17
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS
COLEGIO DE PEDAGOGIA
SEMINARIO PERMANENTE DE APOYO A LA TITULACION

"ANALISIS DE LA FUNDAMENTACION PSICOLOGICA, DE LOS PROBLEMAS DE "ESTRUCTURA ADITIVA" EN LAS MATEMATICAS, PROPUESTA POR GERARD VERGNAUD, CON FINES DIDACTICOS"

TESINA

Para obtener el título de

LICENCIADA EN PEDAGOGIA *

Presenta:
MONICA MARGARITA CARRANZA VARGAS.

Asesor:
Dr. Agustín G. Lemus T.
Titular del Seminario.

10-IX-93
85
76
73

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

C.U. MEXICO, D.F. **SEPTIEMBRE 1993**

COLEGIO DE PEDAGOGIA

INDICE

INTRODUCCION

El presente trabajo está encaminado a analizar la fundamentación psicológica propuesta por Gerard Vergnaud, respecto a los problemas matemáticos de " estructura aditiva ", para lo cual se utilizó un marco teórico sustentado en Jean Piaget y en los postulados que señala el mismo Vergnaud.

Este interés se centra en la comprensión por parte del niño hacia la resolución de los problemas y la relación que establece con las operaciones aritméticas y los algoritmos respectivos para resolverlos, se considera que esto es importante, básicamente por que se coincide con el punto de vista psicogenético que propone las situaciones problemáticas como elementos generadores del conocimiento matemático.

Piaget ha demostrado que el niño es un ser activo, que formula hipótesis en su necesidad de conocerse a sí mismo y al mundo que le rodea.

El conocimiento y la inteligencia, se construyen mediante las acciones que el sujeto realiza sobre los objetos y la relación que establece entre los hechos que observa y su propia reflexión ante ellos, implicando así, todo un proceso de aprendizaje.

Por otro lado Vergnaud ha encontrado que además de los problemas típicos de " agregar o quitar " que dan origen a ecuaciones de la forma a + b = x ó a - b = x, existen muchos otros que también son de estructura aditiva, pero de distinto nivel de complejidad.

De este descubrimiento se desprende que la disponibilidad de una operación en un mismo alumno puede variar en función de la síntaxis y semántica que figura en el enunciado del problema.

El análisis que se realizó, permitió vincular la caracterización de la suma y la resta en relación con los procesos cognoscitivistas empleados en ellas, tanto en el aspecto de resolución de problemas de estructura aditiva como en lo referente al uso de los algoritmos respectivos.
Para realizar este trabajo se plantearon los siguientes objetivos:

Como objetivo general. Analizar la fundamentación psicológica propuesta por Gerard Vergnaud, respecto a los problemas matemáticos de "estructura aditiva" y como objetivos particulares: Revisar las investigaciones realizadas por Vergnaud. Describir los problemas de "estructura aditiva". Describir las operaciones aritméticas de suma y resta y sus respectivos algoritmos; por último analizar los procedimientos de resolución de los mismos llevándose a cabo este, en forma de una investigación bibliográfica de índole descriptiva de análisis y síntesis, como soporte teórico a la revisión que se hizo de las investigaciones realizadas por Gerard Vergnaud, en lo referente a los problemas de estructura aditiva.

En primer lugar se abordan las nociones de Homomorfismo, Invariante Operatorio, Noción de Relación, que permiten al niño reflejar los aspectos de la realidad y prestarse a la realización de operaciones, esto es a lo que Vergnaud llama Cálculo relacional.

En segundo lugar se introducen las nociones de Número y Medida, que permiten hacer una diferencia entre la correspondencia biunívoca, la equivalencia de conjuntos, la relación de orden, etc.; a continuación sigue la revisión de las categorias de los "problemas de estructura aditiva" propuesta por Vergnaud y los algoritmos correspondientes, dejando al final el análisis de los procedimientos utilizados por los alumnos para resolver tales problemas y su implicación pedagógica.

De esta manera la tesina queda ubicada en el área de la Psicopedagogía con implicaciones en la Didáctica General y Especial.

CAPITULO 1

1.- PIAGET Y VERGNAUD.

En el área de las matemáticas, la enseñanza-aprendizaje se ha realizado predominantemente de manera mecánica y memorística, considerando generalmente al alumno como un sujeto pasivo, receptivo y al maestro como el único poseedor del conocimiento, lo cual no debería considerarse como cierto, ya que, Piaget ha demostrado que el sujeto aprende de sus acciones sobre los objetos, construyendo categorías de pensamiento, elaborando sus explicaciones y sus propias hipótesis. Por otro lado en el área de la psicopedagogía de las matemáticas, encontramos en los trabajos de Vergnaud elementos importantes, tales como la matemática considerada como ciencia de las relaciones; la noción de cálculo relacional y su papel en la construcción del pensamiento matemático, razón por la cual se considera importante fundamentar este trabajo en las investigaciones realizadas por estos autores.

JEAN PIAGET nació en Neuchátel Suiza, consagró su vida a la explicación biológica del conocimiento, concibió el término epistemología genética para expresar su idea de que el desarrollo intelectual se encuentra firmemente enraizado en el desarrollo biológico del individuo, considerándose un genetista cuyo interés principal se centra en el desarrollo del conocimiento.

Realizó estudios en la Universidad de La Sorbona de Paris, donde colaboró con Théophile Simon, coautor del primer test de inteligencia, interesándose más en la razón por la que los niños fracasaban en los test que en el establecimiento de las respuestas correctas. A partir de lo anterior comenzó a estudiar el razonamiento de los niños, publicando sus descubrimientos en una serie de artículos.

Claparede le ofreció el cargo de director de investigaciones del Instituto Jean - Jacques Rousseau, cargo en el cual inició las investigaciones que más adelante habrían de constituirse en la obra más importante de su vida.

Publicó más de 30 libros, basando los 5 primeros en sus investigaciones con niños en La Maison des Petits. Con ayuda de su esposa estudió el desarrollo cognoscitivo de sus hijos, estas observaciones acerca del desarrollo de la inteligencia durante la infancia y la niñez, son el motivo de sus libros posteriores.

Junto con Alina Szeminska y Barbel Inhelder investigó el desarrollo del pensamiento lógico referido a los números, la geometría, el espacio, el tiempo y la cantidad, publicando también una serie completa de artículos sobre el desarrollo de la percepción en los niños.

Fundó el Instituto de Investigaciones, International Center of Genetic Epistemology, fungiendo también como codirector del Institute Of Educational Science.

En 1950 publicó su teoría del conocimiento, la cual se resume en tres volúmenes.

GERARD VERGNAUD, psicólogo francés que se ha dedicado a la investigación, no desde el punto de vista matemático, sino más bien desde el punto de vista psicológico. Desde esta perspectiva el autor ha propuesto sin autocensura, una serie de cuestiones relacionadas con el análisis estructural de los problemas matemáticos, formulados incluso en un lenguaje que algunos califican de ingenuo porque no está formalizado.

Psicólogo que se ha visto influenciado por las ideas de Jean Piaget, P. Gréco, F. Bresson, así como del matemático Th. Guilbaud, y la influencia de los pedagogos Z.P. Dienes Y N. Picard; aunque en algunos casos se encuentran marcadas diferencias con estos autores.

Antes que Vergnaud, Greco, Heller y Riley introdujeron un esquema de clasificación de los problemas con enunciados de adición y sustracción simples, basados en las relaciones semánticas que subyacen a ellos. Dicha clasificación considera el procesamiento semántico como un componente crucial en el dominio de la resolución de problemas.

Por otra parte, Carpenter y Mosser realizaron un estudio longitudinal sobre el desarrollo de los procedimientos usados por los niños para resolver diferentes tipos de problemas aditivos durante los primeros años de escolaridad formal, demostrando que la estructura semántica de los problemas de adición, influencian fuertemente los procedimientos de resolución que operan en un nivel de uso de material concreto.

Básandose en investigaciones como las que se mencionaron, Escarabajal y Vergnaud, establecen que las respuestas incorrectas ante problemas aritméticos elementales, pueden sugerir que el problema resuelto es, de hecho, un problema diferente, es decir, que el niño sustituye el problema dado por otro que él ya sabe como resolverlo. Pareciera como si el fracaso se localizara más en el nivel interpretativo del problema que en el procedimiento gráfico de resolución.

En 1974, Vergnaud y Durand realizan una investigación con el propósito de demostrar que hay distintos niveles de complejidad en los "problemas de estructura aditiva" y a través del análisis sintáctico y semántico de los mismos, se muestran marcadas diferencias en la estructuración de los problemas de suma y resta, haciendo uso del método experimental, el cual se caracteriza por la objetividad en el análisis de los resultados.

1.1 La relación entre Piaget y Vergnaud.

Piaget, Vergnaud y otros, realizaron investigaciones sobre los siguientes puntos: ¿Cómo se desarrollan los conocimientos matemáticos en el niño y en el adolescente?; ¿Cuáles son las condiciones didácticas y psicosociales que es necesario reunir para asegurar la transmisión y la apropiación del saber por el que aprende?

Jean Piaget, buscó caracterizar el desarrollo de instrumentos generales del pensamiento, lo que le parecía ralativamente independiente de los conocimientos escolares. Se interesó más en las estructuras que podían presentarse en una etapa dada, que en la evolución adaptativa de los conocimientos en una situación, o en un conjunto de situaciones, en donde estas son funcionales. Separó el conocimiento matemático y el conocimiento de la realidad física refiriéndose continuamente a la abstracción simple y a la abstracción reflexiva. La primera referente a las propiedades de los objetos y siendo por ello constitutiva de la física, la segunda referente a la acción del sujeto sobre los objetos, siendo específicamente matemática. Privilegió las operaciones y las estructuras lógicas y contribuyó así a minimizar los contenidos del conocimiento físico y o matemático.

Este enfoque de Piaget, le parece a Vergnaud el más fecundo, ya que la psicología genética enseña, que los conocimientos se desarrollan lentamente; y esto es verdad, tanto para los instrumentos lógicos del pensamiento como para los contenidos del conocimiento, pero de esto le surgen a Vergnaud dos preocupaciones: La Interconexión entre los contenidos matemáticos y la Evolución Psicogenética, las que le condujeron a definir la noción de campo conceptual, (espacio de problemas o situaciones problema, cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión), dos ejemplos de campos conceptuales son las "Estructuras aditivas" y las "Estructuras multiplicativas".

Vergnaud establece una relación con las aportaciones de Piaget, acerca de los períodos por los que pasan los niños. En primer lugar establece la relación de homomorfismo desde el período Sensorio-motor, en el que, según Piaget, al terminar el primer año de vida del niño, éste ha cambiado su concepción del mundo y reconoce la permanencia de los objetos, cuando éstos se encuentran dentro de su propia percepción. En el período Preoperacional, en el que la noción de homomorfismo se aplica primero a la función que hace pasar de la realidad a la representación, el niño descubre que algunas cosas pueden tomar el lugar de otras (función simbólica). Esto no significa que la representación refleje toda la realidad, ni que toda la representación sea necesariamente homomorfa a la realidad, pero no se comprendería el papel de la representación, si no se diera en ella un reflejo de la realidad, un instrumento de simulación de ésta y, en consecuencia un medio para preveer efectos reales y calcular las acciones que se van a realizar para provocarlas o evitarlas. Esto se ve en el período de las Operaciones concretas, que son aquellas operaciones lógicas, que se refieren a las acciones que el niño realiza con los objetos concretos, a través de las cuales, coordina las relaciones entre ellas. Las operaciones más importantes son, las de Clasificación, Seriación y la Conservación de número.

