir la velocidad aparente entre la porosidad efectiva del medio, ésto es :

$$v_{med} = \frac{v_D}{\phi_e}$$

donde :

v_{med} = *velocidad real o media*

v_{a} = *velocidad aparente*

ϕ_{e} = *porosidad efectiva.*

CAPITULO V

FLUJO DE FLUIDOS HACIA LOS POZOS

CAPITULO V FLUJO DE FLUIDOS HACIA LOS POZOS

V.1 ECUACION DE DIFUSION

A continuación se presenta un desarrollo sintetizado de la Ecuación de Difusión. En el Apéndice I se expone el desarrollo completo.

Si una ecuación de estado para un fluido ligeramente compresible, junto con una de movimiento (Ley de Darcy) se introducen a la ecuación de continuidad, se forma un sistema que describe por completo al flujo en espacio y tiempo; a la ecuación resultante se le llama "Ecuación de Difusión" *y se forma de la siguiente manera :*

Partiendo de la Ecuación de Continuidad:

$$-\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \phi \rho \qquad \text{(V.1)}$$

si se considera la ecuación de estado para un fluido ligeramente compresible:

$$\rho = \rho_o e^{c(P-Po)}$$

junto con la ecuación de movimiento (Ecuación de Darcy):

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} \vec{\nabla} P$$

se tendrá:

$$\nabla^2 P = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \qquad \text{(V.2)}$$

que es la ecuación de difusión para un fluido ligeramente compresible en forma vectorial. Aquí se incluyen otras consideraciones, como gradientes de $\bar{P}$ pequeños, μ constante, etc.

Escribiendo la Ec. V.2 *en coordenadas cilíndricas y considerando que no existe variación vertical de la presión, ni con el ángulo θ, se obtiene la forma más conocida de la ecuación de difusión. Esta es:*

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \qquad \text{(V.3)}$$

esta ecuación tiene como suposiciones principales :

I. *Medio poroso homogéneo e isótropo.*
II. *Medio poroso incompresible.*
III. *Viscosidad independiente de la presión.*
IV. *No existe variación de la presión en la dirección Z.*
V. *Para un radio determinado 'r' la presión es la misma en todas direcciones.*
VI. *Efectos capilares y gravitacionales despreciables.*
VII. *Fluido ligeramente compresible.*
VIII. *Flujo laminar.*

V.2 SOLUCIONES DE LA ECUACION DE DIFUSION

A continuación se presenta un desarrollo sintetizado de algunas de las soluciones de la Ecuación de Difusión para diferentes Condiciones de Frontera. Estas condiciones a su vez corresponden a situaciones idealizadas de problemas de flujo en yacimientos. En el Apéndice II se presenta el desarrollo completo.

a) Yacimiento Infinito, Gasto constante en el pozo *y* Presión Inicial uniforme.

Para obtener esta solución de la Ec.V.3 *es necesario usar dos condiciones de frontera y una condición inicial:*

a) $P(r,0) = Pi \qquad r \geq 0$ *(condición inicial)*

b) $\left(r \dfrac{\partial P}{\partial r} \right)_{rw} = - \dfrac{q \mu}{2 \pi k h} \qquad t > 0$ *(condición de frontera interna)*

c) $\lim_{r \to \infty} P(r,t) = Pi \qquad t \geq 0$ *(condición de frontera externa).*

La condición de frontera b) corresponde a gasto constante en el pozo y la condición c) al concepto de yacimiento infinito, lo cual corresponde a tener la presión inicial a un tiempo dado, en radios suficientemente grandes.

Como se verá más adelante, la condición b) puede ser aproximada por :

$$\lim_{r \to 0} r \frac{\partial P}{\partial r} = - \frac{q \mu}{2 \pi k h} \qquad t > 0$$

lo anterior facilita la solución del problema planteado. A ésta se le llama **solución Fuente Lineal.**

El desarrollo completo de esta solución se presenta en el Apéndice II. Esta solución es:

$$P(r,t) = Pi - \frac{q\,\mu}{4\,\pi\,k\,h}\ Ei\left(-\frac{\phi\,\mu\,c\,r^2}{4\,k\,t}\right)$$

en la ecuación anterior la expresión Ei (- Y) *donde :*
$Y = \frac{\phi\,\mu\,c\,r^2}{4\,k\,t}$ *, es la Función Integral Exponencial, cuya gráfica se muestra en la* Fig. V.1.

Nisle (Fundamentals of Reservoir Engineering, L.P. Dake, USA 1982) demostró que la integral exponencial puede aproximarse por la serie :

$$Ei\ (-Y) = \ln Y + 0.5772 - Y + \frac{Y^2}{2x2!} - \frac{Y^3}{3x3!} + \frac{Y^4}{4x4!} - \ldots \frac{Y^n}{nxn!}$$

el número de términos requeridos depende del valor de Y *y de la exactitud deseada o requerida de* Ei(-Y).

Para valores del argumento menores de 2, *la función se calcula mediante la siguiente expresión :*

$$Ei(-Y) = a_0 + a_1Y + a_2Y^2 + a_3Y^3 + a_4Y^4 + a_5Y^5 + Ln\ Y$$

donde:

a_0 = 0.57721566 a_1 = -0.99999193
a_2 = 0.24991055 a_3 = -0.05519968
a_4 = 0.00976004 a_5 = -0.00107857

para valores del argumento menores de 0.0025, *la función puede aproximarse por:*

$$Ei\ (-Y) \cong Ln\ Y + \gamma \qquad \gamma = 0.5772$$

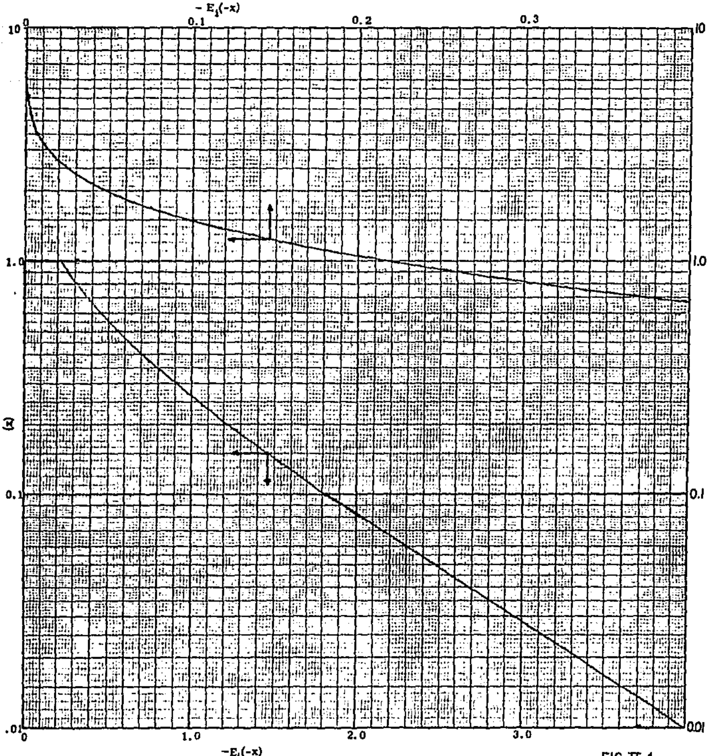


FIG. V. 1

b) Yacimiento Cilíndrico, Gasto constante en la Frontera Interna (Pozo), Cero Flujo en la Frontera Externa (Yacimiento Volumétrico) y Presión Inicial Uniforme.

En este caso, se trata de resolver la Ec. V.3 con las condiciones siguientes:

d) $P(r,0) = P_i \qquad r \geq 0$ *(condición inicial)*

e) $\left(r \dfrac{\partial P}{\partial r} \right)_{r_w} = - \dfrac{q \mu}{2 \pi k h} \qquad t > 0$ *(condición de frontera interna)*

f) $\left(\dfrac{\partial P}{\partial r} \right)_{r_e} = 0 \qquad t \geq 0$ *(condición de frontera externa).*

El utilizar variables adimensionales permitirá tener una solución más general, siendo una ventaja adicional el que las ecuaciones queden en forma más compacta.

Definiendo:

$$t_D = \frac{k\, t}{\phi\, \mu\, c\, r_w} \qquad (V.4)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \qquad (V.5)$$

$$P_D = \frac{2 \pi k h (P - P_i)}{q \mu} \qquad (V.6)$$

considerando los cambios de variable de r_D, t_D *y* P_D *y tomando en cuenta que ahora el radio de la frontera interna es* r_w, *se obtiene la ecuación adimensional:*

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial r^2_D} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial P_D}{\partial t_D} = \frac{\partial P_D}{\partial t_D} \qquad (V.7)$$

aplicando transformadas de Laplace y derivando ecuaciones se obtiene :

$$P_D(r_D,S) = \frac{k_1(r_{eD}\sqrt{S})\, I_0(r_D\sqrt{S}) + I_1(r_{eD}\sqrt{S})\, K_0(r_D\sqrt{S})}{S^{\frac{3}{2}}\left[I_1(r_{eD}\sqrt{S})\, k_1(\sqrt{S}) - I_1(\sqrt{S})\, K_1(r_{eD}\sqrt{S})\right]} \qquad (V.8)$$

para obtener la función original correspondiente a la ecuación anterior, se utiliza el teorema de residuos de Cauchy (Robert Earlougher) ; esta función es :

$$P_D(r_D,t_D) = \frac{2}{r_{eD}^2 - 1}\left(\frac{r_D^2}{4} + t_D\right) - \frac{r_{eD}^2}{r_{eD}^2 - 1}\,\mathrm{Ln}\, r_D -$$

$$- \frac{3 r_{eD}^4 - 4 r_{eD}^4\,\mathrm{Ln}\, r_{eD} - 2 r_{eD}^2 - 1}{4\,(r_{eD}^2 - 1)^2} +$$

$$+ \Pi \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{e^{(-\alpha_\eta^2 t_D)}\, J_1^2(\alpha_\eta r_{eD})\left[J_1(\alpha_\eta)\, Y_0(\alpha_\eta r_D) - Y_1(\alpha_\eta)\, J_0(\alpha_\eta r_D)\right]}{\alpha_\eta\left[J_1^2(\alpha_\eta r_{eD}) - J_1^2(\alpha_\eta)\right]} \qquad (V.9)$$

en donde α_η son las raices de:

$$J_1(\alpha_\eta r_{eD})\, Y_1(\alpha_\eta) - J_1(\alpha_\eta)\, Y_1(\alpha_\eta r_{eD}) = 0$$

con la que se obtiene $P_D(r_D,t_D)$ *para cualquier valor de* t_D.

Para valores grandes del tiempo adimensional, la serie infinita de la Ec.V.9 tiende a cero.

Puesto que re >> rw, para $r_D = 1$ la ecuación se puede aproximar por:

$$P_D(1,t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \text{Ln}\, r_{eD} - \frac{3}{4} + 2\sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{e^{(-\alpha\eta^2 t_D)} J_1^2(\alpha\eta\, r_{eD})}{\alpha\eta^2 \left[J_1(\alpha\eta\, r_{eD}) - J_1^2(\alpha\eta)\right]}$$

puesto que :

$$J_1(\alpha\eta)\, Y_0(\alpha\eta) - Y_1(\alpha\eta)\, J_0(\alpha\eta) = \frac{2}{\pi\, \alpha\eta} \qquad (V.10)$$

c) Yacimiento Cilíndrico, Gasto Constante en la Frontera Interna y Presión Constante en la Frontera Externa.

La única diferencia con el problema anterior es la segunda condición de frontera. Esta se expresa como:

g) $P(\,r_e, t\,) = P_i \qquad t \geq 0$

en forma similar a como se obtuvo la Ec.V.8, se llega a:

$$P_D(r_D,S) = \frac{I_0(r_{eD}\sqrt{S})\, K_0(r_D\sqrt{S}) - K_0(r_{eD}\sqrt{S})\, I_0(r_D\sqrt{S})}{S^{\frac{3}{2}}\left[I_1(\sqrt{S})\, K_0(r_{eD}\sqrt{S}) + K_1(\sqrt{S})\, I_0(r_{eD}\sqrt{S})\right]} \qquad (V.11)$$

que es la solución del problema en el espacio transformado.

La función original correspondiente es :

$$P_D(r_D,t_D) = \text{Ln}\,\frac{r_{eD}}{r_D} - \Pi \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{e^{(-\beta\eta^2 t_D)}\, J_o(\beta\eta\, r_{eD})[\, J_1(\beta\eta)\; Y_o(\beta\eta\, r_D)\,]}{\beta\eta\,[\, J_1^2\,(\beta\eta) - J_o^2\,(\beta\eta\, r_{eD})\,]}$$

$$- \frac{Y_1\,(\beta\eta)\; J_o\;\; (\beta\eta\, r_D)}{\beta\eta\,[\, J_1^2\,(\beta\eta) - J_o^2\,(\beta\eta\, r_{eD})\,]} \qquad (V.12)$$

en donde $\beta\eta$ *son soluciones de la ecuación:*

$$J_1(\beta\eta)\; Y_o(\beta\eta\, r_{eD}) - Y_1(\beta\eta)\; J_o(\beta\eta\, r_{eD}) = 0$$

si $r_D = 1$, *de la* Ec.V.12 *se tiene, considerando la* Ec.V.10 :

$$P_D(1,t_D) = \text{Ln}\; r_{eD} - 2 \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{e^{(-\,\beta\eta^2\; t_D)}\; J_o^2\,(\beta\eta\, r_{eD})}{\beta\eta^2\,[\; J_1^2\,(\beta\eta) - J_o^2\,(\beta\eta\, r_{eD})\,]}$$

con la cual se puede calcular la caída de presión en el pozo.

A medida que t_D *aumenta, la serie infinita de la* Ec.V.12, *tiende a cero, por consiguiente, para tiempos adimensionales grandes:*

$$P_D(r_D) = \text{Ln}\,\frac{r_{eD}}{r_D} = \frac{r_e}{r}$$

lo anterior significa que el flujo se encuentra en régimen permanente, para tiempos suficientemente grandes.

Puesto que la caída de presión adimensional está dada por:

$$P_D = \frac{2 \pi k h (P - Pi)}{q \mu}$$

entonces, considerando la ecuación anterior:

$$q = \frac{2 \pi k h (P - Pi)}{\mu \, Ln (re/r)}$$

que es una de las ecuaciones más conocidas en Ingeniería de Yacimientos, en la que P *es la presión existente a una distancia* r *del pozo.*

V.3 REPRESENTACIONES ADIMENSIONALES

Las representaciones adimensionales son una herramienta de uso generalizado en el área de análisis de presiones, ya que de esta manera se incluye en las soluciones cualquier valor de los parámetros involucrados.

Ya que las principales variables que se han utilizado en este capítulo son tiempo, radio y presión, éstas se han definido en forma adimensional anteriormente (Ecs. V.4, V.5, V.6); de estas ecuaciones se tiene que :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{q \mu}{2 \pi k h r_w} \frac{\partial P_D}{\partial r_D}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{q \mu}{2 \pi k h r_w^2} \frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2}$$

sustituyendo las dos expresiones anteriores y $\frac{\partial P}{\partial t}$ *en la ecuación de difusión en forma vectorial*, Ec. V.3 *se obtiene la ecuación correspondiente en forma adimensional :*

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D}\frac{\partial P_D}{\partial r_D} = \frac{\partial P_D}{\partial t_D}$$

de manera similar se obtiene la forma adimensional de la solución fuente lineal :

$$P_D (r_D, t_D) = -\frac{1}{2} Ei \left[-\frac{r^2_D}{4 t_D} \right]$$

esta solución involucra valores cualesquiera de los parámetros ϕ, k, μ, q, h *y* c.

En la Fig. V.2 *se presenta la gráfica de la ecuación anterior; se utilizan las unidades siguientes :*

P (psia), q (BPD) @ c.s., μ (cp), k (md), h y r_w (pies), t (hr), *con las que las expresiones correspondientes de* P_D *y* t_D *son :*

$$P_D = \frac{k\ h\ (P - P_i)}{141.2\ q\ \mu\ B}$$

$$t_D = \frac{0.0002637\ k\ t}{\phi\ \mu\ c_t\ r_w^2}$$

en la Fig. V.2 *se utiliza la compresibilidad del sistema roca-fluidos* c_t *en la expresión de* t_D, *en lugar de la compresibilidad del fluido* c. *De igual manera, por convención, se usa* $P_i - P$ *en la expresión de* P_D.

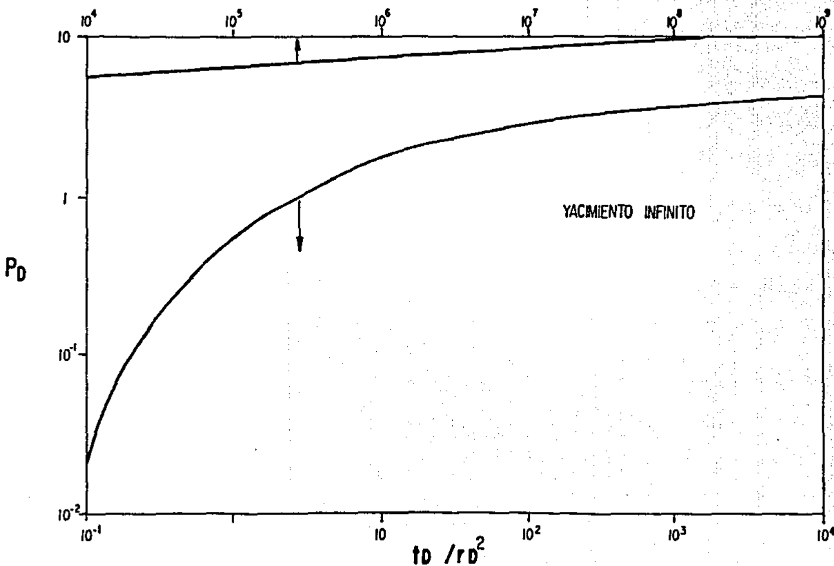


FIG.V.2 GRAFICA DE LA SOLUCION FUENTE LINEAL

Finalmente, si $\frac{t_D}{r_D^2} > 100$, $P_D\,(r_D,\ t_D)$

se puede calcular con :

$$P_D(r_D,\ t_D) = \frac{1}{2}\left[\ \mathrm{Ln}\left(\frac{t_D}{r_D^2}\right) + 0.80907\ \right]$$

o bien con :

$$P_D(r_D, t_D) = 1.1513\left[\ \log\left(\frac{t_D}{r_D^2}\right) + 0.3514\ \right]$$

V.4 FLUJOS LINEAL Y RADIAL EN REGIMEN PERMANENTE

V.4.1 CLASIFICACION DE SISTEMAS DE FLUJO EN EL YACIMIENTO

Los sistemas de flujo en el yacimiento, generalmente, se clasifican de acuerdo con a) la clase de fluido, b) la geometría del yacimiento y c) el gasto al cual el flujo se aproxima a una condición de régimen permanente después de una perturbación.

