



54
205

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**PROPAGACION DE ONDAS
ELASTICAS EN
MATERIALES POLICRISTALINOS**

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

P r e s e n t a :

OSCAR CERAPIO VALDIVIEZO MIJANGOS

México, D. F. 1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Indice

Introducción	2
I Conceptos básicos: Elasticidad	
1.1 Introducción	5
1.2 Coordenadas	5
1.3 Deformaciones	8
1.4 Teorema del transporte	11
1.5 Ecuación de continuidad	12
1.6 Balance de la cantidad de movimiento lineal	13
1.7 Balance de la cantidad de momento angular	16
1.8 Conservación de energía	18
1.9 Ecuaciones constitutivas	20
1.10 Flujo de energía	22
1.11 Ondas planas	23
II Dispersión	
2.1 Introducción	26
2.2 Dispersión en una dimensión	27
2.3 Teorema de Titchmarsh	32
2.4 Relaciones de dispersión para la elasticidad	33
III Modelo de Rokhlin	
3.1 Introducción	37
3.2 Policristales	38
3.3 Modelo de Rokhlin	38

3.4 Deducción de la fórmula de la atenuación	41
3.5 Algunas gráficas para la atenuación	46

IV Cálculo de la velocidad

4.1 Introducción	50
4.2 Cálculo de δ y γ	51
4.3 Cálculo de $c(\omega)$	53
4.4 Gráficas para la velocidad y la atenuación	58
4.5 Comparación de resultados con los presentados B y B [1985] y [1987]	63

V Modelo de autoconsistencia

5.1 Introducción	71
5.2 Planteamiento del problema	72
5.3 Aproximación de la autoconsistencia	73
5.4 Policristal isótropo	77
5.5 Resultados	78

VI Comparación de resultados

6.1 Introducción	88
6.2 Comparación de resultados	88

Conclusiones	97
---------------------------	-----------

Bibliografía	99
--------------------	----

Agradecimientos	101
-----------------------	-----

Introducción

Introducción

Uno de los objetivos del presente trabajo de tesis es comparar los resultados de dos teorías. Una de ellas es la que desarrollaron Beltzer y Brauner (1985) y (1987) y la otra es el Método Autoconsistentes la cual fue desarrollada por Sabina y Willis (1992). El problema que ambas teorías estudian es el de propagación de ondas elásticas en materiales policristalinos. La teoría desarrollada por Beltzer y Brauner (1983) y (1987) consiste en utilizar las relaciones de *Kramers* y *Kronig* para la elasticidad. Estas relaciones dan una forma para hallar la velocidad de fase como función de la frecuencia conociendo de antemano la atenuación de la onda. A lo largo de los capítulos se desarrollarán los elementos necesarios para hallar tanto la atenuación como la velocidad de fase en función de la frecuencia. En el último capítulo se estudia el Método Autoconsistente desarrollado por Sabina y Willis (1992).

En el primer capítulo se desarrollan los conceptos básicos de elasticidad. Se obtienen las ecuaciones básicas de elasticidad a partir de las leyes de conservación como son, masa, momento lineal, momento angular y energía. La teoría que se propone, para el estudio de la elasticidad, es la teoría lineal. Se estudió el flujo de energía. Por último se estudia la propagación de una onda plana en un medio elástico homogéneo e isotrópico. El presente capítulo fue basado esencialmente en las notas de clase del curso de elasticidad impartido por el Dr. Federico Sabina.

En el segundo capítulo se estudia el fenómeno de dispersión. Cuando una onda atraviesa un medio no homogéneo se presenta el fenómeno de dispersión. De hecho cuando una onda se propaga en un medio policristalino se presenta este mismo fenómeno. Se estudia la propagación de una onda plana microscópica en una cuerda no homogénea, esto debido a que en este problema se puede hallar su solución explícita. Se enuncia y luego se usa el teorema de Titelman; el puesto que éste contiene a las relaciones de *Kramers* y *Kronig* o también llamadas *Relaciones de dispersión*. Las relaciones de *Kramers*-*Kronig* son usadas para obtener las relaciones de dispersión para la elasticidad. Las relaciones de dispersión para elasticidad son usadas más adelante para obtener la velocidad de fase de una onda que se propaga en un medio dispersivo.

En el capítulo tercero se obtiene la atenuación de una onda en un medio policristalino como función de la frecuencia. El modelo que se estudia es el Modelo de *Rokhlin* (1970). Después de haber hallado la atenuación como función de la frecuencia se hacen las gráficas de algunas curvas. Es necesario conocer la atenuación

y así retomar las relaciones de dispersión para poder calcular la velocidad.

La teoría de B y B (1985) usa la fórmula de Rokhlin (1970) y hace un ajuste de tres parámetros libres utilizando resultados de Stanke y Kino (1983). El trabajo de S y K (1983) da resultados asíntóticos para la atenuación en tres intervalos de frecuencia diferente. B y B (1983) combinan los resultados de Rokhlin (1970) con los de S y K (1983), y las relaciones de dispersión para la elasticidad y así es como calculan la velocidad de fase. En el capítulo cuarto se obtiene los tres parámetros libres usando ambos resultados, es decir, los de Rokhlin (1970) y los de S y K (1983). Se calcula la velocidad de fase usando las relaciones de dispersión para la elasticidad que se vieron en el segundo capítulo. Para poder obtener la velocidad de fase se hace uso de algunos resultados importantes de variable compleja. Al final de este capítulo se comparan los resultados obtenidos en el presente trabajo con los de B y B (1985) y (1987) y se observan diferencias notables. Se hace un estudio minucioso de las diferencias de los resultados y se concluye que los resultados de B y B (1985) y (1987) para las velocidades deberán ser corregidos.

En el capítulo quinto se hace una breve descripción del Modelo Autoconsistente de Sabina y Willis (1992).

En el último capítulo se comparan los resultados de las dos teoría y se grafican junto son los resultados experimentales existentes. Los materiales policristalinos que se estudian son el hierro, aluminio y níquel. Se observa que las dos teorías que se comparan arrojan resultados muy similares para ondas S en hierro y aluminio, sin embargo para ondas P en los tres materiales los resultados de ambas teorías no son comparables y tampoco lo son para ondas S en níquel.

Por último se escriben las conclusiones del presente trabajo de tesis.

Capítulo I

Elasticidad: Conceptos Básicos

1.1 Introducción

Todo cuerpo se deforma, en mayor o menor grado, cuando se le aplica una fuerza. En el presente trabajo se hace uso de la teoría de la mecánica de los medios continuos que trata de las deformaciones y los movimientos de los cuerpos bajo la influencia de efectos externos, tales como fuerzas, desplazamientos, cambios térmicos, interacciones químicas, efectos electromagnéticos y otros cambios del medio ambiente. Para el estudio aquí realizado sólo se consideran las fuerzas de origen mecánico. Dicha teoría se basa en la hipótesis del continuo. Esta hipótesis desprecia la estructura atómica de la materia, es decir, no toma en cuenta su estructura discreta y supone que es un medio continuo cuyos puntos geométricos se identifican con puntos materiales. Esto equivale, físicamente, a decir que cualquier elemento de volumen contiene un gran número de átomos. Con esta hipótesis estamos considerando fenómenos macroscópicos. Cuando se hable de un elemento de volumen infinitesimal siempre se quiere decir que es muy pequeño en comparación con el volumen del cuerpo que se estudia, pero muy grande en comparación con las distancias entre sus átomos. (Fig. 1.1.1) También las cantidades físicas que se emplean en la teoría, tales como, densidad de masa, desplazamiento, etc. se consideran como funciones continuas de la posición x y el tiempo t .

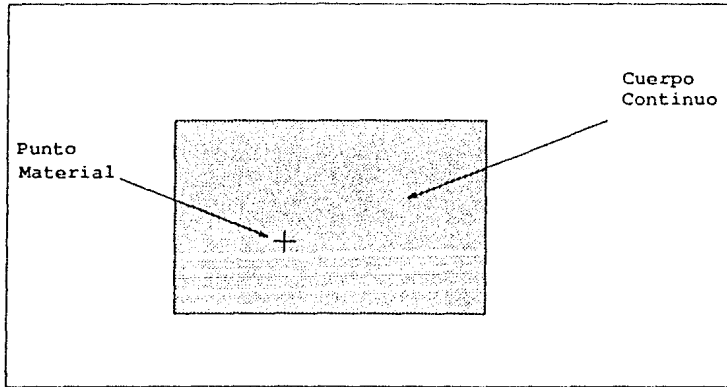


Figura 1.1.1 Un punto material en relación al cuerpo, que se considera continuo y muy grande.

1.2 Coordenadas

Para describir la posición de un punto en el medio continuo se pueden emplear

dos tipos de coordenadas que se describen a continuación. Los puntos materiales de un medio continuo al tiempo $t = 0$ ocupan una región B que consiste del volumen material V y su superficie S . La posición de un punto material P de B se puede describir usando un sistema de coordenadas cartesianas, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ ó por el vector \mathbf{P} que va del origen O de las coordenadas al punto P . (Fig. 1.2.1.a)

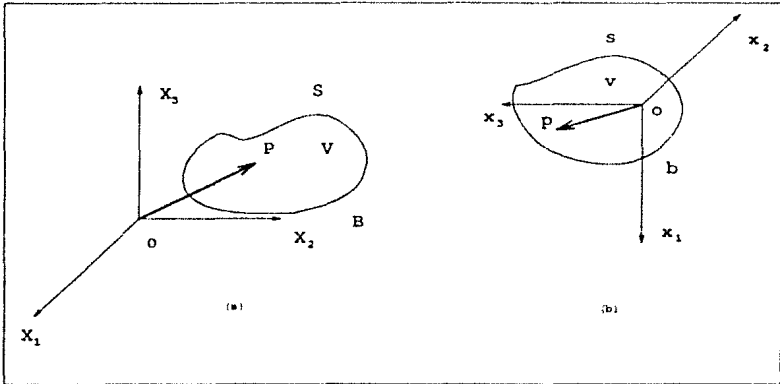


Figura 1.2.1. Sistema de coordenadas cartesianas para ubicar un punto en el cuerpo (a) al tiempo $t = 0$ antes de la deformación. (b) al tiempo t después de haber sido deformado.

Después de un tiempo t los puntos materiales de B ocupan una región b (fig. 1.2.1.b) que consiste del volumen espacial v y su superficie s . En este estado deformado, el punto material P pasa a ocupar un punto espacial p , que se puede localizar por un vector p que va del origen o de otro marco de coordenadas cartesianas al punto p $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Hasta aquí se han usado dos tipos de coordenadas: las llamadas *materiales* o *lagrangianas* \mathbf{X} y las *espaciales* o *eulerianas* \mathbf{x} . Las deformaciones sufridas por el cuerpo y su movimiento lleva a varios puntos materiales a lo largo de varias posiciones espaciales, es decir,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (1.2.1)$$

y también recíprocamente

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \quad (1.2.2)$$

De acuerdo a la ecuación (1.2.1), el movimiento lleva a un punto material P de B al tiempo $t = 0$ a una posición espacial p en b al tiempo t . El movimiento inverso

(1.2.2) nos dice que podemos rastrear los puntos materiales que ocupan la posición espacial \mathbf{p} al tiempo t a una posición original \mathbf{P} . (vease fig. 1.2.2.)

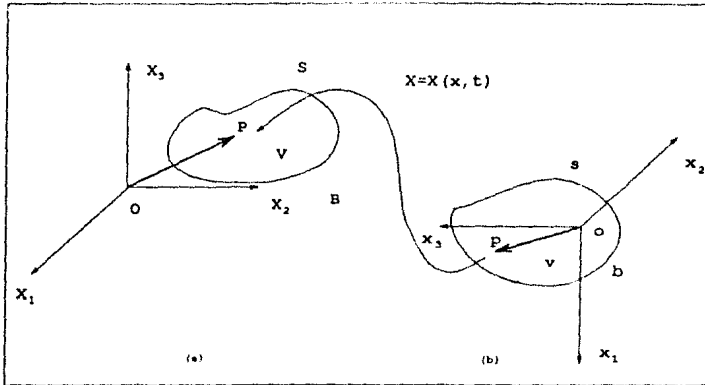


Figura 1.2.2. Con el movimiento inverso se pueden rastrear los puntos materiales que están en \mathbf{b} al tiempo t a la posición original \mathbf{B} .

Axioma de continuidad

Suponemos que el mapa (1.2.1) es uniforme y que posee derivadas parciales continuas con respecto de sus argumentos de cualquier orden que se necesite, excepto posiblemente, en algunos puntos, curvas y superficies singulares. Esto implica que cada una de las ecuaciones de (1.2.1) y (1.2.2) es el inverso único de las otras en la vecindad del punto material P , i.e., la materia es indestructible, o sea, que no es posible deformar un volumen finito de materia en un volumen de tamaño cero o infinito. La materia es impenetrable, o sea, que el movimiento lleva cada región a una región, cada superficie a una superficie, y cada curva a una curva. Una porción de la materia nunca penetra en otra. En la práctica, hay casos en los que este axioma no se cumple, por ejemplo, cuando hay rupturas, etc. No es así en el presente trabajo.

En general, el objetivo de la mecánica del medio continuo consiste en hallar la forma explícita de (1.2.1) cuando los efectos externos y las condiciones iniciales y de frontera se conocen, es decir, si determinamos $\mathbf{p}(t)$ para cada punto material P , podemos construir la nueva forma y posición del cuerpo a cada tiempo t relativo al tiempo $t = 0$.

1.3 Deformaciones

Para hacer un análisis de la deformación se localiza a los puntos del cuerpo en los estados sin deformar y deformados por medio del mismo sistema de coordenadas rectangulares x_1 , x_2 y x_3 .

Sean dS y ds las longitudes de los elementos de línea infinitesimales en los estados sin deformar y deformado respectivamente entonces:

$$dS^2 = dX_k dX_k, \quad (1.3.1)$$

$$ds^2 = dx_i dx_i, \quad (1.3.2)$$

a menos que se diga lo contrario en el presente trabajo se usará la convención de suma de Einstein de índices repetidos.

Aquí el estudio de la deformación se hará conforme a la descripción lagrangiana, i.e., \mathbf{x} es una función \mathbf{X} y t . Por lo tanto:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k. \quad (1.3.3)$$

De (1.3.1) se tiene que

$$dS^2 = \delta_{kl} dX_k dX_l, \quad (1.3.3)$$

donde δ_{kl} es la delta de Kronecker

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l, \\ 0, & \text{si } k \neq l. \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Mientras que

$$ds^2 = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_i}{\partial X_l} dX_k dX_l. \quad (1.3.5)$$

Una condición que se debe de satisfacer para que la deformación sea una de un movimiento de cuerpo rígido es que $dS^2 = ds^2$ para todo par de puntos en el cuerpo en movimiento. Por este hecho se puede considerar a la diferencia $ds^2 - dS^2$ como una medida de la deformación. Esta relación se puede escribir como

$$ds^2 - dS^2 = 2\zeta_{kl} dX_k dX_l, \quad (1.3.7)$$

donde

$$\zeta_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_i}{\partial X_l} - \delta_{kl} \right). \quad (1.3.8)$$

es la llamada *deformación lagrangiana*. El vector de desplazamiento se define como

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (1.3.9)$$

Sustituyendo (1.3.9) en (1.3.8) se obtiene

$$\zeta_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \frac{\partial u_l}{\partial X_k} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \frac{\partial u_i}{\partial X_l} \right). \quad (1.3.10)$$

Para una deformación pequeña tal que el gradiente del desplazamiento es pequeño se tiene que ζ_{kl} se reduce a la *deformación infinitesimal* ϵ_{kl} cuando se desprecian en (1.3.10) términos superiores al de primer orden. O sea que

$$\zeta_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \frac{\partial u_l}{\partial X_k} \right) \equiv \epsilon_{kl}. \quad (1.3.11)$$

Nótese que ϵ_{kl} es un tensor de segundo orden simétrico y que a partir de aquí se estará tratando de la teoría de deformaciones pequeñas tales que cada componente del gradiente de desplazamiento es muy pequeño. Para entender mejor el significado del tensor de deformación infinitesimal se pasará a dar una interpretación geométrica. Se pueden distinguir dos tipos de deformación esencialmente diferentes: una que es normal o longitudinal, i.e., ϵ_{11} , ϵ_{22} y ϵ_{33} y la otra de corte o transversal, i.e., ϵ_{12} , ϵ_{13} y ϵ_{23} .

La primera correspondiente a ϵ_{11} se puede ver en la fig. 1.3.1. Se puede notar un aumento de longitud en la dirección Ox_1 , el cociente de dicho cambio de longitud entre la longitud inicial, esto es:

$$\frac{0.A_1 - 0.A}{0.A} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \epsilon_{11}$$

esta es la parte normal o longitudinal de la deformación.

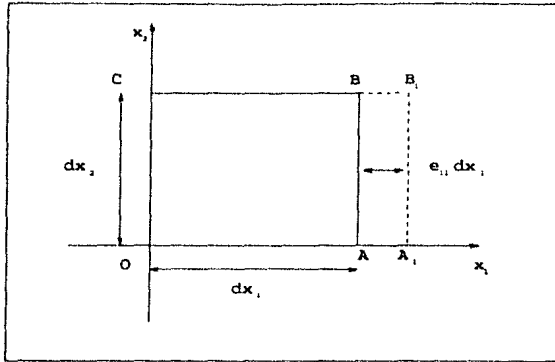


Figura 1.3.1. En el plano x_1x_2 , la sección transversal $OABC$ de un pequeño elemento de volumen sufre una deformación normal o longitudinal en la dirección Ox_1 . La nueva sección transversal es OA_1B_1C .

La parte cortante o transversal de la deformación ϵ_{12} se puede ver en la figura 1.3.2.

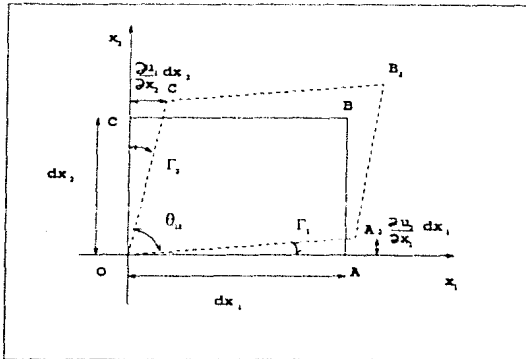


Figura 1.3.2. En el plano x_1x_2 , la sección transversal $OABC$ de un pequeño elemento de volumen está sujeta a una deformación de corte o transversal en el mismo plano. La nueva sección transversal $OA_2B_2C_2$ se manifiesta en la variación angular θ_{12} .

Este es otro tipo de deformación y tiene que ver con las variaciones de los ángulos Γ_1 y Γ_2 , esto es,

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{12} \cong \Gamma_1 + \Gamma_2 \simeq \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2\epsilon_{12}.$$

Por simetría, este análisis se puede hacer para los demás planos y el razonamiento es el mismo para las otras componentes normales y de corte.

1.4 El teorema del transporte

Para derivar las ecuaciones de movimiento de la elasticidad lineal se hace uso de la formulación global de cuatro leyes de conservación que son: masa, cantidad de movimiento lineal, momento angular y energía. También se usa el *teorema de transporte* que a continuación se expone.

Teorema de Transporte *La derivada material de una integral de volumen de cualquier campo ϕ definido en el interior de un volumen material v cuya frontera es s esta dado por*

$$\frac{d}{dt} \int_v \phi dv = \int_v \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int \int_s \phi \dot{u}_j n_j ds = \int_v \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi \dot{u}_j) \right), \quad (1.4.1)$$

donde \mathbf{n} es la normal unidad exterior a s , \dot{u}_j es la derivada material de la componente j de \mathbf{u} .

Una demostración de este teorema se puede consultar en Eringen, 1980 pag. 77. Se deben hacer algunas aclaraciones sobre la función que se esta derivando, o sea, si es una función material o si no lo es. Si f es una función material, es decir

$$f = f(\mathbf{x}, t), \quad (1.4.2)$$

para \mathbf{x} independiente de t , entonces

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.4.3)$$

En cambio si f es una función espacial, o sea

$$f = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad (1.4.4)$$

se tiene que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}. \quad (1.4.5)$$

Esto es debido a que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Al primer término de (1.4.5) se le llama *razón local* o *no estacionaria* mientras que al segundo se le conoce como el término *convectivo*. Se usará la notación $\dot{f} \equiv df/dt$ para indicar la *derivada material*.

1.5 La ecuación de continuidad

El principio de conservación de la masa dice que la masa total del cuerpo no cambia durante el movimiento, es decir, que no se crea masa pero tampoco se destruye.

Sean $\rho(\mathbf{x}, t)$ y $\rho_0(\mathbf{x}, t)$ las densidades del medio continuo en el sistema espacial y material respectivamente. Entonces se puede escribir la conservación global o total de la masa como

$$\int_v \rho dv = \int_V \rho_0 dV, \quad (1.5.1)$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho dv = 0, \quad (1.5.2)$$

donde d/dt es la derivada material.

En el teorema de transporte (1.4.1) se identifica a $\phi = \rho$. Aplicando el teorema de la divergencia a la integral de superficie se obtiene

$$\int_v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{u}_j) \right) dv = 0. \quad (1.5.3)$$

Como esto debe ser válido para cualquier volumen v se tiene que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{u}_j) = 0. \quad (1.5.4)$$

Esta es la conservación de la masa local y se le conoce como la *ecuación de continuidad*.

