UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

CADENAS CINEMATICAS:

MOVILIDAD, SINTESIS ESTRUCTURAL Y POSICION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A

LUIS ALBERTO TINAJERO RAMIREZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR ANGEL A. ROJAS SALGADO

MEXICO, D. F. 1993

C O N T E N I D O

APÉNDICES

"Pues aunque mováis más brazos que los del gigante Briareo, que lo habéis de pagar"

Miguel de Cervantes Saavedra

INTRODUCCIÓN

Desde tiempo inmemorial, el hombre ha ideado y construido un sinnúmero de instrumentos y equipos que adaptan sus manos para realizar tareas que de otra manera serían muy arduas o imposibles (herramientas); instrumentos y equipos que amplifican su potencia muscular (vehiculos, electrodomésticos, troqueladoras, máquinas herramientas), e incluso, aparatos que lo relevan por completo del trabajo manual (centros de mecanizado, robots, estaciones de trabajo de plantas de manufactura flexible, etc.), bien para dar espacio a su ocio, o bien para que cada vez su trabajo sea más eficaz[1]

En este pequeño elenco de máquinas y en todas las que el lector discurra citar, juegan un papel muy importante las interrelaciones mecánicas[2] que existen entre los cuerpos de que

1 Se omite aquí la mención de las aplicaciones bélicas de los descubrimientos del hombre, porque el autor sólo esta comprometido con fines pacíficos.

Además, aunque el autor ha escrito un trabajo que tiene, al menos remotamente, aplicaciones en la mecanización y automatización de la industria, no se olvida de las implicaciones sociales que puede tener un abuso de la tecnificación (especialmente en nuestro país, donde abundan manos para el trabajo), y se opone a toda costa a todo abuso semejante.

2 Con la palabra "mecánico" nos referiremos a interacciones entre cuerpos cuando hay contacto directo entre ellos. Interacciones debidas a la presencia de campos electromagnéticos, gradientes de temperatura, etc., serán excluídas en este contexto.

constan dichas máquinas. Para que éstas interrelaciones sean significativas en el comportamiento de la máquina como un todo organizado (es decir para que los cuerpos interrelacionados interactúen), deben estar intimamente unidas a las nociones de causa y efecto. Esto implica que si el comportamiento de un cuerpo A afecta de alguna manera al comportamiento de un cuerpo B, puede decirse que los cuerpos A y B pertenecen a un mismo sistema (la máquina y los cuerpos con los que interactúa, v. gr. las piezas de un torno, y la pieza de trabajo). De lo contrario, dichos cuerpos no pertenecen al mismo sistema.

La idea de un conjunto de cuerpos integrantes de una máquina (eslabones) cuyo comportamiento es interdependiente, siendo dicha interdependencia consecuencia de interrelaciones mecánicas, conduce al concepto de mecanismo. ¿Qué es un mecanismo? Baste decir por el momento que, mecanismo es un sistema de cuerpos sólidos cuyo comportamiento depende de una sola variable. ¿Entonces, existen sistemas de cuerpos sólidos cuyo comportamiento dependa de varias variables? La respuesta es afirmativa. A tales sistemas los denominaremos cadenas cinemáticas. De hecho, un mecanismo es una cadena cinemática particular.

Ahora bien, existen mecanismos y cadenas cinemáticas que se consideran planos (aunque los cuerpos que los componen posean volúmenes de las más variadas formas) porque su comportamiento puede estudiarse en dos dimensiones, y mecanismos o cadenas cinemáticas espaciales (que deben ser estudiados en tres dimensiones). Los primeros han sido empleados desde hace mucho tiempo, y su uso sigue siendo vigente. Los ejemplos son muy numerosos, entre ellos: el mecanismo biela-corredera-manivela, típico de un motor de combustión interna; los mecanismos de una máquina de coser; un limpiaparabrisas, algunos tipos de graficadores (plotters), etc. La razón de que los mecanismos y las cadenas cinemáticas planos sean tan populares, es en parte la relativa sencillez de su estudio, además de que han demostrado ser muy útiles. Sin embargo, cada vez se estudian más las cadenas cinemáticas y los mecanismos espaciales (cuyo comportamiento debe estudiarse en tres dimensiones) y constantemente se encuentran nuevas aplicaciones para ellos. Como ejemplo de cadenas espaciales tradicionales, citaremos la junta universal que se emplea en los autos con motor delantero y tracción trasera, las juntas homocinéticas (también usadas para transmitir movimiento a las ruedas motrices de un automóvil), y las grúas empleadas en la industria de la construcción. Una aplicación más reciente son las plataformas para simulación de vuelo, y los manipuladores industriales (robots). Con estos últimos, tiene que ver en alguna medida, la tesis que el lector tiene en sus manos, la cual tiene el siguiente objetivo: presentar de una manera unificada el análisis de movilidad, la síntesis estructural, y el análisis de posición de cadenas cinemáticas; así como plantear aplicaciones de estos temas al desarrollo de manipuladores no convencionales.

La tesis comprende dos estudios independientes: el primero, titulado ANÁLISIS DE MOVILIDAD Y SÍNTESIS ESTRUCTURAL DE CADENAS

CINEMÁTICAS, se ocupa de la determinación de la movilidad de cadenas cinemáticas de geometría conocida (análisis), y de la obtención de cadenas cinemáticas que posean una movilidad deseada (síntesis). En el caso de la síntesis estructural, se atenderá únicamente a la organización de los eslabones al ser interconectados mediante pares cinemáticos, ignorando su geometría. El segundo estudio trata del análisis de posición directo e inverso de cadenas cinemáticas espaciales y manipuladores. En él se explica con todo detalle un método vectorial matricial (VM) que emplea matrices de 3 X 3, y que es aplicable en multitud de situaciones. Cada uno de estos dos estudios constituye por su parte un capítulo de la tesis (capítulos 1 y 2 respectivamente). En un tercer capítulo, MISCELÁNEA DE APLICACIONES, se explica minuciosamente cómo aplicar los algoritmos que se tratan en los dos primeros, y se busca un nexo entre los temas de éstos. Este nexo lo proporciona la plataforma de Stewart, sistema concebido originalmente como componente básico de simuladores de vuelo, y que posteriormente ha encontrado aplicaciones en robótica.

En aras de la claridad, se prescindió casi por completo de las demostraciones rigurosas (puesto que no era objetivo del autor demostrar, sino ilustrar y unificar), y se prefirió desarrollar las ideas mediante un enfoque inductivo, puesto que es la inducción, y no la deducción, la forma principal mediante la cual realiza el hombre los descubrimientos; la deducción da más bien, una forma racional a las cosas descubiertas a través de la inducción. El autor ha querido pues, que sus lectores "redescubran" las cosas que él mismo redescubrió al hacer las indagaciones y reflexiones que sirvieron de fundamento a su trabajo, y para lograrlo, recurrió a ejemplos sencillos. Muestra de esta búsqueda, es el empleo de mecanismos planos (cuando esto es posible) para explicar nociones que son igualmente aplicables a cadenas cinemáticas espaciales.

Una parte importante de la tesis la forman los apéndices, algunos de los cuales tratan temas que no se incluyen en el cuerpo principal porque obligarían una digresión del tema central; pero que son complementarios. Estos apéndices son el B (demostración de la ecuación (33) cap. 2), el C (que explica lo indispensable para aplicar las reflexiones de Householder en la solución del problema inverso de posición de cadenas cinemáticas abiertas, y directo de cadenas cinemáticas con mallas cerradas), y el D (traducción de un fragmento del artículo Direct Position Analysis of the Stewart Platform Mechanism de Innocenti y Parenti-Castelli [7]). No menos importantes son los apéndices que incluyen los programas para automatizar los algoritmos, y sus resultados.

Aportaciones originales de la tesis son: un algoritmo para encontrar matrices de interconexión para un conjunto dado de eslabones, el cual constituye un complemento al método de síntesis estructural propuesto por ShuJun [10]; una realización mecánica (modelo físico) que ejemplifica una aplicación del método de síntesis modular (Earl y Rooney [8]); un modelo cinemático para adaptar el método vectorial matricial a la solución del problema inverso de posición de la plataforma de Stewart, y el diseño conceptual de un conjunto de piezas que pueden utilizarse para entrenar a los estudiantes en el uso de la notación de Denavit y Hartenberg.

Cabe mencionar un aspecto lingüístico: la creación de neologismos. El autor se sintió obligado en ocasiones, a dar nombre a conceptos de los que no encontró mención en la literatura sobre cinemática en español. Tal es el caso de "enlace"[3] (que traduce *liaison*), e "identificación formal de eslabones" (que se definió a partir de la expresión *"...formally identified with..."* encontrada en la referencia [8], la cual se utiliza en dicha referencia para hablar de que dos cuerpos se unen rígidamente).

Para finalizar esta introducción, el autor quiere expresar su deseo de que este trabajo sea verdaderamente útil para los que se interesan en el estudio de cadenas cinemáticas en general, y para los que se inician en el estudio de cadenas cinemáticas espaciales en particular.

Luis Alberto Tinajero Ramírez

[3] Hervé utilizó el término "lazo mecánico" en una conferencia dictada en la División de Educación Continua de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. (Cfr. CLASIFICACIÓN DE LOS MECANISMOS, artículo del volumen "Fundamentos Cinemáticos para el Diseño de Máquinas y Mecanismos", Centro de Educación Continua de la Facultad de Ingeniería U.N.A.M., Mexico D. F., 1981). No obstante, el autor de la tesis encontró el término "enlace" más apropiado.

1 ANÁLISIS DE MOVILIDAD Y SÍNTESIS ESTRUCTURAL DE CADENAS CINEMÁTICAS

En este capítulo se estudiarán las cadenas cinemáticas tanto desde un punto de vista geométrico, como desde un punto de vista topológico. Se definirán aquí los conceptos de cadena cinemática, eslabón, par cinemático, dimensión, estructura cinemática, movilidad, y otros conceptos afines. Se establecerán relaciones entre el número de eslabones que componen una cadena cinemática, la cantidad de pares cinemáticos asociados a cada uno de los eslabones, y el número de mallas que se forman con la interconexión de los eslabones. Todo esto para poder, en definitiva, bien determinar la movilidad de una cadena cinemática de estructura conocida, bien para sintetizar una cadena cinemática que posea la movilidad deseada.

Los conceptos, y las relaciones matemáticas se presentarán, conforme a la filosofía planteada en la introducción, de una manera inductiva y con el auxilio de ejemplos simples.

1.1 GRUPOS DE DESPLAZAMIENTO

Comenzaremos por estudiar los conceptos de grupo y de grupo de desplazamiento. Esto nos proporcionará un marco de referencia para estudiar la movilidad de las cadenas cinemáticas.

1.1.1 Grupo

Un conjunto G entre cuyos elementos se ha definido una operación binaria $\oplus$, y para el que se satisfacen los siguientes axiomas,

1) **cerradura:** $\forall\ a,\ b \in G.\ \ c=a\oplus b \in G$
2) **asociatividad:** $\forall\ a,\ b,\ c \in G \quad (a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$
3) **existencia de elemento idéntico:**

   $\exists\ E \in G$ tal que $a\oplus E=E\oplus a \quad \forall\ a \in G$
4) **existencia de elementos inversos:**

   $\forall\ a \in G \quad \exists\ a^{-1} \in G$ tal que $a\oplus a^{-1}=E$

se denomina grupo. Aunque aquí hemos representado la operación binaria intercalando el signo $\oplus$ entre los operandos, puede también representarse mediante la simple yuxtaposición de dichos operandos. En lo que sigue se adoptará esta última modalidad.

Si un subconjunto S de G cumple también estos axiomas, se dice que S es un subgrupo de G.

A continuación, buscaremos ilustrar mediante ejemplos, que el conjunto de desplazamientos posibles de una particula puntual M en el espacio euclidiano de tres dimensiones tiene estructura de grupo.

Llamaremos desplazamiento al paso de una particula móvil M de un punto P del espacio de tres dimensiones a otro punto cualquiera del mismo espacio.

Supóngase que se desea llevar una partícula M de P_1 a P_3 (figura 1). Es posible hacer esto en una sola operación o en varias, por ejemplo, trasladando M de P_1 a P_2, y posteriormente de P_2 a P_3.

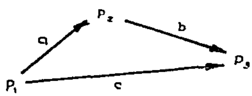


figura 1

Axioma de cerradura: Los movimientos a, b y c representados con flechas en la figura 1, son desplazamientos. Definiremos la operación binaria para el conjunto de desplazamientos como la aplicación consecutiva de dos de estos desplazamientos, v. gr., ba (esta notación indica que primero efectuamos el desplazamiento a y posteriormente el b). Puesto que ba da el mismo resultado que c (c=ba) y c es también un desplazamiento, se cumple la propiedad de cerradura.

Axioma de asociatividad: En la figura 2, observamos que existen cuatro "rutas" por las que podríamos llevar una partícula M del punto P_1 al punto P_4 (suponiendo que los únicos desplazamientos posibles son los representados en dicha figura).

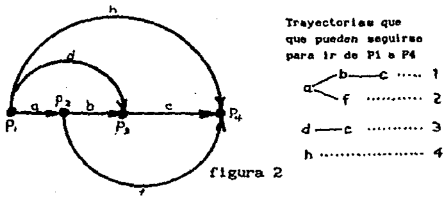


figura 2

Estas 4 rutas son: cba, fa, cd y h; pero f representa la "asociación" de b y c, y d la de a y b. Por lo tanto tenemos que

$$h=cba=fa=(cb)a \tag{1}$$

o bien,

$$h=cba=cd=c(ba) \tag{2}$$

de modo que,

$$(cb)a=c(ba) \tag{3}$$

Por lo tanto, concluimos que la operación binaria definida para el conjunto de desplazamientos es asociativa.

Existencia del elemento idéntico: Podemos considerar que para el conjunto de desplazamientos, existe un elemento idéntico que es el no desplazamiento, o desplazamiento nulo. que representaremos con E. Con esto se cumple el tercer axioma.

Existencia de elementos inversos: Y finalmente, todo desplazamiento es invertible; por ejemplo, es posible llevar M de P_1 a P_2, y después hacer lo contrario: llevar M de P_2 a P_1. Esto es, el cuarto axioma también es satisfecho por la operación binaria definida para el conjunto de desplazamientos de una partícula M.

Concluímos que el conjunto de desplazamientos con la operación binaria definida tiene estructura de grupo.

Anticipando el contenido del capítulo dos, diremos que todo desplazamiento puede representarse matemáticamente mediante una matriz A de orden 3 X 3, asociada a una rotación, y por un vector t asociado a una translación. Si se tienen tres puntos P_1, P_2, P_3, es posible que el desplazamiento de P_1 a P_2 sea idéntico al desplazamiento de P_2 a P_3, siempre y cuando ambos estén representados por la misma matriz A y por el mismo vector t. Un ejemplo aclarará la situación.

Supóngase que se tiene una barra B que gira alrededor de un

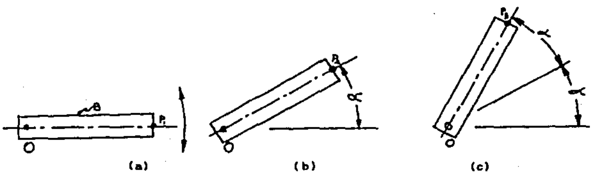


figura 3

punto O (figura 3a), y que ocupa una posición inicial OP_1. Si se aplica a la barra B una rotación de un ángulo α, en sentido antihorario, dicha barra pasará a ocupar una posición OP_2 (figura 3b). Si nuevamente efectuamos una rotación de α radianes, la posición final de la barra será la definida por OP_3 (figura 3c). Aunque el resultado de cada una de las 2 rotaciones lleva a la barra a posiciones distintas (porque la posición de partida es diferente en cada caso), ambas rotaciones son idénticas, ya que ambas están asociadas a la misma matriz A, y al mismo vector t. En este caso particular,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El movimiento de la barra es una rotación pura, y es por ello que $t=0$. Cabe anotar aquí, que el desplazamiento idéntico E (desplazamiento nulo) está representado matemáticamente por la matriz identidad (rotación nula), y por el vector cero (translación nula). En el capitulo 2 se esclarecerá completamente el significado de la matriz A y del vector t.

1.1.2 Cuerpo Rígido

Se definirá como cuerpo rígido a un conjunto de 3 o más particulas puntuales, no colineales, circunscritas dentro de una superficie, al que puede asociarse un sistema de referencia (v. gr., un sistema de coordenadas cartesianas), respecto al cual cada una de las particulas que conforman el conjunto guarda una posición fija. Esta definición excluye desde luego, la noción de que una línea recta sea un cuerpo rigido.

1.1.3 Grupo de Desplazamientos de un Cuerpo Rígido

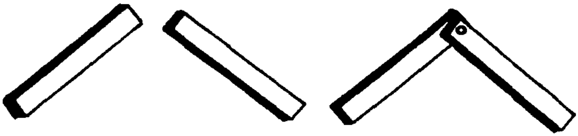
Para determinar completamente la posición de un cuerpo rigido, libre de moverse en espacio de tres dimensiones, es necesario especificar 6 coordenadas independientes. Si por ejemplo, estudiamos el movimiento de cierto cuerpo rigido, con base en un sistema de coordenadas cartesianas [xyz], tres de las coordenadas serán distancias existentes entre un punto perteneciente al cuerpo rigido y los planos [yz], [xz] y [xy], y las tres restantes, pueden ser tres ángulos, medidos alrededor de vectores paralelos a cada eje coordenado.

Por ésta razón, decimos que un cuerpo rigido libre tiene 6 *grados de libertad*, y que el grupo de desplazamientos {D} que dicho cuerpo puede experimentar tiene *dimensión* 6.

La interconexión entre varios cuerpos rígidos limita las posibilidades de movimiento relativo entre dichos cuerpos, y por lo tanto reduce el número de grados de libertad, y origina un subconjunto de desplazamientos con dimensión menor que seis.

El siguiente ejemplo ilustrará la reducción en grados de libertad.

Dos cuerpos como los mostrados en la figura 4a tienen en total 12 grados de libertad (6 cada uno de ellos); sin embargo, si se conectan ambos mediante un pasador, como se muestra en la figura 4b, el número de grados de libertad quedará reducido a 7



(a) (b)

figura 4

porque puede escogerse arbitrariamente la posición en el espacio de uno de los cuerpos, digamos la del cuerpo 1; pero hecho esto, la única posibilidad que tiene el otro cuerpo (2) es girar alrededor del pasador. De hecho si se suelda el cuerpo rígido 1 a una base fija en el espacio, la interconexión con el pasador, sólo permite el movimiento de rotación del cuerpo 2 alrededor del mencionado pasador.

Tenemos pues, que el sistema de cuerpos rígidos 1 y 2 tiene un grado de libertad, y el grupo de desplazamientos permitidos por este sistema tiene dimensión 1.

La interconexión de pasador es tan sólo un ejemplo de los múltiples tipos de interacciones posibles entre cuerpos rígidos, conocidos como *pares cinemáticos inferiores*. A cada par cinemático inferior está asociado un grupo de desplazamientos que es a su vez, subrgrupo del grupo de desplazamientos de un cuerpo rigido. De ahora en adelante, denotaremos a éste con la letra D.

1.1.4 Pares Cinemáticos Inferiores

Se define como par cinemático inferior, a la interacción entre dos cuerpos rigidos, de tal manera que una superficie de uno de los cuerpos, esté en contacto permanente con una superficie del otro[1].

La experiencia ha permitido identificar 6 tipos de pares cinemáticos inferiores, los cuales aparecen ilustrados en la figura 5.

1.1.5 Descripción de los Pares Inferiores

El *par de revoluta* (figura 5a) permite exclusivamente la rotación alrededor de un eje, y suprime por tanto, 5 de los 6 grados de libertad del cuerpo rigido libre.

El *par prismatico* (figura 5b) sólo permite la translación rectilinea y elimina también 5 grados de libertad.

El *par de tornillo* permite la translación a lo largo de una dirección, y la rotación alrededor de esa misma dirección. Sin

[1] Esta definición es un tanto limitante, porque puede extenderse el concepto de par cinemático inferior a dispositivos tales como un balero, en el cual la interacción desde un punto de vista cinemático, entre las pistas interior y exterior, es la misma que la que existe en lo que aquí denominamos par de revoluta, siendo que intervienen muchos cuerpos, los contactos entre los cuales son en realidad de punto. Sin embargo, para los propósitos de la tesis, la definición dada es suficiente.

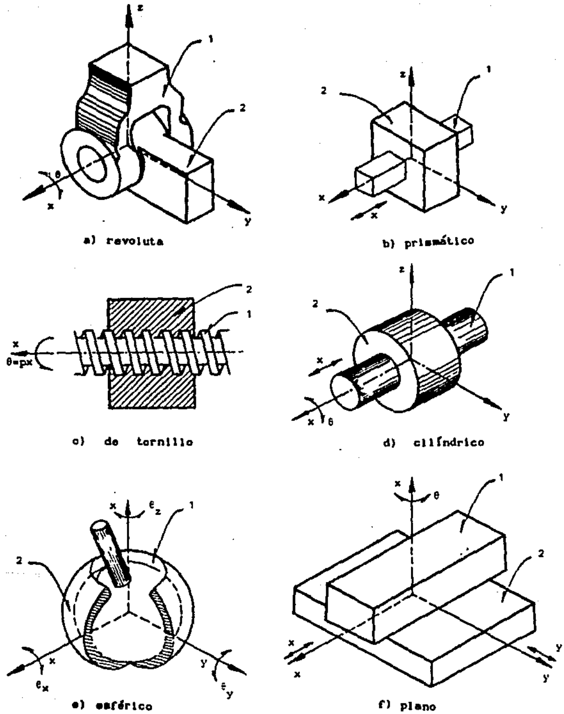

a) revoluta
b) prismático
c) de tornillo
θ=px
d) cilíndrico
e) esférico
f) plano

figura 5

embargo, la rotación y la translación están interrelacionadas. De modo que también este par inflige 5 restricciones al movimiento de cuerpo rígido.

El *par cilíndrico* permite dos movimientos, una translación a lo largo de una dirección, y una rotación alrededor de la misma dirección. En esto, el par cilíndrico se asemeja al par de tornillo; pero se diferencia de éste en que la translación y la rotación que permite, son independientes. Las restricciones impuestas por este par cinemático son 4.

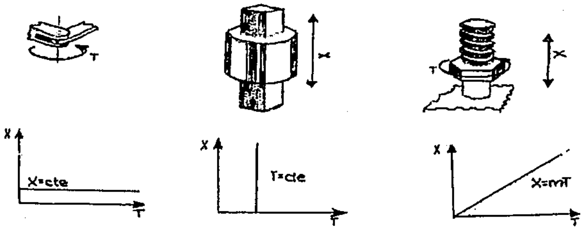
El *par esférico* permite la rotación alrededor de tres ejes no coplanares. Impone también tres restricciones.

El *par plano* permite la translación a lo largo de dos direcciones independientes, que descansan sobre un plano, y la rotación alrededor de una tercera dirección perpendicular al plano en el que yacen las otras dos.

Algunos autores [8] agrupan los tres primeros tipos descritos en una sola categoría que llaman *par de tornillo*. Según esta clasificación, al par de revoluta se le llama *tornillo de paso nulo*; al prismático, *tornillo de paso infinito*; y al de tornillo propiamente dicho, *tornillo de paso finito*.

La analogía de los dos primeros casos con el par de tornillo se evidencia a continuación: en el primero de ellos, se dice que se tiene un tornillo de paso nulo porque, no importando la magnitud de la rotación alrededor de la dirección característica del presunto tornillo, la translación a lo largo de la misma es nula; en el segundo, la translación puede tener cualquier valor en unidades de longitud, para la única posición angular posible. Por último, en el caso del par de tornillo propiamente dicho, la relación entre la rotación y la translación es lineal.

Las relaciones existentes entre la rotación (T) y la translación (x) en los tres casos de pares de tornillo, se ilustra gráficamente en la figura 6.



paso nulo paso infinito paso finito

figura 6

Al examinar las pendientes de las rectas representadas en la figura 6, se comprende el porqué de los nombres "nulo", "infinito" y "finito".

En este estudio se usará la clasificación tradicional, a menos que se indique lo contrario.

1.1.6 Subgrupos de Desplazamientos, y los Pares Inferiores Asociados a Algunos de Ellos

Como señalamos antes, a cada tipo de par inferior corresponde un subgrupo de desplazamientos. No obstante, no todo subgrupo de desplazamientos está asociado a un par inferior.

La tabla (1) tomada de la referencia [4], presenta los subgrupos del grupo de desplazamientos del cuerpo rígido {D}. Presenta también la dimensión que cada uno de estos grupos posee, y (si existen) los pares cinemáticos asociados.

Las letras empleadas como subíndices hacen referencia al nombre de un subgrupo determinado. Los símbolos entre paréntesis, representan los entes geométricos a los que el grupo en cuestión está asociado: las letras mayúsculas representan puntos en el espacio; la **e** representa un vector que define una dirección, y p representa el paso de un tornillo. Así por ejemplo,

$$g_H(A, p, \mathbf{e})$$

representa al par de tornillo de paso p (la H hace referencia a la *hélice* del tornillo) que gira alrededor de un eje que contiene al punto A, orientado según la dirección definida por el vector **e**. El avance de la tuerca (o del tornillo) se verifica por supuesto, a lo largo del mismo eje de rotación.

Algunos de los subgrupos que aparecen en la tabla (1) contienen a otros subgrupos, o dicho de otra forma, algunos subgrupos son subconjuntos de otros subgrupos. Por ejemplo,

TABLA 1 Grupos de desplazamiento

Dimensión	Notación	Denominación de un elemento	Elementos geométricos de definición	Pares asociados
0	E	transformación identica		union rigida entre cuerpos
1	$g_p(e)$	translación rectilínea	vector e que define movs. paralelos a él	Par prismático
1	$g_R(A,e)$	rotación alrededor de 1 eje	eje determinado por vector deslizante e y punto A	par de revoluta
1	$g_H(A,p,e)$	movimiento helicoidal	punto A, vector e y paso de tornillo p	par de tornillo
2	$g_{TP}(e_1,e_2)$	translación plana	plano P que define movs. parelelos a él	ninguno
2	$g_C(A,e)$	movimiento de cerrojo	eje determinado por vector deslizante e y punto A	par cilîndrico
3	$g_{TE}(e_1e_2e_3)$	translación espacial		
3	$g_{PL}(e)$	deslizamiento plano	plano P que define movs. paralelos a el	par plano
3	$g_{ES}(A)$	rotación esférica	punto A alrededor del rota un cuerpo	par esférico
3	$g_Y(p,e_1e_2e_3)$	movimiento Y	dirección de recta dada por vector libre V y paso de tornillo p	
4	$g_X(e)$	movimiento X	dirección de recta dada por vector libre V	
6	D	deplazamiento general		

$g_R(A,e)$ es un subconjunto de $g_{ES}(A)$ porque toda la familia de desplazamientos que concede el par de revoluta (cuyo eje pasa por el punto A, y está orientado según e), forma parte de todos los desplazamientos posibles alrededor del punto A que permite el par esférico $g_{ES}(A)$.

La tabla (2) adaptada de [5] establece las relaciones entre los diferentes subgrupos de desplazamiento.

TABLA 2 Subgrupos de los subgrupos del grupo D †

grupos \ subgrupos	P	R	H	TP	C	TE	PL	ES	Y	X
TP	sí									
C	sí	sí	sí							
TE	sí			sí						
PL	sí	sí		sí						
ES		sí								
Y (p≠0)	sí		sí	sí						
X	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí		sí	sí
D	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí

†Esta tabla es una simplificación de la dada por Hervé en su artículo [5]. Para que un grupo sea subgrupo de otro, es necesario que los entes matemáticos asociados a los dos sean compatibles, por ejemplo para que un movimiento de tornillo sea subconjunto de un movimiento de cerrojo, es necesario que A y el vector e sean los mismos en ambos casos.
Por brevedad, se suprimieron las literales indicadoras de puntos, vectores y pasos de tornillos, se suprimió también la letra g en todos los casos.

1.1.7 Definición de Cadena Cinemática y de Estructura Cinemática

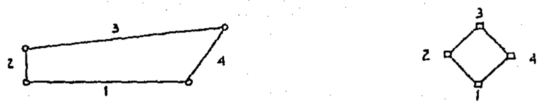
Entendemos por cadena cinemática a un sistema de cuerpos rígidos de geometría conocida, en el que cada uno de éstos está conectado a otro, mediante por lo menos un par cinemático, también de naturaleza conocida (aqui trataremos únicamente con pares cinemáticos inferiores), de tal manera que, es posible ir de un cuerpo cualquiera a cualquier otro mediante una trayectoria de cuerpos (o de pares cinemáticos). Auxiliándonos de la teoría de gráficas (o grafos), diríamos que la gráfica que representa una cadena cinemática es una gráfica conexa: esto es, para ir de un nodo (cuerpo rígido) a otro, existe al menos una trayectoria continua de ramas (pares cinemáticos).

La expresión *estructura cinemática* en cambio, se refiere única y exclusivamente a la organización de los eslabones que componen una cadena cinemática. Especificada una estructura cinemática, sabremos cuántos eslabones componen a la cadena que posee dicha estructura, mediante cuántos pares cinemáticos están conectados dichos eslabones, y de qué tipos son estos pares cinemáticos; pero nada podremos decir respecto de la geometría de los cuerpos que componen dichas cadenas.

1.1.8 Representaciones de cadenas cinemáticas

Se acostumbran dos representaciones de cadenas cinemáticas: en una, a la que llamaremos *directa*, los cuerpos rígidos (que en adelante denominaremos *eslabones*) se dibujan como segmentos de recta, o como regiones poligonales sombreadas, las cuales tienen tantos vértices como pares cinemáticos estén asociados a los eslabones representados por dichas regiones (es claro que a los eslabones representados por segmentos rectilíneos, corresponden solo dos pares cinemáticos); en la otra, que se sirve de la teoría de gráficas, y que llamaremos simplemente *gráfica*, los eslabones se representan como puntos, y los pares cinemáticos mediante líneas continuas, ya sean rectas o curvas. Un caso particular de esta representación se tiene cuando los vértices o *nodos* de la gráfica se dibujan como pequeños cuadrados. Llamaremos *representación alterna* a la correspondiente a este último caso.

Esta representación será de gran utilidad en este trabajo. En la figura 7 se muestran las representaciones directa y alterna de un mecanismo plano de 4 barras.



representación directa gráfica del mecanismo

figura 7 (mecanismo de 4 barras)

1.1.9 Definición de Enlace (Liaison)

En el estudio de cadenas cinemáticas pueden ser de interés los desplazamientos relativos entre dos eslabones cualesquiera, no necesariamente adyacentes. Todos los eslabones que intervienen en la interconexión de aquellos dos cuyo movimiento relativo interesa (inclusive estos), constituyen un *enlace* (o *liaison* (voz francesa)).

Todo enlace genera un *complejo de desplazamientos*, el cual puede tener o no, estructura de grupo.

En cierto sentido, puede afirmarse que el concepto de enlace es una generalización del de par inferior.

1.2 CRITERIOS DE MOVILIDAD

De aquí en adelante, por *movilidad* se entenderá al número de variables que es necesario especificar para que una cadena cinemática quede totalmente configurada, en tanto que la expresión *grados de libertad* se aplicará a un cuerpo rígido, perteneciente o no a una cadena cinemática, a un par cinemático, así como a una cadena cinemática. En este último caso, decir *grados de libertad de la cadena* equivaldrá a decir *movilidad*. Los grados de libertad de un cuerpo rígido serán el número de variables que es necesario especificar para determinar completamente la posición y orientación de un cuerpo rígido.

Todo par cinemático inferior produce, como hemos visto, restricciones en los grados de libertad de un cuerpo rígido. Es decir, reduce el número de variables que es necesario especificar, para poder determinar totalmente la posición relativa que guardan dos cuerpos rígidos.

1.2.1 Criterio de Kutzbach

Kutzbach propuso un criterio ampliamente utilizado en el cálculo de la movilidad que se basa en ciertas suposiciones que pueden resumirse como sigue:

1.-Un sistema de n cuerpos rígidos libres de moverse en el espacio (con excepción de uno de ellos, cuya posición de referencia se prescribirá fija) tiene 6(n-1) grados de libertad.

2.-Si estos cuerpos rígidos son conectados entre sí, cada interconexión (par cinemático) reducirá en alguna medida la movilidad, o dicho de otra forma, cada interconexión introducirá cierto número de restricciones, el cual deberá ser sustraído del número de grados de libertad del sistema original de cuerpos rígidos libres.

De este modo, la movilidad del sistema de eslabones interconectados se calcula según la fórmula

$$m=6(n-1)\ \sum r_i \qquad (4)$$

donde m=movilidad

n=número total de cuerpos que componen el sistema (uno de los cuales es fijo)

r_i=restricciones infligidas por el par cinemático i.

El criterio de Kutzbach se cumple siempre en cadenas cinemáticas que no contienen mallas (trayectorias cerradas); pero cuando éstas se presentan, dicho criterio puede cumplirse o no porque las mallas pueden no afectar el número de restricciones que realmente introduce un par cinemático dado; pero también pueden alterarlo.

De cualquier modo, puesto que en las etapas iniciales del diseño, poco o nada se sabe respecto de la geometría de las cadenas cinemáticas, y dada la sencillez del criterio de Kutzbach, éste sigue utilizándose ampliamente. No obstante, nos proponemos considerar otros criterios que ofrecen mayor certidumbre en la predicción de la movilidad de cadenas cinemáticas.

1.2.2 Criterio de Hervé

Es factible minimizar la falla del criterio de Kutzbach aplicado a cadenas cinemáticas de geometría conocida, mediante el enfoque debido a Hervé, que se sirve de los grupos de desplazamiento.

Este enfoque toma en consideración el hecho de que un complejo de desplazamientos originado por la interconexión de eslabonamientos múltiples, puede tener dimensión menor que 6.

Por esta razón, el criterio de Kutzbach (ec. 4) puede ser generalizado substituyendo el coeficiente 6 por [d], es decir, por la dimensión mínima del complejo que contiene todos los enlaces posibles de la cadena estudiada. Por supuesto, uno de los valores que puede tener [d] es 6. Entonces el criterio de Kutzbach generalizado es

$$m=d(n-1)-\sum r_i \quad (5)$$

Con el fin de comprender la reducción de la dimensión, considérese la cadena cinemática plana cerrada que se ilustra en la figura 8a.

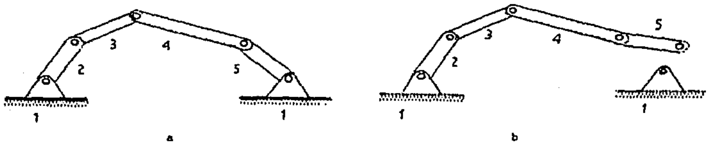


figura 8

Esta cadena tiene 5 eslabones y 5 pares de revoluta. Si retiramos el pasador que forma la articulación entre los eslabones 1 y 5, el conjunto de desplazamientos que puede efectuar el eslabón 5, tiene la misma dimensión que el grupo de desplazamientos asociado con el par plano, es decir, el eslabón 5 puede trasladarse sobre un plano, y rotar alrededor de un eje perpendicular a dicho plano. Así pues, la dimensión del conjunto de desplazamientos que puede realizar el eslabón 5 es 3 (y ésta es la dimensión asociada a la cadena cinemática en cuestión), a pesar de que es necesario especificar más variables -4 ángulos en total- de la cadena abierta para determinar completamente la posición del mencionado eslabón. Aquí se observa que la dimensión asociada a la cadena abierta, no necesariamente coincide con la movilidad de la misma.

Para esta cadena, las restricciones de cada articulación son 2 en todos los casos, puesto que la dimensión en el plano no es 6 sino 3, y puesto que todas las articulaciones de la cadena propuesta son de revoluta (adviértase que el cálculo de la restricción de cada par cinemático consiste en restar el número de grados de libertad de dicho par, de la dimensión de la cadena). De modo que la movilidad calculada según el criterio generalizado de Kutzbach para la cadena que nos ocupa es

$$m=d(n-1)-\Sigma r_i=3(5-1)-(2)(5)=2,$$

valor que coincide con el de la verdadera movilidad de la cadena propuesta.