Además, se pueden tener movimientos monofásicos, bifásicos o trifásicos de fluidos. Muchos sistemas consisten de sólo gas, aceite o agua y la mayoría de los restantes son sistemas gas-aceite o aceite-agua.

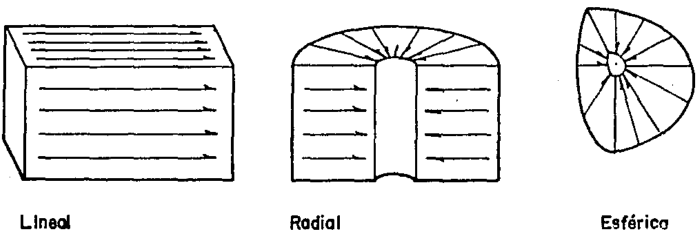


Fig. V.3 Geometría de flujo.

Los dos sistemas geométricos de mayor interés práctico son los que dan origen a los flujos lineal y radial. *En el flujo lineal, como lo muestra la* Fig. V.3, *las líneas de flujo son paralelas y la sección transversal expuesta al flujo es constante. En el flujo radial las líneas de flujo son rectas y convergen en dos dimensiones a un centro común, por ejemplo, un pozo. La sección transversal expuesta al flujo disminuye a medida que se aproxima al centro. Ocasionalmente, el flujo esférico es de interés, y en éste las líneas de flujo son rectas y convergen en tres dimensiones hacia un centro común.*

Aunque las trayectorias reales de las líneas de flujo en las rocas son irregulares debido a la forma de los espacios porosos, las trayectorias generales o promedio pueden representarse por líneas rectas en flujo lineal, radial o esférico.

En un yacimiento de aceite no se encuentra ninguna de estas geometrías exactamente pero para fines de ingeniería, la geometría existente puede a menudo representarse por una de estas idealizaciones.

El tipo de modelo más útil es el basado en la analogía entre el flujo eléctrico y el flujo de fluidos en rocas permeables. Estos modelos eléctricos se construyen de manera que sus geometrías sean proporcionales a la de los yacimientos que representan.

Finalmente, los sistemas de flujo en rocas de yacimientos se clasifican de acuerdo con su régimen en : Permanente y variable. En sistemas de régimen permanente la presión y la velocidad del fluido en cada punto, a través del sistema, no cambian con el tiempo.

V.4.2 FLUJO LINEAL DE FLUIDOS INCOMPRESIBLES

La Fig. V.4 representa un flujo lineal a través de un cuerpo poroso de sección transversal constante, donde ambos extremos están expuestos completamente al flujo, y donde no ocurre flujo a través de los lados, cara superior o fondo.

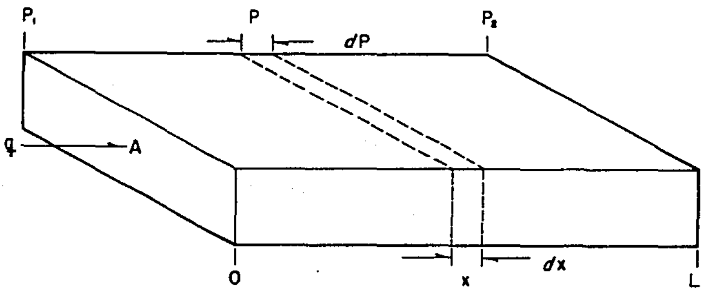


Fig. V.4 Flujo lineal.

Si el fluido es, o puede considerarse desde el punto de vista práctico en ingeniería, incompresible, la velocidad es igual en cualquier punto del sistema, como lo es el gasto total a través de cualquier sección transversal, de manera que :

$$v = \frac{q}{A} = -\ 8.364 \times 10^{-3}\ \frac{k}{\mu}\ \frac{dP}{dx}$$

separando variables e integrando sobre la longitud del cuerpo poroso :

$$\frac{q}{A} \int_{0}^{L} dx = - 8.364 \times 10^{-9} \frac{k}{\mu} \int_{P_1}^{P_2} dp$$

$$q = \frac{8.364 \times 10^{-9} \; (P_1 - P_2)}{\mu \; L} \qquad (V.13)$$

en esta integración se ha removido q, μ y k de la integral, suponiendo que son constantes con la presión.

Por ejemplo, el gasto para una presión diferencial de 7 kg/cm^2, permeabilidad de 250 md, fluido con una viscosidad de 2.5 cp, longitud de 137 m y sección transversal de 4.5 m^2, será:

$$q = \frac{8.364 \times 10^{-9} * 250 * 4.5 * 7}{2.5 * 137} = 192 \times 10^{-9} \; m^3/día.$$

V.4.3 FLUJO LINEAL DE GASES

En un sistema lineal en régimen permanente, el gasto del gas, expresado en metros cúbicos por día, es el mismo en todas las secciones transversales. Sin embargo, debido a que el gas se dilata a medida que la presión disminuye, la velocidad será mayor en el lado de alta presión y, por consiguiente, el gradiente de presión aumenta hacia el lado de baja presión. El flujo en cualquier sección transversal x de la Fig. V.4, *donde la presión es* P, *puede expresarse en términos del flujo en metros cúbicos por día, por :*

$$q_g = \frac{q_{cs}\, P_{cs}\, \overline{T}y\, \overline{Z}}{239.1\; T_{cs}\; P}$$ m^3 de gas por día a las condiciones del yacimiento.

Sustituyendo en la ley de Darcy :

$$\frac{q_{cs}\; P_{cs}\; Ty\; Z}{239.1\; T_{cs} P\; A} = -\,8.364 \times 10^{-3}\, \frac{k}{\mu}\, \frac{dP}{dx}$$

separando variables e integrando :

$$\frac{119.56\; q_{cs}\; P_{cs} T_y\; \overline{Z}\,\mu}{239.1\; k\; T_{cs}\; A} \int_0^L dx = -\int_{P1}^{P2} P\; dP = \frac{1}{2}\,(P_1^2 - P_2^2)$$

finalmente, para el gas :

$$q = \frac{T_{cs}\; A\; k_g\; (P_1^{\,2} - P_2^{\,2})}{2\; P_{cs}\; \overline{T}y\; \overline{Z}\; L\; \mu_g} \qquad (V.14)$$

por ejemplo, para T_{cs} = 15.6°C, A = 4.5 m², kg = 125 md, P_1 = 70 kg/cm², P_2 = 35 kg/cm², P_{cs} = 1.03 kg/cm², $\bar{T}y$ = 122°C, $\bar{Z}$ = 0.92 L = 137 m y μg = 0.015 cp :

$$q_{cs} = \frac{288.75 * 4.5 * 125 * (70^2 - 35^2)}{2 * 1.03 * 122 * 0.92 * 137 * 0.015}$$

$$q_{cs} = 1\ 256\ 247 \quad m^3/día$$

de nuevo se ha dejado $\bar{Z}$, $\bar{T}y$, kg *y* μg *fuera de la integral, consideradas constantes con la presión y, también, se han usado valores promedio. Si se expresa el gasto en metros cúbicos por día a la* presión media, $\bar{P}$, *y temperatura del yacimiento,* $\bar{T}y$ *se tiene:*

$$q_{cs} = \bar{q} \; \frac{(P_1 + P_2)}{2\ P_{cs}} \; \frac{T_{cs}}{\bar{T}y} \; \frac{1}{Z}$$

donde $\bar{P}$ = 1/2 (P_1 + P_2). *Sustituyendo esta expresión en la* Ec.V.14 *y factorizando* $(P_1^2 - P_2^2)$ *en* $(P_1 + P_2)$ *:*

$$\bar{q} = \frac{8.364 \times 10^{-3}\ k\ A\ (P_1 - P_2)}{\mu\ L} \quad m^3/día$$

por lo tanto, la ley para el flujo lineal de gases es la misma que para líquidos, Ec.V.13, *siempre y cuando el gasto de gas, en este caso en metros cúbicos por día, se exprese a condiciones de presión media y temperatura de flujo, usando un factor de desviación media.*

V.4.4 FLUJO RADIAL DE UN FLUIDO INCOMPRESIBLE

Considérese un flujo radial hacia un pozo vertical de radio r_w *en una capa horizontal de espesor y permeabilidad uniformes, como lo muestra la* Fig. V.5.

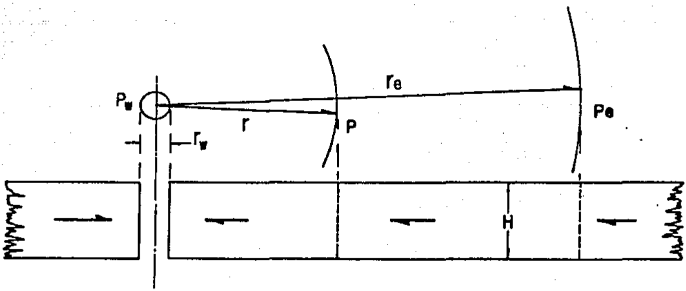


Fig. V.5 Flujo radial.

Si el fluido es incompresible, el flujo a través de cualquier circunferencia es constante. Sea P_w *la presión en el pozo cuando a éste fluyen* q *metros por día @ c.y. y una presión* P_e *constante en el radio exterior* r_e. *Sea* P *la presión a cualquier radio* r.

A este radio r :

$$v = \frac{q}{A} = \frac{q}{2\,\pi\, r\, h} = -\,8.364 \times 10^{-3}\ \frac{k}{\mu}\ \frac{dP}{dr}$$

q es positivo en la dirección positiva de r. Separando variables e integrando entre dos radios cualesquiera r_1 y r_2, donde las presiones son P_1 y P_2, respectivamente :

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{q\ dr}{2\,\pi\, r\, h} = -\int_{P_1}^{P_2} 8.364 \times 10^{-3}\ \frac{k}{\mu}\ dP$$

$$q = -\,\frac{52.55 \times 10^{-3}\ k\ h\ (P_2 - P_1)}{\mu\ \ln\,(r_2/r_1)}$$

generalmente el signo menos (-) no se incluye, ya que cuando P_2 es mayor que P_1, el flujo es ya negativo, es decir, en la dirección negativa de r, o hacia el pozo. Comúnmente q se expresa en unidades a condiciones superficiales en lugar de unidades a condiciones de yacimiento :

$$q_{cy} = Bo * q_{cs}$$

$$q_{cs} = \frac{52.55 \times 10^{-3}\ k\ h\ (P_2 - P_1)}{\mu\ Bo\ \ln\,(r_2/r_1)}$$

los dos radios de interés son, generalmente, el radio del pozo r_w y el radio de drene r_e, por tanto :

$$q_{cs} = \frac{52.55 \times 10^{-3}\ k\ h\ (Pe - Pw)}{\mu\ Bo\ \ln\ (re/rw)} \qquad (V.15)$$

generalmente se obtiene el radio exterior (re) a partir del espaciamiento entre pozos.

El radio del pozo se determina comúnmente a partir del diámetro de la barrena, el diámetro de la tubería de revestimiento o de un registro de calibración del pozo. Por lo general, en la práctica no se conoce con exactitud el radio exterior ni el radio del pozo, pero en la ecuación entran como un logaritmo de un cociente haciendo que el error en la ecuación sea muy inferior a los errores de los radios.

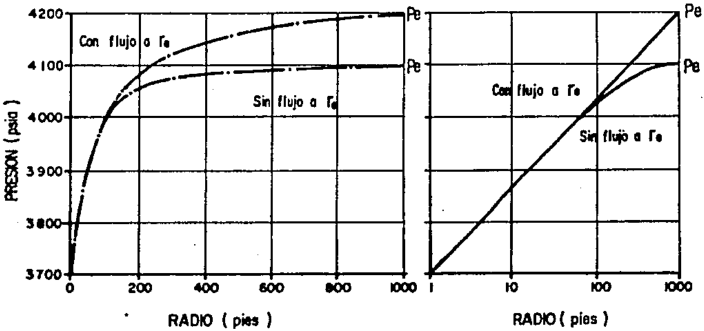


Fig. V.6 Distribuciones de presión para los flujos radiales de un fluido incompresible y de un fluido compresible sin flujo a través del límite exterior a 1000 pies .

La presión externa P_e de la Ec.V.15 es generalmente la presión estática del pozo corregida al nivel medio del intervalo productor y P_w es la presión fluyente del pozo durante un periodo de flujo estabilizado al gasto q_{cs}, corregida también al nivel medio del intervalo productor.

Las curvas superiores de las gráficas de la Fig.V.6 muestran la distribución de presión alrededor de un pozo para el flujo de un fluido incompresible. La curva en papel logarítmico es una línea recta. La introducción de la compresibilidad del líquido en la Ec.V.15 tiene muy poco efecto sobre la misma, por tanto, la Ec.V.15 es suficientemente exacta en ingeniería para expresar el flujo radial de líquidos compresibles, cuando ocurre flujo a través de la frontera exterior.

V.4.5 FLUJO RADIAL DE GASES

Sea un pozo que produce q_{cs} m^3/día *de gas en flujo radial en régimen permanente, el gasto* q, *a un radio cualquiera* r, *donde existe una presión* P *es :*

$$q_g = \frac{q_{cs} \; P_{cs} \; \overline{T}_y \; \overline{Z}}{239.1 \; T_{cs} \; P}$$ m^3 de gas por día a las condiciones del yacimiento.

Ya que $q_g/A = -8.364 \times 10^{-3} \; (k_g/\mu_g) \; dP/dr$ *y* $A = 2 \; \pi \; r \; h$ *a un radio* r *:*

$$\frac{P_{cs} \; q_{cs} \; \overline{T}_y \; \overline{Z}}{239.1 \; T_{cs} \; P \; (2 \; \pi \; r \; h)} = - \; 8.364 \times 10^{-3} \; \frac{k_g}{\mu_g} \; \frac{dP}{dr}$$

integrando entre Pw *y* Pe, *y entre* rw *y* re *:*

$$q_{cs} = \frac{\Pi \; k_g \; h \; T_{cs} \; (Pe^2 - Pw^2)}{\mu_g \; P_{cs} \; \overline{Z} \; \overline{T}_y \; \ln \; (re/rw)} \qquad (V.16)$$

si $T_{cs} = 289°K$ *y* $P_{cs} = 1.03 \; kg/cm^2$ *:*

$$q_{cs} = \frac{881.5 \; k \; h \; (Pe^2 - Pw^2)}{\mu_g \; \overline{T}_y \; \overline{Z} \; \ln \; (re/rw)} \qquad (V.17)$$

las Ecs. V.16 y V.17 son similares a la Ec. V.15 y presuponen un flujo a través de la frontera externa igual al producido en el pozo. Estas ecuaciones pueden usarse similarmente a las ecuaciones de flujo radial para flujo de líquidos, por ejemplo, para encontrar la permeabilidad promedio de la formación al flujo de gas. También constituyen la base para probar pozos de gas; sin embargo, la turbulencia cerca del pozo y los factores en régimen transitorio frecuentemente causan un comportamiento que difiere considerablemente del que se obtiene con las ecuaciones V.16 y V.17.

V.5 FLUJOS EN SERIE Y PARALELO

V.5.1 FLUJO LINEAL EN CAPAS EN SERIE

Sean dos o más capas de igual sección transversal pero de diferentes longitudes y permeabilidades, Fig.V.7, *donde existe el mismo gasto lineal q, de un fluido considerado incompresible.*

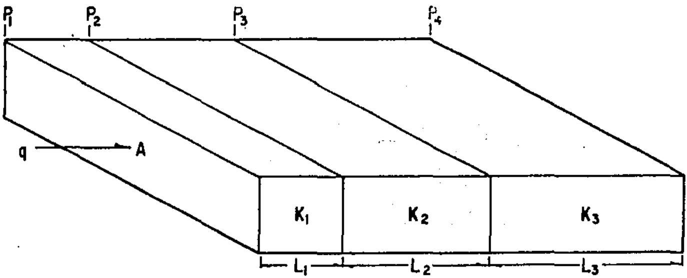


Fig.V.7 Flujo lineal en capas en serie.

Las caídas de presión son aditivas :

$$(P_1 - P_4) = (P_1 - P_2) + (P_2 - P_3) + (P_3 - P_4)$$

sustituyendo los equivalentes de estas caídas de presión de la Ec.V.13 *:*

$$\frac{q_t\ L_t\ \mu}{1.127\ \bar{k}\ A} = \frac{q_1\ L_1\ \mu}{1.127\ k_1\ A_1} + \frac{q_2\ L_2\ \mu}{1.127\ k_2\ A_2} + \frac{q_3\ L_3\ \mu}{1.127\ k_3\ A_3}$$

dado que los gastos, las áreas de las secciones transversales y las viscosidades (despreciando los cambios respecto a la presión) son iguales en todas las capas :

$$\frac{L_t}{\bar{k}} = \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3}$$

o

$$\bar{k} = \frac{L_t}{L_1/k_1 + L_2/k_2 + L_3/k_3} = \frac{\sum L_i}{\sum L_i/k_i} \qquad (V.18)$$

la permeabilidad promedio definida por la ecuación anterior es la permeabilidad que reemplaza a las permeabilidades de un número dado de capas con diferentes geometrías, y usando una misma presión diferencial, se obtiene el mismo gasto.

La Ec. V.18 *se dedujo para un fluido incompresible. Como la permeabilidad es una propiedad de la roca y no de los fluidos en movimiento a través de ella, excepto para gases a bajas presiones, la permeabilidad promedio debe ser igualmente aplicable a gases. Esto puede demostrarse de la manera siguiente:*

$$(P_1^2 - P_4^2) = (P_1^2 - P_2^2) + (P_2^2 - P_3^2) + (P_3^2 - P_4^2)$$

sustituyendo los equivalentes de la Ec. V.14, *se obtiene la misma* Ec. V.18.

Por ejemplo la permeabilidad promedio de capas de 10 md, 50 md *y* 1000 md, *y de* 2 m, 6 m *y* 12 m *de longitud, respectivamente, y de iguales secciones transversales, colocadas en serie, es :*

$$\bar{k} = \frac{\sum L_i}{\sum L_i/k_i} = \frac{(2 + 6 + 12)}{(2/10 + 6/50 + 12/1000)} = 64 \text{ md}$$

V.5.2 FLUJO LINEAL EN CAPAS EN PARALELO

Supóngase dos o más capas de igual longitud y de diferentes secciones transversales y permeabilidades, por las que pasa el mismo fluido bajo condiciones de flujo lineal y con la misma caída de presión $(P_1 - P_2)$ como lo muestra la Fig. V.8.

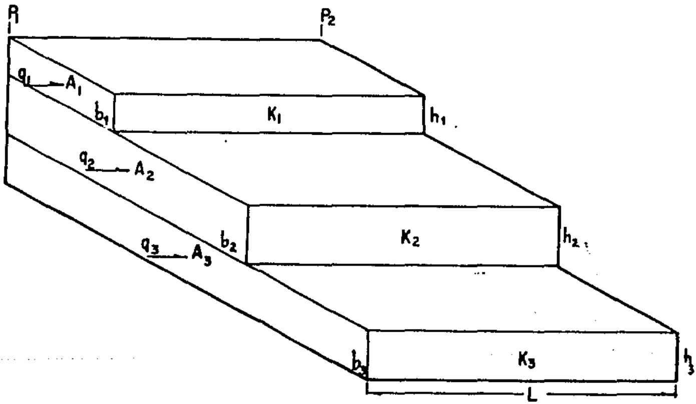


Fig. V.8 Flujo lineal en capas en paralelo.