Para el caso de una deformación infinitesimal

$$\dot{u}_j = \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t}, \quad (1.5.5)$$

se reduce a

$$\dot{u}_j = \frac{\partial u_j}{\partial t}, \quad (1.5.6)$$

ya que se despreciaron términos de segundo orden. También, al mismo orden de magnitud

$$\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \dot{\epsilon}_{jj}. \quad (1.5.7)$$

Substituyendo (1.5.7) en (1.5.4) se tiene

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \dot{\epsilon}_{JJ} = 0, \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (1.5.8)$$

Integrando esta ecuación y tomando en cuenta que $\epsilon_{JJ}(0) = 0$ se obtiene

$$\log \frac{\rho}{\rho_0} = -\epsilon_{JJ}. \quad (1.5.9)$$

Como $\epsilon_{JJ} \ll 1$, (1.5.9) da al primer orden de magnitud

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \epsilon_{JJ}. \quad (1.5.10)$$

entonces

$$\epsilon_{JJ} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 1 - \frac{v_0}{v} \equiv \Delta \quad (1.5.11)$$

ya que la masa total del medio continuo es la misma antes y después de la deformación. Δ se llama la *dilatación cúbica* puesto que da el cambio relativo en el volumen deformado v . Hay que notar que cuando $\Delta < 0$ se trata de una compresión.

1.6 Balance de la cantidad de movimiento lineal

El principio del balance de la cantidad de movimiento lineal dice que la razón temporal del momento lineal es igual a la fuerza resultante \mathbf{F} que actúa sobre el cuerpo, es decir:

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \dot{\mathbf{u}} d\mathbf{c} = \mathbf{F} \quad (1.6.1)$$

En la mecánica de los medios continuos es necesario considerar dos tipos de fuerzas: las de cuerpo y las superficiales. Aquellas que actúan sobre los puntos masa del cuerpo se llaman *fuerzas de cuerpo*; por ejemplo, las fuerzas de la gravedad y electrostática. Mientras que las *fuerzas superficiales* son aquellas que resultan de la acción de un cuerpo sobre otro a través de la frontera. Por ejemplo, la presión hidrostática que actúa sobre la superficie de un cuerpo.

Sea $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})$ la tracción, i.e., la fuerza por unidad de área del cuerpo deformado que actúa sobre la cara de un pequeño elemento de superficie cuya normal unidad exterior es \mathbf{n} y centro de aplicación es \mathbf{x} . (Ver fig. 1.6.1)

Suponemos que \mathbf{t} es una función continua. Además se cumple que

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \quad (1.6.2)$$

por la tercera ley de Newton.

Sea \mathbf{F} la fuerza de cuerpo externa por unidad de masa. La ecuación de la cantidad de movimiento se escribe como:

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \dot{\mathbf{u}} dv = \int_v \rho \mathbf{F} dv + \int_s \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) ds \quad (1.6.3)$$

aplicando el teorema de transporte (1.4.1) al lado izquierdo de (1.6.3) con $\phi \equiv \rho \dot{\mathbf{u}}_i$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_v \rho \dot{\mathbf{u}}_i dv &= \int_v \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{\mathbf{u}}_i) dv + \int_s \rho \dot{\mathbf{u}}_i \dot{\mathbf{u}}_j n_j ds \\ &= \int_v \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{\mathbf{u}}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{\mathbf{u}}_i \dot{\mathbf{u}}_j) \right] dv \end{aligned}$$

por el teorema de la divergencia y agrupando términos se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_v \rho \dot{\mathbf{u}}_i dv &= \int_v \left\{ \rho \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_i}{\partial t} + \dot{\mathbf{u}}_j \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_i}{\partial x_j} \right] + \dot{\mathbf{u}}_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{\mathbf{u}}_j) \right] \right\} dv \\ &= \int_v \rho \ddot{\mathbf{u}}_i dv. \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Usando la ecuación de continuidad e identificando la derivada total de $\dot{\mathbf{u}}_i$ respecto del tiempo se tiene que

$$\int_v \rho (\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{F}) dv = \int_s \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) ds. \quad (1.6.5)$$

Para obtener la ecuación local de conservación de la cantidad de movimiento lineal es necesario expresar a la integral de superficie (1.6.5) como una integral de volumen. Con este propósito se aplica la ecuación (1.6.5) a un pequeño volumen tetraedral v como lo muestra la figura 1.6.1.

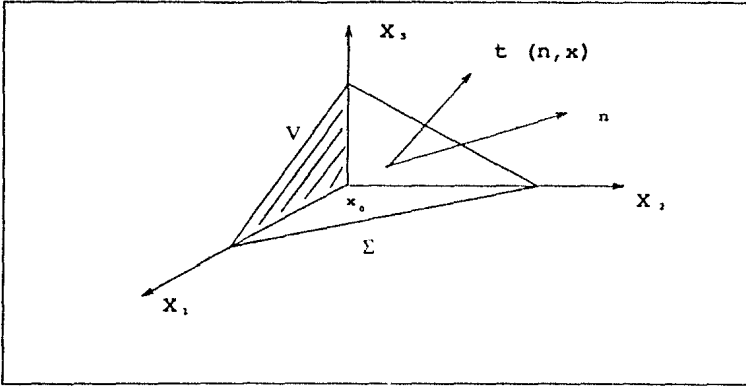


Figura 1.6.1. Pequeño tetraedro de volumen V . Se muestra la tracción \mathbf{t} sobre la cara inclinada de área Σ y vector normal \mathbf{n} .

Sea \mathbf{n} la normal exterior a la cara inclinada del tetraedro, de área Σ , y que dista h del centro \mathbf{x}_0 . Suponemos que $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})$ es una función continua de \mathbf{x} y que \mathbf{F} y $\ddot{\mathbf{u}}$ son finitas en v . Aplicando el teorema del valor medio para integrales a la ecuación (1.6.5) se tiene que:

$$[n_1 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_1, \mathbf{x}_1) + n_2 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_2, \mathbf{x}_2) + n_3 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_3, \mathbf{x}_3) + \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}_4)] \Sigma + \frac{1}{3} h \Sigma \mathbf{k} = 0 \quad (1.6.6)$$

donde \mathbf{k} es $[\rho(\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{F})](\theta)$ para algún θ que este dentro de v y además \mathbf{k} está acotado. El valor de \mathbf{k} se toma de esta manera debido a que se aplica el teorema del valor medio en ambas partes de la ecuación (1.6.5). \mathbf{i}_i son los vectores unidad en las direcciones de los ejes y son perpendiculares a las otras tres caras del tetraedro con vértice \mathbf{x}_0 , donde \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, son puntos en cada una de las caras del tetraedro. En el límite, cuando $h \rightarrow 0$, siendo \mathbf{x} el punto límite correspondiente del tetraedro, se tiene

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}_0) = -[n_1 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_1, \mathbf{x}_0) + n_2 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_2, \mathbf{x}_0) + n_3 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_3, \mathbf{x}_0)]. \quad (1.6.7)$$

Si se escribe

$$\mathbf{t}(-\mathbf{i}_j, \mathbf{x}_0) = -(\sigma_{j1}, \sigma_{j2}, \sigma_{j3}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.6.8)$$

entonces σ_{ji} es la i ésima componente de la tracción en la dirección \mathbf{x}_j .

Se tiene entonces que, para cualquier punto \mathbf{x} ,

$$t_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \sigma_{ji}n_j \tag{1.6.9}$$

puesto que t_i y n_i son vectores, σ_{ji} es un tensor de segundo orden llamado el *tensor de esfuerzo*.

Se ha probado que el estado de fuerzas alrededor de cualquier punto del cuerpo ésta completamente caracterizado por las nueve componentes del tensor de esfuerzo σ_{ji} . La ecuación de conservación de momento lineal queda entonces como

$$\int_v \rho(\ddot{u}_i - F_i)dv = \int_s \sigma_{ji}n_j ds. \tag{1.6.10}$$

Ahora se aplica teorema de la divergencia y se agrupan todos los términos en una sola integral. Como esto se debe cumplir para todo volumen v la ecuación que resulta es:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho F_i, \tag{1.6.11}$$

que es la ecuación que representa el balance de la cantidad de momento lineal local.

Si $\mathbf{p} = \rho \dot{\mathbf{u}}$ es la *densidad de la cantidad de momento lineal*, la ecuación (1.6.11) se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{p}} = \text{div} \sigma + \rho \mathbf{F}, \tag{1.6.12}$$

donde σ es el tensor de esfuerzo cuyas componentes son σ_{ij} .

1.7 Balance de la cantidad de momento angular

El principio del balance de la cantidad de momento angular dice que la razón de cambio temporal del momento angular alrededor de un punto fijo 0 es igual a la torca resultante \mathbf{M} alrededor de 0, esto es

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}})dv = \mathbf{M}. \tag{1.7.1}$$

Para obtener una ecuación que represente la conservación local del momento angular se usará el teorema del transporte y de las leyes de conservación hasta aquí obtenidas.

Se escribe el lado derecho explícitamente

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}})dv = \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \mathbf{F})dv + \int_s \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})ds. \tag{1.7.2}$$

Utilizando el teorema de transporte en el lado izquierdo se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) dv &= \int_v \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}})] dv + \int_s \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) \dot{u}_j n_j ds \\ &= \int_v \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}})] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\dot{u}_j \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}})] \right\} dv. \end{aligned}$$

por el teorema de la divergencia; entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) dv &= \int_v \left\{ \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) + \dot{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{u}_j) \right) \right] \right\} dv. \end{aligned}$$

En el segundo sumando del lado derecho de esta ecuación, el término entre paréntesis representa la conservación de la masa por lo que es igual a cero. Entonces queda

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) dv = \int_v \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) dv = \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \ddot{\mathbf{u}}) dv, \quad (1.7.3)$$

porque $\dot{\mathbf{u}} \wedge \dot{\mathbf{u}} = 0$. Así se puede escribir de (1.7.3) y (1.7.2)

$$\int_v \rho \mathbf{x} \wedge (\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{F}) dv = \int_s \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) ds. \quad (1.7.4)$$

La ecuación (1.7.4) se puede escribir en componentes usando (1.6.11)

$$\int_v \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_l} dv = \int_s \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{ik} n_l ds = \int_v \epsilon_{ijk} \left[\delta_{jl} \sigma_{ik} + x_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_l} \right] dv, \quad (1.7.5)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de Levi Chivita esta definido por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } ijk \text{ son una permutación} \\ & \text{par de 123} \\ 0, & \text{si } ijk \text{ hay dos índices} \\ & \text{repetidos} \\ -1, & \text{si } ijk \text{ son una permutación} \\ & \text{impar de 123} \end{cases}$$

entonces

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0. \quad (1.7.6)$$

O sea que

$$\sigma_{kj} = \sigma_{jk}. \quad (1.7.7)$$

Es decir, que el tensor de esfuerzo es simétrico. Esta es la ley local de conservación del momento angular.

1.8 Conservación de la energía

La razón de cambio temporal de la suma de las energías cinética K e interna U es igual a la suma de la potencia P de las fuerzas externas más todas las otras energías Q que entran o salen del cuerpo por unidad de tiempo.

$$\frac{d}{dt}(K + U) = P + Q, \quad (1.8.1)$$

donde U y P son la energía interna y el trabajo de las fuerzas externas por unidad de tiempo respectivamente y Q es la energía calorífica por unidad de tiempo que es la única otra energía que se considera en este trabajo.

Se calcula explícitamente P ,

$$P = \int_v \rho F_i \dot{u}_i dv + \int_s t_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \dot{u}_i ds. \quad (1.8.2)$$

Sustituyendo $t_i = \sigma_{j,i} n_j$ de (1.6.9) en (1.8.2) y aplicando el teorema de la divergencia se tiene que

$$P = \int_v \left[\dot{u}_i (\rho F_i + \sigma_{i,j,j}) + \sigma_{i,j} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right] dv. \quad (1.8.3)$$

La primera parte de la ecuación anterior es igual a $\rho \dot{u}_i / dt$ por el principio del balance de la cantidad de movimiento lineal, de esta manera la ecuación anterior es ahora

$$P = \int_v \left(\rho \dot{u}_i \frac{d\dot{u}_i}{dt} + \sigma_{i,j} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right) dv. \quad (1.8.4)$$

identificando a la energía cinética por unidad de tiempo como

$$K = \frac{1}{2} \int_v \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dv \quad (1.8.5)$$

Para obtener la variación temporal de la energía interna se tiene que definir a E como la energía interna por unidad de masa, esto es,

$$U = \int_v \rho E dv. \quad (1.8.6)$$

por lo tanto

$$\frac{dU}{dt} = \int_v \frac{dE}{dt} dv. \quad (1.8.7)$$

Usando las ecuaciones (1.8.4) y (1.8.5) la ecuación de la conservación de la energía se puede escribir de la siguiente manera

$$Q = \int_v \left(\rho \frac{dE}{dt} - \sigma_{i,j} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right) dv. \quad (1.8.8)$$

Supongamos que los procesos que tienen lugar son reversibles, es decir, no hay disipación de energía. Si S es la entropía por unidad de masa y T es la temperatura absoluta entonces se tiene que

$$Q = \int_v \rho T \frac{dS}{dt} dv, \quad (1.8.9)$$

sustituyendo la ecuación (1.8.8) en (1.8.9) se obtiene

$$\int_v \left[\sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \rho \left(T \frac{dS}{dt} - \frac{dE}{dt} \right) \right] dv = 0. \quad (1.8.10)$$

Por lo que se llega fácilmente a

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \rho \left(T \frac{dS}{dt} - \frac{dE}{dt} \right) = 0, \quad (1.8.11)$$

dado que v es arbitrario. Esta es la ecuación de la conservación de la energía local.

Se puede reescribir la ecuación (1.8.11) de la siguiente manera

$$\rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} - T \frac{\partial S}{\partial t} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial t} (e_{ij} - w_{ij}), \quad (1.8.12)$$

donde

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.8.13)$$

es la rotación infinitesimal. Pero $\sigma_{ij} \dot{w}_{ij} = 0$ porque es el producto de un tensor simétrico con uno antisimétrico. Por lo tanto se puede escribir la ecuación (1.8.12) como

$$\rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} - T \frac{\partial S}{\partial t} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t}. \quad (1.8.14)$$

Teniendo la ecuación general para la conservación local de la energía se pueden hacer algunas hipótesis sobre el problema que se quiere trabajar.

Si el proceso es adiabático, es decir, procesos que son muy rápidos (elasticidad dinámica) entonces

$$dQ = 0, \quad dS = 0. \quad (1.8.15)$$

La densidad de energía interna es

$$W = \rho E. \quad (1.8.16)$$

Diferenciando ambos lados se tiene que

$$dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (1.8.17)$$

Como en el caso anterior, si la energía interna es solamente función de ϵ_{ij} , entonces

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij}. \quad (1.8.18)$$

A W se le conoce como *densidad de energía de deformación adiabática*.

1.9 Ecuaciones Constitutivas

Una relación constitutiva es aquella que caracteriza al material que se estudia. Puede ser una relación entre el esfuerzo y la deformación o entre las razones de deformación y el esfuerzo. Finalmente lo que determina esta relación es la observación experimental del material estudiado.

Aquí se estudian materiales elásticos cuyo comportamiento está dado por la ley de Hooke, i.e., una relación lineal entre los tensores de esfuerzo y deformación,

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (1.9.1)$$

donde L_{ijkl} es el llamado *tensor de módulos elásticos*, y es un tensor cartesiano de cuarto orden. O bien la ecuación (1.9.1) se puede escribir también como

$$\sigma = L\epsilon \quad (1.9.2)$$

Debido a las simetrías del tensor de esfuerzo y de deformación, L que lo denotará en forma abreviada tiene las siguientes simetrías:

$$L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk} = L_{jilk},$$

por lo que el número componentes independientes se reduce de $3^4 = 81$ a 21 solamente, en el caso más general de un medio anisótropo.

Un medio se llama *isótropo* si las propiedades elásticas en cada punto del cuerpo son las mismas en todas las direcciones en ese punto. La expresión para el tensor de esfuerzo con estas características se puede escribir como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}. \quad (1.9.3)$$

Los dos coeficientes λ y μ se llaman parámetros de Lamé. El tensor de esfuerzo también se puede escribir en términos del módulo de *compresibilidad* κ y de *rigidez* μ , esto es,

$$\sigma_{ij} = \kappa \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk}$$

donde κ se puede escribir en términos de λ y de μ , $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ (Landau 1986, pag. 10).

Un material con simetría cúbica tiene la propiedad de que si se rota los ejes cristalográficos respecto del origen en $\pi/2$ las propiedades del material no cambian. Para un material con esta simetría, el tensor de constantes elásticas se puede escribir como:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{12} & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{11} & L_{12} & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{12} & L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{44} \end{pmatrix}$$

bajo la siguiente convención dado que se está escribiendo un tensor de cuarto orden en una matriz de seis por seis.

$$(11) \rightarrow 1, \quad (32) \rightarrow (23) \rightarrow (4),$$

$$(22) \rightarrow 2, \quad (13) \rightarrow (31) \rightarrow (5),$$

$$(33) \rightarrow 3, \quad (21) \rightarrow (12) \rightarrow (6).$$

En términos de las constantes elásticas κ , μ'_c y μ el tensor de constantes elásticas L se puede escribir como:

$$L = \begin{pmatrix} \kappa_c + \frac{4}{3}\mu_c & \kappa_c - \frac{2}{3}\mu_c & \kappa_c - \frac{2}{3}\mu_c & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_c - \frac{2}{3}\mu_c & \kappa_c + \frac{4}{3}\mu_c & \kappa_c - \frac{2}{3}\mu_c & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_c - \frac{2}{3}\mu_c & \kappa_c - \frac{2}{3}\mu_c & \kappa_c + \frac{4}{3}\mu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu'_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu'_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu'_c \end{pmatrix}$$

Para un material isotrópico:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

1.10 Flujo de energía

El flujo de energía es la razón de cambio de la energía por unidad tiempo en una unidad de área. Una forma para cuantificar este flujo es tomar el producto escalar entre la tracción \mathbf{t} y la velocidad $\dot{\mathbf{u}}$, i.e.,

$$P = \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}}. \quad (1.10.1)$$

La tracción por definición es la fuerza por unidad de área. Al multiplicar la tracción por $\dot{\mathbf{u}}$ se obtiene una medida del flujo de energía. Ésto se puede ver en la figura(1.10.1).

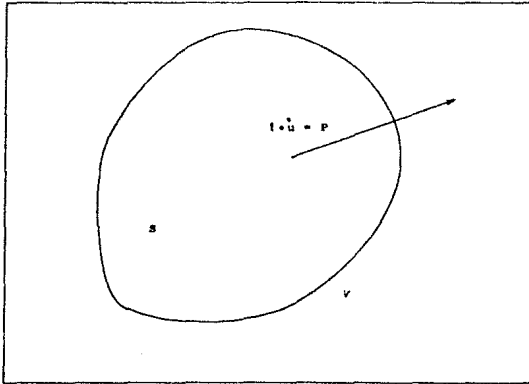


Figura 1.10.1. El flujo de energía que pasa a través de la superficie S que encierra el volumen V .

Considerando a \mathbf{n} como el vector normal a la superficie S la ecuación (1.10.1) se puede reescribir como:

$$P = \sigma_{tm} n_m \dot{u}_t.$$

La potencia por unidad de área claramente representa el flujo de energía a través de la superficie s .

Este concepto es importante porque da una idea de cuanta energía esta fluyendo a través de una cierta superficie. En los capítulos posteriores se utilizará este concepto para calcular la atenuación de una onda.

1.11 Ondas Planas

La propagación de una onda plana de desplazamientos en un medio elástico se puede escribir como:

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct)\mathbf{d}, \quad (1.11.1)$$

donde \mathbf{u} es el desplazamiento, \mathbf{p} y \mathbf{d} son vectores unitarios en la dirección de propagación de la onda y dirección del desplazamiento, respectivamente. La velocidad de fase de dicha onda se denota por c . Es claro que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = \text{constante}$ describe un plano normal al vector \mathbf{p} .

Con la ecuación (1.6.11) y usando las ecuaciones constitutivas para un medio isótropo se puede llegar a

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\kappa + \frac{1}{3}\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.11.2)$$

donde κ es la compresibilidad y μ es la rigidez. En la ecuación (1.11.2) se considera un medio homogéneo, isótropo y en ausencia de fuerzas de cuerpo. La ecuación (1.11.2) se le conoce como la ecuación de *Navier*.

Sustituyendo la ecuación (1.11.1) en (1.11.2) se llega fácilmente a:

$$(\mu - \rho c^2)\mathbf{d} + (\kappa + \frac{1}{3}\mu)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{d})\mathbf{p} = 0, \quad (1.10.3)$$

como \mathbf{p} y \mathbf{d} son dos vectores unitarios diferentes, para que se cumpla la ecuación anterior se deben cumplir al menos que $\mathbf{d} = \pm \mathbf{p}$ o $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d} = 0$.

Si $\mathbf{d} = \pm \mathbf{p}$ entonces

$$c = c_L = \left(\frac{\kappa + \frac{1}{3}\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.11.4)$$

en este caso la dirección de los desplazamientos es la misma que la dirección de propagación.

Si $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d} = 0$ entonces se obtiene:

$$c = c_T = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.11.5)$$

en este caso la dirección de propagación es perpendicular a la dirección de los desplazamientos. A la onda que cumple con la primera condición se le conoce como *onda longitudinal* o *compresional* y a la que cumple con la segunda se le conoce como *onda transversal* o de *corte*. Nótese que $c_L > c_T$ puesto que $\kappa + \frac{1}{3}\mu > \mu$ y $\kappa > 0$.

Capítulo II

Relaciones de Dispersión

2.1 Introducción

En el presente capítulo se estudian las relaciones de dispersión para la elasticidad. Primero se estudia el problema de dispersión en una barra que es homogénea por pedazos, en seguida se enuncia el teorema de Titchmarsh y por último se usa este teorema para obtener la relación de dispersión para la elasticidad.