Puede ser motivo de desconcierto, el hecho de que la dimensión del complejo de desplazamientos se calcule con la cadena abierta, y posteriormente, dicha dimensión se use para obtener la movilidad de la cadena cerrada. Una explicación es la siguiente: en primer lugar, téngase en cuenta que el criterio de Kutzbach tradicional (con d=6) proporciona resultados correctos para cualquier cadena abierta. El valor preciso de la dimensión se hace crítico al momento del cierre, ya que no todas las restricciones asociadas a un par de revoluta que serían efectivas al conectar un cuerpo rígido libre a una base fija, lo serán al cerrar la cadena propuesta, porque de antemano, el primer par de revoluta de la cadena abierta, ya se "hizo cargo" de tres de esas restricciones. Esto es, tres de las restricciones del par de revoluta que cierra la cadena plana, son redundantes. De las restricciones teóricas aportadas por el nuevo par cinemático (el que cierra la cadena), sólo serán efectivas las que actúan en el espacio de movimiento permitido por los otros pares cinemáticos. En el caso considerado, dicho espacio es el plano, y las dos restricciones "nuevas" impiden las translaciones a lo largo de dos direcciones alojadas en el mencionado plano.

Hasta este momento se ha manejado intuitivamente el concepto de dimensión, sin dar de él una definición; pero el ejemplo que se acaba de presentar, da pie para establecer una definición práctica de dicho concepto.

1.2.3 Definición de Dimensión

La dimensión de una cadena cinemática abierta, compuesta únicamente por eslabones binarios (eslabón binario ≡ eslabón que tiene únicamente dos pares cinemáticos asociados), es el número de grados de libertad que posee el eslabón extremo de la cadena en cuestión. Obérvese que al hablar de grados de libertad del cuerpo extremo no nos referimos a la movilidad total de la cadena, sino únicamente al número de coordenadas que pueden y deben ser especificadas para determinar completamente la posición y orientación de dicho cuerpo. La cadena cinemática a la que dicho cuerpo pertenece puede limitar este número, pero nunca puede hacerlo superior a 6. Esto puede comprenderse mejor si se consideran estos dos ejemplos:

1.-Una cadena cinemática compuesta únicamente por dos eslabones, uno fijo, y el otro articulado al primero mediante un par de revoluta. A cualquier agente externo que "intente" posicionar al eslabón móvil de la cadena propuesta, le será permitido modificar solamente una coordenada, a saber, un ángulo. Por lo tanto, el eslabón móvil tiene un grado de libertad. En este caso, la movilidad de la cadena cinemática coincide con los grados de libertad de su eslabón extremo, o sea con su dimensión.

2.-Una cadena cinemática espacial abierta constituida por eslabones binarios (excepto la base y el eslabón extremo), articulados entre ellos mediante 7 pares de revoluta. En este caso, la movilidad de la cadena cinemática es de 7, puesto que deben especificarse 7 variables para determinar completamente la configuración de dicha cadena; pero a un agente externo que "agarre" al eslabón extremo, le bastará especificar 6 coordenadas para posicionar éste, aunque la configuración de la cadena quede indeterminada (especificando las 6 coordenadas del eslabón extremo, la cadena queda "colgando").

Puede afirmarse que la movilidad de una cadena cinemática abierta es igual o mayor al número de grados de libertad del eslabón extremo.

1.2.4 Grados de Libertad Pasivos

En ciertas cadenas cinemáticas podrá encontrarse que no todos los grados de libertad de la cadena son determinantes en el movimiento relativo entre dos eslabones dados. El siguiente ejemplo facilitará la comprensión de esta situación.

Supóngase que se tiene el mecanismo ilustrado en la figura 9.

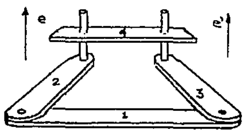


figura 9

En este mecanismo, el comportamiento de los eslabones 1, 2 y 3 es el mismo que tendrían estos eslabones si pertenecieran a un mecanismo de 4 barras ordinario.

Sin embargo, el eslabón 4 puede desplazarse a lo largo de la dirección de e o e', pues los pares cinemáticos 2-4 y 3-4 tienen en común el grupo de desplazamientos $g_p(e)$.

El número de grados de libertad pasivos, se obtiene a través de la fórmula

$$lp= \sum_{i=1}^{n-1} dim\{L(i,i+1)-dim\{L(1,n)\} \qquad (6)$$

donde

lp=grados de libertad pasivos

$L\{i,i+1\}$ representa el enlace entre el cuerpo i y el cuerpo i+1.

$L\{1,n\}$ el enlace entre el cuerpo 1 y el cuerpo n.

1.2.5 Determinación de la Dimensión de una Cadena Cinemática

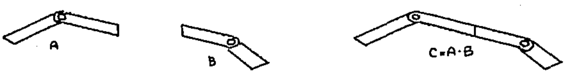
En muchos casos, la dimensión de una cadena cinemática puede encontrarse por simple inspección; pero cadenas cinemáticas que involucran muchos eslabones y pares cinemáticos, y cuya geometría es compleja, exigen una especial atención a este problema. Consideraremos en esta sección dos tipos de cadenas cinemáticas: cadenas abiertas compuestas de eslabones binarios (excepto la base y el eslabón extremo), y cadenas cerradas también compuestas por eslabones binarios.

Definiremos dos tipos de operaciones entre enlaces: la *composición*, y la *intersección*. Definiremos también, el concepto de *representación regular* de un enlace.

1.2.5.1 Composición

La composición de enlaces consiste en "encadenar" un enlace con otro, para formar un enlace más complejo que los enlaces originales, los cuales no comparten ningún eslabón. Para comprender mejor esto, considérese que se dispone de dos cadenas cinemáticas A y B (ver figura 11a), cada una de ellas formadas por dos eslabones articulados entre sí por un par de revoluta. Supóngase que uno de los eslabones de la cadena A, se "suelda" a uno de la cadena B (más adelante se llamará a esta "soldadura" *identificación formal de eslabones*). El resultado de esto es una nueva cadena cinemática C con movilidad 2, y compuesta por tres eslabones y dos pares cinemáticos (figura 11b). Mediante la composición de A y B se ha obtenido C (figura 11). La composición se puede representar como:

$$C = A \cdot B$$



(a) (b)

figura 11

Se dice que C es la composición de A y B.

1.2.5.2 Intersección

Supóngase que interesa el estudio del movimiento de un eslabón binario S perteneciente a una cadena cinemática cerrada. Este eslabón está conectado a un eslabón base, por vía de dos enlaces L_1 y L_2 (figura 12). Si desaparece uno de los enlaces, los grados de libertad conferidos al eslabón S por el enlace que permanece serán mayores que, o iguales a los que tiene el mismo eslabón estando presentes ambos enlaces. En general, es deseable que un enlace reduzca los grados de libertad que proporciona otro enlace al eslabón S, para de este modo, obtener una movilidad de la cadena cinemática, que haga útil a ésta.

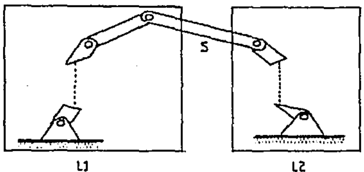


figura 12

Si se "sueldan" los eslabones extremos de dos enlaces, que tienen un eslabón base común, se obtiene como resultado una cadena cinemática cerrada, y se dice que existe intersección entre los enlaces originales. El eslabón S representa la "soldadura" de los eslabones extremos de L_1 y L_2. Como consecuencia de la intersección entre dos enlaces, existe intersección entre los complejos de desplazamientos que cada enlace produce. Esta intersección es a su vez un complejo de desplazamientos.

1.2.5.3 Representación Regular

En el ejemplo que usamos para explicar la operación de composición, la movilidad de la cadena A, así como la de la B, es 1. La movilidad del la cadena C es dos. En este ejemplo, la suma de las movilidades de las cadenas componentes es igual a la movilidad del enlace resultante. Cuando éste es el caso, se dice que los enlaces son indpendientes entre sí, y la intersección entre ellos da lugar al desplazamiento nulo E. Si por ejemplo, efectuamos la intersección de A y B (lo cual se consigue "soldando" los extremos de la cadena A con los de B), se observa que se obtiene una estructura rígida formada por dos eslabones unidos entre sí mediante dos pernos, con lo cual se comprueba que la intersección de A y B da como resultado el desplazamiento nulo E como única posibilidad.

Cuando la suma de las movilidades de dos enlaces componentes es mayor que la movilidad del enlace resultante, la intersección de estos dos enlaces dará lugar a algún subrupo de {D} distinto del desplazamiento nulo, y por lo tanto, a una cadena cinemática con movilidad distinta de cero. Cuando esto sucede, existe cierta *redundancia* en las libertades que aportan los distintos pares cinemáticos dentro de un enlace.

Para visulizar lo anterior, considérese una cadena cinemática abierta (figura 13), compuesta por tres eslabones a, b y c interconectados de la siguiente manera: a está conectado a b mediante un par plano; y b por su parte, está conectado a c mediante un par de revoluta cuyo eje es perpendicular al plano de deslizamiento entre los eslabones a y b.

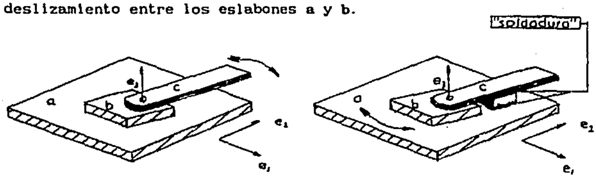


figura 13

Si se une rígidamente por algún medio el eslabón c al eslabón a, se cae en la cuenta de que el eslabón b ya no es capaz de transladarse a lo largo y ancho del plano, pero aún puede rotar alrededor del eje del par de revoluta. Entonces vemos que la rotación alrededor de este eje es *redundante*, pues es aportada tanto por el par plano, como por el par de revoluta. La dimensión del enlace formado por los eslabones a, b y c no es la suma de los grados de libertad de los pares cinemáticos involucrados (4 en este caso), sino 3. El enlace descrito, puede reemplazarse simplemente por un par plano entre los eslabones a y c, el cual tiene también dimensión 3.

El conjunto de desplazamientos generados por el enlace de los eslabones a, b y c, puede representarse como la composición entre el grupo de desplazamiento asociado al par plano, y el asociado al par de revoluta como sigue:

$$g_{PL} \cdot g_R$$

La representación anterior se dice que es *no regular* porque existen grados de libertad redundantes.

El mismo conjunto de desplazamientos puede representarse simplemente mediante la *representacion regular*

$$g_{PL}$$

ya que g_R es subconjunto de g_{PL}, y por lo tanto la intersección entre estos dos grupos de desplazamiento es el propio g_R. La representación "g_{PL}" se dice regular ya que en ella no hay grados de libertad redundantes.

Representación regular de un enlace es entonces, la composición de grupos de desplazamiento (subgrupos de {D}) que ofrece las mismas posibilidades de movimiento del eslabón extremo que dicho enlace, y que carece de grados de libertad redundantes.

Habiendo definido las operaciones composición e intersección, y el concepto de representación regular, estamos en condiciones de determinar la dimensión de una cadena abierta compuesta por eslabones binarios que contenga multitud de pares cinemáticos.

1.2.5.4 Procedimiento para determinar la dimensión de una cadena abierta

Pueden numerarse de uno en uno todos los eslabones comenzando por la base. Haciendo que un subíndice i tome valores enteros desde 2 hasta n, se une rígidamente a la base el eslabón i (considerado momentáneamente como eslabón extremo). Acto seguido, se determina el grado de redundancia, o lo que es lo mismo, la dimensión del conjunto de desplazamientos a que da lugar la intersección. Este número se resta de la suma de los grados de libertad de todos los pares cinemáticos que intervienen en el enlace entre el eslabón i y la base. El resultado de esta resta es la dimensión de dicho enlace. En caso de que la dimensión de la cadena obtenida por la intersección no sea nula, el último enlace analizado deberá substituirse por uno que tenga representación regular.

Al repetir el proceso anterior con i>2, en lugar de efectuar la suma de los grados de libertad de todos los pares cinemáticos que están entre la base y el eslabón i, basta con sumar únicamente la última dimensión obtenida y los grados de libertad del par formado por los eslabones i-1 e i.

Una vez que se ha repetido este procedimiento con los n eslabones, se obtiene la dimensión de la cadena abierta.

La dimensión asociada a una cadena cerrada simple (con una sola malla), es la de la cadena abierta que resultaría de dividir el eslabón base en 2, de modo que una de las "mitades" obtenidas siguiera siendo la base, y la otra se convirtiera en el eslabón extremo. Obtenida la dimensión asociada a la cadena cerrada, puede aplicarse el criterio generalizado de Kutzbach.

1.3 CLASIFICACIÓN DE LAS CADENAS CINEMÁTICAS ESPACIALES SEGÚN HERVÉ

Hervé [5] estudió las cadenas cinemáticas de acuerdo a su movilidad, e identificó 3 tipos de ellas:

1.-Cadenas cinemáticas **banales** o triviales: éstas son las que satisfacen el criterio generalizado de Kutzbach (criterio de Hervé). Las cadenas cinemáticas banales pueden asociarse a un único subgrupo dado {G} del grupo de desplazamientos {D}. Ejemplos de ellas son los mecanismos planos clásicos, los cuales están asociados al grupo de desplazamientos correspondiente al par plano; los mecanismos esféricos asociados a g_{ES}; y los mecanismos espaciales asociados a {D}.

2.-Cadenas cinemáticas **excepcionales**: En la referencia [5] y en †[3], Hervé llama cadenas excepcionales a aquéllas que no pueden asociarse a un único grupo de desplazamientos , y a las que, según él, no puede aplicarse el criterio generalizado de Kutzbach; pero cuya movilidad, sin embargo, puede determinarse mediante la composición y la interseccion. Al autor de la tesis no le queda claro qué se quiere decir con "...no pueden asociarse a un único grupo de desplazamientos...". Por otra parte, el propio autor

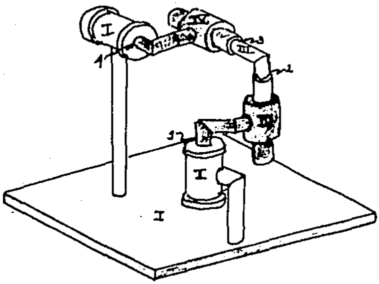
3 (Cfr. CLASIFICACION DE LOS MECANISMOS, artículo del volumen "Fundamentos Cinemáticos para el Diseño de Máquinas y Mecanismos", Centro de Educación Contínua de la Facultad de Ingeniería U.N.A.M., México D. F., 1981)

examinó los ejemplos que Hervé propone como cadenas excepcionales, y encontró que, tras de hacer ciertas consideraciones, es realmente posible aplicar el criterio generalizado de Kutzbach.

A manera de ejemplo, considérese la junta de Koenigs (figura 13'a). Esta cadena cinemática consta de 4 cuerpos los cuales aparecen designados en la citada figura mediante números romanos. Los pares cinemáticos 1 y 4 de la cadena son de revoluta, en tanto que los pares 2 y 3 son cilíndricos.

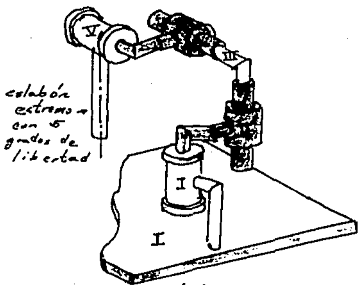
Supóngase que la base se divide en 2, a modo de obtener una cadena cinemática abierta con 4 pares cinemáticos (figura 13'b.). El eslabón extremo de esta cadena abierta tiene 5 grados de libertad, ya que un eje (distinto del eje de la articulación) perteneciente al eslabón extremo puede situarse como se desee (recuérdese que una línea posee 5 grados de libertad: las 3 coordenadas cartesianas de uno de sus puntos, y los 2 ángulos que forma con sendos ejes de referencia). Las posibilidades de movimiento del mencionado eslabón extremo no corresponden a ninguno de los grupos de desplazamiento identificados por Hervé, sin embargo, constituyen un complejo de desplazamientos de dimensión 5, y este valor puede utilizarse como la dimensión asociada a la cadena original, en la fórmula generalizada de Kutzbach. Si esto se hace, se obtiene una movilidad de uno, que es efectivamente la movilidad de la junta de Koenigs.

La dimensión de la cadena cinemática que Hervé presenta como ejemplo de cadena excepcional en la referencia [5], y que aparece



Junta de Koenig

(a)



(b)

figura 13'

ilustrada en la figura 1b del capítulo 3, puede ser también determinada mediante el criterio generalizado de Kutzbach, si se tiene en cuenta lo siguiente: si los ejes de los pares cilíndricos de dicha cadena no fueran coplanares, la dimensión asociada a ésta sería 6, y la cadena sería en realidad una estructura rígida, hecho que el criterio de Kutzbach (tradicional o generalizado) predice correctamente. Pero, al hacer coplanares los tres ejes, se está haciendo una translación dependiente de las otras 2, y por lo tanto se está reduciendo en 1 la dimensión. Consecuentemente, la dimensión asociada a la cadena en cuestión es 5. Usando este valor en la fórmula generalizada de Kutzbach, se obtiene una movilidad de 1, que es efectivamente la movilidad de la cadena que nos ocupa.

La hipótesis de que el criterio de generalizado Kutzbach puede utilizarse para determinar la movilidad de las cadenas que Hervé llama excepcionales, sólo se comprobó en contados casos particulares, de los cuales fueron comentados exclusivamente 2. Sin embargo, el hecho de que en todos los casos analizados fue posible encontrar la forma de aplicar la fórmula generalizada de Kutzbach, conduce a pensar que dicha fórmula puede aplicarse a toda cadena "excepcional". Esto queda por demostrarse.

3.-Cadenas cinemáticas paradójicas: aquéllas cadenas cuya movilidad no puede ser determinada mediante la teoría de grupos, se llaman paradójicas. Ejemplos de estas cadenas son la cadena formada por la superposición de un mecanismo plano de 4 barras y sus dos conjugados, los cuales se pueden encontrar a partir del teorema de Roberts; el mecanismo de 4 barras de Bennett, y los mecanismos de 6 eslabones, llamados isómeros, que fueron descritos por Wohlhart [11]. Todos ellos presentan ejes de simetría, los cuales confieren a dichos mecanismos la movilidad que poseen.

1.4 MÉTODOS DE SÍNTESIS ESTRUCTURAL DE CADENAS CINEMÁTICAS

En las secciones anteriores se presentaron de manera sucinta, algunos elementos del análisis de Hervé que se creyeron útiles para la comprensión de lo que resta de este capítulo.

La metodología de Hervé sirve fundamentalmente para analizar cadenas cinemáticas de geometría conocida, y explicar de manera racional, porqué dichas cadenas tienen determinada movilidad. Es pues la metodología de Hervé, una herramienta de *analisis*. Sin embargo, cuando se crean o se *sintetizan* cadenas cinemáticas, deben hacerse ciertas suposiciones generales respecto de su movilidad, puesto que inicialmente se desconoce la geometría de la cadena que se empieza a sintetizar.

Nos proponemos ahora explicar dos métodos de síntesis estructural de cadenas cinemáticas: el método de Shujun [10], y el método de Rooney y Earl [8]. A este último, lo llamaremos método modular.

Puede decirse que el método de Shujun es *exhaustivo*, en el sentido de que se propone encontrar el número máximo de soluciones posibles. El método modular en cambio, es *constructivo* porque con él se pueden obtener cadenas cinemáticas complejas, a partir de cadenas más sencillas. Este método depende esencialmente de la iniciativa de' diseñador.

1.4.1 Método de Shujun

Shujun propone una fórmula de movilidad para cadenas cinemáticas que contienen múltiples mallas (sólo se admiten mallas cerradas), que es la siguiente:

$$2(F + \sum_{j=2}^{6} j \cdot E_j) = \Sigma(i+j) + \Sigma(i+j+k) + \ldots \qquad (7)$$

donde

F representa los grados de libertad de la cadena.

E_j es la suma de mallas cuyos *eslabones extremos* tienen j grados de libertad.

(i+j): en este término i y j representan los grados de libertad de los pares cinemáticos asociados a un eslabón binario.

(i+j+k): en este término, análogo al anterior i, j y k representan los grados de libertad de los pares cinemáticos asociados a un eslabón ternario.

La notación con los términos (i+j), (i+j+k) y términos similares correspondientes a eslabones que tengan asociados más de tres pares cinemáticos, parece inapropiada desde un punto de vista matemático, y resulta confusa. Para evitarla, se escribirá el segundo miembro de la ecuación 7 como $2\sum_{i=1}^{n} P_i$ donde n es el total de pares cinemáticos de la cadena estudiada, y P_i es la movilidad del i-ésimo par cinemático.

De este modo, la ecuación (7) puede escribirse

$$2(F + \sum_{j=2}^{8} j \cdot E_j) = 2\sum_{i=1}^{n} P_i \qquad (8)$$

Los grados de libertad del eslabón extremo de una malla, son idénticos a la dimensión de la cadena que se obtendría si se suprimieran todos los pares cinemáticos no pertenecientes a la malla en cuestión, y se dividiera en dos partes un eslabón considerado fijo, de modo que la nueva cadena cinemática tuviera un eslabón más que la malla que le dio origen.

Una cadena cinemática de L mallas independientes con N eslabones debe cumplir las siguientes relaciones:

$$\sum_{q=2}^{q_{max}} B_q = N \qquad (9)$$

y

$$\sum_{q=3}^{q_{max}} (q-2)B_q = 2(L-1) \qquad (10)$$

donde B_q es el total de eslabones con q pares cinemáticos asociados. El valor de q_{max} es menor o igual a L+1. Es decir que el máximo número de pares cinemáticos que pueden estar asociados a un eslabón perteneciente a una cadena cinemática con L mallas independientes es L+1.

De la relación (9) puede despejarse B_2, y de la relación (10), puede despejarse B_3. De este modo, B_2 y B_3 pueden calcularse como función de las otras B_q $(q \geq 4)$. El resultado de estos despejes es:

$$B_2 = N - \sum_{q=3}^{q_{max}} B_q \tag{11}$$

$$B_3 = 2(L-1) - \sum_{q=4}^{q_{max}} (q-2)B_q \tag{12}$$

El método de síntesis de Shujun consiste en los siguientes pasos:

1.-Dados el número de eslabones N y el número de mallas L, calcular los números de eslabones binarios y con múltiples pares asociados utilizando las relaciones (11) y (12). A través de un programa de computadora púeden encontrarse de manera sistemática valores de las variables libres B_q de modo que todas las B_q sean enteras positivas (o nulas), y satisfagan los requerimientos de las citadas relaciones. En el apéndice A se incluye una rutina en BASIC (PADRONCAD) que hace este trabajo. Debe señalarse que este paso puede hacerse con lápiz y papel si el número de mallas y el de eslabones son pequeños; números mayores comienzan a hacer indispensable el uso de la computadora.

Sin embargo, aún para ésta, la tarea de encontrar todos los juegos de eslabones posibles para números de eslabones y mallas demasiado grandes, puede ser prohibitiva.

2.-Una vez obtenidos conjuntos de valores de B_q apropiados, deben interconectarse los eslabones de cuantas formas sea posible, para formar todos los tipos de cadenas cinemáticas que tengan el número de mallas independientes especificado desde un principio (en este punto, aún no se ha especificado la naturaleza de los pares cinemáticos que resultan de la interconexión de eslabones). Shujun no presta mucha atención a este problema; el cual, sin embargo, no es de ninguna manera trivial, ya que para números de eslabones y de mallas no muy grandes ($N, L < 10$), la cantidad de interconexiones posibles puede ser muy considerable. En el capítulo 3 se tocará este punto con mayor detalle.

3.-Obtenidos los tipos de cadenas cinemáticas que pueden formarse con los conjuntos de eslabones obtenidos en el paso 1, mediante un programa de computadora se hace variar la movilidad de cada uno de los pares cinemáticos de un tipo de cadena cinemática desde 1 hasta 3 (según Shujun hasta 5[4], pero nosotros sólo estamos interesados en cadenas compuestas por pares inferiores), y se analiza qué conjuntos de movilidades satisfacen la ecuación (7). De los conjuntos que la satisfacen, puede haber algunos, que

[4] Una esfera en contacto permanente con un plano, sería un ejemplo de par cinemático superior con movilidad 5

aunque por su ordenamiento parezcan distintos, representen en realidad a la misma cadena cinemática. A tales conjuntos se les llama isomorfos. Cuando éstos aparecen, deben eliminarse todos ellos menos uno. De este modo se asegura que todos los conjuntos de movilidades que la computadora imprima, representan cadenas cinemáticas distintas.

En la impresión de los resultados del paso 3, cada grupo de dígitos contiguos deberá interpretarse como un eslabón, y cada dígito como la movilidad de uno de los pares cinemáticos asociados al eslabón correspondiente. Así por ejemplo, en el ordenamiento

3123 223 131 12 23 32

que representa una cadena de 6 eslabones, el primer grupo representa un eslabón cuaternario (con 4 pares asociados); el segundo y el tercero representan eslabones ternarios, y los últimos 3, eslabones binarios. El primer eslabón tiene dos pares cinemáticos de movilidad 3, uno de movilidad 1, y otro de movilidad 2. Los eslabones representados por los grupos del ordenamiento anterior sólo pueden sen interconectados en una única forma, uniendo "vértices" de eslabones con igual movilidad, y por lo tanto, dicho ordenamiento representa una única cadena cinemática (sólo desde el punto de vista topológico, ya que puede haber varias realizaciones geométricas de la misma topología). Queda, por supuesto, excluída la posibilidad de interconectar un eslabón consigo mismo. Además no deben existir mallas abiertas.

En el capítulo 3 se explicará en detalle cómo auxiliarse de la computadora para usar el método de Shujun. Asimismo, se comentarán las ventajas y desventajas de dicho método, y algunos de sus resultados.

1.4.2 Método Modular

A diferencia del método de Shujun, el modular admite cadenas tanto cerradas como abiertas.

Fundamentalmente, este método consiste en considerar a una cadena cinemática de propiedades estructurales (topológicas) conocidas, como un módulo. La interconexión de varios módulos obedeciendo a ciertas reglas, da origen a nuevos módulos. De esta manera pueden crearse cadenas cinemáticas complejas.

Para comprender el método modular es necesario definir antes algunos conceptos:

1.4.2.1 Identificación Formal de Eslabones

En el método modular no se trata a los eslabones como unidades aisladas que al ser conectadas a otras unidades semejantes originan la aparición de nuevos pares cinemáticos. Más bien se considera a los propios pares cinemáticos como las unidades elementales a partir de las cuales, se construyen las cadenas cinemáticas. La forma en la cual son unidos unos pares cinemáticos con otros para generar cadenas cinemáticas, se llama identificación formal de eslabones, y consiste en "soldar" o unir rígidamente un eslabón perteneciente a un par cinemático a un eslabón perteneciente a otro par cinemático. Se dice entonces que los eslabones a unir se "identifican formalmente" (figura 14).

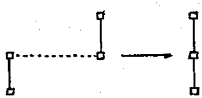


figura 14

La identificación formal de eslabones simplifica la construcción de cadenas cinemáticas porque en ella no se crean nuevos pares cinemáticos. Mediante el procedimiento de identificación formal, la suma de pares cinemáticos de todos y cada uno de los módulos tomados aisladamente, es igual al total de pares cinemáticos que contiene la cadena cinemática compuesta por los mencionados módulos.

1.4.2.2 Componentes de Actuación

Un componente de actuación elemental es aquella cadena cinemática en la que todas las articulaciones están controladas por motores. Aquellos eslabones del componente de actuación cuyo movimiento interesa, se consideran las *salidas* de dicho componente.

Considérese el par cinemático representado en la figura 15.

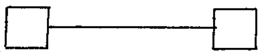


figura 15

Si este par cinemático tiene movilidad uno (v. gr., par de revoluta o par de tornillo) y el movimiento relativo entre los eslabones que lo componen está controlado por un motor, constituye entonces el componente de actuación más elemental.

Si tenemos 6 de estos componentes de actuación, e identificamos formalmente un eslabón del componente 1 con uno del componente 2, el otro eslabón del componente 2 con un eslabón del componente 3, y así sucesivamente (figura 16), entonces obtendremos

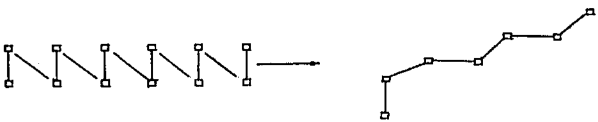


figura 16

un manipulador en serie con 6 articulacines (6 grados de libertad) (figura 17). Se sobreentiende que el eslabón del componente 1 que no está conectado a ningún otro, corresponde a una base fija en el espacio.

Puede considerarse que el manipulador en serie es en sí mismo un componente de actuación.

Rooney y Earl restringen su definición de componente de actuación a cadenas cinemáticas que no tienen mallas cerradas. Sin embargo, este concepto puede extenderse a cualquier cadena cinemática cuya movilidad sea igual al número de articulaciones de la cadena que estén controladas por motor (a cada grado de libertad de la cadena corresponde un motor).

1.4.2.3 Movilidad Efectiva

Sea una cadena cinemática abierta K. El conjunto de todos los eslabones de la cadena K vendrá representado por L. Supóngase que un subconjunto I de L está formado por eslabones cuya posición y orientación están controladas por agentes externos, v. gr., componentes de actuación. Llamaremos al conjunto I el conjunto de *entradas* de la cadena cinemática K. Si no es suficiente fijar la posición y orientación de todos y cada uno de los eslabones pertenecientes a I, para determinar completamente la configuración de la cadena K, entonces deberá controlarse cierto número de articulaciones (o más generalmente, de grados de libertad) de la cadena K. Este número recibe el nombre de movilidad efectiva de la cadena K.

Matemáticamente,

$$m_{ef}(K) = m(K) - 6(|I| - 1) \tag{13}$$

donde $m_{ef}(K)$ = movilidad efectiva

$m(K)$ = movilidad total de la cadena K si las entradas no son controladas

$|I|$ = cardinalidad del conjunto I

Aparentemente en una ecuación como la (13), el coeficiente 6 puede substituirse por 3 si se sabe que la cadena es plana.

Un par de ejemplos confirman la hipótesis de que las cadenas planas admitirán la ecuación

$$m_{ef}(K) = m(K) - 3(|I| - 1)$$

Estos ejemplos se ilustran en la figura 17. Estableceremos que ambas cadenas tienen dos eslabones de entrada.

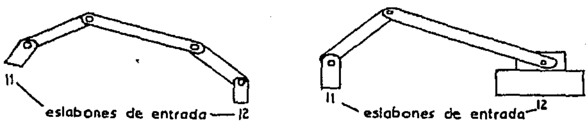


figura 17

Si se fijan la posición y la orientación de los eslabones de entrada, se obtienen mecanismos bien conocidos de movilidad 1. Justamente, la movilidad efectiva de las dos cadenas cinemáticas ilustradas es 1. Aún con 2 entradas, es necesario conducir una articulación de cada una de las cadenas para controlar completamente su movimiento.

1.4.2.4 Componentes de Distribución

Rooney y Earl definen al componente de distribución como una cadena cinemática cuya movilidad efectiva es cero. Esto quiere decir que el movimiento de un componente de distribución está completamente controlado por las entradas.

La figura 18 ilustra componentes de distribución planos.

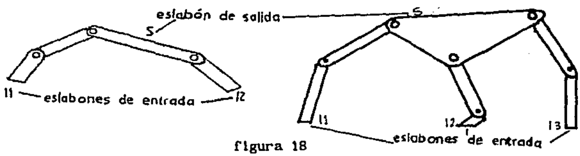


figura 18

Todos los pares cinemáticos son de revoluta.

La figura 19 muestra las representaciones alternas correspondientes a los componentes de distribución de la figura 18.

figura 19

1.4.2.5 Generación de Estructuras Cinemáticas Más Complejas Aplicables a Manipuladores

La cadena cinemática ilustrada en la figura 20 es un componente de actuación con 3 motores que conducen sendos pares de revoluta.

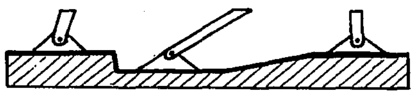


figura 20

Si las entradas I_i del componente de distribución de la figura 18 se identifican formalmente con las respectivas salidas S_i del componente de actuación considerado, se obtiene un manipulador plano de tres grados de libertad (figura 21). Este manipulador permite posicionar y orientar un cuerpo rígido en el plano. Genera

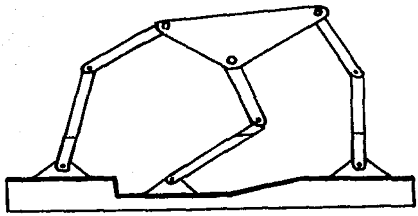


figura 21

el grupo de desplazamientos g_{PL}, al igual que un manipulador plano en serie, formado por una cadena abierta de cuatro eslabones articulados por tres pares de revoluta. Podemos decir que el manipulador que acabamos de obtener está en paralelo.

Desde un punto de vista práctico, el manipulador en serie tiene la ventaja de poder mover un objeto en un área más amplia que el manipulador en paralelo; pero éste por su parte aventaja a aquél por ser más estable, por ejemplo, si se desea manipular un cuerpo dentro de un plano vertical.

La filosofía de identificar formalmente las salidas de un módulo con las entradas de otro, permite generar estructuras cinemáticas muy complejas, que pueden utilizarse para generar manipuladores o componentes de manipuladores (v. gr., el órgano terminal de un manipulador).

En el capítulo 3 se presentarán ejemplos de estructuras cinemáticas de cadenas espaciales, generadas mediante el método modular, y la realización mecánica de una de ellas. En dicho capítulo se tratará también de conjuntar el uso de los métodos exhaustivos y constructivos.

2 ANÁLISIS DE POSICIÓN DE CADENAS CINEMÁTICAS ESPACIALES

Se distinguen dos tipos de problemas en el estudio del movimiento de manipuladores[1]: el directo, y el inverso.

Se llama problema cinemático directo, o simplemente cinemática directa, a la obtención del movimiento de un eslabón de interés u órgano terminal (posición y/o trayectoria, velocidad y aceleración) generado por un movimiento conocido de los motores del manipulador. Por ejemplo, si se tiene un manipulador que tiene n motores, cada uno de los cuales produce un movimiento relativo circular, resolver la cinemática directa consistiría en encontrar el movimiento del órgano terminal, si se han especificado θ_i, $\dot{\theta}_i$, $\ddot{\theta}_i$ para los n motores.

El problema cinemático inverso, o la cinemática inversa, es el problema opuesto al anterior. La cinemática inversa consiste pues, en hallar los movimientos que deben realizar los motores para obtener un movimiento prescrito del órgano terminal. Así, para un manipulador con n motores rotatorios, resolver la cinemática inversa equivale a averiguar cuáles deben ser θ_i, $\dot{\theta}_i$, $\ddot{\theta}_i$ de los n motores para producir el movimiento deseado del órgano terminal.

[1] A lo largo de este capítulo utilizaremos indistintamente los términos manipuladores y cadenas cinemáticas, ya que los métodos aplicables a aquéllos son también aplicables a otros tipos de cadenas cinemáticas.

Para resolver tanto el problema cinemático directo como el inverso se emplean diversas técnicas matemáticas como son: uso de matrices ortogonales de 3X3, matrices homogéneas de 4X4, matrices de números duales, álgebra de tornillos, y polinomios de alto grado. Estos últimos permiten obtener las llamadas soluciones en forma cerrada, es decir todas las configuraciones posibles que puede adoptar una cadena cinemática (manipulador o mecanismo) para un conjunto de entradas dado. A modo de ejemplo, considérese un mecanismo plano de 4 barras como el de la figura A. A pesar de que este mecanismo tiene un único grado de libertad, o sea una sola entrada, puede armarse de dos maneras distintas para el mismo valor de la entrada θ_1.

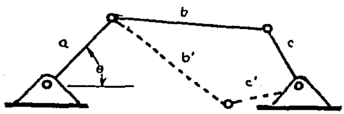


figura A

En la figura se aprecia que las longitudes b y b' son iguales entre sí, como lo son c y c'. La línea discontinua muestra una solución alternativa para la misma entrada θ_1.

El estudio de la cinemática mediante polinomios permite encontrar esta multiplicidad de soluciones. En el apéndice D se ilustrará el uso de polinomios con una cadena cinemática particular.