El flujo total es la suma de los flujos individuales :

$$q_t = q_1 + q_2 + q_3$$

$$\frac{\bar{k}\ A_t(P_1 - P_2)}{\mu\ L} = \frac{k_1\ A_1(P_1 - P_2)}{\mu\ L} + \frac{k_2\ A_2(P_1 - P_2)}{\mu\ L} + \frac{k_3\ A_3(P_1 - P_2)}{\mu\ L}$$

simplificando :

$$\bar{k}\ A_t = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3\ A_3$$

$$\bar{k} = \sum k_i\ A_i \ / \sum A_i \qquad \text{(V.19)}$$

las secciones transversales, por las que pasa el mismo fluido (Fig. V.8), *son el producto de la base de la sección transversal* bi, *por el espesor de la capa* hi, *es decir :* $A_i = b_i\ h_i$.

Si todas las capas tienen la misma base bi, *se tiene que :*

$$\bar{k} = \sum k_i\ h_i \ / \sum h_i \qquad \text{(V.20)}$$

si las capas paralelas son de permeabilidad homogénea y los fluidos contenidos también lo son, la presión y el gradiente de presión a distancias iguales serán los mismos en todas las capas.

Por lo anterior, no existirá flujo de una capa a otra debido a diferencias de presión en el fluido.

Por ejemplo la permeabilidad promedio de capas de 10 md, 50 md *y* 1000 md, *y* 2 m, 6 m *y* 12 m *de espesor, respectivamente, y de una misma base, colocadas en paralelo, es :*

$$\bar{k} = \frac{\sum k_i\ h_i}{\sum h_i} = \frac{(10 * 2 + 50 * 6 + 1000 * 12)}{(2 + 6 + 12)} = 616 \text{ md}$$

V.5.3 FLUJO RADIAL EN CAPAS EN SERIE

Considérese ahora un sistema de flujo radial en una capa o estrato de espesor constante con una permeabilidad k_2 *entre el radio de drene* r_e *y un radio menor* r_1, *y una permeabilidad* alterada k_1, *entre el radio* r_1 *y el radio del pozo* r_w, *como lo muestra la* Fig. V. 9.

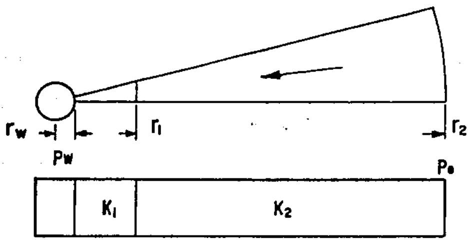


Fig. V. 9 Flujo radial encapas en serie.

Las caídas de presión en este sistema son aditivas :

$$(P_e - P_w) = (P_e - P_1) + (P_1 - P_w)$$

introduciendo la Ec. V.15 se obtiene :

$$\frac{q\ \mu\ B_o \ln (r_e/r_w)}{52.55 \times 10^{-3}\ \bar{k}\ h} = \frac{q\ \mu\ B_o \ln (r_e/r_1)}{52.55 \times 10^{-3}\ \bar{k}\ h} + \frac{q\ \mu\ B_o \ln (r_1/r_w)}{52.55 \times 10^{-3}\ \bar{k}\ h}$$

simplificando y despejando $\bar{k}$:

$$\bar{k} = \frac{k_1\ k_2 \ln (r_e/r_w)}{k_1 \ln (r_e/r_1) + k_2 \ln (r_1/r_w)} \qquad (V.21)$$

la ecuación anterior puede generalizarse para incluir tres o más zonas en serie. Esta ecuación es importante en el estudio del efecto de una disminución o aumento en la permeabilidad de la zona alrededor del pozo, sobre la productividad del mismo.

V.5.4 FLUJO RADIAL EN CAPAS EN PARALELO

Muchas formaciones productoras constan de estratos o capas delgadas que pueden variar considerablemente en permeabilidad y espesor, como lo muestra la Fig. V.10.

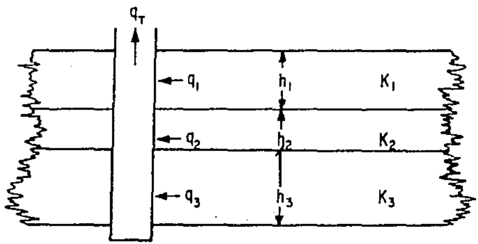


Fig. V.10 Flujo radial en capas en paralelo.

Si estas capas producen fluidos a un pozo común bajo la misma caída de presión y a partir del mismo radio de drene, se tiene que

$$q_t = q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n$$

$$\frac{52.55 \times 10^{-3}\ \bar{k}\ h_t\ (P_e - P_w)}{\mu\ B_o\ \ln\ (r_e/r_w)} = \frac{52.55 \times 10^{-3}\ k_1\ h_1\ (P_e - P_w)}{\mu\ B_o\ \ln\ (r_e/r_w)} +$$

$$\frac{52.55 \times 10^{-3}\ k_2\ h_2 (P_e - P_w)}{\mu\ B_o\ \ln\ (r_e/r_w)} + \ldots + \frac{52.55 \times 10^{-3}\ k_n\ h_n\ (P_e - P_w)}{\mu\ B_o\ \ln\ (r_e/r_w)}$$

y simplificando :

$$\bar{k}\, h_t = k_1 h_1 + k_2 h_2 + \dots + k_n h_n$$

$$\bar{k} = \frac{\sum k_i h_i}{\sum h_i} \qquad \text{(V.22)}$$

esto es equivalente al flujo en paralelo de capas lineales de la misma longitud. De nuevo, la permeabilidad promedio es la permeabilidad que puede reemplazar las de todas las capas y obtener el mismo gasto de producción bajo la misma caída de presión $(P_e - P_w)$.

V.6 F L U J O M U L T I F A S I C O E N M E D I O S P O R O S O S

Las ecuaciones de flujo para el aceite y el agua son muy similares; sin embargo, un balance de materia para el gas debe considerar, tanto el flujo de gas como una fase por separado, como el gas disuelto tanto en el agua como en el aceite.

Así pues, la velocidad del gas en cualquier punto del medio poroso está dada por :

$$V_g = V'_g + \frac{B_g \; R_{so}}{B_o} V_o + \frac{B_g \; R_{sv}}{B_v} V_v \qquad (V.23)$$

donde:

R_{so} *es la solubilidad del gas en el aceite en* pies^3 *a* c.s./bl *a* c.s.

R_{sv} *es la solubilidad del gas en el agua en* pies^3 *a* c.s./bl *a* c.s.

B_g *es el factor de volumen del gas en* bl *a* c.y./pie^3 *a* c.s.

V'_g *es la velocidad del gas libre dada por una ecuación similar a las de* V_o *y* V_v *(dadas por la* Ec. de Darcy).

Así, sustituyendo las expresiones de las velocidades en la expresión V.23 *y posteriormente en la ecuación de continuidad para obtener la correspondiente de difusión, se tiene :*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Kx \; Kr_g}{\mu_g \; B_g} \; \frac{\partial \; P_g}{\partial \; x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Kx \; Kr_o}{\mu_o \; B_o} \; R_{so} \frac{\partial \; P_o}{\partial \; x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Kx \; Kr_v}{\mu_v \; B_v} \; Rs_v \; \frac{\partial P_v}{\partial \; x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Ky \; Kr_g}{\mu_g \; B_g} \; \frac{\partial \; P_g}{\partial \; y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Ky \; Kr_o}{\mu_o \; B_o} \; R_{so} \frac{\partial \; P_o}{\partial \; y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Ky \; Kr_v}{\mu_v \; B_v} \; Rs_v \; \frac{\partial P_v}{\partial \; y}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Kz\ Kr_g}{\mu_g\ B_g}\ \frac{\partial\ P_g}{\partial\ z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Kz\ Kr_o}{\mu_o\ B_o}\ R_{so}\frac{\partial\ P_o}{\partial\ z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Kz\ Kr_w}{\mu_w\ B_w}\ Rs_w\ \frac{\partial P_w}{\partial\ z}\right)$$

$$=\phi\ \frac{\partial}{\partial t}\ \left(\frac{S_g}{B_g}+\frac{S_o\ Rs_o}{B_o}+\frac{Sw\ Rs_w}{B_w}\right) \qquad (V.24)$$

incluyendo el término fuente en la Ec. V.24 *y utilizando unidades prácticas se tiene lo siguiente :*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Kx\ Kr_g}{\mu_g\ B_g}\ \frac{\partial\ P_g}{\partial\ x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Kx\ Kr_o}{\mu_o\ B_o}\ R_{so}\frac{\partial\ P_o}{\partial\ x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Kx\ Kr_w}{\mu_w\ B_w}\ Rs_w\ \frac{\partial P_w}{\partial\ x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Ky\ Kr_g}{\mu_g\ B_g}\ \frac{\partial\ P_g}{\partial\ y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Ky\ Kr_o}{\mu_o\ B_o}\ R_{so}\frac{\partial\ P_o}{\partial\ y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Ky\ Kr_w}{\mu_w\ B_w}\ Rs_w\ \frac{\partial P_w}{\partial\ y}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Kz\ Kr_g}{\mu_g\ B_g}\ \frac{\partial\ P_g}{\partial\ z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Kz\ Kr_o}{\mu_o\ B_o}\ R_{so}\frac{\partial\ P_o}{\partial\ z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Kz\ Kr_w}{\mu_w\ B_w}\ Rs_w\ \frac{\partial P_w}{\partial\ z}\right)$$

$$\pm\frac{q_g}{0.00127\ \Delta x\Delta y\Delta z}=\frac{\phi}{0.00713054}\ \frac{\partial}{\partial t}\ \left(\frac{S_g}{B_g}+\frac{S_o\ Rs_o}{B_o}+\frac{Sw\ Rs_w}{B_w}\right) \qquad (V.25)$$

las unidades de la Ec.V.25 son las siguientes :

q_g en pie^3 @ c.s./día,

Rs_o y Rs_w en pie^3 @ c.s./bl @ c.s.,

B_g en bl @ c.y./pie^3 @ c.s.,

B_o y B_w en bl @ c.y./bl @ c.s.,

las permeabilidades (Kx, Ky, Kz) en milidarcys,

las saturaciones en fracción y

las distancias en pies.

Hay que hacer notar que además de la ecuación para la presión capilar entre el aceite y el agua dada por la expresión :

$$Pc_{o-w} = P_o - P_w$$

se requiere la de la presión capilar entre el aceite y el gas dada por:

$$Pc_{g-o} = P_g - P_o \qquad (V.26)$$

la ecuación de la saturación para tres fases es:

$$S_o + S_w + S_g = 1$$

debido al número considerable de términos que tiene la ecuación V.25 , lo que la hace muy poco manejable, es frecuente expresarla en notación vectorial. De esta manera las ecuaciones para el flujo en tres fases, en unidades prácticas, en notación vectorial y en términos del potencial de flujo (Φ) quedan como sigue.

Para el aceite :

$$\nabla \left[\frac{K\, Kr_o}{\mu_o\, B_o} \nabla \Phi_o \right] \pm \frac{q_o}{0.00127\, \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{1}{0.00713054} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi\, S_o}{B_o} \right)$$

para el agua :

$$\nabla \left[\frac{K\ Kr_w}{\mu_w\ B_w} \nabla \Phi_w \right] \pm \frac{q_w}{0.00127\ \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{1}{0.00713054} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi\ S_w}{B_w} \right)$$

para el gas :

$$\nabla \left[\frac{K\ Kr_g}{\mu_g\ B_g} \nabla \Phi_g \right] + \nabla \left[\frac{K\ Kr_o}{\mu_o\ B_o} Rs_o\ \nabla \Phi_o \right] + \nabla \left[\frac{K\ Kr_w}{\mu_w\ B_w} Rs_w\ \nabla \Phi_w \right]$$

$$\pm \frac{q_g}{0.00127\ \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{1}{0.00713054} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{S_o\ Rs_o}{B_o} + \frac{S_w\ Rs_w}{B_w} \right) \right]$$

en las ecuaciones anteriores el potencial para cualquiera de las fases, se define como sigue:

$$\Phi = p - \frac{\rho\ D}{144}$$

donde Φ *está en* lb/pg^2, P *(presión de la fase) en* lb/pg^2, ρ *(densidad de la fase en particular) en* lb/pie^3 *y* D *es la profundidad del punto considerado en* pies *(positiva hacia abajo).*

Los gastos para todas las ecuaciones de este capítulo se manejan en bl *a* c.s./día *para el aceite y el agua y en* pie^3 *a* c.s./día *para el gas.*

V.7 INDICE DE PRODUCTIVIDAD DE LOS POZOS

La relación del gasto de producción, a la caída de presión (P_e-P_w) en el punto medio del intervalo productor, se denomina **índice de productividad.**

$$\text{Indice de productividad} = J = \frac{q_{ce}}{(P_e - P_w)} \ \text{BPD/psi}$$

el índice de productividad es una medida del potencial del pozo o de su capacidad de producir, y es una propiedad de los pozos comúnmente medida. Después de un periodo de cierre del pozo suficientemente largo para obtener equilibrio en la presión del yacimiento, empleando un medidor de presión de fondo se determina la presión estática, P_e, *y luego que el pozo haya producido a un gasto estabilizado por un tiempo determinado se mide la presión fluyente en el fondo,* P_w, *empleando el mismo medidor.*

La diferencia (P_e- P_w) *se denomina caída de presión. El gasto se determina por medio de mediciones en el tanque de almacenamiento o en algunos casos, de mediciones en el separador.*

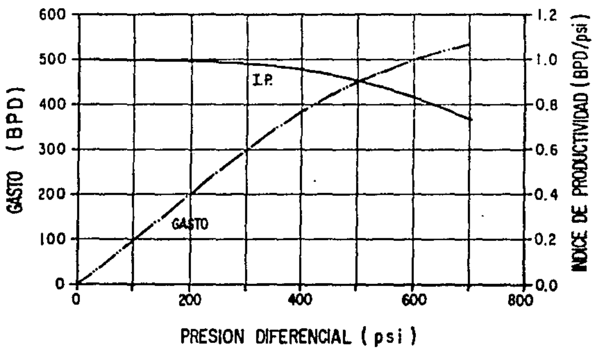


Fig. V.11 Declinación del Indice de Productividad a altos gastos de flujo.

En algunos pozos el índice de productividad o IP permanecerá constante para una amplia variación en el gasto, en tal forma que éste es directamente proporcional a la presión diferencial (P_e-P_w) de fondo. En otros pozos, a altos gastos, la proporcionalidad no se mantiene y el índice de productividad disminuye, como lo muestra la Fig.V.11. La causa de esta disminución puede ser debida a uno o varios de los siguientes factores:

a) *Turbulencia a altos gastos,*
b) *Disminución en la permeabilidad al aceite debido a la presencia de gas libre resultante de la caída de presión en el pozo,*
c) *Aumento en la viscosidad del aceite con caída de presión por debajo del punto de burbujeo, o*
d) *Reducción en la permeabilidad debido a la compresibilidad de la formación.*

En yacimientos con empuje por liberación del gas disuelto los índices de productividad de los pozos decrecen a medida que la liberación del gas se presenta, debido al aumento en la viscosidad del aceite a medida que el gas es liberado de la solución y a la reducción en la permeabilidad de la roca al aceite a medida que la saturación de aceite disminuye. Ya que cada uno de estos factores puede cambiar poco o mucho durante el proceso de liberación del gas, el índice de productividad puede disminuir a una fracción pequeña de su valor inicial. Además, como la permeabilidad al aceite disminuye, existe un aumento correspondiente en la permeabilidad al gas, dando lugar a altas relaciones gas-aceite. El gasto máximo a que un pozo puede producir depende del índice de productividad a las condiciones existentes en el yacimiento y de la presión diferencial (P_e-P_w) disponible.

Si la presión de fondo fluyendo se abate a cerca de cero, la presión diferencial (P_e-P_w) disponible es entonces la presión existente en el yacimiento, y el gasto máximo de producción será $P_e \times J$.

V.7.1 INDICE DE INYECTIVIDAD

En pozos que producen agua, el índice de productividad, basado en la producción de aceite solamente, disminuirá a medida que el porcentaje de agua aumenta debido a la disminución en la permeabilidad al aceite, aunque no ocurra una caida considerable en la presión del yacimiento. En el estudio de estos pozos "productores de agua" a veces es práctico referir el índice de productividad en base al flujo total, incluyendo agua y aceite, ya que en algunos casos el porcentaje de agua alcanza el 99 por ciento.

El índice de inyectividad *se usa generalmente en pozos de inyección durante la recuperación secundaria o mantenimiento de presión. Se define como la razón del gasto de inyección en* BPD *al exceso de presión por encima de la presión del yacimiento que causa dicho gasto de inyección :*

$$\text{Indice de Inyectividad} = I = \frac{q_{ca}}{(P_v - P_e)} \quad \text{(BPD/psi)}$$

en ambos casos, del índice de productividad y del índice de inyectividad, las presiones empleadas son presiones frente a la formación, de manera que no se incluyen las caídas de presión por fricción en la tubería de producción o tubería de revestimiento. Para inyecciones a altos gastos , estas pérdidas de presión deben ser consideradas.

V.7.2 INDICE DE PRODUCTIVIDAD ESPECIFICO

Comparando un pozo con otro en un campo dado, particularmente donde ocurren variaciones en el espesor neto productor y considerando los demás factores que afectan el índice de productividad esencialmente iguales, se usa a veces el índice de productividad específico, J_s, *o sea el índice de productividad dividido por el espesor neto productor en* pies *:*

$$\text{Indice de Productividad Especifico} = J_s = \frac{J}{h} = \frac{q_{ca}}{h(P_e - P_v)} \quad \text{(BPD/psi/pie)}$$

Los factores que afectan el índice de productividad, o el índice de productividad específico, se pueden apreciar en las siguientes ecuaciones :

$$J = \frac{q_{cs}}{(P_e - P_w)} = \frac{52.55 \times 10^{-3} k\ h}{\mu\ B_o\ \ln\ (r_e/r_w)} \qquad (V.27)$$

$$J_s = \frac{q_{cs}}{h\ (P_e - P_w)} = \frac{52.55 \times 10^{-3}\ k}{\mu\ B_o\ \ln\ (r_e/r_w)}$$

V.7.3 RELACION DE PRODUCTIVIDADES

En la evaluación del comportamiento de pozos, el factor base comúnmente empleado es el índice de productividad de un pozo en agujero descubierto (zona productora no entubada) que penetra completamente la formación normal a los estratos, y donde no ha ocurrido ninguna alteración en la permeabilidad adyacente al pozo.