Como motivación al problema de dispersión se resuelve el problema de una barra no homogénea en la cual incide una onda armónica plana. Se encuentra que la transmisión es una función de la frecuencia. Se estudian algunas propiedades de la transmisión como si fuera una función de variable compleja de ω .

En la siguiente sección se enuncia el *Teorema de Titchmarsh*. Este teorema relaciona conceptos de linealidad del sistema físico con la analiticidad de la función transferencia que se obtiene del problema que se estudia. La función analítica que resulta de este problema tiene algunas cualidades importantes tales como: dada la parte real de esta función analítica se puede obtener la parte imaginaria de esa función y viceversa. Las relaciones de *Kramers* y *Kronig* para la elasticidad son un caso particular del *Teorema de Titchmarsh* cuando la función analítica en turno es el índice de refracción.

Si se toma la función analítica como el índice de refracción se llega a una forma cerrada para obtener la velocidad de fase como función de la atenuación de la onda en el medio donde se propaga. Se debe mencionar que tanto la velocidad de fase como la atenuación son funciones de la frecuencia. La relación que nos da la velocidad de fase como función de la atenuación se conoce como relación de dispersión para la elasticidad.

2.2 Dispersión en una dimensión

El motivo de estudiar la dispersión de una onda en una dimensión en un material inhomogéneo es establecer ciertas propiedades características de problemas, como por ejemplo, la variación de la amplitud de la onda como función de la frecuencia en un problema que se pueda resolver explícitamente.

Cuando una onda atraviesa un medio que no es homogéneo presenta el fenómeno de dispersión, o sea, que un pulso cambia de forma al propagarse en dicho medio. Por ejemplo, supóngase que se tiene una cuerda infinita homogénea por pedazos en las regiones: $D_0 = \{x|x > 0\}$; $D_1 = \{x|0 < x < l\}$ y $D_2 = \{x|x > l\}$ en la cual incide una onda plana como lo muestra la fig. 2.2.1. Las velocidades de propagación de la onda en la cuerda son $c_0 = 1$, c_1 y c_2 en los medios D_0 , D_1 y D_2 respectivamente. Nótese que la velocidad de propagación del medio D_0 se está tomando como referencia al tomarla igual a la unidad.

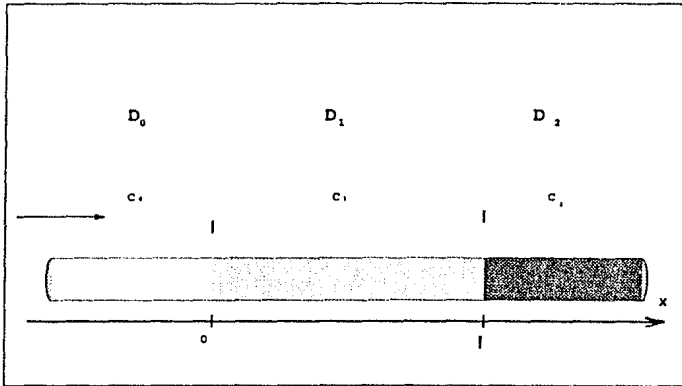


Figura 2.2.1 Una cuerda homogénea por pedazos. En las regiones $D_0(x < 0)$, $D_1(0 < x < l)$ y $D_2(x > l)$ la velocidad de propagación de las ondas es c_0 , c_1 y c_2 , respectivamente.

Para resolver el problema de la transmisión en una cuerda inhomogénea se debe resolver la ecuación de onda en las distintas regiones además de satisfacer las condiciones de frontera correspondientes, i.e., se busca una función $\varphi = \varphi(x, t)$ tal

que

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} \varphi_0(x, t), & x < 0, \\ \varphi_1(x, t), & 0 < x < l, \\ \varphi_2(x, t), & x > l. \end{cases}$$

satisfaga

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}, & x < 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, & 0 < x < l, \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, & x > l, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

con las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} \varphi_0(0, t) &= \varphi_1(0, t); & \varphi_1(l, t) &= \varphi_2(l, t); \\ \frac{\partial \varphi_0(0, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_1(0, t)}{\partial x}; & \frac{\partial \varphi_1(l, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_2(l, t)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Estas condiciones de frontera dicen que el desplazamiento y su gradiente son continuos en las interfaces.

Es fácil ver que la solución de la ecuación de onda para cada región está dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, t) &= \epsilon^{i\omega(x-t)} + R\epsilon^{-i\omega(x+t)}, & x < 0, \\ \varphi_1(x, t) &= A\epsilon^{i\omega(x/c_1-t)} + B\epsilon^{-i\omega(x/c_1+t)}, & 0 < x < l, \\ \varphi_2(x, t) &= T\epsilon^{i\omega(x/c_2-t)}, & x > l, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

donde ω es la frecuencia angular, t el tiempo y x es la coordenada espacial. Estas soluciones tienen la siguiente interpretación: En la región D_0 , φ_0 es una onda plana armónica monocromática que incide de izquierda a derecha con amplitud igual a uno y una onda reflejada con amplitud igual a R ; en la región D_1 , φ_1 es la suma de una onda transmitida de amplitud A y una onda reflejada de amplitud B ; por último, en la región D_2 sólo hay una onda φ_2 que se transmite con amplitud T .

Esto se puede ver esquemáticamente en la figura 2.2.2.

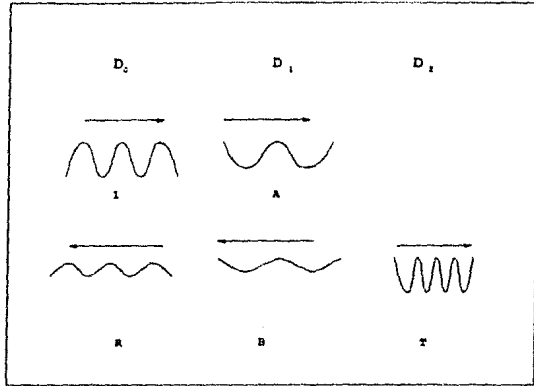


Figura 2.2.2. La solución de la ecuación de onda en las tres regiones D_0 , D_1 y D_2 . En la región D_0 hay una onda de amplitud uno que incide de izquierda a derecha y una que se refleja de amplitud R , en la región D_1 hay dos ondas, una que se transmite de amplitud A y una que se refleja de amplitud B y en la región D_2 sólo hay una onda que se transmite con amplitud T . Nótese el cambio de amplitudes y de longitudes de onda en cada medio.

Se tienen cuatro amplitudes a determinar R , A , B y T . Se tienen cuatro condiciones de frontera. Por lo tanto se tiene un sistema lineal de ecuaciones consistente el cual se puede resolver fácilmente. Usando las ecuaciones (2.2.3) y las condiciones de frontera (2.2.2) se obtienen las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 -R + A + B &= 1, \\
 R + A/c_1 - B/c_1 &= 1, \\
 Ae^{i\omega l/c_1} + Be^{-i\omega l/c_1} - Te^{i\omega l/c_2} &= 0, \\
 A/c_1 e^{i\omega l/c_1} - B/c_1 e^{-i\omega l/c_1} - T/c_2 e^{i\omega l/c_2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

En esta sección sólo se tiene interés en hallar a T . Después de hacer algunas manipulaciones algebraicas con estas ecuaciones se llega a:

$$T = \frac{4c_1 c_2 e^{i\omega(1/c_2 - 1/c_1)l}}{(c_1 + 1)(c_1 + c_2) - (c_1 - 1)(c_1 - c_2)e^{i2\omega l/c_1}}. \tag{2.2.5}$$

Si la rapidez del medio D_3 es igual a la del medio D_2 se llega al resultado que reporta Marsden, 1973 pag. 420.

El cuadrado del valor absoluto de T representa la intensidad de la onda transmitida en la región D_2 . Es interesante calcularla explícitamente la intensidad de la onda $|T|^2$

$$|T|^2 = \frac{16c_2^2 c_1^2}{[(c_1 + 1)(c_1 + c_2) - (c_1 - 1)(c_1 - c_2)e^{2i\omega l/c_1}]^2} \quad (2.2.6)$$

Notése la dependencia de $|T|^2$ con la longitud del pedazo intermedio de la cuerda.

Se debe hacer la observación de que la transmisión depende de las propiedades del medio del cual llega. Por ejemplo, si la onda pasa de un medio a otro más lento, la amplitud de la onda transmitida será menor que la de la onda reflejada. Por otro lado si pasa a un medio menos lento la amplitud será mayor. Esto es debido a la conservación de la energía.

Para el caso aquí estudiado de la cuerda no homogénea se comprobó que la energía se conserva, es decir, que se cumpla la relación

$$c_2 (1 - |R|^2) = |T|^2.$$

Para ver el comportamiento de la amplitud de la onda transmitida en la región D_2 vale la pena hacer unos cálculos numéricos para algunos materiales. En la figura 2.2.3, se grafica el cuadrado de la intensidad de la onda transmitida $|T|^2$ contra la frecuencia normalizada $\omega l/c_1$ para cuatro configuraciones distintas usando tres materiales que son los siguientes acero, aluminio y cobre. La rapidez para cada uno estos materiales se presentan en la tabla 2.2.1.

Material	Rapidez <i>m/seg</i>
Acero	5900
Aluminio	6300
Cobre	4600

Tabla 2.2.1. Rapidez de propagación de una onda en diferentes materiales.

Se estudian dos casos de transmisión con tres materiales distintos y otros dos en el que los materiales de los extremos son iguales, éstos son: *acero-aluminio-cobre*, *cobre-aluminio-cobre*, *aluminio-cobre-aluminio* y por último *cobre-aluminio-acero*. El primer caso (superior izquierda fig. 2.2.3) es un medio rápido-rapidísimo-lento. La amplitud de la onda transmitida es mayor que la amplitud de la onda de incidencia. En el segundo caso (superior derecha fig. 2.2.3) es un acoplamiento lento-rapidísimo-lento. La amplitud de la onda transmitida crece con la frecuencia hasta $\pi/2$ y luego decae y esta amplitud es más pequeño que la de la onda de incidencia. Para un acoplamiento rapidísimo-lento-rapidísimo (inferior izquierdo fig. 2.2.3) presenta el mismo comportamiento que lento-rapidísimo-lento pero la transmisión es menor que en el caso antes citado. En el último acoplamiento lento-rapidísimo-rápido (derecho inferior fig. 2.2.3) la intensidad de la onda transmitida disminuye conforme aumenta la frecuencia y luego vuelve a aumentar, a pesar de este comportamiento la intensidad de esta onda es mayor que la de la onda incidente.

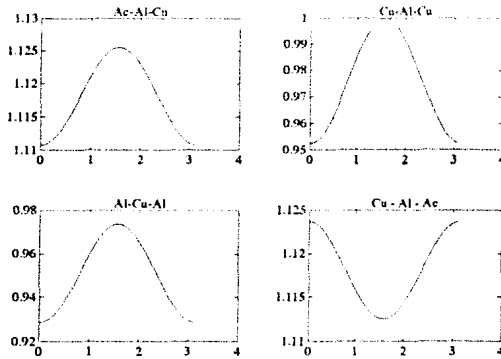


Figura 2.2.3. Gráfica del cuadrado del módulo de la amplitud de la onda transmitida $|T|^2$ contra la frecuencia normalizada $\omega l/c_1$. (a) acero-aluminio-cobre, (b) cobre-aluminio-cobre, (c) aluminio-cobre-aluminio y (d) cobre-aluminio-acero.

En la figura 2.2.3 se puede observar que el cuadrado del valor absoluto de la amplitud de la onda transmitida siempre toma su máximo o su mínimo en 0 , $\pi/2$ y π . Nótese que $|T|^2$ es una función periódica de periodo π .

En el problema de dispersión de una cuerda no homogénea se puede hacer notar que el cuadrado del valor absoluto de la onda transmitida depende de la frecuencia así como también de la longitud del pedazo intermedio y de las velocidades en los tres medios donde se propaga la onda que se dispersa.

Es interesante destacar que la función $T = T(\omega)$ se puede pensar como una función de la variable compleja ω . T tiene las siguientes propiedades:

1. T es una función meromorfa de ω y tiene polos en el semiplano inferior

$$\omega = c_1 (n\pi - ir) / l \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde r es solución de $e^{2r} = [(c_1 + c_2)(c_1 + 1) / (c_1 - c_2)(c_1 - 1)]$,

2. $|T| = 1$ cuando ω es tal que $e^{2i\omega l/c_1} = 1$ y $c_2 = 1$.
3. Cuando $\omega \rightarrow i\infty$, $T \rightarrow 0$ (si $c_1 > c_2$).
4. Cuando $\omega \rightarrow -i\infty$, $T \rightarrow \infty$ (si $c_1 > c_2$).

Hasta este punto se ha resuelto el problema de dispersión en una cuerda y se han estudiado algunas características de la transmisión como una función de variable compleja. Es de esperar que cuando se resuelva el problema de dispersión para policristales, otras propiedades como, por ejemplo, la transmisión que en este caso será la atenuación también dependa de la frecuencia, de la rapidez de propagación de la onda en cada grano y del tamaño de los granos.

2.3 Teorema de Titchmarsh

En la presente sección se enuncia el teorema de Titchmarsh puesto este teorema muestra una equivalencia entre cuatro resultados aparentemente distintos. Relaciona conceptos de linealidad y analiticidad en un sistema físico con el principio de causalidad, además de dar ecuaciones para hallar la parte real de una función analítica dada la parte imaginaria de esa función y viceversa. Estas últimas se le conocen como las relaciones de dispersión ó las relaciones de Kramers y Kronig.

Teorema de Titchmarsh Si una función de cuadrado integrable $G(\omega)$ cumple una de las 4 condiciones siguientes entonces cumple las demás.

- i) La transformada inversa de Fourier $g(t)$ de $G(\omega)$ es cero para $t < 0$:

$$g(t) = 0, \quad (t < 0) \tag{2.3.1}$$

- ii) $G(u)$ es para casi toda u , el límite cuando $v \rightarrow 0+$ de una función analítica $G(u + iv)$ que es holomorfa en el semiplano superior y de cuadrado integrable

sobre cualquier línea paralela al eje real:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(u + iv)|^2 du < C, \quad (v > 0) \quad (2.3.2)$$

iii) $\Re G$ e $\Im G$ satisfacen la primera fórmula preliminar:

$$\Re G(\omega) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im G(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (2.3.3)$$

iv) La $\Re G$ e $\Im G$ satisfacen la segunda fórmula preliminar:

$$\Im G(\omega) = -\frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re G(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (2.3.4)$$

Una demostración de este teorema se puede encontrar en Titchmarsh, 1948 pag. 125-129.

En las secciones i) y ii) relaciona los conceptos de analiticidad con causalidad y los dos últimos son las relaciones de Kramers y Kronig. De hecho la parte del teorema que se usará en el presente trabajo es únicamente iii) como se verá en la siguiente sección.

2.4 Relaciones de dispersión para la elasticidad

Las relaciones de dispersión para la elasticidad nos relacionan la atenuación de una onda dentro de un medio con la velocidad de fase de la onda en dicho medio. En el presente trabajo es de especial interés conocer cómo se propaga una onda elástica en un medio policristalino y por medio de las relaciones de dispersión podemos encontrar a la velocidad de fase como función de la frecuencia.

Para hacer uso de las relaciones de Kramers y Kronig que puedan ser aplicadas en elasticidad se tiene que definir una función que satisfaga las hipótesis del teorema y que relacionen cantidades que conozcamos. Una función que satisface estas condiciones es el índice de refracción normalizado, i. e.,

$$G(\omega) = \frac{n(\omega) - n(\omega_0)}{\omega - \omega_0} \quad (2.4.1)$$

donde $n(\omega_0)$ es un índice de refracción de referencia y ω_0 es una frecuencia de referencia. El índice de refracción normalizado es una función analítica en el semiplano

superior además de ser de cuadrado integrable y que decae suficientemente rápido en el infinito. El índice de refracción es por definición $n(\omega) = c_0 k(\omega)/\omega$ donde k es el número de onda en una onda armónica plana

$$A(\omega)e^{-i(\omega t - kx)} \quad (2.4.2)$$

donde $k(\omega) = \omega/c(\omega) + i\alpha(\omega)$, α se le conoce como la atenuación de la onda y c_0 es una velocidad de referencia.

Vale la pena ver cómo se manifiesta la atenuación de una onda armónica plana (2.3.2) como función de la posición. Para ésto se puede hacer una gráfica de la amplitud de la onda contra la coordenada espacial x (ver (2.3.1))

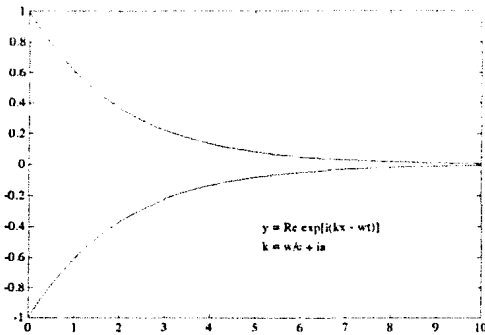


Figura 2.3.1. Amplitud de una onda plana de la forma $e^{i(kx - \omega t)}$ con $k = \omega/c + i\alpha$ como función de la posición x . La amplitud de dicha onda va decayendo con la distancia.

Notése que la amplitud de la onda decae exponencialmente con la posición y además sigue oscilando.

Retomando el punto de las relaciones de dispersión y para hallar a la velocidad de fase se toma la relación *iii)* puesto que es la que relaciona $\Re G$ con $\Im G$. Sustituyendo G en *iii)*, tomando como frecuencia de referencia a $\omega_0 = 0$ y haciendo algunas manipulaciones algebraicas es fácil obtener que

$$\left[\frac{c(\omega)}{c_0} \right]^{-1} = 1 + \frac{2\omega^2 c_0}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)} d\omega'. \quad (2.4.3)$$

donde c_0 es límite de la velocidad de fase cuando $\omega \rightarrow 0$ y VP denota el valor principal de Cauchy.

La ecuación (2.3.3) nos permite hallar la velocidad de fase como función de la frecuencia si se conoce de antemano la atenuación de la onda. Esta ecuación también se le conoce como la *relación de dispersión para la elasticidad*.

En los capítulos posteriores se hallará la atenuación como función de la frecuencia y después se calculará la velocidad de fase también como función de la frecuencia vía la relación de dispersión para la elasticidad.

Capítulo III

Modelo de Rokhlin

3.1 Introducción

El motivo del presente capítulo es obtener una fórmula para la atenuación como función de la frecuencia para así poder usar las relaciones de dispersión (2.3.3) para obtener la velocidad de fase. Aquí se estudia el modelo de Rokhlin para la atenuación en un medio policristalino.

Se describe brevemente qué es un policristal además de dar las hipótesis bajo las cuales el modelo de Rokhlin es válido. Con las ecuaciones básicas de la elasticidad y haciendo algunas aproximaciones se toma el flujo de energía que pasa a través de dos granos adyacentes y finalmente se llega a una fórmula para la atenuación que es:

$$\alpha(\omega) = \frac{4c_t}{c_l} \left(\frac{1 - \text{sen}2k_{t1}a}{2k_{t1}a} \right) \left(\frac{1 - \text{sen}\Delta k_l b}{\Delta k_l b} \right).$$

Esta es una fórmula para calcular la atenuación como función de la frecuencia para toda frecuencia, puesto que el número de onda k está dado que $k = \omega/c$. Sin embargo no predice con mucha exactitud los resultados experimentales que se tienen.

El trabajo de Rokhlin más tarde lo utilizará Beltzer y Braunner para encontrar la velocidad de fase.

3.2 Policristales

Durante casi todo el presente trabajo se habla mucho de policristales por lo que es necesario dedicarle una sección a éstos. Un cristal es un arreglo periódico de celdas de un mismo material en el espacio. Un policristal es un número muy grande de granos pegados uno a otro a lo largo de interfaces. A cada grano se le asocia un conjunto de ejes cristalográficos. Los ejes cristalográficos son un conjunto de ejes definidos en términos del poliedro asociado a un grano (en el modelo de Rokhlin los ejes cristalográficos son los ejes cartesianos xyz).

3.3 Modelo de Rokhlin

En modelo de Rokhlin para un policristal considera que todos los granos tienen la misma forma, los ejes cristalográficos de cada uno de los granos están distribuidos aleatoriamente y todos los granos se encuentran unidos rígidamente. Bajo estas hipótesis se quiere encontrar una relación entre la energía dispersada del policristal como función de la frecuencia.

El modelo de Rokhlin se considera que todos los granos tienen la misma forma y que los ejes cristalográficos están orientados aleatoriamente, cada grano tiene de lado y altura a mientras que en la dirección en que se propaga la onda compresional mide b , como se puede ver la figura (3.3.1). Por la manera de deducir la fórmula de Rokhlin no se considera ninguna simetría en particular, sin embargo cuando Beltzer y Brauner retoman este trabajo para obtener la velocidad tienen que ajustar tres parámetros y cuando ajustan éstos se considera que es un policristal con simetría cúbica (se retomará este punto en los siguientes capítulos). La atenuación es una medida de la energía que se dispersa en un medio. La atenuación se define como:

$$\alpha = \frac{I_p}{I}, \quad (3.3.1a)$$

donde I_p es el total de energía dispersada por unidad de volumen en una unidad de tiempo mientras que I es la energía que entra por unidad de volumen en una unidad de tiempo. I es

$$I_p = \frac{4}{a} \langle E_{11} C_{11} \rangle, \quad (3.3.1b)$$

donde $\langle E_{11} C_{11} \rangle$ es el valor promedio del flujo de energía entre dos granos adyacentes, el $4/a$ viene de considerar el flujo de energía a través de las fronteras del grano, que en este caso es $4ab$ (son 4 caras y cada cara mide ab) y sobre dos veces el volumen debido a que la onda atraviesa dos granos cuyo volumen en total es $2ab^2$ por lo tanto $4ab/2ab^2 = 2/a$. Si se considera que la onda se dispersa en ambas

direcciones en la frontera de los dos granos, el factor de proporcionalidad entre I_p y el flujo de energía es $4/a$. c_{11} es la rapidez de la onda que atraviesa las cuatro caras del grano. La atenuación se manifiesta como función de la frecuencia en el hecho de que la energía promedio E_{11} depende de la frecuencia. De hecho lo que se tiene que hacer es calcular la energía promedio $\langle E_{11} \rangle$ para todo tiempo en el volumen de un grano.