El método que emplea matrices ortogonales de 3X3, que es el que se explicará en este capítulo, y al que llamaremos método vectorial matricial (VM), sirve de base para obtener soluciones mediante una técnica de continuación, la cual requiere de que se parta de una configuración cercana a alguna de las soluciones, para iterativamente, encontrar ésta. Este método ofrece algunas ventajas que serán comentadas oportunamente.

En lo que resta de este capítulo se expondrá pues, el método vectorial matricial que usa matrices ortogonales de 3X3, partiendo de nociones elementales, y avanzando gradualmente con un enfoque inductivo, hasta obtener una formulación aplicable a multitud de cadenas cinemáticas y manipuladores.

2.1 TRANSFORMACIONES ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES

Un mismo vector puede ser descrito desde distintos marcos de referencia. En esta sección determinaremos la manera cómo -conociendo las componentes de un vector r en un sistema ortogonal B- podemos describir al mismo vector desde un sistema ortogonal A.

Estableceremos los principios de transformación de coordenadas en el plano, y generalizaremos más tarde dichos principios al estudio de sistemas de coordenadas tridimensionales.

2.1.1 Transformaciones de Coordenadas Rectangulares en Sistemas Bidimensionales

Imagínense dos sistemas de referencia ortogonales: uno [Oxy], y el otro [O'x'y']. Supóngase que este último ocupa una posición arbitraria respecto a aquél, de tal manera que no coinciden ni los orígenes O y O', ni las orientaciones entre los ejes [x] y [x'] y [y] y [y'] respectivamente, como lo muestra la figura 1.

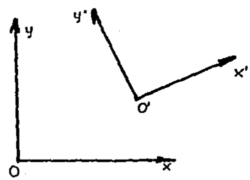


figura 1

Siempre será posible llevar el sistema [O'x'y'] a que coincida exactamente con el sistema [Oxy] mediante dos operaciones fundamentales: una translación que lleve el origen O' a coincidir con el origen O, y una rotación que iguale, respectivamente, las orientaciones de los ejes [x] y [x'], y [y] y [y'] (la figura 2 muestra este movimiento del sistema [O'x'y']). Desde luego es posible llevar de regreso el sistema [O'x'y'] a su posición inicial, también mediante una translación y una rotación.

Como sugiere la figura 2, en una translación pura se conserva la orientación de los ejes. En una rotación, en cambio, todos los

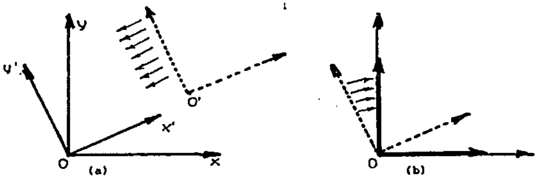


figura 2

puntos del sistema, excepto aquél alrededor del cual se produce la rotación (que permancece fijo), describen segmentos de circunferencia concéntricos (si se tratara de una rotación pura tridimensional, los puntos que se desplazarían, lo harían sobre superficies esféricas concéntricas).

Analizaremos ahora la forma de encontrar las componentes de un vector en un sistema [Oxy], conocidas las componentes del mismo vector en un sistema [O'x'y'] que está transladado y rotado respecto al sistema [Oxy].

2.1.1.1 Sistemas de Coordenadas Transladados

Consideremos ahora los dos sistemas de referencia [Oxy] y [O'x'y'] de la figura 3a. El segundo está transladado con respecto al primero.

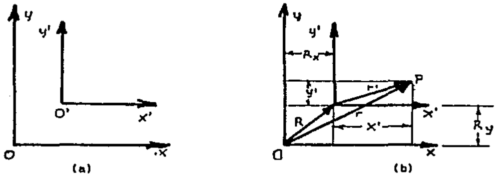


figura 3

Supóngase ahora un punto P (figura 3b) cuyas posiciones respecto a [Oxy] y [O'x'y'] están dadas por los vectores r y r' respectivamente.

Es útil advertir que a pesar de que los extremos del vector r' tienen distintas coordenadas en los dos distintos sistemas, las proyecciones sobre los ejes [x] y [x'] son iguales entre sí, como lo son las proyecciones sobre los ejes [y] y [y'].

Por lo tanto, si se conocen el vector r' y el vector **R** (que da la ubicación del origen [O'] con respecto al sistema [Oxy]), entonces, las componentes del vector r serán

$$x=R_x+x'$$
$$y=R_y+y' \qquad (1)$$

como puede apreciarse en la figura 3b.

2.1.1.2 Sistemas de Coordenadas Rotados

Considérese el vector r y los sistemas de referencia mostrados en las figuras 4a. y 4b.

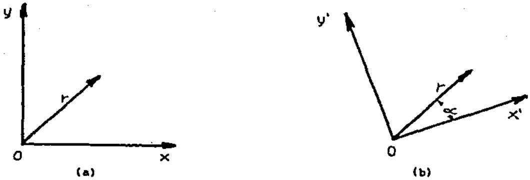


figura 4

En ambas figuras tenemos un mismo vector r; pero referido a dos distintos sistemas de coordenadas ortogonales que comparten el mismo origen (aunque aquí se han dibujado separadamente).

Superpongamos la figura 4b a la figura 4a haciendo coincidir los vectores r de cada una de las figuras (recuérdese que se trata en realidad del mismo vector). De esta manera podemos nosotros

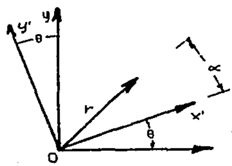


figura 5

observar cómo está orientado el sistema [O'x'y'] (B) con respecto al sistema A ([Oxy]). Esta situación puede apreciarse en la figura 5, en la cual podemos comprobar que el eje [x'] está desplazado un ángulo θ con respecto al eje [x], del mismo modo que el eje [y'] se encuentra desplazado también un ángulo θ respecto al eje [y].

Según puede inferirse de la figura 5, las componentes rectangulares del vector r en el sistema [Oxy] son

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta+\alpha) \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\theta+\alpha) \end{aligned} \qquad (2)$$

y en el sistema [Ox'y'] son

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\alpha \\ y' &= r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{aligned} \qquad (3)$$

De la trigonometría sabemos que

$$\begin{aligned} \cos(\theta+\alpha) &= \cos\theta\cos\alpha - \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\alpha \\ \mathrm{sen}(\theta+\alpha) &= \mathrm{sen}\theta\cos\alpha + \mathrm{sen}\alpha\cos\theta \end{aligned} \qquad (4)$$

de modo que las ecuaciones (2) pueden escribirse como

$$x=r(\cos\theta\ \cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\alpha)$$

(5)

$$y=r(\operatorname{sen}\theta\ \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\ \cos\theta)$$

Substituyendo $r\cos\alpha$ por x' y $r \operatorname{sen}\alpha$ por y', obtenemos después de algunas manipulaciones algebraicas,

$$x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta = x$$

(6)

$$x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta = y$$

Este es un sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas que puede ser escrito en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Definición

A la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

de la ecuación (7) se le llama matriz de rotación.

Este nombre lo recibe en virtud de que el premultiplicar el vector **r** expresado en términos del sistema [Oxy] por dicha matriz, equivale a rotar aquél un ángulo θ: hecho que puede verificar el lector numéricamente con un vector r, y un ángulo θ elegidos arbitrariamente.

La ecuación (7) permite encontrar las componentes x e y del vector r si se conocen θ, x' e y'.

Si se desea conocer x' e y' dados θ, x e y, ambos miembros de la ecuacion (7) deben ser premultiplicados por la matriz inversa de la matriz de rotación, con el fin de hacer dicha ecuación explícita en x' e y'.

Para encontrar la inversa de la matriz de rotación, aprovecharemos el hecho de que, por ser ésta una matriz *ortogonal*, su inversa es igual a su transpuesta. Entonces, al premultiplicar ambos miembros de la ecuación (7) por la transpuesta de la matriz de rotación, obtenemos una ecuación explícita en x' e y' que es

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Base, ortogonalidad, conjuntos ortonormales(2)†

Aquí explicamos, con ayuda de ejemplos, los términos *base*, *ortogonal* y *ortonormal* dentro del ámbito que a nosotros concierne (cabe señalar que el producto interno que utilizaremos aquí, es el llamado producto punto, es decir, el habitual entre vectores pertenecientes a R^n, definido por

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots u_n v_n$$

2

† Puede omitirse la lectura de esta sección si pérdida de continuidad.

para vectores $u=(u_1,u_2, \ldots ,u_n)$ y $v=(v_1,v_2, \ldots , v_n)$).

Base

El conjunto $\{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ se llama una base de R^2 porque combinando linealmente los dos vectores que lo forman, se puede obtener cualquier vector del espacio R^2. Lo anterior puedeexpresarse matemáticamente de la siguiente forma:

Todo vector $r \in R^2$ puede obtenerse mediante la ecuación

$$r=x'(1,0)^T + y'(0,1)^T$$

o engeneral (8)

$$r=x'u + y'v$$

donde $x', y' \in R$, y $u, v \in R^2$ son vectores que forman una base.

Conjuntos Ortogonales

Un conjunto de vectores en el que el producto interno entre cualesquiera dos de sus elementos es cero, es ortogonal (excepto cuando un vector se multiplique puntualmente por sí mismo, caso en el cual, el producto interno será distinto de cero).

Conjuntos ortonormales

El conjunto ortogonal cuyos vectores tienen todos longitud unitaria, se llama ortonormal. En otras palabras, conjunto ortonormal es aquel conjunto ortogonal cuyos vectores han sido *normalizados*. La longitud de un vector es uno si $(u \cdot u)^{1/2}=1$.

Los términos ortogonal y ortonormal, que son aplicados en muy variadas situaciones dentro de las Matemáticas, cobran un significado especial en casos en los que tienen interpretación geométrica, en los cuales de hecho tuvieron su origen. Precisamente en nuestro análisis, los términos ortogonal y ortonormal tienen un sentido geométrico, como veremos en breve.

Consideremos ahora los vectores $(1,0)^T$ y $(0,1)^T$ referidos al sistema de coordenadas [Ox'y']. Calculemos de acuerdo con la ecuación (7), el "aspecto" de estos vectores observados desde el sistema [Oxy].

Para el vector $x'=(1,0)^T$ (o bien $x'=1$, $y'=0$), se tiene

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \qquad (10)$$

y para el vector $(0,1)^T$ ($x'=0$, $y'=1$),

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (11)$$

El resultado de la ecuación (10) es un vector de longitud unitaria dirigido a lo largo del eje [x'], y el obtenido en (11), es un vector también unitario, pero dirigido a lo largo del eje [y']. Los vectores $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)^T$ y $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)^T$ son además perpendiculares entre sí, lo cual puede demostrarse efectuando el producto punto entre ambos vectores. Esto también puede visualizarse gráficamente.

Obsérvese por otra parte, que las operaciones realizadas en (10) y en (11), han preservado los vectores columna ($(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)^T$ y $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)^T$ respectivamente) de la matriz de rotación.

Con base en este análisis podemos concluír que la columna izquierda de la matriz de rotación contiene las componentes x e y de un vector unitario dirigido a lo largo del eje [x'], y asimismo la columna derecha contiene las componentes x e y de un vector unitario dirigido a lo largo del eje [y']. Estos dos vectores son perpendiculares u ortogonales entre sí, y ello justifica que se diga que la matriz de rotación es ortogonal. Además estos vectores columna constituyen una base de R^2, y el premultiplicar un vector $(x',y')^T$ por la matriz de rotación equivale a combinar linealmente los vectores de la base $((\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)^T$, $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)^T)$.

Esta interpretación se confirma al examinar detenidamente la ecuación (7), y al caer en la cuenta de que dicha ecuación no es otra cosa que una combinación lineal (ecuación (9)) de los vectores $\mathbf{u}=(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)^T$ y $\mathbf{v}=(-\operatorname{sen}, \cos\theta)^T$ mediante los escalares x' e y'. Y a través de esta combinación, se tiene el vector $\mathbf{r}$ en términos de las coordenadas x e y, dadas x' e y'. Recuérdese que x e y son las coordenadas de $\mathbf{r}$ en el sistema [Oxy], mientras que x' e y' son las coordenadas del mismo vector en el sistema [Ox'y'].

En particular, si el ángulo θ es igual a cero, los sistemas [O'x'y'] y [Oxy] coincidirán, y tanto la matriz de rotación como su inversa, serán iguales a la matriz identidad, cuyos vectores columna forman por supuesto, una base ortonormal de R^2.

Matemáticamente, si $\theta = 0$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Cuando un punto P está referido a dos sistemas de referencia [Oxy] y [O'x'y'] cuyos ejes no son coincidentes ni paralelos, las coordenadas de dicho punto en uno y otro sistema estarán relacionadas por la siguiente ecuación vectorial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Esta ecuación es el resultado de superponer lo obtenido en las ecuaciones (1) y (7).

En forma abreviada, la ecuación (13) puede escribirse

$$\mathbf{x} = R + Q\mathbf{x}' \qquad (14)$$

La multiplicación $Q\mathbf{x}'$ refiere las componentes x' e y' a un sistema de referencia cuyos ejes son paralelos a x e y, lo que permite la adición vectorial.

2.1.2 Transformación de Coordenadas Rectangulares en 3 Dimensiones

Una ecuación con la misma forma que la de la ecuación (14) es aplicable al estudio de vectores en el espacio de tres dimensiones si en los sistemas [Oxy] y [O'x'y'] se incluye una coordenada adicional z y z' respectivamente.

La matriz de rotación seguirá siendo ortogonal; pero esta vez será de orden 3 X 3 y en ella estarán involucrados los valores de 9 ángulos.

En dos dimensiones solamente se tiene un ángulo (o bien dos complementarios) porque la rotación es permitida únicamente alrededor de una dirección perpendicular al plano [xy]. En cambio, en tres dimensiones, son posibles tres rotaciones, alrededor de sendas direcciones no coplanares. Los nueve ángulos mencionados en el párrafo anterior son función de estas 3 rotaciones.

Si los ángulos que forma el eje [x'] con los ejes [x], [y] y [z] se denominan respectivamente [$\alpha_{x'}$], [$\beta_{x'}$], [$\gamma_{x'}$], un vector unitario dirigido a lo largo del eje [x'] tendrá la forma [$\cos\alpha_{x'}$, $\cos\beta_{x'}$, $\cos\gamma_{x'}$]^T. Este vector unitario caracteriza completamente al eje [x'], y sus componentes se pueden llamar cosenos directores del eje [x'].

Análogamente, las componentes de [$\cos\alpha_{y'}$, $\cos\beta_{y'}$, $\cos\gamma_{y'}$]^T y de [$\cos\alpha_{z'}$, $\cos\beta_{z'}$, $\cos\gamma_{z'}$]^T serán los cosenos directores de [y'] y [z'] respectivamente.

La matriz A tendrá la forma

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{x'} & \cos\alpha_{y'} & \cos\alpha_{z'} \\ \cos\beta_{x'} & \cos\beta_{y'} & \cos\beta_{z'} \\ \cos\gamma_{x'} & \cos\gamma_{y'} & \cos\gamma_{z'} \end{bmatrix}$$

Por supuesto, las columnas de la matriz A forman una base ortonormal de R^3.

A continuación estudiaremos un caso particular de matrices de rotación, muy útil para el análisis cinemático de cadenas espaciales que incluyen pares de revoluta, prismáticos y esféricos.

Considérense 2 sistemas de coordenadas cartesianas cuyos orígenes y ejes coinciden inicialmente (figura 6a). Estos sistemas son el [Oxyz] y el [O'x'y'z'] (Fig. 6a).

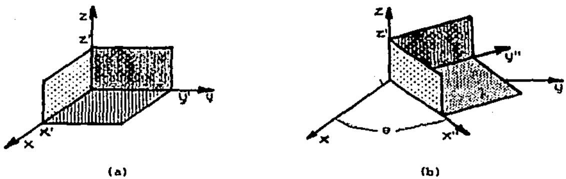


figura 6

Al hacer girar el sistema [Ox'y'z'] un ángulo θ alrededor del eje [z] (Fig. 6b), se obtiene un sistema [Ox"y"z'][3]. Si ahora se rota este sistema alrededor de [x"] un ángulo α, se obtiene un sistema [Ox"y'''z"] (Fig. 7).

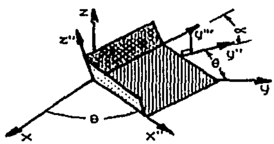


figura 7

Si tenemos como datos las coordenadas de un punto P en el sistema [x"y'''z"], necesitamos de un operador B (matriz ortogonal) que transforme las coordenadas [x"y'''z"] en coordenadas [x"y"z'].

3 Se añadirán primas solamente a aquellos ejes que cambien de posición en cada movimiento.

Si por el momento consideramos que los ejes [y] son de las abscisas y los ejes [z] de las ordenadas, y que el sistema [x"y'''z"] está rotado un ángulo α respecto al sistema [x"y"z'], puede pensarse en términos de dos dimensiones, y el operador B tendrá la forma de la matriz de 2X2 de la siguiente ecuación, la cual transforma las coordenadas [y'''z"] en coordenadas [y"z']

$$\begin{bmatrix} y'' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y''' \\ z'' \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Se obtiene una generalización de la ecuación (15) al introducir el eje x"

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y''' \\ z'' \end{bmatrix} \qquad (16)$$

La ecuación (16) muestra la transformación de coordenadas de un sistema a otro en tres dimensiones. La forma del primer renglón y de la primera columna de la matriz cuadrada de la ecuación (16) permite que la coordenada [x"] se mantenga inalterada.

Obtenidas las coordenadas [x"y"z'] de P, podemos calcular las coordenadas del mismo punto en el sistema [Oxyz] (ó [Ox'y'z']) mediante

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z' \end{bmatrix}$$

Obsérvese que esta ecuación es similar a la ecuación (7) encontrada para 2 dimensiones, salvo que aquí se ha añadido el eje z, el cual permanece inalterado. Tomando en cuenta esto y considerando la ecuación (16), podemos escribir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y''' \\ z'' \end{bmatrix}$$

Aprovechando la propiedad asociativa del producto matricial, tenemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta\cos\alpha & \text{sen}\theta\,\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\theta & \cos\theta\cos\alpha & -\cos\theta\,\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y''' \\ z'' \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Si los orígenes de los sistemas [xyz] y [x"y'''z"] no coinciden, puede escribirse una ecuación de la forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta\cos\alpha & \text{sen}\theta\,\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\theta & \cos\theta\cos\alpha & -\cos\theta\,\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y''' \\ z'' \end{bmatrix} \qquad (18)$$

donde, como el lector ya habrá supuesto, $(R_x, R_y, R_z]^T$ son las coordenadas del origen O' de [O'x"y'''z"] en el sistema [Oxyz]. Adviértase que el eje [x"] bien está alojado en el plano [xy], o bien es paralelo a él.

Matrices como la de la ecuación (17), de la forma

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta\cos\alpha & \text{sen}\theta\,\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\theta & \cos\theta\cos\alpha & -\cos\theta\,\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (19)$$

son utilizadas para el estudio del movimiento de cadenas cinemáticas, siguiendo la notación de Denavit y Hartenberg. La siguiente sección evidenciará la utilidad de dichas matrices.

2.2 NOTACIÓN DE DENAVIT Y HARTENBERG

Denavit y Hartenberg (D y H) propusieron en 1955 [A1] una notación para el estudio del movimiento de cadenas cinemáticas cerradas. En dicha notación se asocia un sistema de coordenadas cartesianas a cada uno de los pares cinemáticos de dichas cadenas, si estos son de revoluta o prismáticos (haciendo consideraciones especiales puede aplicarse la notacion de D y H también a cadenas que incluyen pares esféricos). Cada uno de los sistemas de referencia se considera unido rigidamente a un eslabón (cada sistema está asociado a un eslabón diferente). A cada par cinemático de revoluta corresponden 3 parámetros: las distancias d_i y b_i (ésta es variable cuando el par cinemático es prismático), y el ángulo α_i; corresponde también a cada par una variable angular θ_i (si el par es de revoluta).

2.2.1 Pasos para la Determinación de los Parámetros de Denavit y Hartenberg para una Cadena Cinemática K

Supondremos que la cadena K tiene solamente n pares de revoluta y/o prismáticos y que es abierta. Supondremos además que todos sus eslabones son binarios (bajo estas condiciones la cadena K es un manipulador en serie). Los pasos a seguir para asignar a los distintos eslabones los sistemas de referencia y los parámetros, de acuerdo con D y H, son los siguientes:

1.-Numeración de los pares cinemáticos.

Los pares cinemáticos se numeran de 1 en 1 comenzando por el de la base.

2.-Determinación de los ejes [z].

Como anotamos anteriormente a cada par cinemático se asocia un sistema de referencia. Si el par i-ésimo es de revoluta, el eje de giro es el eje [z_i] del correspondiente sistema de referencia. Si el par i-ésimo es prismático, puede escogerse como eje [z_i] cualquier recta que tenga la misma dirección del movimiento relativo entre los dos eslabones que constituyen el par. En cualquier caso debe asignarse un sentido a los ejes [z].

3.-Determinación de los ejes [x].

El eje [x_i] puede elegirse libremente con tal de que sea perpendicular al eje [z_i]. Cualquier otro eje [x_i] debe ser perpendicular a los correspondientes ejes [z_{i-1}] y [z_i]. El eje [x_i] se dirige de [z_{i-1}] y [z_i].

4.-Ejes [y_i].

Estos quedan implícitamente determinados al especificar los ejes [x_i] y [z_i] y establecer que todos los sistemas de referencia son dextrógiros.

5.-Determinación de $[d_i]$[4]†.

La distancia medida entre los ejes $[z_i]$ y $[z_{i+1}]$ a lo largo de $[x_{i+1}]$ es $[d_i]$. Si $[z_i]$ y $[z_{i+1}]$ se intersecan, en entonces $d_i=0$. En general $d_i \geq 0$.

6.-Determinación de $[b_i]$†.

$[b_i]$ es la coordenada $[z_i]$ de la intersección de los ejes $[x_{i+1}]$ y $[z_i]$; $[b_i]$ puede ser positiva, nula o negativa.

7.-Determinación del ángulo $[\alpha_i]$†.

$[\alpha_i]$ es el ángulo formado por $[z_i]$ y $[z_{i+1}]$ medido de acuerdo a la regla de la mano derecha, colocando el pulgar según la dirección positiva del eje $[x_{i+1}]$. Si hay n pares cinemáticos, habrá n-1 ángulos $[\alpha]$ puesto que el indice máximo posible para los ejes z es n.

Los ángulos θ_i son variables cuando el par es de revoluta, y se mide entre los ejes x_i y x_{i+1}, considerando la dirección positiva de z_i. Cuando el par es prismático, θ_i es un parámetro constante.

Con ayuda de los parámetros que acabamos de definir, pueden definirse también:

[4]†Estas literales son constantes de la cadena cinemática. Dependen únicamente de la geometría de los eslabones y de sus interconexiones, pero no de las posiciones relativas entre ellos (b_i puede ser variable).

$$a_i = [d_i \cos\theta_i \quad d_i \operatorname{sen}\theta_i \quad b_i] \tag{20}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \tag{21}$$

Nótese que el vector a_i es el vector de posición del origen $[O_{i+1}]$ respecto al sistema $[O_i x_i y_i z_i]$. La matriz Q_i es similar a la matriz de la ecuación (18), en virtud de que los sistemas [i] e [i+1] guardan entre sí la misma relación que los sistemas [Oxyz] y [Ox"y'''z"], para los cuales se obtuvo la citada ecuación.

Por la forma como se ha definido la notación de D y H, cada eje $[x_{i+1}]$ es paralelo al plano $[x_i y_i]$.

La matriz Q_i es el operador que permite obtener las proyecciones del vector de posición de un punto P de coordenadas $[x_{i+1} y_{i+1} y_{i+1}]$ sobre los ejes de un sistema de ejes paralelos a $[O_i x_i y_i z_i]$. Para obtener las coordenadas $P(x_i y_i z_i)$, puede escribirse una ecuación análoga a la ecuación (18):

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i \cos\theta_i \\ d_i \operatorname{sen}\theta_i \\ b_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}$$

(ec. 22)

donde $(R_x, R_y, R_z)^T$ se ha substituido por las componentes del vector a_i, y $(x'', y''', z'')^T$ por $(x_{i+1} y_{i+1} z_{i+1})^T$. Definiendo $s_i = [x_i, y_i, z_i]^T$, la ecuación (22) puede abreviarse así:

$$s_i = a_i + Q_i s_{i+1} \tag{23}$$

2.3 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO EN LA POSICIÓN

Dados los valores de todas las θ_i, se trata de encontrar la orientación del órgano terminal (OT) de un manipulador (MN) y la posición de uno de sus puntos con respecto al sistema de la base $[O_1 x_1 y_1 z_1]$. Una manera de conseguir esto es encontrando con respecto a dicho sistema, los vectores de posición de tres puntos no colineales pertenecientes al órgano terminal OT (figura 8).

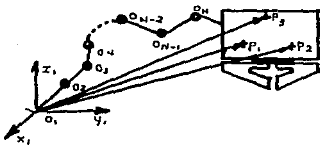


figura 8

Al encontrar las coordenadas de tres puntos P_1, P_2 y P_3 de un cuerpo rígido, puede obtenerse su orientación. Por lo tanto, se requiere una técnica que permita calcular el vector de posición de un punto cualquiera perteneciente al OT, con respecto a $[O_1 x_1 y_1 z_1]$ para valores conocidos de las θ_i.

Una vez determinados los primeros n sistemas de referencia y los primeros n-1 conjuntos de parámetros (α_i, d_i, b_i), identificamos un punto del OT. Puede tratarse al punto señalado como el origen de un nuevo sistema de referencia: el sistema $[O_{n+1}x_{n+1}y_{n+1}z_{n+1}]$.

Una perpendicular al eje z_n que pase por O_{n+1}, dirigida de aquél a éste, será el eje x_{n+1}. El ángulo que este eje forme con el eje x_n será el ángulo θ_n, cuyo valor es dato para el caso de la cinemática directa.

El eje z_{n+1} puede elegirse arbitrariamente, con tal de que sea perpendicular al eje x_{n+1}.

Los parámetros d_n y b_n se definen ahora de la misma manera que las demás d_i y b_i.

El vector de posición de O_{n+1} con respecto al sistema $[O_nx_ny_nz_n]$ es

$$\mathbf{a}_n = [d_n \cos\theta_n,\ d_n \operatorname{sen}\theta_n,\ b_n]^T$$

Llamemos $\mathbf{s}_k$ al vector de posición del punto O_{n+1} con respecto al sistema $O_kx_ky_kz_k$. Entonces para k=n

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{a}_n \tag{24}$$

y tomando en cuenta la ecuación (23), se puede escribir

$$s_k = a_k + Q_k s_{k+1} \quad \forall \ k \ \text{ tal que } \ n-1 \geq k \geq 1 \qquad (25)$$

Aplicando reiteradamente la ecuación (25) donde k se hace variar desde n-1 hasta 1 con decrementos sucesivos de 1, se puede encontrar s_1, que es el vector de posición buscado.

Como usualmente se deseará localizar más de un punto del OT, emplearemos un superíndice l para diferenciar los distintos puntos de interés O^l_{n+1}, así como sus correspondientes vectores de posición s^l_{n+1} respecto al sistema $[O_1x_1y_1z_1]$. Es así que los puntos P_1, P_2, P_3 del OT quedan identificados con los puntos O^1_{n+1}, O^2_{n+1} y O^3_{n+1} respectivamente.

Utilizando el superíndice l (que puede tomar los valores 1,2 ó 3), a partir de las ecuaciones (24) y (25), puede escribirse

$$\begin{gathered} s^l_n = a^l_n \\ s^l_k = a_k + Q_k s^l_{k+1} \quad \forall \ k \ \text{ tal que } \ n-1 \geq k \geq 1 \end{gathered} \qquad (26)$$

Las ecuaciones (26)[5] proporcionan un método completo para resolver el problema cinemático directo de posición del órgano terminal de un manipulador en serie. Posteriormente se verá que también son útiles para resolver cadenas cinemáticas con mallas, y manipuladores en paralelo.

[5] Por conveniencia, se llamará "sucesión" al conjunto de las n ecuaciones de la forma (26) correspondientes a cada superíndice "l". Si pues se tiene que ubicar 3 puntos de un cuerpo rígido, se tendrán 3 sucesiones.

2.4 PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO EN POSICIÓN

Ya hemos mencionado que especificando las coordenadas de tres puntos pertenecientes a un cuerpo rígido, se determina completamente la posición y orientación de éste en el espacio de tres dimensiones.

Cabe recordar sin embargo, que el máximo número de grados de libertad del cuerpo rígido es 6 (capítulo 1), de modo que 3 de las nueve coordenadas necesarias para ubicar los 3 puntos en el espacio (3 coordenadas por punto), son dependientes de las demás, como se muestra a continuación.

Sean P_1, P_2 y P_3 tres puntos no colineales pertenecientes al órgano terminal cuyas coordenadas respectivas en el sistema $[O_1x_1y_1z_1]$ son:

$$(x_1^{(1)},\ y_1^{(1)},\ z_1^{(1)}),\ (x_1^{(2)},\ y_1^{(2)},\ z_1^{(2)})\ \text{y}\ (x_1^{(3)},\ y_1^{(3)},\ z_1^{(3)})$$

(los superíndices se han escrito entre paréntesis para que no se confundan con exponentes). Si la distancia entre P_1 y P_2 es h_1; entre P_2 y P_3, h_2; y entre P_3 y P_1, h_3, estas 9 coordenadas estarán relacionadas por las siguientes 3 ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&(x_1^{(2)}-x_1^{(1)})^2+(y_1^{(2)}-y_1^{(1)})^2+(z_1^{(2)}-z_1^{(1)})^2=h_1^{\,2} && \text{(a)}\\
&(x_1^{(3)}-x_1^{(2)})^2+(y_1^{(3)}-y_1^{(2)})^2+(z_1^{(3)}-z_1^{(2)})^2=h_2^{\,2} && \text{(b)}\quad (27)\\
&(x_1^{(3)}-x_1^{(1)})^2+(y_1^{(3)}-y_1^{(1)})^2+(z_1^{(3)}-z_1^{(1)})^2=h_3^{\,2} && \text{(c)}
\end{aligned}
$$

Pueden asignarse valores, por ejemplo, a 5 variables de las 6 que intervienen en la ecuación (27a) (las h_i se suponen conocidas), y despejar la sexta. Después puede asignarse valor libremente a una de las tres variables con superíndice 3. Por último, se resuelve el sistema resultante de substituir en las ecuaciones (27b) y (27c), las 7 variables ya determinadas .

Desde luego, los valores de las variables deben ser congruentes con las distancias entre los puntos P_1, P_2 y P_3.

Atendiendo a estas restricciones, pueden estipularse las coordenadas respecto al sistema $[O_1x_1y_1z_1]$ que se desea ocupen 3 puntos conocidos del órgano terminal.

El método formulado para resolver la cinemática directa, es útil también en la solución de la cinemática inversa.

Supóngase, por ejemplo, que se quiere resolver el problema de posición inverso de un manipulador de 6 grados de libertad (n=6). Supóngase además que todas las articulaciones de dicho manipulador son pares de revoluta. El manipulador generará el grupo de desplazamientos en el espacio, cuya dimensión es 6.

Para resolver este problema, se procede de la siguiente manera:

1.-Del órgano terminal, se escogen tres puntos O_7^1, O_7^2 y O_7^3 ($n=6 \rightarrow n+1=7$) que el manipulador debe situar en el espacio.

2.-Con respecto al sistema $[O_1x_1y_1z_1]$, se escogen las posiciones P_1^*, P_2^* y P_3^* que se desea ocupen los puntos del OT designados en el paso anterior (usamos los asteriscos para distinguir las posiciones que se desea logren los puntos O_7^l, de las posiciones reales de dichos puntos). Estas posiciones deben ser por supuesto, congruentes con la rigidez del órgano terminal. En otras palabras, los puntos del OT forman un triángulo que debe tener las mismas dimensiones (longitudes h_1, h_2, h_3) que el triángulo formado por los puntos P_1^*, P_2^* y P_3^*.

Los vectores de posición de P_1^*, P_2^* y P_3^* se denominarán respectivamente s_1^{1*}, s_1^{2*} y s_1^{3*}.

3.-Se propone un conjunto de entradas $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_6\}$, y se resuelve el problema directo de posición para este conjunto de entradas, y así se obtienen 3 vectores s_n^l. Se tendrán entonces 3 vectores diferencia de la forma

$$\Delta s^l = s_1^{l*} - s_1^l. \qquad (28)$$

El hacer nulos los vectores Δs^l significa resolver la cinemática inversa. Por consiguiente, nuestro objetivo es resolver las ecuaciones

$$\Delta s^{1}(\theta) = s_{1}^{1*} - s_{1}^{1} = 0 \qquad (29)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \Delta x^{1} &= x_{1}^{1*} - x_{1}^{1} \\ \Delta y^{1} &= y_{1}^{1*} - y_{1}^{1} \\ \Delta z^{1} &= z_{1}^{1*} - z_{1}^{1} \end{aligned}$$

la ecuación (29) puede ser escrita así:

$$\Delta s(\theta) = [\Delta x^{1},\ \Delta y^{1},\ \Delta z^{1},\ \Delta x^{2},\ \Delta y^{2},\ \Delta z^{2},\ \Delta x^{3},\ \Delta y^{3},\ \Delta z^{3}]^{T}=0 \qquad (30)$$

La ecuación (30) representa un sistema de nueve ecuaciones escalares con 6 incógnitas, que es por lo tanto, sobredeterminado. Si los datos s_{1}^{1*} son congruentes, ello querrá decir que hay interdependencia entre las ecuaciones del sistema, y éste tendrá solución. De lo contrario, el sistema será incompatible.

Una manera de aproximarse a la solución de la ecuación (30) la proporciona el siguiente

algoritmo

1.-Prescribir una tolerancia (valor máximo admisible de $\|\Delta\theta\|$ entre iteraciones sucesivas).

2.-Proponer un conjunto de entradas (θ).

3.-Estimar un vector incremental $\Delta\theta$ que proporcione una mejor aproximación a la solución. Una estimación adecuada se logra con el método de Newton-Gauss que se describe más adelante.

4.-Asignar al vector θ la suma $\theta + \Delta\theta$ para obtener un nuevo vector θ.

5.-Comprobar si la norma del vector $\Delta\theta$ es igual o menor que la tolerancia prescrita en el paso 1. En caso afirmativo, se considera que el último vector θ obtenido es la solución. De lo contrario volver al paso 3.

Método de Newton-Gauss

Llegado al paso 3 de nuestro algoritmo, el lector se preguntará cómo encontrar un vector $\Delta\theta$ que haga converger al método hacia una solución. En esta sección contestamos esta pregunta. Es preciso insistir, sin embargo, en el hecho de que el vector de entradas θ dado al inicio del algoritmo, debe estar "bastante" próximo a la solución; de lo contrario, el método de Newton-Gauss fracasará.

Si se incrementa el vector θ añadiéndole el vector $\Delta\theta$, siendo la norma de éste pequeña, el valor de $\Delta s(\theta+\Delta\theta)$ se puede aproximar recurriendo a una expansión en serie de Taylor, y conservando de ésta únicamente hasta el término en $\Delta\theta$ de primer orden.