La relación de productividades, RP *se define como la relación del índice de productividad de un pozo en cualquier condición al índice de productividad del pozo sin daño.*

La relación de productividades puede ser mayor, menor o igual a uno. Aunque generalmente no se conoce el índice de productividad del pozo sin daño, el efecto relativo de ciertos cambios en el sistema del pozo puede evaluarse a partir de consideraciones teóricas, modelos de laboratorio o pruebas de pozos.

Por ejemplo, la relación teórica de productividades de un pozo de un diámetro de 8 pg *a uno de* 16 pg *está dado por la* Ec. V.27 *:*

$$RP = \frac{J_{16}}{J_8} = \frac{\ln\ (r_e/0.333)}{\ln\ (r_e/0.667)}$$

donde r_e y r_w *están en* pies.

Suponiendo r_e = 660 pies *:*

$$RP = \ln(1980)/\ln(990) = 1.10$$

luego si se duplica el diámetro del pozo se aumenta el índice de productividad alrededor del 10 por ciento. *Analizando la* Ec. V.27 *se observa que se puede mejorar el índice de productividad aumentando la permeabilidad promedio,* $\bar{k}$, *reduciendo la viscosidad* μ, *o aumentando el radio del pozo,* r_w.

V.8 PENETRACION PARCIAL DEL POZO

Algunos pozos penetran sólo parte de la formación productora, como lo indica la Fig.V.12. *En pozos revestidos que penetran toda la formación productora, ésta puede dispararse selectivamente en diferentes partes para dar el mismo efecto de un pozo que la penetra parcialmente. La* Ec.V.28 *es una ecuación aproximada para un pozo que penetra la parte superior de una formación productora. Es suficientemente precisa para fines de ingeniería y se ha verificado usando un modelo eléctrico.*

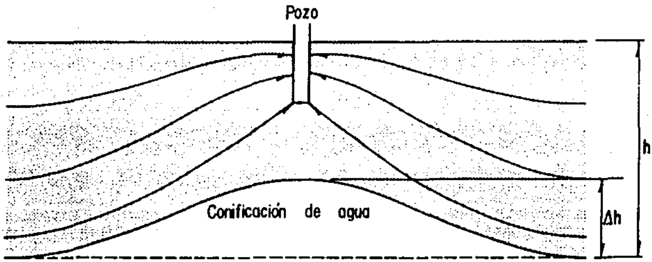


Fig.V.12 Conificación de agua para un pozo, que penetra parcialmente la formación en un yacimiento con empuje hidrostático de fondo.

$$q = \frac{7.08\ k\ f\ h\ (P_e - P_w)}{\mu\ B_o\ \ln(r_e/r_w)} \left[1 + 7\sqrt{r_w/(2\ fh)}\ \cos(f\ 90^\circ) \right] \tag{V.28}$$

las unidades de la Ec. V.28 *son las siguientes:*

q	en BPD
k	en darcy
h	en pies
μ	en cp
Bo	en bl @ c.y./bl @ c.s.
P_e, P_w	en lb/pg^2 abs
r_e, r_w	en pies

$$RP = f \left[1 + 7 \sqrt{r_w/(2\ fh)} \cos (f\ 90^\circ) \right]$$

para una penetración fraccional de 30 por ciento, *es decir* f =0.30, *en una formacion de* 65 pies *de espesor y para un pozo de* 0.666 pies de radio *:*

$$RP = 0.30 \left[1 + 7 \sqrt{0.666/(2*0.30*65)} \cos (90^\circ *0.30) \right]$$

$$RP = 0.30 (1 + 7 * 0.131 * 0.891) = 0.545$$

la Fig. V.13 *es la presentación gráfica de la* Ec. V.28, *relación de productividades como función de la penetración, para tres espesores y un pozo de* 0.666 pies de radio. *La línea interrumpida es la relación de productividades obtenida si el flujo fuese estrictamente radial. La* Ec. V.28 *se dedujo suponiendo los mismos valores de permeabilidad vertical y horizontal.*

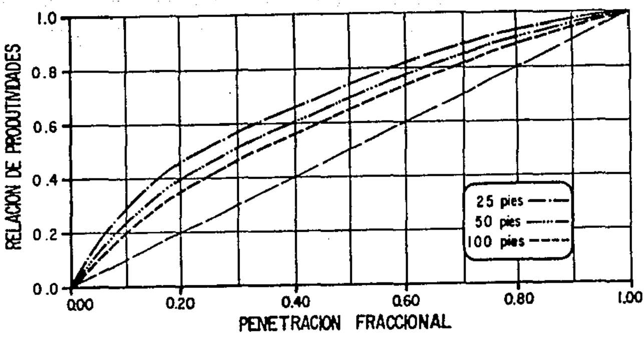


Fig. V.13 Productividad de pozos que penetran parcialmente la formación de permeabilidad isótropa (r_w = 0.666 pies).

Para permeabilidades verticales muy bajas, posiblemente causadas por capas impermeables de lutita, la relación de productividades se aproxima a la línea interrumpida de la Fig. V.13.

El estudio de pozos que penetran la formación productora parcialmente encuentra una aplicación importante en la producción de zonas de aceite o gas con acuífero. La Fig. V.12, *muestra el tipo de conificación de un pozo debido a reducción de la presión en la vecindad del pozo fluyente. La altura de la conificación* Δh *aumenta con la presión diferencial* $(P_e - P_w)$ *del pozo, y la máxima presión diferencial* $(P_e - P_w)$ *que puede existir sin entrar agua en el pozo es alrededor de :*

$$\Delta P_{m\acute{a}x} = 0.433 \, (\rho_w - \rho_o) \, \Delta h_{m\acute{a}x}$$

V.9 FENOMENO DE CONIFICACION

V.9.1 CONIFICACION DE GAS

La conificación de gas ocurre en la zona vecina al pozo cuando éste produce de una zona de aceite, asociada a una zona de gas libre.

El contacto gas-aceite se abate alrededor del pozo debido al flujo radial de aceite y a la diferencial de presión ocasionada por dicho flujo. Para balancear la diferencial de presión causada por el flujo de aceite en la zona de gas, debe existir una elevada columna de gas cerca del pozo.

Considerando las fuerzas en el sistema roca-fluidos, a mayor rapidez de extracción del aceite, mayor será la magnitud del gradiente de presión sobre los gradientes gravitacional y de capilaridad.

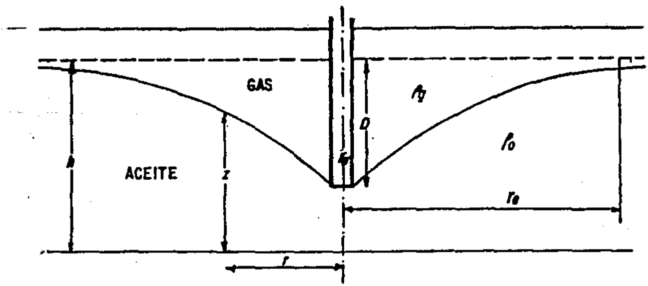


Fig. V.14 Conificación de gas.

Se debe establecer un gasto de extracción para el cual los gradientes gravitacional y capilar igualen en magnitud al gradiente de presión, pero de sentido contrario; éste será el gasto máximo de explotación sin que se presente producción de gas libre en el pozo.

Considerando un pozo (Fig. V.14) el cual penetra una profundidad D en una zona horizontal de aceite de espesor h. Se tiene que H_g y H_o son, respectivamente, los flujos potenciales de gas y aceite, los cuales están dados por las expresiones siguientes :

$$H_g = z + \frac{P_g - P'}{g\,\rho_g}$$

$$H_o = z + \frac{P_o - P'}{g\,\rho_o}$$

donde z es la elevación sobre un nivel de referencia arbitrario y P' es una presión de referencia P_g y P_o son, respectivamente, las presiones en las zonas de gas y aceite; ρ_g y ρ_o son las densidades de las fases.

Para el caso del pozo en estudio, no existe flujo en la zona de gas y H_g es constante en toda la zona. El valor de P' puede ser sustituido como una función de H_g en H_o, despreciando la presión capilar ($P_g = P_o$) :

$$H_o = H_g \frac{\rho_g}{\rho_o} + \frac{\rho_o - \rho_g}{\rho_o} z$$

la ecuación anterior es la función potencial para el flujo de aceite dentro de la zona de aceite.

Aplicando la ley de Darcy al flujo radial de aceite :

$$q_o = - 2\,\pi\,g\,\rho_o \frac{K_o}{\mu_o} z\,r \frac{d\,H_o}{dr}$$

y sustituyendo Ho por su valor y observando que las variaciones de la densidad del fluido con la distancia son despreciables :

$$q_o = -2 \pi g (\rho_o - \rho_g) \frac{K_o}{\mu_o} z \, r \frac{dz}{dr}$$

ahora esta ecuación diferencial puede ser integrada por separación de variables :

$$q_o \int_{r_w}^{r_e} \frac{dr}{r} = -2 \pi g (\rho_o - \rho_g) \frac{K_o}{\mu_o} \int_{h}^{h-D} z \, dz$$

$$q_{o_{max}} = \pi \frac{g (\rho_o - \rho_g)}{\ln (re/rw)} \frac{K_o}{\mu_o} \left[h^2 - (h - D^2) \right]$$

en unidades prácticas :

$$q_{o_{max}} = 1.535 \frac{\rho_o - \rho_g}{\ln (re/rw)} \frac{K_o}{\mu_o} \left[h^2 - (h - D)^2 \right] \quad \text{(BPD)}$$

(V.29)

donde h *y* D *se expresan en* pies.

V.9.2 CONIFICACION DE AGUA

La conificación de agua ocurre en la zona vecina al pozo (Fig. V.15) *cuando éste produce de una zona de aceite. asociada a una zona de agua de fondo (acuífero); suponiendo que no existen barreras entre el yacimiento y el acuífero.*

Analizando las fuerzas que intervienen en el flujo de fluidos hacia el pozo, el fenómeno de conificación se desarrolla debido a una mayor magnitud del gradiente de presión, hacia el pozo, sobre los gradientes gravitacional y de capilaridad.

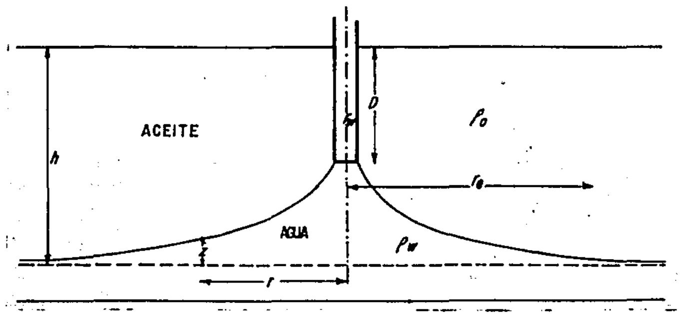


Fig. V.15 Conificación de agua.

La derivación de la fórmula para el máximo gasto permisible de aceite sin producción de agua del acuífero subyaciente es similar a la de conificación de gas.

Los flujos potenciales de aceite y agua son, respectivamente, Ho *y* Hw, *y se expresan mediante :*

$$H_o = z + \frac{P_o - P'}{g\,\rho_o} \tag{V.30}$$

$$H_v = z + \frac{P_v - P'}{g\,\rho_v} \tag{V.31}$$

para el caso en estudio, no hay flujo de agua al pozo en el acuífero y H_v *es constante. Usando esta observación para eliminar la presión de referencia* P' *de las* Ecs. V.30 *y* V.31, *y despreciando la presión capilar* ($P_o = P_v$) *:*

$$H_o = H_v \frac{\rho_v}{\rho_o} + \left[\frac{\rho_o - \rho_v}{\rho_o} \right] z$$

aplicando la ley de Darcy al flujo radial de aceite :

$$q_o = -2\,\pi\,g\,\rho_o \frac{K_o}{\mu_o} (h - z)\, r \frac{d\,H_o}{dr}$$

y sustituyendo H_o *por su valor :*

$$q_o = -2\,\pi\,g\,(\rho_o - \rho_v) \frac{K_o}{\mu_o} (h - z)\, r \frac{dz}{dr}$$

separando variables e integrando :

$$q_o \int_{r_v}^{r_e} \frac{dr}{r} = - 2 \pi g (\rho_o - \rho_v) \frac{K_o}{\mu_o} \int_{h-D}^{o} (h - z) \, dz$$

o

$$q_{o_{máx}} = \pi \frac{g (\rho_v - \rho_o)}{\ln (re/rv)} \frac{K_o}{\mu_o} (h^2 - D^2)$$

en unidades prácticas :

$$q_{o_{máx}} = 1.535 \frac{\rho_v - \rho_o}{\ln (re/rv)} \frac{K_o}{\mu_o} (h^2 - D)^2 \qquad \left[\text{BPD} \right]$$

donde h *y* D *se expresan en* pies.

V.9.3 CONIFICACION SIMULTANEA DE GAS Y AGUA

Si el espesor neto productor **h** *está comprendido entre un casquete de gas y una zona de agua* (Fig. V.16), *el intervalo terminado* h_c *debe ser el que permita el máximo gasto permisible de aceite sin tener producción simultánea de gas y agua debido a:*

Conificación, irrupción de gas en la parte superior del intervalo o a la presencia de agua del acuífero.

Este caso es de particular interés en la producción de una delgada columna de aceite con agua de fondo y gas en la parte superior.

Para asegurar el máximo gasto de producción de aceite debe haber una relación entre la profundidad de penetración del pozo D *dentro del espesor* h *y el intervalo terminado* h_c.

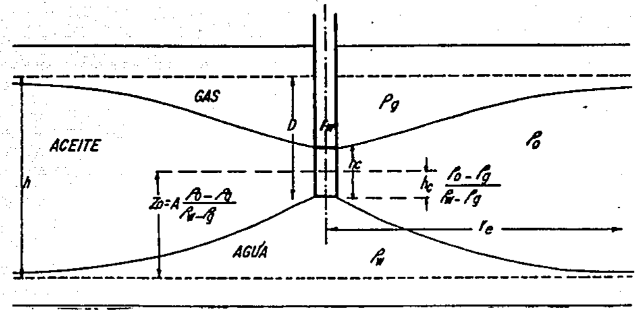


Fig. V.16 Conificación simultánea de gas y agua.

Escribiendo la ecuación para el potencial de flujo del aceite en la vecindad del pozo y en el contacto gas-aceite :

$$H_o = H_g \frac{\rho_g}{\rho_o} + (h - D + h_c) \frac{\rho_o - \rho_g}{\rho_o}$$

de manera similar, en el contacto agua-aceite :

$$H_o = H_w \frac{\rho_w}{\rho_o} + (h - D) \frac{\rho_o - \rho_w}{\rho_o}$$

estas dos ecuaciones deben ser la misma; introduciendo la relación :

$$H_g \rho_g = H_w \rho_w - h (\rho_o - \rho_g) \qquad (V.32)$$

la cual es válida en el radio de drene, con lo que se obtiene :

$$D = h - (h - h_c)\,\frac{\rho_o - \rho_g}{\rho_v - \rho_g}$$

D *es la penetración óptima del pozo en la zona de aceite abajo del contacto gas-aceite para un intervalo terminado* h_c, *y para el máximo gasto de producción de aceite.*

Se puede considerar que hay un plano horizontal intersectando el intervalo h_c *sobre el cual las líneas de flujo de aceite son horizontales.*

Tomando la coordenada vertical de este plano como Z_o , *su valor puede determinarse a partir de las siguientes consideraciones:*

El flujo potencial de aceite evaluado en este plano usando la frontera gas-aceite o la frontera agua-aceite debe ser el mismo:

$$H_{o-v} = H_v\,\frac{\rho_v}{\rho_o} + Z_o\,\frac{\rho_o - \rho_v}{\rho_o} \qquad (V.33)$$

$$H_{o-g} = H_g\,\frac{\rho_g}{\rho_o} + Z_o\,\frac{\rho_o - \rho_g}{\rho_o} \qquad (V.34)$$

igualando las relaciones V.33 *y* V.34 *y usando nuevamente la* Ec. V.32 *en el radio de drene, encontramos que :*

$$Z_o = h\,\frac{\rho_o - \rho_g}{\rho_v - \rho_g}$$

el máximo gasto de aceite (q_o) puede dividirse en dos partes, una, q_{og}, el cual tiene lugar arriba del plano Z_o y es el gasto máximo en ausencia de irrupción de gas en el pozo a consecuencia de un cono de gas; el otro, q_{ov}, situado abajo del plano Z_o y que es el gasto máximo sin producción de agua. Se tiene que :

$$q_o = q_{og} + q_{ov}$$

$$q_{og} = \Pi \frac{g\,(\rho_o-\rho_g)}{\ln\,(re/rv)} \frac{K_o}{\mu_o} \left[h^2 \left(1-\frac{\rho_o-\rho_g}{\rho_v-\rho_g}\right)^2 - hc^2 \left(1-\frac{\rho_o-\rho_g}{\rho_v-\rho_g}\right)^2 \right]$$

$$q_{vo} = \Pi \frac{g\,(\rho_v-\rho_o)}{\ln\,(re/rv)} \frac{K_o}{\mu_o} \left[h^2 \left(\frac{\rho_o-\rho_g}{\rho_v-\rho_g}\right)^2 - hc^2 \left(\frac{\rho_o-\rho_g}{\rho_v-\rho_g}\right)^2 \right]$$

sumando y simplificando, se obtiene la expresión para el máximo flujo de aceite sin conificacion de gas y agua :

$$q_{o_{máx}} = \Pi \frac{g\,K_o(h^2-hc^2)}{\mu_o\,\ln\,(re/rv)} \left[(\rho_o-\rho_g)\left(1-\frac{\rho_o-\rho_g}{\rho_v-\rho_g}\right)^2 + (\rho_v-\rho_g)\left(\frac{\rho_o-\rho_g}{\rho_v-\rho_g}\right)^2 \right].$$

por ejemplo si se tiene una columna de aceite de 20 pies *de espesor con una capa uniforme de gas asociado sobreyaciendo y con agua de fondo. El yacimiento es un estrato horizontal uniforme en sus propiedades físicas :*

$K = 0.1$ darcy, $\mu_o = 3$ cp, $\rho_o = 0.8$, $\rho_v = 1.05$, $\rho_g = 0.25$,
$r_v = 0.5$ pies, $r_e = 660$ pies.