La noción de Conservación de número es la síntesis de las nociones de Seriación, (en donde se establecen dos propiedades fundamentales la transitividad y la reversibilidad) y Clasificación, (constituye una serie de relaciones mentales, tales como, establecer relaciones de semejanzas y diferencias de los objetos; la pertenencia y la inclusión).

Es con estas representaciones simultáneamente que el niño razona pasando de un plano a otro en función de las necesidades y las relaciones con que tiene que tratar.

Vergnaud propone que pensar consiste, no sólo, en pasar de una situación real a la representación, sino, en pasar de una representación a otra y regresar.

También propone la invariancia del objeto, a través de la cual establece una relación directa con lo que Piaget llama el objeto permanente, que es la capacidad operatoria del niño para buscar un objeto desaparecido, capacidad que se apoya en la certeza que entonces tiene el niño de la permanencia de ese objeto, de su unicidad.

Es también a esta edad cuando se ensancha la vida simbólica del niño, el rápido desarrollo del lenguaje (significado-significante) interviniendo entonces otras actividades como la imitación y la evocación de objetos ausentes. Así también en el período de las operaciones concretas, los niños establecen numerosas invariantes relacionales que les permiten organizar el mundo en términos de objetos, clases y relaciones, que se dan dentro de la conservación de la cantidad como invariante cuantitativo, siendo esto a lo que Piaget llama noción de cantidad, elaborándose primero, con cantidades discretas, después con cantidades continuas, planteándose problemas análogos con respecto a las longitudes, pesos y volúmenes.

En un segundo momento se establece la noción de invariante operatorio, en la cual, independientemente de la transformación que se aplique a cualquier noción, ésta aparecerá como invariante. Por ejem. la cantidad de objetos no se modifica, independientemente de la disposición espacial.

Toda la historia de la ciencia está configurada de descubrimientos, de nuevas transformaciones y nuevas invariantes, puede decirse que la noción de invariante es el núcleo más sólido que puede encontrarse en el análisis de la construcción de conceptos. Sin duda, el gran mérito de estos investigadores consiste en haber mostrado este papel en la génesis de la inteligencia en el ser humano.

1.2 Aprendizaje, según Piaget.

De acuerdo con la teoría psicogenética del desarrollo puede haber dos clases de aprendizaje. El aprendizaje simple o de contenidos y el aprendizaje amplio, que se refiere a la formación de estructuras del conocimiento. El aprendizaje amplio comprende al aprendizaje simple y se llega a confundir con el desarrollo.

El sujeto asimila una gran cantidad de contenidos en forma de objetos, de operaciones o de relaciones, el nivel de asimilación de un sujeto depende de sus esquemas de asimilación, es decir, de sus estructuras cognoscitivas. Si éstas son muy simples, no podrá asimilar más que contenidos simples; pero si el sujeto actúa sobre esos contenidos y los transforma, si logra formar sus estructuras tratando de comprender logrando mejores razonamientos, entonces amplía sus estructuras y asimila más aspectos de la realidad. A esa ampliación Piaget le llama acomodación. Así pues, al igual que el desarrollo, el aprendizaje se logra a través del doble sistema de asimilación y acomodación.

De acuerdo con lo anterior, el verdadero aprendizaje supone una comprensión (cada vez más amplia) de los objetos que se asimilan, de su significado, de sus relaciones, de su aplicación, de su utilización.

Esto quiere decir que "...tanto las nociones como las operaciones forman parte de totalidades significativas que se adquieren a través de procesos evolutivos, que en el aprendizaje el actor principal es el sujeto mismo que actúa sobre la realidad y la hace suya en la medida que la comprende ".[1]

Así se tiene que el conocimiento y la inteligencia se van construyendo mediante las acciones que el sujeto realiza con los objetos y la relación que establece entre los hechos que observa y su propia reflexión ante ellos. La construcción del conocimiento requiere de un proceso de aprendizaje que será variable según el nivel de desarrollo cognoscitivo del sujeto.

Desde la perspectiva Piagetiana se puede hablar de tres tipos de conocimientos, el físico, el lógico matemático y el social, los tres íntimamente ligados.

En el conocimiento del mundo físico, los objetos mismos nos proporcionan la información que nos permite llegar a conocerlos, de manera que, a partir de las acciones que el niño ejerce sobre los objetos, poco a poco va extrayendo conclusiones acerca de cómo son y para qué sirven.

El conocimiento lógico - matemático, requiere para su construcción de experiencias con los objetos físicos, pero surge ante todo de la abstracción reflexiva que el sujeto efectúa al establecer relaciones entre los diversos hechos que observa.

Construye un pensamiento lógico que no se deriva de los objetos mismos, sino, de una manipulación y de la estructuración interna de las acciones que ha realizado.

(1) Reimpreso con permiso del editor de The Journal or Research in Science Teaching (Diario de Investigación en la Enseñanza de las Ciencias), Vol. 2, No. 3, 1964, pp. 176-186.

El conocimiento social, es aquél que se obtiene por transmisión social, sólo se puede obtener por medios externos. Por ejemplo, el manejo de los signos matemáticos convencionales que se usan para representar las operaciones aritméticas de suma (+), resta (-), etc. Sin embargo, si se permite que el niño intente por sí mismo representar gráficamente las acciones que implican tales operaciones, se puede observar un largo proceso en el que va construyendo formas cada vez más apropiadas y eso le da la posibilidad de comprender realmente la razón y utilidad de algunos símbolos convencionales.

Es así como el niño incluye diferentes conceptos a su campo cognoscitivo, gracias a sus propias acciones y actividad intelectual, lo que refleja que el conocimiento social viene, no solo a completar, sino, a desarrollar su estructura lógica de pensamiento.

1.3. Las aportaciones teóricas de Vergnaud en la enseñanza de las Matemáticas

Vergnaud realiza una de las aportaciones más importantes en el campo de la Matemática, ya que, muestra una concepción diferente de ella, concibiéndola como la "Ciencia de las Relaciones", y no únicanente como la "Ciencia de los Números".

Su tarea principal está dirigida a investigar, cómo resuelven los niños, los "problemas de estructura aditiva y multiplicativa". Propone que para analizar cómo se resuelven estos problemas, es necesario comprender el funcionamiento del "Cálculo relacional", basado más en la comprensión de las relaciones que se dan al interior de los problemas, que en lo cuantificable de los datos.

Para este análisis él propone los siguientes conceptos:

- Homomorfismo;
- Noción de relación;
- Cálculo relacional;

  - Relaciones binarias, ternarias, cuaternarias (Las cuales no se detallarán en este trabajo, ya que, no forman parte de los "problemas de estructura aditiva"

- Transformación;
- Reglas de acción;
- Invariante operatorio;

Estos conceptos serán explicados y ampliados en los siguientes capítulos, aclarando que, ninguno de éstos, es más o menos importante para el autor.

CAPITULO 2

NOCIONES MATEMATICAS INTRODUCIDAS POR VERGNAUD EN LA RESOLUCION DE "PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA".

Establece la noción de homomorfismo (misma forma) que se aplica a la función que hace pasar de la realidad a la representación, y que puede ser operatoria, solamente si refleja la realidad en forma pertinente y homomorfa.

Esto no significa que la representación refleja toda la realidad, ni que toda la representación sea necesariamente homomorfa a la realidad.

También se puede decir que el pensamiento consta a la vez, de operaciones conceptuales y preconceptuales sobre los significados (conceptos como silla, número, etc.), y de operaciones simbólicas sobre los significantes (representación de los conceptos por ej.  , 8; 6, etc.) los cuales forman varios sistemas simbólicos distintos que tienen vínculos entre ellos y el significado.

Considera que los problemas de estructura aditiva son un ejemplo del funcionamiento simultáneo de distintos niveles de la representación, ya que se vinculan con la relación de los distintos procesos cognoscitivos implicados en ellos, así como en las relaciones que establecen los sujetos entre la realidad y la representación. Esto le permite al sujeto construir su propio conocimiento a través de diferentes invariantes operatorios (noción que alcanza un estado de equilibrio tal, que pese a las transformaciones que sufra, permanecerá sin alterarse), que le permitirán organizar su mundo en términos de objetos, clases y relaciones.

Los problemas de estructura aditiva, tienen propiedades cuantitativas o cualitativas y mantienen relaciones (binarias, ternarias, etc.) con otros objetos. Al mismo tiempo que sufren transformaciones debido a procesos naturales u operaciones del sujeto, por lo que el análisis de estos problemas lleva a pensar que las dificultades para resolverlos pueden cambiar a pesar de utilizar la misma operación aritmética, ya que dicha operación no se utiliza sólo en los problemas de "quitar o agregar".

De acuerdo con Vergnaud, el conocimiento de la regla de la adición (la suma, su relación con el algoritmo correspondiente y su representación) trabaja en cuatro planos:

El de los objetos; el de los conjuntos; el de los números cardinales y el de las representaciones escritas de los números cardinales.

A partir de diversos objetos de la realidad sobre los que se efectúan determinadas acciones, se construyen conceptos con los llamados invariantes operatorios, los cuales permiten conocer las características de los objetos, agruparlos en conjuntos y relacionarlos con los procedimientos que se pueden llevar a cabo para producir un efecto. Lo que lleva a realizar una representación entre significado (números cardinales) y significante (representación escrita de los números cardinales) ya que, estos dos últimos planos no tienen otra existencia aparente que la de los signos que los representan. El significado es el concepto y el significante es la representación del concepto para la comprensión de este.

Los invariantes operatorios permiten representar mentalmente la realidad, efectuar un cálculo y desarrollar posteriormente reglas de acción, (acciones observables del sujeto, específicamente las materiales), lo cual no implica que un cálculo relacional sea siempre exitoso. Estos invariantes operatorios son formas de pensamiento que constituyen el desarrollo cognoscitivo, son operatorios en tanto que permiten operar mentalmente y preveer cual será el resultado de sus acciones sin necesidad de efectuarlas materialmente, se dan mediante la acción simbólica del pensamiento, logrando así representar en la mente la realidad; con ello el niño coordina las relaciones que existen entre las diversas características del objeto-problema, así como entre estas y sus propias acciones, es decir, al establecer un invariante operatorio es posible hacer previsiones de los efectos de las acciones, ya que, toda representación funcional debe responder a dos criterios: reflejar los aspectos de la realidad y prestarse a la realización de operaciones, siendo esto a lo que Vergnaud llama cálculo relacional. (Entendiéndose por relación la conexión, enlace o comparación de un elemento con otro. Ejemplo, objetos, conjuntos, cantidades, personas, etc.), mencionando dos grandes formas.

- Deducir una conducta o regla de conducta;
- Deducir nuevas relaciones.

Estas se dan a partir de ralaciones aceptadas constatadas, ya que, éstas son en ocaciones comprobaciones que se pueden hacer sobre la realidad, no siendo siempre verificables .

Las relaciones serían poca cosa, si fueran únicamente verificaciones. Cuando menos, la inteligencia quedaría muy limitada si se atuviera a verificaciones. El trabajo de inteligencia conduce de igual manera a deducciones, inferencias y construcciones, por lo que se pueden considerar dos grandes formas de deducciones:

- La primera que consiste en deducir una conducta o una regla de conducta de las relaciones verificadas aceptadas.

EJEMPLO:

Cuando un niño pequeño es capaz de aceptar que una varilla es más chica que la otra. Esta regla de conducta no es utilizada por los niños antes de la edad de 5 años 6 meses, aproximadamente porque no captan el carácter antisimétrico de las varillas.

- La segunda forma consiste en deducir nuevas relaciones a partir de las relaciones verificadas o aceptadas; para esto el niño tendría que establecer las relaciones de antisimetría, en el ejemplo anterior.

El niño como toda persona rige su conducta de acuerdo con las relaciones que aprende y con el cálculo relacional que practica.

La noción de cálculo relacional es fundamental, ya que, se aplica a toda clase de relaciones: binarias, ternarias, cuaternarias.