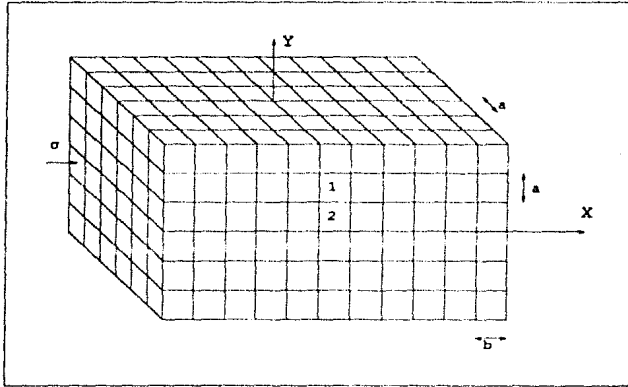


Figura 3.3.1. En el modelo de Rokhlin para un policristal es un arreglo de granos y cada grano tiene la forma de un paralelepípedo de ancho y altura a mientras que de largo mide b . Los granos están unidos rígidamente entre ellos mismos y los ejes cristalográficos de los granos están distribuidos aleatoriamente.

Para continuar se deben hacer las siguientes consideraciones: la componente x normal del esfuerzo de dos granos adyacentes son respectivamente

$$\sigma_1 = \sigma_0 \text{sen}(k_1 x - \omega t), \quad (2a)$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 \text{sen}(k_2 x - \omega t). \quad (2b)$$

donde k_{11} y k_{12} son los números de onda correspondiente para cada uno de los granos 1 y 2, ω es la frecuencia circular (ver figura 3.3.2).

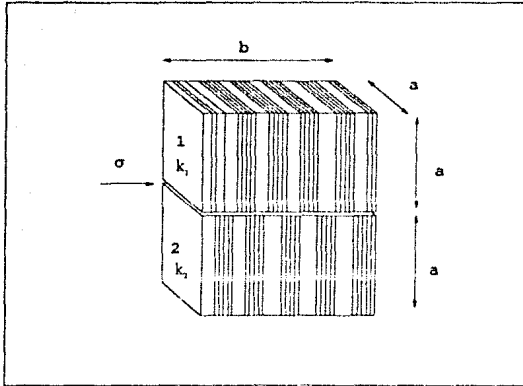


Figura 3.3.2. Dos granos adyacentes con número de onda distintos. Una sola onda que se propaga en dos granos adyacentes. Las diferencias en el número de onda se manifiesta en que la onda no se propaga de igual manera en el grano 1 que en el grano 2.

Los números de onda son distintos debido a que los ejes cristalográficos del grano 1 y del grano 2 no están orientados en la misma dirección.

Cuando se unen los granos los desplazamientos deben ser continuos, en otras palabras los frentes de onda deben unirse en la interfase y esto a su vez produce un esfuerzo tangencial que hace que se propague otra onda transversal a la dirección de

propagación de la onda incidente. Esto se puede ver en la figura (3.3.3).

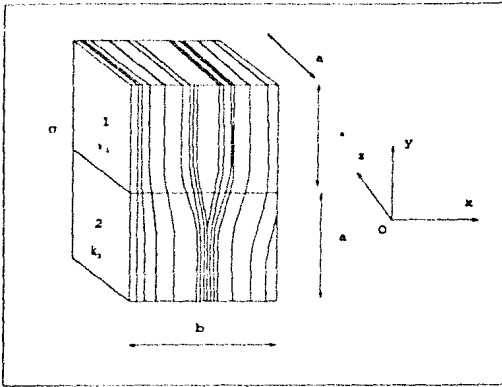


Figura 3.3.1. Cuando se propaga una onda dentro de dos granos con número de onda distinto y se unen ambos granos se produce un fenómeno como el que se muestra aquí.

Estas son básicamente las hipótesis del modelo de Rokhlin.

Se debe mencionar el hecho de que el problema completo no se puede resolver puesto que para cada grano se tendrían 36 ecuaciones además de conocer con exactitud la orientación de los ejes cristalográficos para cada uno de los granos. Este es un problema muy difícil de resolver por lo que se deben de hacer algunas simplificaciones. También se debe mencionar que para el problema de los policristales no sólo existe un modelo. En el capítulo V se da otro modelo para los policristales.

3.4 Deducción de la fórmula de la atenuación

Para usar las relaciones de dispersión (2.3.3) se necesita una fórmula para la atenuación como función de la frecuencia, por lo que en esta sección se obtendrá dicha fórmula. Bajo las hipótesis del modelo de Rokhlin se obtiene la energía promedio dispersada entre dos granos en un período completo. Una vez que ya se tiene la energía promedio dispersada se halla la atenuación de la onda que se propaga. Para encontrar esta energía se resuelven las ecuaciones básicas de la elasticidad para este problema con las respectivas condiciones de frontera y las aproximaciones correspondientes.

Lo que se ha descrito en la sección anterior es el modelo que se usará para deducir la fórmula para la atenuación, es decir, bajo qué hipótesis esta fórmula será válida. Aunque las hipótesis son muchas es necesario mencionar que los resultados que se obtienen no están tan alejados de los datos experimentales existentes como se podría pensar. Esto se verá en la siguiente sección.

Para continuar con el estudio del problema de hallar la atenuación como función de la frecuencia se debe hacer uso de las ecuaciones básicas de la elasticidad. En ausencia de fuerzas externas de cuerpo (gravedad, electromagnética, etc.) y solamente considerando las fuerzas externas de superficie la ecuación básica de la elasticidad (1.6.11) es

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.4.1a)$$

donde ρ es la densidad del material en el cual se propaga la onda, u_i son los desplazamientos en direcciones $i = 1, 2, 3$ x , y , z respectivamente y σ_{ij} es el tensor de esfuerzos. Debido a que se considera que la onda compresional se propaga en dirección x entonces la ecuación que queda es:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}, \quad (3.4.1b)$$

tomando en cuenta que el esfuerzo para el grano 1 es:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \text{sen}(k_{11}x - \omega t),$$

de la ecuación 3.4.1a. Esto quiere decir que sólo se tiene la componente normal del tensor de esfuerzos y que σ_{12} y σ_{13} son iguales a cero. De aquí se tiene que de la ecuación (3.4.1b) queda:

$$\rho \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \sigma_0 \text{sen}(k_{11}x - \omega t),$$

análogamente para el grano 2

$$\rho \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \sigma_0 \text{sen}(k_{12}x - \omega t),$$

integrando dos veces con respecto al tiempo se obtiene que

$$u_{x1} = -\frac{k_{11} \sigma_0}{\rho \omega^2} \cos(k_{11}x - \omega t) + c_1 t + c_2,$$

debemos tomar a $c_1 = 0$ porque no se puede aceptar desplazamientos infinitos y $c_2 = 0$ porque se puede tomar como referencia $u = 0$. Del mismo modo se hace para el grano 2. Se tiene entonces que

$$u_{x1} = -\frac{k_{11}\sigma_0}{\rho\omega^2} \cos(k_{11}x - \omega t),$$

$$u_{x2} = -\frac{k_{12}\sigma_0}{\rho\omega^2} \cos(k_{12}x - \omega t).$$

La diferencias de los números de ondas en los granos 1 y 2 provoca que haya otra onda que se propaga en la dirección y . La fig. 3.4.1 puede ayudar a ver esto. Como es un disturbio que se propaga en un medio debe satisfacer la ecuación de onda con velocidad igual a la rapidez de propagación en esa dirección. La ecuación de onda es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.4.2)$$

donde c_t es la rapidez de la onda que se propaga en la dirección y . Para resolver el problema se deben tomar en cuenta las condiciones de frontera. En este caso la condición de frontera es que en la unión entre los granos 1 y 2 se debe satisfacer la siguiente condición

$$u_{x1} - u_{x2} = \frac{k_{12}\sigma_0}{\rho\omega^2} \cos(k_{12}x - \omega t) - \frac{k_{11}\sigma_0}{\rho\omega^2} \cos(k_{11}x - \omega t) \quad \text{en } y = 0,$$

esto es debido a que los granos deben estar unidos. Una función que satisface la ecuación de onda con estas condiciones es

$$u_{t1} = \frac{\sigma_0}{\rho\omega^2} [k_{12} \cos(k_{12}x - \omega t) - k_{11} \cos(k_{11}x - \omega t)] \cos k_{11}y,$$

donde k_{11} es el número de onda transversal. El esfuerzo tangencial viene dado como:

$$\sigma_{12} = \mu \frac{\partial u_{t1}}{\partial y},$$

donde μ es el modulo de corte en el primer grano. Por lo tanto:

$$\sigma_{12} = -\mu \frac{\sigma_0 k_{11}}{\rho\omega^2} [k_{12} \cos(k_{12}x - \omega t) - k_{11} \cos(k_{11}x - \omega t)] \text{sen} k_{11}y.$$

En general la energía que atraviesa cada una de las cuatro caras ab es:

$$E_{t1} = \mu \left(\frac{\partial u_{t1}}{\partial y} \right)^2,$$

que es la energía de deformación que se obtuvo en el capítulo I cuando solamente se tienen deformaciones normales que contribuyen a la energía que interesa en este momento. De aquí se obtiene que

$$E_{t1} = \mu \left\{ \frac{\sigma_0 k_{t1}}{\rho \omega^2} [k_{t2} \cos(k_{t2}x - \omega t) - k_{t1} \cos(k_{t1}x - \omega t)] \operatorname{sen} k_{t1} y \right\}^2,$$

tomando el promedio en un período completo sobre un grano se llega a

$$\bar{E}_{t1} = \frac{\sigma_0^2 k_{t1}^2 \mu}{2\rho^2 \omega^4} \left(1 - \frac{\operatorname{sen} 2k_{t1} a}{2k_{t1} a} \right) \left(\frac{k_{t2}^2}{2} + \frac{k_{t2}^2}{2} - k_{t1} k_{t2} \frac{\operatorname{sen}(k_{t2} - k_{t1})b}{(k_{t2} - k_{t1})b} \right). \quad (3.4.3)$$

La densidad de energía para la onda longitudinal, es decir, para la onda incidente es:

$$I = \frac{\sigma_0^2}{2\bar{C}'_{11}} c_t, \quad (3.4.4)$$

donde c_t es la rapidez de la onda longitudinal y \bar{C}'_{11} es el promedio de la componente del tensor de módulos elásticos que gobierna la propagación de la onda longitudinal. Se toma el promedio por la hipótesis de que los ejes cristalográficos están distribuidos aleatoriamente. Se hace una suposición extra. Se supone que $k_{t1} = k_{t2} + \epsilon$, quedandose a orden cero en ϵ y usando las ecuaciones (3.3.1a), (3.3.1b), (3.4.3) y (3.4.4) se tiene que:

$$\alpha(\omega) = \frac{I_p}{I} = \frac{4k_{t1}^2 k_{t1}^2 \mu \bar{C}'_{11} c_t}{a\rho^2 \omega^4 c_t} \left(1 - \frac{\operatorname{sen} 2k_{t1} a}{2k_{t1} a} \right) \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \Delta k_{t1} b}{\Delta k_{t1} b} \right), \quad (3.4.5.)$$

si se utiliza el hecho de que $c_t = (\bar{C}'_{11}/\rho)^{\frac{1}{2}}$, que $c_t = (\mu/\rho)^{\frac{1}{2}}$ y $c_t = k_t/\omega$ se llega a:

$$\alpha(\omega) = \frac{4c_t}{c_t} \left(1 - \frac{\operatorname{sen} 2k_{t1} a}{2k_{t1} a} \right) \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \Delta k_{t1} b}{\Delta k_{t1} b} \right). \quad (3.4.6)$$

Es claro que si el número de onda k depende de la frecuencia ω entonces la atenuación α es una función de la frecuencia.

Se han hecho algunos cálculos para saber cómo varían $2k_{t1} a$ y $\Delta k_{t1} b$ (Rokhlin [1970]) para algunos materiales que se muestran en la tabla 3.3.1.

TABLA 3.3.1.

Material	$2k_{11}a \text{ mm}^{-1}$	$\Delta k_{12}b \text{ mm}^{-1}$
Magnesio	39.6	0.299
Aluminio	40.2	0.155
Hierro	39.0	0.855

Tabla 3.3.1 Se muestran algunos cálculos (Rokhlin [1970]) para las variaciones del número de onda k_1 y para k_2 , para el Magnesio, Aluminio y Hierro.

Esta tabla sugiere que haya tres intervalos a considerar debido la diferencia de los ordenes de magnitud. Estos intervalos también se pueden usar para caracterizar el tamaño de granos o cristales que se estudian. Los intervalos serán: $2k_1a \ll 2\pi$ y $\Delta k_2b \ll \pi/2$ para granos pequeños, $2k_1a \gg 2\pi$ y $\Delta k_2b \ll \pi/2$ para granos grandes y el último intervalo $2k_1a \gg 2\pi$ y $\Delta k_2b \gg \pi/2$. Esto límites también son conocidos en la literatura como los límites de Rayleigh, estocástico y geométrico (S y K [1983]).

La atenuación como función de la frecuencia que se ha encontrado es de mucha utilidad, ya se pueden usar las relaciones de dispersión del capítulo anterior para encontrar la velocidad de fase.

Renombrando los coeficientes adecuadamente la ecuación (3.4.6.) se puede escribir como

$$\alpha(\omega) = A \frac{(\delta\omega - \text{sen}\delta\omega)(\gamma\omega - \text{sen}\gamma\omega)}{\gamma\delta\omega^2}, \quad (3.4.7)$$

donde $\delta\omega = 2k_{11}a$, $\gamma\omega = \Delta k_{12}b$ con $a = b$ y $A = 4c_1/c_2$.

La ecuación (3.4.7) representa la atenuación de una onda que se propaga en un medio policristalino como función de la frecuencia. Se debe mencionar que estos resultados no concuerdan con los datos experimentales que se conocen. Sin embargo Stanke y Kino [1983] desarrollaron una teoría que da asíntotas para la atenuación en tres intervalos de frecuencia. La idea de unir la teoría de Rokhlin [1970] con la Stanke y Kino [1983] para obtener valores para δ y γ y luego retomar las relaciones de dispersión para hallar la velocidad de fase como función de la frecuencia es de Beltzer y Braunner [1985]. Esta última teoría se desarrollará en el capítulo IV.

3.5 Algunas gráficas para la atenuación

Para analizar la atenuación de algunos materiales vale la pena ver algunas gráficas de la atenuación de algunos de ellos. (La manera de cómo fueron calculados los parámetros δ , γ y A se da en el capítulo IV) Los valores de los parámetros δ y γ que se usarán para mostrar algunas gráficas se muestran en la tabla 3.5.1.

TABLA 3.5.1

Tipo de Onda	δ	γ
Aluminio P	14.685	0.0148
Aluminio S	2.34667	0.0643
Fierro S	2.36157	0.351

Tabla 3.5.1 Valores de δ y γ para el aluminio y el fierro que son usados para obtener las gráficas que se presentan en esta sección.

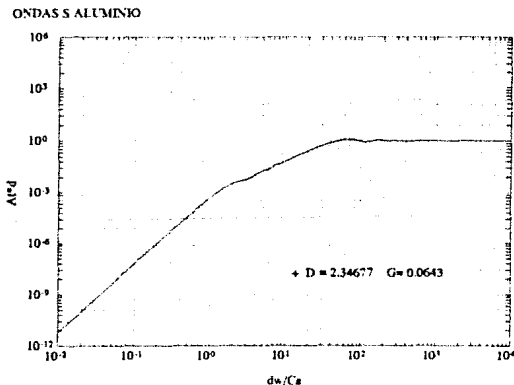


Figura 3.5.1. La atenuación normalizada αd contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_s$ para ondas S en el Aluminio. $G = \gamma$ y $D = \delta$.

Aquí se grafica la atenuación de una onda S en aluminio multiplicada por la distancia característica contra la frecuencia normalizada que es $\omega d/c_s$. Las siguientes gráficas son ondas S para el hierro y onda P para el aluminio.

En las siguientes figuras se grafica la atenuación normalizada ad donde d es el valor característico del policristalino, contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_n$ donde c_n es la rapidez que corresponde al tipo de onda que se esta estudiando. Se hacen gráficas para ondas S para aluminio y hierro y P para aluminio. En cada figura se señala qué tipo de onda es y cual es el material en turno.

La manifestación de las asíntotas para baja, mediana y alta frecuencia se ve en las pendientes que toman las curvas en los diferentes intervalos. Para baja frecuencia la pendiente es igual a cuatro, para mediana la pendiente es igual a dos mientras que para alta frecuencia la pendiente es igual a cero. Notése que el ancho de cada intervalo de frecuencia depende de las diferencias de orden de magnitud de δ y γ .

Se ha encontrado una forma funcional para la atenuación como función de la frecuencia en un medio policristalino. Hecho esto se deben encontrar relaciones para δ y γ que se acerquen más a los datos experimentales que se tienen. Cuando se tenga una relación para la atenuación se puede usar las relaciones de dispersión para hallar la velocidad de fase como función de la frecuencia.

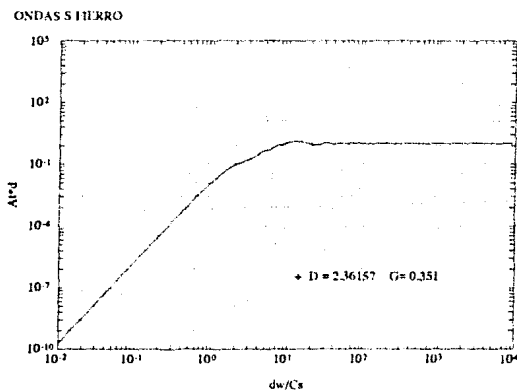


Figura 3.5.2. La atenuación normalizada ad contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_s$ para ondas S en el Fierro. $G = \gamma$ y $D = \delta$.

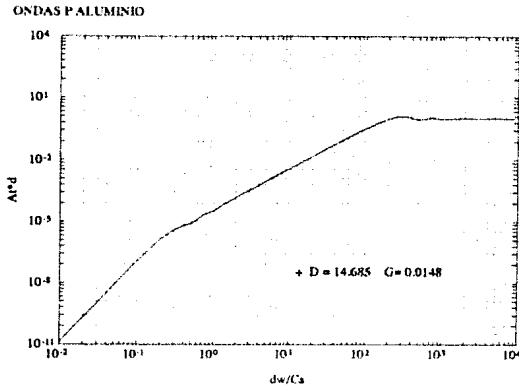


Figura 3.5.2. La atenuación normalizada αd contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_s$ para ondas P en el Aluminio. $G=\gamma$ y $D=\delta$.

Capítulo IV

Cálculo de la Velocidad

4.1 Introducción

En el presente capítulo se hace el cálculo de la velocidad de fase como función de la frecuencia usando el modelo de Beltzer y Brauner (1985). El modelo de B y B (1985) consiste básicamente en retomar el trabajo de S y K (1984) que da asíntotas para baja, mediana y alta frecuencia para la atenuación con el trabajo de Rokhlin (1970) en donde hay tres parámetros libres a determinar. B y B (1985) toman los valores asíntóticos para la atenuación en los diferentes intervalos de frecuencia y usan la fórmula funcional para la atenuación (fórmulas de Rokhlin cap. III) para obtener la atenuación como función de la frecuencia válida para todo el espectro de frecuencias.

En la sección 4.2 se muestra la manera de cómo obtener los tres parámetros libres que se tienen en la fórmula de Rokhlin. Se obtienen los tres parámetros libres tanto para ondas *S* como para ondas *P*. En la sección 4.3 se calcula la velocidad de fase usando las relaciones de dispersión que se obtuvieron en el capítulo II (2.2.3) y algunos resultados de variable compleja. Se observa claramente que existe una velocidad límite, la velocidad de fase que se obtiene es:

$$\left[\frac{c(\omega)}{c_0} \right]^{-1} = 1 + \frac{c_0}{d} \left(-\frac{\cos \gamma \omega}{\delta \omega^2} - \frac{\cos \gamma \omega}{\gamma \omega^2} + \frac{\sin \gamma \omega \cos \delta \omega}{\delta \gamma \omega^3} + \frac{1}{\gamma \omega^2} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{6\delta} \right).$$

En la sección 4.4 se muestran algunas gráficas para la velocidad de fase así como para la atenuación. Se comparan los resultados que se calculan en el presente trabajo con los que se reportan en B y B (1985) y (1987). Se observan diferencias importantes en la velocidad, sin embargo para la atenuación se pueden reproducir los resultados exactamente. Se hace un estudio detallado para la velocidad y se concluye que los cálculos hechos en B y B (1985) y (1987) deberán ser corregidos.

4.2 Cálculo de δ y γ

En la presente sección se obtienen las relaciones para δ y γ que se necesitan en el ajuste de la fórmula de Rokhlin (3.3.7) para la atenuación. Para la obtención de estas relaciones se debe considerar el trabajo de Stanke y Kino [1984] ya que en este trabajo se hallaron asíntotas para baja, mediana y alta frecuencia. Con estas asíntotas se pueden calcular δ y γ .