Matemáticamente,

$$\Delta s(\theta+\Delta\theta) = \Delta s(\theta) + J(\theta)\Delta\theta \qquad (31)$$

donde $\Delta\theta = [\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \Delta\theta_4, \Delta\theta_5, \Delta\theta_6]^T$

y

$$J(\theta)=\frac{\partial\Delta s}{\partial\theta} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial\Delta x^1}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\Delta x^1}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\Delta x^1}{\partial\theta_3} & \frac{\partial\Delta x^1}{\partial\theta_4} & \frac{\partial\Delta x^1}{\partial\theta_5} & \frac{\partial\Delta x^1}{\partial\theta_6} \\
\frac{\partial\Delta y^1}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\Delta y^1}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\Delta y^1}{\partial\theta_3} & \frac{\partial\Delta y^1}{\partial\theta_4} & \frac{\partial\Delta y^1}{\partial\theta_5} & \frac{\partial\Delta y^1}{\partial\theta_6} \\
\frac{\partial\Delta z^1}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\Delta z^1}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\Delta z^1}{\partial\theta_3} & \frac{\partial\Delta z^1}{\partial\theta_4} & \frac{\partial\Delta z^1}{\partial\theta_5} & \frac{\partial\Delta z^1}{\partial\theta_6} \\
\frac{\partial\Delta x^2}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\Delta x^2}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\Delta x^2}{\partial\theta_3} & \frac{\partial\Delta x^2}{\partial\theta_4} & \frac{\partial\Delta x^2}{\partial\theta_5} & \frac{\partial\Delta x^2}{\partial\theta_6} \\
\frac{\partial\Delta y^2}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\Delta y^2}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\Delta y^2}{\partial\theta_3} & \frac{\partial\Delta y^2}{\partial\theta_4} & \frac{\partial\Delta y^2}{\partial\theta_5} & \frac{\partial\Delta y^2}{\partial\theta_6} \\
\frac{\partial\Delta z^2}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\Delta z^2}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\Delta z^2}{\partial\theta_3} & \frac{\partial\Delta z^2}{\partial\theta_4} & \frac{\partial\Delta z^2}{\partial\theta_5} & \frac{\partial\Delta z^2}{\partial\theta_6} \\
\frac{\partial\Delta x^3}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\Delta x^3}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\Delta x^3}{\partial\theta_3} & \frac{\partial\Delta x^3}{\partial\theta_4} & \frac{\partial\Delta x^3}{\partial\theta_5} & \frac{\partial\Delta x^3}{\partial\theta_6} \\
\frac{\partial\Delta y^3}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\Delta y^3}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\Delta y^3}{\partial\theta_3} & \frac{\partial\Delta y^3}{\partial\theta_4} & \frac{\partial\Delta y^3}{\partial\theta_5} & \frac{\partial\Delta y^3}{\partial\theta_6} \\
\frac{\partial\Delta z^3}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\Delta z^3}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\Delta z^3}{\partial\theta_3} & \frac{\partial\Delta z^3}{\partial\theta_4} & \frac{\partial\Delta z^3}{\partial\theta_5} & \frac{\partial\Delta z^3}{\partial\theta_6}
\end{bmatrix}$$

Se busca que $\Delta s(\theta)=0$. Cuando $\Delta\theta \to 0$

$$\Delta s(\theta+\Delta\theta) \simeq \Delta s(\theta) \to 0.$$

Entonces la ecuación (31) puede reordenarse y escribirse así

$$J(\theta)\Delta\theta = -\Delta s(\theta) \tag{32}$$

La ecuación (32) es en realidad un sistema de 9 ecuaciones lineales en 6 incógnitas $\Delta\theta_i$. Para el vector de términos independientes $-\Delta s(\theta)$, se necesita conocer las posiciones P_1, P_2 y P_3, las cuales se pueden obtener mediante el método visto para resolver el problema directo.

Para evaluar $J(\theta)$, tómese en cuenta que los 3 primeros renglones de la definición de $J(\theta)$ son $\partial s^1/\partial\theta_i$; los siguientes 3, son $\partial s^2/\partial\theta_i$; y los últimos 3 $\partial s^3/\partial\theta_i$ para $i=1, \ldots, 6$. $\partial s^l/\partial\theta_i$ representa un vector para cada pareja de índices $\langle l, i\rangle$, y se evalúa según la expresión

$$\frac{\partial\Delta s_i^l}{\partial\theta_i} = Q_1 Q_2 \ldots Q_{i-1} (e \times s_i^l) \tag{33}$$

donde $e = [0, 0, 1]^T$. En el apéndice B se demuestra que para un vector r, $\partial r/\partial\theta_i = Q_1 Q_2 \ldots Q_{i-1}(e \times r)$. Los vectores $\partial s^l/\partial\theta_i$ se pueden visualizar en la matriz jacobiana $J(\theta)$ si sobre ella se trazan verticales que separen las columnas, y horizontales que dividan a la matriz en tres secciones de tres renglones cada una.

Ahora que se dispone de medios para evaluar la matriz de coeficientes $J(\theta)$, estamos en condiciones de resolver el sistema de ecuaciones (32). Puesto que este sistema es formalmente sobredeterminado, recurriremos a un método que permite transformar dicho sistema en uno determinado (de 6 ecuaciones en 6 incógnitas). Este método es el de las reflexiones de Householder que se explica en el apéndice C.

El uso de las reflexiones de Householder no está limitado a sistemas de ecuaciones sobredeterminados; sino que puede utilizarse también para sistemas que tengan tantas incógnitas como ecuaciones.

Estando ya posibilitados para evaluar $\Delta\theta$, podemos continuar la ejecución de nuestro algoritmo.

El método que se acaba de esbozar no es ciertamente el idóneo para resolver el problema inverso de posición de un manipulador de 6 grados de libertad; empero la explicación de su aplicación a este caso, permite destacar ciertas características suyas que lo hacen útil y conveniente en el estudio de otros tipos de cadenas cinemáticas.

Si por ejemplo se desea resolver la cinemática inversa de un manipulador de 3 grados de libertad (el cual permite el posicionamiento de un único punto en el espacio de 3 dimensiones), solamente se tendrá una ecuación vectorial de la forma de la (28), lo cual implica que se tengan 3 ecuaciones escalares en 3 incógnitas. El sistema de ecuaciones lineales resultantes en este problema, puede resolverse también mediante las reflexiones de

Householder.

Otro ejemplo en el que el método propuesto en este capítulo es conveniente, es el caso del posicionamiento y orientación de una recta en el espacio tridimensional, trabajo que puede realizar un manipulador de 5 articulaciones de revoluta. En este caso pueden especificarse las posiciones deseadas de dos de los puntos de dicha recta. Obsérvese que una vez que se han especificado las tres coordenadas de uno de dichos puntos, y dos coordenadas cualesquiera del otro, la sexta variable quedará automáticamente determinada. En este caso se tendrán 2 ecuaciones vectoriales de la forma de (28), o sea un sistema de 6 ecuaciones escalares, pero en 5 incógnitas (5 ángulos θ). El sistema de ecuaciones lineales representado por (32) será un sistema sobredeterminado (6 ecuaciones y 5 variables $\Delta\theta$) el cual puede ser resuelto mediante reflexiones de Householder. La matriz jacobiana en este sistema de ecuaciones tendrá 6 renglones y 5 columnas.

2.5 ANÁLISIS DE POSICIÓN DE MANIPULADORES EN PARALELO

Hasta el momento, hemos visto cómo resolver los problemas de posición directo e inverso de manipuladores constituidos por cadenas cinemáticas abiertas (manipuladores en serie). El lector se habrá percatado de que el problema inverso es más complejo que el directo para esta clase de manipuladores. Lo opuesto ocurre cuando se analizan cadenas cinemáticas con mallas cerradas: concretamente, manipuladores en paralelo, de los cuales la plataforma de Stewart (PS) es un ejemplo. La PS será estudiada detalladamente en el capítulo 3. Ahí se aplicará el método que se desarrolló en este capítulo para resolver el problema de posición inverso de cadenas abiertas, a la solución del problema directo de la PS.

3 MISCELÁNEA DE APLICACIONES

En este capítulo se tratan cuestiones muy variadas, que a pesar de su diversidad, se reunieron bajo un solo encabezado, porque todas ellas son aplicaciones (o aspectos de las aplicaciones) de los temas discutidos en los dos primeros capítulos de la presente tesis; y porque, aunque dichas cuestiones pueden estudiarse independientemente unas de otras, se aplican en última instancia, a los mismos entes: las cadenas cinemáticas espaciales.

Así pues, en este capítulo se sugieren algunas situaciones prácticas en las que es útil la clasificación de mecanismos de Hervé. Se trata el uso del método de Shujun y el del modular. Se examinan las dificultades que entraña el primero, y se presenta un ejemplo de aplicación del segundo. Se presenta un algoritmo para obtener *matrices de interconexión* automáticamente. Se estudia el problema directo de posición de la plataforma de Stewart, y se comentan cualitativamente algunas simplificaciones de diseño que facilitan la solución de dicho problema. Finalmente, se presenta la aplicación de la plataforma de Stewart a los llamados *manipuladores híbridos*, y se esbozan las bondades de éstos.

3.1 APLICACIONES DE LOS DIFERENTES TIPOS DE CADENAS CINEMÁTICAS IDENTIFICADOS POR HERVÉ

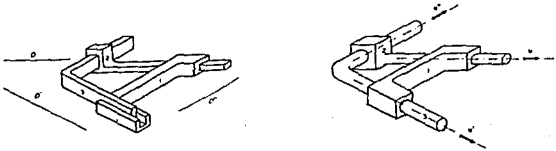
3.1.1 Cadenas Cinemáticas Banales

La gran mayoría de los mecanismos normalmente empleados, son cadenas cinemáticas banales. Ocasionalmente, sin embargo, razones de orden práctico pueden indicar el uso de cadenas cinemáticas no banales.

3.1.2 Cadenas Excepcionales

Consideremos por ejemplo, dos de las cadenas cinemáticas que Hervé incluye entre sus ejemplos (figura 1), las cuales funcionan exactamente de la misma manera. Se diferencian únicamente por el hecho de que una cadena contiene pares prismáticos, y la otra, pares cilíndricos.

La cadena de la figura 1a es banal, en tanto que la de la figura 1b es una cadena de las que Hervé llama excepcionales. Ésta se obtuvo a partir de la cadena de la figura 1a. Suponiendo que en una máquina particular se requiere un mecanismo con las características cinemáticas de cualquiera de estas dos cadenas, el diseñador podría optar por la excepcional, debido a que es más sencillo perforar orificios cilíndricos con una broca, que brochar orificios de sección rectangular, ya que el brochado requiere de una operación de mecanizado adicional (bajo la hipótesis de que fabricaremos los componentes de nuestro mecanismo mediante un proceso de arranque de viruta).



(a) (b)

figura 1

En su artículo [5], Hervé explica como obtener una cadena cinemática excepcional.

3.1.3 Cadenas Paradójicas

Como ya se mencionó en el capítulo 1, de la cadena cinemática formada por un mecanismo de 4 barras, se deducen según el teorema de Roberts, dos mecanismos cognados. La cadena cinemática formada por el mecanismo de 4 barras y sus dos cognados simultáneamente, es un ejemplo de cadena paradójica. Sin embargo, difícilmente se usará esta cadena completa; más bien, de los mecanismos que realizan el mismo movimiento del eslabón acoplador, se escogerá aquél que por motivos de diseño sea más conveniente. De modo que lo que se construirá será una cadena cinemática banal.

Así pues, el interés de las cadenas paradójicas es más teórico que práctico.

3.2 SÍNTESIS ESTRUCTURAL DE ALGUNAS CADENAS CINEMÁTICAS MEDIANTE EL MÉTODO DE SHUJUN

Explicaremos aquí cómo servirse de la computadora para aplicar el método de Shujun a la síntesis estructural de cadenas cinemáticas, y comentaremos sus resultados.

3.2.1 El Método de Shujun Aplicado en la Computadora

En esta sección se pormenoriza el método de Shujun para emplearlo en la computadora. Se concluye con algunas consideraciones sobre un ejemplo.

3.2.1.1 Primer Paso: Búsqueda de Conjuntos de Eslabones

Como ya se había apuntado en el capítulo 1, una sencilla rutina en BASIC, PADRONCAD, permite encontrar las cantidades B_q que satisfacen las ecuaciones (9) y (10) del capítulo 1. Con esta rutina se elaboró la lista de todos los posibles conjuntos de eslabones con que pueden formarse cadenas de 9 eslabones y 5 mallas. Dicha lista aparece a continuación:

B_6	B_5	B_4	B_3	B_2
0	0	1	6	2
0	0	2	4	3
0	0	3	2	4
0	0	4	0	5
0	1	0	5	3
0	1	1	3	4
0	1	2	1	5
0	2	0	2	5
0	2	1	0	6
1	0	0	4	4
1	0	1	2	5
1	0	2	0	6
1	1	0	1	6
2	0	0	0	7

Tabla 1

3.2.1.2 Segundo Paso: Formado de Todas las Interconexiones Posibles

Como se anticipó en el capítulo 1, se abordará ahora el problema de interconectar en todas las formas posibles los eslabones de una cadena cinemática con B_2 eslabones binarios, B_3 eslabones ternarios, etc. En este proceso, se supondrá desconocida la naturaleza de los pares cinemáticos.

3.2.1.2.1 Matrices de Interconexión

Una manera conveniente de representar la interconexión de n eslabones, es el uso de una matriz C_{ij} de orden n x n.

Cada eslabón de la cadena cinemática estará representado por un renglón (y una columna) en la matriz. Así, el eslabón representado por el renglón y la columna 1 será el eslabón 1, el representado por el segundo renglón y la segunda columna, el eslabón 2, etc.

Los únicos valores que les será permitido tomar a los elementos de C_{ij} serán 0 ó 1. Un cero en el elemento c_{ij} querrá decir que el eslabón i no forma un par cinemático con el eslabón j. Por el contrario, un 1 indicará que los eslabones i y j si forman un par cinemático.

Por supuesto, la matriz de interconexión C_{ij} es simétrica. Por conveniencia se asignará el valor cero a cada uno de los elementos de la diagonal principal.

Determinar todas las posibles interconexiones equivaldrá a determinar todos los conjuntos de valores de las variables c_{ij} que satisfacen las siguientes restricciones:

1.-La suma de las c_{ij} del renglón i es igual al número k_i de pares cinemáticos asociados al eslabón i.

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = k_i \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,n \qquad (1)$$

2.-Todos los elementos de la diagonal principal son nulos.

$$c_{ii} = 0 \qquad (2)$$

3.-Condición de simetría

$$c_{ij} = c_{ji} \qquad (3)$$

La primera de estas restricciones aporta n ecuaciones lineales, la segunda otras n, y la tercera $(n^2-n)/2$ ecuaciones.

El lector puede demostrar fácilmente que el número de variables cuyo valor puede elegirse arbitrariamente es $l=(n^2-3n)/2$ (l significa variables *libres*).

Entre las restricciones anteriores no se incluye ninguna que tome en cuenta el hecho de que los valores que asumen las variables c_{ij} pueden ser únicamente 0 ó 1. Teniendo esto en consideración, el máximo número de soluciones que podría esperarse que tuviera el sistema de ecuaciones representado por las ecuaciones (1) a (3) sería:

$$s=2^l \qquad (4)$$

Sin embargo, de las s soluciones obtenidas, muchas serían inaceptables porque se obtendrían $c_{ij} \notin \{0,1\}$.

Finalmente, entre las soluciones en las que $c_{ij} \in \{0,1\}\ \forall\ i, j$, habría varias *isomorfas*, es decir, varias que representarían al mismo *tipo* de cadena cinemática. Esto puede entenderse considerando, por ejemplo, que eslabones con el mismo número de pares cinemáticos asociados son intercambiables (no es superfluo insistir en el hecho de que en este momento estamos ignorando la geometría de los eslabones y la naturaleza de los pares cinemáticos).

La tabla 2 correlaciona el número de eslabones n, con el total de variables a determinar V_T, con el número de variables libres l, y con el número de sistemas de ecuaciones lineales s que es preciso resolver. En los números totales de variables, se ha tenido en cuenta que la condición de simetría permite reducir este total a la mitad. Téngase en cuenta que V_T=n+1.

n	V_T	l	s
4	6	2	4
5	10	5	32
6	15	9	512
7	21	14	16384
8	28	20	1048576
9	36	27	134217728

Tabla 2

Obsérvese que el número de eslabones n coincide con el número de variables de cada uno de los sistemas determinados que resultan de haber elegido l variables libres. De manera que, por ejemplo, para una cadena de 7 eslabones, habría que resolver 16384 sistemas determinados en 7 incógnitas .

En esta tabla se aprecia que el número de sistemas de ecuaciones que hay que resolver, aumenta muy considerablemente conforme aumenta el número de eslabones. Ya con 6 eslabones, se tienen 512 sistemas de ecuaciones en 6 incógnitas.

Se puede ver que aún dejando de lado el problema de identificación de isomorfismos, el formar todas las matrices de interconexión posibles puede ser prohibitivo para la computadora, aún si el número de eslabones es pequeño.

Por otra parte, la búsqueda de isomorfismos es un problema complicado. Agrawal y Rao [3] proponen algunas técnicas para resolver este problema. El estudio de ellas escapa a los alcances de la presente tesis[1].

3.1.2.2.2 El "Método de la Caída"

En el afán de encontrar algún método eficaz para obtener matrices de interconexión, se halló un algoritmo que parece

1 Agrawal y Rao [3] utilizan una matriz similar a la que aquí llamamos matriz de interconexión. Ellos la llaman matriz de variables características (MVC). En vez de escribir un uno en un elemento de la matriz para representar un par cinemático, ellos emplean la notación Rij: por ejemplo, en la posición correspondiente al renglón 1 y a la columna 2, escribirían R12 si los eslabones 1 y 2 formaran un par cinemático; de lo contrario escribirían como nosotros, un cero. Además, en lugar de un cero, asignan una variable Xi a cada una de las posiciones correspondientes a la diagonal principal. La i se refiere desde luego, al número de renglón y columna. Según estos autores, el determinante de la MVC (que ellos llaman polinomio de variables características (PVC)) permite identificar isomorfismos. El problema de emplear la MVC y el PVC es que resulta engorroso manejarlos aún para cadenas de unos pocos eslabones. Agrawal y Rao proponen algunas otras alternativas que tienen menos "poder de caracterización"; pero que permiten identificar isomorfismos.

ofrecer una manera sistemática para construírlas.

El algoritmo mencionado, al que llamaremos "método de la caída", consiste en lo siguiente:

1.-En una matriz de orden nxn se escribe una X en cada elemento de la diagonal principal.

2.-Se calcula el número de pares cinemáticos N_p

$$N_p=(\sum_{q=2}^{qmax} q\ B_q)/2 \tag{5}$$

3.-Se escriben a la derecha de la matriz, los números de pares cinemáticos asociados a los eslabones en orden decreciente. Como cada renglón de la matriz de interconexión repesenta un eslabón, deberá escribirse un número a la derecha de cada renglón. Obviamente, los números pueden repetirse.

4.-Comenzando por el primer renglón, y de izquierda a derecha, se llenan con un 1 los primeros N_p elementos de la matriz que estén a la derecha (o por encima) de la diagonal principal.

5.-También se llenan con un 1 los elementos simétricos de los llenados en el paso anterior.

Hecho esto, se pueden distinguir 3 tipos de renglones en la matriz: los que llamaremos "sobresaturados", cuyo número de unos es mayor que el escrito a la derecha de tales renglones; los "saturados", en los que el número de unos corresponde al número escrito a la derecha, y los "no saturados", que son aquellos en los que faltan unos.

El algoritmo tiene por objeto que todos los renglones sean saturados. Esto se logra de la manera siguiente:

6.-Trabajando nuevamente con los elemetos que se encuentran a la derecha de la diagonal principal, y comenzando desde la izquierda (o sea desde los elementos más pegados a la diagonal), se hacen "caer" los unos sobrantes (en renglones sobresaturados) a posiciones de la matriz pertenecientes a renglones no saturados. Solamente les es permitido a los unos caer dentro de su columna original. Un uno no puede caer en una posición que ya esté ocupada por otro uno, ni tampoco en elementos de la diagonal principal.

7.-La posición desde la cual se dejó caer el último uno se cancela (borrando el uno o escribiendo sobre él una X).

8.-Se cancela también el elemento simétrico de el elemento cancelado en el paso anterior.

9.-Y finalmente se escribe otro uno en la posición simétrica de la del paso 6.

Los pasos 6 a 9 se repiten tantas veces como sea necesario para conseguir que todos los renglones de la matriz estén saturados.

Este algoritmo se probó con algunos conjuntos de eslabones que satisfacen las ecuaciones (9) y (10) del capítulo 1. En todos los casos se consiguió hacer saturados todos los renglones. Esto conduce a pensar que el algoritmo puede aplicarse con éxito en cualquier caso.

Aplicando el método de la caída una vez, se obtiene una de las posibles interconexiones de los eslabones. Pueden obtenerse diferentes soluciones variando algunos criterios, como por ejemplo: cómo seleccionar la posición en que debe caer un uno que tiene varias opciones, o cuál es el orden en el que los unos deben ir cayendo.

El siguiente ejemplo ilustrará la aplicación del método de la caída:

Encontraremos una matriz de interconexión para una cadena cinemática con 9 eslabones y 5 mallas . En la tabla 1 se encuentra que un conjunto de valores de B_q que satisfacen N=9 y L=5 es: $B_4=1$, $B_3=6$ y $B_2=2$.

Paso 1

$$\begin{bmatrix}
X & - & - & - & - & - & - & - & - \\
- & X & - & - & - & - & - & - & - \\
- & - & X & - & - & - & - & - & - \\
- & - & - & X & - & - & - & - & - \\
- & - & - & - & X & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & X & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - & X & - & - \\
- & - & - & - & - & - & - & X & - \\
- & - & - & - & - & - & - & - & X
\end{bmatrix}$$

Paso 2

$$N_p = (2x2 + 3x6 + 4x1)/2 = 13$$

Paso 3

$$\begin{bmatrix}
X & - & - & - & - & - & - & - & - \\
- & X & - & - & - & - & - & - & - \\
- & - & X & - & - & - & - & - & - \\
- & - & - & X & - & - & - & - & - \\
- & - & - & - & X & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & X & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - & X & - & - \\
- & - & - & - & - & - & - & X & - \\
- & - & - & - & - & - & - & - & X
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}
4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2
\end{array}
\begin{array}{l}
B_4=1 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right] B_3=6 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right] B_2=2
\end{array}$$

Paso 4

$$\left[\begin{matrix} X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - \\ - & - & X & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & X & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & X & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & X & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & X & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & X & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & X \end{matrix}\right] \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

A la derecha de la diagonal principal, se escriben 13 unos desde arriba sin dejar huecos entre los unos.

Paso 5

$$\left[\begin{matrix} X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - \\ 1 & 1 & X & - & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & X & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & X & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & X & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & X & - & - \\ 1 & - & - & - & - & - & - & X & - \\ 1 & - & - & - & - & - & - & - & X \end{matrix}\right] \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

Se construye una matriz simétrica a la del paso anterior.

En este momento, los dos primeros renglones de la matriz son sobresaturados, y todos los demás no saturados.

Paso 6

Comenzaremos con el elemento (1,2). El uno de esta posición puede caer en las posiciones (8,2) ó (9,2). Para tener un cariterio uniforme, optaremos por dejar caer los unos siempre en la posición más baja posible. Indicaremos cuándo se satura un renglón mediante la notación "→s". Los renglones saturados en pasos anteriores simplemente se señalarán con una "s". Los unos que se seleccionen para caer aparecerán subrayados, y los que ocupen una nueva posición, se escribirán en **negrita**.

$$
\begin{array}{r c l}
 & \begin{bmatrix}
X & \underline{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - \\
1 & 1 & X & - & - & - & - & - & - \\
1 & 1 & - & X & - & - & - & - & - \\
1 & 1 & - & - & X & - & - & - & - \\
1 & 1 & - & - & - & X & - & - & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & X & - & - \\
1 & - & - & - & - & - & - & X & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & - & X
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array}
\end{array}
$$

$\rightarrow s$ (row 9)

Paso 7.

Una cancelación se escribirá con una **X** en negrita. Cancelaciones hechas en pasos precedentes, simplemente aparecerán como una X.

$$
\begin{array}{r c l}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ s \end{array} & \begin{bmatrix}
X & \mathbf{X} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - \\
1 & 1 & X & - & - & - & - & - & - \\
1 & 1 & - & X & - & - & - & - & - \\
1 & 1 & - & - & X & - & - & - & - \\
1 & 1 & - & - & - & X & - & - & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & X & - & - \\
1 & - & - & - & - & - & - & X & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & - & X
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array}
\end{array}
$$

Paso 8

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ s \end{array}\begin{bmatrix} X & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ X & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - \\ 1 & 1 & X & - & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & X & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & X & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & X & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & X & - & - \\ 1 & - & - & - & - & - & - & X & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & - & - & X \end{bmatrix}\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

Paso 9

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ s \end{array}\begin{bmatrix} X & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ X & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & X & - & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & X & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & X & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & X & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & X & - & - \\ 1 & - & - & - & - & - & - & X & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & - & - & X \end{bmatrix}\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

Repitiendo los pasos 6 a 9 hasta que todos los renglones sean saturados, se obtienen sucesivamente las siguientes matrices:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \rightarrow s \\ s \end{array}\begin{bmatrix} X & X & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ X & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ X & 1 & X & - & - & - & - & 1 & - \\ 1 & 1 & - & X & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & X & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & X & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & X & - & - \\ 1 & - & 1 & - & - & - & - & X & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & - & - & X \end{bmatrix}\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \rightarrow s \\ s \\ s \end{array}\begin{bmatrix} X & X & X & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ X & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ X & 1 & X & - & - & - & - & 1 & - \\ X & 1 & - & X & - & - & 1 & - & - \\ 1 & 1 & - & - & X & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & X & - & - & - \\ 1 & 1 & - & 1 & - & - & X & - & - \\ 1 & - & 1 & - & - & - & - & X & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & - & - & X \end{bmatrix}\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r} \rightarrow s \\ \\ \\ \\ \\ \rightarrow s \\ s \\ s \\ s \end{array}
\begin{bmatrix}
X & X & X & X & X & 1 & 1 & 1 & 1 \\
X & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\
X & 1 & X & - & - & - & - & 1 & - \\
X & 1 & - & X & - & - & 1 & - & - \\
X & 1 & - & - & X & 1 & - & - & - \\
1 & 1 & - & - & 1 & X & - & - & - \\
1 & 1 & - & 1 & - & - & X & - & - \\
1 & - & 1 & - & - & - & - & X & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & - & X
\end{bmatrix}
\begin{array}{l} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} s \\ \\ \\ \\ \rightarrow s \\ s \\ s \\ s \\ s \end{array}
\begin{bmatrix}
X & X & X & X & X & 1 & 1 & 1 & 1 \\
X & X & X & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\
X & X & X & - & 1 & - & - & 1 & - \\
X & 1 & - & X & - & - & 1 & - & - \\
X & 1 & 1 & - & X & 1 & - & - & - \\
1 & 1 & - & - & 1 & X & - & - & - \\
1 & 1 & - & 1 & - & - & X & - & - \\
1 & - & 1 & - & - & - & - & X & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & - & X
\end{bmatrix}
\begin{array}{l} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} s \\ \\ \rightarrow s \\ \\ s \\ s \\ s \\ s \\ s \end{array}
\begin{bmatrix}
X & X & X & X & X & 1 & 1 & 1 & 1 \\
X & X & X & X & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\
X & X & X & 1 & 1 & - & - & 1 & - \\
X & X & 1 & X & - & - & 1 & - & - \\
X & 1 & 1 & - & X & 1 & - & - & - \\
1 & 1 & - & - & 1 & X & - & - & - \\
1 & 1 & - & 1 & - & - & X & - & - \\
1 & - & 1 & - & - & - & - & X & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & - & X
\end{bmatrix}
\begin{array}{l} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} s \\ \rightarrow s \\ s \\ \rightarrow s \\ s \\ s \\ s \\ s \\ s \end{array}
\begin{bmatrix}
X & X & X & X & X & 1 & 1 & 1 & 1 \\
X & X & X & X & X & 1 & 1 & - & 1 \\
X & X & X & 1 & 1 & - & - & 1 & - \\
X & X & 1 & X & 1 & - & 1 & - & - \\
X & X & 1 & 1 & X & 1 & - & - & - \\
1 & 1 & - & - & 1 & X & - & - & - \\
1 & 1 & - & 1 & - & - & X & - & - \\
1 & - & 1 & - & - & - & - & X & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & - & X
\end{bmatrix}
\begin{array}{l} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array}
$$

Esta es una matriz de interconexión

El método de la caida puede adaptarse para ser ejecutado por una computadora.

Como puede verse, el segundo de los pasos del método de Shujun listados en el capitulo 1 requiere de atención especial, y no es simple. Esto representa una limitación severa del método, el cual, si bien teóricamente es exhaustivo, está restringido en la práctica a la sintesis de un número reducido de cadenas cinemáticas. Este número depende del tiempo de máquina y de análisis que se esté dispuesto a invertir; pero encontrar todas las posibles cadenas cinemáticas de unas cuantas mallas que pueden formarse con unos pocos eslabones, puede ser un trabajo costosisimo, si no imposible. Sin embargo, la complejidad de muchas cadenas que pueden existir en la teoria, hace a las mismas inútiles desde un punto de vista práctico. No obstante, el límite entre lo "práctico" y lo "impráctico" es una cuestión enteramente subjetiva, y desde este punto de vista, ningún esfuerzo encaminado a facilitar la comprensión de un tema o, como en este caso, a recabar cuanta información sea posible respecto de determinado asunto, puede soslayarse.

3.2.1.3 Tercer Paso: Búsqueda de Conjuntos de Movilidades que Satisfagan la Ecuación de Movilidad de Shujun en las Cadenas Formadas en los Pasos Precedentes

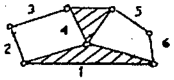
Antes de entrar de lleno al último paso del método de Shujun, conviene despejar algunas cuestiones que éste deja obscuras en su artículo [10].

3.2.1.3.1 Dilucidación de Algunos Aspectos del Método de Shujun

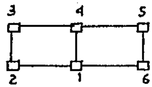
Los puntos que, a juicio del autor, conviene aclarar son los siguientes:

1.-¿Qué mallas independientes deben tomarse en cuenta para el cálculo de los grados de libertad del eslabón extremo?

Para entender este problema, serán útiles los esquemas de la figura 2.



Cadena cinemática con 2 mallas independientes. Todos los pares tienen movilidad 1.
(a)



Representación alterna de la cadena de la izquierda.
(b)

figura 2

En la gráfica (figura 2b) que representa a la cadena cinemática de la figura 2a, se distinguen 3 mallas distintas: I/ 1-2-3-4-1, II/ 1-4-5-6-1, y III/ 1-2-3-4-5-6-1.

Con estas 3 mallas pueden formarse 3 parejas de mallas I-II, II-III, ó I-III (sólo 2 mallas pueden ser independientes).

Sin embargo, en lo que se refiere a las dimensiones[2] asociadas a las mallas, no es indistinto qué pareja de éstas se toma.

Al parecer, las mallas que deben tomarse en cuenta son las que incluyen el mínimo número de nodos (téngase presente que en una gráfica cada nodo representa un eslabón).

2.-De las variables que intervienen en la ecuación de movilidad de Shujun, ¿cuáles serán tratadas como datos, y cuáles como variables dependientes?

[2]En este contexto, entiéndase por dimensión el concepto definido en el capítulo 1.

A juzgar por los resultados que Shujun incluye en su artículo, parece ser que, conocido un tipo de cadena cinemática (que a la computadora se da como una matriz de interconexión), el único dato que aporta Shujun a la computadora es la suma SUM de la ecuación

$$SUM = F + \sum_{j=2}^{8} j\ E_j$$

y que obtenida la lista de cadenas cinemáticas, calcula después los valores de las E_j, y posteriormente despeja F.

Como en un principio, el autor (de la tesis) supuso que se proporcionaban como datos los grados de libertad F deseados, y las E_j deseadas, el programa de síntesis estructural SINTEST (apéndice E), contiene una rutina que identifca algunas mallas de una matriz de interconexión dada. La identificación de estas mallas representa una ventaja con respecto al método propuesto originalmente por Shujun. Estas mallas son escritas en la pantalla de la computadora, y de ellas, el usuario debe seleccionar suficientes mallas independientes. El propio programa solicita al usuario la introducción de los números de las mallas seleccionadas.

3.2.1.3.2 Descripción del Programa SINTEST

Para aplicar el método de Shujun en la computadora es necesario proporcionar a ésta los tipos de cadenas cinemáticas mediante una matriz de interconexión.

En el programa SINTEST, escrito en BASIC, la matriz de interconexión está representada por el arreglo C%.

Una forma de introducir al programa los datos de la matriz de interconexión, es a través de 2 ciclos anidados FOR-NEXT dentro de los cuales se encuentre una instrucción READ que tome los datos de enunciados DATA (líneas 285-350). Este procedimiento es rudimentario, pero simple de llevar a cabo. Por supuesto, para cada tipo de cadena cinemática se deberá cambiar los valores finales de los ciclos FOR-NEXT, así como los enunciados DATA.

El programa SINTEST no está preparado para advertir al usuario si ha cometido algún error en los datos de la matriz de interconexión, de modo que él debe cuidar de que sus datos sean correctos. En este programa, los elementos de la diagonal principal se introducen como ceros.

Debe proporcionarse también el valor deseado de la variable SUM.

Se utiliza además un arreglo auxiliar, llamado arreglo de pares cinemáticos, que en el programa está representado por P%, y que consta de tantos renglones como pares cinemáticos tenga la cadena, y de 3 columnas.

En la columna 1 se escribirá el número de renglón que ocupa el i-ésimo par cinemático en la matriz de interconexión. En la columna 2, se almacenará el número de columna que el mismo par cinemático ocupa en la matriz de interconexión. Por último, la columna 3 está reservada para almacenar la movilidad del par cinemático i.

El lector se preguntará cuál es el criterio para numerar los pares cinemáticos. El adoptado por el autor es el siguiente:

Dado que todos los pares cinemáticos están representados por los elementos de la matriz de interconexión iguales a 1, y que se encuentran por encima (o a la derecha) de la diagonal principal, todos los elementos iguales a uno que estén por encima de dicha diagonal, se numeran de uno en uno, principiando por el renglón superior, y yendo de izquierda a derecha.

Una vez que se ha proporcionado la matriz de interconexión a la computadora, y que ésta ha llenado las dos primeras columnas del arreglo P% (líneas 610-680), el programa prosigue con la ejecución de una serie de ciclos FOR-NEXT anidados (tantos como pares cinemáticos tenga la cadena que se estudie)(líneas 940-1670).

La variable de cada ciclo FOR-NEXT es la movilidad de un par cinemático. Cada una de éstas se hace variar de 1 a 3. Dentro del ciclo más interno se comprueba si la suma de movilidades de todos los pares cinemáticos satisface la ecuación de movilidad de Shujun (ecuación (8) del capítulo 2)(línea 1120). Si dicha ecuación se satisface, entonces se construyen los eslabones de la cadena en proceso de síntesis (líneas 1240-1280). Cada eslabón estará formado por la sucesión de los números que representan las movilidades de los pares cinemáticos asociados al eslabón en cuestión. En esta parte del programa, los eslabones y las cadenas cinemáticas se manejan como variables alfanuméricas (strings) por ser esto conveniente. Los datos de movilidad para construir los eslabones y las cadenas se toman directamente de la columna 3 del arreglo P%, cuyos datos se generan dentro del ciclo FOR-NEXT más interno. También dentro del ciclo más interno se desechan los isomorfismos (líneas 1520-1590).

Las cadenas aceptadas se almacenan en un arreglo alfanumérico KC$.

Para discriminar isomorfismos, se hace lo siguiente:

1.-Se ordenan las movilidades dentro de cada eslabón decrecientemente (líneas 1290-1400).

2.-Después se ordenan también decrecientemente los eslabones, considerando la suma de las movilidades de los pares cinemáticos asociados a cada eslabón (líneas 1410-1470).

3.-Finalmente, se compara este último ordenamiento con las cadenas que ya han sido aceptadas en el arreglo KC$ (líneas 1520-1590).

Una vez que se ha admitido una cadena cinemática, se imprime el ordenamiento que le corresponde.

Para obtener los grados de libertad F de una de las cadenas impresas, es preciso analizar sus mallas. Para que una malla no sea rígida, su dimensión debe ser menor que la suma de las movilidades de los pares cinemáticos involucrados en ella.

El lector puede obtener más detalles acerca del funcionamiento del programa SINTEST mediante un cuidadoso examen del mismo. Para facilitar su estudio, el programa incorpora numerosos enunciados REM.

3.2.2 Comentarios sobre el método de Shujun comparado con SINTEST

En el apéndice F se incluye una lista de los resultados obtenidos mediante SINTEST para el tipo de cadena cinemática de 6 eslabones y 3 mallas representada por la matriz de interconexión

$$\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Los resultados que aparecen en la mencionada lista, son los mismos que los obtenidos por Shujun, excepto por el orden[3].