Vergnaud considera, los algoritmos (representaciones escritas de conceptos de manera convencional) reglas de acción, pero no todas las reglas de acción son algorítmicas. Estas reglas de acción no algorítmicas son importantes, ya que nos permite comprender lo que el niño hace para encontrar procedimientos que lo llevan a la resolución de diferentes problemas. La noción de reglas de acción es entonces más completa que la noción de algoritmo y debe dar cuenta del conjunto de conductas que se pueden observar.

2.1 Relaciones Binarias.

Los cálculos relacionales sólo son posibles, y tienen validez, cuando se apoyan en las "propiedades" de las relaciones en juego, sean, binarias o ternarias.

En las binarias, se establecen relaciones entre dos elementos y son en éstas donde las propiedades han sido bien elucidadas por los matemáticos y los lógicos.

Por cuanto a las "propiedades", Vergnaud, establece las siguientes: Simetría, Antisimetría, Transitividad, Antitransitividad, reflexividad y Antirreflexividad, Conexidad. (2)

SIMETRIA:

"Una relación binaria es simétrica si y sólo si cada vez que cumple la relación entre un elemento X y un elemento Y, se cumple necesariamente la misma relación entre el elemento Y y el elemento X"

EJEMPLO: 5 = 5 4 + 1 = 1 + 4

Luis está al lado de Juan, Juan está al lado de Luis.

ANTISIMETRIA:

"Una relación binaria es antisimétrica si y sólo si cada vez que se cumple la relación entre un elemento X y un elemento Y, ésta no se cumple entre el elemento Y y el elemento X"

EJEMPLO: Si Jorge está a la izquierda de Gerardo, Gerardo seguramente no está a la izquierda de Jorge,

(2) Vergnaud, Gerard. El niño, las matemáticas y la realidad. Tr. Luis Ortega. México, Trillas, 1991. pp. 29 - 41.

TRANSITIVIDAD:

"Una relación binaria es transitiva si y sólo si cada vez que se cumple la relación entre un elemento X y un elemento Y, por una parte, entre el elemento Y y un elemento Z por la otra, se cumple necesariamente la misma relación entre el elemento X y el elemento Z"

EJEMPLO: Si Jorge llegó antes que Gerardo y Gerardo llegó antes que Alberto, necesariamente Jorge llegó antes que Alberto.

ANTITRANSITIVIDAD:

"Una relación binaria es antitransitiva si y sólo si cada vez que se cumple la relación entre un elemento X y un elemento Y, y entre el elemento Y y un elemento Z, no se cumple la relación entre el elemento X y el elemento Z"

EJEMPLO Si Luis está justo a la izquierda de Martha y Martha justo a la izquierda de Jorge, con seguridad Luis no está justo a la izquierda de Jorge.

REFLEXIVIDAD:

"Una relación binaria es reflexiva si y sólo si todo elemento X está necesariamente en relación consigo mismo, esta propiedad de las relaciones binarias es menos importante que las precedentes, ya que casi no se utiliza en los cálculos relacionales. Con frecuencia no es más que una verificación."

EJEMPLO: Iván es necesariamente tan grande como él mismo.

ANTIRREFLEXIVIDAD:

"Una relación binaria es antirreflexiva si y sólo si ningún elemento está en relación consigo mismo."

EJEMPLO: Con seguridad Gerardo no llegó antes que él mismo.

2.1.1. <u>Las dos categorías más importantes de las Relaciones Binarias son:</u>

1.- Las relaciones de equivalencia:

- SIMETRICAS - TRANSITIVAS - REFLEXIVAS.

2.- Las relaciones de orden estricto:

- ANTISIMETRICAS - ANTITRANSITIVAS - ANTIREFLEXIVAS.

Las "relaciones de equivalencia", permiten poner en una misma clase los elementos entre los cuales existe una relación de equivalencia y formar así clases ajenas.

La relación "Vive en la misma ciudad", es una relación simétrica transitiva y reflexiva. Permite colocar en una misma clase a las personas que viven en la misma ciudad y forman así clases ajenas, una por ciudad.

Las "relaciones de orden estricto", permiten ordenar a los elementos de tal manera que no haya dos elementos en el mismo lugar.

La relación "Nació antes" es una relación antisimétrica, antitransitiva y antireflexiva; permite en todo caso ordenar de manera estricta los niños de una misma madre.

Las "relaciones de orden amplio" se derivan de las primeras ya que, pueden ser que algunos elementos los encontremos equivalentes u ordenados, esto quiere decir que se tiene la posibilidad de tener elementos no ordenados pero equivalentes entre ellos.

EJEMPLO: "El llegó antes o al mismo tiempo que M" y "M llegó antes o al mismo tiempo que L"

CONEXIDAD:

La conexidad, permite distinguir dos tipos de órdenes:

- El orden total o lineal.
- El orden parcial o de múltiples ramas.

"Una relación binaria es conexa, si y sólo si cada vez que se consideran dos elementos distintos X y Y, se cumple necesariamente la relación entre X y Y, o bien entre Y y X."

La conexidad depende del conjunto en el cual están comprendidos los elementos.

EJEMPLO: La relación, "Nació antes" es una relación frecuentemente conexa: Si se toman los niños de una clase, por ejemplo, en general, se puede decir cuál de dos niños cualesquiera nació antes que el otro.

Una relación de equivalencia es una relación de igualdad, siendo esta, simétrica, transitiva y reflexiva. Tiene la particularidad de afirmar que lo que esta a la derecha del signo de igualdad no es otra cosa que lo que está a la izquierda.

EJEMPLO: $3 + 4 = 7$

Las propiedades de las relaciones de equivalencia son todas verdaderas y utilizables.

Por ejemplo:

Simetría $3 + 4 = 7$ $7 = 3 + 4$

Transitividad $3 + 4 = 7$ $7 = 5 + 2$ $3 + 4 = 5 + 2$

Reflexividad $7 = 7$ $3 + 4 = 3 + 4$

La relación de igualdad afirma que el valor conferido a cada uno de los miembros de la ecuación es idéntico a la derecha y a la izquierda del signo de igualdad. La relación de igualdad afirma la "invariancia" de este valor a través de diferentes operaciones simbólicas, indicadas por cualesquiera de los miembros.

2.2 Relaciones Ternarias.

Generalmente en la escuela se considera que las relaciones aditivas se basan en dos elementos (Relaciones binarias). Desde el punto de vista psicológico de Vergnaud, se trata de relaciones Ternarias cuyos elementos en juego se encadenan de diversas maneras dando origen a una gran variedad de estructuras aditivas, y en consecuencia a varios tipos de adiciones y sustracciones.

Las relaciones Ternarias son las que relacionan tres elementos, ya sean personas, números, conjuntos, etc., considerándose a éstas más complejas que las Binarias.

EJEMPLO: Claudia está entre Nayeli y Sandra; 5 es 2 unidades mayor que 3; $4 \times 3 = 6$

PRIMER MODELO:

Ley de composición binaria u operación binaria. Dos elementos están compuestos entre ellos para formar un tercer elemento. (La adición, la sustracción, la multiplicación, la división de los números, la intersección, la unión de dos conjuntos son leyes de composición binaria) teniendo como propiedades la Asociatividad;

conmutatividad; existencia de un elemento neutro; existencia de un inverso para todo elemento; distributividad de una ley de composición respecto a otra. Estas propiedades permiten cálculos relaciònales de una gran riqueza propios de las relaciones ternarias.

La noción de relación ternaria es más amplia que la de composición binaria, ya que toda ley de composición binaria es una relación Ternaria, puesto que enuncia una relación entre tres elementos, pero no toda relación Ternaria puede ser representada por una ley Binaria.

SEGUNDO MODELO:

Elemento, relación-elemento, elemento

En la representación de una relación Ternaria dos elementos están ligados con una relación, considerada como un tercer elemento. Esta relación - elemento opera sobre el primer elemento para darnos el segundo.

EJEMPLO: " 7 es 4 unidades mayor que 3 " que también podemos escribir: " Para pasar de 3 a 7, hay que añadir 4 "

La representación siguiente: $3 + 4 = 7$ muestra claramente que, en cuanto a la relación binaria simple:

"Siete es mayor que tres" 7 3 ó "Tres es menor que siete" 3 7

Las relaciones ternarias, en su gran mayoría están constituidas por 2 elementos y una relación-elemento. Con frecuencia los elementos son estados y la relación-elemento es una transformación.

2.2.1 Noción de Transformación.

Existen 2 tipos de relaciones, las "estáticas" (relacionan elementos simultáneos de la realidad) se refieren a cantidades separadas que se relacionan mediante una razón aritmética para formar otras cantidades, ya sean estas más grandes o más chicas, por ejemplo, Pedro tiene 15 canicas y Mario tiene 8 canicas, "15 y 8" son dos elementos simultáneos de la realidad que se pueden relacionar mediante la suma para formar otro elemento "23". Las "dinámicas" (que relacionan elementos no simultáneos de la realidad y que además implican temporalidad). Dfeterminadas cantidades a las que Vergnaud denomina estados se modifican agregando o quitando, es decir, realizando transformaciones sobre ellos para producir nuevos estados, por ejemplo, Jorge tenía 20 chocolates (estado) y se comió 5 (transformación) Ahora tiene 15 chocolates (estado). Los elementos que intervienen en la relación ternaria estado - transformación - estado, no son de la misma naturaleza, porque dos de los términos son estados y el otro término es la transformación (Este tipo de modelos estado - transformación - estado, permiten un análisis más fino de las relaciones y de los problemas).

EJEMPLO: "Seis personas suben a un autobús. Había cuatro personas."

Estado:	Las transformaciones:	
Las personas presentes en el autobús	Las personas que suben o bajan.	
E.I.	T.	E.F.
4	+6	= 10

"Gasté N$ 25.00 en la tienda. Ahora tengo N$ 5.00 en mi bolsa ¿Cuánto tenía antes de ir a la tienda?"

Estado:	La transformación
Cantidad de dinero en la bolsa	La cantidad que se extrae del monedero.

E.I.	T.		E.F.
x	-25	=	5

Se distinguen tres categorías de problemas con una sola transformación.

1.- Si se conoce el estado inicial y la transformación, encontrar el estado final.

EJEMPLO: "Tenía 5 muñecas, regalé 3, ¿Cuántas tengo ahora?"

$$\underset{5}{\text{E.I.}} \xrightarrow{\text{T.}\ -3} \underset{x}{\text{E.F.}}$$

Cálculo de estado final por aplicación de transformación -3 al estado inicial 5.

2.- Si se conoce la transformación y el estado final, encontrar el estado inicial.

"Acabo de ganar N$ 10.00. Ahora tengo N$ 25.00 ¿Cuánto tenía antes de jugar?"

$$\underset{x}{\text{E.I.}} \xrightarrow{\text{T.}\ +10} \underset{25}{\text{E.F.}}$$

Cálculo de estado inicial por inversión de la transformación directa + 10 y aplicación de la transformación inversa -15 al estado final 25.

3.- Si se conocen los estados inicial y final, encontrar la transformación.

"Tenía 20 canicas, acabo de jugar un partido y ahora tengo 18. ¿Qué pasó durante el partido?"

$$\begin{array}{ccc} & \text{T.} & \\ & -2 & \\ \text{E.I.} & & \text{E.F.} \\ 20 & \longrightarrow & 18 \end{array}$$

Cálculo de la transformación por la diferencia entre el estado inicial 20 y el estado final 18

A pesar de que los tres problemas se resuelven con la misma operación aritmética (Sustracción) la complejidad no es la misma, según el autor, se cree que existen alrededor de dos años de diferencia entre la solución del primer problema y la solución del segundo.