En la fórmula para la atenuación (3.4.7) se pueden identificar claramente tres intervalos distintos que permitirá relacionarlos con las asíntotas que se dan en S y K [1984]. Esto tres intervalos son:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= A\delta^2\gamma^2\omega^4/36 & \text{cuando} & \quad \gamma\omega < \delta\omega < 1, \\ \alpha(\omega) &= A\gamma^2\omega^2/6 & \text{cuando} & \quad \gamma\omega < 1 < \delta\omega, \\ \alpha(\omega) &= A & \text{cuando} & \quad 1 < \gamma\omega < \delta\omega. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Para obtener la expresión para la atenuación en los tres intervalos anteriores únicamente se expande en series de Taylor a α y se llega de una manera muy sencilla a las ecuaciones (4.2.1).

Se toma el trabajo de Stanke y Kino [1984] acerca de las asíntotas para baja y mediana frecuencia. Las ecuaciones que corresponden a dichos intervalos de frecuencia son las ecuaciones (24) y (33) de S y K [1984] y son:

$$\alpha_H(k) = \frac{V_g}{375} \frac{k^4 \nu^2}{(C_{11}^0)^2} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{c_p}{c_s} \right)^5 \right] \quad (24)$$

donde $V_g = \pi \bar{a}^3$ y \bar{a} es la distancia característica, ν es el factor de anisotropía, C_{11}^0 es el promedio de Voigt, k_p es el número de onda que está relacionado con la frecuencia y la rapidez de propagación de la onda de la siguiente manera: $\omega^2 = k_p^2/c_p^2$ (el subíndice p indica que se trata de ondas longitudinales), c_s y c_p son la rapidez de propagación de la onda transversal y longitudinal respectivamente. La relación para el promedio de Voigt está dada por (ver S y K [1984])

$$C_{11}^0 = \lambda + 2\mu - \frac{3\nu}{5}, \quad (4.2.2)$$

o bien en términos de la compresibilidad queda así

$$C_{11}^0 = \kappa + \frac{4}{3}\mu - \frac{3\nu}{5}.$$

Para mediana frecuencia se tiene que

$$\alpha_l(k) = \frac{4}{525} \frac{\nu^2}{(C_{11}^0)^2} a. \quad (33)$$

Estas dos ecuaciones (24) y (33) representan la atenuación de ondas longitudinales para baja y mediana frecuencia respectivamente.

Combinando las ecuaciones (24) y (33) con las ecuaciones (4.2.1) y suponiendo $A = 1/d$ donde $\bar{a} = d/2$ se obtiene expresiones para γ y δ que son:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{d}, \\ \delta &= \left\{ 2.1 \left[2 + 3 \left(\frac{c_p}{c_s} \right)^5 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{d}{c_p} \\ \gamma &= \left(\frac{12}{525} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu}{C_{11}^0} \frac{d}{c_p}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Estas ecuaciones dan fórmulas explícitas para el cálculo de δ , γ y A que son los tres parámetros que se querían determinar.

Se debe aclarar que este estudio para la obtención de los parámetros δ , γ y A se ha hecho únicamente para ondas longitudinales. El tratamiento hecho para ondas longitudinales también se puede hacer para ondas transversales. El razonamiento es el mismo que el anterior. Las ecuaciones que se toman de S y K [1984] son la (25) y (34)

$$\alpha_s = \frac{31\gamma}{1000\pi} k_s^4 \frac{\nu}{(C_{44}^0)^2} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^5 \right] \bar{a} \quad (25)$$

para baja frecuencia. Para mediana frecuencia se tiene que:

$$\alpha_s = \frac{1}{150} \left[\frac{\nu^2}{(C_{44}^0)^2} \right] k_s^2 \bar{a}. \quad (34)$$

Finalmente las expresiones para δ y γ en el estudio de ondas S son respectivamente:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{d}, \\ \delta &= \left\{ \frac{9}{5} \left[3 + 2 \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^5 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{d}{c_s}, \\ \gamma &= \left(\frac{1}{50} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu}{C_{44}^0} \frac{d}{c_s}, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

donde el promedio de Voigt para C_{44}^0 es: (ver S y K [1984])

$$C_{44}^0 = \mu + \frac{1}{5}\nu. \quad (4.2.5)$$

Se han obtenido relaciones para δ y γ con las asíntotas que se dan en S y K [1984] tanto para ondas S como para ondas P . Por otro lado con el cálculo de δ , γ y A , se ha obtenido la atenuación como función de la frecuencia válida para todas frecuencias. Hecho ésto se puede tomar las relaciones de dispersión para para obtener la velocidad de fase como función de la frecuencia.

4.3 Cálculo de $c(\omega)$

En la presente sección se muestra una forma de hallar la velocidad de fase como función de la frecuencia usando las relaciones de dispersión (2.4.3). La velocidad de fase se puede calcular puesto que ya se conoce la atenuación como función de la frecuencia. Para calcular la velocidad de fase se debe calcular el valor principal que se señala en la ecuación (2.4.3).

La ecuación de dispersión (2.3.3) es

$$\left[\frac{c(\omega)}{c_0} \right]^{-1} = 1 + \frac{2\omega^2 c_0}{\pi} VP \int_0^\infty \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2 (\omega'^2 - \omega^2)} d\omega'. \quad (2.2.17)$$

donde c_0 es una velocidad de referencia que en este caso se toma el límite de $c(\omega)$ cuando $\omega \rightarrow 0$ y α es la atenuación de la onda dentro del policristal que esta dada por:

$$\alpha(\omega) = A \frac{(\delta\omega - \text{sen}\delta\omega)(\gamma\omega - \text{sen}\gamma\omega)}{\gamma\delta\omega^2} \quad (3.4.7)$$

donde δ y γ se hallaron en la sección 4.2 y las expresiones para ondas S son las ecuaciones (4.2.4) y para las ondas P son las ecuaciones (4.2.3). Estas ecuaciones se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{d}, \\ \delta &= \left\{ \frac{9}{5} \left[3 + 2 \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^5 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{d}{c_s}, \\ \gamma &= \left(\frac{1}{50} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu}{C_{44}^0} \frac{d}{c_s}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Las ecuaciones (4.2.4) son para las ondas S , mientras que para las ondas P las relaciones para γ y δ son:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{d}, \\
 \delta &= \left\{ 2.1 \left[2 + 3 \left(\frac{c_p}{c_s} \right)^3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{d}{c_p}, \\
 \gamma &= \left(\frac{12}{525} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu}{C_{11}^0 c_p},
 \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

las relaciones para C_{11}^0 y C_{44}^0 que son los promedios de Voigt estan dados como:

$$C_{44}^0 = \mu + \frac{1}{5}\nu, \tag{4.2.5}$$

y

$$C_{11}^0 = \lambda + 2\mu - \frac{3\nu}{5}. \tag{4.2.2}$$

ν es el factor de anisotropía y esta relacionado con las constantes elásticas de la siguiente manera:

$$\nu = C_{11} - C_{12} - 2C_{44}.$$

En la tabla 4.3.1 se encuentra los valores de las constantes que se tomaron para el cálculo de δ y de γ y para calcular el factor de anisotropía se usan los valores de las constantes elásticas que aparecen en la tabla 4.3.2.

Tabla 4.3.1

Material	c_p	c_s	c_d	μ	ν	C_{44}^0
Aluminio	6.319	3.130	3.123	2.64	-1.1	2.42
Hierro	5.900	3.230	3.099	8.211	-13.6	5.48

Tabla 4.3.1. Las unidades son respectivamente km/s para c_p , c_s y c_d mientras que para los parametros de Lamé, μ y para C_{44}^0 son 10^{10} N/m^2 [B y B (1987)].

Tabla 4.3.2

	C_{11}	C_{12}	C_{44}	ρ
Aluminio	10.34	5.71	2.86	2695
Hierro	21.92	13.68	10.92	7870

Tabla 4.3.2. Las unidades para las constantes elásticas C_{ij} son 10^{10} N/m^2 y para la densidad ρ son kg/m^3 [B y B (1987)].

Con esta información sólo basta calcular el valor principal de la ecuación (2.4.3) para obtener la velocidad de fase.

Retomando la ecuación (3.4.7) y sustituyendo la ecuación (2.4.3) para calcular la velocidad de fase se tiene que:

$$\left[\frac{c(\omega)}{c_0} \right]^{-1} = 1 + \frac{2A\omega^2 c_0}{\pi \delta \gamma} V' P \int_0^\infty \frac{(\delta \omega' - \text{sen} \delta \omega')(\gamma \omega' - \text{sen} \gamma \omega')}{\omega'^4 (\omega'^2 - \omega^2)} d\omega'. \quad (4.3.3)$$

donde A , δ y γ son los tres parámetros libres de que ya se ha hablado con anterioridad.

Para calcular este tipo de integrales se debe hacer un cambio de variable para la función seno, luego tomar regiones de integración donde las integrales convergen y una vez que ya se escogió la región de integración se aplica el teorema de residuos.

Cuando se tiene estas funciones se recomienda el cambio de variable siguiente:

$$\text{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (4.3.4)$$

sustituyendo en la ecuación (4.3.3) y separando las integrales en exponenciales positivas y negativas I_1 e I_2 respectivamente se obtiene:

$$I_1 = \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[-2i\delta z e^{i\gamma z} - 2i\gamma z e^{i\delta z} + e^{i(\gamma+\delta)z} - e^{i(\delta-\gamma)z}]}{\delta\gamma z^4 (z^2 - \omega^2)} dz$$

y

$$I_2 = \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[2i\delta z e^{-i\gamma z} + 2i\gamma z e^{-i\delta z} - e^{-i(\delta-\gamma)z} + e^{-i(\delta+\gamma)z}]}{\delta\gamma z^4 (z^2 - \omega^2)} dz$$

mientras que el término que no depende de exponenciales

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\gamma}{\delta\gamma z^2 (z^2 - \omega^2)} dz,$$

es igual a cero por la simetría de la función, en el momento de los cálculos de los residuos.

Para las integrales I_1 y I_2 se puede hacer la observación de que si se hace un cambio de variable $z' = -z$ se llega a que $I_1 = I_2$, por lo que se simplifican el trabajo.

La integral I_1 se puede dividir en dos integrales I_{11} y I_{12} de la siguiente manera:

$$I_{11} = \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[-2i\delta e^{i\gamma z} - 2i\gamma e^{i\delta z}]}{\delta\gamma z^3 (z^2 - \omega^2)} dz \quad (\delta > \gamma). \quad (4.3.5)$$

y la otra integral queda

$$I_{12} = \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{i(\delta+\gamma)z} - e^{i(\delta-\gamma)z})}{\delta\gamma z^4(z^2 - \omega^2)} dz \quad (\delta > \gamma), \quad (4.3.6)$$

las dos integrales I_{11} y I_{12} tienen polos en ω , 0 y $-\omega$ de diferente orden. Para calcular las integrales I_{11} y I_{12} se puede hacer uso del Teorema 13 que se encuentra en Marsden pag. 292 y que se enuncia de la manera siguiente:

Teorema 13 . Sea $f(z)$ analítica excepto en un número finito de polos. Sean x_1, \dots, x_m los polos de f que están sobre el eje real y suponga que que el orden de los polos es finito. Si $f(z) = e^{iaz}g(z)$, donde $a > 0$ y existen R y $M > 0$ tal que para toda z con $\text{Im } z \geq 0$ and $|z| \geq R$ y se tiene que $|g(z)| \leq M/|z|$ entonces $\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existe y esta dada por

$$\begin{aligned} \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = & 2\pi i \sum \{\text{suma de residuos en el semiplano superior}\} \\ & + \pi i \sum \{\text{suma sobre el eje x}\}. \end{aligned}$$

* * *

El tipo de funciones que se quiere integrar sólo tienen polos sobre el eje real por lo que

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i \sum \{\text{suma de residuos sobre el eje x}\} \quad (4.3.7)$$

Lo único que resta para obtener la integral es hacer el cálculo de los residuos de los polos en ω , 0 , y $-\omega$ sobre el eje x . Para calcular los residuos se hace uso de la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= f(z)(z - z_1)^k \\ R_1 &= \frac{\phi^{(k-1)}(z_1)}{(k-1)!} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

donde k es el orden del polo del residuo en z_1 . (Ver Marsden pag. 206)

La integral I_{11} se puede escribir como

$$I_{11} = \pi i(R_{111} + R_{112} + R_{113}),$$

donde R_{111} es el residuo en $-\omega$, R_{112} en 0 y R_{113} en ω . Análogamente para I_{12} , i.e.,

$$I_{12} = \pi i (R_{121} + R_{122} + R_{123}).$$

Haciendo uso del **Teorema 13** junto con las ecuaciones (4.3.7), (4.3.8) y después de hacer unos cálculos sencillos de derivadas se llega a:

$$\begin{aligned} R_{111} &= -\frac{i}{\gamma\delta} \left(\frac{\delta e^{-i\gamma\omega} + \gamma e^{-i\delta\omega}}{\omega^4} \right) & z_1 &= -\omega, \\ R_{112} &= \frac{-i}{\gamma\delta} \left[\frac{(\gamma\delta^2 + \delta\gamma^2)\omega^2 - 2(\gamma + \delta)}{\omega^4} \right] & z_2 &= 0, \\ R_{113} &= -\frac{i}{\delta\gamma} \left(\frac{\gamma e^{i\delta\omega} + \delta e^{i\gamma\omega}}{\omega^4} \right) & z_3 &= \omega, \end{aligned}$$

para la integral I_{12} los residuos correspondientes son:

$$\begin{aligned} R_{121} &= \frac{1}{2\delta\gamma} \left[\frac{e^{-i(\delta+\gamma)\omega} - e^{i(\delta+\gamma)\omega}}{\omega^5} \right] & z &= -\omega, \\ R_{122} &= \frac{i}{\omega^2} \left(\delta + \frac{\gamma^2}{3\delta} \right) - \frac{2i}{\delta\omega^4} & z &= 0, \\ R_{123} &= \frac{1}{2\delta\gamma} \left[\frac{e^{i(\delta+\gamma)\omega} - e^{i(\delta-\gamma)\omega}}{\omega^5} \right] & z &= \omega, \end{aligned}$$

para hallar la integral $I_1 = I_{11} + I_{12}$ se debe sumar todos los residuos multiplicados por πi . Sumando todos los residuos y haciendo el cambio de variable de la ecuación (4.3.4) junto el siguiente cambio de variable:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (4.3.9)$$

se llega a:

$$I_1 = -\frac{\pi}{4} \left(\frac{2 \cos \gamma\omega}{\gamma\omega^4} + \frac{2 \cos \delta\omega}{\delta\omega^4} - \frac{2 \operatorname{sen} \gamma\omega \cos \delta\omega}{\delta\gamma\omega^5} - \frac{2}{\gamma\omega^4} + \frac{\gamma}{\omega^2} - \frac{\gamma^2}{3\delta\omega^2} \right). \quad (4.3.10)$$

sustituyendo el valor de esta integral en la ecuación (4.3.3) y sabiendo que $A = 1/d$ se obtiene la velocidad de fase como una función de la frecuencia y de la estructura del material como sigue:

$$\begin{aligned} \left[\frac{c(\omega)}{c_0} \right]^{-1} &= 1 + \\ &+ \frac{c_0}{d} \left(-\frac{\cos \gamma\omega}{\delta\omega^2} - \frac{\cos \gamma\omega}{\gamma\omega^2} + \frac{\operatorname{sen} \gamma\omega \cos \delta\omega}{\delta\gamma\omega^3} + \frac{1}{\gamma\omega^2} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{6\delta} \right) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

en función de la estructura se manifiesta en la d , dado que d es la longitud característica del tamaño de los granos del policristal. Un cálculo sencillo que se puede hacer y que será de mucha utilidad es el límite cuando ω tiende a infinito y encontrar una velocidad límite esto es:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{c(\omega)}{c_0} = \left[1 + \left(\frac{c_0}{d} \right) \left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{6\delta} \right) \right]^{-1}. \quad (4.3.12)$$

De la ecuación (4.3.12) se ve claramente que existe una velocidad límite y que esta muy bien determinada si se conoce γ , δ y c_0 . Si $\gamma < 1$ el término que domina es $\gamma/2$ porque $\gamma^2/6\delta$ es aun más pequeño.

La ecuación (4.3.11) muestra a la velocidad de fase como función de la frecuencia. La idea de calcular la velocidad de fase de esta manera se debe a Beltzer y Brauner [1985]. Ellos hicieron el estudio primero para ondas S y luego para onda P [1987]. Notése también que B y B obtuvieron la velocidad de fase para toda frecuencia, es decir, para $\omega \in [0, \infty)$. Uno de los inconvenientes de esta forma de calcular la velocidad es que se necesita la velocidad cuando $\omega \rightarrow 0$. Existen otras formas de calcular la velocidad de fase en un medio policristalino, por ejemplo el desarrollado por Sabina y Willis [1992]. En dicho artículo se obtiene la velocidad para un cierto intervalo de frecuencia.

En la siguiente sección se muestran algunas gráficas para ondas S y para ondas P de algunos materiales.

4.4 Gráficas para la velocidad y la atenuación

En la presente sección se presentan algunas gráficas tanto para ondas P como para ondas S para algunos materiales. En todas las figuras se grafica contra la frecuencia normalizada, $\omega_n = \omega d/c_s$ para ondas S y $\omega_n = \omega d/c_p$ para ondas P . En cada figura se dice qué material y qué tipo de onda es. Se grafica la velocidad fraccionaria, i.e., $c(\omega)/c_s - 1$ si es onda S y $c(\omega)/c_p - 1$ si es onda P . La figura de arriba es la atenuación normalizada que esta dada por $\alpha(\omega)d$.

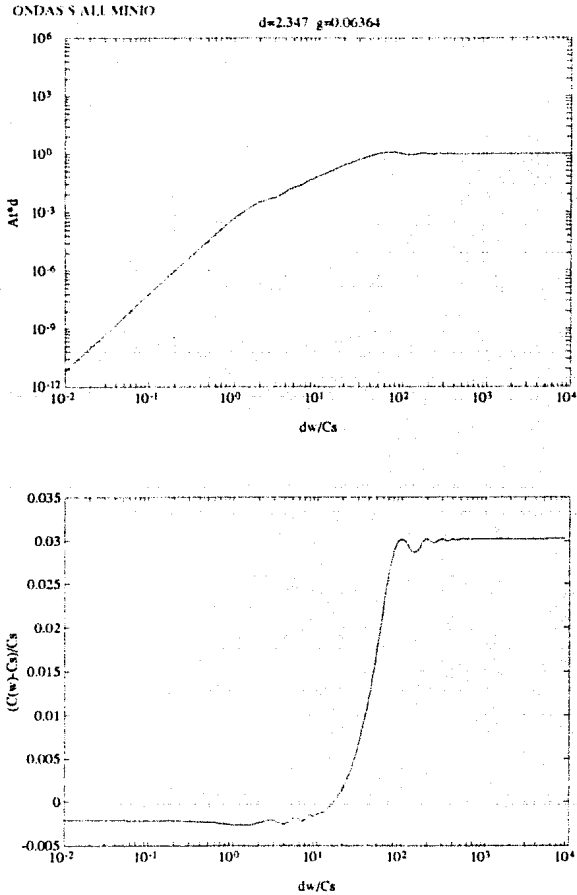


Figura 4.4.1. Ondas S Aluminio. La gráfica de a) muestra la atenuación normalizada contra la frecuencia normalizada. La gráfica de b) muestra la velocidad de fase fraccionaria contra la frecuencia normalizada.

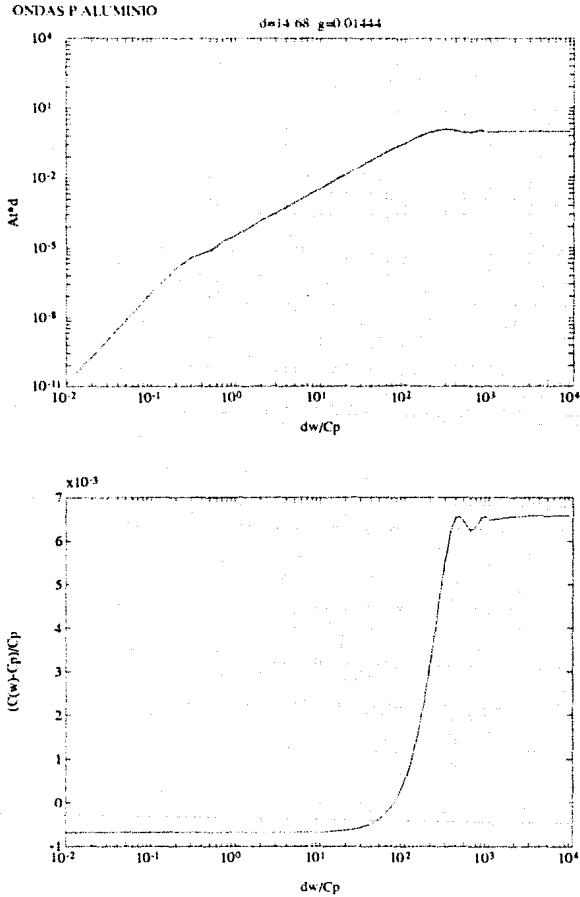


Figura 4.4.2. Ondas P Aluminio. La gráfica de a) muestra la atenuación normalizada contra la frecuencia normalizada. La gráfica de b) muestra la velocidad de fase fraccionaria contra la frecuencia normalizada.