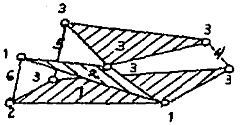
3 Debe aclararse que la tabla publicada en la ref. [10] tiene errores tipográficos. De la página 652 de la referencia citada, son erróneos los siguientes resultados; de la primera columna, el 19 (3322-332-321-32-32-21) y el 64 (3322-331-221-32-32-32); y de la segunda, el 21 (3321-333-322-32-22-21)., el 24

Una desventaja tanto de la presentación de resultados de Shujun, como de la nuestra, es que los mismos no muestran de manera explícita cómo deben interconectarse los diferentes pares cinemáticos. Si el usuario desea que la computadora misma muestre claramente cómo van interconectados los eslabones, puede recurrir a la matriz de interconexión para escribir en ella las movilidades, utilizando la información contenida en el arreglo P%. Se advierte sin embargo, que si la computadora realiza este trabajo, el tiempo de ejecución del programa se incrementará substancialmente.

3.2.3 Un Ejemplo: Comentarios Sobre Una de las Cadenas Cinemáticas Sintetizadas Mediante el Método de Shujun

Considérese el ordenamiento 3321-333-311-33-33-21 (resultado del renglón 8, columna 3 de la lista anexa). Esta cadena cinemática se ilustra en la figura 3. Se observa que si la malla formada por los eslabones 1-2-6-1 no es rígida (lo que implicaría que esta malla degenerara en un solo eslabón ternario), la dimensión máxima que puede tener es 3. Una cadena cinemática cerrada simple cuya dimensión es 3, y cuyos pares cinemáticos tienen movilidades 1-1-2 se muestra en la figura 4.

(3321-333-322-32-21-22) y el 31 (3322-331-321-33-32-32). Ninguno de éstos cumple con la ecuación (8) del cp. 1. Los resultados correctos respectivos son: 3322-332-321-32-32-31, 3332 - 331 - 221 - 32 - 32 - 32, 3321 - 333 - 322 - 33- 22 - 21, 3321-333-322-32-31-22 y 3322-331-321-32-32-32. Por otra parte, el resultado del renglón 38 de la segunda columna aparece repetido. Ver apéndice F



Los números indican las movilidades de los pares cinemáticos

figura 3

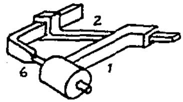


figura 4

Otra solución es la mostrada en la figura 5. Ésta incluiría un par cinemático superior (en el que los cuerpos se tocan únicamente en un punto, o a lo largo de una linea).

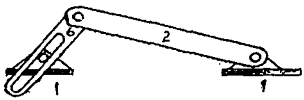


figura 5

El par cinemático superior que consiste en un perno y una corredera entre los que puede haber movimiento relativo, tanto de translación rectilinea, como de rotación, podría ser substituido por un enlace consistente en una cadena abierta simple de 3 eslabones interconectados mediante un par de revoluta y uno prismático (figura 6).

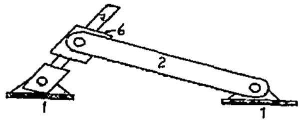


figura 6

Cinemáticamente, la cadena de la figura 5 es equivalente a la de la 6.

Puede suponerse que las mallas 1-2-3-4-1 y 1-4-3-5-1 tienen dimensión 6, de modo que los grados de libertad F de la cadena que estamos considerando son

$$F = 19-(3+6+6) = 4.$$

Uno de estos grados de libertad es el de la malla 1-2-6-1, la cual tiene movilidad 1. Las dos posibilidades mecánicas que hemos planteado aquí, son mecanismos planos[4].

Si todos los pares cinemáticos de movilidad 3 de la cadena cinemática en cuestión son esféricos, 2 de los 3 grados de libertad restantes serán pasivos. Uno de estos grados de libertad pasivos es el movimiento de rotación que tiene el eslabón 4 alrededor de un eje que aloja los centros de los dos pares

4 NOTA: Téngase presente que las cadenas de las figuras 4, 5 y 6 son realizaciones mecánicas exclusivamente de la malla 1-2-6-1 de la cadena "multimalla" que estamos estudiando; y por lo tanto, por ahora se consideran en ellas únicamente eslabones binarios.

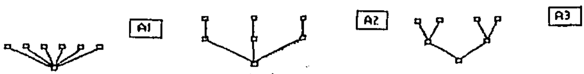
esféricos que están asociados a dicho eslabón. El eslabón 5 tiene un comportamiento análogo, y a él corresponde el otro grado de libertad pasivo. Por lo tanto nuestra cadena cinemática tiene 2 grados de libertad efectivos.

Los casos en que todas las mallas tienen dimensión 6 (que en nuestra lista son mayoría), son mecanismos espaciales.

3.3 SÍNTESIS DE ALGUNAS ESTRUCTURAS CINEMÁTICAS MEDIANTE EL MÉTODO MODULAR

En esta sección se presentan ejemplos de estructuras cinemáticas tomadas de la referencia [8], con objeto de ilustrar el uso del método modular.

La figura 7 ilustra algunos componentes de actuación CA. Y la figura 8 muestra algunos componentes de distribución CD.



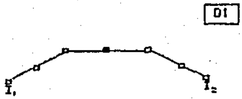
CA con 6 articulaciones conducidas desde la base. Altura 1.

Componente de actuación de altura 2. Seis articulaciones conducidas: 3 de ellas, desde la base

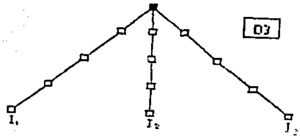
CA con seis articulaciones conducidas: 2 de ellas desde la base.

Algunos Componentes de Actuación

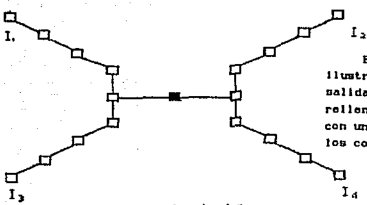
figura 7



CD con 2 entradas



CD con 3 entradas



En los componentes de distribucion aqui ilustrados, el eslabon que se considera como salida de los mismos aparece como un cuadrado relleno. Los eslabones que aparecen indicados con una "I" subindicada, son las entradas de los componentes.

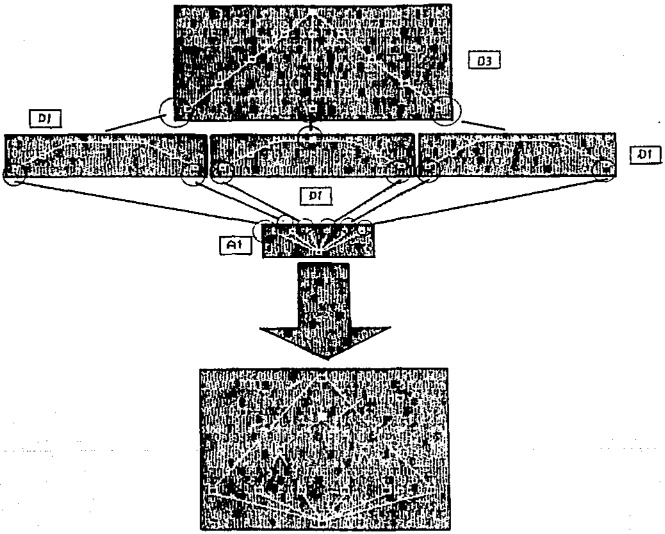
CD con 4 entradas

figura 8

Las figuras 9 y 10 ejemplifican la aplicación de la identificación formal de eslabones para la generación de cadenas cinemáticas complejas, utilizando los CA y CD de las figuras 7 y 8.[5] Se ha supuesto en todos los casos que las cadenas cinemáticas obtenidas cumplen con el criterio de Kutzbach tradicional. Al momento de dar forma geométrica a alguna de estas estructuras cinemáticas, o a cualquiera otra obtenida mediante el método modular, el diseñador deberá cuidar de que no exista

[5] NOTA: Es oportuno mencionar aquí, que una manera de reconocer si una cadena cinematica es o no un componente de distribución, es identificando formalmente todas y cada una de sus entradas I con un único eslabón B, y comprobando si la nueva cadena así obtenida, satisface la ecuación de Shujun (ecs. (7) u (8) cap. 1) con F=0. Este criterio es más general que el de movilidad efectiva, ya que permite incluir en el análisis la posibilidad de que diferentes mallas tengan dimensiones distintas. Sin embargo, sólo es aplicable si ya se conoce la geometría del CD.

. EJEMPLOS DE CONSTRUCCIÓN DE MANIPULADORES MEDIANTE EL MÉTODO MODULAR



Esta figura muestra como se obtiene un manipulador de 6 grados de libertad, identificando formalmente las salidas de un componente A1 con las entradas de tres componentes D1, y las salidas de éstos a las entradas de un componente D3.

En el esquema que representa al manipulador se han omitido algunos eslabones y algunas articulaciones. En su lugar, se han dibujado ramas con un número adyacente, el cual indica la cantidad de articulaciones intermedias entre los eslabones que sí estan dibujados.

figura 9

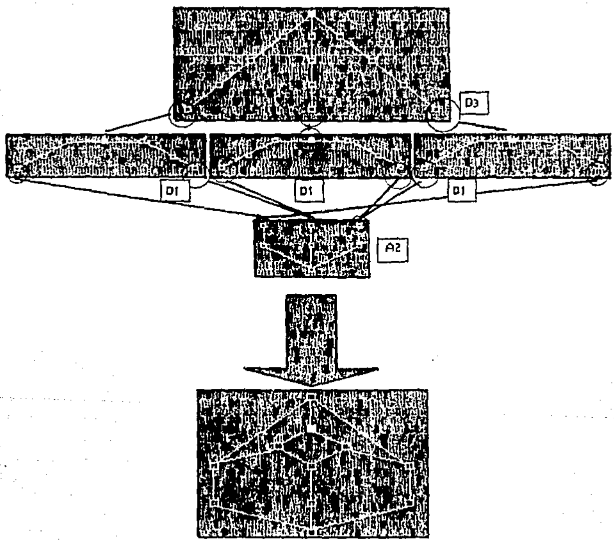


figura 10

reducción en la dimensión de las mallas que se generen, es decir, de que a todas las mallas se asocie la dimensión 6; o bien deberá hacer los ajustes necesarios en cuanto a la cantidad y naturaleza de los pares cinemáticos, las posiciones relativas entre los diferentes ejes, etc., con el fin de obtener la movilidad que desea.

3.4 LOS METODOS EXHAUSTIVOS Y CONSTRUCTIVOS COMO HERRAMIENTAS AUXILIARES EN UN PROCESO CREATIVO: LA SINTESIS DE CADENAS CINEMATICAS

Los métodos exhaustivos (Shujun) y los constructivos (Earl y Rooney) no se excluyen mutuamente. Por el contrario, son complementarios. Por ejemplo, alguna cadena cinemática obtenida mediante el método de Shujun, puede usarse como un módulo que forme parte de otra que se sintetice con base en la identificación formal de eslabones.

El diseñador no debe en modo alguno sentirse esclavizado a ningún esquema mental que pudiera sugerirle cualquiera de estos métodos; sino que debe usarlos consciente de que tienen limitaciones, y estar abierto a adaptarlos; abierto incluso, a definir nuevos conceptos que situaciones antes no encontradas le sugieran.

Como ejemplo de la creatividad que caracteriza al proceso de síntesis de cadenas cinemáticas espaciales, ofrecemos una realización mecánica (figura 11) del manipulador sintetizado en la figura 9. Cada una de las ramas de ésta figura, a las que corresponde el número 4, se ha construido como una cadena cinemática simple abierta de 3 eslabones, los cuales están interconectados mediante un par de revoluta, y uno esférico; es decir, 3 de los pares de tornillo de paso finito o nulo representados en dichas ramas, se han convertido en un par esférico. Substituir, por ejemplo, 3 pares de revoluta por uno esférico, permite reducir el número de piezas (eslabones), y construir cadenas cinemáticas más estables.

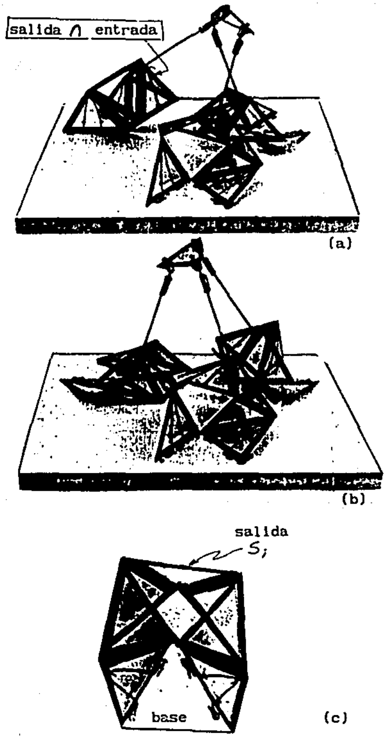
El manipulador de la figura 11 es objeto de un futuro estudio cinemático; aunque presenta algunas características similares a la plataforma de Stewart, cuyo estudio nos ocupará en breve. Por lo pronto, su forma sugiere aplicaciones estéticas: por ejemplo, su exhibición en algún evento deportivo o en alguna exposición tecnológica.

3.5 LA PLATAFORMA DE STEWART

3.5.1 Generalidades

Bajo el nombre genérico *plataforma de Stewart* (PS)se denomina a una familia de mecanismos que tienen la siguiente característica común: tener un eslabón de salida articulado en tres puntos no colineales, a sendas "piernas" mediante pares esféricos. Dicho eslabón posee 6 grados de libertad.

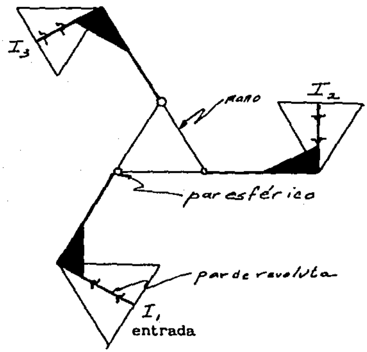
Dos posiciones diferentes de la mano de un modelo físico de manipulador con estructura cinemática correspondiente a la figura 8.



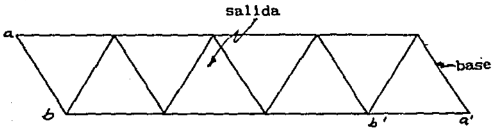
pierna básica con 2 grados de libertad.
El manipulador en a y b tiene 3 de éstas.

figura 11

Desarrollo de las cadenas cinemáticas que componen al manipulador de la figura 11



Identificando formalmente los eslabones Si e Ii respectivos, se obtiene el manipulador de las figuras 11a y 11 b.



Uniendo los vértices a y a', y b y b' se obtiene la pierna básica de la figura 11c. Las aristas representan pares de revoluta

figura 11'

La PS fue concebida originalmente para la construcción de simuladores de vuelo. Posteriormente, sin embargo, le fueron encontradas otras aplicaciones, por ejemplo: como componente en sensores de fuerza y par (momento), y como componente de manipuladores de tipo paralelo.

3.5.2 Su estructura cinemática

Una de las muchas cadenas que pueden considerarse como mecanismo de PS, es la representada en la figura 12. La dimensión de esta cadena cinemática es 6, de modo que su movilidad puede calcularse según el criterio de Kutzbach tradicional. Teniendo en

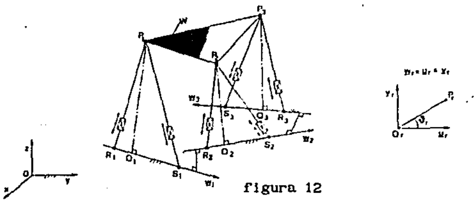


figura 12

cuenta que cada uno de los pares esféricos (que en total son 12, ya que en cada punto P_i hay dos pares esféricos que comparten el mismo centro de giro) impone 3 restricciones al sistema, y que cada par prismático impone 5, la movilidad del mecanismo de la figura 12 es

$$m = d(n-1) - \Sigma r_i = 6(14-1) - ((12)(3)+(6)(5)) = 12.$$

De estos 12 grados de libertad, 6 son pasivos, ya que los actuadores lineales pueden rotar libremente alrededor de sus ejes de simetría, sin alterar las distancias entre los puntos P_i, R_i y S_i, y sin alterar, consecuentemente, la posición y orientación de la plataforma con relación al eslabón base. Los otros 6 grados de libertad son las tres longitudes $|RP|$ y las tres $|RS|$.

3.5.3 Solución del problema directo en posición de la PS

En esta sección se realiza el análisis directo de posición (ADP) de la PS mediante las técnicas expuestas en el capítulo 2.

De la solución del ADP se obtienen los siguientes beneficios [7]:

1.-Permite estudiar el comportamiento cinemático de un mecanismo cuyas dimensiones fundamentales son conocidas.

2.-Posibilita evaluar los efectos que sobre la localización de la plataforma, tienen los errores de las entradas.

3.-La localización precisa de la plataforma con respecto a la base a través de un preciso control de las entradas.

4.-La posibilidad de desarrollar un sensor de fuerza y par con alta flexibilidad (*compliance*), la cual redunda en una alta sensibilidad.

Innocenti y Parenti-Castelli [7] resuelven el ADP en forma cerrada, esto es, encontrando todas las soluciones posibles para un conjunto de entradas dado. Estos autores encontraron que las ecuaciones no lineales en 3 variables que gobiernan la geometría de la PS pueden reducirse a un polinomio de grado 16 en una sola variable. Por el contrario, el enfoque que aquí se ofrece no proporciona todas las soluciones; pero es útil en la simulación, ya que no se requiere verificar qué valor pertenece a una determinada trayectoria. De hecho para su aplicación, se requiere partir de alguna de las soluciones obtenidas ya mediante el método polinomial, o mediante mediciones realizadas sobre un modelo ya construido. Este enfoque permite simular con cierta rapidez el movimiento de la PS, si partiendo de una configuración conocida, se modifican gradualmente los valores de las entradas, esto es, las longitudes de los actuadores lineales. Se quiere destacar que el método vectorial matricial (VM) con que aquí se resuelve el ADP, no es la forma óptima de hacerlo (puede intentarse resolver directamente las ecuaciones (5) de la referencia [7] mediante métodos corrientes empleados para resolver sistemas de ecuaciones no lineales). De todas maneras, se consideró útil presentar este enfoque porque permite seguir una trayectoria, y porque sirve para ilustrar cómo pueden aplicarse los métodos vistos en el capítulo 2, a una gran cantidad de cadenas cinemáticas para las que puede ser difícil deducir un conjunto de ecuaciones que modelen su comportamiento.

3.5.3.1 Formulación de un Modelo Cinemático

Con el objeto de aplicar el método VM visto en el capítulo 2, debe plantearse un modelo cinemático que permita hacer uso de las ecuaciones (26) y (29) de dicho capítulo. Aquí se formula dicho modelo cinemático.

Considérese la cadena cinemática K_1 ilustrada en la figura 13.

Esta cadena es abierta y está constituida por 4 pares de revoluta cuyos ejes de giro son $[z_2]$, $[z_3]$, $[z_4]$ y $[z_5]$.

Si se ignoran los grados de libertad pasivos, y se considera a los actuadores como cuerpos rigidos, la cadena K_1 es cinemáticamente equivalente a una subcadena de la figura 12 compuesta por la base, los actuadores R_1P_1 y S_1P_1, y la plataforma propiamente dicha.

Los pares de revoluta, cuyos ejes son $[z_3]$, $[z_4]$ y $[z_5]$ y se intersecan en un punto, substituyen al par esférico del punto P_1 del mecanismo de la figura 12 (substituir un par esférico por 3 pares de revoluta, es una técnica que se puede emplear siempre que se quiera usar la notación de D y H en cadenas que contengan pares esféricos).

Considérense ahora las cadenas cinemáticas K_2 y K_3 ilustradas en la figura 14.

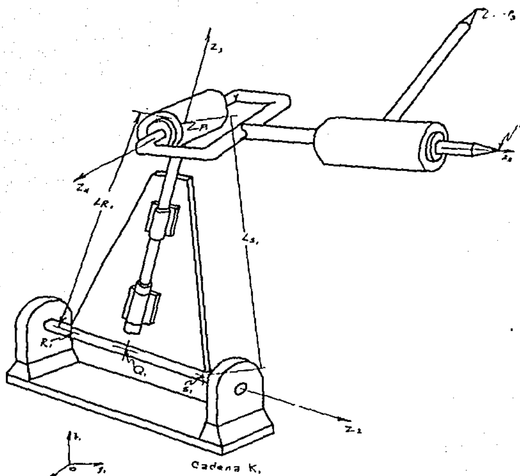


figura 13

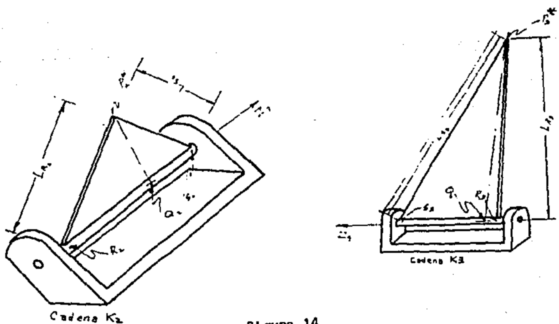


figura 14

La cadena K_2 es cinemáticamente equivalente a las subcadenas formadas por los actuadores R_2P_2 y S_2P_2. Análogamente, la cadena K_3 es equivalente a la subcadena de la figura 12 formada por la base y los actuadores R_3P_3 y S_3P_3.

Si las bases de las cadenas K_2 y K_3 se identifican formalmente con la de la cadena K_1, de manera que las posiciones relativas entre los puntos R_1 y S_1 sean las mismas que en la cadena de la figura 12, y se hacen coincidir los puntos P_2 y P_2^*, y P_3 y P_3^*, la cadena $K_1 U K_2 U K_3$ será una estructura rígida y representará una solución para un conjunto de entradas (longitudes L_{RP1}, L_{SP1}) dado.

El lector estará de acuerdo en el hecho de que puede

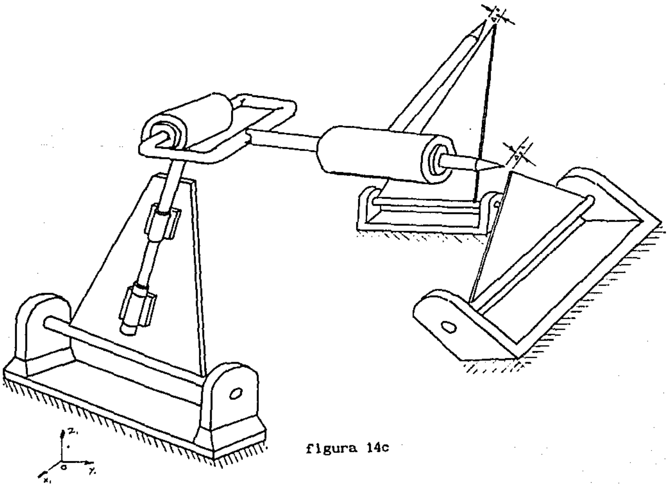


figura 14c

escribirse una sucesión (ecs. 26 cap. 2) para cada uno de los puntos P_2, P_2^*, P_3 y P_3^*. Se tendrán entonces cuatro vectores de posición[6] s_1^2, s_1^{2*}, s_1^3 y s_1^{3*}, y consecuentemente, se puede escribir

$$\Delta s^2(\theta) = s_1^2 - s_1^{2*} = 0$$

y (5)

$$\Delta s^3(\theta) = s_1^3 - s_1^{3*} = 0$$

que son las ecuaciones a resolver.

La posición de P_2 depende de las variables θ_2, θ_3 y θ_4; la de P_3 de θ_2, θ_3, θ_4 y θ_6; la de P_2^* de θ_7, y finalmente, la posición de P_3^* depende de θ_8. Entonces, las ecuaciones (5) representan 6 ecuaciones escalares en 6 incógnitas, y por lo tanto constituyen un sistema determinado, el cual puede ser resuelto mediante el método de Newton-Gauss con el auxilio de las reflexiones de Householder. Esto lo realiza el programa TINASTE (apéndice G). En esta tesis se usó el mismo ejemplo que resolvieran I. y P.C., para efectos de comprobación.

El funcionamiento del método VM se comprobó con la primera solución de las obtenidas por I. y P.C..

A partir de esta primera solución se simuló el movimiento de la PS, dando pequeños incrementos a los actuadores de una de las

[6] Adviértase que a menos que se indique lo contrario, los superíndices son sólo eso, y no son exponentes.

piernas.

Una comprobación simple de que las posiciones generadas por el método son congruentes con la rigidez de los eslabones de la PS, es calcular las distancias entre los puntos P_1, P_2 y P_3. Si éstas son iguales (o aproximadamente iguales) a los datos respectivos L_{12}, L_{23} y L_{31}, esto será un indicio de que el método funciona correctamente.

3.5.3.2 Algunas Adaptaciones Hechas al Método VM para Aplicarlo a la PS

Aquí se explicará cómo se aplicó el método VM a la PS. Por facilidad, se explicarán por separado los parámetros de las cadenas K_1, K_2 y K_3 de las figuras 13 y 14.

Cadena K_1: punto P_2

Como sistema de referencia absoluto, se escogió el mismo sistema de referencia fijo usado por I. y P.C.. Este sistema es el $[x_1y_1z_1]$.

El eje $[w_1]$ (ref. [7]) se convirtió en el eje $[z_2]$, el cual está dirigido de R_1 a S_1.

El eje $[z_3]$ está dirigido de Q_1 a P_1.

El eje $[z_4]$ pasa por P_1 y es perpendicular a $[z_3]$ y a la recta que pasa por P_1 y P_2.

Como origen n+1 (n+1=5 en este caso), se escogió el punto P_2 que es el que interesa ubicar.

Todos los demás parámetros y variables de D y H se definieron como se explicó en el capitulo 2, con excepción de los parámetros a los que corresponderia el subíndice 4. A estcs, por conveniencia se les asignó el subindice 0.

Adviértase que en este caso, el ángulo θ_1 es constante, y no una variable, debido a que se respetó el origen de I. y P.C., y esto obligó a introducir un sistema de referencia auxiliar, que no se desplaza con respecto a la base. Esto no impide que se aplique el método VM.

De éste modo, para el punto P_2, se puede escribir la siguiente sucesión con n=4:

$$s_4^2 = a_0 \tag{6.1}$$

$$s_3^2 = a_3 + Q_3 s_4^2 \tag{6.2}$$

$$s_2^2 = a_2 + Q_2 s_3^2 \tag{6.3}$$

$$s_1^2 = a_1 + Q_1 s_2^2 \tag{6.4}$$

Cadena K_1: coordenadas del punto P_3

Los parámetros son en general los mismos que para el punto P_2.

Los cambios radican en que aquí si se emplean los parámetros y la variable θ con subíndice 4. El origen n+1 (n+1=6) es esta vez el punto P_3.

En esta ocasión, el origen O_5 se sitúa en la intersección del eje $[z_5]$ y la perpendicular al mismo eje trazada desde P_3 sobre el plano definido por los puntos P_1, P_2 y P_3.

Para P_3 tenemos la siguiene sucesión:

$$s_5^3 = a_5 \tag{7.1}$$
$$s_4^3 = a_4 + Q_4 s_5^3 \tag{7.2}$$
$$s_3^3 = a_3 + Q_3 s_4^3 \tag{7.3}$$
$$s_2^3 = a_2 + Q_2 s_3^3 \tag{7.4}$$
$$s_1^3 = a_1 + Q_1 s_2^3 \tag{7.5}$$

Cadena K_2

Para esta cadena, se define el eje $[z_7]$ como el dirigido de R_2 a S_2 (es equivalente al eje $[w_2]$).

El eje $[x_7]$ es perpendicular al eje $[z_1]$, y el ángulo que $[x_7]$ forma con $[x_1]$ será θ_6; éste es constante, por realizarse un cambio de referencia en un mismo eslabón.

El ángulo que forma la línea $Q_2P_2^*$ con el eje $[x_7]$ es el ángulo θ_7. Éste se mide girando $[x_7]$ hacia la línea $Q_2P_2^*$, de acuerdo a la dirección positiva del eje $[z_7]$.

α_8 es el ángulo formado por $[z_1]$ y $[z_7]$ medido según la dirección positiva del eje $[x_7]$ (midiendo de $[z_1]$ a $[z_7]$).

La sucesión correspondiente a P_2^* es

$$s_2^{2*} = a_7 \tag{8.1}$$

$$s_1^{2*} = a_8 + Q_8 s_2^{2*} \tag{8.2}$$

Cadena K_3

El eje dirigdo de R_3 a S_3 es $[z_9]$ (análogo a $[w_3]$).

El eje $[x_9]$ es perpendicular a $[z_1]$, y el ángulo que forma $[x_9]$ con $[x_1]$ será θ_8. θ_8 es constante y se mide de acuerdo a la dirección positiva de $[z_1]$, llevando $[x_1]$ a $[x_9]$.

La línea $Q_3P_3^*$ forma un ángulo θ_9 con el eje $[x_9]$. θ_9 se mide de acuerdo a la dirección positiva del eje $[z_9]$.

Finalmente, α_9 es el ángulo subtendido entre $[z_1]$ y $[z_9]$, y se mide según la dirección positiva del eje $[x_8]$.

Si se dispone de un modelo físico de un mecanismo que se desea analizar, los parámetros de D y H pueden medirse directamente sobre dicho modelo. Si en cambio, no se dispone de éste, es necesario calcular los mencionados parámetros. Éste es precisamente nuestro caso. La explicación de como se calcularon los parámetros de D. y H. puede resultar tediosa. En lugar de esta explicación, se proporciona una tabla (Tabla 3) que indica las lineas del programa TINASTE en las que se calculan los diferentes parámetros usados.

Obsérvese que en el ejemplo que aquí se resuelve con el método VM, se usó un sistema de referencia adicional a los estrictamente necesarios, con el fin de poder comparar las soluciones obtenidas mediante dicho método, con las calculadas por el método polinomial. Bien se puede sin embargo, tomar como sistema de referencia absoluto al sistema $[x_2\ y_2\ z_2]$.

El sistema de ecuaciones (5) será resuelto mediante el método de Newton-Gauss. Para aplicar este método téngase en cuenta que

$$\begin{gathered} s_1^2 = s_1^2(\theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4), \\ s_1^{2*} = s_1^{2*}(\theta_7), \\ s_1^3 = s_1^3(\theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \theta_5), \\ s_1^{3*} = s_1^{3*}(\theta_8). \end{gathered} \tag{9}$$

Así, la matriz jacobiana correspondiente es:

TABLA 3

GUÍA AL PROGRAMA TINASTE +

PARAMETROS DE DENAVIT Y HARTENBERG (P. S.)

i / Parametros	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_i	330 +	500-780 / 600	340	340	340	790-810	500-780 / 600	350	500-780 / 600	360
b_i	380	500-780 / 590	730	390	400	820	500-780 / 590	730	500-780 / 590	730
$\mathrm{Sen}\,\alpha_i$	—	680	420	420	420	—	680	—	680	—
$\mathrm{Cos}\,\alpha_i$	—	690	440	440	440	—	690	—	690	—
$\mathrm{Sen}\,\theta_i$	variable	610	variable	variable	$\theta = f(\theta)$ variable	variable	610	variable	610	variable
$\mathrm{Cos}\,\theta_i$	variable	620	variable	variable	$\theta = f(\theta)$ variable	variable	620	variable	620	variable

+ números = líneas de programa

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial\theta_2} & \frac{\partial x^2}{\partial\theta_3} & \frac{\partial x^2}{\partial\theta_4} & 0 & -\frac{\partial x^{2*}}{\partial\theta_7} & 0 \\ \frac{\partial y^2}{\partial\theta_2} & \frac{\partial y^2}{\partial\theta_3} & \frac{\partial y^2}{\partial\theta_4} & 0 & -\frac{\partial y^{2*}}{\partial\theta_7} & 0 \\ \frac{\partial z^2}{\partial\theta_2} & \frac{\partial z^2}{\partial\theta_3} & \frac{\partial z^2}{\partial\theta_4} & 0 & -\frac{\partial z^{2*}}{\partial\theta_7} & 0 \\ \frac{\partial x^3}{\partial\theta_2} & \frac{\partial x^3}{\partial\theta_3} & \frac{\partial x^3}{\partial\theta_4} & \frac{\partial x^3}{\partial\theta_5} & 0 & -\frac{\partial x^{3*}}{\partial\theta_9} \\ \frac{\partial y^3}{\partial\theta_2} & \frac{\partial y^3}{\partial\theta_3} & \frac{\partial y^3}{\partial\theta_4} & \frac{\partial y^3}{\partial\theta_5} & 0 & -\frac{\partial y^{3*}}{\partial\theta_9} \\ \frac{\partial z^3}{\partial\theta_2} & \frac{\partial z^3}{\partial\theta_3} & \frac{\partial z^3}{\partial\theta_4} & \frac{\partial z^3}{\partial\theta_5} & 0 & -\frac{\partial z^{3*}}{\partial\theta_9} \end{bmatrix}$$

La ecuación (32 cap. 2), que es la ecuación recursiva del método de Newton-Gauss, puede escribirse entonces de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial\theta_2} & \frac{\partial x^2}{\partial\theta_3} & \frac{\partial x^2}{\partial\theta_4} & 0 & -\frac{\partial x^{2*}}{\partial\theta_7} & 0 \\ \frac{\partial y^2}{\partial\theta_2} & \frac{\partial y^2}{\partial\theta_3} & \frac{\partial y^2}{\partial\theta_4} & 0 & -\frac{\partial y^{2*}}{\partial\theta_7} & 0 \\ \frac{\partial z^2}{\partial\theta_2} & \frac{\partial z^2}{\partial\theta_3} & \frac{\partial z^2}{\partial\theta_4} & 0 & -\frac{\partial z^{2*}}{\partial\theta_7} & 0 \\ \frac{\partial x^3}{\partial\theta_2} & \frac{\partial x^3}{\partial\theta_3} & \frac{\partial x^3}{\partial\theta_4} & \frac{\partial x^3}{\partial\theta_5} & 0 & -\frac{\partial x^{3*}}{\partial\theta_9} \\ \frac{\partial y^3}{\partial\theta_2} & \frac{\partial y^3}{\partial\theta_3} & \frac{\partial y^3}{\partial\theta_4} & \frac{\partial y^3}{\partial\theta_5} & 0 & -\frac{\partial y^{3*}}{\partial\theta_9} \\ \frac{\partial z^3}{\partial\theta_2} & \frac{\partial z^3}{\partial\theta_3} & \frac{\partial z^3}{\partial\theta_4} & \frac{\partial z^3}{\partial\theta_5} & 0 & -\frac{\partial z^{3*}}{\partial\theta_9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4 \\ \Delta\theta_5 \\ \Delta\theta_7 \\ \Delta\theta_9 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta x^2_2 \\ \Delta y^2 \\ \Delta z^2 \\ \Delta x^3 \\ \Delta y^3 \\ \Delta z^3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

La ecuación (10) es un sistema de 6 ecuaciones lineales en 6 incógnitas (las 6 $\Delta\theta_i$ para i=2, 3, 4, 5, 7, 9). Los superíndices y los subíndices de la ecuación (10) no corresponden respectivamente al número de renglón y de columna, como se acostumbra; pero fue necesario usar esos números en vista de las características del problema.

3.5.3.3 Resultados del Programa TINASTE

Los resultados de la simulación realizada por TINASTE aparecen en el apéndice H. Con este programa se obtuvo como ventaja un incremento importante en la rapidez de cálculo . Sirva para ilustrar esto, el hecho de que el programa INNOSTE ejecutado en una computadora Commodore 64, emplea alrededor de 3 minutos tan sólo en el cálculo de los coeficientes. Por otra parte, el programa TINASTE ejecutado en la misma computadora, necesita aproximadamente 50 segundos para ir de una solución a otra, ello en virtud de que si los incrementos de las entradas son pequeños, la solución precedente es una buena estimación de la solución presente. El lector objetará que 50 segundos entre punto y punto es demasiado tiempo: sin embargo, téngase presente que los programas mencionados fueron corridos en una computadora lenta (con un procesador de 2 Mhz). Afortunadamente, existen computadoras mucho más rápidas y lenguajes TURBO que probablemente permitan una simulación en tiempo real. De todas maneras, el uso del programa TINASTE o de otro programa basado en las ideas aquí expuestas, puede economizar en alguna medida, tiempo en el análisis directo de la posición de la PS. Además, la aplicación del método VM a la solución del ADP de la PS ilustra procedimientos que pueden seguirse para analizar otras cadenas cinemáticas espaciales.