CAPITULO 3

EL NUMERO Y LA MEDIDA

La noción de número es la más importante de la matemática en la enseñanza en la escuela primaria, no es elemental, como se supone, ésta se apoya en otras nociones, tales como la función de correspondencia biunívoca, relación de equivalencia y relación de orden. En el niño la noción de orden es disociable de la noción de medida. La noción de número da la posibilidad de realizar sumas.

Cuando el niño enuncia la serie numérica, ésta puede situarse en dos planos diferentes. Primero a nivel de simple recitación y segundo al establecer una correspondencia entre el conjunto de los objetos, por una parte, y la serie numérica hablada por la otra. en un primer inicio el niño sólo puede contar pequeñas colecciones, al mismo tiempo va desarrollando la actividad de conteo.

Por ello es que las relaciones numéricas no pueden ser comprendidas por los niños si no se apoyan fundamentalmente en el análisis de las relaciones entre conjuntos, ya sea que, se trate de las relaciones binarias de orden y de equivalencia, o de la relación ternaria de unión ajena, que da sentido a la suma de números.

Hacer de lado la idea de correspondencia, o de homomorfismo entre los objetos y los conjuntos, por un lado, y los números por el otro, sería condenarse a no comprender el proceso que implica la adquisición de la noción de número en el niño.

3.1 Correspondencia Biunívoca.

El número 4 es una propiedad común a todos los conjuntos de objetos que tienen cuatro elementos; esta propiedad se designa con el nombre de "cardinalidad"; esta propiedad común a todos los conjuntos de cuatro elementos se basa en la posibilidad de hacer corresponder término a término, dos conjuntos cualesquiera de cuatro elementos. Esta correspondencia término a término, entre dos conjuntos que tienen el mismo número de elementos, se califica como "Biunívoca".

Jean Piaget ha mostrado la existencia de dificultades en los niños hasta los 6 ó 7 años, Ejemplo: A niños de 5 ó 6 años se les presentan algunas copas dispuestas en línea, frente al mismo número de huevos dispuestos también en línea, se acomodan de manera que no haya dificultad para establecer visualmente la correspondencia término a término de las dos colecciones y se le pide al niño que diga si hay más copas que huevos, los mismos o menos. Los niños de esta edad responden que "hay los mismos" o que es "igual"; sin quitar ni poner ningún objeto, se separan entre sí los objetos de una de las líneas, las copas por ejemplo, de manera que la correspondencia término a término sea difícil de establecer visualmente, esta transformación es hecha ante los ojos del niño y se plantea la misma pregunta que antes: Hay más copas que huevos, las mismas o menos?. Hasta los 5 años, 6 ó 7 el niño responde que "hay más" copas porque es más larga o van más allá o bien que "hay más huevos porque están más apretados".

Esto demuestra que la correspondencia término a término entre dos conjuntos presenta dificultades hasta etapas muy avanzadas en el desarrollo de los niños, lo que impide considerar que el tamaño de un conjunto sea independiente, para el niño, de la configuración espacial adoptada por ese conjunto.

Lo que es cierto para dos conjuntos, dispuestos en dos líneas paralelas es cierto para los conjuntos dispuestos de cualquier manera o que se encuentran dispersos. Esto supone una regla sistemática no importa la disposición espacial de los elementos, la cardinalidad de los conjuntos es la misma, la equivalencia cuantitativa funda la noción de cardinalidad, no es en el niño un dato bien elaborado, sobre el cual se podría apoyar sin problema el pedagogo, sino que, se construye en función del desarrollo de actividad del niño. "... la noción de número es algo fundamental, a tal punto que no tiene mayor sentido decir que el niño ha adquirido dicha noción en tanto no es evidente para él que la cantidad de objetos de un conjunto es independiente de su configuración espacial." (3)

3.2 Relaciones de orden y de equivalencia.

Las relaciones entre números se apoyan en las relaciones entre objetos. "La actividad de comparación entre objetos está evidentemente en el origen del desarrollo de las nociones de equivalencia y orden, que son necesarias para el desarrollo de la noción de número". (4)

(3) Clanet, C., Laterrasse,C. y Vergnaud, G. Dossier Wallon - Piaget. Trad. Matilde Horne. Barcelona, Gedisa, 1984. pp.43.

(4) Vergnaud, Gerard Op. cit. 1991. pp. 104.

En esta actividad de comparación, es la noción de orden la que parece fundamental y la noción de equivalencia sólo resulta de la imposibilidad en la que se encuentra a veces el individuo para decidir o discernir. Ya que el problema de establecer las relaciones de equivalencia es muy diferente según se trate de conjuntos discretos o continuos. Ejemplo: Decidir si dos niños pertenecen a un mismo equipo o a equipos diferentes, es más fácil que decidir si tienen o no la misma estatura.

"Podemos distinguir entonces dos dominios de aplicación de las relaciones de equivalencia, según la dimensión de interés forme un conjunto discreto o continuo de valores; y de la misma manera podemos distinguir dos dominios de aplicación de las relaciones de orden". (5)

Ejemplos de: De relaciones de equivalencia en el caso discreto.

"Nació el mismo mes que....."

De relaciones de equivalencia en el caso continuo.

"Tiene la misma estatura que..."

De relaciones de orden en el caso discreto.

"Tiene más hermanos y hermanas que....."

De relaciones de orden en el caso continuo.

"Tiene más estatura, que ....."

Las relaciones de equivalencia en el caso discreto pueden ser comprendidas sin ambigüedad por los niños a temprana edad (4 años), mientras que las relaciones de equivalencia en el caso continuo son comprendidas de dos maneras diferentes.

(5) Idem. 1991. pp. 105.

Para el niño de 4 años se trata de situar su propia estatura en proximidad (sentido amplio) a la estatura de el otro, o en el niño de 8 años afirma que una operación sistemática no daría ninguna desigualdad.

La noción de orden se desarrolla en forma precoz, paralelamente a las actividades de comparación y sin que se pueda decir, en el estado actual del conocimiento, que el caso discreto es privilegiado sobre el caso continuo

La noción del número se apoya necesariamente en las propiedades de las relaciones de equivalencia y de orden con anterioridad adquiridas por el niño. El hecho de que los conjuntos de los cardinales no incluya la existencia de algún valor intermedio entre 2 y 3, 3 y 4, 4 y 5, etc. ilustra el carácter discreto de los cardinales y por consiguiente son los primeros números en conceptualizarse.

Comparar objetos para ordenarlos o establecer su equivalencia, no implica esta nueva categoría de símbolos que son los números. Sin embargo la utilización de los símbolos numéricos y la actividad de conteo nos evitan establecer correspondencias donde es difícil o imposible realizarlas, por ejemplo: comparar los rebaños de animales sería una labor muy incómoda si uno no supiera contar.

Es por ello que se debe al hecho de que la operación de medida de los conjuntos, que consiste en encontrar su cardinalidad, conserva la relación de orden. Si el conjunto A es mayor que el conjunto B, entonces el cardinal de A es mayor que el cardinal de B.

Reciprocamente si el cardinal de A es mayor que el cardinal de B entonces el conjunto A es mayor que el conjunto B.

"Se dice incluso que los conjuntos y sus medidas son homomorfos para la relación de orden. Así, los números, como cardinales de conjuntos, constituyen de hecho un sistema de medida que facilita la comparación entre los conjuntos" (6)

Es fácil afirmar que es el lugar en la serie hablada lo que determina al mayor y al menor, esta regla se apoya en todas las actividades de comparación paralelas entre conjuntos por un lado, y entre números, por el otro; lo que permite al niño asegurarse del buen funcionamiento de la regla.

No obstante a partir del momento en que los números pasan de 10 y se hace uso de la decena, también se hace uso de otras reglas dentro del mismo sistema de numeración.

Lo que da a los números su característica esencial es la posibilidad que tenemos de sumarlos y dar sentido a esa adición. Ejemplo, un niño de 6 años cuenta a los niños sentados alrededor de una mesa; cuenta primero 4 niñas, después 3 niños y finalmente, para encontrar el número total, recuenta el todo; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. No estamos seguros de que el niño haya entendido que 4 + 3 = 7.

(6) Idem. 1991. pp. 111.

De acuerdo con lo escrito anteriormente, se puede decir de hecho que utilizó únicamente el primer medio a su disposición, sin hacer uso de la suma de los dos números. Es sólo después de haber hecho otras verificaciones, por ejemplo, contar con los dedos el número de niñas y contar enseguida 5, 6, 7, para los niños, que el niño dará a las sumas de 4 y 3 su verdadera significación.

Los primeros números comprendidos por los niños son, en efecto, los números naturales (1, 2, 3, 4, etc.) que no son otra cosa que la medida de los conjuntos de objetos aislables.

CAPITULO 4

PROBLEMAS DE "ESTRUCTURA ADITIVA"

De acuerdo con Vergnaud, se llaman "problemas de estructura aditiva" a todos aquellos cuya resolución requiere únicamente de la suma o de la resta.

Tradicionalmente se piensa que las operaciones $5 + 6 = 11$ ó $9 - 4 = 5$ se pueden traducir en las expresiones $a + b = c$ ó $a - b = c$ respectivamente, tanto para representarlas, como para resolver cualquier problema de este tipo, sin embargo, existe gran variedad de problemas aditivos diferentes entre sí, en función de las relaciones implicadas en ellos.

Desde el punto de vista matemático, problemas de naturaleza distinta pueden ser representados por una misma ecuación, o bien, un mismo problema puede ser representado de varias formas.

4.1 Categorías.

Gerard Vergnaud propone seis grandes categorías de problemas de estructura aditiva:

- 1ra. Categoría: "Dos medidas se componen para dar lugar a otra medida";
- 2da. Categoría: "Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a otra medida";
- 3ra. Categoría: "Una relación une dos medidas";
- 4ta. Categoría: "Dos transformaciones se componen para dar lugar a otra transformación";
- 5ta. Categoría: "Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a otro estado relativo";
- 6ta. Categoría: "Dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a otro estado relativo";

las cuales explica a través de los términos "medida", "transformación" y de "relación de combinación" que se pueden establecer entre ellos; la complejidad de los problemas de tipo aditivo, varía en función, no sólo de las diferentes categorías de relaciones numéricas, sino también en función de las diferentes clases de problemas que se pueden plantear para cada una de las categorías, atendiendo al lugar en el que se localiza la incógnita.

Para explicar esto, Vergnaud establece diversos símbolos, los cuales son utilizados en los diferentes esquemas y ecuaciones:

	SIMBOLO:	REPRESENTA:
$\boxed{\#}$ $\boxed{\quad \# \quad}$	Cuadro o rectángulo	Un número natural. (medida)
$\pm \#$	Círculo	Un número relativo. (transformación)
⏞ }	LLave horizontal o vertical	La composición de elementos de la misma naturaleza.
→ ↑	Flecha horizontal o vertical	Una transformación o una relación, es decir, la composición de elementos de diferente naturaleza. (relación de combinación)

SIGNOS:	REPRESENTA:
Número sin signo (n)	Un número natural.
(+n) o (-n)	Un número relativo.
Un signo (+) en trazo delgado:	La adición de dos números naturales.
Un signo (**+**) en trazo mediano:	La adición de un número natural y un número relativo.
Un signo (**+**) en trazo grueso:	La adición de dos números relativos.

Expuesto lo anterior, podemos proseguir con el análisis de los problemas que surgen en cada una de las categorías de relaciones aditivas.

<u>1a. CATEGORIA: "DOS MEDIDAS SE COMPONEN PARA DAR LUGAR A OTRA MEDIDA"</u>

Ejemplo: Lupe tiene 5 bolitas en la mano derecha y 3 en la mano izquierda. ¿Cuántas bolitas tiene en total?