El intervalo disparado deseado es 5 pies. *¿Cómo debe terminarse el pozo para obtener el máximo gasto de producción de aceite sin conificación de gas o agua y a qué gasto ?*

Penetración del pozo:

$$D = 20 - 15 \frac{0.80 - 0.25}{1.05 - 0.25} = 9.69 \text{ pies}$$

nivel de equilibrio :

$$Z_o = 20 \frac{0.80 - 0.25}{1.05 - 0.25} = 13.75 \text{ pies}$$

$$h - D + h_c - Z_o = 20 - 9.69 + 5 - 13.75 = 1.56 \text{ pies}$$

$$Z_o - h + D = 13.75 - 20 + 9.69 = 3.44 \text{ pies}$$

el máximo gasto de aceite arriba del nivel de equilibrio es :

$$q_{og} = 1.535 \frac{0.8 - 0.25}{\ln \frac{660}{0.5}} \left(\frac{0.1}{3}\right) \left[(20 - 13.75)^2 - 1.56^2\right] = 0.143 \quad \text{BPD}$$

el máximo gasto de aceite abajo del nivel de equilibrio es :

$$q_{ov} = 1.535 \frac{1.05 - 0.8}{\ln \frac{660}{0.5}} \left(\frac{0.1}{3}\right) \left[13.75^2 - 3.44^2\right] = 0.316 \quad \text{BPD}$$

el máximo gasto de producción permisible será :

$$q_{o_{max}} = q_{og} + q_{ov} = 0.459 \text{ BPD} .$$

V.10 EFECTO DE FRACTURAS HIDRAULICAS EN LA PRODUCTIVIDAD DE LOS POZOS

V.10.1, FLUJO DE FLUIDOS A TRAVES DE FRACTURAS

Considerando la ley de Poiseville para flujo capilar, se puede determinar una ecuación para flujo laminar de fluidos humectantes a través de fracturas suaves y de ancho constante, obteniéndose la ecuación :

$$q = \frac{W^2 \; A \; (P_1 - P_2)}{12 \; \mu \; L} \qquad (V.35)$$

donde q *está en* cm^3/s; W, *ancho de la fractura, está en* cm; A, *área de la sección transversal es igual al producto del ancho* W *y la extensión lateral de la fractura, ambos en* cm; (P_1-P_2) *es la presión diferencial en* $dinas/cm^2$ *existente entre los extremos de la fractura de* L cm *de longitud; y* μ *la viscosidad del fluido en* poises. *La* Ec. V.35 *puede combinarse con la* Ec. de Darcy, *para obtener una expresión de la permeabilidad de una fractura.*

La ley de Darcy expresada en términos de cm^3/s, poises, cm, $dinas/cm^2$ y darcys, *es :*

$$q = \frac{9.86 \times 10^{-9} \; k \; A \; (P_1 - P_2)}{\mu \; L} .$$

escribiendo $A = \pi \, r_o^2$ *para el área en la ecuación de la ley de Darcy, e igualándola a la Ley de Poiseville, la cual es :*

$$q = \frac{\pi \; r_o^4 \; (P_1 - P_2)}{8 \; \mu \; L}$$

se obtiene :

$$k = 54 \times 10^{6} W^{2} \ \text{darcys} \qquad (\ W \text{ en pg}\ )$$

la permeabilidad de una fractura de sólo 0.001 pulgadas *de ancho es* 54 darcys *o* 54 000 md.

Las fracturas y los canales de disolución son causantes de gastos altos de producción en muchas rocas de dolomia, caliza y areniscas, que *no podrían explotarse económicamente si tales aberturas no existiesen. Considérese, por ejemplo, una roca de permeabilidad de matriz o primaria muy baja, de* 0.01 md, *pero* que *tiene en promedio una fractura de* 0.005 pulgadas de ancho *y de un* pie *en extensión lateral por* pie cuadrado *de roca.*

Suponiendo que la fractura está en la dirección del flujo, se puede aplicar la ley para flujo en paralelo Ec.V.19 *:*

$$\bar{k} = \frac{0.00001 \left[144 - (12 * 0.005)\right] + (54 \times 10^{6} * 0.005^{2})(12 * 0.005)}{144}$$

$$k = 0.563 \text{ darcy} = 563 \text{ md}$$

generalmente los yacimientos fracturados deben tratarse como un sistema de dos porosidades, uno en la matriz y otro en las fracturas. La interacción (flujo cruzado) entre estas dos partes puede afectar considerablemente el comportamiento de un yacimiento.

Cuando la comunicación es buena, ambos sistemas de porosidad pueden responder al gradiente de presión total.

La capacidad de almacenamiento y la recuperación de hidrocarburos en los yacimientos fracturados puede variar considerablemente.

Como se aprecia en la Fig.V.17, *la porosidad primaria y la secundaria se pueden presentar en diversas combinaciones.*

Cuando la capacidad de almacenamiento en los poros de la matriz es grande, comparada con la de las fracturas, Fig.V.17A, *se tienen las mejores condiciones de explotación, aunque se pueden presentar problemas durante la perforación, como pérdida de circulación.*

brotes, etc. En estos yacimientos la matriz posee una permeabilidad vertical que, aunque relativamente baja (de 10 a 100 md), *permite la acción efectiva de la segregación gravitacional del gas liberado en dicha matriz. La interacción entre los fluidos contenidos en los bloques matriciales y los existentes en las fracturas, facilitan el desplazamiento del uceite, permitiendo obtener recuperaciones substanciales.*

La Fig. V.17 B, *muestra en forma esquemática una formación que tiene aproximadamente la misma capacidad de almacenamiento en la matriz y en las fracturas. En este caso la matriz es compacta y de baja permeabilidad, mientras que las fracturas poseen una permeabilidad altísima.*

La Fig. V.17 C *corresponde a una formación con porosidad muy baja o nula en la matriz, en la que prácticamente toda la capacidad de almacenamiento se debe a las fracturas. La saturación de agua puede ser muy alta en una matriz de baja porosidad; pero esta saturación es generalmente inmóvil. Los yacimientos de este tipo generalmente producen con altos gastos iniciales; pero éstos declinan drásticamente en muy corto tiempo.*

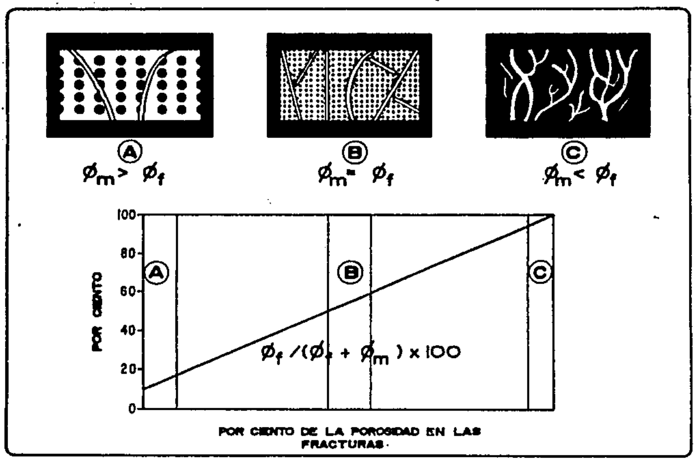


Fig. V.17 Distribución de la porosidad en yacimientos fracturados.

La interacción o transferencia de fluidos, puede estar inhibida en algunos yacimientos, por mineralización dentro de las superficies de fractura, o de formaciones a lo largo de dichas superficies.

En otros yacimientos se ha detectado la presencia de un revestimiento bituminoso en las fracturas.

Los problemas de evaluación y estimación de la recuperación pueden ser serios cuando existe pobre comunicación entre un sistema de fracturas muy permeable y un sistema matricial que contiene cantidades apreciables de aceite potencialmente recuperable. La observación de secciones delgadas de los planos de fractura y el análisis de núcleos grandes, pueden indicar el grado de interacción entre ambos sistemas de porosidades. El grado de interacción no depende sólo de la permeabilidad, porosidad y contenido de aceite de la matriz. La forma, el tamaño de los bloques y la mojabilidad de la formación, son muy importantes cuando el aceite de la matriz es desplazado por un fluido externo como gas o agua.

En relación a la porosidad y a la permeabilidad secundarias, es necesario evaluar cómo cambian estas propiedades del sistema con la profundidad y con el depresionamiento del yacimiento.

Las fracturas comúnmente se desarrollan siguiendo arreglos bien definidos. También las cavidades formadas por disolución muestran generalmente una forma y distribución no aleatoria. Esto determina la existencia de permeabilidad preferencial en cierta dirección.

Mediante el análisis de núcleos grandes, orientados de acuerdo a la posición que tenían en el subsuelo, es posible determinar la anisotropía en la permeabilidad de un yacimiento.

La presencia de fracturas y cavidades obliga al uso de núcleos grandes, en los que los espacios porosos mencionados deben ser pequeños en relación al tamaño total de la muestra. Es conveniente obtener, en estos núcleos, la máxima permeabilidad horizontal, la normal a ésta y la permeabilidad vertical.

Al realizar el análisis de núcleos grandes es necesario diferenciar las fracturas naturales de las inducidas artificialmente.

V.10.2 DISTRIBUCION DE LAS FRACTURAS

En un estudio realizado para almacenar gas en un yacimiento, se comprobó que la orientación de las fracturas, medida en un afloramiento, era similar a la determinada en núcleos orientados, tomados a 800 m de profundidad. También se ha demostrado que los esfuerzos existentes en el subsuelo condicionan la orientación de las fracturas inducidas artificialmente. Como muchos yacimientos sólo pueden producir en forma económica, mediante el fracturamiento de sus pozos, las características de las fracturas así inducidas deben evaluarse, para incluirlas en los modelos matemáticos. Esto es importante cuando se analiza la inyección de fluidos en el yacimiento.

La fotografía aérea se ha utilizado con éxito para definir la dirección predominante de las fracturas en el subsuelo; la dirección preferencial de las fracturas, así determinada, ha coincidido con la observada por la canalización del agua inyectada en los yacimientos.

V.11 FLUJO DE FLUIDOS EN YACIMIENTOS CALCAREOS

Los principios del flujo de fluidos en el medio poroso, durante las recuperaciones primaria y secundaria, se desarrollaron inicialmente para areniscas. A continuación se examinará la aplicación de los principios clásicos de flujo de fluidos en yacimientos más complejos y heterogéneos, como lo son los yacimientos carbonatados.

V.11.1 DISTRIBUCION DE LOS FLUIDOS

La complejidad de las rocas carbonatadas requiere de métodos de aproximación y análisis para la apropiada evaluación del contenido de fluidos y la óptima aplicación de métodos de recuperación. Ninguna conclusión se puede establecer como generalidad para la distribución de los fluidos en todos los yacimientos.

Cada yacimiento necesita considerarse como un caso por separado. A continuación algunos ejemplos ayudan a ilustrar este punto:

En algunos campos de Texas se examinaron visualmente núcleos y recortes, descubriendo que el aceite se encontraba confinado en rocas con permeabilidad menor a un décimo de un milidarcy; como ejemplo se tiene el pozo D (Fig. V.18)*, en el cual toda la zona de interés fue nucleada y analizada, mostrando que sólo el* 8.4 % *de las permeabilidades son mayores a* 0.3 md. *La* Fig. V.18 *ilustra un perfil típico de permeabilidad. Las irregularidades en el perfil indican intercalaciones de zonas de alta permeabilidad en la matriz, las cuales, en rocas carbonatadas son raramente correlacionables de pozo a pozo.*

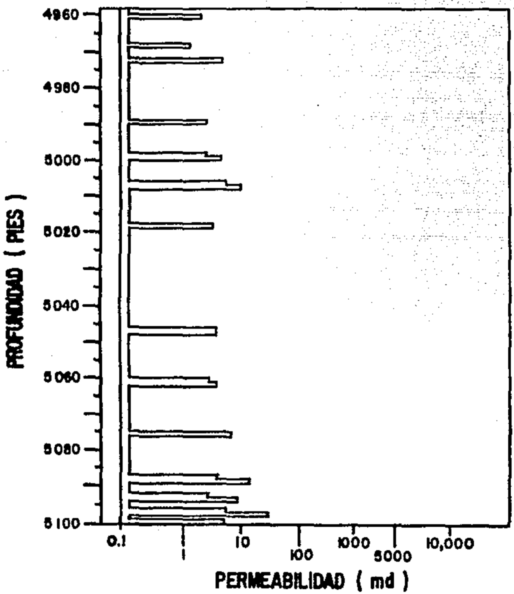


Fig. V.18 Perfil de permeabilidades, Pozo D (caliza)
Campo Wasson, Yoakum County, Texas.

En otro caso se determinó que la matriz se encontraba llena de agua y sólo las fracturas y canales de disolución contenían aceite recuperable; los núcleos obtenidos presentaron una porosidad total promedio de 3.3 %; una porosidad de la matriz intercristalina de 1.51 % y 1.79 % para la porosidad de las fracturas y canales.

Se concluye de los datos anteriores y de la examinación visual de núcleos, que el aceite ocupa las fracturas y canales de disolución, mientras que el agua ocupa toda la matriz porosa. La matriz estaba compuesta de dolomita con porosidad intercristalina, con una permeabilidad de alrededor de 0.1 md.

V.II.2 LA IMPORTANCIA DE LAS FRACTURAS

Se toma como regla general, que el flujo de fluidos en rocas carbonatadas es afectado por la presencia de estilolitas conductivas o parcialmente conductivas, canales de disolución, fisuras, y fracturas las cuales frecuentemente disectan a la matriz de baja permeabilidad, como se muestra en las Figs. V.19 y V.20.

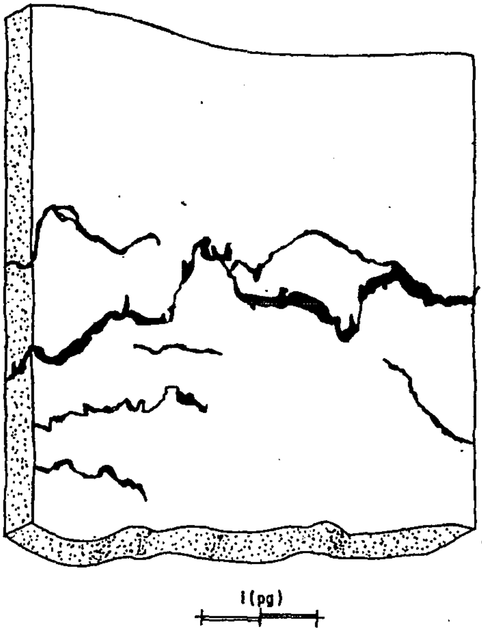


Fig. V.19 Fracturas en matriz de baja porosidad, Formación Paradox, Utah.

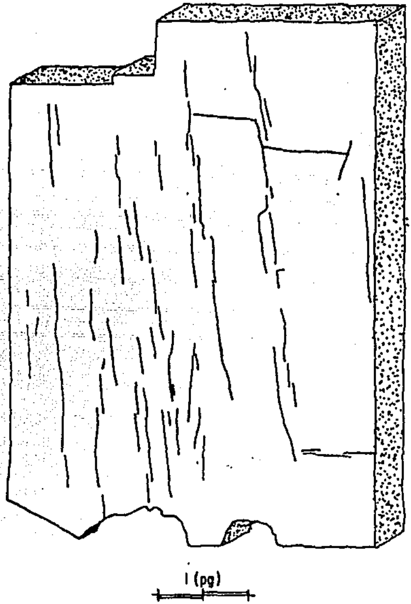


Fig. V.20 Fracturas en matriz de grano fino, Formación Paradox, Utah.

La siguiente ecuación es para determinar la permeabilidad en la dirección horizontal k_H, *a través de un sistema idealizado fractura-matriz, como se muestra en la* Fig. V.21 *:*

$$k_H = k_m + 5.446 \times 10^{10}\ W^3 \cos^2 \alpha / L \qquad (V.36)$$

donde :

k_m = *permeabilidad de la matriz* (md)
W = *amplitud de la fractura* (pg)
L = *distancia entre fracturas* (pg)
α = *ángulo de inclinación respecto a un plano horizontal* (grados).

Si W *y* L *se expresan en milímetros, la* Ec. V.36, *queda :*

$$k_H = k_m + 8.44 \times 10^{7}\ W^3 \cos^2 \alpha / L \qquad (V.37)$$

para la roca mostrada en la Fig. V.19, *se le determinó una permeabilidad total*, k_H, *de* 3.4 md, *mediante análisis de núcleos grandes; mientras que por análisis convencional, la permeabilidad de la matriz*, k_m, *fue de* 0.3 md. *La distancia*, L, *entre fracturas fue de* 1 pg (α = 0); *la amplitud de la fractura*, W, *fue de* 0.0004 pg *o* 0.01 mm.

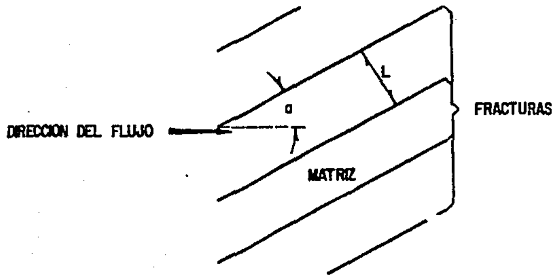


Fig. V.21 Sistema idealizado fractura-matriz.

Para ilustrar el efecto de las fracturas, se tiene la siguiente información : W = 0.005 pg, L = 1 pg, α = 0 *y* k_m = 1 md.

La permeabilidad k_H *resulta ser* 6810 md *o* 6.8 darcys. *Este segundo ejemplo demuestra claramente la extraordinaria contribución que ejercen pequeñas fracturas a la permeabilidad total.*

En el estudio de rocas carbonatadas, los análisis de núcleos grandes, cortados en secciones de 1 pie *de longitud, arrojan mejores resultados que los obtenidos de pequeños 'tapones' usados en el análisis de areniscas.*

Los análisis de núcleos grandes permiten una mejor evaluación de los efectos de fracturas, cavernas, y canales de disolución, respecto a los análisis en 'tapones'.

V.II.3 COMPARACION DE RESULTADOS DE ANALISIS DE NUCLEOS Y DE ANALISIS DE INCREMENTOS DE PRESION

Diversos autores han comparado las permeabilidades promedio obtenidas de análisis de núcleos con valores equivalentes derivados de pruebas de incremento de presión para pozos productores en dolomias y areniscas. Se analizaron núcleos grandes para las dolomias y 'tapones' para las areniscas.

Los resultados se muestran en la Fig. V.22, *en la cual los datos de la prueba de incremento de presión concuerdan razonablemente bien con* k *(permeabilidad más probable).*

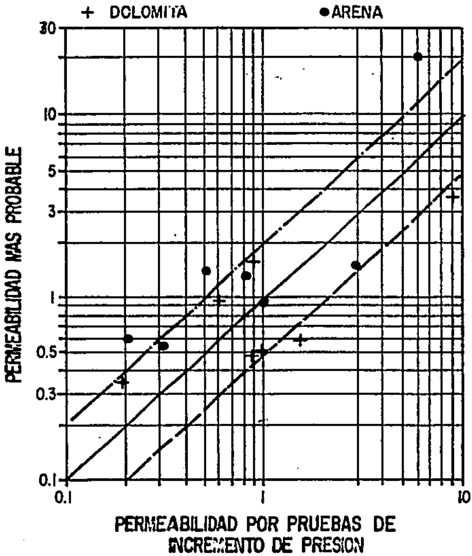


Fig. V.22 Comparación de la permeabilidad entre análisis de núcleos y pruebas de incremento de presión.