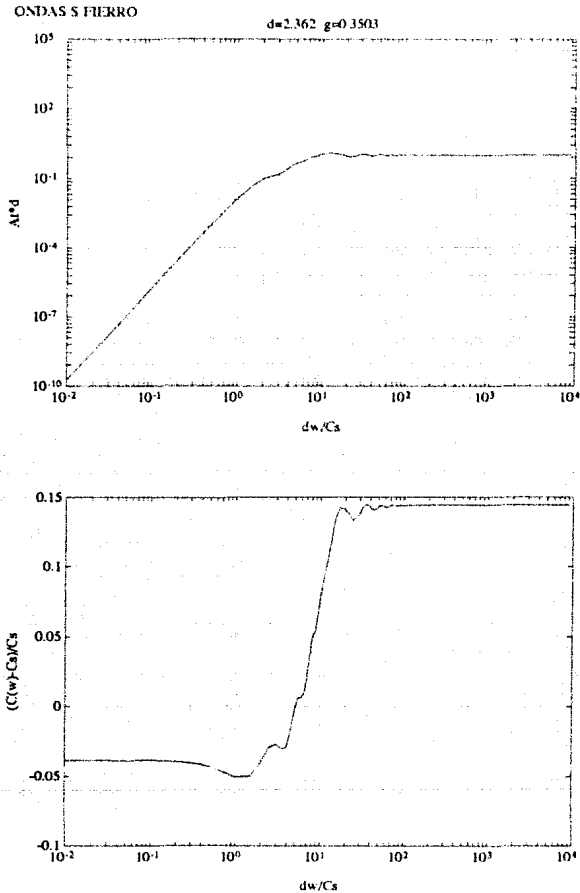


Figura 4.4.3. Ondas S Fierro. La gráfica de a) muestra la atenuación normalizada contra la frecuencia normalizada. La gráfica de b) muestra la velocidad de fase fraccionaria contra la frecuencia normalizada.

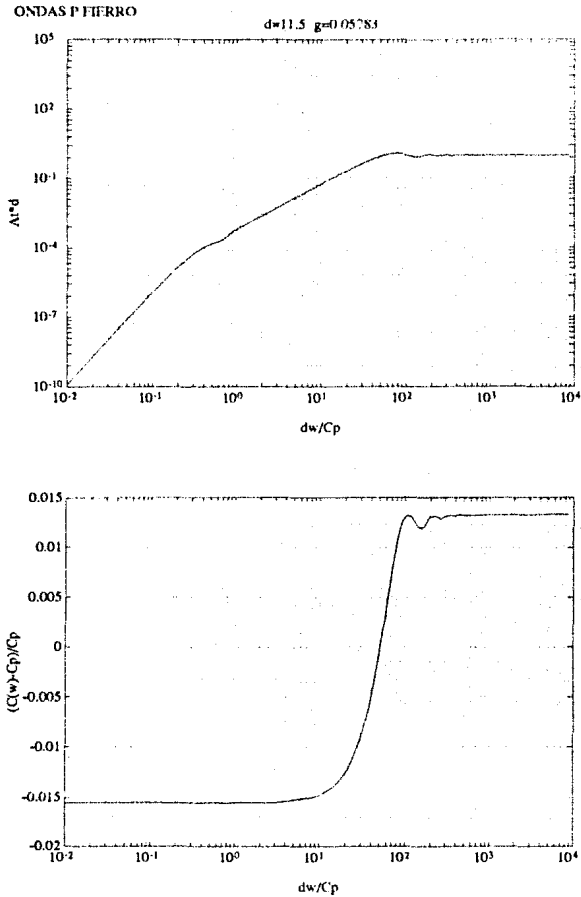


Figura 4.4.4. Ondas P Fierro. La gráfica de a) muestra la atenuación normalizada contra la frecuencia normalizada. La gráfica de b) muestra la velocidad de fase fraccionaria contra la frecuencia normalizada.

4.5 Comparación de resultados con los presentados B y B [1985] y [1987]

En la presente sección se comparan los resultados de B y B [1985], [1987] con los que se calculan en el presente trabajo y se encuentran diferencias notables en la velocidad. Se hace un estudio detallado de la velocidad variando δ y γ para saber si hay una pareja δ y γ que puedan reproducir los resultados de B y B. Se concluye que no existen deltas y gammas que puedan reproducir los resultados de B y B [1985] y [1987].

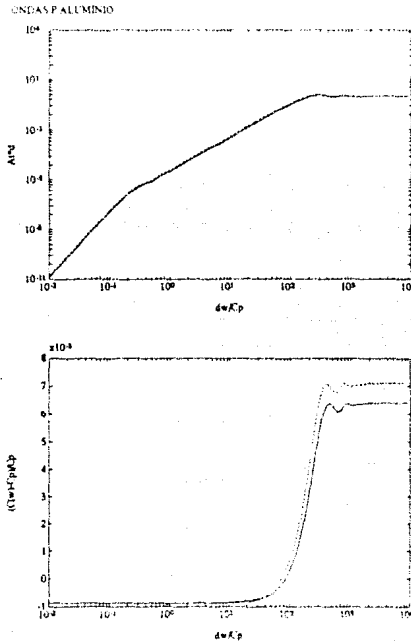


Figura 4.5.1. Ondas P. En la figura de a) se muestran las gráficas de la atenuación normalizada ad contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_p = \omega_n$. La curva continua se obtuvo de calcular δ y γ de las ecuaciones (4.2.3). La curva punteada se obtuvo de leer directamente de B y B [1985] pag. 1054 fig.1 y la hecha con rayitas de calcular $\gamma_1 = 0.01585$. En la figura de b) se muestra la velocidad fraccionaria $c(\omega) - c_p/c_p$ contra la frecuencia normalizada. La notación es la misma que a) y la gráfica que se lee directamente es de B y B [1985] pag. 1055 fig.2.

En la fig. 4.5.1 se muestra la atenuación normalizada a) y la velocidad fraccionaria b). Para la atenuación prácticamente no existe diferencia entre las que se obtienen de calcular δ y γ con las ecuaciones (4.2.3) y las que se reportan en B y B [1985] pag. 1054 fig.1. Por otro lado en la figura donde se presenta la velocidad fraccionaria claramente se aprecian diferencias entre la calculada con los parámetros δ y γ de las ecuaciones (4.2.3) (continua) y la que se lee de B y B [1985] pag. 1055 fig.2 (con rayitas). En el intervalo de frecuencia normalizada ω_n menor que 10^1 no se aprecian diferencias mientras que para ω_n mayor que 10^1 las diferencias son notables. Dado que existe una relación muy sencilla para la velocidad límite y los parámetros δ y γ se puede fijar un parámetro y variar el otro. Se fija δ que se supone más confiable y se encuentra γ_l ; a este nuevo parámetro se le llamará gamma límite γ_l . La gráfica punteada representa tomando el valor de $\delta = 14.6\text{S}$ que se fijó y la gamma límite $\gamma_l = 0.01585$. Claramente se ven diferencias de las curvas para ω_n entre 10^1 y 10^3 mientras que fuera de este intervalo no se parecían diferencias. Para ver cómo varía la curva de velocidades si se varía los parámetros δ y γ se puede ver la figura 4.5.2.

Ondas P Aluminio

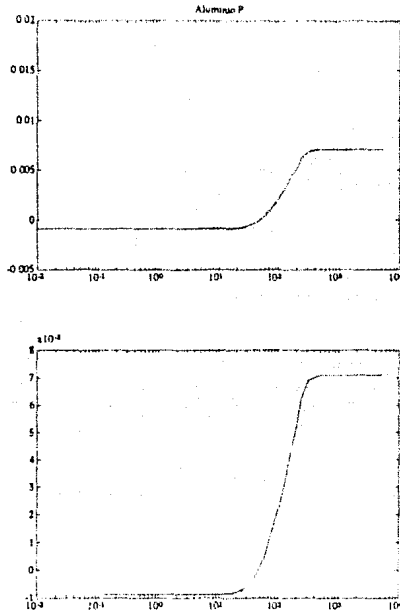


Figura 4.5.2. En la figura a) la curva continua es la curva que se lee de B y B [1985] pag. 1055 fig.2 y las puntadas resultan de variar el $\gamma = 0.008, 0.010, 0.01585, 0.020, 0.030, 0.040$ con $\delta = 14.68$. En la figura de b) es la misma notación pero ahora se varía la delta con $\delta = 6.68, 10.68, 14.68, 18.68, 22.68, 24.68$, con $\gamma = 0.01585$

Con lo que se puede apreciar en la figura 4.5.2 ninguna posible combinación de deltas y gammas puede reproducir lo que se reporta en B y B [1985]. Por lo que se concluye que los resultados que se presentan en B y B [1985] deben ser corregidos.

El mismo análisis es tratado para ondas *S* en el aluminio. Este estudio se presenta a continuación.

Ondas S Aluminio

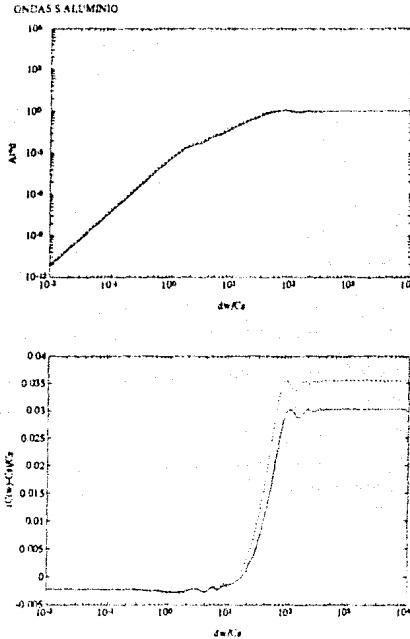


Figura 4.5.3. Ondas S. En la figura de a) se muestran las gráficas de la atenuación normalizada ad contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_s$. La curva continua se obtuvo de calcular δ y γ de las ecuaciones (3.4.2). La curva punteada se obtuvo de leer directamente de B y B [1987] pag. 204 fig.2 y la hecha con rayitas de calcular $\gamma_l = 0.0735$. En la figura de b) se muestra la velocidad fraccionaria $c(\omega) - c_s/c_s$ contra la frecuencia normalizada. La notación es la misma que a) y la gráfica que se lee directamente es de B y B [1987] pag. 205 fig.4.

Los análisis de las figura 4.5.3 y 4.5.5 son análogos al de la figura 4.5.1 por lo que únicamente aquí se presentan las curvas variando tanto la γ como la δ y se concluye lo mismo que en el caso anterior, es decir, que los resultados de B y B [1987] deberán ser corregidos.

Ondas P Aluminio

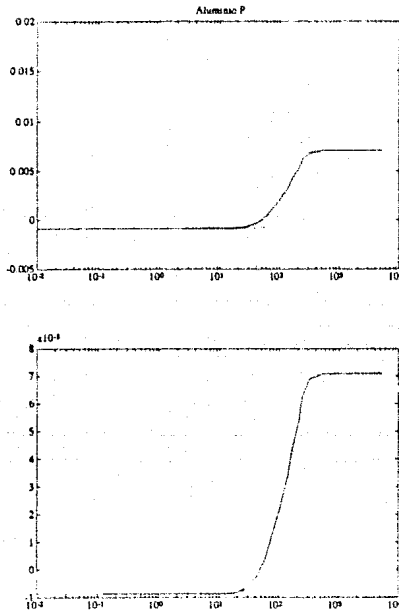


Figura 4.5.4. En la figura a) la curva continua es la curva que se lee de B y B [1987] pag. 205 fig.2 y las punteadas resultan de variar la $\gamma = 0.06, 0.070, 0.0735, 0.080, 0.085, 0.090, 0.095$ con $\delta = 2.347$. En la figura b) es la misma notación pero ahora se varía la delta con $\delta = 0.347, 1.347, 2.347, 3.347, 4.347, 7.347, \dots$ con $\gamma = 0.0735$

Claramente no existen gammas y deltas que reproduzcan los resultados de B y B [1987] pag. 205 fig.4.

Ondas S Fierro

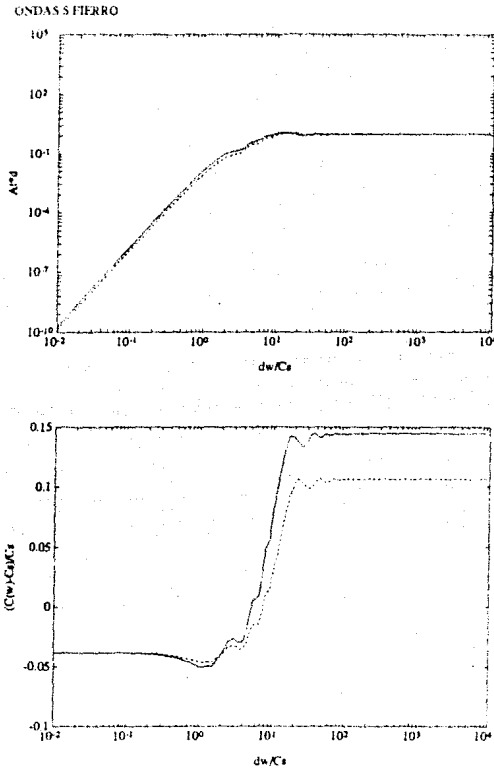


Figura 4.5.5. Ondas S. En la figura de a) se muestran las gráficas de la atenuación normalizada αd contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_s$. La curva continua se obtuvo de calcular δ y γ de las ecuaciones (3.4.2). La curva punteada se obtuvo de leer directamente de B y B [1987] pag. 205 fig.3 y la hecha con rayitas de calcular $\gamma_l = 0.285$. En la figura de b) se muestra la velocidad fraccionaria $c(\omega) - c_s/c_s$ contra la frecuencia normalizada. La notación es la misma que a) y la gráfica que se lee directamente es de B y B [1987] pag. 206 fig.5.

La siguiente figura se obtiene de variar los parámetros δ y γ .

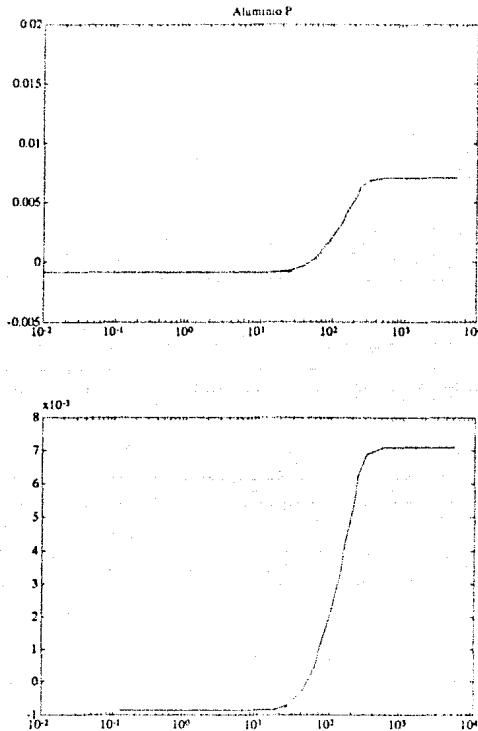


Figura 4.5.6. En la figura de a) la curva continua es la curva que se lee de [2] pag. 205 fig.2 y las punteadas resultan de variar la $\gamma = 0.250, 0.270, 0.285, 0.300, 0.325, 0.350$ con $\delta = 2.362$. En la figura de b) es la misma notación pero ahora se varía la delta con $\delta = 0.362, 1.362, 2.362, 3.362, 4.362, 7.362, \dots$ con $\gamma = 0.285$

Claramente no existen gammas y deltas que reproduzcan los resultados que se presentan en B y B [1987] pag. 206 fig.5.

Capítulo V

Modelo de Autoconsistencia

5.1 Introducción

El método autoconsistente lo que se quiere básicamente es obtener las propiedades efectivas de un policristal y así con relaciones muy sencillas poder calcular la velocidad de fase y la atenuación. El método autoconsistente considera un medio donde hay granos incrustados aleatoriamente y una onda se propaga dentro del medio y de cada uno de los granos incrustados. Los policristales considerados están compuestos de granos de un solo material de tal manera que la inhomogeneidad se presenta por tener los ejes cristalográficos de los granos distribuidos aleatoriamente. Una manera escueta para describir el método autoconsistente es el siguiente:

- Se toma un medio el cual se conocen todas las propiedades elásticas y se considera un grano dentro de éste, se resuelve el problema para un sólo grano, es decir, se resuelve el problema de una onda que se propaga en el medio compuesto. Se hace lo mismo para muchos otros granos.
- Se propone que existe un tensor de módulos elásticos efectivo de todo el material que viene de considerar desplazamientos efectivos, i.e., desplazamientos que se manifiestan macroscopicamente. Así se encuentra una forma implícita para un tensor de módulos elásticos.
- Por último, con el tensor de módulos elásticos hallado se resuelve ahora el problema de una onda que se propaga en un medio con las características del medio efectivo. De esta manera se puede encontrar un número de onda complejo k el cual contiene a la velocidad de propagación de la onda así como la atenuación de la misma.

La presente teoría es válida para cualquier simetría. En el presente trabajo se consideran solamente con granos con simetría cúbica. Los materiales que se estudian son: el hierro, el aluminio y el níquel.

5.2 Planteamiento del Problema

El material policristalino que se estudia ocupa un cierto dominio Ω que está compuesto de muchos granos de un solo material. La densidad de masa ρ de cada grano es la misma. Sin embargo, el tensor de módulos elásticos L_α no lo es. Los granos se pueden etiquetar de la siguiente manera $\alpha = 1, 2, \dots, N$ (donde N es un número muy grande). Todos los granos, que se pueden caracterizar por el mismo tensor de módulos elásticos L_α relativo a algún conjunto de ejes cristalográficos, ocupan la región Ω_α de Ω . La orientación de los ejes cristalográficos está definida por una matriz de rotación R_α , de esta manera las componentes del tensor de módulos elásticos lo podemos escribir como:

$$(L_\alpha)_{ijklmn} = (R_\alpha)_{ip}(R_\alpha)_{jq}(R_\alpha)_{mr}(R_\alpha)_{ns}(L_\alpha)_{pqrs}. \quad (5.2.1)$$

Por medio de una función característica f_α , que se define como 1 si $\mathbf{x} \in \Omega_\alpha$ y cero en cualquier otro caso, el tensor de módulos elásticos L para todo el policristal se puede escribir como sigue:

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N L_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.2.2)$$

En todos los problemas de la elasticidad que se quieran resolver siempre se debe hacer uso de las ecuaciones básicas de elasticidad que se obtuvieron en el primer capítulo, i.e., la ecuación de movimiento (1.5.11), ecuaciones constitutivas (1.8.1), más condiciones de frontera y condiciones iniciales. Debido a que el número de ecuaciones que habría que resolver es muy grande el problema completo no se puede resolver en forma exacta. Entonces, bajo ciertas condiciones, se considerará al policristal como la realización de un medio aleatorio (conjunto universal) y se espera que el promedio, sobre todas las realizaciones que se denota por $\langle \cdot \rangle$, de las cantidades físicas que se estudian sean representativas de lo que ocurre en un policristal dado. Por ejemplo se quiere encontrar el promedio del vector de desplazamientos $\langle \mathbf{u} \rangle$. Más abajo se define lo que se entiende por promedio. La ecuación básica de la elasticidad (1.6.11) es:

$$\sigma_{ij,j} + \rho \mathbf{F}_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (5.2.3)$$

Lo que importa en este momento es obtener los promedios por lo que se promedia en ambos lados

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{,j} + \rho \mathbf{F}_i = \langle \rho \ddot{u}_i \rangle. \quad (5.2.4)$$

Para continuar se debe hacer uso de las ecuaciones constitutivas (1.8.1), esto es, $\sigma = L\epsilon$, donde σ es el esfuerzo, L es el tensor de módulos elásticos y ϵ es el tensor de deformaciones. Al tomar el promedio sobre la ley de Hooke:

$$\langle \sigma \rangle = \langle L\epsilon \rangle \equiv L\langle \epsilon \rangle. \quad (5.2.5)$$

De hecho \bar{L} es un operador. \bar{L} define el *tensor de módulos elásticos efectivo* del policristal. Definiendo

$$p_\alpha(\mathbf{x}) = \langle f_\alpha(\mathbf{x}) \rangle \quad (5.2.6)$$

y

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) f_\alpha(\mathbf{x}) \rangle}{p_\alpha(\mathbf{x})}, \quad (5.2.7)$$

de este modo $p_\alpha(\mathbf{x})$ es la probabilidad que \mathbf{x} pertenezca al grano α y \mathbf{u}_α sea el valor promedio de \mathbf{u} *condicionado* a que \mathbf{x} pertenezca al grano α . Así se puede obtener el valor promedio de \mathbf{u} , σ y ϵ , i.e.,

$$\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad (5.2.8)$$

y

$$\langle \sigma \rangle(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha(\mathbf{x}) \sigma_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad \langle \epsilon \rangle(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha(\mathbf{x}) \epsilon_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (5.2.9)$$

Lo que se desea encontrar para cada grano α los correspondientes σ_α y ϵ_α . Para así poder obtener el tensor de módulos elásticos efectivo \bar{L} por medio de (5.2.9) y (5.2.5).

5.3 Aproximación de la autoconsistencia

El presente trabajo se centrará sobre un dominio infinito y una distribución estadística, homogénea y uniforme con todas las orientaciones posibles. Se considera que el número de granos N es muy grande también y que tienen la misma forma. La unión de todos los Ω_α es el dominio de todo el policristal.

El hecho de que la distribución de los granos sea uniforme y homogénea implica que hay una invariancia de \bar{L} respecto a traslaciones y rotaciones. Se pueden buscar soluciones de las ecuaciones (5.2.4) y (5.2.5) de la forma de una onda plana

$$\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (5.3.1)$$

donde \mathbf{k} es el vector número de onda, ω frecuencia circular y \mathbf{A} la amplitud de la onda. Se debe aclarar que el caso que interesa es cuando las fuerzas de cuerpo son igual a cero. Sustituyendo la onda plana en la ecuación (5.2.4) se obtiene la relación de dispersión siguiente:

$$[L_{ijkl}k_jk_l - \rho\omega^2\delta_{im}]A_m = 0, \quad (5.3.2)$$

pidiendo que no tenga solución trivial. Aquí la notación L significa que es la transformada de Fourier del operador L , evaluado en $(-\mathbf{k}, \omega)$.