Esquema:

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{5 \text{ bolitas}}\\[2em] \boxed{3 \text{ bolitas}}\end{array}\right\} \boxed{8 \text{ bolitas}}$$

$5 + 3 = 8$ 5 y 3 son medidas y se componen para dar otra medida: 8

Ecuación correspondiente: $5 + 3 = x$, (+) Es la ley de composición que corresponde a la adición de dos medidas, es decir, de dos números naturales.

Esta categoría sólo origina dos grandes clases de problemas: 1ra. clase, siendo conocidas las dos medidas elementales encontrar la compuesta; y, 2da.clase, siendo conocida la medida compuesta y una de las elementales, encontrar la otra.

Se pueden representar de la siguiente manera:

1ra. clase: $\left.\begin{array}{c}\boxed{a}\\ \boxed{b}\end{array}\right\} \quad \boxed{x}$

2da. clase: $\left.\begin{array}{c}\boxed{a}\\ \boxed{x}\end{array}\right\} \quad \boxed{c}$

2a.- CATEGORIA: "UNA TRANSFORMACION OPERA SOBRE UNA MEDIDA PARA DAR LUGAR A OTRA MEDIDA"

A partir de la 2a. categoría y hasta la 6ta., se usarán las siguientes siglas, con este significado:

E.I.	Estado Inicial.
T.	Transformación.
E.F.	Estado Final.
E.R.	Estado relativo.

Se considera importante aclarar que también se introduce el término "números relativos", ya que Vergnaud lo utiliza para referirse a los números enteros.

Ejemplo: José tenía 17 canicas antes de empezar a jugar, ganó 14 canicas, y ahora tiene 31.

Esquema: $\underset{E.I.}{\boxed{a}} \xrightarrow{\overset{T.}{\pm b}} \underset{E.F.}{\boxed{c}} \qquad \underset{E.I.}{17} \xrightarrow{\overset{T.}{+14}} \underset{E.F.}{31}$

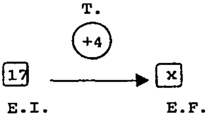
17 y 31 son números naturales; (+14) es un número relativo.

Ecuación correspondiente: 17 $+$ (+14) = 31. Es la ley de composición que corresponde a la aplicación de una transformación sobre una medida, es decir, la adición de un número natural 17 y un número relativo (+14).

En ésta categoría, distinguiremos seis grandes clases de problemas; según que la transformación b, sea positiva o negativa, según que la incógnita se refiere al estado final c (conociendo a y b), a la transformación b (conociendo a y c), o al estado inicial a (conociendo b y c)

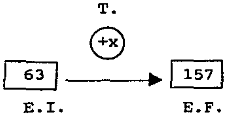
Ejemplo 1:

"Había 17 personas en el autobús, suben 4, ¿Cuántas hay ahora?"



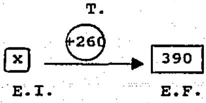
Ejemplo 2:

"Un poblano sale de vacaciones en su automóvil, a la salida de Puebla su contador kilométrico marca 63 km. a su regreso marca 157 km. ¿Cuántos Km. viajó en su automóvil?"



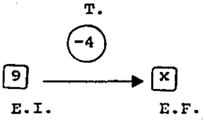
Ejemplo 3:

"Enrique acaba de encontrarse 260 nuevos pesos y los pone en su cartera, en total ahora tiene 390 nuevos pesos. ¿Cuánto tenía en su cartera antes de encontrarse el dinero?"



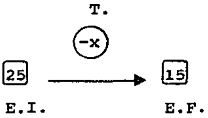
Ejemplo 4:

"Juan tenía 9 caramelos, le regaló 4 a su hermana. ¿Cuántos le quedaron?"



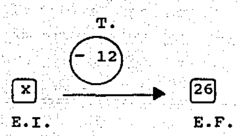
Ejemplo 5:

"Diego acaba de jugar a las canicas, tenía 25 canicas antes de jugar, ahora tiene 15. ¿Cuántas canicas perdió?"



Ejemplo 6:

"Daniel compró una pelota que le costó 12 nuevos pesos, le sobraron 26 nuevos pesos. ¿Cuánto dinero tenía antes de comprar la pelota?

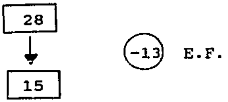


Además de las clases de problemas expuestos anteriormente, existen otras diferencias como son: dificultad más o menos grande del cálculo necesario, orden y presentación de la información, tipo de contenido y de relaciones consideradas.

3a.- CATEGORIA: "UNA RELACION UNE DOS MEDIDAS"

Ejemplo: Javier tiene 28 canicas, Omar tiene 13 menos que Javier. ¿Cuántas canicas tiene Omar?

Esquema:



Ecuación correspondiente: $28 \mathbf{+} (-13) = 15$

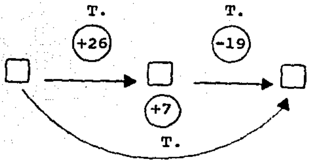
Notemos que este ejemplo corresponde a una relación estática, mientras que los anteriores corresponden a transformaciones. El signo **+** indica la adición de un número natural (28) y otro relativo que sería (-13), desde luego esto no significa que se trate de hacer una operación con números negativos, pues para obtener el resultado sólo hay que restar 28 - 13 = 15 (ó nuevamente buscar el complemento aditivo 13 + 15 = 28)

En la tercera categoría de relaciones aditivas, existe una relación estática entre un estado inicial y otro final, por lo que la dificultad siempre consiste en establecer esta relación.

4a.- CATEGORIA: "DOS TRANSFORMACIONES SE COMPONEN PARA DAR LUGAR A OTRA TRANSFORMACION"

Ejemplo: Pablo ganó 26 canicas ayer, y hoy perdió 19. En total ganó 7.

Esquema:



(+26), (-19), (+7), son números relativos.

Ecuación correspondiente: (+26) **+** (-19) = (+7)

+ Es la ley de composición que corresponde a la adición de dos transformaciones, es decir de dos números relativos.

En esta categoría existen al igual que para la primera categoría de relaciones aditivas, dos grandes clases de problemas; siendo conocidas las dos transformaciones elementales, encontrar la compuesta; siendo conocida la transformación compuesta y una de las elementales, encontrar la otra.

5a.- CATEGORIA: "UNA TRANSFORMACION OPERA SOBRE UN ESTADO RELATIVO (UNA RELACION) PARA DAR LUGAR A OTRO ESTADO RELATIVO"

Ejemplo: Moisés le debía 26 canicas a Pedro, le devuelve 14. Sólo le debe 12.

Esquema: $$\text{E.R. } (-26) \xrightarrow{\text{T. } (+14)} (-12) \text{ E.R.}$$

Ecuación correspondiente: $(-26) + (+14) = (-12)$

$+$ Es aquí la ley de composición que corresponde a la operación de una transformación sobre un estado relativo. Rigurosamente hablando, es diferente de la adición de dos transformaciones que acabamos de ver en la cuarta categoría; pero como tanto un estado relativo, como una transformación son representados por números relativos, esta ley de composición corresponde a la adición de dos números relativos. No hay pues razón para utilizar un símbolo diferente.

Para la quinta categoría, en la cual una transformación opera sobre un estado relativo, volvemos a encontrar las clases estudiadas a propósito de la segunda categoría, a saber: Búsqueda del estado final, de la transformación, del estado inicial. De cada una de estas subclases todavía se derivan otras subclases debido a las diversas posibilidades que existen para el signo, y el valor absoluto.

6a.- CATEGORIA: "DOS ESTADOS RELATIVOS (RELACIONES) SE COMPONEN PARA DAR LUGAR A OTRO ESTADO RELATIVO"

Ejemplo: "Carmela le debe 16 caramelos a Rocío y 14 a Luisa. Debe 30 caramelos en total."

Esquema: $$\left.\begin{array}{r} \text{E.R. } -16 \\ \text{E.R. } -14 \end{array}\right\} -30 \text{ E.R.}$$

Ecuación correspondiente: $(-16) + (-14) = (-30)$

Vergnaud señala la similitud de esta categoría con la 4a. ya mencionada. La diferencia entre ambas que justifica la existencia de esta 6a. categoría, es que en la 4a. se trata de transformaciones y aquí de relaciones, es decir, de estados que se componen entre sí, entre los cuales no existe ningún orden temporal.

En esta clase encontramos numerosas subclases y las clases ya estudiadas a propósito de la primera categoría.

En mi opinión, el análisis realizado por Vergnaud en relación con los "problemas de estructura aditiva" permite distinguir que hay una gran variedad de problemas con distinto nivel de dificultad, que se resuelven con una misma operación. Este es un aspecto muy importante que la Pedagogía debe tomar en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje porque en la medida en que los alumnos resuelvan más problemas que exigen razonamientos cada vez más profundos, se logra un mayor dominio de las operaciones que se aplican y de esta manera se avanza hacia los procedimientos formales. Sin embargo conviene aclarar que las categorías de problemas que establece Vergnaud de ninguna manera constituyen una propuesta didáctica para llevarse a cabo en un salón de clases. Para ello es necesario tomar en cuenta una serie de variables didácticas que no corresponden a los propósitos del trabajo realizado por Vergnaud, por ejemplo, el contexto en el que se plantean los problemas, el lenguaje que se utiliza, el rango de las cantidades.

4.2 Algoritmos.

"Algoritmo" (método de cálculo) palabra árabe que proviene de la deformación del nombre del difusor de la numeración Indú, llamado Al - Khuwarizmi.

Son procedimientos convencionales que permiten resolver determinadas operaciones; son representaciones escritas de conceptos, y por tanto, el aprendizaje y la utilización adecuada de éstos, requiere que el sujeto comprenda las relaciones que hay entre los conceptos que representan y las acciones involucradas en la resolución de un problema específico. Estos algoritmos deben obedecer a determinadas reglas que a su vez derivan de las que rigen el Sistema Decimal de Numeración.

En el caso del algoritmo de la suma se encuentra presente la regla de la adición. La comprensión de esta regla requiere que el menor establezca los homomorfismos entre la representación y el concepto, entre la representación y las reglas de acción, lo cual implica el funcionamiento de distintos niveles de pensamiento.

Cuando se pretende abordar el aprendizaje de la regla de la adición (suma y su representación) Vergnaud sugiere, como se mencionó anteriormente, que los materiales y la didáctica que se utilicen, le permitan al alumno trabajar en cuatro niveles de pensamiento distinto. (Objetos, conjuntos, cardinales y la representación escrita de los cardinales).

"En el ejemplo 38 + 27 = 65, estamos enunciando simbólicamente que tenemos un conjunto de 38, y otro de 27 y de la unión de su cardinalidad, obtenemos 65. Cuando decimos 8 más 7, 15, ponemos el 5 y "llevamos" uno, no podremos saber qué estamos haciendo realmente si desconocemos que ello equivale a:

- reunir un conjunto A en 3 grupos de 10 cada uno, más 8 elementos sueltos;
- reunir el conjunto B en dos grupos de 10 más 7 elementos sueltos;
- reunir los elementos sueltos de cada conjunto, con lo que obtenemos un nuevo conjunto de 10, que unimos a los otros conjuntos de 10 que ya teníamos;
- anotar el 5 correspondiente a los elementos que no se pueden agrupar;
- anotar el 6 que representa el total de los conjuntos de 10 que hemos formado, quedando como resultado 65, que significa 60 elementos (agrupados en 6 conjuntos de 10) más 5 elementos sueltos" (7)

Esto demuestra lo inapropiado que resulta enseñar a los niños primero los algoritmos y después su aplicación en problemas, pues así descontextuados, el niño difícilmente podrá encontrar la relación que estas representaciones y procedimientos tienen con los conceptos que involucran y con la realidad misma.