3.5.4 Diseños Especiales de la Plataforma de Stewart

Como se puede comprobar en el apéndice D, el análisis directo de posición de la PS es, en general, un problema matemático complejo, debido a que los ejes, alrededor de los cuales giran las piernas, están posicionados y orientados arbitrariamente. No obstante, existen algunas geometrías de la PS que ayudan a eliminar algunas de las complicaciones encontradas en el análisis de ésta. Con estas geometrías especiales se hace posible la obtención de una solución cerrada sin necesidad de recurrir a polinomios de alto grado, con la ventaja adicional de que se consiguen tiempos de ejecución substancialmente más cortos. Chang-de Zhang y Shin-Min Song [12] encontraron la condición geométrica necesaria para calcular la solución cerrada del ADP de la PS. Esta condición consiste en que una de las rotaciones de la plataforma esté desacoplada de los otros grados de libertad. Geométricamente, esto se consigue si 5 de los 6 pares cinemáticos que articulan a la plataforma con los actuadores lineales, están alojados en una misma línea recta, o bien, si 5 de las 6 articulaciones entre la base y los actuadores lineales, yacen en una misma recta.

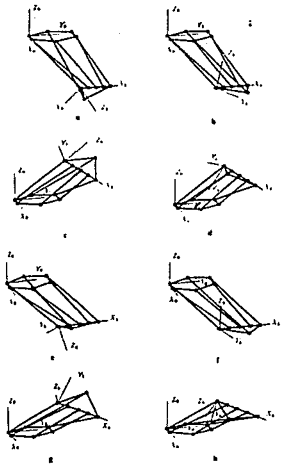
Porqué cualquiera de estas condiciones geométricas garantiza que una rotación quede desacoplada de las otras dos rotaciones y de las tres translaciones, se entiende fácilmente si se recuerda que, para que la posición y orientación de una línea recta quede completamente determinada, se requiere especificar 5 coordenadas, que en este caso son 5 distancias entre 5 pares de puntos: las longitudes de 5 de los actuadores lineales. Entonces, una vez fijadas estas longitudes, la modificación de la longitud del sexto actuador lineal producirá una rotación pura alrededor de la línea, a lo largo de la cual están alojados los 5 pares esféricos colineales. Dicha línea actuará como una "bisagra".

Una simplificación ulterior consiste en hacer que 3 de los 5 puntos colineales sean además coincidentes. De esta manera, los tres actuadores que convergen en un punto (suponiendo que éste está localizado en la plataforma) formarán un tetrahedro junto con la base. Este tetrahedro será en realidad un manipulador de 3 grados de libertad que permitirá ubicar un punto en el espacio tridimensional. Así se consigue desacoplar las translaciones de las rotaciones.

Las figuras 15 y 16 ilustran algunas posibles configuraciones de manipuladores en paralelo. Todas ellas fueron tomadas de la referencia [12].

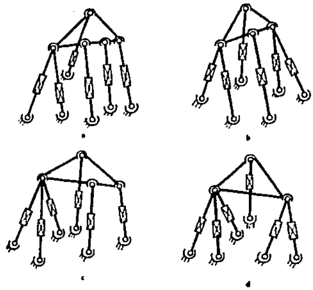
3.5.5 Una Aplicación Especial de la Plataforma de Stewart: los Manipuladores Híbridos

I. y P.C. [7], Zhang y Song [12] y otros autores tratan a la



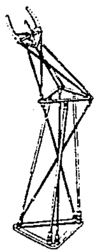
Ocho posibles configuraciones de un manipulador en paralelo con 5 puntos extremos a lo largo de una misma línea

figura 15



Cuatro casos especiales de manipuladores en paralelo con 5 puntos extremos a lo largo de la misma línea.

figura 16



Estructura simple de un robot híbrido.

figura 17

PS en si misma como un manipulador, tal como lo había sugerido Hunt [A3]. Conceptualmente lo es; pero desde un punto de vista práctico, un manipulador en paralelo basado en la PS tiene una maniobrabilidad muy limitada, pues la plataforma propiamente dicha no puede hacer "recorridos" extensos. Empero, características suyas como estabilidad, rigidez (frecuencias naturales altas), y el hecho de que en ella las cargas se distribuyen axialmente, la hacen un componente adecuado en manipuladores.

Recientemente se han investigado los llamados manipuladores híbridos, los cuales combinan las características de los manipuladores en serie y en paralelo. Shaninpoor [9] hace un estudio de la cinemática directa e inversa de un manipulador híbrido, que en los términos que se han venido manejando a lo largo de esta tesis, puede describirse como la identificación formal de dos plataformas de Stewart (figura 17). La base de una de ellas se encuentra fija en el espacio. En este manipulador los grados de libertad se encuentran repartidos equitativamente entre las dos plataformas: la plataforma de la base fija tiene 3 actuadores lineales alternados con 3 cables, y la otra plataforma tiene tambien 3 actuadores lineales alternados con igual número de cables. Parece sorprendente que 3 de los eslabones de cada una de las PS del manipulador híbrido sean cables: ¿cómo se mantienen constantes las longitudes de estos "eslabones", si un cable soporta sólo tensión y no compresión? La respuesta está en la misma pregunta: si se mantiene un control preciso de los actuadores, el movimiento generado por éstos mantendrá siempre tensos los cables, ya que el algoritmo que resuelve la cinemática directa considera que las longitudes de los cables son constantes.

Aunque Shaninpoor no hace mención de ningún problema originado en el uso de cables, el autor de esta tesis intuye que podrían darse problemas de vibración, si en un instante dado, existe una tendencia a que se aproximen los puntos extremos de uno o de más cables, y en un instante posterior esa tendencia se revierte. El resultado real sería que por momentos, la configuración del manipulador quedaría indeterminada, y éste oscilaría entre posiciones extremas en las que los cables estarían tensos. Al alcanzar estas posiciones extremas, se producirían cargas de impacto, puesto que los cuerpos que componen el manipulador tendrían globalmente una cierta cantidad de movimiento que sería absorbida instantáneamente por los cables que fueran súbitamente tensados. Un comportamiento semejante es indeseable, y para evitarlo, se requiere un control muy riguroso. A pesar de esto, se reitera que Shaninpoor no menciona ningún problema semejante, y reporta la construcción y operación satisfactoria de un prototipo del cual incluye, en el artículo ya citado, una fotografía. Este prototipo pesa 34 libras, y es capaz de levantar 160, lo cual significa que la razón carga/peso es de alrededor de 5. Según este valor, el manipulador híbrido reportado es extraordinariamente ligero comparado con la carga que es capaz de manejar.

En cierto sentido, puede equipararse un robot híbrido a un brazo humano porque algunos de sus eslabones fungen como músculos, y otros como huesos. Pequeñas contracciones de algunos de los "músculos" (que van acompañadas de la distensión de otros), pueden producir desplazamientos considerables del órgano terminal.

Las caracteristicas citadas del manipulador hibrido lo convierten en una opción deseable en ciertas aplicaciones en plantas de manufactura flexible, en lugar de los manipuladores en serie convencionales.

CONCLUSIÓN

Globalmente, se han presentado las herramientas esenciales para el análisis de movilidad, y la síntesis estructural de cadenas cinemáticas espaciales, así como una técnica para la solución del problema directo en posición. Todo ello representa una gran ayuda en el proyecto de cadenas cinemáticas espaciales y de manipuladores.

Se cree haber logrado el propósito de exponer con claridad y de una manera simple los criterios de movilidad de Kutzbach y de Hervé. Se considera que de este último se logró, gracias al uso de ejemplos sencillos, hacer fácilmente comprensibles aspectos como los grupos de desplazamiento, el concepto de enlace (liaison), las operaciones de intersección y composición de enlaces, el concepto de la dimensión asociada a una cadena cinemática, y otros conceptos afines. Igualmente, se cree haber explicado con claridad y sencillez los aspectos fundamentales del método de síntesis estructural que aquí se ha denominado modular, debido a Earl y Rooney. En la exposición de éste, se prescindió de algunas cuestiones teóricas, como la demostración de que el conjunto mínimo de entradas que controlan a un eslabón es único; pero en cambio, se presentaron de una manera útil y transparente, las nociones de identificación formal de eslabones, movilidad efectiva, y componentes de distribución y de actuación, cuya comprensión representa el mínimo para poder servirse del método modular en la síntesis estructural de cadenas cinemáticas espaciales.

En relación con los tipos de cadenas cinemáticas identificados por Hervé, se sometió a revisión el concepto de cadena cinemática excepcional, y se concluyó que también a una cadena así considerada, puede aplicarse el criterio generalizado de Kutzbach. De todas maneras este problema está abierto a discusión, porque el autor de la tesis no demuestra su hipótesis, sino sólo la confirma con ejemplos.

En lo que se refiere al método de síntesis estructural de Shujun se aportó una sencilla rutina (PADRONCAD) para computadora que complementa dicho método. Esta rutina sirve para obtener automáticamente todos los conjuntos posibles de eslabones binarios, ternarios, etc., que correspondan a una cadena cinemática con N eslabones y L mallas. En otras palabras dicha rutina realiza el primero de los tres pasos de que consta el método de Shujun.

Se discutió también el problema de obtener todas las interconexiones posibles de los conjuntos de eslabones obtenidos mediante PADRONCAD, problema que Shujun ignora en su artículo [10]. En el tratar de resolver este problema (que no es trivial), se encontró un algoritmo (método de la caída) que permite encontrar una interconexión posible dado un conjunto de eslabones. Diferentes internconexiones pueden obtenerse cambiando el que hemos llamado el criterio de caída. Este algoritmo no es exhaustivo como se deseaba que fuese; pero de todas formas, representa una ayuda en la síntesis exhaustiva, ya que permite obtener interconexiones de manera sistemática y ahorra el tiempo que tendría que invertirse con un método manual de prueba y error (que sería considerable aún tratándose de pocos eslabones). No se incluyó un programa de computadora que instrumentara dicho algoritmo; pero esta instrumentación no es difícil.

La exposición del método vectorial matricial para el análisis de posición directo e inverso de cadenas cinemáticas espaciales (incluidos los manipuladores) del capítulo dos, se hizo minuciosamente. Un logro de este capítulo es que presenta de una manera unificada tanto el análisis directo de posición como el inverso, y evidencia la posibilidad de aplicar el método VM tanto a cadenas simples abiertas, como a cadenas que contengan múltiples mallas. El método VM no proporciona las llamadas soluciones cerradas; pero puede ser sumamente útil en la simulación del movimiento de cadenas cinemáticas. El autor cree haber conseguido en este capítulo una disertación sumamente accesible.

El capítulo 3 fue redactado, al igual que los otros dos, con gran cuidado; pero su lectura puede entrañar dificultades especiales porque para su comprensión total se requiere examinar los programas que figuran en los apéndices. Sin embargo se hizo un esfuerzo por facilitar en la medida de lo posible la comprensión de dichos programas.

En este capítulo 3 se detalló la aplicación del método vectorial matricial, estudiado en el capítulo 2, al análisis directo de posición de la plataforma de Stewart. Esta aplicación fue exitosa, y se propone como complemento al método polinomial de Innocenti y Parenti-Castelli, porque agiliza los cálculos en la simulación del movimiento de la PS si se parte de una solución conocida (obtenida mediante el método polinomial) y se incrementan las entradas en pequeñas cantidades. Adicionalmente, la aplicación del método VM a la PS tal como se presenta en el capítulo 3 sugiere que dicho método puede aplicarse al análisis de gran número de cadenas cinemáticas, siempre que se hagan las adaptaciones pertinentes.

Al programar los algoritmos de Shujun y de Innocenti y Parenti-Castelli, se encontraron algunos errores que se comentaron y rectificaron oportunamente (Shujun - capítulo 3, Innocenti y Parenti-Castelli - apéndice I)..

Un subproducto de las investigaciones que culminaron en el libro que el lector tiene en sus manos, fue el diseño de un conjunto de piezas (el estuche D y H) que permiten ensamblar cadenas cinemáticas de muy diversas formas, en las cuales pueden mostrarse los parámetros y variables de Denavit y Hartenberg. El autor cree que el estuche D y H puede ser una ayuda de gran valor para visualizar las definiciones de los mencionados parámetros y variables, especialmente para aquellas personas que tienen dificultad para imaginar las interrelaciones de cuerpos en 3 dimensiones.

Un trabajo posterior podría ser el diseño de un manipulador híbrido experimental, similar a los comentados en el capítulo 3, que permitiera explorar las potencialidades de esta clase de manipuladores, y que insinuara posibles mejoras, a fin de obtener diseños óptimos.

Se concluye con una frase respecto al estudio de cadenas cinemáticas que se tomó prestada de Rooney y Earl [8]: "Parece ser éste un terreno fascinante".

APENDICE A

```
READY.

1 REM *****   PROGRAMA PADRONCAD   *****
2 REM *****   ESTE PROGRAMA OBTIENE LOS JUEGOS DE ESLABONES DADOS L Y N   *****
3 :
4 CLR: INPUT"ESLABONES";N
5 INPUT"LAZOS";L:A=2*(L-1):X=4:DIMB(L+1)
10 K=1
20 B(4)=B(4)+1
30 GOSUB140
40 IFF=1THENF=0:GOTO70
50 GOSUB210
60 GOTO20
70 B(4)=0:IFL<=3THENGOSUB140:GOSUB210
80 Q=4+K
86 IFQ>X THEN X=X+1:IFX>L+1THENPRINT"FIN":END
90 B(Q)=B(Q)+1
100 GOSUB140
110 IFF=1THENB(Q)=0:K=K+1:F=0:GOTO80
120 GOSUB210
130 GOTO10
140 S=0
150 FORI=4TOX
160 S=S+(I-2)*B(I)
170 IFS>ATHENF=1:RETURN
180 B(3)=A-S
190 NEXTI
200 RETURN
210 B(2)=N
220 FORI=L+1TO3STEP-1
230 B(2)=B(2)-B(I)
240 PRINTB(I),
250 NEXTI
260 PRINTB(2)
270 RETURN

READY.
```

N= número de eslabones
L= número de lazos o mallas

APÉNDICE B

DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN (33) DEL CAPÍTULO 2

Demostrar que

$$\partial r_i/\partial\theta_i = Q_0 Q_1 \ldots Q_{i-1}(e x r_i) \qquad (1)$$

donde e = vector unitario con la dirección del eje $[z_i]$, y Q_0 es la matriz identidad.

Partimos del hecho de que

$$r_i = \Sigma Q_0 Q_1 \ldots Q_{k-1} a_k \qquad (1')$$

Calculamos la derivada parcial de r_i con respecto a θ_i:

$$\partial r_i/\partial\theta_i = (\partial/\partial\theta_i)\,{}_{k=i}\Sigma_i Q_0 Q_1 \ldots Q_{i-1} Q_i Q_{i+1} \quad Q_{k-1} a_k \qquad (2)$$

De las matrices Q_j, la única afectada por el operador $\partial/\partial\theta_i$ es la matriz Q_i, ya que Q_j es independiente de θ_i $\forall j \neq i$.

Observamos además, que el producto $Q_1 Q_2 \ldots Q_{i-1}$ es factor común a todos los sumandos, y por lo tanto, puede escribirse a la izquierda de la "Σ". Entonces,

$$\partial r_i/\partial\theta_i = Q_1 \ldots Q_{i-1}[(\partial/\partial\theta_i)\,{}_{k=i}\Sigma_i Q_0 Q_i Q_{i+1} \quad Q_{k-1} a_k] \qquad (3)$$

A pesar de que la matriz Q_0 es un factor común a todos los sumandos de la sumatoria, convino preservarla del lado derecho de la sigma, con el objeto de que en caso de que k=i, la expresión dentro de la sumatoria siga teniendo el "aspecto" del producto de una matriz por un vector, es decir, para k=i el sumando correspondiente es

$$Q_0 a_i$$

o bien

$$a_i \quad \text{puesto que } Q_0 = I.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la sumatoria puede descomponerse de la siguiente manera:

$$\sum_{k=i} Q_0 Q_i Q_{i+1} \quad Q_{k-1} a_k = Q_0 a_i + \sum_{k=i+1} Q_i Q_{i+1} \quad Q_{k-1} a_k$$

por lo cual, dado que $Q_0 a_i = a_i$,

$$\partial r_i/\partial\theta_i = Q_1 \ldots Q_{i-1}(\partial/\partial\theta_i)[a_i + \sum_{k=i+1} Q_i Q_{i+1} \quad Q_{k-1} a_k] \qquad (4)$$

y como el único factor dependiente de θ_i dentro de la sumatoria es la matriz Q_i, tenemos que

$$\partial r_i/\partial\theta_i = Q_1 \ldots Q_{i-1}[\partial a_i/\partial\theta_i + (\partial Q_i/\partial\theta_i)\sum_{k=i+1} Q_{i+1} \quad Q_{k-1} a_k] \qquad (5)$$

A continuación, encontraremos expresiones para $\partial Q_i/\partial\theta_i$, $\partial a_i/\partial\theta_i$, Qv(donde v es cualquier vector) y exQv, las cuales nos serán útiles para completar nuestra demostración.

Considérese la matriz Q_i, que según su definición es

$$Q_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

y que por brevedad escribiremos como

$$Q_i = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} . \tag{6}$$

La derivada parcial de Q_i con respecto a θ_i es

$$\partial Q_i/\partial\theta_i = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta_i & -\cos\theta_i \cos\alpha_i & \cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Obsérvese que la derivada anterior puede expresarse en términos de los elementos q_{ij} de la ecuación (6) reacomodados como sigue:

$$\partial Q_i/\partial\theta_i = \begin{bmatrix} -q_{21} & -q_{22} & -q_{23} \\ q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Esta ecuación nos será útil en breve. Ahora calculemos $\partial a_i/\partial\theta_i$.

Recordemos que $a_i = [d_i \cos \theta_i \quad d_i \operatorname{sen} \theta_i \quad b_i]^T$ donde d_i y b_i son constantes. Entonces,

$$\partial a_i/\partial\theta_i = [-d_i \operatorname{sen} \theta_i \quad d_i \cos \theta_i \quad 0]^T \tag{9}$$

Por otra parte, del cálculo del producto exa_i resulta

$$exa_i = [-d_i \operatorname{sen} \theta_i \quad d_i \cos \theta_i \quad 0]^T \tag{10}$$

Los miembros derechos de las ecuaciones (9) y (10) son iguales, por lo que los izquierdos también lo son; de modo que:

$$\partial a_i/\partial\theta_i = exa_i \tag{11}$$

Obtenemos ahora una expresión para $Q_i v$, donde v es un vector cualquiera:

$$Q_i v = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11}v_1 + & q_{12}v_2 + & q_{13}v_3 \\ q_{21}v_1 + & q_{22}v_2 + & q_{23}v_3 \\ q_{31}v_1 + & q_{32}v_2 + & q_{33}v_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Para calclular el producto vectorial $exQ_i v_i$, abreviaremos las sumas del vector obtenido en (120) como $\Sigma q_{1r}v_r$, $\Sigma q_{2r}v_r$, $\Sigma q_{3r}v_r$. Entonces,

$$exQ_i v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ \Sigma q_{1r}v_r & \Sigma q_{2r}v_r & \Sigma q_{3r}v_r \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\Sigma q_{2r}v_r \\ \Sigma q_{1r}v_r \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Si premultiplicamos el vector v por la matriz $\partial Q_i/\partial\theta_i$ obtenida en la ecuación (8), tenemos

$$(\partial Q_i/\partial\theta_i)v = \begin{bmatrix} -q_{21} & -q_{22} & -q_{23} \\ q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(q_{21}v_1+q_{22}v_2+q_{23}v_3) \\ q_{11}v_1+q_{12}v_2+q_{13}v_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

o en forma abreviada

$$(\partial Q_i/\partial\theta_i)v = \begin{bmatrix} -\Sigma q_{2r}v_r \\ \Sigma q_{1r}v_r \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (14')$$

Al comparar las ecs. (13) y (14'), observamos que

$$exQ_i v = (\partial Q_i/\partial\theta_i)v \qquad (15)$$

Este resultado puede aprovecharse para concluir la demostración que nos ocupa.

Volviendo a la ecuación 5, vimos que la sumatoria representa al vector r_{i+1}, y según los resultados de las ecuaciones (11) y (15), podemos escribir

$$\partial r_i/\partial\theta_i = Q_i\ldots Q_{i-1}[\ exa_i + exQ_i r_{i+1}] \qquad (16)$$

Aprovechando la propiedad distrivutiva del producto vectorial, se tiene que

$$\partial r_i/\partial\theta_i = Q_1 \ldots Q_{i-1}[\ e x(a_i + Q_i r_{i+1})] \qquad (17)$$

pero,

$$r_i = a_i + Q_i r_{i+1} \qquad (18)$$

de manera que

$$\partial r_1/\partial\theta_i = Q_0 Q_1 \ldots Q_{i-1}(e x r_i) \qquad (19)$$

que es lo que se quería demostrar.

APÉNDICE C

REFLEXIONES DE HOUSEHOLDER

Las reflexiones de Householder proporcionan un medio eficaz para resolver sistemas de ecuaciones lineales determinados y sobredeterminados.

Si la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales determinado es triangular, la solución de dicho sistema puede obtenerse muy sencillamente mediante substitución regresiva.

Las reflexiones de Householder permiten triangularizar la matriz de coeficientes minimizando los errores de redondeo.

Definición

Una reflexión de Householder P es un operador matricial que se define como sigue:

$$P = I - \frac{1}{\beta} u u^T$$

donde

u es un vector cualquiera

$\beta = \frac{1}{2} u^T u = \frac{1}{2} u \cdot u$

Obsérvese que $u^T u$ es distinto de $u \cdot u^T$. La primera de estas expresiones es un producto escalar (producto punto), mientras que la segunda es el producto de una matriz columna por una matriz renglón, es decir, una matriz cuadrada. Si u tiene n componentes, el orden de la matriz $u \cdot u^T$ será también n.

El nombre de <u>reflexion</u> para la matriz P se deriva del hecho de que al premultiplicar un vector a en el espacio R_3 por P, se obtiene una imagen especular o "reflejo" del vector a. El "espejo" es un plano Π perpendicular al vector u ($u \in R_3$).

Propiedades de las Reflexiones de Householder

Si P es reflexión de Householder, entonces P es ortogonal y simétrica.

Si además, teniendo un vector a, y tomando un componente a_k de dicho vector se definen α, u y β como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \text{signo } (a_k)\ (a_k^2 + a_{k+1}^2 + \ldots + a_n^2) \\ \qquad \text{(Si } a_k = 0\text{, entonces puede asignarse a } \alpha \\ \qquad \text{cualquer signo [+ ó -])} \\ \\ u = (0, \ldots, 0, a_k + \alpha, a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ \\ \beta = (\alpha)(u_k) \end{array}\right] \quad (1)$$

entonces

$$Pa = (a_1, \ldots, a_{k-1}, -\alpha, \ldots, 0) \qquad (2)$$

Aquí se advierte que una vez elegida k, con la reflexión de

Householder correspondiente se anulan los últimos n-k componentes de **a**, y la componente k se modifica de manera que se preserva la norma de a. Es decir $\|Pa\| = \|a\|$.

Además, para todo vector b distinto de a se cumple

$$Pb = b - \gamma u \qquad (3)$$

donde $\gamma = (u^T b)/\beta$.

Queda fuera de los alcances de esta tesis demostrar estas ecuaciones. Simplemente se presenta aquí lo necesario para que puedan ser utilizadas.

Como se puede observar, con las ecuaciones (1), (2) y (3) pueden obtenerse los produtos Pa y Pb sin necesidad de calcular P a partir de su definición. Esto es conveniente.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales con reflexiones de Householder, se comienza aplicando las ecuaciones (1) y (2) al primer vector columna de la matriz de coeficientes, siendo k=1.; con ello se aniquilan todos los componentes de dicho vector, excepto el primero. Posteriormente, se aplica la ecuación (3) a los vectores restantes de la matriz de coeficientes y al vector de términos independientes. Todo esto equivale a premultiplicar ambos miembros de la ecuación matricial que representa al sistema de ecuaciones lineales a resolver, por una reflexión de Householder P_1, o sea,

$$P_1Ax = P_1c \qquad (4)$$

Ahora se anulan todos los términos del vector columna 2 de la nueva matriz de coeficientes, eligiendo esta vez k=2 para las ecuaciones (1) y (2). Nuevamente se aplica la ecuación (3) a los vectores restantes. Es útil resaltar que el aplicar (3) al primer vector columna, ya no tiene efecto sobre éste. Tener en cuenta esto, puede ahorrar tiempo de cálculos en la computadora.

Ahora se ha obtenido

$$P_2P_1Ax = P_2P_1c$$

Aplicando reiteradamente este procedimiento, se obtiene

$$P_nP_{n-1}\ldots P_2P_1Ax = P_nP_{n-1}\ldots P_2P_1c \qquad (5).$$

donde la matriz $P_nP_{n-1}\ldots P_2P_1A$ es triangular superior.

La utilidad de las reflexiones de Householder no se restringe a la solución de sistemas determinados, sino que se extiende a la de sistemas sobredeterminados. En el caso de un sistema sobredeterminado compatible de m ecuaciones con n incógnitas, al proceder como se describió en los párrafos precedentes con dicho sistema, todos los elementos de los m-n últimos renglones de la matriz de coeficientes resultante serán nulos, lo mismo que los m-n últimos componentes del vector de términos independientes.

Esto significa que en el sistema original existía cierta dependencia lineal, de modo que ahora se ignoran los renglones que contienen exclusivamente elementos nulos y se resuelve el sistema determinado que queda.

Puede ser que por errores de redondeo, los elementos del vector de términos independientes que debieran ser nulos depués de la triangularización, aparezcan como pequeñas cantidades finitas. Éstas han de ignorarse. Si en cambio, éstas cantidades fueran grandes, podría sospecharse que el sistema de ecuaciones es icompatible, y el vector solución que se encuentre al emplear la substitución regresiva en las primeras n ecuaciones del sistema, es el que "mejor satisface" al sistema original de m ecuaciones incompatibles.

Cuando en el ánalisis de un manipulador se tiene un mayor número de ecuaciones que de incógnitas (como sucede en el análisis de un manipulador en serie de 5 grados de libertad), si las posiciones que se desea sean ocupadas por puntos prescritos del órgano terminal son congruentes con la geometría de éste, el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene al expandir en series de Taylor el sistema de ecuaciones no lineales que modela al manipulador, deberá ser compatible. "Incompatibilidades pequeñas" podrían ser consecuencia de errores de medición (si el análisis se aplica a un manipulador ya construído).

APÉNDICE D

MODELADO Y SOLUCIÓN DEL ANÁLISIS DIRECTO DE POSICIÓN DEL MPS EN FORMA CERRADA

Presentamos aquí, la traducción de un fragmento del artículo de Innocenti y Parenti-Castelli (I & P.C.) [7] (que en lo que resta de este apéndice nombraremos simplemente artículo) sobre la plataforma de Stewart. Estos autores proponen una solución cerrada para el análisis directo de posición de dicha plataforma (que discutimos en el capítulo 3). En este apéndice se anexan también algunas rectificaciones hechas a dicho artículo, así como los resultados de aplicar el método propuesto en el mismo.

Traduccción de las secciones 2 y 3 de [7]

2. Ecuaciones de Cierre

"Según la caracterización dada por Stewart[1] y con base en las siguientes consideraciones, se deduce un modelo para el análisis directo de posición del MPS con un arreglo cualquiera de "piernas".

La estructura geométrica básica del MPS consiste en una plataforma móvil W conectada en tres puntos distintos P_r, r=1, 3, a los eslabones adyacentes, mediante pares cinemáticos esféricos. Se pueden proyectar 3 piernas distintas con diversos arreglos de eslabones y pares (6 de los cuales son motorizados), para conectar la plataforma a la base, de modo que la plataforma tenga 6 grados de libertad. Cada pierna tiene dos pares cinemáticos motorizados, y considerando a la plataforma desconectada temporalmente en P_r, este punto puede moverse en el espacio de 3 dimensiones. Cuando

[1] D. Stewart *Proc. Instn Mech. Engrs.* Vol. 180, Part 1, No. 15, p. 371 (1965/66)

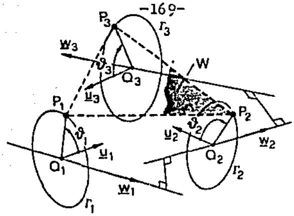


figura 1

se da un conjunto de entradas (*inputs*), el punto P_r de cada pierna describe un círculo Γ_r (figura 1) de radio y centro definidos, el cual está alojado en un plano perpendicular a una dirección definida $\mathbf{w}_r$. Conviene advertir que siempre que se modifiquen las entradas, cambian los círculos Γ_r. Específicamente, los ejes $\mathbf{w}_r$ pueden variar si se adoptan arreglos particulares. Los tres puntos P_r pertenecen también a la plataforma, y esto proporciona la condición para definir las localizaciones de los puntos sobre los círculos Γ_r correspondientes. Son posibles varias localizaciones. Los puntos P_r se determinan por los vectores de posición Q_rP_r que pueden definirse a través de tres ángulos θ_r medidos con respecto a direcciones arbitrarias $\mathbf{u}_r$ perpendiculares a los ejes $\mathbf{w}_r$. Debido a que hay una correpondencia uno a uno entre los tres ángulos θ_r y la localización de la plataforma, el problema de análisis directo se reduce a la determinación de todas las posibles tercias de θ_r cuando se da un conjunto de entradas. Cualquier mecanismo que pueda analizarse mediante este modelo, se llamará MPS, independientemente de los arreglos de sus piernas.

Teniendo en cuenta el hecho de que, cuando se dan los desplazamientos de los actuadores, todo mecanismo es esencialmente una estructura, se puede adoptar el modelo antes mencionado en aquellos casos en los que el número de entradas sea distinto de seis. Además, también se puede adaptar el modelo con pequeñas modificaciones a mecanismos del tipo MPS en los que uno o más de los puntos P_r describe líneas rectas en lugar de círculos. Por último, es importante mencionar que para algunos arreglos particulares de piernas, una vez que se ha dado un conjunto de entradas, son posibles varias configuraciones de las piernas; pero el modelo del MPS puede aplicarse de todos modos a todas las configuraciones posibles, a cada una de las cuales corresponde determinado círculo Γ_r, como en el caso de uno de los cuatro arreglos propuestos por Stewart (se omite aquí la ilustración referida en este párrafo del artículo original).

Por lo expuesto anteriormente, dondequiera que r y s aparecen simultáneamente en la misma ecuación, se tiene que r=1,3 y s=mod(r,3)+1, donde mod(x_1,x_2) es una función que da el residuo del cociente del primer argumento entre el segundo[2]. Refiriéndose a la figura [1], para cada malla $P_rP_sQ_sQ_r$ puede escribirse la siguiente ecuación vectorial

$$P_s - P_r = (P_s - Q_s) + (Q_s - Q_r) - (P_r - Q_r) \qquad (1)$$

Aquí,

$$|P_s - P_r| = L_{rs} \qquad (2)$$

$$P_r - Q_r = H_r(u_r\cos\theta_r + v_r\operatorname{sen}\theta_r) \qquad (3)$$

$$P_s - Q_s = H_s(u_s\cos\theta_s + v_s\operatorname{sen}\theta_s) \qquad (4)$$

[2] N. del T. Más sencillamente, la relación entre r y s puede representarse mediante la siguiente función tabular

r	s
1	2
2	3
3	1

donde $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{v}_r$ son vectores ortogonales mutuos paralelos al plano de los círculos Γ_r ($\mathbf{u}_r \times \mathbf{v}_r = \mathbf{w}_r$), y cuyas direcciones se escogen arbitrariamente; L_{rs} representa la distancia entre P_r y P_s; y H_r es el radio de Γ_r centrado en Q_r.

Q_r, $\mathbf{w}_r$ y H_r están definidos de manera única cuando se dan los desplazamientos de los actuadores.

Elevando al cuadrado la ecuación (1), se obtiene la siguiente ecuación escalar:

$$^rq_1C_rC_s+{}^rq_2C_rS_s+{}^rq_3S_rC_s+{}^rq_4S_rS_s+{}^rq_5C_r+{}^rq_6S_r+{}^rq_7C_s+{}^rq_8S_s+{}^rq_9= 0 \quad (5)$$

donde

$$C_k = cos\ \theta_k, \quad S_k = sen\ \theta_k$$

y

$$^rq_1 = 2H_rH_s\mathbf{u}_r\mathbf{u}_s \quad (5.1)$$
$$^rq_2 = 2H_rH_s\mathbf{u}_r\mathbf{v}_s \quad (5.2)$$
$$^rq_3 = 2H_rH_s\mathbf{v}_r\mathbf{u}_s \quad (5.3)$$
$$^rq_4 = 2H_rH_s\mathbf{v}_r\mathbf{v}_s \quad (5.4)$$
$$^rq_5 = 2H_r(Q_s - Q_r)\mathbf{u}_r \quad (5.5)$$
$$^rq_6 = 2H_r(Q_s - Q_r)\mathbf{v}_r \quad (5.6)$$
$$^rq_7 = 2H_s(Q_r - Q_s)\mathbf{u}_s \quad (5.7)$$
$$^rq_8 = 2H_s(Q_r - Q_s)\mathbf{v}_s \quad (5.8)$$
$$^rq_9 = L_{rs}^2 - H_r^2 - H_s^2 - (Q_s - Q_r)^2 \quad (5.9)$$

Substituyendo el seno y el coseno por las conocidas expresiones:

$$S_k = 2t_k/(1+t_k^2) \quad y \quad C_k = (1-t_k^2)/(1+t_k^2)$$

donde $t_k = \tan(\theta_k/2)$, la ecuación (5) puede escribirse como sigue:

$$\sum_{\substack{i=0,2\\ j=0,2}} {}^r a_{ij} t_r^i t_s^j = 0 \tag{6}$$

donde

$$ {}^r a_{00} = {}^r q_1 + {}^r q_5 + {}^r q_7 + {}^r q_9 \tag{6.1}$$
$$ {}^r a_{01} = 2({}^r q_2 + {}^r q_8) \tag{6.2}$$
$$ {}^r a_{02} = -{}^r q_1 + {}^r q_5 - {}^r q_7 + {}^r q_9 \tag{6.3}$$
$$ {}^r a_{10} = 2({}^r q_3 + {}^r q_6) \tag{6.4}$$
$$ {}^r a_{11} = -4\,{}^r q_4 \tag{6.5}$$
$$ {}^r a_{12} = -2({}^r q_3 - {}^r q_6) \tag{6.6}$$
$$ {}^r a_{20} = -{}^r q_1 - {}^r q_5 + {}^r q_7 + {}^r q_9 \tag{6.7}$$
$$ {}^r a_{21} = -2({}^r q_2 - {}^r q_8) \tag{6.8}$$
$$ {}^r a_{22} = {}^r q_1 - {}^r q_5 - {}^r q_7 + {}^r q_9 \tag{6.9}$$

y ${}^r q_i$, i=1,9, están dadas por las ecuaciones (5.1)-(5.9).

Las tres ecuaciones (6), cuando se satisfacen simultáneamente, representan el cierre del MPS. Cuando se da un conjunto de entradas, estas ecuaciones representan un sistema de tres ecuaciones algebraicas de segundo orden en las incógnitas t_1, t_2 y t_3. Las soluciones de este sistema definen las localizaciones de los puntos P_r [véanse las ecuaciones (3) y (4)] y consecuentemente, quedan determinadas las localizacioness de la plataforma.

Al inspeccionar el sistema de ecuaciones (6) se ve que cada ecuación contiene solamente dos incógnitas (t_r y t_s respectivamente) y esto hace factible resolver el sistema sin introducir raíces espurias. Puede usarse el siguiente procedimiento par eliminar dos incógnitas de las ecuaciones (6) en dos pasos: primero puede eliminarse t_3, por ejemplo, de las ecuaciones del sistema (6) segunda y tercera. El resultado será una ecuación en las incógnitas t_1 y t_2. Después, de esta ecuación y de la primera del sistema (6), se puede eliminar la variable t_2, obteniendo de este modo la ecuación polinomial definitiva en la incógnita t_1.

Eliminación de t_3: para r=3 y r=2, el sistema de ecuaciones (6), proporciona dos ecuaciones en las incógnitas t_1 y t_3, y t_2 y t_3 respectivamente.