Para resolver el problema se hace uso de lo siguiente. El esfuerzo se escribe de la siguiente manera:

$$\sigma = L\epsilon = L_0\epsilon + \tau, \quad (5.3.3)$$

donde L_0 es el tensor de modulos elásticos de un medio de referencia conocido y τ define un tensor de esfuerzo polarizado. Este último campo es como una perturbación al problema de un sólo grano en un medio de propiedades L_0 . Ahora tomando el promedio condicional se tiene:

$$\sigma_\alpha = L_\alpha\epsilon_\alpha = L_0\epsilon_\alpha + \tau_\alpha. \quad (5.3.4)$$

Por otro lado, el problema de dispersión de la onda plana (5.3.1) por un grano de propiedades L_α enterrado en un medio de propiedades L_0 se puede escribir para el desplazamiento en términos del campo polarizado τ por medio de la ecuación integral, escrita en forma simbólica, es decir,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - S\tau, \quad (5.3.5)$$

donde \mathbf{u}_0 corresponde al campo que resulta solo de considerar la onda plana (5.3.1) en el policristal, y S es un operador cuyo núcleo esta relacionado con el tensor de Green para el caso del medio con propiedades L_0 . Los tensores S y S_τ se pueden ver en Sabina y Willis [1985]. Se puede encontrar también una expresión análoga para la deformación, esto es,

$$\epsilon = \epsilon_0 - S_\tau\tau. \quad (5.3.6)$$

Tomando los promedios de las dos últimas ecuaciones se tiene que:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}_0 - S\langle \tau \rangle, \quad (5.3.7)$$

y

$$\langle \epsilon \rangle = \epsilon_0 - S_\tau\langle \tau \rangle. \quad (5.3.8)$$

Mientras que de la ecuación (5.3.3.), la relación entre el esfuerzo y la deformación queda

$$\langle \sigma \rangle = \bar{L} \langle \epsilon \rangle + \langle \tau \rangle, \quad (5.3.9)$$

donde

$$\langle \tau \rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \tau_{\alpha}, \quad (5.3.10)$$

Una forma para estimar τ_{α} es enterrar un grano del tipo α en un policristal con propiedades L_0 y elegir L_0 *autoconsistentemente* para que se comporte como el medio efectivo \bar{L} ésto es, $L_0 \langle \epsilon \rangle = \bar{L} \langle \epsilon \rangle$. Esto equivale a que el promedio del campo τ es cero, i.e.,

$$\langle \tau \rangle = 0. \quad (5.3.11)$$

Una consecuencia inmediata a (5.3.7) es

$$\mathbf{u}_0 = \langle \mathbf{u} \rangle. \quad (5.3.12)$$

O sea que la onda promedio es en efecto la onda plana que se propaga en el medio efectivo.

Para efectos de cálculo, se especifica un grano por L_{α} y la densidad ρ , considerando una sola inclusión del material del tipo α . Para especificar los diferentes dominios de los granos α que se repiten se construye la función característica $f_{1\alpha}$ que corresponde a un dominio $\Omega_{1\alpha}$ esto es,

$$f_{1\alpha}(\mathbf{x}) = f_{0\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1), \quad (5.3.13)$$

donde $f_{0\alpha}$ es la función característica de $\Omega_0\alpha$.

Se supone una onda incidente plana,

$$\mathbf{u}_0(x, t) = \mathbf{A}_0 e^{i(k \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (5.2.14)$$

sustituyendo en la ecuación básica de elasticidad se tiene que:

$$[(\bar{L}_0)_{ijmn} k_j k_n - \rho \omega^2 \delta_{im}] (A_0)_m = 0. \quad (5.3.15)$$

Los desplazamientos en términos del campo polarizado se pueden escribir por medio de la ecuación integral como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - S(\tau_{1\alpha} f_{1\alpha}), \quad (5.3.16)$$

y la correspondiente deformación

$$e = e_0 + \bar{S}_r(\tau_{1\alpha} f_{1\alpha}). \quad (5.3.17)$$

La relación esfuerzo deformación (5.3.3.) implica que:

$$(L_\alpha - L_0)^{-1} \tau_{1\alpha} + \bar{S}_r(\tau_{1\alpha} f_{1\alpha}) = e_0, \quad x \in \Omega_{1\alpha}. \quad (5.3.18)$$

Para resolver la ecuación integral se hace la aproximación de que el campo de polarización sea constante sobre el dominio $\Omega_{1\alpha}$. Entonces tomando promedios en la ecuación anterior se llega a

$$[(L_\alpha - L_0)^{-1} + \bar{S}_r] \tau_{1\alpha} = e_0, \quad (5.3.19)$$

donde \bar{S}_r representa el valor promedio sobre $\Omega_{1\alpha}$ además

$$e_0 = e^{ik \cdot x_1} h_\alpha(k), \quad (5.3.20)$$

donde $h_\alpha(k)$ es el valor promedio de $\exp[ik \cdot (x - x_1)]$ sobre $\Omega_{1\alpha}$ o equivalentemente el valor promedio de $\exp(ik \cdot x)$ para el dominio $\Omega_{0\alpha}$. Finalmente τ_α se obtiene tomando el promedio $\tau_{1\alpha}(x, t)$ sobre todos los x_1 para los cuales $x \in \Omega_{1\alpha}$. Usando las dos ecuaciones anteriores se tiene que:

$$\tau_\alpha(x, t) = h_\alpha(-k) h_\alpha(k) [(L_\alpha - L_0)^{-1} + \bar{S}_r]^{-1} e_0(x, t), \quad (5.3.21)$$

y la autoconsistencia se reduce a:

$$\sum_\alpha p_\alpha h_\alpha(-k) h_\alpha(k) [(L_\alpha - L_0)^{-1} + \bar{S}_r]^{-1} = 0. \quad (5.3.22)$$

Una forma equivalente, para la ecuación (5.3.22), que será de más utilidad para hacer los cálculos es la siguiente

$$L_0 = \sum_\alpha p_\alpha h_\alpha(-k) h_\alpha(k) L_\alpha [I + \bar{S}_r(L_\alpha - L_0)]^{-1} x \left\{ \sum_\beta p_\beta h_\beta(-k) h_\beta(k) L_\beta [I + \bar{S}_r(L_\beta - L_0)]^{-1} \right\}^{-1}.$$

Claramente se ve que esta última ecuación es recursiva. Para obtener los módulos elásticos efectivos L_0 se debe resolver esta ecuación para cada frecuencia. Estos módulos dependerán de la frecuencia que a su vez serán números complejos.

5.4. Policristal isótropo

La ecuación anterior se puede usar para el caso de un policristal isótropo. Los granos que se estudian aquí son esferas con radio a . Todas las orientaciones de los ejes cristalográficos son igualmente posibles para cada grano. El volumen de cada grano es P_a . La función $h_{\alpha}(k)$ depende solo del tamaño del grano y de la forma pero en este caso todos los granos tienen la forma de esferas y son reemplazadas por $h_{\alpha}(k)$ que se aplica para los granos de radio a . Se toma a L_0 como isótropo, con los módulos de compresibilidad y de corte κ_0 y μ_0 respectivamente, los cuales dependen de la frecuencia y además son números complejos. El tensor S_T está dado en S y W, [1989]. Este problema se puede representar entonces con los módulos elásticos siguientes κ_s, μ_s :

$$(3\kappa_s, 2\mu_s) = \left\{ \frac{\epsilon_1}{3\kappa_0 + 4\mu_0} - \frac{1}{5} \left[\frac{2\epsilon_1}{3\kappa_0 + 4\mu_0} + \frac{\epsilon_2}{\mu_0} \right] \right\}, \quad (5.4.1)$$

donde:

$$\epsilon_{\gamma} = \frac{3(1 - ik_{\gamma}a)}{(k_{\gamma}a)^3} [\sin(k_{\gamma}a) - k_{\gamma}a \cos(k_{\gamma}a)] e^{ik_{\gamma}a}, \quad \gamma = 1, 2, \quad (5.4.2)$$

y finalmente lo que se quiere es obtener a la velocidad de fase en términos de las constantes elásticas que dependen de la frecuencia, la velocidad de fase para las ondas S y para las ondas P están relacionadas de la siguiente manera:

$$c_p^2 = \left(\frac{\kappa_0 + 4\mu_0/3}{\rho} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad c_s^2 = \left(\frac{\mu_0}{\rho} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.4.3)$$

la idea, es pues, dada una frecuencia encontrar los módulos elásticos mediante la fórmula de recurrencia que se da en la ecuación (5.3.21).

Existe un álgebra que simplifica mucho los cálculos para tensores de módulos elásticos de materiales con simetría cúbica. Por esta razón se toma a L_c como un tensor de módulos elásticos con simetría cúbica.

Si L_c es un tensor de módulos elásticos, con simetría cúbica se puede escribir como:

$$L_c = (3\kappa_c, 2\mu_c, 2\mu'_c). \quad (5.4.4)$$

La ley de Hooke para el caso de un medio con simetría cúbica es

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \kappa_c(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + \frac{2}{3}\mu_c(2\epsilon_{11} - \epsilon_{22} - \epsilon_{33}) \\ \sigma_{12} &= 2\mu'_c\epsilon_{12}. \end{aligned}$$

Si se toman todos los granos con el mismo radio a y la compresibilidad κ_c de los granos igual a la compresibilidad macroscópica se puede llegar a

$$\mu_0 = \frac{2\mu_c [1 + 4\mu_c(\mu'_c - \mu_0)] + 3\mu'_c [1 + 4\mu_c(\mu_c - \mu_0)]}{2[1 + 4\mu_c(\mu'_c - \mu_0)] + 3[1 + 4\mu_c(\mu_c - \mu_0)]}.$$

Aquí se obtiene una relación recurrente para el módulo de rigidez efectivo en términos μ_c , μ'_c que son los módulos para un solo grano de tipo c . Esta ecuación se resuelve numericamente para μ_0 y se retoman las ecuaciones (5.4.3) para calcular la velocidad de la onda S y de la onda P .

Se tiene que trabajar mucho para resolver esta ecuación pero finalmente se llega a los resultados que se presentan en el siguiente capítulo.

5.5 Resultados

Para obtener la atenuación se resuelve la ecuación (5.3.15) con los módulos elásticos efectivos, se halla el número de onda k y la parte imaginaria de éste es la atenuación mientras que para las velocidades se usan nuevamente las ecuaciones (5.4.3). El número de onda complejo k es una combinación de la velocidad de fase y de la atenuación como se vió en el capítulo IV, esto es,

$$k = \frac{\omega}{c(\omega)} + i\alpha(\omega).$$

El metodo autoconsistente que se plantea en el presente capítulo también da una manera para obtener el número de onda. Una manera de obtener los resultado es la siguiente: se toma la parte imaginaria del número de onda multiplicado por el valor característico del policristal que se estudia. A esta cantidad se le llama atenuación normalizada, i.e.,

$$Im(k)d = \alpha(\omega)d = \alpha_n,$$

donde α es la atenuación y d es el valor característico del policristal.

Una forma de presentar los resultados para la atenuación es graficar la atenuación normalizada contra la frecuencia normalizada.

Para el estudio de la velocidad, lo que se hace es tomar la velocidad fraccionaria, es decir,

$$\frac{c(\omega)}{c_p} - 1$$

donde c_p esta dada en la ecuación (5.4.3).

La gráficas muestran la velocidad fraccionaria contra la frecuencia normalizada. El trabajo se ha hecho para el aluminio, el hierro y el níquel. Para los dos últimos materiales se tienen valores experimentales que se presentarán cuando se comparen los resultados de B y B con los de S y W.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

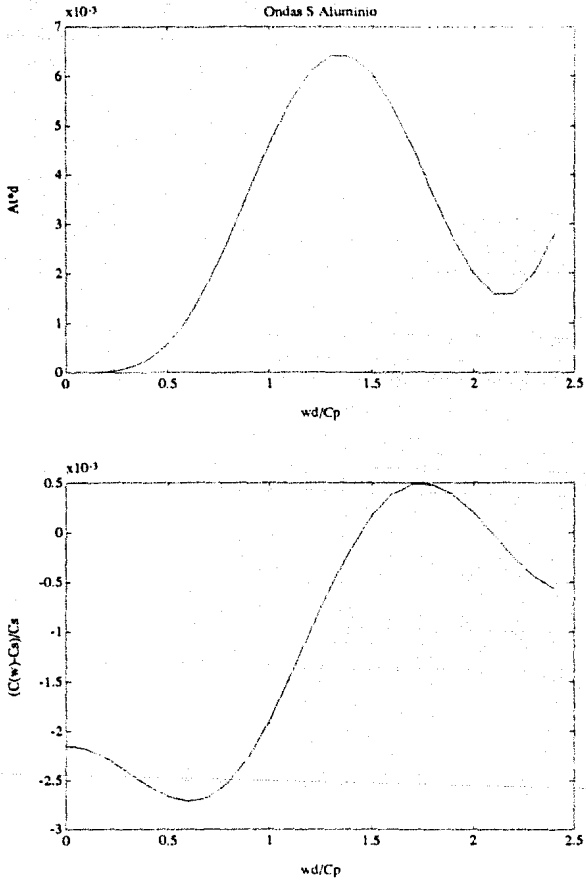


Figura 5.5.1. En la figura de arriba (a) se grafica la atenuación normalizada $Im\ ka$ contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_p$. En la de abajo (b) se grafica $C(\omega) - c_p/c_p$ que es la velocidad fraccionaria contra la misma frecuencia. Las dos figuras son para las ondas S en aluminio.

Para las ondas P los resultados son:

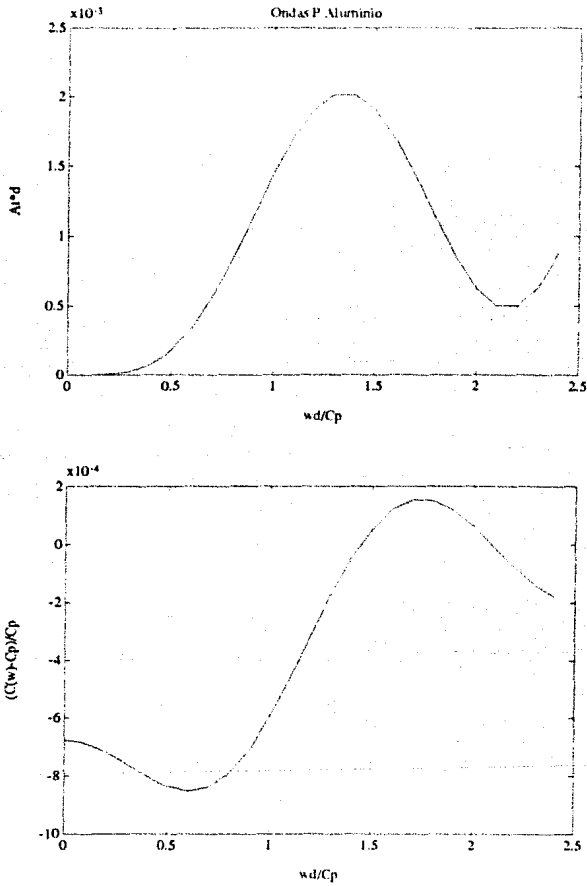


Figura 5.5.1. En la figura de arriba (a) se grafica la atenuación normalizada $Im ka$ contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_p$. En la de abajo (b) se grafica $c(\omega) - c_p/c_p$ que es la velocidad fraccionaria contra la misma frecuencia. las dos figuras son para las ondas P en aluminio.

Los resultados para el Fierro son:

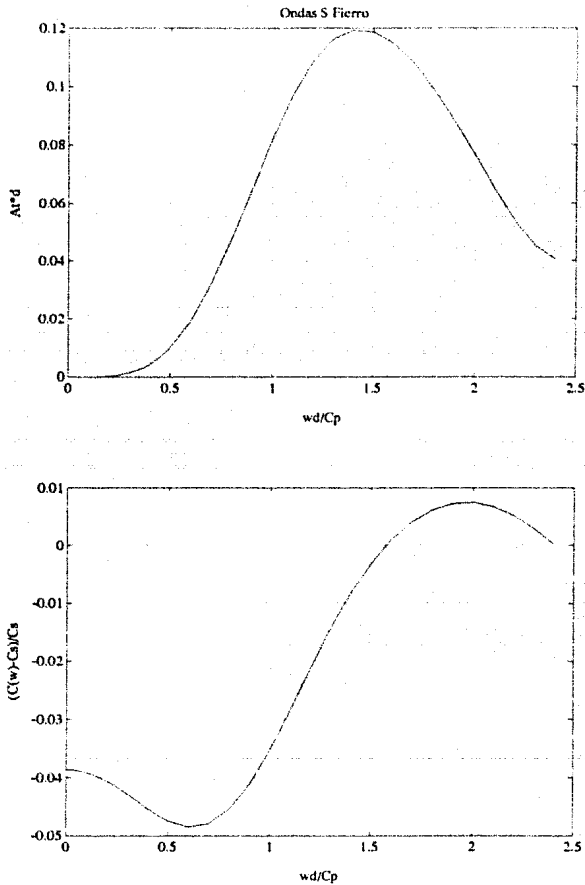


Figura 5.5.1. En la figura de arriba (a) se grafica la atenuación normalizada $Im\ ka$ contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_p$. En la de abajo (b) se grafica $c(\omega) - c_p/c_p$ que es la velocidad fraccionaria contra la misma frecuencia. Las dos gráficas son para las ondas S en Fierro.

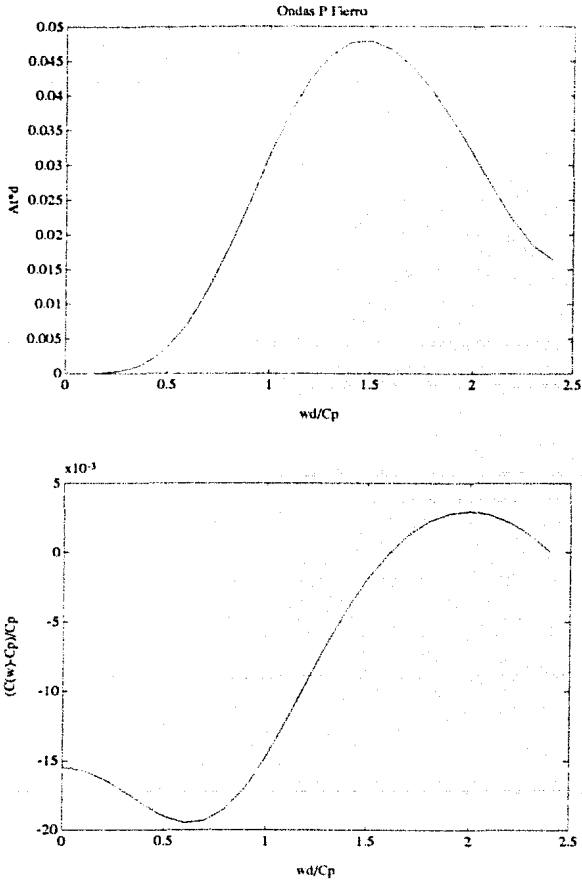


Figura 5.5.1. En la figura de arriba (a) se grafica la atenuación normalizada $Im ka$ contra la frecuencia normalizada $\omega d / c_p$. En la de abajo (b) se grafica $c(\omega) - c_p / c_p$ que es la velocidad fraccionaria contra la misma frecuencia. las dos gráficas son para las ondas P en Fierro.

Los resultados para el Níquel son:

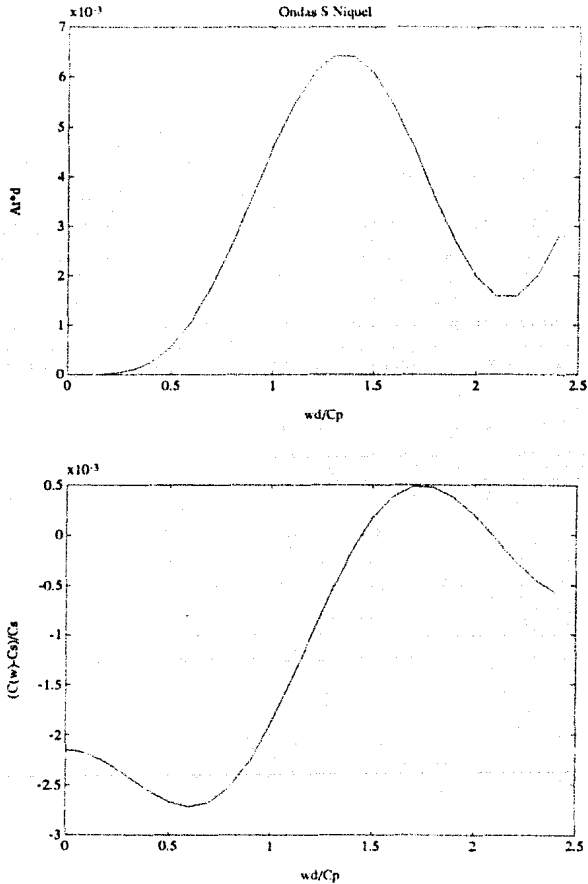


Figura 5.5.1. En la figura de arriba (a) se grafica la atenuación normalizada $Im\ ka$ contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_p$. En la de abajo (b) se grafica $c(\omega) - c_p/c_p$ que es la velocidad fraccionaria contra la misma frecuencia. Las dos gráficas son para las ondas S en Níquel.