Lo dicho anteriormente, respecto al algoritmo de la suma es igualmente válido para el algoritmo de la resta. En ambos casos se debe partir de situaciones problemáticas que lleven al niño a descubrir el sentido de las operaciones y en qué casos es pertinente utilizar uno u otro algoritmo para resolver un problema determinado.

(7) Fuenlabrada, I. et. al. El sistema numérico decimal y las operaciones aritméticas. México, DIE-CINVESTAV, 1980.

La resta no puede ni debe ser enseñada exclusivamente como la inversa de la suma, ya que esta posee su significación propia.

"Es importante pues que el niño llegue a descubrir el sentido propio de la sustracción en todas sus modalidades: sustracción propiamente dicha, diferencia como resultado de dos números puestos en relación e invertibilidad con respecto a la suma" (8)

Por otro lado la representación de la resta no es fácil para los niños, porque, mientras en la representación de la adición todos los números escritos remiten a cantidades que tienen una "existencia propia", en la resta, representar la ausencia no es algo fácil para los niños, ya que esto significa "poner algo que no existe".

"Comprender el desarrollo del algoritmo de la resta en el caso de 76 - 22 = 54 implica saber que:

- Agrupamos simbólicamente un conjunto (digamos 76 canicas) en 7 subconjuntos de 10 más 6 canicas;
- Simbólicamente agrupamos "aparte" 2 de los 7 conjuntos de 10, más 2 canicas;
- En lugar de sacar "de golpe" 22 canicas del conjunto original, quitamos 2 de los 6 elementos sueltos y luego 2 de los conjuntos de 10;
- La cantidad así obtenida (54) la escribimos para registrar "lo que quedo" de esas canicas. El resultado también lo agrupamos en 5 conjuntos de 10 más 4". (9)

(8) Idem. pp. 47.

(9) Nemirovsky, Myriam. La representación gráfica de la resta. DIE-CINVESTAV, I.P.N. México, 1988.

En una operación como 54 - 26 = la situación se complica aún más. Para comprender esto es importante que el menor haya comprendido perfectamente el sistema decimal de numeración y saber que en casos como este, "pedir prestado" significa realizar un desagrupamiento de unidades de órdenes mayores en unidades de órdenes menores.

Didácticamente es necesario que los alumnos resuelvan muchos problemas utilizando material concreto, en el que haya la necesidad de desagrupar centenas en decenas y decenas en unidades. Es conveniente que al principio las decenas estén formadas realmente por 10 elementos y las centenas por 10 conjuntos de 10 elementos. Poco a poco, se pueden ir adoptando convenciones para simbolizar las decenas y las centenas a través de colores, tamaños u objetos distintos.

Paralelamente a lo anterior, los niños pueden hacer representaciones informales antes de llegar a la representación formal de la operación.

A este respecto existen algunas propuestas didácticas interesantes realizadas por la Dirección General de Educación Especial, (S.E.P.- O.E.A.): "Estrategías pedagógicas para niños de primaria con dificultades en el aprendizaje de las mateáticas". Fascículo I "El sistema de numeración decimal"; Fascículo II "Problemas y operaciones de suma y resta"; Fascículo III "Problemas y operaciones de multiplicación y división".

Los números y su representación; Juega y aprende matemáticas. de la Colección Libros del Rincón, que actualmente se están utilizando como apoyo al docente en la Modernización Educativa.

CAPITULO 5

ANALISIS DE LOS PROCEDIMIENTOS DE RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA. ENFOQUE PEDAGOGICO.

A partir de las situaciones problemáticas que involucran operaciones aritméticas el niño utiliza, como punto de partida, sus propios recursos o procedimientos para resolverlos, es importante aclarar que cuando se habla de operaciones, se hace referencia no necesariamente a las operaciones escritas; a estas últimas se les denomina algoritmos. Más aún, podemos definir a los algoritmos no usuales como los procedimientos informales que utilizan los niños para resolver las operaciones y a los algoritmos usuales que forman parte del conocimiento social establecido.

Es indispensable que el niño tenga un conocimiento sólido del Sistema Decimal de Numeración, pues de lo contrario será difícil "comprender" la mecánica del algoritmo y mucho menos establecer los homomorfismos entre las relaciones que guardan los datos de un problema y la manera de representarlos con el algoritmo apropiado.

Las situaciones problemáticas constituyen, el punto de partida y el núcleo del trabajo matemático, ya que para resolverlas, el niño tiene que establecer relaciones entre el problema que se plantea y sus experiencias previas. Debe detectar los datos que le son útiles, establecer la relación entre ellos y determinar la incógnita del problema, todo esto es indispensable para encontrar algún método de resolución.

5.1. Procedimientos de resolución.

Antes de llegar a la representación del algoritmo apropiado que da solución a los problemas de estructura aditiva, los niños resuelven los problemas mediante el cálculo mental, haciendo uso de los siguientes procedimientos: Composición; Transformación Hipotética; Estado Inicial Hipotético; Inversión de la Transformación; Complemento; Relación Incoordinada de Datos; Retoma de Datos; Otros. (10)

- COMPOSICION.- Consiste en componer aditivamente las dos medidas elementales a y b, determinando así, el valor de x. La composición es expresada por una operación aditiva: cardinal (a) + cardinal (b) = cardinal (x), o por conteo de las medidas. Esta adición, y ciertos procedimientos de conteo, constituyen una utilización implícita del axioma de adición de la teoría de la medida.

- TRANSFORMACION HIPOTETICA (TH).- Este procedimiento sólo concierne a los problemas de la segunda categoría, donde el valor de la transformación se desconoce:

$$\text{E.I.} \xrightarrow{\text{T.}} \text{E.F.} \qquad\qquad a \xrightarrow{+x} c$$

Por este procedimiento, el sujeto evita la sustracción c - a (si T es positiva), y evita a - c (cuando T es negativa), y se da a la tarea de hipotetizar el valor de la transformación. Aplicar este valor, al E.I. (a), para encontrar un estado final (c); comparar este E.F.,

(10) La Adquisición de las Operaciones Aritméticas en Niños de Primaria. México, S.E.P., D.G.E.E. 1988. pp. 33-37.

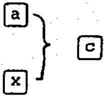
obtenido con el E.F. del problema para corregir el valor hipotético, en función del resultado obtenido.

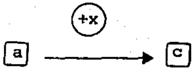
La solución del problema, queda asegurada a condición de que el sujeto sea capaz de seguir estos pasos.

- ESTADO INICIAL HIPOTETICO.- La "transformación hipotética" y el "estado inicial hipotético" son dos procedimientos que comparten las mismas características esenciales, subyace en ambos una misma lógica: si en el primer caso el sujeto evitaba la sustracción en favor de un procedimiento hipotético, en el segundo caso, cuando la incógnita es el E.I., el sujeto evita la inversión de la transformación para seguir un procedimiento igualmente hipotético. En este caso la hipótesis versa precisamente en el estado inicial.

- INVERSION DE LA TRANSFORMACION.- Consiste en invertir la transformación directa y en aplicarla al E.F para encontrar el E.I. El cálculo relacional implicado en este procedimiento es mucho más complejo que los anteriores, ya que, supone la comprensión de las siguientes relaciones: Si la transformación T hace pasar del E.I. al E. F.; -T hace pasar del E.F. al E.I.; hay que aplicar -T (ó +T cuando T es negativa) al E.F.; para encontrar el E.I.

- DIFERENCIA (D).- El procedimiento de diferencia, permite resolver los problemas de la 1a.y 2a. categoría cuyos esquemas son:





En ambos casos se trata de una sustracción, pero ésta no implica los mismos cálculos relacionales.

En lo que concierne a los problemas con transformación, a diferencia del procedimiento "transformación hipotética", en el procedimiento de "diferencia" el sujeto razona de entrada sobre la transformación: si T hace pasar de a a c, entonces T es igual a la diferencia entre a y c.

El valor de la transformación se obtiene por una u otra sustracción, según sea positiva: $x = c - a$; o negativa: $x = a - c$.

En cuanto a los problemas de la 2a. categoría, se trata de la sustracción -

$x = c - a$, la cual es comprendida como la operación inversa de la adición $a + x = c$, en virtud de que ahora, ya no se trata de la aplicación de una transformación a un estado inicial, sino de una relación de inclusión parte - todo.

<u>- COMPLEMENTO (Co).-</u> Se llama así al procedimiento que consiste en determinar, por conteo o por reglas algorítmicas el intervalo o la diferencia entre las dos cantidades conocidas. Se identifican con dos formas de complemento:

- COMPLEMENTO ASCENDENTE.- (C.A.) parte de la cantidad menor para llegar a la mayor.
- COMPLEMENTO DESCENDENTE.- (C.D.) el conteo se realiza en sentido inverso, es decir, de la cantidad mayor a la menor.

- RELACION INCOORDINADA DE DATOS (RID).- En este procedimiento se observan los primeros intentos del sujeto por establecer una relación cuantitativa entre los datos del problema. El sujeto actúa como si supiera que tiene que hacer algo con los datos, relacionarlos por medio de alguna operación, pero sin saber cuál. Se ha observado que los niños relacionan incoordinadamente los datos a través de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones, persistiendo la primera en todos los grados escolares incluyendo el 6to. grado.

En ciertos casos, la elección de la operación aritmética se debe a un estereotipo escolar. Si se tienen, por ejemplo, una cantidad de tres cifras y otra de dos, el niño favorece el empleo de la multiplicación, debido probablemente a la mecanización.

- RETOMA DE DATOS.- "Procedimiento de fracaso". El niño otorga el valor de uno de los datos, a la incógnita.

- OTROS.- Se clasifican como otros procedimientos:

- Sucesión numérica. El sujeto forma una pequeña sucesión numérica: 7, 8, 9, etc.

- El sujeto no da ninguna respuesta ante el cuestionamiento de los problemas.

- Aunque, parece comprender la estructura del problema, el sujeto modifica uno de los datos del problema.

- Cualquier número, el sujeto da como respuesta un número elegido al azar.

La mayoria de estas estrategias, los niños las desarrollan espontáneamente y libremente, en sus intentos por resolver un problema, aunque no todas los llevan necesariamente al éxito.

5.2. Enfoque pedagógico..

De las aportaciones de Vergnaud se desprende que para que una operación tenga sentido para los niños, primero debe ser utilizada, de manera informal, para resolver diversos problemas en los que pueda ser aplicada.

Al decir de manera informal, diversos autores se refieren en general a la etapa previa al uso de los procedimientos usuales, en la que los alumnos utilizan sus propios recursos. De manera específica se pueden apreciar algunas diferencias. Así por ejemplo, Vergnaud se refiere a la necesidad de que los alumnos pasen por el plano de los objetos, el de los conjunntos y el de los cardinales de esos conjuntos, como ya se explicó al inicio de este trabajo.

Streetfland (1990), enfatiza la necesidad de que los alumnos utilicen representaciones y procedimientos propios en las operaciones que emplean para resolver los problemas que se les plantean. Por ejemplo, postula que para los niños resulta mucho más natural resolver las operaciones de suma o resta empezando por las centenas o por las decenas y no por las unidades como lo establece una de las reglas del procedimiento usual.

Dienes (1976), señala la necesidad de trabajos distintos, aspectos que mantengan la misma estructura matemática para que el alumno descubra lo que hay en común en cada uno de ellos, en el caso específico de la suma y la resta propone trabajos con la idea de conjuntos, realizando actividades con agrupamientos distintos a la Base 10.

Brousseau, plantea la necesidad de analizar minuciosamente la situación o situaciones didácticas a través de las cuales se esperaría que los procedimientos de los niños evolucionaran desde las formas más rudimentarias, hasta las que resultan más económicas en términos de su ejecución.