Las dos ecuaciones pueden escribirse como sigue:

$$At_3^2 + Bt_3 + C = 0 \tag{7}$$

$$Rt_3^2 + St_3 + T = 0 \tag{8}$$

donde

$$A = \sum_{i=0,2} A_i t_i \tag{9.1}$$

$$B = \sum_{i=0,2} B_i t_i \tag{9.2}$$

$$C = \sum_{i=0,2} C_i t_i \tag{9.3}$$

$$R = \sum_{i=0,2} R_i t_i \tag{9.4}$$

$$S = \sum_{i=0,2} S_i t_i \tag{9.5}$$

$$T = \sum_{i=0,2} T_i t_i \tag{9.6}$$

y

$$A_1 = {}^3a_{21} \tag{10.1}$$

$$B_1 = {}^3a_{11} \tag{10.2}$$

$$C_1 = {}^3a_{01} \tag{10.3}$$

$$R_1 = {}^3a_{12} \tag{10.4}$$

$$S_1 = {}^3a_{11} \tag{10.5}$$

$$T_1 = {}^3a_{10} \tag{10.6}$$

La eliminante de las ecuaciones (7) y (8) es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ A & B & C & 0 \\ 0 & R & S & T \\ R & S & T & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

La ecuación (11) representa la condición bajo la cual las ecuaciones (7) y (8) tienen las mismas soluciones para t_3.

Al desarrollar la ecuación (11) resulta:

$$(AT-CR)^2 + (AS-BR)(CS-BT) = 0 \tag{12}$$

La ecuación (12) es una ecuación de cuarto grado en las incógnitas t_1 y t_2 y, tomando en cuenta las relaciones (9), puede escribirse como sigue:

$$\sum_{\substack{i=0,4 \\ j=0,4}} b_{ij} t_1^i t_2^j = 0 \tag{13}$$

Las expresiones analíticas completas de los coeficientes b_{ij} están dadas en la Tabla 1.

Eliminación de t_2: la primera ecuación del sistema (6) (r=1), es:

TABLA 1
Expresiones analíticas para los coeficientes b_{ij} (ecuación 13)

$$\begin{aligned} b_{00}= {} & A_0^2T_0^2-A_0B_0S_0T_0+A_0C_0S_0^2-2A_0C_0R_0T_0 \\ & +B_0^2R_0T_0-B_0C_0R_0S_0+C_0^2R_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{01}= {} & 2A_0^2T_0T_1-A_0B_0(S_0T_1+S_1T_0)+2A_0C_0S_0S_1 \\ & -2A_0C_0(R_0T_1+R_1T_0)+B_0^2(R_0T_1+R_1T_0) \\ & -B_0C_0(R_0S_1+R_1S_0)+2C_0^2R_0R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{02}= {} & A_0^2(T_1^2+2T_0T_2)-A_0B_0(S_0T_2+S_1T_1+S_2T_0) \\ & +A_0C_0(S_1^2+2S_0S_2)-2A_0C_0(R_0T_2+R_1T_1+R_2T_0) \\ & +B_0^2(R_0T_2+R_1T_1+R_2T_0)-B_0C_0(R_0S_2+R_1S_1+R_2S_0) \\ & +C_0^2(R_1^2+2R_0R_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{03}= {} & 2A_0^2T_1T_2-A_0B_0(S_1T_2+S_2T_1)+2A_0C_0S_1S_2 \\ & -2A_0C_0(R_1T_2+R_2T_1)+B_0^2(R_1T_2+R_2T_1) \\ & -B_0C_0(R_1S_2+R_2S_1)+2C_0^2R_1R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{04}= {} & A_0^2T_2^2-A_0B_0S_2T_2+A_0C_0S_2^2-2A_0C_0R_2T_2 \\ & +B_0^2R_2T_2-B_0C_0R_2S_2+C_0^2R_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{10}= {} & 2A_0A_1T_0^2-(A_0B_1+A_1B_0)S_0T_0+(A_0C_1+A_1C_0)S_0^2 \\ & -2(A_0C_1+A_1C_0)R_0T_0+2B_0B_1R_0T_0 \\ & -(B_0C_1+B_1C_0)R_0S_0+2C_0C_1R_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{11}= {} & 4A_0A_1T_0T_1-(A_0B_1+A_1B_0)(S_0T_1+S_1T_0) \\ & +2(A_0C_1+A_1C_0)S_0S_1-2(A_0C_1+A_1C_0)(R_0T_1+R_1T_0) \\ & +2B_0B_1(R_0T_1+R_1T_0)-(B_0C_1+B_1C_0)(R_0S_1+R_1S_0) \\ & +4C_0C_1R_0R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{12}= {} & 2A_0A_1(T_1^2+2T_0T_2)-(A_0B_1+A_1B_0)(S_0T_2+S_1T_1 \\ & +S_2T_0)+(A_0C_1+A_1C_0)(S_1^2+2S_0S_2)-2(A_0C_1 \\ & +A_1C_0)(R_0T_2+R_1T_1+R_2T_0)+2B_0B_1(R_0T_2+R_1T_1 \\ & +R_2T_0)-(B_0C_1+B_1C_0)(R_0S_2+R_1S_1+R_2S_0) \\ & +2C_0C_1(R_1^2+2R_0R_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{13}= {} & 4A_0A_1T_1T_2-(A_0B_1+A_1B_0)(S_1T_2+S_2T_1)+2(A_0C_1 \\ & +A_1C_0)S_1S_2-2(A_0C_1+A_1C_0)(R_1T_2+R_2T_1) \\ & +2B_0B_1(R_1T_2+R_2T_1)-(B_0C_1+B_1C_0)(R_1S_2+R_2S_1) \\ & +4C_0C_1R_1R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{14}= {} & 2A_0A_1T_2^2-(A_0B_1+A_1B_0)S_2T_2+(A_0C_1+A_1C_0)S_2^2 \\ & -2(A_0C_1+A_1C_0)R_2T_2+2B_0B_1R_2T_2 \\ & -(B_0C_1+B_1C_0)R_2S_2+2C_0C_1R_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{20}= {} & (A_1^2+2A_0A_2)T_0^2-(A_0B_2+A_1B_1+A_2B_0)S_0T_0 \\ & +(A_0C_2+A_1C_1+A_2C_0)S_0^2-2(A_0C_2+A_1C_1 \\ & +A_2C_0)R_0T_0+(B_1^2+2B_0B_2)R_0T_0-(B_0C_2 \\ & +B_1C_1+B_2C_0)R_0S_0+(C_1^2+2C_0C_2)R_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{21}= {} & 2(A_1^2+2A_0A_2)T_0T_1-(A_0B_2+A_1B_1+A_2B_0)(S_0T_1 \\ & +S_1T_0)+2(A_0C_2+A_1C_1+A_2C_0)S_0S_1-2(A_0C_2+A_1C_1 \\ & +A_2C_0)(R_0T_1+R_1T_0)+(B_1^2+2B_0B_2)(R_0T_1+R_1T_0) \\ & -(B_0C_2+B_1C_1+B_2C_0)(R_0S_1+R_1S_0) \\ & +2(C_1^2+2C_0C_2)R_0R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{22}= {} & (A_1^2+2A_0A_2)(T_1^2+2T_0T_2)-(A_0B_2+A_1B_1 \\ & +A_2B_0)(S_0T_2+S_1T_1+S_2T_0)+(A_0C_2+A_1C_1 \\ & +A_2C_0)(S_1^2+2S_0S_2)-2(A_0C_2+A_1C_1+A_2C_0)(R_0T_2 \\ & +R_1T_1+R_2T_0)+(B_1^2+2B_0B_2)(R_0T_2+R_1T_1+R_2T_0) \\ & -(B_0C_2+B_1C_1+B_2C_0)(R_0S_2+R_1S_1+R_2S_0)+(C_1^2 \\ & +2C_0C_2)(R_1^2+2R_0R_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{23}= {} & 2(A_1^2+2A_0A_2)T_1T_2-(A_0B_2+A_1B_1+A_2B_0)(S_1T_2 \\ & +S_2T_1)+2(A_0C_2+A_1C_1+A_2C_0)S_1S_2-2(A_0C_2+A_1C_1 \\ & +A_2C_0)(R_1T_2+R_2T_1)+(B_1^2+2B_0B_2)(R_1T_2+R_2T_1) \\ & -(B_0C_2+B_1C_1+B_2C_0)(R_1S_2+R_2S_1) \\ & +2(C_1^2+2C_0C_2)R_1R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{24}= {} & (A_1^2+2A_0A_2)T_2^2-(A_0B_2+A_1B_1+A_2B_0)S_2T_2 \\ & +(A_0C_2+A_1C_1+A_2C_0)S_2^2-2(A_0C_2+A_1C_1+A_2C_0)R_2T_2 \\ & +(B_1^2+2B_0B_2)R_2T_2-(B_0C_2+B_1C_1+B_2C_0)R_2S_2 \\ & +(C_1^2+2C_0C_2)R_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{30}= {} & 2A_1A_2T_0^2-(A_1B_2+A_2B_1)S_0T_0+(A_1C_2+A_2C_1)S_0^2 \\ & -2(A_1C_2+A_2C_1)R_0T_0+2B_1B_2R_0T_0-(B_1C_2+B_2C_1)R_0S_0 \\ & +2C_1C_2R_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{31}= {} & 4A_1A_2T_0T_1-(A_1B_2+A_2B_1)(S_0T_1+S_1T_0) \\ & +2(A_1C_2+A_2C_1)S_0S_1-2(A_1C_2+A_2C_1)(R_0T_1+R_1T_0) \\ & +2B_1B_2(R_0T_1+R_1T_0)-(B_1C_2+B_2C_1)(R_0S_1+R_1S_0) \\ & +4C_1C_2R_0R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{32}= {} & 2A_1A_2(T_1^2+2T_0T_2)-(A_1B_2+A_2B_1)(S_0T_2+S_1T_1 \\ & +S_2T_0)+(A_1C_2+A_2C_1)(S_1^2+2S_0S_2)-2(A_1C_2 \\ & +A_2C_1)(R_0T_2+R_1T_1+R_2T_0)+2B_1B_2(R_0T_2+R_1T_1 \\ & +R_2T_0)-(B_1C_2+B_2C_1)(R_0S_2+R_1S_1+R_2S_0) \\ & +2C_1C_2(R_1^2+2R_0R_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{33}= {} & 4A_1A_2T_1T_2-(A_1B_2+A_2B_1)(S_1T_2+S_2T_1)+2(A_1C_2 \\ & +A_2C_1)S_1S_2-2(A_1C_2+A_2C_1)(R_1T_2+R_2T_1) \\ & +2B_1B_2(R_1T_2+R_2T_1)-(B_1C_2+B_2C_1)(R_1S_2+R_2S_1) \\ & +4C_1C_2R_1R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{34}= {} & 2A_1A_2T_2^2-(A_1B_2+A_2B_1)S_2T_2+(A_1C_2+A_2C_1)S_2^2 \\ & -2(A_1C_2+A_2C_1)R_2T_2+2B_1B_2R_2T_2-(B_1C_2+B_2C_1)R_2S_2 \\ & +2C_1C_2R_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{40}= {} & A_2^2T_0^2-A_2B_2S_0T_0+A_2C_2S_0^2-2A_2C_2R_0T_0+B_2^2R_0T_0 \\ & -B_2C_2R_0S_0+C_2^2R_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{41}= {} & 2A_2^2T_0T_1-A_2B_2(S_0T_1+S_1T_0)+2A_2C_2S_0S_1 \\ & -2A_2C_2(R_0T_1+R_1T_0)+B_2^2(R_0T_1+R_1T_0) \\ & -B_2C_2(R_0S_1+R_1S_0)+2C_2^2R_0R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{42}= {} & A_2^2(T_1^2+2T_0T_2)-A_2B_2(S_0T_2+S_1T_1+S_2T_0) \\ & +A_2C_2(S_1^2+2S_0S_2)-2A_2C_2(R_0T_2+R_1T_1+R_2T_0) \\ & +B_2^2(R_0T_2+R_1T_1+R_2T_0)-B_2C_2(R_0S_2+R_1S_1+R_2S_0) \\ & +C_2^2(R_1^2+2R_0R_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{43}= {} & 2A_2^2T_1T_2-A_2B_2(S_1T_2+S_2T_1)+2A_2C_2S_1S_2 \\ & -2A_2C_2(R_1T_2+R_2T_1)+B_2^2(R_1T_2+R_2T_1) \\ & -B_2C_2(R_1S_2+R_2S_1)+2C_2^2R_1R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{44}= {} & A_2^2T_2^2-A_2B_2S_2T_2+A_2C_2S_2^2-2A_2C_2R_2T_2 \\ & +B_2^2R_2T_2-B_2C_2R_2S_2+C_2^2R_2^2 \end{aligned}$$

Los subíndices ij están invertidos

$$\sum_{\substack{i=0,2\\ j=0,2}} {}^1a_{ij}t_1^i t_2^j = 0 \qquad (14)$$

Las ecuaciones (13) y (14) representan un sistema de dos ecuaciones en las incógnitas: t_1 y t_2. Entonces, puede eliminarse de ellas por ejemplo t_2, obteniendo así una ecuación en una única incógnita t_1.

Las ecuaciones (13) y (14) pueden reordenarse como sigue:

$$Gt_2^4 + Ht_2^3 + Nt_2^2 + Ut_2 + V = 0, \qquad (15)$$

$$Dt_2^2 + Et_2 + F = 0, \qquad (16)$$

donde

$$G = \sum_{i=0,4} b_{i4}t_1^i \qquad (17.1)$$

$$H = \sum_{i=0,4} b_{i3}t_1^i \qquad (17.2)$$

$$N = \sum_{i=0,4} b_{i2}t_1^i \qquad (17.3)$$

$$U = \sum_{i=0,4} b_{i1}t_1^i \qquad (17.4)$$

$$V = \sum_{i=0,4} b_{i0}t_1^i \qquad (17.5)$$

y

$$D = \sum_{i=0,2} {}^1a_{i2}t_1^i \qquad (18.1)$$

$$E = \sum_{i=0,2} {}^1a_{i1}t_1^i \qquad (18.2)$$

$$F = \sum_{i=0,2} {}^1a_{i0}t_1^i \qquad (18.3)$$

La eliminante de las ecuaciones (15) y (16) es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} O & G & M & N & U & V \\ G & M & N & U & V & O \\ O & O & O & D & E & F \\ O & O & D & E & F & O \\ D & E & F & O & O & O \end{vmatrix} = O \qquad (19)$$

Después de haber desarrollado el determinante de 6 x 6, la ecuación (19) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} &GV(D^2F^2 + E^4 - 3DE^2F) - GUEF(E^2 - 2DF) - GF^2(MEF + NE^2 - GF^2) \\ &+ VD^2(2MEF + VD^2 - NDF) + VDE(NDE - UD^2 - ME^2) - DF^3(GN - M^2) \\ &+ DEF^2(GU - MN) + DF(GV - MU)(DF - E^2) - D^2F^2(MU - N^2) \\ &+ D^2EF(MV - NU) - D^3F(NV - U^2) = 0 \qquad (20) \end{aligned}$$

Se reconoce que la ecuación (20) resulta en un polinomio de grado 16 en la variable t_1. Por ello, son posibles 16 soluciones reales y complejas.

Determinación de t_2 y t_3: puede demostrarse que, para toda solución $t_1 = \mathbf{t}_1$ de la ecuación (20), existen valores únicos de t_2 y t_3. Sean éstos $\mathbf{t}_2$ y $\mathbf{t}_3$ respectivamente.

Para $t=\mathbf{t}_1$, las ecuaciones (15) y (16) son en realidad ecuaciones algebraicas en la única incógnita t_2, y éstas tienen una raíz común, $\mathbf{t}_2$, cuyo valor puede encontrarse igualando a cero máximo común divisor de primer grado de los polinomios de los miembros izquierdos de las ecuaciones (15) y (16). Similarmente, una vez que se conocen $\mathbf{t}_1$ y $\mathbf{t}_2$, el valor correspondiente de $\mathbf{t}_3$ puede encontrarse igualando a cero el máximo común divisor de primer grado de los polinomios de los miembros izquierdos de las ecuaciones (7) y (8).

Por lo tanto, se deduce una única solución $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ del sistema (6) para cada solución $\mathbf{t}_1$ de la ecuación (20), y consecuentemente, a través de las ecuaciones (3) y (4) se obtiene una única solución de la plataforma. Por eso, el análisis directo de posición del MPS proporciona 16 soluciones en el campo de los números complejos.

3. EJEMPLO NUMÉRICO

Se considera el análisis directo de la posición del arreglo de la plataforma de Stewart mostrado en la figura [2].

Aquí, los extremos de seis piernas de longitud variable actuadas linealmente, están conectadas a la plataforma en tres puntos P_r, r=1,3, mediante 3 pares esféricos dobles; y en seis puntos R_r, S_r, r=1,3, a la base mediante juntas universales. La localización de los puntos R_r y S_r en la base es arbritraria. Cuando se consieran arreglos prácticos, la movilidad interna puede eliminarse mediante un diseño adecuado.

Este mecanismo fue propuesto por Stewart[3] y puede resolverse mediante el modelo cinemático presentado en la sección 2. En realidad, cuando se dan las longitudes de las piernas $l_{Rr}=|P_r-R_r|$ y $l_{Sr}=|P_r-S_r|$, y considerando una desconexión momentánea de la plataforma, el punto P_r describe un círculo de radio $H_r=P_rQ_r$, donde Q_r es la proyección de P_r sobre la línea R_rS_r.

Determinación de Q_r y H_r: con referencia a la figura [2], puede escribirse:

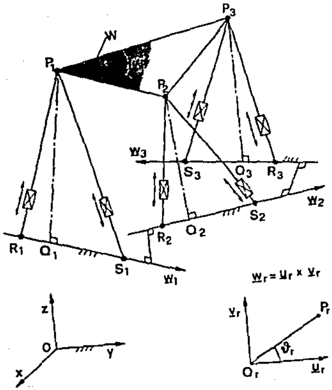
$$(P_r - R_r)^2 = l_{Rr}^2 \tag{21}$$

$$(P_r - S_r)^2 = l_{Sr}^2 \tag{22}$$

$$(P_r - R_r) = \sigma_r(S_r - R_r) + \mu_r \mathbf{k}_r \times (S_r - R_r) \tag{23}$$

donde $\mathbf{k}_r$ es un vector unitario ortogonal al plano que contiene los puntos P_r, R_r y S_r; σ_r y μ_r son cantidades escalares a determinar, y

[3] op. cit.



P_3
W
P_1
P_2
w_3
S_3
O_3
R_3
w_2
S_2
R_2
O_2
R_1
O_1
S_1
w_1
$\underline{w}_r = \underline{u}_r \times \underline{v}_r$
z
O
y
x
$\underline{v}_r$
P_r
ϑ_r
O_r
$\underline{u}_r$

figura 2

$$\sigma_r(S_r - R_r) = (Q_r - R_r) \qquad (24)$$

$$\mu_r|S_r - R_r| = H_r \qquad (25)$$

Las ecuaciones (21), (22) y la ecuación vectorial (23) representan un sistema de 5 ecuaciones lilneales en las incógnitas σ_r, μ_r y las tres coordenadas del punto P_r. El sistema, resuelto para σ_r y μ_r, conduce a

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\,(1+\,(l^2_{Rr} - l^2_{Sr})/(S_r - R_r)^2) \qquad (26)$$

y

$$\mu_r = (l^2_{Rr}/(S_r - R_r)^2 - \sigma_r)^{1/2} \qquad (27)$$

y de las ecuaciones (24) y (25) se pueden obtener el punto Q_r y el radio H_r.

Podría escogerse un valor negativo para μ_r en la ecuación (27), y los resultados finales no se verían afectados por esta elección. Además, si en la ecuación (27) $\mu_r^2<0$, ello querría decir que el triángulo $P_rR_rS_r$ no es un triángulo real.

Definición de los ángulos θ_r: Puede escogerse arbitrariamente un sistema de coordenadas $S_0\equiv(x,y,z)$ fijo a la base. Las direcciones de los vectores $\mathbf{u}_r$, r=1,3 se escogen paralelas al plano x,y del sistema S_0, en tanto que los vectores $\mathbf{w}_r$ están dirigidos desde los puntos R_r hacia los puntos S_r, y los vectores $\mathbf{v}_r=\mathbf{w}_r \times \mathbf{u}_r$. Los ángulos están dados por la rotación del vector de posición (P_r-Q_r) alrededor del eje $\mathbf{w}_r$ con respecto a los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$, y se miden de acuerdo a la regla de la mano derecha. Los puntos Q_r cambian sus posiciones a lo largo de las líneas (S_r-R_r) de acuerdo a las longitudes de las piernas.

Ejemplo: Las coordenadas de los puntos R_r y S_r en el sistema de referencia S_0 son $R_1(50.0,\ 0.0,\ 100.0)$, $S_1(-25.0,\ -2.0,\ 40.0)$, $R_2(80.0,\ 20.0,\ 50.0)$, $S_2(-50.0,-20.0,\ 70.0)$ y $R_3(48.0,\ 15.0,\ 68.0)$, $S_3(36.0,\ 31.0,\ -93.0)$. La distancia entre los puntos P_r y son L_{12} = 141.0, L_{23} = 135.0 y L_{31} = 190.0.

El análisis se hizo para piernas con las siguientes longitudes: l_{R1} = 76.0, l_{S1} = 160.0, l_{R2}= 139.0, l_{S2}= 55.0, l_{R3}= 128.0, l_{S3}= 217.0.

Los resultados del análisis directo de posición se muestran en la tabla [2], donde se reportan las coordenadas x, y, z de los puntos P_r para las 16 soluciones. Cuatro soluciones son reales, y las restantes complejas. Se han verificado todas las soluciones mediante la substitución de la θ_r correspondiente en el sistema de ecuaciones (6)." Hasta aquí la traducción.

Rectificaciones y Resultados

En esta tesis, se verificó la validez del método propuesto por I & P.C.. En general las ecuaciones presentadas en el artículo son correctas, con la salvedad de que los subíndices de los coeficientes b_{ij} registrados en la tabla 1 del mismo, están invertidos, esto es: los subíndices de las b_{ij} listados en la tabla 1 del artículo no son congruentes con la escritura de las ecuaciones (17.1-17.5). Por lo demás, las expresiones de las b_{ij} son correctas. Ahora bien, no es necesario introducir estas expresiones en la computadora en un programa que ejecute el método de I & P.C., ya que la obtención de las b_{ij} puede abreviarse, como se hace en las líneas 4030 a 5170 del programa INNOSTE.

La ecuación (20) del artículo es efectivamente un polinomio de grado 16; sin embargo, la forma en la que está presentada en el propio artículo, hace imposible la aplicación de los métodos numéricos conocidos para encontrar las raíces de polinomios, debido a que los coeficientes no aparecen explícitamente. Es entonces necesario hallar los coeficientes del polinomio

TABLA 2

Coordenadas x, y, z de los puntos P_1, P_2, P_3 (con partes real e imaginaria) refeŕidos al sistema de referencia S_0, para todas las soluciones.

Solution No.	point P_1		point P_2		point P_3	
	(79.535380,	0.000000)	(-26.094293,	0.000000)	(-70.922245,	0.000000)
1	(-45.880935,	0.000000)	(-68.945779,	0.000000)	(54.310495,	0.000000)
	(152.801808,	0.000000)	(82.395535,	0.000000)	(84.385310,	0.000000)
	(68.867648,	0.000000)	(-47.021189,	0.000000)	(21.249326,	0.000000)
2	(-33.006202,	0.000000)	(21.088681,	0.000000)	(137.061240,	0.000000)
	(165.807314,	0.000000)	(106.439635,	0.000000)	(85.739035,	0.000000)
	(82.538913,	0.000000)	(-48.826171,	0.000000)	(-6.782282,	0.000000)
3	(51.078311,	0.000000)	(24.727683,	0.000000)	(-100.517259,	0.000000)
	(145.915415,	0.000000)	(101.985254,	0.000000)	(74.218082,	0.000000)
	(90.901681,	0.000000)	(-40.776390,	0.000000)	(14.067563,	0.000000)
4	(53.394494,	0.000000)	(6.285160,	0.000000)	(-108.359226,	0.000000)
	(135.384749,	0.000000)	(117.423785,	0.000000)	(71.884731,	0.000000)
	(440.465978,	374.285925)	(-19.859203,	31.816581)	(251.634723,	-25.530823)
5	(-613.153096,	538.924920)	(-23.907915,	-109.034298)	(47.574791,	158.691077)
	(-279.352370,	-485.821570)	(192.999348,	-11.260822)	(69.674410,	17.673443)
	(440.465978,	-374.285925)	(-19.859203,	-31.816581)	(251.634723,	25.530823)
6	(-613.153096,	-538.924920)	(-23.907915,	109.034298)	(47.574791,	-158.691077)
	(-279.352370,	485.821570)	(192.999348,	11.260822)	(69.674410,	-17.673443)
	(134.783717,	-13.768332)	(-23.399877,	16.930693)	(-105.225277,	-56.666947)
7	(30.649023,	47.624021)	(-33.184715,	-62.880575)	(94.752932,	-106.252844)
	(81.290387,	15.622948)	(151.431368,	-15.711648)	(100.961182,	-6.335648)
	(134.783717,	13.768332)	(-23.399877,	-16.930693)	(-105.225277,	56.666947)
8	(30.649023,	-47.674021)	(-33.184715,	62.880575)	(94.752932,	106.252844)
	(81.290387,	-15.622948)	(151.431368,	15.711648)	(100.961182,	6.335648)
	(62.678338,	61.636535)	(-16.585413,	-8.876874)	(132.340119,	-44.373474)
9	(111.960982,	41.145860)	(-64.775609,	48.627638)	(-96.171441,	-33.662628)
	(168.711711,	-78.417197)	(132.543596,	39.555595)	(64.280593,	-0.038014)
	(62.678338,	-61.636535)	(-16.585413,	8.876874)	(132.340119,	44.373474)
10	(111.960982,	-41.145860)	(-64.775609,	-48.627638)	(-96.171441,	33.662628)
	(168.711711,	78.417197)	(132.543596,	-39.555595)	(64.280593,	0.038014)
	(161.766239,	-20.267102)	(-82.228315,	23.910237)	(-89.049127,	43.765487)
11	(34.617424,	98.900324)	(-0.258491,	-87.297976)	(-61.675481,	-80.609278)
	(47.429954,	22.037201)	(-35.101032,	-19.179409)	(84.209825,	-11.272884)
	(161.766239,	20.267102)	(-82.228315,	-23.910237)	(-89.049127,	-43.765487)
12	(34.617424,	-98.900324)	(-0.258491,	87.297976)	(-61.675481,	80.609278)
	(47.429954,	-22.037201)	(-35.101032,	19.179409)	(84.209825,	11.272884)
	(1116.688788,	1245.910259)	(-15.529244,	32.143142)	(-101.012698,	20.521210)
13	(-2034.513400,	1584.965505)	(-35.238232,	-115.634194)	(-23.452268,	-84.944858)
	(-1077.252205,	-1610.220008)	(198.483448,	-22.337967)	(88.900100,	-9.871257)
	(1116.688788,	-1245.910259)	(-15.529244,	-32.143142)	(-101.012698,	-20.521210)
14	(-2034.513400,	-1584.965505)	(-35.238232,	115.634194)	(-23.452268,	84.944858)
	(-1077.252205,	1610.220008)	(198.483448,	22.337967)	(88.900100,	9.871257)
	(161.002959,	-21.615369)	(-63.280792,	23.503310)	(-376.311773,	-210.670839)
15	(37.096968,	97.789807)	(3.211428,	-87.548720)	(228.585289,	-410.706778)
	(48.301403,	23.759551)	(-35.002291,	-22.325926)	(134.466496,	-25.113485)
	(161.002959,	21.615369)	(-63.280792,	-23.503310)	(-376.311773,	210.670839)
16	(37.096968,	-97.789807)	(3.211428,	87.548720)	(228.585285,	410.706778)
	(48.301403,	-23.759551)	(-35.002291,	22.325926)	(134.466496,	25.113485)

equivalente a la ecuación (20). Realizan este trabajo, las líneas 1015 a 1330 del programa INNOSTE.

El programa INNOSTE encuentra los coeficientes del polinomio (20), pero no sus raíces.

Las raíces del polinomio correspondiente al ejemplo de I & P.C. (tabla 3), cuyos coeficientes fueron calculados por INNOSTE, se obtuvieron mediante el programa POLIN[4]. De las 16 raíces, sólo cuatro de ellas fueron reales. Solamente para estas cuatro raíces reales se calcularon las coordenadas de los puntos P_1, ya que se consideró superfluo calcular las demás, puesto que desde un punto de vista físico, sólo son útiles coordenadas cuyos valores sean reales.

Para calcular las coordenadas de los puntos P_1, se alimentaron las raíces calculadas por el programa POLIN al programa INNOSTE. Las líneas 10000 y posteriores de este programa emplean las ecuaciones (15), (16), (7), (8), (3) y (4) para calcular los valores de t_2 y de t_3. Para encontrar el valor de t_2 que satisface las ecuaciones (15) y (16) simultáneamente, conocida t_1 puede aprovecharse el hecho de que la segunda de estas ecuaciones es una ecuación cuadrática, para cuyas raíces puede evaluarse el polinomio de cuarto grado representado por (15). Teóricamente, una de las dos raíces de (16) debe anular a (15). En la práctica esto no ocurre, debido a la capacidad limitada de almacenamiento de dígitos a la derecha del punto decimal de la computadora. De hecho, el polinomio (15) evaluado en cualquiera de las raíces de (16), puede arrojar valores enormes en magnitud, y no obstante, alguna de las raíces calculadas para (16) puede seguir siendo satisfactoria. Ocurre simplemente, que si la magnitud de los coeficientes del polinomio (15) es muy grande, la curva que represente a dicho polinomio en un plano $[t_2 y]$ puede tener pendientes también muy grandes en los puntos en los que la misma inteserque al eje $[t_2]$, y consecuentemente, (15) puede ser

[4] Se agradece al Dr. Ángel Rojas Salgado, el haber facilitado su programa POLIN.

muy sensible a pequeños cambios de t_2 en dichos puntos.

Las coordenadas de los puntos P_i obtenidas por el autor (tabla 4), son muy próximas a las obtenidas por I & P.C.. Las diferencias pueden deberse a errores de redondeo. No obstante, la similitud entre los resultados de los citados autores y los obtenidos en este trabajo, conducen a pensar que estos últimos son válidos, partiendo del hecho de que las ecuaciones presentadas en el artículo se pueden demostrar.

Tabla 3

Raíces† de la ecuación (20), calculadas por el programa POLIN, según los coeficientes obtenidos por el programa INNOSTE.

.2388949		
-.01199026	-	.98385931
-.01199026	+	.98385931
-.4996126	-	1.0293431
-.4996126	+	1.0293431
.4681274		
-.4955487	-	1.0177241
-.4955487	+	1.0177241
-.9004526	-	.96960361
-.9004526	+	.96960361
-.03947954	-	.95160501
-.03947954	+	.95160501
.2687137	-	.15147091
.2687137	+	.15147091
6.975461		
86.48686		

†Las raíces reales aparecen subrayadas. Para éstas se calcularon las coordenadas de los puntos P_i.

Tabla 4

Coordenadas de los puntos P_1, P_2 y P_3†

calculadas por el programa INNOSTE

		P1	P2	P3
1	X	7.95353784	-2.60942933	-7.0922244
	Y	-4.58809343	-6.89457791	5.43104986
	Z	15.2901808	6.23955354	9.43853099
2	X	6.8867647	-4.7021189	2.12492899
	Y	-3.30062003	2.10886813	13.7061231
	Z	16.5807314	10.6439634	9.57390573
3	X	8.25389132	-4.88261712	-.67822761
	Y	5.10783107	2.47276832	-10.051726
	Z	14.5914415	10.1958254	7.42180815
4	X	9.0901681	-4.07763897	1.40675648
	Y	5.33944945	.628515919	-10.835923
	Z	13.5384749	11.7423785	7.18847304

†Los valores de esta tabla son aproximadamente la décima parte de los calculados por I & P.C., ya que los datos se dividieron entre 10 con el objeto de evitar un error de desbordamiento.

APENDICE E

READY.