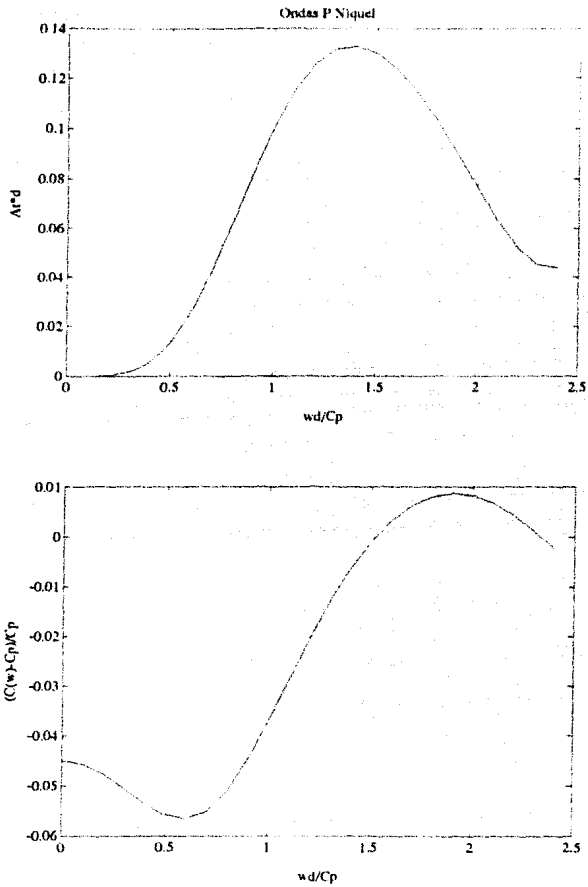


Figura 5.5.1. En la figura de arriba (a) se grafica la atenuación normalizada $Im ka$ contra la frecuencia normalizada $\omega d/c_p$. En la de abajo (b) se grafica $c(\omega) - c_p/c_p$ que es la velocidad fraccionaria contra la misma frecuencia, las dos gráficas son para las ondas P.

Notése que en todas las figuras se presenta un patrón característico. Por ejemplo en todas las gráficas para la atenuación, ésta crece y llega hasta un máximo y luego decae. Para la velocidad también se puede identificar un cierto patrón característico. La velocidad primero decae, llega a un mínimo, luego crece hasta alcanzar un máximo y luego vuelve a decaer.

Capítulo VI

Comparación de Resultados

6.1 Introducción

En el presente capítulo se comparan los resultados de Beltzer y Brauner (1984) y (1987) con los de Sabina y Willis (1992). Para hacer la comparación de ambas teorías se grafican en la misma escala ambos resultados. Al final de la sección se dan resultados importantes de la comparación.

6.2 Comparación

Uno de los objetivos del presente trabajo de tesis es comparar el carácter predictivo de dos teorías para el mismo problema. El problema que se estudio fué es el de *Propagación de ondas elásticas en materiales policristalinos* y las teorías son: una desarrollada por Beltzer y Brauner (1984) y la otra por Sabina y Willis (1992). Los datos experimentales que presentan aquí fueron tomados de Papadakis (1967).

La teoría desarrollada por Beltzer y Brauner (1984) se estudio en los capítulos II, III y IV mientras que la teoría de Sabina y Willis (1992) se presenta en el capítulo V. Para ambos trabajos se presentan resultados para el aluminio, el fierro y el níquel tanto para ondas S como para ondas P. B y B solamente hacen cálculos para el fierro y para aluminio, por otro lado S y W los hacen para el fierro y el níquel.

Como se mencionó en el capítulo IV hay algunas diferencias entre lo que reportan Beltzer y Brauner (1985) y (1987) con los resultado que en principio deberían de ser. Por el motivo anterior los cálculos que se usan para comparar ambos teorías debe ser los valores numéricos que se hallan δ y γ (las expresiones de δ y de γ se encuentran en el capítulo IV para ondas S y para ondas P) con los parámetros que se presentan en la tabla 6.2.1.

Material	C_{11}	C_{12}	C_{44}	c_p	c_s	ρ
Fierro	23.7	14.1	11.6	6084.9	3359.1	7870
Aluminio	10.8	6.13	2.85	6450	3132.2	2695
Níquel	25	16	11.8	5888	3163	8905

Tabla 6.2.1 Valores de las constantes elásticas de cada material en $10^{10} N/m^2$. c_p es la velocidad compresional y c_s la de la onda shear, ambas estan en m/sec . ρ es la densidad del material. Auld (1973).

Las gráficas de los cálculos numéricos se presentan a continuación. Se debe

mencionar que para comparar los resultados de B y B (1985) y (1987) con los de S y W (1992) se deben de reescalar los resultados de S y W (1992). En los cálculos que se hacen en B y B (1985) y (1987) se debe tener una velocidad de referencia c_0 , esta velocidad se toma de la teoría de B y B (1992). La teoría de S y W (1992) no necesita de alguna velocidad de referencia puesto que la misma teoría se da.

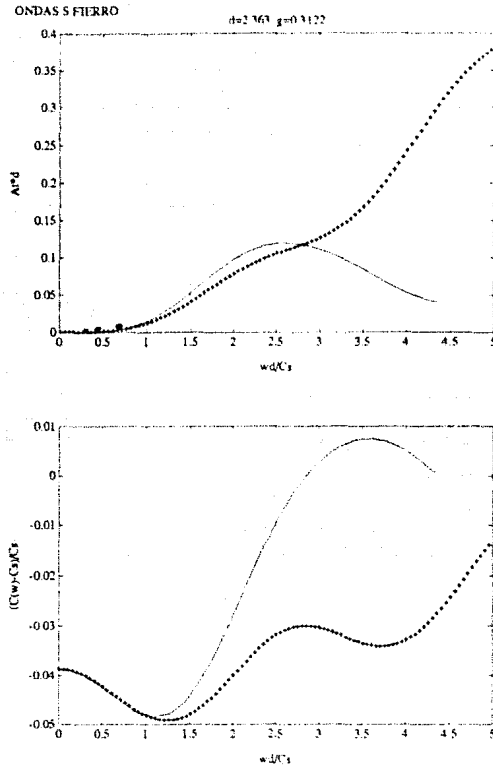


Figura 1. Ondas S Fierro. En la figura de arriba se grafica la atenuación normalizada (αd) y en la de abajo la velocidad de fase fraccionaria $(c(\omega) - c_n/c_n)$ vs. la frecuencia normalizada ($\omega d/c_n$). Se compara los resultados de Sabina y Willis (continua) con los de Beltzer y Brauner (cruces); las cruces son para las deltas y las gamas que da la teoría de B y B. (se muestran en la parte superior de la figura). Los círculos son los valores experimentales que se tienen. La notación es la misma en ambas gráficas.

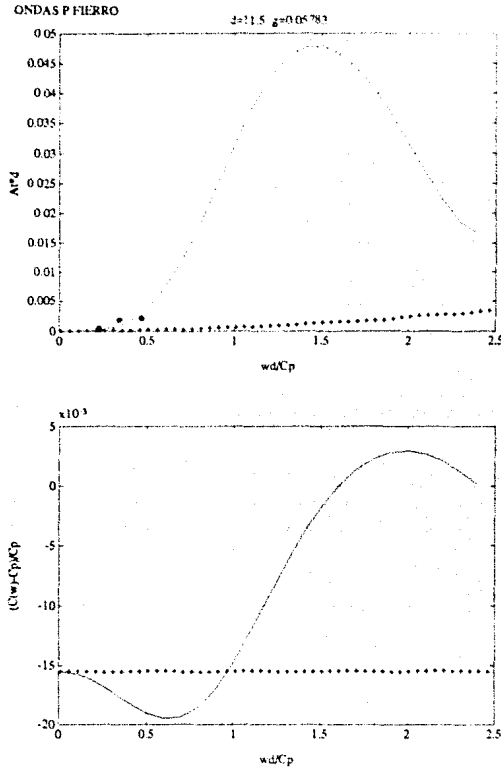


Figura 2. Ondas P Fierro. En la figura de arriba se grafica la atenuación normalizada (αd) y en la de abajo la velocidad de fase fraccionaria ($(c(\omega) - c_n/c_n)$) vs. la frecuencia normalizada ($\omega d/c_n$). Se compara los resultados de Sabina y Willis (continua) con los de Beltzer y Braumer (cruces); las cruces son para las deltas y las gamas que da la teoría de B y B, (se muestran en la parte superior de la figura). Los círculos son los valores experimentales que se tienen. La notación es la misma en ambas gráficas.

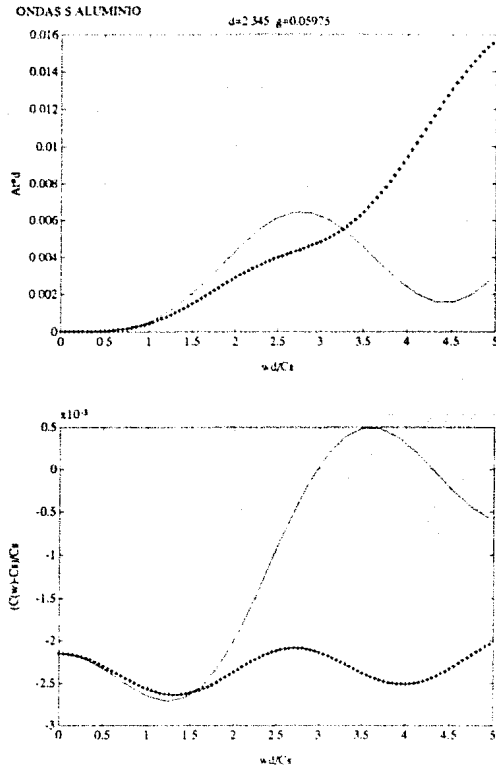


Figura 3. Ondas S Aluminio. En la figura de arriba se grafica la atenuación normalizada (αd) y en la de abajo la velocidad de fase fraccionaria ($c(\omega) - c_n/c_n$) vs. la frecuencia normalizada ($\omega d/c_n$). Se compara los resultados de Sabina y Willis (continua) con los de Beltzer y Brauner (cruces); las cruces son para las deltas y las gamas que da la teoría de B y B, (se muestran en la parte superior de la figura). La notación es la misma en ambas gráficas.

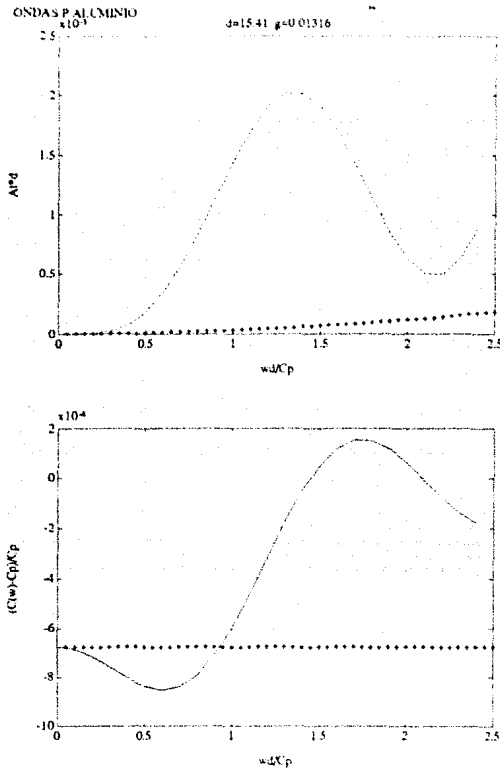


Figura 4. Ondas P Aluminio. En la figura de arriba se grafica la atenuación normalizada (ad) y en la de abajo la velocidad de fase fraccionaria ($c(\omega) - c_n/c_n$) vs. la frecuencia normalizada ($\omega d/c_n$). Se compara los resultados de Sabina y Willis (continua) con los de Beltzer y Brauner (cruces); las cruces son para los deltas y los gamas que da la teoría de B y B, (se muestran en la parte superior de la figura). La notación es la misma en ambas gráficas.

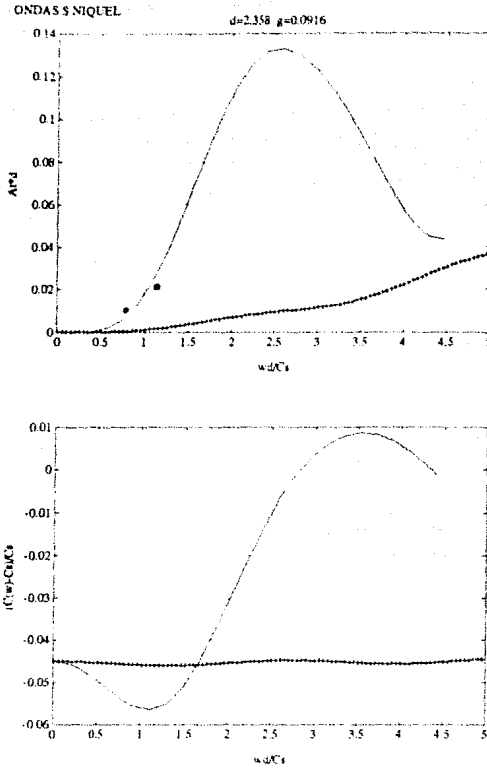


Figura 5. Ondas S Niquel. En la figura de arriba se grafica la atenuación normalizada (ad) y en la de abajo la velocidad de fase fraccionaria $(c(\omega) - c_n/c_n)$ vs. la frecuencia normalizada ($\omega d/c_n$). Se compara los resultados de Sabina y Willis (continua) con los de Beltzer y Brauner (cruces); las cruces son para los deltas y las gamas que da la teoría de B y B. (se muestran en la parte superior de la figura). Los círculos son los valores experimentales que se tienen. La notación es la misma en ambas gráficas.

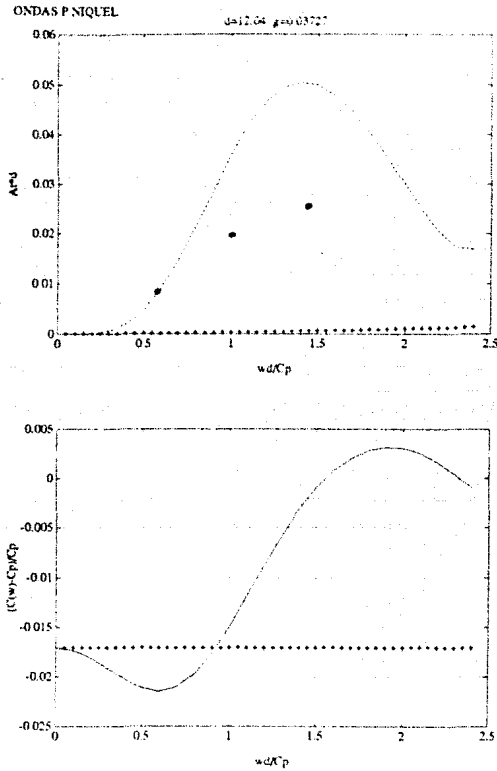


Figura 6. Ondas P Níquel. En la figura de arriba se grafica la atenuación normalizada (αd) y en la de abajo la velocidad de fase fraccionaria ($(c(\omega) - c_n)/c_n$) vs. la frecuencia normalizada ($\omega d/c_n$). Se compara los resultados de Sabina y Willis (continua) con los de Beltzer y Brauner (cruces); las cruces son para las deltas y las gamas que da la teoría de B y B. (se muestran en la parte superior de la figura). Los círculos son los valores experimentales que se tienen. La notación es la misma en ambas gráficas.

Claramente se ve que para ondas S en aluminio y hierro los resultados son muy semejantes en el intervalo de validez de la teoría autoconsistente. El intervalo de validez es de cero a $\pi/2$ aproximadamente. Para el hierro (ondas S) la máxima variación es de 12 % para la velocidad, y para la atenuación es de 15 % aproximadamente (figura 1). En el caso del aluminio (ondas S) la diferencia máxima entre ambas teorías fue del 5% mientras que para la atenuación fue del 4% aproximadamente (figura 3).

En los casos restantes no hubo grado de comparación como se puede ver en las figuras 2, 4, 5, y 6.

Notése que cuando el orden de magnitud entre δ y γ es de uno o dos los resultados que se pueden obtener, al comparar las dos teorías es altamente satisfactorio. En el caso cuando este orden de magnitud excede a dos no existe comparación. En las figuras 2, 4, 5, y 6 se puede observar que para diferencias grandes de orden de magnitud entre δ y γ practicamente no hay variación ni de la atenuación ni de la velocidad fraccionaria en la teoría de B y B.

Por lo que predicen las dos teorías (S y W) y (B y B) se puede notar que las ondas S en materiales policristalinos (hierro y Aluminio) presentan un patrón característico. El patrón que presentan es que la velocidad disminuye cuando aumenta la frecuencia normalizada, llega a un mínimo y luego aumenta. Por otro lado la atenuación aumenta conforme la frecuencia normalizada aumenta, llega hasta cierto valor y decae (figuras 1 y 3).

Conclusiones

Conclusiones

- Las dos teorías que se compararon predicen prácticamente lo mismo para ondas S en el aluminio y el hierro (policristales).
- Se puede obtener un patrón característico para ondas S que se propagan en un material policristalino (ya sea hierro o aluminio).
- Un resultado importante que se obtiene en la presente tesis es que los datos que se reportan en [B y B] (1984) y [B y B] (1987) tendrán que ser corregidos.
- La idea de obtener la velocidad de fase con las relaciones de dispersión es muy buena porque se obtiene la velocidad para toda frecuencia pero se debe contar con una mejor aproximación para la atenuación.
- La teoría autoconsistente [S y W] (1992) es mucho más modesta en cuanto a intervalo de validez, sin embargo se aproxima más a los resultados experimentales.

Bibliografía

Achenbach, J.D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Company, New York, 1975.

Auld, B. A., *Acoustic Field and Waves in Solids I*, John Wiley & Sons New York 1973

Beltzer, A.I., *Acoustic of Solids*, Springer-Verlag Berlin Heidekberg, 1988.

Beltzer, A.I. & Brauner, N. 1985. Elastic waves propagation in polycrystalline media: A causal response, *Appl. Phys. Lett.* **47**, 1054-1055.

Beltzer, A.I. & Brauner, N. 1987. Shear waves in polycrystalline media and modifications of the Keller approximation, *Int. J. Solids Structures* **23**, 201-209.

Eringen, C.A., *Mechanics of Continua*, Robert R. Krieger Publishing Company, New York 1980.

Jackson, John David. *Classical electrodynamics*, 2 ed. New York, J. Wiley, 1975.

Koerber, George G., *Properties of Solids*, Prentice-Hall, New Jersey, 1962.

Landau, L.D., *Theory of Elasticity*, tercera edición, *Course of Theoretical Physics*, **7**, Pergamon Press, 1986.

Marsden, *Basic Complex Analysis*, 1973.

Nussenzveig, H. M., *Causality and Dispersion Relations*, Academic, New York, 1972.

Rokhlin, L.L. 1972. Scattering of ultrasound in polycrystalline material., *Sov. Phys. Acoust.* **18**, 71-75.

Sabina y Willis. 1993. Self-Consistent Analysis of Waves in a Polycrystalline Medium, *Eur. J. Mech. A/Solids* **12**, 265-275.

Stanke y Kino F.E. 1983. A unified theory for elastic wave propagation in polycrystalline materials., *J. Acoustic Soc. Am.* **75**, 665.

Titclismaarsh, E. C., Introduction to the Theory of Fourier Integrals, segunda edición, Oxford Univ. Press, London and New York, 1948.

Agradecimientos

Desco expresar mi agradecimiento al *Departamento de Matemáticas y Mecánica* del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas, UNAM por haberme permitido usar sus recursos, en particular, el excelente apoyo computacional de que disponer.

Debo agradecer a todos los investigadores de este departamento por todo lo que contribuyeron a la realización de este trabajo de tesis. En especial al Dr. Federico Sabina quien fue el director de esta tesis. En particular agradezco al Dr. Arturo Vargas, Dr. Raymundo Peralta y al Dr. Arturo Olvera quienes se tomaron la atención de leer el primer borrador y dar sus valiosas observaciones para el mejoramientos del escrito de esta tesis. Al Dr. Luis Quintanar por sus sugerencias hechas al presente trabajo. También debo mencionar las valiosas conversaciones que tuve con el Dr. Antonmaria Minzoni no sólo en lo académico sino también en lo personal. Al Dr. Jorge Ize por haberme apoyado a obtener la beca de DGAPA. Por último a Alma Rodríguez por todo lo que me auxilió.

Agradezco al PAPIID, DGAPA, dentro del proyecto intitulado "Computación Científica a Gran Escala de Ecuaciones Diferenciales", número IN 103691 por haberme dado una beca, puesto que gracias a ésta se pudo escoger un tema de tesis de actualidad. También agradezco a DGAPA por haberme otorgado una beca de tesis de licenciatura, a través del Subcomité de Becas del IIMAS.

Otros agradecimientos

Hay muchas personas que contribuyeron, de una u otra manera, para finalizar este trabajo: estas personas son mis amigos. Mencionaré algunos puesto que no podría citar a todos por limitaciones de Espacio-Tiempo. Cada uno de ellos jugó un papel importante para mí, en su sistema de referencia. Algunos de ellos son: Paty Nolasco, Sergio Hernández, Carmen Méndez, Tania Alarcón, Nancy Reyes y Alberto Solís. No puedo dejar de mencionar al 101 y a los integrantes del mismo, como son el viejo Fäller y sus consejos, a Nicodemo y su ballet, a Anastasia y sus malas apuestas. A los que tampoco puedo olvidar son a Toño, Willis y a Memo.

Hay una persona a la que le debo mucho, por todo lo que hizo por mí y no lo puedo dejar de mencionar: esta persona es el tío Juan Esteban Valdiviezo Sánchez.