Como se puede ver en los parrafos anteriores, la necesidad de que los niños experimente procesos de construción de conocimientos, en primer lugar no es un plantamiento nuevo, aunque hay que reconocer que en nuestro país, hasta en años recientes ha tomado cuerpo en algunas propuestas didácticas y en los materiales de apoyo para los profesores que ha proporcionado la Secretaría de Educación Pública. En segundo lugar, hay distintas maneras de enfocar el problema y creo que una tarea muy importante consiste en análizar los distintos enfoques para poder incidir en el terreno pedagógico.

La experiencia desempeñada en Centros Psicopedagógicos, ha permitido conocer la concepción que tienen los menores acerca de los problemas matemáticos, según sus propias palabras: "sólo sirven para aprobar el curso escolar"; "sólo se usan en la escuela"; "siempre se deben resolver, utilizando todas las cantidades que aparezcan, aunque no quede claro, cómo hacerlo". Los problemas de la escuela siempre tienen una solución y es indispensable encontrarla, pues decir que no se sabe cómo hacerlo, sería confesar ignorancia o deficiencia.

Cuando los alumnos abordan los problemas en la escuela, generalmente tratan de resolverlos sin razonar la situación que se les plantea, es decir, centran su atención en la busqueda de una palabra clave que les indique la operación que se debe utilizar. Si el texto del problema no les da la "pista", recurren al maestro y en el último de los casos, hacen lo que se les ocurre. Implicitamente los niños deben tomar en cuenta que todos los problemas tienen una solución que se obtiene con todos los datos que aparecen en el texto. Por supuesto que estas deficiencias que se atribuyen a los alumnos, no son inherentes a su proceso de maduración intelectual, ni mucho menos. Se trata desafortunadamente, de actitudes creadas y desarrolladas generalmente por la escuela, derivadas de la metodología que se utiliza para enseñar matemáticas.

Los problemas escolares que los niños generalmente resuelven presentan las siguientes características, que se considera importante analizar.

- Se proponen en la clase para aplicar conocimientos previos (algoritmos).
- Habitualmente en el texto aparece una palabra clave que indica la operación que se debe utilizar.
- Plantean situaciones no reales para los niños.
- Todos los números deben usarse en el orden en que aparecen en el texto, no importando, si tienen que ver con la solución del problema.
- La mayoría de los problemas se plantean con el mismo estereotipo, observándose que la incógnita se encuentra, generalmente, al final del mismo.

Se sugiere que el docente elabore un análisis más detallado de lo que sucede en el proceso enseñanza-aprendizaje en general y en particular en los "problemas de estructura aditiva", tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

En todo tipo de actividades es preciso que el docente tome en cuenta el nivel cognoscitivo del niño, ya que, de acuerdo con éste, se obtendrán diferentes niveles de resolución a los problemas planteados. Se aprovechen los "errores" constructivos que resulten de las hipótesis que manejan, siendo necesario favorecer las confrontaciones grupales, generando el conflicto cognoscitivo que les permitan aceptar, rechazar o replantear las hipótesis originales, lo que propiciará un aprendizaje reflexivo y no meramente mecánico, es decir, que se dé el aprendizaje en su concepción amplia.

Es importante que se promueva la participación de los alumnos como creadores de problemas a partir de diferentes situaciones, evitando que sean simples ejecutores de problemas ya confeccionados, evitar el proponer sistemáticamente las pistas que llevan a resolver a los niños los problemas (es "de más", "o de resta", "en total", "quedan", etc,) Es necesario que anticipen qué sucederá si se hace uso de tal o cual estrategia ante los datos de un problema, estimulando la reflexión de la anticipación original y las modificaciones que hayan hecho. Que recurran al uso de objetos concretos, con el fin de que se apoyen en ellos para dar resolución a los problemas.

Cuidar que las situaciones problemáticas que se propongan y el manejo de las mismas por parte del maestro, logren que, para los niños, el resultado obtenido, no sea sólo el resultado sin mayor significación que el de terminar una tarea, un fin en sí mismo que detenga la actividad del sujeto; por el contrario, que tenga siempre, un sentido y una verdadera función.

La enseñanza de los algoritmos debe partir de situaciones problemáticas, permitiéndoles a los niños que las resuelvan con sus recursos, aunque estos sean muy elementales. Fomentar la confrontación de diferentes hipótesis presentadas por cada uno de los alumnos, y que descubran las semejanzas y diferencias entre estos procedimientos.

Permitirles que representen gráficamente de diferentes formas los procedimientos, con el fin de irlos introduciendo en la comprensión del lenguaje matemático.

Propiciar el descubrimiento de las relaciones que dichas representaciones guardan con las acciones que han llevado a cabo para resolver los problemas.

Proponer las representaciones de algoritmos convencionales y que las confronten con los procedimientos y representaciones informales que habían utilizado hasta el momento,

Es importante enfatizar, no sólo, en el aspecto mecánico del algoritmo, sino en la comprensión adecuada del Sistema Decimal de Numeración, y se realice una relación contextual, con el objeto de que el maestro, no sólo haga referencia de que los alumnos, saben resolver los algoritmos, pero no los saben aplicar en situaciones problemáticas; la ejercitación de las reglas algorítmicas, son necesarias, pero no suficientes.

El aprendizaje de las operaciones aritméticas elementales va más allá de los aspectos formales de su escritura; estos últimos al contrario de lo que se ha impuesto en los programas escolares, son el punto de llegada en la adquisición de las operaciones y no el de partida.

SUMARIO CONCLUSIVO

El análisis de los "problemas de estructura aditiva" ha sido tema de estudio de numerosas investigaciones apoyándose de manera importante en los trabajos realizados por Jean Piaget, sin embargo plantean nuevos conceptos teóricos, tales como, "campo conceptual", "reglas de acción","invariante operatorio", "cálculo relacional", "homomorfismo", etc., enfatizando en las diferentes relaciones que entran en juego en el planteamiento y resolución de diversas situaciones problemáticas.

Se encontró en los trabajos realizados por Vergnaud, el análisis epistemológico más profundo de los "problemas de estructura aditiva", de donde surgió la clasificación más extensa de éstos.

Plantea un análisis desde el punto de vista de las relaciones psicológicas, más, que, desde el punto de vista matemático, es decir, considera a la matemática como la "ciencia de las relaciones"; proponiendo también la necesidad de revisar ampliamente los fines de la enseñanza de ésta, con el objeto de plantear una didáctica adecuada, tomando en cuenta las características de los alumnos.

Después de la revisión bibliográfica de los trabajos realizados por Gerard Vergnaud, se detectaron algunas dificultades que enfrentan los niños para resolver los "problemas de estructura aditiva".

Existe gran variedad de problemas que, a pesar de que su resolución canónica es a través de una suma o resta, no ofrecen el mismo nivel de dificultad para los niños, ya que ésta no radica únicamente en la operación u operaciones necesarias para resolverlos, sino, también en el "tipo de relaciones", en el cálculo, en el lugar de la incógnita,etc.

Así se puede advertir que distintas operaciones del pensamiento pueden ser representadas con los mismos significantes, y que en una misma operación aritmética se proyectan cálculos relacionales distintos, es decir, una cosa es conceptuar un problema mental y otra encontrar los significantes (símbolos y signos gráficos) adecuados para representar el procedimiento de solución empleado. Esto es importante, ya que, nos hace ver que el niño es capaz de producir procedimientos y representaciones que no han sido transmitidas a través de un práctica escolar; aun cuando no se hayan apropiado de las representaciones convencionales, sus procedimientos y representaciones reflejan la comprensión que tienen del problema.

También existen casos en los que los niños resuelven problemas mediante el cálculo mental, a través de representaciones informales, sin embargo, es posible que al solicitarle que represente gráficamente lo que hizo, recurra a los procedimientos canónicos. Lo anterior hace pensar que los procedimientos espontáneos no deben considerarse como definitivos para establecer hasta donde saben los niños.

Para dar solución a problemas matemáticos, no es suficiente el hecho de que los niños conozcan las reglas aritméticas, ya que, aunque posean este conocimiento, no les es suficiente para dar solución a los problemas, si no han comprendido las relaciones que se establecen al interior de los mismos, sin embargo es posible que, aunque el niño desconozca el algoritmo de las operaciones requeridas, pero comprende las relaciones que se dan dentro del problema, este lo resolverá recurriendo a procedimientos informales. Por tanto se considera poco funcional enseñar a los niños primero los algoritmos de las operaciones y después su aplicación en la resolución de problemas.

Cuando los niños han comprendido las relaciones planteadas, no siempre hacen uso de procedimientos canónicos, recurriendo a procedimientos informales. Por ejemplo, cuando la dificultad del problema es mayor, el tipo de cantidad empleada (continuas o discontinuas), la ubicación de la incógnita, etc.

El tipo de problemas que un niño puede comprender y resolver no depende de la edad cronológica de este, sino, de su nivel de desarrollo cognoscitivo, y de la comprensión de los algoritmos, ya que, el manejo mecánico de éstos tampoco garantiza la comprensión de las relaciones que se establecen en los problemas. Por tal motivo es muy importante tomar en cuenta el nivel cognoscitivo lógico matemático de los alumnos, así como los factores que intervienen en el desarrollo y en el proceso de aprendizaje.

En la escuela tradicional predominantemente, el único que decide si los problemas están o no resueltos correctamente es el maestro, no se da a los menores la oportunidad de confrontar y validar sus resultados, además se desconoce generalmente la gran capacidad que pueden desarrollar los niños para inventar y redactar problemas matemáticos.

Por lo antes señalado en este trabajo, se considera importante que los maestros conozcan algo más acerca de la construcción del conocimiento, tomando en cuenta que el sujeto que aprende juega un papel muy activo dentro de ese proceso. También es necesario respetar el proceso de adquisición de los conocimientos. Así como el ritmo o tiempo de adquisición del aprendizaje no se puede violentar, un proceso sí se puede facilitar, siendo ésta nuestra tarea como educadores.

Por último hay que señalar que lo expuesto en este trabajo, no representa todo lo que habría que investigarse al respecto, por tanto considero necesario continuar ampliando y mejorando esta información

GLOSARIO

<u>**Abstracción Reflexiva**</u>.- Considera las características no observables de los objetos, sucesos, personas, etc., a través del establecimiento de relaciones lógicas entre ellos. Por ejem.: más grande que..., diferente de..., etc.

<u>**Abstracción Simple**</u>.- Considera las propiedades observables que están en los objetos, o más ampliamente, en la realidad externa. Por ejem.: peso, color, textura, etc.

<u>**Acomodación**</u>.- Modificación de los esquemas como resultado de nuevas experiencias.

<u>**Algoritmo**</u>.- Es una sola prescripción determinante de un proceso de cálculo que, partiendo de datos iniciales diversos, conducen en todos los casos al resultado que les corresponde. En otros términos un algoritmo no ha de resolver un problema individual sino una serie de problemas de un mismo tipo.

<u>**Asimilación**</u>.- Incorporación de nuevos objetos y experiencias a los esquemas mentales existentes.

<u>**Cálculo Relacional**</u>.- (v. pag. 14)

<u>**Campo Conceptual**</u>.- (v. pag. 5)

<u>**Cantidad Continua**</u>.- Cuando en los cardinales existe un valor intermedio. Ejem. entre 6.21 y 6.22 puede estar el 6.215, para los cuales se utilizan números decimales, los usamos para medir, áreas, longitudes, etc.

<u>**Cantidad Discontinua**</u>.- Números enteros separables en unidades.

<u>**Cardinal**</u>.- Propiedad común a todos los conjuntos de objetos que tienen el mismo número de elementos.

<u>**Clasificar**</u>.- Es la habilidad de agrupar objetos, que cuando menos, tengan una característica común, lo que implica reunir por semejanzas y separar por diferencias.