El procedimiento estadístico para obtener 'la permeabilidad más probable', $\hat{k}$, es muy complejo; por lo que se sustituye por la más fácilmente determinable 'permeabilidad media promedio' o por el 'promedio geométrico', como se muestra en la Fig. V.23.

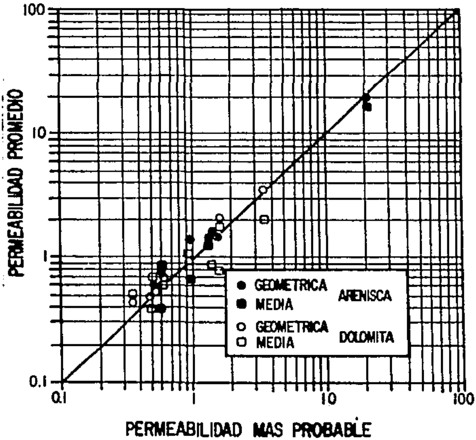


Fig. V.23 Correlación de permeabilidad.

El promedio geométrico se define como :

$$\hat{k} = \left(\prod_{i}^{n} k_i \right)^{1/n} \quad (V.38)$$

dondo :

n = *número de muestras de núcleo.*
k_i = *permeabilidad obtenida del análisis del núcleo.*

Es común en rocas carbonatadas que el valor de k•h *derivado de la permeabilidad obtenida de una prueba de incremento de presión sea mayor que el* k•h *calculado de permeabilidad obtenida de análisis de núcleos. Esta diferencia se observa en la* Fig. V.24.

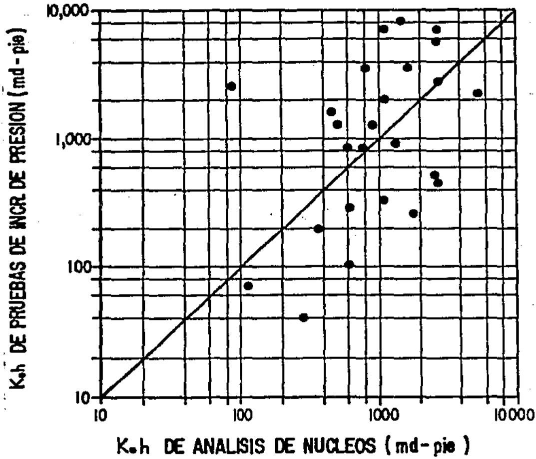


Fig. V.24 Comparación de la capacidad (k•h) de la zona productora entre análisis de núcleos y pruebas de incremento de presión.

La diferencia entre el análisis de núcleos y los datos de pruebas de incremento de presión se debe a dos razones :

1) *Los pozos productores fueron acidificados a alta presión algunas veces antes de las pruebas. El ácido probablemente se canalizó dentro de zonas de alta permeabilidad, numerosas fracturas abiertas, y/o estilolitas, incrementando efectivamente la capacidad de flujo en los pozos.*

2) *Algunas de las fracturas que han estado originalmente presentes en el yacimiento, probablemente no soportaron el rigor de la toma del núcleo.*

En general, en yacimientos con fracturas abiertas o parcialmente abiertas, el análisis de núcleos arroja valores mínimos de permeabilidad. En otras palabras, la diferencia entre análisis de núcleos y las pruebas de incremento de presión es generalmente el diagnóstico de fracturas.

La Fig. V.25 es *un modelo esquemático de un sistema idealizado* fracturas-matriz *en rocas carbonatadas.*

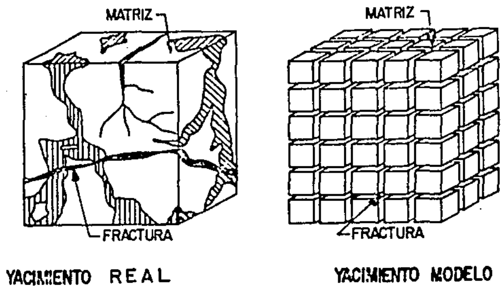


Fig. V.25 Idealización de un medio poroso heterogéneo naturalmente fracturado.

Así mismo, las curvas teóricas derivadas de este modelo muestran pendientes paralelas durante pruebas de inyectividad, como se ilustra en la Fig. V.26.

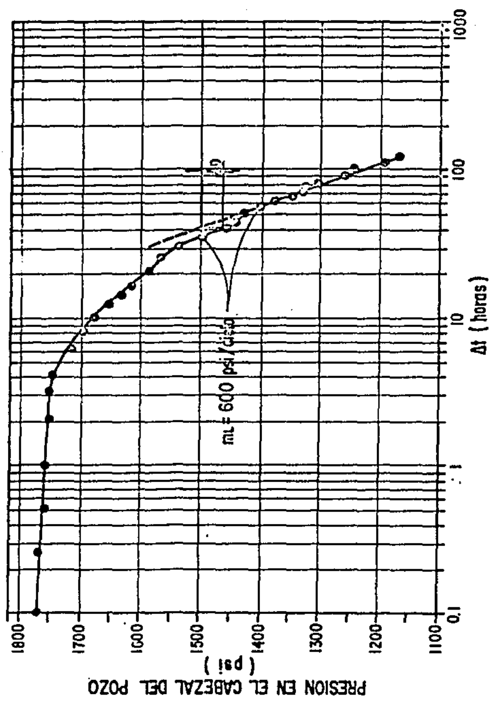


Fig. V.26 Curva de Prueba de inyectividad en un sistema fractura-matriz.

V.12 FLUJO NO DARCIANO

En el flujo de fluidos en el medio poroso se puede dar el caso de flujo lento, ésto es, despreciando las fuerzas de inercia en el flujo de fluido viscoso debido a las bajas velocidades que tiene el fluido a través de medios porosos; lo anterior ha motivado que se hayan hecho estudios acerca de la validez de la ley de Darcy y se considere otro tipo de Flujo: No Darciano; estas investigaciones son de dos tipos :

a) Las que llevan el objetivo de verificar la ecuación o determinar modificaciones apropiadas a ella.

b) Las concernientes a la naturaleza de la constante C, determinada por las propiedades del medio poroso.

Dado que el tratamiento de problemas de flujo a través de canales irregulares y tortuosos como los de arenas son complejos, se tiene que recurrir a otras ecuaciones diferentes a las de Darcy.

Es posible entender mejor las leyes de flujo, incluyendo la de Darcy, si se considera antes la teoría dimensional.

Utilizando el mecanismo de esta teoría se puede ver que la caída de presión ΔP, en una columna de arena de longitud L, que tiene un fluido de densidad ρ y viscosidad μ con una velocidad media v, debe relacionarse como sigue :

Considerando: (F, L, T) o (M, L, T) y utilizando el teorema Π de Buckingham, se tiene que :

Número de variables $m = 6$, $n = 3$

$$m - n = 6 - 3 = 3$$

$m1 = \rho\ [F\ T^2\ L^{-4}]$ $\quad$ $m3 = \mu\ [F\ T\ L^{-2}]$ $\quad$ $m5 = \Delta_s\ [L]$

$m2 = \Delta P\ [F\ L^{-2}]$ $\quad$ $m4 = d\ [L]$ $\quad$ $m6 = \vec{v}\ [L\ T^{-1}]$

$$\pi_1 = \rho^{x_1}\ d^{y_1}\ \mu^{z_1}\ \Delta P$$

$$\pi_2 = \rho^{x_2}\ d^{y_2}\ \mu^{z_2}\ v$$

$$\pi_a = \rho^{x_a} d^{y_a} \mu^{z_a} \Delta_a$$

$$\pi_1 = \rho^{x_1} d^{y_1} \mu^{z_1} \Delta P = F^0 L^0 T^0$$

$$F^0 L^0 T^0 = [F\ T^2\ L^{-4}]^{x_1} [L]^{y_1} [F\ T\ L^{-2}]^{z_1} [F\ L^{-2}]$$

$$\sum F = 0; \quad x_1 + z_1 + 1 = 0 \qquad\qquad x_1 = 1$$

$$\sum L = 0; \quad -4x_1 + y_1 - 2z_1 - 2 = 0 \qquad \Bigg\{ \qquad y_1 = 2$$

$$\sum T = 0; \quad 2x_1 + z_1 = 0 \qquad\qquad z_1 = -2$$

sustituyendo en π_1 :

$$\pi_1 = \rho\, d^2 \mu^{-2} \Delta P$$

$$\pi_2 = \rho^{x_2} d^{y_2} \mu^{z_2} v = F^0\ L^0\ T^0$$

$$F^0\ L^0\ T^0 = [F\ T^2\ L^{-4}]^{x_2} [L]^{y_2} [F\ T\ L^{-2}]^{z_2} [L\ T^{-1}]$$

$$x_2 + z_2 = 0 \qquad\qquad x_2 = 1$$

$$-4x_2 + y_2 - 2z_2 + 1 = 0 \qquad \Bigg\{ \qquad y_2 = 1$$

$$2x_2 + z_2 - 1 = 0 \qquad\qquad z_2 = -1$$

sustituyendo en π_2 :

$\pi_s = \rho\ d\ \mu^{-1}\ v$

$$\pi_s = \rho^{x_s}\ d^{y_s}\ \mu^{z_s}\ \Delta_e = F^0\ L^0\ T^0$$

$$F^0\ L^0\ T^0 = [F\ T^2\ L^{-4}]^{x_s}\ [L]^{y_s}\ [F\ T\ L^{-2}]^{z_s}\ [L]$$

$$\left.\begin{array}{l} x_s + z_s = 0 \\ -4x_s + y_s - 2z_s + 1 = 0 \\ 2x_s + z_s = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_s = 0 \\ y_s = -1 \\ z_s = 0 \end{array}$$

sustituyendo en π_s :

$$\pi_s = d^{-1}\ \Delta_e$$

$$\therefore\ \alpha\left(\frac{\Delta_e}{d},\ \frac{\rho v d}{\mu},\ \frac{\rho\ d^2\ \Delta P}{\mu^2}\right) = 0 \qquad (V.41)$$

finalmente :

$$\frac{\Delta P}{\Delta s} = C\ \frac{\mu^2}{\rho\ d^3}\ \alpha\left(\frac{\rho\ v\ d}{\mu}\right) \qquad (V.42)$$

C = Constante que depende de las unidades.

En la ecuación anterior α *es una función que se determina empíricamente y* d *es un parámetro que representa el tamaño del poro o del grano.*

Si ρv es constante a lo largo de un sistema lineal en régimen permanente, entonces el gradiente de presión en líquidos será uniforme sin tomar en cuenta el carácter del flujo.

Se puede ver que el argumento de a representa el número de Reynolds (d representa el diámetro de los poros).

Si además se tiene un sistema de flujo con bajas velocidades, bajas densidades de fluido y diámetros de los poros, entonces a es el argumento mismo, consecuentemente, la Ec. V. 42 queda :

$$\frac{\Delta P}{\Delta_s} = C \frac{\mu v}{d_2}$$

comparando el flujo viscoso en tuberías con el flujo viscoso de fluidos en medios porosos, se aprecia que la distribución de velocidades es diferente como se ilustra en las figuras siguientes:

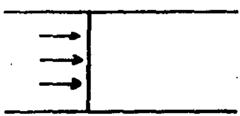


Fig. V. 27 Flujo en medios porosos.

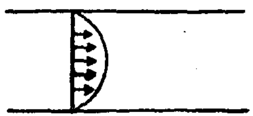


Fig. V. 28 Flujo en tuberías.

Se observa que la distribución de velocidades para tuberías es de tipo parabólico con $V_{máx}$ en el centro y cero en las paredes de la tubería y para el flujo en medios porosos, la velocidad macroscópica es lineal y uniforme en toda la sección, ya que los fluidos soportan fuerzas que cambian la distribución de velocidades, debido a la heterogeneidad del medio poroso. Esto se debe a que los fluidos tienen masa; por lo tanto, se pueden ejercer fuerzas en ellos para cambiar la magnitud o la dirección de la velocidad, según la segunda ley de Newton. Así, cuando un fluido fluye en un medio poroso, la velocidad de un elemento de él, cambia rápidamente de un punto a otro a lo largo de su trayectoria tortuosa y las fuerzas que producen estos cambios, también varían rápidamente; sin embargo, en el medio poroso la multitud de trayectorias de él, tienen un carácter aleatorio y tanto las variaciones en dirección y en magnitud promedian cero.

Así, para el flujo laminar permanente, las fuerzas laterales asociadas con las variaciones microscópicas de la velocidad en la superficie expuesta al flujo en un medio poroso, pueden considerarse nulas en promedio.

Diversas investigaciones a la ley de Darcy, arrojan los siguientes resultados :

1) *A bajas velocidades (bajo número de Reynolds) el gradiente de presión varia con la velocidad* v.

$$\frac{\Delta P}{\Delta s} = C \quad v$$

2) *El tipo de flujo que describe la* ecuación *anterior puede ser llamado de tipo viscoso.*

3) *A medida que el número de Reynolds se incrementa, el gradiente de presión* $\Delta P / \Delta s$ *se incrementa más rápido que* v *y asume una variación que es mejor descrita por la* Ec. V.44, *conocida como la ecuación de Forchheimer.*

La ley de Darcy pierde su valor, a medida que v *o el número de Reynolds aumentan, y parece no haber una modificación única a dicha ley para adecuarla a valores altos de* v*; Lindquist y Nemenyi así como Fancher, Lewis y Barnes, que han efectuado estudios para encontrar relaciones o rangos de aplicabilidad a la ley de Darcy, atribuyen la desviación de flujo viscoso cuando la velocidad sube al aumento de las fuerzas de inercia comparadas con las fuerzas viscosas, más que a una turbulencia real.*

ECUACION DE FORCHHEIMER :

El flujo turbulento se caracteriza dinámicamente, por el hecho de que la función α *es proporcional al cuadrado de su argumento, en particular la velocidad, por lo que la* Ec. V.42 *toma la forma:*

$$\frac{\Delta P}{\Delta s} = C \frac{\rho \, v^2}{d} \qquad (V.43)$$

lo anterior es válido para tuberías rugosas, ya que para tubos lisos el valor del número de Reynolds es menor que 2.

Diversos autores han intentado representaciones similares para el flujo en columnas de arena, hubiendo encontrado que debido a los canales irregulares y tortuosos del medio poroso, la zona de transición entre flujo viscoso a turbulento no es marcada como en tuberías ; por lo tanto se ha definido una representación del gradiente $\Delta P/\Delta s$ *como la suma de términos de varias potencias de* v *(la velocidad macroscópica del flujo por unidad de área del medio).*

Finalmente algunos autores expresan la ley de flujo como :

$$\frac{\Delta P}{\Delta s} = a\,v + b\,v^{n} \qquad (V.44)$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta s} = a\,v^{n} \longrightarrow \qquad 1 < n < 2 \qquad (V.45)$$

como puede verse de las Ecs. V.43, V.44, V.45, el gradiente de presión es independiente de la viscosidad del fluido y en cambio en flujo viscoso laminar es proporcional a la viscosidad.

Las ecuaciones anteriores son consistentes dimensionalmente con la Ec. V.42, ya que las constantes a *y* b *son ajustadas para absorver el factor* $\mu^{2}/\rho\, d^{3}$, *y las potencias de* $\rho\, d/\mu$, *sobrantes al separar* v *del número de Reynolds.*

NOMENCLATURA

NOMENCLATURA*

SIMBOLO		UNIDADES
A	área	m^2, cm^2, pie^2
Bg	factor de volumen del gas	m^3_g @ c.y./m^3_g @ c.s.
Bo	factor de volumen del aceite	$m^3_{(o+gd)}$ @ c.y./m^3_o @ c.s
Bt	factor de volumen de las dos fases	$m^3_{(o+gd+gl)}$ @ c.y./m^3_o @ c.s.
Bw	factor de volumen del agua	$m^3_{(w+gd)}$ @ c.y./m^3_w @ c.s.
c	compresibilidad	$(Kg/cm^2)^{-1}$, $psia^{-1}$
ce	compresibilidad efectiva de los fluidos	$(Kg/cm^2)^{-1}$, $psia^{-1}$
cf	compresibilidad de la formación	$(Kg/cm^2)^{-1}$, $psia^{-1}$
cg	compresibilidad del gas	$(Kg/cm^2)^{-1}$, $psia^{-1}$
co	compresibilidad del aceite	$(Kg/cm^2)^{-1}$, $psia^{-1}$
ct	compresibilidad total del sistema	$(Kg/cm^2)^{-1}$, $psia^{-1}$
cw	compresibilidad del agua	$(Kg/cm^2)^{-1}$, $psia^{-1}$
D	profundidad	m
E	espaciamiento entre pozos	m
Ei(-y)	función integral exponencial	
g	aceleración de la gravedad	m/s^2
G	volumen original de gas @ c.s.	m^3_g
Ge	entrada acumulativa de gas	m^3_g
Gi	volumen de gas acumulativo inyectado @ c.s.	m^3_g
Gp	producción acumulativa de gas @ c.s.	m^3_g

* Nomenclatura aceptada por la Society of Petroleum Engineers y utilizada en Ingeniería de Yacimientos.

SIMBOLO		UNIDADES
ΔG_e	entrada de gas durante un intervalo	$m^3 g$
ΔG_i	gas inyectado durante un intervalo	$m^3 g$
ΔG_p	gas producido durante un intervalo	$m^3 g$
h	espesor neto del yacimiento	m, pie
H	espesor bruto del yacimiento	m, pie
i	gasto de inyección	m^3/día
i_g	gasto de gas de inyección	$m^3 g$/día
i_v	gasto de agua de inyección	$m^3 v$/día
I	índice de inyectividad	$(m^3/día)/(Kg/cm^2)$, BPD/psi
I_s	índice específico de inyectividad	$(m^3/día)/(Kg/cm^2)/m$, BPD/psi/pie
J	índice de productividad	$(m^3/día)/(Kg/cm^2)$, BPD/psi
J_s	índice de productividad específico	$(m^3/día)/(Kg/cm^2)/m$, BPD/psi/pie
J_o	función de Bessel de primera clase, de orden cero	
J_1	función de Bessel de primera clase, de orden uno	
k	permeabilidad absoluta	md
k_g	permeabilidad efectiva al gas	md
k_o	permeabilidad efectiva al aceite	md
k_{rg}	permeabilidad relativa al gas	
k_{ro}	permeabilidad relativa al aceite	
k_{rv}	permeabilidad relativa al agua	
k_v	permeabilidad efectiva al agua	md
K	constante de equilibrio	

SIMBOLO		UNIDADES
ln	logaritmo natural (base e)	
log	logaritmo decimal (base 10)	
L	longitud	m
L	moles de la fase líquida	
m	masa	Kg
m	relación del volumen inicial de gas @ c.y. al volumen original de aceite @ c.y.	m^3_g @ c.y./m^3_o @ c.y.
M	relación de movilidades	
M	peso molecular	lb/mole-lb
n	número de moles	
n	número de pozos	
N	volumen original de aceite @ c.s.	m^3_o
N_e	entrada acumulativa de aceite	m^3_o
N_p	volumen de aceite producido acumulativo @ c.s.	m^3_o
ΔN_e	entrada de aceite durante un intervalo	m^3_o
ΔN_p	aceite producido durante un intervalo	m^3_o
P	presión	Kg/cm^2, psi
P_a	presión atmosférica	Kg/cm^2, psi
P_b	presión de saturación	Kg/cm^2, psi
P_c	presión crítica	Kg/cm^2, psi
pP_c	presión pseudocrítica	Kg/cm^2, psi
pP_r	presión pseudoreducida	
P_D	presión adimensional	
P_e	presión de frontera externa (presión estática del yacimiento)	Kg/cm^2, psi

SIMBOLO		UNIDADES
p_i	presión inicial	Kg/cm^2, psi
p_o	presión de referencia	Kg/cm^2, psi
p_r	presión reducida	
p_{cs}	presión a condiciones estándar	Kg/cm^2, psi
p_{sp}	presión de separación	Kg/cm^2, psi
p_w	presión de fondo	Kg/cm^2, psia
p_{wf}	presión de fondo fluyendo	Kg/cm^2, psia
p_{ws}	presión de fondo estática	Kg/cm^2, psia
$\overline{p}$	presión media	Kg/cm^2, psi
p_c	presión capilar	Kg/cm^2, psi
Δp	abatimiento de presión P_i-P o P_1-P_2	Kg/cm^2, psi
q	gasto de producción	m^3/día, BPD
q_D	gasto de producción adimensional	
q_g	gasto de producción de gas	$m^3{}_g$/día, $pie^3{}_g$/día
q_o	gasto de producción de aceite	$m^3{}_o$/día, BPD
q_w	gasto de producción de agua	$m^3{}_w$/día, BPD
r	distancia radial	m, pie
r_D	distancia radial adimensional	
r_e	radio de drene	m, pie
r_w	radio del pozo	m, pg
R	relación gas-aceite instantánea @ c.s.	$m^3{}_g/m^3{}_o$
R	constante universal de los gases	$lb\text{-}pg^2/\,^oR\text{-}mole\text{-}lb$
R_p	relación gas-aceite acumulativa (Gp/Np)	$m^3{}_g/m^3{}_o$
R_s	relación gas disuelto-aceite	$m^3{}_g/m^3{}_o$

SIMBOLO		UNIDADES
R_{sw}	relación gas disuelto-agua	m^3g/m^3w
s	parámetro en el plano de Laplace	
S	saturación	m^3f @ c.y./m^3 p
S_g	saturación de gas	m^3g @ c.y./m^3 p
S_{gc}	saturación crítica de gas	m^3g @ c.y./m^3 p
S_{gr}	saturación residual de gas	m^3g @ c.y./m^3 p
S_o	saturación de aceite	m^3o @ c.y./m^3 p
S_{oc}	saturación crítica de aceite	m^3o @ c.y./m^3 p
S_{or}	saturación residual de aceite	m^3o @ c.y./m^3 p
S_w	saturación de agua	m^3w @ c.y./m^3 p
S_{wc}	saturación crítica de agua	m^3w @ c.y./m^3 p
S_{wi}	saturación de agua intersticial	m^3w @ c.y./m^3 p
t	tiempo	s, hr, día
t_D	tiempo adimensional	
T	temperatura	°C, °K
T_c	temperatura crítica	°K
T_r	temperatura reducida	
T_{cs}	temperatura a condiciones estándar	°C
T_y	temperatura de yacimiento	°C
$_pT_c$	temperatura pseudocrítica	°K
$_pT_r$	temperatura pseudoreducida	
u	velocidad volumétrica (gasto por unidad de área)	m^3/día/m^2
v	velocidad	m/s, cm/s

SIMBOLO		UNIDADES
V	moles de la fase vapor	
V	volumen	m^3, cm^3
V_b	volumen bruto de roca	m^3
V_p	volumen de poros	m^3
V_s	volumen de sólidos	m^3
W	volumen de agua en el acuífero	m^3
W_e	entrada acumulativa de agua al yacimiento @ c.y.	m^3
W_i	volumen acumulativo de agua inyectada @ c.s.	m^3
W_p	producción acumulativa de agua @ c.s.	m^3
ΔW_e	entrada de agua durante un intervalo	m^3
ΔW_i	agua inyectada durante un intervalo	m^3
ΔW_p	agua producida durante un intervalo	m^3
x	fracción mol de un componente en la fase líquida	
x	dirección en el eje X	
y	fracción mol de un componente en la fase vapor	
y	dirección en el eje Y	
Y_0	función de Bessel de segunda clase, de orden cero	
Y_1	función de Bessel de segunda clase, de orden uno	
z	fracción mol de un componente en la mezcla	
z	dirección en el eje Z	
Z	factor de desviación del gas	

SIMBOLOS GRIEGOS — UNIDADES

β	constante adimensional	
Δ	diferencia	
η	difusividad hidráulica	
λ	movilidad	md/cp
λg	movilidad del gas	md/cp
λo	movilidad del aceite	md/cp
λw	movilidad del agua	md/cp
μ	viscosidad	cp
μg	viscosidad del gas	cp
μo	viscosidad del aceite	cp
μw	viscosidad del agua	cp
ν	viscosidad cinemática	$cp/gr/cm^3$
ρ	densidad	gr/cm^3
ρg	densidad del gas	gr/cm^3
ρo	densidad del aceite	gr/cm^3
ρo	densidad del fluido a la presión de referencia Po	gr/cm^3
ρw	densidad del agua	gr/cm^3
σ	tensión interfacial (tensión superficial)	dina/cm
τ	tortuosidad	
ϕ	porosidad	m^3p/m^3r
Φ	potencial	

$\vec{\nabla}$	gradiente (operador vectorial nabla)
∂	parcial
θ	ángulo

@ c.e. : medido a condiciones de escurrimiento
@ c.s. : medido a condiciones estándar
@ c.y. : medido a condiciones de yacimiento

SUBINDICES

a	atmosférica
b	punto de burbujeo o saturación
b	bruto
c	capilar
c	crítico
d	disuelto
D	cantidad adimensional
e	entrada acumulativa

e condiciones de frontera externa
f fluyendo
f formación
g gas
i inyección acumulativa, invadido
i valores o condiciones iniciales
l libre
L líquido
M molar
máx máximo
mín mínimo
aceite
p producción acumulativa
p poro
r reducida
r relativa
r residual
s sólido
s específico
cs condiciones estándar
sp condiciones de separación
t total
w agua
w condiciones de pozo
wf condiciones de fondo fluyendo
ws condiciones de fondo estático

A B R E V I A T U R A S

BPD bl/día

hcs hidrocarburos

Ih Indice de hidrocarburos

$\hat{i}$ vector unitario en el eje X

$\hat{j}$ vector unitario en el eje Y

$\hat{k}$ vector unitario en el eje Z

Lim límite

psi lb/pg^2

y yacimiento

APENDICE I

ECUACION DE CONTINUIDAD

La descripción matemática del flujo de fluidos en medios porosos se basa en la ley de conservación de la masa, la cual establece que la masa dentro de un sistema permanece constante con el tiempo, es decir, dm/dt = 0. La ecuación de continuidad es una consecuencia de la aplicación de esta ley, determina, para un cierto elemento de medio poroso, que la rapidez de crecimiento de la masa dentro del elemento es igual al flujo neto de masa hacia el mismo elemento.

Considérese un pequeño paralelepípedo de un medio poroso cuyas dimensiones son ΔX, ΔY, ΔZ, a través del cual existe flujo en todas las caras como lo muestra la Fig. AI.1.

Efectuando un balance de materia durante un intervalo pequeño de tiempo Δt, se puede considerar que el flujo de masa por unidad de superficie es igual a la velocidad multiplicada por la densidad ($v\,\rho$).

Si el flujo de masa se multiplica por el área transversal al flujo se obtiene como resultado el flujo mdsico.

$$\rho\, v\, A = \rho\, q \qquad (A.I.1)$$

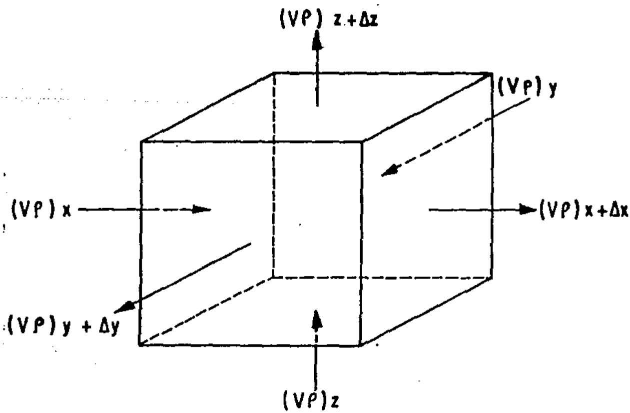


Fig. AI.1 Deducción de la ecuación de continuidad a partir de un balance de materia.

Ahora bien, la masa de fluido en el elemento es :

En el tiempo t (inicial)

$$\Delta x\ \Delta y\ \Delta z\ \ (\phi\ \rho)_t \qquad (AI.2)$$

en el tiempo t + Δt (final)

$$\Delta x\ \Delta y\ \Delta z\ \ (\phi\ \rho)_{t\ +\ \Delta t} \qquad (AI.3)$$

del principio de conservación de masa:

(Masa que entra) - (Masa que sale) = Cambio de masa

Cambio = (masa final) - (masa inicial)

la cara Δy, Δz es perpendicular al flujo en la dirección x, por lo cual la cantidad de masa neta que entra en la dirección x se expresa como :

$$\Delta t\ \left[(\rho\ v)_x - (\rho\ v)_{x\ +\ \Delta x} \right]\ \Delta y\ \Delta z \qquad (AI.4)$$

análogamente para las direcciones y y z se obtienen expresiones similares :

$$\Delta t\ \left[(\rho\ v)_y - (\rho\ v)_{y\ +\ \Delta y} \right]\ \Delta x\ \Delta z \qquad (AI.5)$$

$$\Delta t\ \left[(\rho\ v)_z - (\rho\ v)_{z\ +\ \Delta z} \right]\ \Delta x\ \Delta y \qquad (AI.6)$$

ahora la acumulación puede escribirse, según las expresiones AI.2 *y* AI.3, *de la manera siguiente :*

$$\text{Acumulación} = \Delta x\ \Delta y\ \Delta z\ (\phi\ \rho)_{t+\Delta t} - \Delta x\ \Delta y\ \Delta z\ (\phi\ \rho)_t$$

tomando en cuenta las ecuaciones AI.4, AI.5, AI.6 y sustituyendo en la expresión del Principio de conservación de masa:

$$\Delta t \left[(\rho\ v)_x - (\rho\ v)_{x\ +\ \Delta x} \right] \Delta y\ \Delta z + \Delta t \left[(\rho\ v)_y - (\rho\ v)_{y\ +\ \Delta y} \right] \Delta x\ \Delta z$$

$$+\ \Delta t \left[(\rho\ v)_z - (\rho\ v)_{z+\Delta z} \right] \Delta x\ \Delta y = \Delta x\ \Delta y\ \Delta z \left[(\phi\ \rho)_{t+\Delta t} - (\phi\ \rho)_t \right]$$

dividiendo entre $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ *la Ec. anterior :*

$$- \frac{(\rho\ v)_{x+\Delta x} - (\rho\ v)_x}{\Delta x} - \frac{(\rho\ v)_{y+\Delta y} - (\rho\ v)_y}{\Delta y} - \frac{(\rho\ v)_{z+\Delta z} - (\rho\ v)_z}{\Delta z}$$

$$= \frac{(\phi\ \rho)_{t+\Delta t} - (\phi\ \rho)_t}{\Delta t}$$

tomando límites cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ *y* $\Delta t \to 0$ *y recordando la definición de derivada de una función que dice :*

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to o} \frac{y\ (x+\Delta x) - y\ (x)}{\Delta x}$$

se tiene que :

$$- \frac{\partial\ (\rho\ v\ x)}{\partial\ x} - \frac{\partial\ (\rho\ v\ y)}{\partial\ y} - \frac{\partial\ (\rho\ v\ z)}{\partial z} = \frac{\partial\ (\phi\ \rho)}{\partial t}$$

en notación vectorial :

$$-\vec{\nabla} \cdot \rho\ \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}\ (\phi\ \rho) \qquad \text{(V.1)}$$

la expresión anterior es la forma general de la ecuación de continuidad en un medio poroso.

Si se considera la ecuación de estado para un fluido de compresibilidad constante junto con la ecuación de movimiento, se tiene que la Ec.V.1 *queda :*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\, \frac{k_x}{\mu}\, \frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\, \frac{k_y}{\mu}\, \frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\, \frac{k_z}{\mu}\, \frac{\partial P}{\partial z}\right) = \phi\, \frac{\partial P}{\partial t} \tag{AI.7}$$

usando la regla de la cadena y la definición de compresibilidad isotérmica c:

$$c = \frac{1}{\rho}\, \frac{d\rho}{dP} \longrightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{1}{c\rho}\, \frac{d\rho}{dx}$$

sustituyendo en la Ec. AI.7:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\, \frac{k_x}{\mu}\, \frac{1}{c\ \rho}\, \frac{d\rho}{dx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\, \frac{k_y}{\mu}\, \frac{1}{c\ \rho}\, \frac{d\rho}{dy}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\, \frac{k_z}{\mu}\, \frac{1}{c\ \rho}\, \frac{d\rho}{dz}\right) = \phi\, \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

donde para :

k = cte. μ = cte. c = cte.

Se tiene :

$$\nabla^2 \rho = \frac{\phi\ \mu\ c_t}{k}\, \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{AI.8}$$

que corresponde a la ecuación de difusión para fluidos de compresibilidad c *constante y yacimientos con caídas pequeñas de presión y flujo compresible.*

De la ecuación de estudio para un fluido de compresibilidad constante y considerando $P_o = 0$ *se tiene :*

$$\frac{\rho}{\rho_o} = e^{cP}$$

usando la serie de Taylor :

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + f''(a)\frac{(z-a)^2}{2!} + \ldots + f^{n}\frac{(a)(z-a)^{n}}{n!}$$

$$e^{cP} = 1 + \frac{cP}{1} + \frac{c^2 P^2}{2!} + \ldots + \frac{c^n P^n}{n!}$$

$$cP < 0.01 \longrightarrow c^2P^2 << 0.01 \therefore e^{cP} \cong 1 + cP$$

$$\therefore \rho = \rho_o (1 + cP)$$

la Ec. anterior es la ecuación de estado para fluidos ligeramente compresibles (aceite con gas disuelto).

Derivando se tiene :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_o (c \frac{\partial P}{\partial x})$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \rho_o (c \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}) \qquad (AI.9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o (1 + cP) = \rho_o (c \frac{\partial P}{\partial t}) \qquad (AI.10)$$

sustituyendo (AI.9), (AI.10) en (AI.8) :

$$c\rho_o \nabla^2 P = \frac{\phi \mu c}{k} c\rho_o \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\nabla^2 P = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \qquad (V.2)$$

a continuación se desarrollará el término a la izquierda de la Ec. V.2 *:*

Dada la ecuación de Laplace de la forma :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial_x^{\,2}} + \frac{\partial^2 P}{\partial_y^{\,2}} = 0 \qquad (AI.11)$$

para transformarla de coordenadas cartesianas a cilíndricas (Fig. AI.2) *se hace lo siguiente :*

$x = r \cos \theta$

$y = r \operatorname{sen} \theta$

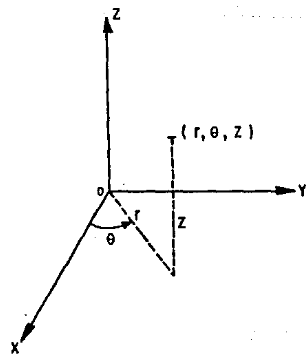


Fig. AI.2 Sistemas de coordenadas.

derivando con respecto a x :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = r\,(-\,\text{sen}\,\theta)\,\frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y) = r\,(\,\cos\theta\,)\,\frac{\partial \theta}{\partial x} + \text{sen}\,\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} = 0$$

de las dos últimas ecuaciones se tiene :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1 + r\,\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}}{\cos\theta} \qquad \text{(AI.12)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\,\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial r}{\partial x}}{r\cos\theta} \qquad \text{(AI.13)}$$

sustituyendo (AI.13) *en* (AI.12) :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1 + r\,\text{sen}\,\theta\left(-\,\frac{\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial r}{\partial x}}{r\cos\theta}\right)}{\cos\theta} = \frac{1 - \text{sen}^2\,\theta\left(\frac{\frac{\partial r}{\partial x}}{\cos\theta}\right)}{\cos\theta}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1 - \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta}\,\frac{\partial r}{\partial x}}{\cos\theta} = \cos\theta$$

sustituyendo este último valor en (AI.13) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\,\text{sen}\,\theta\,\cos\theta}{r\cos\theta} = -\,\frac{\text{sen}\,\theta}{r}$$

análogamente, derivando con respecto a y :

$$\frac{\partial}{\partial y}(x) = r(-\text{sen }\theta)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y) = r\cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \text{sen }\theta \frac{\partial r}{\partial r} = 1$$

resolviendo simultáneamente :

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{r\ \text{sen }\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}}{\cos\theta} \qquad \text{(AI.12')}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1 - \text{sen }\theta \frac{\partial r}{\partial y}}{r\cos\theta} \qquad \text{(AI.13')}$$

sustituyendo (AI.12') en (AI.13') :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1 - \text{sen}\ \left(\frac{r\ \text{sen }\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}}{\cos\theta}\right)}{r\cos\theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1 - r\left(\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}}{r\cos\theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta - r\ \text{sen}^2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}}{r\cos^2\theta}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = (r \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = \cos \theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

sustituyendo éste último valor en (AI.12') :

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{r \operatorname{sen} \theta \dfrac{\cos \theta}{r}}{\cos \theta} = \operatorname{sen} \theta$$

derivando :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \qquad \text{(AI.12'')}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \qquad \text{(AI.13'')}$$

con lo anterior se puede determinar :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial r} \cos \theta \qquad \text{(AI.12''')}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial r} \operatorname{sen} \theta \qquad \text{(AI.13''')}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \text{(AI.14)}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} \qquad \text{(AI.15)}$$

además de (AI.14) :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial P}{\partial r}\ \cos\theta\right]\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial P}{\partial r}\ \cos\theta\ \frac{\partial \theta}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left[\cos\theta\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]\cos\theta + \left[\cos\theta\left(\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}\right) + \frac{\partial P}{\partial r}(-\operatorname{sen}\theta)\right] \cdot \left(\frac{-\operatorname{sen}\theta}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left[\cos^2\theta\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right] + \left[-\frac{1}{r}\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta\ \frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{1}{r}\ \operatorname{sen}^2\theta\ \frac{\partial P}{\partial r}\right]$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \cos^2\theta\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\operatorname{sen}^2\theta\ \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$- \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\ \cos\theta\ \frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}$$

de (AI.15) :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial P}{\partial r}\ \operatorname{sen}\theta\ \frac{\partial r}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial P}{\partial r}\ \operatorname{sen}\theta\right]\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \left[\operatorname{sen}\theta\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]\operatorname{sen}\theta\ +$$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial r}\ \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\ \frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}\right]\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \operatorname{sen}^2\theta \; \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} +$$

$$\frac{1}{r}\cos^2\theta \; \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta \; \cos\theta \; \frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial -}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \operatorname{sen}^2\theta \; \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cos^2\theta \; \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \left[\cos^2\theta \; \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\operatorname{sen}^2\theta \; \frac{\partial P}{\partial r}\right] +$$

$$\left[\operatorname{sen}^2\theta \; \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \; \frac{1}{r} \; \operatorname{sen}\theta \; \cos\theta \; \frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}\right] + \frac{1}{r}\cos^2\theta \; \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\overbrace{\left[\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right]}^{1} + \frac{1}{r}\;\frac{\partial P}{\partial r}\overbrace{\left[\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right]}^{1}$$

finalmente :

$$\nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\;\frac{\partial P}{\partial r}$$

partiendo de la Ecuación de Continuidad:

$$-\vec{\nabla} \cdot \rho \, \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \; \phi \, \rho \tag{V.1}$$

si se considera la ecuación de estado para un fluido ligeramente compresible:

$$\rho = \rho o \; e^{c(P-Po)}$$

junto con la ecuación de movimiento (Ecuación de Darcy), considerando el gradiente de presión:

$$\vec{v} = - \frac{K}{\mu} \vec{\nabla} P$$

se tendrá:

$$\nabla^2 P = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \qquad (V.2)$$

que corresponde a la ecuación de difusión para un fluido ligeramente compresible en forma vectorial.