<u>**Código**</u>.- Sistema de signos convencionales que sirven para comunicar un mensaje.

<u>**Compensación**</u>.- Es una forma de reversibilidad, en la que el incremento de la longitud contrarresta el incremento de la densidad.

<u>**Complemento**</u>.- (v. pag. 50)

<u>**Composición**</u>.- (v. pag. 47)

<u>**Conocimiento Físico**</u>.- (v. pag. 9)

Conocimiento Lógico-Matemático.- (v. pag. 9)

Conocimiento Social.- (v. pag. 10)

Conservación.- Proceso operacional de la mente, por medio de el cual se comprende que ciertos aspectos de una condición cambiante son invariables a pesar de tales cambios.

Correspondencia Biunívoca.- (v pag. 26)

Diferencia.- (v. pag. 48)

Epistemología Genética.- Estudio evolutivo de la naturaleza del conocimiento, cómo se origina y cómo se desarrolla.

Estado Inicial Hipotético.- (v. pag. 48)

Estructuras.- Formas de equilibrio hacia las cuales tienden las coordinaciones intelectuales del sujeto.

Homomorfismo.- Significa "misma forma" o "misma estructura", es una función de un conjunto en otro, que respeta ciertas estructuras relacionales del conjunto de partida y del conjunto de llegada.

Hipótesis.- Explicación construída sobre un objeto de conocimiento.

Inclusión.- Es la relación que existe entre una sub-clase y la clase de la que forma parte una colección.

Invariante Operatorio.- Cuando una noción alcanza un estado de equilibrio tal, que pese a las transformaciones que sufra, permanecerá sin alterarse. Ejemplo. Concepto de número.

Inversión de la Transformación.- (v. pag. 48)

Juego Simbólico.- Juego representativo durante el cual el niño asigna a determinados elementos el significado de otros, sin perder de vista la realidad del objeto que utiliza en su juego.

Medida.- Cantidades representadas a través de números naturales.

Número.- Es dos aspectos indisociables: el cardinal y el ordinal, es a un tiempo clase de clases y serie de clases. El número, es la clase de todos los conjuntos que tienen como propiedad común tener la misma cantidad de elementos.

Número Natural.- Son números sin signo, y nos sirven para representar medidas.

Número Relativo.- Cardinales que pueden ser positivos o negativos. (+5),(-5). Se utilizan para representar transformaciones.

Operación.- Acción interiorizada reversible.

<u>**Períodos**</u>.- Cortes en la evolución genética que implican un orden constante de las diversas adquisiciones. Cada uno se caracteriza por estructuras que, construídas a una edad determinada, se convierten en parte de las estructuras de la edad siguiente.

<u>**Problemas de Estructura Aditiva**</u>.- (v. pag. 31)

<u>**Psicogenética**</u>.- Enfoque psicológico que toma como base la génesis de la formación de estructuras dentro de un proceso dinámico. Este proceso implica, la construcción progresiva de estructuras compuestas de significantes arbitrarios, en tanto no existe ninguna relación con el significado.

<u>**Ralación Incoordinada de Datos**</u>.- (v. pag. 50)

<u>**Retoma de Datos**</u>.- (v. pag. 50)

<u>**Reversibilidad**</u>.- Significa que a toda operación, le corresponde una operación inversa; es decir, la misma operación implica un recorrido en sentido contrario. Por ejem., si se establecen relaciones de mayor a menor, también se pueden establecer relaciones de menor a mayor.

<u>**Seriación**</u>.- Es la operación de ordenar objetos de acuerdo con cierta cualidad creciente, o decreciente, o sea, establecer una relación de orden entre elementos asimétricos.

<u>**Significado**</u>.- Cualquier objeto, acontecimiento, etc., susceptible de ser representado por medio de significantes.

<u>**Significante**</u>.- Forma de representar los objetos, acontecimientos, ideas, etc., por medio de símbolos o signos determinados.

<u>**Signos**</u>.- Es una forma de representación colectiva, elegida arbitrariamente por la sociedad y la cultura. Por ejem., el lenguaje, la escritura, etc.

<u>**Símbolo**</u>.- Es una representación mental, elaborada individualmente, por medio de la cual el sujeto establece una relación de semejanza con el objeto representado.

<u>**Transformación**</u>.- (v. pag. 22)

<u>**Transformación Hipotética**</u>.- (v. pag. 47)

<u>**Transitividad**</u>.- Significa la posibilidad de establecer por deducción, la relación que hay entre dos elementos que no han sido comparados directamente entre sí partiendo de las relaciones que se establecieron entre otros dos elementos. Por ejem. 5 mayor que 4, 4 mayor que 3, por tanto 5 mayor que 3.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

AEBLI, Hans. Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget. - Tr. Federico F. Monjardín. Buenos Aires, Kapelusz, 1958.

BRIEN, Jean. Pedagogía de las Matemáticas y Psicología: análisis de algunas relaciones. Infancia y Aprendizaje, No. 9. Enero, 1980.

C. CLANET, C. Laterrasse y Gerard Vergnaud. Dossier Wallon - Piaget. Condensación de los puntos de coincidencia y divergencia en la obra de estos dos investigadores. Tr. Matilde. Horne. 3ra. ed.. - Barcelona, Gedeisa, 1979. 56 p.

FUENLABRADA, I. et. al. El sistema numérico decimal y las operaciones aritméticas. México, D.I.E. - CINVESTAV, STUNAM, 1980.

NEMIROVSKY, Myriam. La representación gráfica en, la Matemática en la escuela. U.P.N., S.E.A.D., México, 1988.

______. La representación gráfica de la resta. México, D.I.E. - CINVESTAV, I.P.N., 1988.

PIAGET, Jean y Barbel Inhelder. Génesis de las estructuras lógicas elementales: Clasificación y Seriación. Buenos Aires, Guadalupe, - 1978. 316 p.

______. et. al. Psicología del niño. Tr. Luis Hernández Alfonso. 12 - ed.. Madrid, Morata, 1984.

PULASKI, Mary Ann. Para comprender a Piaget. Tr. Pablo Dimasso. Barcelona, Ediciones Península, 1975.

S.E.P. La adquisición de las operaciones aritméticas en niños de primaria. México, D.G.E.E., 1988.

S.E.P. Apuntes para una aproximación al conocimiento de la Psicología Genética de Jean Piaget. México, S.E.P. 1990.

VERGNAUD, GERARD. El niño, las matemáticas y la realidad. Tr. Luis Ortega Segura. México, Trillas, 1991. 275 p.

ARTICULOS

DIENES, L.P.. Las seis etapas del aprendizaje de las estructuras. España, Teide, 1971.

ESCARBAJAL, J. ¿Qué problemas resuelve el niño?. Artículo del Laboratorio de Psicología. Tr. Clotilde Juárez. Universidad de París. - No. 8, 1984.

GALPIERINI, P. J. Hacia la investigación del desarrollo intelectual - del niño. Vaproci Psijologui (problemas de psicología), No. 1 - 1969.

VERGNAUD, Gerard. Actividad y conocimiento operatorio. Tr. Reyes de - Villalonga. Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique (Francia) Fevrier, 1977. 307, 52 - 56

______. Algunas orientaciones teóricas y metodológicas de las inves-- tigaciones francesas en didáctica de las Matemáticas. Tr. Verónica Hoyos Aguilar. Conferencia Plenaria, Proccedings P.M.E., 1981. 7 - 17.

______. y C. Durand. Estructuras aditivas y complejidad psicogenética Revue Francaise de Pedagogie, 1976. 36, 28 - 43. Reproducción con autorización. Tr. Reyes de Villalonga.

______. Representaciones matemáticas: las malas relaciones significados - significantes. ¿Se pueden mejorar?. París. Centro de Estudios de los procesos cognitivos y del lenguaje. 1982.

VERSHAFFEL, L. y E. De Corte Estrategias de solución de niños de primer grado a problemas con enunciados. Artículo de: La Universidad de Luven, Bélgica.

ANEXOS:

A N E X O I

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

GERARD VERGNAUD

RICCO, G.; Guzmán, V., y Porro, E., Etude du raisonnement portant sur l'inversion de transformations arithmétiques additives. Document roneotypé du Centre d'Etudes des processus cognitifs et du langage, Paris.1976.

VERGNAUD, Gerard. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. en - Carpenter, T. P. Moser J. M., y Romberg, T. A. (eds), Addition - and subtraction: A cognitive perspective Hillsdale, N, J. -- Lawrence Erlbaum. 1981.

______., Rouchier, A., Ricco, G. et. al. Acquisition des structures multiplicatives dans le premier cycle du second degré, "RO" no. 2, IREM d'Orleáns, Centre d'Etude des Processus cognitifs et du Langage. 1979.

______. Didactics and acquisition of "multiplicative structures" - in secondarz schools. Cognitive Development Research in Science and Mathematics. The University of Leeds. 1979.

______. et. al. La coordination de l'enseignement des mathématiques entre le cours moyen 2eme anné et la classe de sixieme. Recherches Pédagogiques, 1979. Num. 102.

______. Ricco, et. al. Quelle connaissance les enfants de sixieme-ontils des structures multiplicatives élémentaires?, Bulletin-de l'Association des Professeurs de Mathématiques, 1978.

OTRAS FUENTES DE INFORMACION

"Cahiers de l'I.R.E.M. de Burdeos", ed. Guy Brousseau, 351, Cours de la Libération, 33405 - Talence.

"Grand N, Bulletin des Mathématiques pour les maítres de l'Enseignement Elémentaire", CRDP, 11 Av. Général Champon, 38031 - Grenoble -- Cedex.

Recherches en Didactique des Mathématiques", ed. André Rouchier, I.R.E.M. d'Orléans, Domaine universitaire de laq Source, 45045 - Orléans Cedex.

A N E X O II

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

JEAN PIAGET

PIAGET, Jean. El nacimiento de la inteligencia en el niño. Tr. Luis Fernández Cancela. Madrid, Aguilar, 1972.

_____. et. al. Epistemología, Matemáticas y Psicología: Relaciones entre la Logica Formal y el Pensamiento Real. Tr. Victor Sanchez de Zavala. 2 ed. Barcelona, Crítica, 1980. 348 p.

_____. Estudios sobre lógica y psicología. Compilación e introducción de Alfredo Deano y Juan Delval. Madrid, Alianza, 1982. 198.

_____, et. al. Génesis del número en el niño. Tr. Sara Vasallo Buenos Aires, Guadalupe, 1982. 289 p.

_____. Introducción a la epistemología genética. Buenos Aires, Paidos, 1975.

_____. La enseñanza de las matemáticas. Tr. Adolfo Maillo. Madrid, Aguilar, 1963. 181 p.

_____. La epistemología genética. Tr. J. A. Delval. Barcelona, A.-Redondo, 1970. 130 p.

_____. La formación del símbolo en el niño: imitación, juego y sueño imágen y representación. Tr. De Jesús Gutiérrez. México, Fondo de Cultura Económica. 1961.

_____. La psicología de la inteligencia. Buenos Aires, Psique, 1975. 189 p.

______ y Barbel Inhelder. La psicología del niño. Tr. Luis Hernández-Alfonso. 9 ed.. Madrid Morata, 1980. 172 p.

______.Psicología y Pedagogía. Tr. Francisco J. Fernández. 4 ed. Barcelona, Ariel, 1972.

______. Seis estudios de psicología. Tr. Nuria Petit. Barcelona,--Ariel, 1988. 225 p.

______. The child's conception of number. Humanities Press,--Nueva York, 1952.

______. y Barbel Inhelder. The early growth of logic in the child. -Harper and Row, New York, 1964; Routledge and Kegan Paul, London 1964.

______. y Barbel Inhelder. The Growth of logical thinling from -childhood to adolescence. Basic Books, New York, 1958.