Escribiendo la Ec.V.2 en coordenadas cilíndricas y considerando que no existe variación vertical de la presión, se obtiene la forma más conocida de la ecuación de difusión.

Esta es:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \qquad (V.3)$$

APENDICE II

SOLUCIONES DE LA ECUACION DE DIFUSION

A continuación se presenta un desarrollo detallado de algunas de las soluciones de la Ecuación de Difusión para diferentes Condiciones de Frontera. Estas condiciones a su vez corresponden a situaciones idealizadas de problemas de flujo en yacimientos.

a) Yacimiento Infinito, Gasto constante en el pozo *y* Presión Inicial uniforme.

Para obtener esta solución de la Ec. V.3 *es necesario usar dos condiciones de frontera y una condición inicial:*

a) $P(r,0) = Pi$ $\qquad r \geq 0$ *(condición inicial)*

b) $\left(r \dfrac{\partial P}{\partial r} \right)_{rw} = - \dfrac{q \mu}{2 \pi k h}$ $\qquad t > 0$ *(condición de frontera interna)*

c) $\lim\limits_{r \to \infty} P(r,t) = Pi$ $\qquad t \geq 0$ *(condición de frontera externa)*

la condición de frontera b) corresponde a gasto constante en el pozo y la condición c) al concepto de yacimiento infinito, lo cual corresponde a tener la presión inicial a un tiempo dado, en radios suficientemente grandes.

La condición b) puede ser aproximada por :

$$\lim_{r \to 0} r \frac{\partial P}{\partial r} = - \frac{q \mu}{2 \pi k h} \qquad t > 0$$

lo anterior facilita la solución del problema planteado. A ésta se le llama solución Fuente Lineal.

Definiendo la variable:

$$Y = \frac{\phi \mu c r^2}{4 k t} \qquad \text{(AII.1)}$$

llamada transformación de Boltzman, es posible expresar la presión como función de esta variable únicamente, es decir la Ec. V.3 se transforma en una ecuación diferencial ordinaria.

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\phi\ \mu\ c\ 2\ r}{4\ k\ t}\ (\frac{r}{r}) = (\frac{2}{r})\ \frac{\phi\ \mu\ c\ r^2}{4\ k\ t} = \frac{2}{r}\ Y$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\phi\ \mu\ c\ r^2 (4k)}{(4\ k\ t)^2 (4k)} = -\frac{\phi\ \mu\ c\ r^2}{4\ k\ t}\ \frac{(\ 4\ k\ )}{(\ 4\ k\ t\ )} = -(\frac{1}{t})\ Y$$

aplicando la regla de la cadena :

$$\frac{1}{r}\ \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\ \frac{\partial P}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{r}\ \frac{\partial P}{\partial y}\ (\frac{2\ Y}{r}) \qquad (AII.2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\ (\frac{\partial P}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial r}\ (\frac{\partial P}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial y}\ (\frac{\partial P}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r})\ \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = (\frac{\partial P}{\partial y}\ \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2})\ \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = (\ \frac{\partial P}{\partial y}\ )\ (\ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\ ) + (\ \frac{\partial y}{\partial r}\ )^2\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\ (\frac{\partial y}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial r}\ (\frac{2y}{r}) = \frac{\partial}{\partial r}\ (\frac{2}{r}\ \frac{\phi\ \mu\ \ c r^2}{4\ k\ t})$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = \frac{2\ \phi\ \ \mu\ c}{4\ k\ t} = \frac{\phi\ \mu\ c}{4\ k\ t}\ (\ \frac{r^2}{r^2}\ )\ 2 = \frac{2y}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{2y}{r^2} + \left(\frac{2y}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{2y}{r^2} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{4y^2}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

sustituyendo AII.2, *y la expresión correspondiente a* $\frac{\partial P}{\partial t}$ *en la* Ec. V.3 :

$$\frac{2y}{r^2} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{4y^2}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{2y}{r} \right) = \frac{\phi \mu c}{k} \left(- \frac{y}{t} \right) \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{4y}{r^2} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{4y^2}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = - \frac{\phi \mu c}{k t} Y \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$Y \frac{\partial P}{\partial y} + Y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = - \frac{\phi \mu c}{k t} \left(\frac{r^2}{4} \right) Y \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$Y \frac{\partial P}{\partial P} + Y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = - Y^2 \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} + Y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = - Y \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} (1 + Y) + Y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

aquí puede usarse la notación de derivadas ordinarias puesto que y queda únicamente en función de P. *Por otra parte, de las condiciones* (c) *y* (b)' *y de la* Ec. AII.1 :

$$\operatorname{Lim} P(y) \longrightarrow \operatorname{Lim} P\left(\frac{\phi \mu c r^2}{4 k t}\right) = Pi \qquad (d)$$

si $\quad t \longrightarrow 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\phi \mu c r^2}{4 k t} \longrightarrow \infty$

es decir, $\quad y \longrightarrow \infty$

$$\lim_{y \to o} r \left(\frac{\partial P}{\partial y} \quad \frac{2y}{r}\right) = - \frac{q \mu}{2 \pi h k}$$

si :

$$p1 = \frac{dP}{dy}$$

$$Y \frac{dP'}{dy} + (1 + Y) P' = 0$$

$$Y \frac{dP'}{dy} = -(1 + Y) P'$$

$$\int \frac{dP'}{P'} = - \int (1 + Y) \frac{dy}{y}$$

$$Ln P' = - Ln Y - Y + C1$$

$$P' = Exp(- Ln Y - Y) Exp(C1) = \frac{Exp(- Y)}{Y} Exp(C1)$$

haciendo :

$$C2 = Exp\,(C1)$$

$$P' = \frac{1}{Y}\,Exp\,(-Y)\;C2 = \frac{dP}{dy}$$

$$2Y\,\frac{dP}{dy} = 2\;C2\;Exp\,(-Y)$$

de la condición :

$$\lim_{y \to 0} 2y\,\frac{dP}{dy} = \lim_{y \to 0} 2\,Exp\,(-Y)\;C2 = -\frac{q\,\mu}{2\,\pi\,k\,h}$$

$$C2 = -\frac{q\,\mu}{4\,\pi\,k\,h}$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{1}{y}\,Exp\,(-Y)\,\left(-\frac{q\,\mu}{4\,\pi\,k\,h}\right)$$

$$dP = \frac{dy}{y}\;Exp\,(-Y)\,\left(-\frac{q\,\mu}{4\,\pi\,k\,h}\right)$$

integrando ambos miembros y utilizando la condición (d) :

$$\int_{Pi}^{P} dP = \int_{\infty}^{Y} \frac{Exp(-Y)}{Y}\,dy\,\left(\frac{-q\,\mu}{4\,\pi\,k\,h}\right) = -\frac{-q\,\mu}{4\,\pi\,k\,h}\int_{\infty}^{Y}\frac{Exp(-Y)}{Y}\,dy$$

$$P = Pi - \frac{q\,\mu}{4\,\pi\,k\,h}\;Ei(-Y) = Pi - \frac{q\,\mu}{4\,\pi\,k\,h}\;Ei\left(-\frac{\phi\,\mu\,c\,r^2}{4\,k\,t}\right)$$

b) Yacimiento Cilíndrico, Gasto constante en la Frontera Interna (Pozo), Cero Flujo en la Frontera Externa (Yacimiento Volumétrico) y Presión Inicial Uniforme.

En este caso, se trata de resolver la Ec.V.3 *con las condiciones siguientes:*

d) $P(r,0) = Pi \qquad r \geq 0$ *(condición inicial)*

e) $\left(r \dfrac{\partial P}{\partial r} \right)_{rw} = - \dfrac{q \mu}{2 \pi k h} \qquad t > 0$ *(condición de frontera interna)*

f) $\left(\dfrac{\partial P}{\partial r} \right)_{re} = 0 \qquad t \geq 0$ *(condición de frontera externa)*

el utilizar variables adimensionales, nos permitirá tener una solución más general, siendo una ventaja adicional el que las ecuaciones queden en forma más compacta.

Definiendo:

$$t_D = \frac{k\ t}{\phi\ \mu\ c\ rw} \tag{V.4}$$

$$r_D = \frac{r}{rw} \tag{V.5}$$

$$P_D = \frac{2 \pi k h (P - Pi)}{q \mu} \tag{V.6}$$

considerando los cambios de variable de r_D, t_D *y* P_D *y tomando en cuenta que ahora el radio de la frontera interna es* rw *se obtiene la ecuación adimensional:*

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial P_D}{\partial t_D} = \frac{\partial P_D}{\partial t_D} \tag{V.7}$$

con las condiciones :

$$(d)' \quad P_D\,(r_D,\ 0) = 0 \qquad\qquad r_D \geq 0$$

$$(e)' \quad \left(\frac{\partial P_D}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = -1 \qquad\qquad t_D > 0$$

$$(f)' \quad \left(\frac{\partial P_D}{\partial r_D}\right)_{r_{eD}} = 0 \qquad\qquad t_D \geq 0$$

aplicando transformadas de Laplace a la Ec. V.7 *y a las condiciones* (d)' *a* (f)', *se tiene :*

$$\frac{d^2\,\overline{P}_D}{dr_D^{\,2}} + \frac{1}{r_D}\,\frac{d\,P_D}{dr_D} = S\ \overline{P}_D \qquad (AII.3)$$

$$(e)'' \quad \left(\frac{dP_D}{dr_D}\right) = -\ 1/S$$

$$(f)'' \quad \left(\frac{d\,\overline{P}_D}{dr_D}\right)_{r_{eD}} = 0 \qquad\qquad \textit{respectivamente.}$$

La solución general de la Ec. AII.3 *es :*

$$\overline{P}_D\,(r_D,\ S) = A\ I_o\,(\sqrt{S}\ \ r_D) + B\ K_o\,(\sqrt{S}\ \ r_D) \qquad (AII.4)$$

derivando esta ecuación con respecto a r_D, *evaluando en* $r_D = 1$ *y* r_{eD} *y aplicando las condiciones* (e)'' *y* (f)'' *se tiene :*

$$A\ \sqrt{S}\ \ I_1(\sqrt{S}\ ) - B\ \sqrt{S}\ \ K_1(\sqrt{S}\ ) = -\ 1/S$$

$$A\sqrt{S}\, I_1(r_{eD}\sqrt{S}) - B\sqrt{S}\, K_1(r_{eD}\sqrt{S}) = 0$$

de donde :

$$A = \frac{k_1(r_{eD}\sqrt{S})}{S^{3/2}\left[I_1(r_{eD}\sqrt{S})K_1(\sqrt{S}) - I_1(\sqrt{S})\, k_1(r_{eD}\sqrt{S})\right]}$$

y

$$B = \frac{I_1(r_{oD}\sqrt{S})}{S^{3/2}\left[I_1(r_{eD}\sqrt{S})\, K_1(\sqrt{S}) - I_1(\sqrt{S})\, k_1(r_{eD}\sqrt{S})\right]}$$

sustituyendo estas expresiones en la Ec. AII.4 *se obtiene :*

$$\overline{P}_D(r_D,S) = \frac{k_1(r_{eD}\sqrt{S})\, I_0(r_D\sqrt{S}) + I_1(r_{eD}\sqrt{S})\, K_0(r_D\sqrt{S})}{S^{\frac{3}{2}}\left[I_1(r_{eD}\sqrt{S})\, k_1(\sqrt{S}) - I_1(\sqrt{S})\, K_1(r_{eD}\sqrt{S})\right]} \qquad (V.8)$$

que es la transformada de Laplace de la solución, cuando se tiene un yacimiento cilíndrico con un pozo situado en el centro del mismo, que produce a gasto constante, y con la presión inicial uniforme.

Para obtener la función original correspondiente a la ecuación anterior, se utiliza el teorema de residuos de Cauchy :

Esta función es :

$$P_D(r_D,t_D) = \frac{2}{r_{eD}^2 - 1}\left(\frac{r_D^2}{4} + t_D\right) - \frac{r_{eD}^2}{r_{eD}^2 - 1}\, \mathrm{Ln}\, r_D -$$

$$- \frac{3\, r_{eD}^{4} - 4\, r_{eD}^{4}\, \mathrm{Ln}\, r_{eD} - 2\, r_{eD}^{2} - 1}{4\,(r_{eD}^{2} - 1)^{2}} +$$

$$+ \pi \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{e^{(-\alpha\eta^{2} t_D)}\, J_1^{2}(\alpha\eta\, r_{eD}) \left[J_1(\alpha\eta)\, Y_0(\alpha\eta\, r_D) - Y_1(\alpha\eta)\, J_0(\alpha\eta\, r_D) \right]}{\alpha\eta \left[J_1^{2}(\alpha\eta\, r_{eD}) - J_1^{2}(\alpha\eta) \right]} \qquad (V.9)$$

en donde $\alpha\eta$ son las raíces de:

$$J_1(\alpha\eta\, r_{eD})\, Y_1(\alpha\eta) - J_1(\alpha\eta)\, Y_1(\alpha\eta\, r_{eD}) = 0$$

con la que se obtiene $P_D(r_D, t_D)$ *para cualquier valor de* t_D.

Para valores grandes del tiempo adimensional, la serie infinita de la Ec. V.9 *tiende a cero.*

Puesto que $r_e \gg r_w$, *para* $r_D = 1$ *la ecuación se puede aproximar por:*

$$P_D(1, t_D) = \frac{2 t_D}{r_{eD}^{2}} + \mathrm{Ln}\, r_{eD} - \frac{3}{4} + 2 \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{e^{(-\alpha\eta^{2} t_D)}\, J_1^{2}(\alpha\eta\, r_{eD})}{\alpha\eta^{2} \left[J_1(\alpha\eta\, r_{eD}) - J_1^{2}(\alpha\eta) \right]}$$

puesto que :

$$J_1(\alpha\eta)\, Y_0(\alpha\eta) - Y_1(\alpha\eta)\, J_0(\alpha\eta) = \frac{2}{\pi\, \alpha\eta} \qquad (V.10)$$

BIBLIOGRAFIA

B I B L I O G R A F I A

"Apuntes de Física de Yacimientos".
Francisco Garaicochea Petrirena.
Universidad de Oriente. Núcleo Universitario Monagas.
Escuela de Ingeniería de Petróleo.
Venezuela.

"Apuntes de Flujo de Fluidos en Medios Porosos".
Agustín V. Mejía Díaz, Ricardo Gómez Saavedra, Jorge A. Osorno Manzo, Rafael Rodríguez Nieto.
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.
México, D.F. 1990.

"Apuntes de Mecánica de Fluidos".
Roberto A. Castro Flores, Raúl León Ventura, Rafael Rodríguez N.
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.
México, D.F. 1990.

"Fundamentals of Reservoir Engineering".
John C. Calhoun Jr.
U.S.A.

"Flow of Fluids Through Porous Materials".
Collins, R. E.
Reinhold Publishing Corporation.
U.S.A. 1961.

"Fundamentals of Reservoir Engineering".
L. P. Dake.
U.S.A. 1982.

"Ingeniería Aplicada de Yacimientos Petrolíferos".
B.C. Craft y M.F. Hawkins Jr.
Ed. Tecnos.
Madrid. 1978.

"Lineamientos del Cálculo de Reservas Probadas de Hidrocarburos".
Gerencia de Ingeniería de Yacimientos, PEMEX.
México, D.F. Noviembre. 1988.

"Notas del curso: Evaluación de Reservas Probadas y Probables".
Juan Marín y Aznar Rusell.
Gerencia de Yacimientos, PEMEX.
Puebla, Pue., México. Septiembre. 1990

"Notas de la Asignatura: Principios de Mecánica de Yacimientos".
Salvador Macías Herrera, Rafael Rodríguez Nieto.
Facultad de Ingeniería. U.N.A.M.
México, D.F. 1987-1990.

"Oil and Gas Property Evaluation and Reserve Estimates".
Petroleum Transactions Reprint Series. No. 3.
S.P.E of A.I.M.E.
Dallas, Tex. U.S.A. 1960.

"Oil and Gas Production from Carbonate Rocks".
George V. Chilingar, Robert W. Mannon, Herman H. Rieke III.
Schlumberger.
U.S.A. 1985.

"Oil Reservoir Engineering".
Pirson Sylvain J.
McGraw-Hill Book Co. Inc. 2a Edición.
New York, U.S.A. 1958.

"Practical Reservoir Engineering".
E. H. Timmerman.
U.S.A. 1982.

"Simulación Matemática de Yacimientos".
Miguel A. Hernández García, Guillermo C. Domínguez Vargas.
Facultad de Ingeniería , U.N.A.M.
México, D.F. 1984.

"Temas Selectos sobre la Caracterización y la Explotación de Yacimientos Carbonatados".
Francisco Garaicochea P., Fernando Samaniego V.
Colegio de Ingenieros Petroleros de México, A.C.
México, D.F. 1988.

"Transactions of The SPE - An Approximate Method for Non-Darcy Radial Gas Flow".
G. Rowan, M.W. Clegg.
S.P.E. Vol. 231.
U.S.A.