PROGRAMA SINTEST

```
1 REM    PROGRAMA PARA SINTESIS ESTRUCTURAL DE CADENAS CINEMATICAS
2 REM       SEGUN EL METODO PROPUESTO POR LI-SHUJUN
5 N=6:REM/ INSTRUCCION QUE CAMBIA SEGUN NUMERO DE ESLABONES DE LA CADENA.
6 GOSUB290:REM    LLENADO DE LA MATRIZ DE INTERCONEXION
7 DIMKC$(200):REM  EN KC$ SE ALMACENAN LAS CADENAS CINEMATICAS SINTETIZADAS
9 OPEN1,4
10 W$="1":REM    **************************************************************
20 R=1:H=0:REM  LAS LINEAS 10 A 180 ENCUENTRAN CIERTO NUMERO DE MALLAS
30 C=1:MA=0:REM  CADA MALLA [MA] ESTA REPRESENTADA POR UNA CADENA DE NUMEROS.
40 C=C+1:REM  CADA NUMERO REPRESENTA UN ESLABON DE LOS QUE INTEGRAN LA MALLA.
50 IFC>NTHEN175
60 IFC%(R,C)=0THENGOTO40
70 W$=W$+RIGHT$(STR$(C),1)
80 FORI=1TOLEN(W$)-1
90 IFVAL(MID$(W$,I,1))=CTHEN130
100 NEXTI
110 H=H+1:VR(H)=R:VC(H)=C
120 R=C:C=0:GOTO40
130 IFC=1THEN150
140 W$=LEFT$(W$,LEN(W$)-1):GOTO40
150 IFLEN(W$)>3THEN170
160 GOTO140
170 MA=MA+1:MA$(MA)=W$
175 IFH<0THENGOTO365
180 W$=LEFT$(W$,H):R=VR(H):C=VC(H):H=H-1:GOTO40
285 REM  LA SIGUIENTE LINEA LLENA LA MATRIZ C%(I,J) QUE ES LA DE INTERCONEXION.
290 FORI=1TON:FORJ=1TON:READC%(I,J):NEXTJ:NEXTI:RETURN
295 REM  LINEAS 300-365 INCLUYEN LOS DATOS DE LA CADENA CINEMATICA ANALIZADA
296 REM  UN 1 EN (I,J) SIGNIFICA INTERCONEXION ENTRE ESLABONES I Y J.
297 REM  UN 0 SIGNIFICA NO INTERCONEXION; ELEMENOS DIAGONALES DEBEN SER 0.
300 DATA0,1,0,1,1,1
310 DATA1,0,1.0,0,1
320 DATA0,1,0,1,1,0
330 DATA1,0,1,0,0,0
340 DATA1,0,1,0,0,0
350 DATA1,1,0,0,0,0
365 FORK=1TOMA:LA$(K)=MA$(K):NEXTK:REM  LA$=ARREGLO AUXILIAR PARA MALLAS
366 REM LINEAS 370-470 REACOMODAN LOS ESLABONES DE LAS MALLAS CRECIENTEMENTE.
367 REM ESTO ES UTIL PARA COMPARAR MALLAS, YA QUE MISMO CONJUNTO DE NUMEROS,
368 REM  AUNQUE EN SECUENCIAS DISTINTAS, REPRESENTA MISMA CADENA CINEMATICA.
370 FOR K=1 TO MA
380 L=LEN(MA$(K))-1
390 FOR E=2 TO L-1
400 FOR J=E+1 TO L
410 A$=MID$(MA$(K).J,1):B$=MID$(MA$(K),E,1)
420 IFVAL(A$)>=VAL(B$)THEN450
430 MA$(K)=LEFT$(MA$(K).J-1)+B$+MID$(MA$(K).J+1)
440 MA$(K)=LEFT$(MA$(K),E-1)+A$+MID$(MA$(K),E+1)
450 NEXTJ
460 NEXTE
470 NEXTK
500 REM  LINEAS 510-570  ELIMINAN MALLAS REPETIDAS
501 REM COLUMNA 1 DE AN$ ALMACENA MALLAS CON ESLABONES ORDENADOS CRECIENTEMENTE
502 REM COLUMNA 2 DE AN$ ALMACENA MALLAS EN ORDEN ORIGINAL SIN REPETICION
510 AN$(1,1)=MA$(1):AN=1:AN$(1,2)=LA$(1)
520 FORK=2TOMA
530 FORJ=1TOAN
```

```
540 IFMA$(K)=AN$(J,1)THEN570
550 NEXTJ
560 AN=AN+1:AN$(AN,1)=MA$(K):AN$(AN,2)=LA$(K)
570 NEXTK
571 REM LINEAS 580-600 IMPRIMEN MALLAS SIN REPETICION.
572 REM DE LAS MALLAS IMPRESAS SE SELECCIONARAN LAS INDEPENDIENTES NECESARIAS.
580 FORK=1TOAN
590 PRINTAN$(K,2)
600 NEXTK
601 REM  LINEAS 610-680 CONSTRUYEN UN ARREGLO DE PARES CINEMATICOS P%
602 REM  RENGLON I DE P% CONTIENE LOS NUMEROS DE ESLABONES QUE FORMAN AL PAR I.
610 IP=0
620 FORI=1TON-1
630 FORJ=I+1TON
640 IFC%(I,J)=0THEN670
650 IP=IP+1
660 P%(IP,1)=I:P%(IP,2)=J:C%(I,J)=IP:C%(J,I)=IP
670 NEXTJ
680 NEXTI
685 MI=IP
690 FORK=1TOAN
696 REM  LINEAS 690-810 ESCRIBEN EN ARREGLO LZ$ LAS MALLAS EN TERMINOS DE PARES
697 REM  Y NO EN TERMINOS DE ESLABONES.
698 REM  NUMEROS ALMACENADOS EN LZ$ CORRESPONDEN A PARES DE ARREGLO P%.
700 L=LEN(AN$(AN,2))-1
710 FORI=1TOL
720 FORIP=1TOMI
730 P1$=RIGHT$(STR$(P%(IP,1)),1)
740 P2$=RIGHT$(STR$(P%(IP,2)),1)
750 D1$=P1$+P2$
760 D2$=P2$+P1$
770 IFMID$(AN$(K,2),I,2)=D1$THENLZ$(K)=LZ$(K)+RIGHT$(STR$(IP),1):GOTO790
780 IFMID$(AN$(K,2),I,2)=D2$THENLZ$(K)=LZ$(K)+RIGHT$(STR$(IP),1)
790 NEXTIP
800 NEXTI
810 NEXTK
815 KC%=0
820 INPUT"NUMERO DE MALLAS INDEPENDIENTES";NM
830 PRINT:PRINT"DE LAS MALLAS ARRIBA IMPRESAS,":PRINT"SELECCIONAR";NM
840 PRINT"QUE SEAN INDEPENDIENTES"
850 PRINT:PRINT"UNA SELECCION ERRONEA":PRINT"HARA FRACASAR EL PROGRAMA"
860 FE=0
870 FORI=1TONM
880 PRINT"INTRODUZCA NUMERO DE MALLA INDEPENDIENTE";:PRINT"SELECCIONADA"
890 PRINT"Y PROPORCIONE SU DIMENSION"
900 INPUTMI(I),DM(MI(I))
910 FE=FE+DM(MI(I))
920 NEXTI
930 INPUT"GRADOS DE LIBERTAD DE LA CADENA";GL:SUM=GL+FE
931 REM  SUM ES EL MIEMBRO IZQUIERDO DE LA ECUACION DE SHUJUN ENTRE 2.
940 P1=1
950 IFP1>3THEN1680
960 P2=1
970 IFP2>3THEN1670
980 A2%=P1+P2
990 P3=1
1000 IFP3>3THEN1660
1010 A3%=P3+A2%
1020 FORP4=1TO3
1030 A4%=A3%+P4
1040 FORP5=1TO3
1050 A5%=A4%+P5
1060 FORP6=1TO3
```

```
1070 A6%=A5%+P6
1080 FORP7=1TO3
1090 A7%=A6%+P7
1100 FORP8=1TO3
1110 A8%=A7%+P8
1111 REM  A8% ES LA SUMA DE GRADOS DE LIBERTAD DE TODOS LOS PARES CINEMATICOS.
1120 IFA8%-SUM<>0THEN1600:REM VERIFICA SI SE CUMPLE LA ECUACION DE SHUJUN
1130 P%(1,3)=P1:P%(2,3)=P2:P%(3,3)=P3:P%(4,3)=P4
1140 P%(5,3)=P5:P%(6,3)=P6:P%(7,3)=P7:P%(8,3)=P8
1141 REM  LINEAS 1150-1230 INVESTIGAN SI MALLAS SATISFACEN DIMENSION PRESCRITA.
1150 FORK=1TONM
1160 L=LEN(LZ$(MI(K))):LM=0
1170 FORJ=1TOL
1180 I=VAL(MID$(LZ$(MI(K)),J,1))
1190 LM=LM+P%(I,3)
1200 IFLM>DM(MI(K))THEN1230
1210 NEXTJ
1220 GOTO1600
1230 NEXTK
1232 FORI=1TO6:ES$(I)="":NEXTI
1235 REM  LINEAS 1240-1280 CONSTRUYEN ESLABONES DE LA CADENA CINEMATICA.
1240 FORI=1TO8
1250 C$=RIGHT$(STR$(P%(I,3)),1)
1260 ES$(P%(I,1))=ES$(P%(I,1))+C$
1270 ES$(P%(I,2))=ES$(P%(I,2))+C$
1280 NEXTI
1285 REM  LINEAS 1290-1400 ORDENAN DECRECIENTEMENTE NUMEROS DENTRO DE ESLABONES.
1290 FORK=1TON
1300 L=LEN(ES$(K)):E1$="":E2$="":E3$=""
1310 FORJ=1TOL
1320 I=VAL(MID$(ES$(K),J,1))
1330 ONIGOSUB1350,1360,1370
1340 GOTO1380
1350 E1$=E1$+"1":RETURN
1360 E2$=E2$+"2":RETURN
1370 E3$=E3$+"3":RETURN
1380 NEXTJ
1390 ES$(K)=E3$+E2$+E1$:ES(K)=VAL(ES$(K))
1400 NEXTK
1405 REM  LINEAS 1410-1470 ORDENAN DECRECIENTEMENTE ESLABONES DE LA CADENA,
1406 REM  TOMANDO EN CUENTA LA MOVILIDAD DE PARES ASOCIADOS A CADA ESLABON.
1410 FORI=1TON-1
1420 FORJ=I+1TON
1430 IFES(J)<=ES(I)THEN1460
1440 ES=ES(I):ES(I)=ES(J):ES(J)=ES
1450 C$=ES$(I):ES$(I)=ES$(J):ES$(J)=C$
1460 NEXTJ
1470 NEXTI
1475 REM  LINEAS 1480-1510 AGRUPAN EN W$ ESLABONES QUE FORMAN CADENA CINEMATICA.
1480 W$=""
1490 FORI=1TON
1500 W$=W$+ES$(I)+" "
1510 NEXTI
1515 REM  LINEAS 1520-1590 ELIMINAN ISOMORFISMOS E IMPRIMEN CADENAS ADMITIDAS.
1520 IFKC%<>0THEN1540
1530 KC%=1:KC$(1)=W$:GOTO1590
1540 FORI=1TOKC%
1550 IFW$=KC$(I)THEN1600
1560 NEXTI
1580 KC%=KC%+1:KC$(KC%)=W$
1590 PRINT#1,W$
1600 NEXTP8
1610 NEXTP7
```

```
1620 NEXTP6
1630 NEXTP5
1640 NEXTP4
1650 P3=P3+1:GOTO1000
1660 P2=P2+1:GOTO970
1670 P1=P1+1:GOTO950
1680 PRINT"FIN":CLOSE1:END

READY.
```

APENDICE F
RESULTADOS DEL PROGRAMA SINTEST

NO. ESLABONES=6; MALLAS=3; DOF+DOFE=19

3211	333	331	33	32	31	3311	332	321	33	33	31	3311	333	321	33	32	31
3311	332	331	33	33	21	3311	332	331	33	32	31	2221	333	331	32	32	32
3221	332	321	33	32	32	3221	333	321	32	32	32	3221	332	331	33	32	22
3221	333	321	33	32	22	3221	332	331	32	32	32	3321	331	311	33	33	32
3321	332	221	33	32	32	3321	322	321	33	33	22	3321	322	321	33	32	32
3321	333	311	33	32	31	3321	332	321	33	32	22	3321	332	321	32	32	32
3321	331	331	33	33	21	3321	331	322	33	32	22	3321	331	331	33	32	31
3311	333	321	33	33	21	3321	332	221	33	33	22	3321	333	311	33	33	21
3321	331	322	32	32	32	3331	331	211	33	33	32	3331	321	311	33	33	32
3331	332	211	33	33	31	3331	322	221	33	32	32	3331	321	321	33	33	31
3331	321	222	33	32	32	3331	332	311	33	32	31	3331	331	321	33	32	31
3331	322	321	32	32	32	3211	333	332	33	31	31	2221	333	332	32	32	31
3221	332	322	33	32	31	3221	333	322	32	32	31	3221	332	332	33	32	21
3221	332	332	33	31	22	3221	333	222	33	31	22	3221	332	332	32	32	31
3321	331	321	33	33	31	3321	332	222	33	32	31	3321	322	322	33	33	21
3321	322	322	33	32	31	3321	333	321	33	31	31	3321	332	322	33	32	21
3321	332	322	32	32	31	3321	332	331	33	33	11	3321	332	331	33	31	31
2222	332	322	32	32	32	2222	333	322	32	32	22	2222	332	332	32	32	22
3222	331	321	33	32	32	3222	332	222	32	32	32	3222	322	322	33	32	22
3222	333	321	32	32	31	3222	332	322	32	32	22	3222	332	331	33	32	21
3222	332	322	33	22	22	3221	333	322	33	32	21	3222	332	222	33	32	22
3222	322	322	32	32	32	3222	333	321	33	32	21	3222	332	331	32	32	31
3322	331	221	33	32	32	3322	321	321	33	33	22	3322	321	321	33	32	32
3322	332	221	33	32	31	3322	322	222	33	32	22	3322	322	222	32	32	32
3322	322	321	33	33	21	3322	322	321	33	32	31	3322	332	321	33	31	22
3322	332	321	32	32	31	3322	331	322	33	32	21	3322	322	322	32	32	22
3322	331	322	32	32	31	3322	332	321	33	32	21	3321	332	222	33	33	21
3321	333	321	33	33	11	3322	331	221	33	33	22	3322	332	221	33	33	21
3322	331	322	33	31	22	3332	331	211	33	33	31	3332	321	221	33	32	32
3332	321	311	33	33	31	3332	322	221	33	32	31	3332	321	222	33	32	31
3332	222	222	32	32	32	3332	331	321	33	31	31	3332	322	321	32	32	31
3332	332	311	33	31	31	3211	333	333	32	31	31	3311	332	332	33	31	31
3311	333	332	32	31	31	3311	333	332	33	31	21	3221	333	332	32	31	22
3221	333	332	32	32	21	3321	332	322	33	31	22	3321	333	331	32	31	31
3321	332	332	32	32	21	3321	332	332	32	31	22	3321	333	331	33	32	11
3321	333	322	33	22	21	3321	333	331	33	31	21	3321	332	332	33	22	21
3321	333	322	32	32	21	3331	331	321	33	33	21	3331	332	321	33	31	31
3331	322	322	33	32	21	3331	322	322	32	32	31	3331	332	321	33	33	11
3331	332	222	33	32	21	3331	332	331	33	31	21	3331	332	331	32	31	31
3331	332	331	33	32	11	3331	332	322	32	32	21	3331	333	321	33	32	11
3331	333	321	33	31	21	3222	331	331	32	32	32	3222	333	331	32	32	21
3222	332	332	32	22	22	3222	333	322	32	22	22	3322	331	321	32	32	32
3322	331	321	33	32	22	3322	332	222	33	22	22	3322	332	331	32	31	22
3322	332	331	32	32	21	3322	332	322	32	22	22	3322	333	321	33	22	21
3321	333	322	32	31	22	3322	322	322	33	22	22	3322	332	222	32	32	22
3322	332	331	33	22	21	3322	333	321	32	32	21	3322	333	321	32	31	22
3332	331	311	33	32	31	3332	321	321	33	32	22	3332	321	321	32	32	32
3332	331	311	33	33	21	3332	331	221	33	32	22	3332	322	321	33	31	22
3332	322	321	33	32	21	3332	322	222	32	32	22	3332	332	221	33	32	21
3332	322	221	33	31	22	3332	331	331	33	31	21	3332	331	322	32	31	22
3332	331	331	32	31	31	3332	332	321	32	32	21	3332	332	321	32	31	22
3332	333	311	33	31	21	3331	332	222	32	32	31	3331	333	321	32	31	31
3332	331	221	32	32	32	3332	332	221	32	32	31	3332	331	322	32	32	21
3332	333	311	32	31	31	3333	321	311	33	32	31	3333	321	221	32	32	32
3333	331	211	33	32	31	3333	321	321	33	31	31	3333	321	222	32	32	31
3333	322	221	32	32	31	3333	332	211	33	31	31	3333	331	321	32	31	31
3333	332	311	32	31	31												

Reproducción de la página 652 de la referencia (10)

A Part of the Results of Spatial Kinematic Chains when L = 3 and N = 6

DOF + DOFE = 19 S = 3

The results of type (I)

3333	332	211	33	31	31
3333	332	311	32	31	31
3332	332	311	33	31	31
3332	333	311	33	31	21
3332	333	311	32	31	31
3333	331	211	33	32	31
3333	322	221	32	32	31
3332	322	221	33	32	31
3332	332	221	33	31	22
3332	332	221	33	32	21
3332	332	221	32	32	31
3333	331	321	32	31	31
3332	322	321	32	32	31
3332	332	321	32	31	22
3332	332	321	32	32	21
3331	331	321	33	32	31
3322	332	321	33	31	22
3322	332	321	33	32	21
3322	332	321	32	32	21
3331	333	321	33	31	21
3322	333	321	33	22	21
3322	333	321	32	31	22
3331	333	321	33	32	11
3322	333	321	32	32	21
3331	333	321	32	31	31
3333	321	311	33	32	31
3332	321	311	33	33	31
3332	331	311	33	32	31
3332	331	311	33	33	21
3333	321	321	33	31	31
3332	321	222	33	32	31
3332	322	321	33	32	21
3332	322	321	33	31	22
3331	321	321	33	33	31
3322	322	321	33	32	31
3322	322	321	33	33	21
3331	332	321	33	31	31
3331	332	321	33	33	11
3332	331	321	33	31	31
3332	331	331	32	31	31
3332	331	331	33	31	21
3322	331	322	32	32	31
3322	331	322	33	32	21
3322	331	322	33	31	22
3331	332	331	32	31	31
3322	332	331	32	32	21
3322	332	331	32	31	22
3331	332	331	33	32	11
3322	332	331	33	22	21
3331	332	331	33	31	21
3321	331	331	33	32	31
3321	331	331	33	33	21
3321	332	331	33	31	31
3222	332	331	33	32	21
3222	332	331	32	32	31
3321	332	331	33	33	11
3321	333	331	33	31	21
3321	333	331	32	31	31
3321	333	331	33	32	11
3222	333	331	32	32	21
3333	321	221	32	32	32
3332	321	221	33	32	32
3332	331	221	33	32	22
3322	331	221	32	32	32
3333	321	222	32	32	31
3332	222	222	32	32	32

3332	322	222	32	32	22
3331	321	222	33	32	32
3322	322	222	33	32	22
3322	322	222	32	32	32
3331	332	222	33	32	21
3322	332	222	33	22	22
3322	333	222	32	32	22
3331	332	222	32	32	31
3332	331	322	32	31	22
3332	331	322	32	32	21
3331	322	321	32	32	32
3322	322	322	32	32	22
3331	332	322	32	32	21
3322	332	322	32	22	22
3321	331	322	33	32	22
3321	331	322	32	32	32
3321	332	322	33	32	21
3222	332	322	33	22	22
3222	332	322	32	32	22
3321	332	322	32	32	31
3321	333	322	32	22	21
3321	333	322	32	32	21
3222	333	322	32	22	22
3321	333	322	32	21	22
3332	321	321	32	32	32
3332	321	321	33	32	22
3331	321	311	33	33	32
3322	321	321	33	32	32
3322	321	321	33	33	22
3322	331	321	33	32	22
3322	331	321	33	32	32
3331	331	321	33	33	21
3331	322	221	33	32	32
3331	322	322	32	32	31
3331	322	322	33	32	21
3331	322	322	33	32	21
3322	322	322	33	22	22
3321	322	321	33	32	32
3321	322	321	33	33	22
3321	322	322	33	32	31
3222	322	322	33	32	22
3222	322	322	32	32	32
3321	322	322	33	33	21
3321	332	322	33	31	22
3331	332	311	33	32	31
3321	332	321	32	32	32
3321	332	321	33	32	22
3321	332	332	32	31	22
3321	332	332	32	32	21
3222	332	332	32	22	22
3321	332	332	33	22	21
3311	332	331	33	32	31
3221	332	331	33	32	22
3221	332	331	32	32	32
3311	332	331	33	33	21
3221	332	332	33	31	22
3221	332	332	32	32	31
3221	332	332	33	32	21
2222	332	332	32	32	22
3311	333	332	33	31	21
3221	333	332	32	31	22
3311	333	332	32	31	31
3221	333	332	32	32	21
3332	331	211	33	33	31
3331	331	211	33	33	32
3322	331	221	33	32	32

(continued opposite)

Se subrayaron los resultados que se encontró eran erróneos.

APENDICE G

READY.

PROGRAMA TINASTE

```
1 REM              PROGRAMA PARA RESOLVER LA CINEMATICA DIRECTA
2 REM                 DE LA PLATAFORMA DE STEWART (POSICION)
10 DIMA(3,9),B(9),CL(8),D(9),DT(6),H(3),JB(6,7),LP(3),LR(3),LS(3),M2(3)
15 DIMMU(3),Q(3,3,8),QM(3,3)
20 DIMRR(3,3),S(3,7),S1(3,2),SI(3),SL(8),SR(3,3),TH(9),U(3,5),U1(3,2),V(7)
25 DIMWC(3,3),XS(3),XO(3),W1(3,2),YO(3),ZO(3)
26 PRINT"□MOVIMIENTO DE LA PLATAFORMA DE STEWART"
27 OPEN1,4
28 PRINT#1,SPC(5)"P1"SPC(20)"P2"SPC(20)"P3"
30 M2=6:N=6:IT=0:INPUT"ITERACIONES";I1:INPUT"TOLERANCIA";ND
110 FORI=1TO3
120 READLR(I),LS(I),LP(I)
130 AU=0
140 FORJ=1TO3
150 READSR(J,I),RR(J,I)
160 WC(J,I)=SR(J,I)-RR(J,I):REM       SR-RR
170 AUX=WC(J,I)↑2+AU
180 NEXTJ
190 M2(I)=AU
200 NEXTI
210 REM     CALCULO DE MU, SIGMA, Y RADIOS "H"
215 FORI=1TO3
220 SI(I)=(1+LR(I)↑2/M2(I)-LS(I)↑2/M2(I))/2
230 MU(I)=SQR(LR(I)↑2/M2(I)-SI(I)↑2)
240 H(I)=MU(I)*SQR(M2(I))
250 NEXTI
260 REM      CALCULO DE "QM"
270 FORI=1TO3
280 FORJ=1TO3
290 QM(J,I)=SI(I)*(SR(J,I)-RR(J,I))+RR(J,I)
300 NEXTJ
310 NEXTI
315 IFA$="S"THENRETURN
320 REM     DISTANCIAS "D" DE DENAVIT Y HARTENBERG
330 D(0)=LP(1)
340 FORI=2TO4:D(I)=0:NEXTI
350 D(7)=H(2)
360 D(9)=H(3)
370 REM     DISTANCIAS "B" DE DENAVIT Y HARTENBERG
380 B(0)=0
390 B(3)=H(1)
400 B(4)=0
410 REM      SENO DE ALFAS 2 A 4
420 FORI=2TO4:SL(I)=1:NEXTI
430 REM      COSENO DE ALFAS 2 A 4
440 FORI=2TO4:CL(I)=0:NEXTI
450 REM      LECTURA DEL VECTOR THETA INICIAL
460 FORI=0TO9:READTH(I):NEXTI
465 TH(4)=TH(0)+π/2
470 REM      DEBEN PROPORCIONARSE DATOS FICTICIOS
480 REM      PARA LAS THETAS 1, 4, 6, 8; V.GR., CERO: TH(4)=TH(0)+PI/2 (LIN-465)
500 FORI=1TO3
510 IFI=1THENIA=1:GOTO540
520 IFI=2THENIA=6:GOTO540
530 IFI=3THENIA=8
540 M=WC(2,I)/WC(1,I)
550 XO(I)=(RR(1,I)-RR(2,I)/M)/(1+M↑-2)
```

```
560 YO(I)=-XO(I)/M

570 AU=(XO(I)-RR(1,I))/WC(1,I)
580 ZO(I)=RR(3,I)+AU*WC(3,I)
590 B(IA)=ZO(I)
600 D(IA)=SQR(XO(I)↑2+YO(I)↑2)
610 SH=YO(I)/D(IA)
620 CT=XO(I)/D(IA)
630 REM     SH=SENO DE THETA, CT=COSENO DE THETA
640 D1=SQR(WC(1,I)↑2+WC(2,I)↑2)
650 IFXO(I)>=0THENGOSUB2210:REM  X2 HACIA PRIMERO O CUARTO CUADRANTE
660 IFXO(I)<0THENGOSUB 2240:REM  X2 HACIA SEGUNDO O TERCER CUADRANTE
670 CV=D1*SV
680 SL(IA)=CV/SQR(M2(I))
690 CL(IA)=WC(3,I)/SQR(M2(I))
695 REM     CALCULO DE B2, B7 Y B9
700 HX=QM(1,I)-XO(I)
710 HY=QM(2,I)-YO(I):C%=HY>=0:B%=WC(2,I)<0
720 HZ=QM(3,I)-ZO(I)
730 B(IA+1)=SQR(HX↑2+HY↑2+HZ↑2):IFB%=C%THENB(IA+1)=-B(IA+1)
731 IFA$="S"THENRETURN
735 REM      MATRICES Q1, Q6, Q8 Y VECTORES A1, A6 Y A8
740 Q(1,1,IA)=CT:Q(1,2,IA)=-SH*CL(IA):Q(1,3,IA)=SH*SL(IA)
750 Q(2,1,IA)=SH:Q(2,2,IA)=CT*CL(IA):Q(2,3,IA)=-CT*SL(IA)
760 Q(3,1,IA)=0:Q(3,2,IA)=SL(IA):Q(3,3,IA)=CL(IA)
770 A(1,IA)=D(IA)*CT:A(2,IA)=D(IA)*SH:A(3,IA)=B(IA)
780 NEXTI
785 REM       CALCULO DE D5  Y  B5
790 AU=(LP(1)+LP(2)+LP(3))/2
800 AR=SQR(AU*(AU-LP(1))*(AU-LP(2))*(AU-LP(3)))
810 D(5)=2*AR/LP(1)
820 B(5)=SQR(LP(3)↑2-D(5)↑2)
830 REM       CONSTRUCCION DE MATRICES Q Y VECTORES A
840 FORI=2TO4
850 SH=SIN(TH(I)):CT=COS(TH(I))
860 Q(1.1,I)=CT:Q(1.2,I)=-SH*CL(I):Q(1,3,I)=SH*SL(I)
870 Q(2,1,I)=SH:Q(2.2,I)=CT*CL(I):Q(2.3,I)=-CT*SL(I)
880 Q(3.1,I)=0:Q(3.2,I)=SL(I):Q(3,3,I)=CL(I)
890 NEXTI
900 REM       VECTORES A
910 FORI=0TO9
920 ONI+1GOTO930,950,930.930,930,930,950,930,950,930
930 CT=COS(TH(I)):SH=SIN(TH(I))
940 A(1,I)=D(I)*CT:A(2,I)=D(I)*SH:A(3,I)=B(I)
950 NEXTI
980 FORI=1TO3
990 S(I,4)=A(I,0):S1(I,2)=A(I,7)
1000 U(I,5)=A(I,5):U1(I,2)=A(I,9)
1010 NEXTI
1011 REM     CALCULO DE "P1" (PREPARACION)
1012 W1(1,2)=H(1)*COS(TH(2)-π/2)
1013 W1(2,2)=H(1)*SIN(TH(2)-π/2)
1014 W1(3,2)=B(2)
1015 REM         CALCULO DE P2
1020 FORK=3TO1STEP-1
1030 FORI=1TO3
1040 AU=0
1050 FORJ=1TO3
1060 AU=AU+Q(I,J.K)*S(J,K+1)
1070 NEXTJ
1080 S(I.K)=AU+A(I.K)
1090 NEXTI
```

```
1100 NEXTK
1110 REM     CALCULAR "P2'"
1120 FORI=1TO3
1130 AU=0
1140 FORJ=1TO3
1150 AU=AU+Q(I,J,6)*S1(J,2)
1160 NEXTJ
1170 S1(I,1)=AU+A(I,6)
1180 NEXTI
1185 REM     CALCULAR "P3"
1190 FORK=4TO1STEP-1
1200 FORI=1TO3
1210 AU=0
1220 FORJ=1TO3
1230 AU=AU+Q(I,J,K)*U(J,K+1)
1240 NEXTJ
1250 U(I,K)=AU+A(I,K)
1260 NEXTI
1270 NEXTK
1275 REM     CALCULAR "P3'"
1280 FORI=1TO3
1290 AU=0
1300 FORJ=1TO3
1310 AU=AU+Q(I,J,8)*U1(J,2)
1320 NEXTJ
1330 U1(I,1)=AU+A(I,8)
1340 NEXTI
1345 REM       LLENADO DE LA COLUMNA 7 DE LA MATRIZ JB,
1346 REM       DE LOS TRES PRIMEROS RENGLONES DE LAS COLUMNAS 4 Y 6,
1347 REM       Y DE LOS TRES ULTIMOS DE LA COLUMNA 5
1350 FORI=1TO3
1360 JB(I,7)=S1(I,1)-S(I,1):JB(I,4)=0:JB(I,6)=0
1370 JB(I+3,7)=U1(I,1)-U(I,1):JB(I+3,5)=0
1380 NEXTI
1385 REM     LLENADO DE LA MATRIZ JACOBIANA (RENGLONES 1-3, COLUMNAS 1-3)
1390 FORK=4TO2STEP-1
1400 XS(1)=-S(2,K):XS(2)=S(1,K):XS(3)=0:REM    ESTE ES EL PROCUCTO CRUZ E X S
1410 FORL=1TOK-1
1420 FORI=1TO3
1430 AU=0
1440 FORJ=1TO3
1450 AU=AU+Q(I,J,K-L)*XS(J)
1460 NEXTJ
1470 JB(I,K-1)=AU
1480 NEXTI
1490 FORI=1TO3:XS(I)=JB(I,K-1):NEXTI
1500 NEXTL
1510 NEXTK
1515 REM     LLENADO DE LA MATRIZ JACOBIANA (COLUMNA 5, RENGLONES 1 A 3)
1520 XS(1)=S1(2,2):XS(2)=-S1(1,2):XS(3)=0
1530 FORI=1TO3
1540 AU=0
1550 FORJ=1TO3
1560 AU=AU+Q(I,J,6)*XS(J)
1570 NEXTJ
1580 JB(I,5)=AU
1590 NEXTI
1595 REM     LLENADO DE LA MATRIZ JACOBIANA (RENGLONES 4 A 6; COLUMNAS 1 A 4)
1600 FORK=5TO2STEP-1
1610 XS(1)=-U(2,K):XS(2)=U(1,K):XS(3)=0
1620 FORL=1TOK-1
1630 FORI=4TO6
1640 AU=0
```

```
1650 FORJ=1TO3
1660 AU=AU+Q(I-3,J,K-L)*XS(J)
1670 NEXTJ
1680 JB(I,K-1)=AU
1690 NEXTI
1700 FORI=1TO3:XS(I)=JB(I+3,K-1):NEXTI
1710 NEXTL
1720 NEXTK
1725 REM     LLENADO DE MATRIZ JACOBIANA (RENGLONES 4 A 6; COLUMNA 6)
1730 XS(1)=U1(2,2):XS(2)=-U1(1,2):XS(3)=0
1740 FORI=4TO6
1750 AU=0
1760 FORJ=1TO3
1770 AU=AU+Q(I-3,J,B)*XS(J)
1780 NEXTJ
1790 JB(I,6)=AU
1800 NEXTI
1805 REM      TRIANGULARIZACION MEDIANTE REFLEXIONES DE HOUSEHOLDER
1810 FORK=1TON-1
1820 AL=0
1830 FORI=KTOM2
1840 V(I)=JB(I,K)
1850 AL=JB(I,K)↑2+AL
1860 NEXTI
1870 AL=(SGN(JB(K,K))OR1)*SQR(AL)
1880 V(K)=JB(K,K)+AL:BT=AL*V(K)
1890 JB(K,K)=-AL
1900 FORI=K+1TOM2
1910 JB(I,K)=0
1920 NEXTI
1930 FORJ=K+1TON+1
1940 GM=0
1950 FORI=KTO6   M2
1960 GM=GM+V(I)*JB(I,J)
1970 NEXTI
1980 GM=GM/BT
1990 FORI=KTOM2
2000 JB(I,J)=JB(I,J)-GM*V(I)
2010 NEXTI
2020 NEXTJ
2030 NEXTK
2035 REM       SUBSTITUCION REGRESIVA
2040 DT(N)=JB(N,N+1)/JB(N,N)
2050 FORI=N-1TO1STEP-1
2060 DT(I)=JB(I,N+1)
2070 FORJ=NTOI+1STEP-1
2080 DT(I)=DT(I)-JB(I,J)*DT(J)
2090 NEXTJ
2100 DT(I)=DT(I)/JB(I,I)
2105 NEXTI
2106 AU=0:FORI=1TO6:AU=AU+DT(I)↑2:NEXTI
2107 IFSQR(AU)<=NDTHEN4040
2108 IT=IT+1:IFIT>I1THENPRINT"NO CONVERGE EN";IT;"ITERACIONES":STOP
2109 REM     RECALCULAR VECTOR THETA, MATRICES Q Y VECTORES A
2110 FORI=0TO6
2120 IFI=0THENIA=0:TH(0)=TH(0)+DT(3):GOTO2150
2130 IA=I+1:IFI>3THENIA=2*I-3
2140 TH(IA)=TH(IA)+DT(I)
2150 CT=COS(TH(IA)):SH=SIN(TH(IA)):IFIA=0THEN2180
2160 ONIGOTO2170,2170,2170,2180,2180,2180
2170 Q(1,1,IA)=CT:Q(1,2,IA)=-SH*CL(IA):Q(1,3,IA)=SH*SL(IA)
2175 Q(2,1,IA)=SH:Q(2,2,IA)=CT*CL(IA):Q(2,3,IA)=-CT*SL(IA)
2180 A(1,IA)=D(IA)*CT:A(2,IA)=D(IA)*SH:A(3,IA)=B(IA)
```

```
2190 NEXTI
2200 GOTO980
2210 REM              LLAMADA DESDE 650
2220 IFWC(2,I)>=0THENSV=-1:RETURN
2230 SV=1:RETURN
2240 REM              LLAMADA DESDE 660
2250 IFWC(2,I)>=0THENSV=1:RETURN
2260 SV=-1:RETURN
4040 REM    CALCULAR "P1"
4045 PRINT#1,"      "
4050 FORI=1TO3
4060 AU=0
4070 FORJ=1TO3
4080 AU=AU+Q(I,J,1)*W1(J,2)
4090 NEXTJ
4100 W1(I,1)=AU+A(I,1)
4110 NEXTI
4120 FORI=1TO3:A$=STR$(W1(I,1)):B$=STR$(S1(I,1)):C$=STR$(U1(I,1))
4122 A%=11-LEN(A$):B%=11-LEN(B$)
4123 PRINT#1,A$SPC(A%),B$SPC(B%),C$:NEXTI
4124 REM    MODIFICAR LONGITUD DE LAS PIERNAS DE MPS
4130 GOSUB4210
4135 A$="S":IT=0:GOSUB215
4140 D(7)=H(2):D(9)=H(3):B(3)=H(1)
4145 FORI=1TO3
4150 IFI=1THENIA=1:GOTO4165
4155 IFI=2THENIA=6:GOTO4165
4160 IFI=3THENIA=8
4165 GOSUB700
4166 NEXTI
4170 GOTO910:REM     OBTENCION DE UNA NUEVA SOLUCION
4200 REM RUTINA DE MODIFICACION DE LAS LONGITUDES LR Y LS
4201 REM *LA RUTINA INCLUIDA AQUI MODIFICA UNICAMENTE LA PIERNA 1; SIN EMBARGO
4202 REM *LAS LINEAS 4201 A 4240 PUEDEN SER REEMPLAZADAS POR CUALQUIER PROGRAMA
4203 REM *QUE HAGA VARIAR LAS 3 LONGITUDES LR Y LAS 3 LS.
4204 REM *ESTAS LONGITUDES PUEDEN INCLUSO, SER FUNCIONES DEL TIEMPO
4210 IFLR(1)+LS(1)<=SQR(M2(1))THENPRINT"LAS PIERNAS NO PUEDEN ACORTARSE MAS"
4220 LR(1)=LR(1)-.05:LS(1)=LS(1)-.05
4230 IFLR(1)<=0ORLS(1)<=0THENPRINT"LA LONGITUD DE LAS PIERNAS NO PUEDE SER <0"
4240 RETURN
5000 REM  *PARAMETROS DE LA PLATAFORMA DE STEWART
5001 REM  *PROPORCIONADOS EN EL SIGUIENTEORDEN:
5002 REM  *LINEA 5020---LR1, LS1, L12, XS1, XR1, YS1, YR1, ZS1, ZR1
5003 REM  *LINEA 5030---LR2, LS2, L23, XS2, XR2, YS2, YR2, ZS2, ZR2
5004 REM  *LINEA 5040---LR3, LS3, L31, XS3, XR3, YS3, YR3, ZS3, ZR3
5020 DATA7.6,16,14.1,-2.5,5,-.2,0,4,10
5030 DATA13.9,5.5,13.5,-5,8,-2,2,7,5
5040 DATA12.8,21.7,19,3.6,4.8,3.1,1.5,-9.3,6.8
5041 :
5043 REM   *DATOS DE LOS VALORES INICIALES DE LOS ANGULOS THETA DE TH(0) A TH(5
5044 REM   *RECUERDESE QUE LOS VALORES DE LOS ANGULOS 1, 4, 6 Y 8 SON FICTICIOS
5045 REM   *PERO ES NECESARIO INTRODUCIRLOS PARA QUE EL PROGRAMA FUNCIONE
5050 DATA.1047198,0,2.04203522,1.6580628,0,2.27765467,0,6.16973891,0,4.11897703

READY.
```

APENDICE H

RESULTADOS DEL PROGRAMA TINASTE

	P1	P2	P3
x	7.9535379	-2.60942935	-7.09222458
y	-4.58809348	-6.8945779	5.43104933
z	15.2901807	6.23955341	9.43853095
	7.98396107	-2.62088216	-7.0952882
	-4.60833859	-6.88968363	5.42220664
	15.1828266	6.17489868	9.43788051
	8.0148217	-2.63242948	-7.09811536
	-4.62672751	-6.8840903	5.41402776
	15.0748638	6.11102776	9.43727843
	8.04612958	-2.64406071	-7.10071332
	-4.64323856	-6.87782384	5.40649602
	14.9662793	6.04795768	9.43672357
	8.07789624	-2.65576489	-7.10308919
	-4.65784744	-6.87091069	5.39959472
	14.857058	5.98570683	9.43621481
	8.11013526	-2.66753055	-7.10524999
	-4.67052709	-6.86337801	5.39330698
	14.7471819	5.92429538	9.435751
	8.14286236	-2.6793457	-7.10720252
	-4.68124724	-6.85525375	5.38761608
	14.6366303	5.8637454	9.43533097
	8.17609571	-2.69119769	-7.10895351
	-4.68997403	-6.84656685	5.38250513
	14.5253795	5.80408129	9.43495356
	8.20985606	-2.70307311	-7.11050964
	-4.69666954	-6.8373474	5.37795698
	14.4134022	5.74532998	9.43461756
	8.24416716	-2.71495763	-7.11187754
	-4.70129122	-6.82762691	5.37395436
	14.3006674	5.68752157	9.43432173
	8.27905586	-2.72683592	-7.11306391
	-4.70379126	-6.8174385	5.37047938
	14.1871399	5.63068951	9.43406482
	8.31455273	-2.73869139	-7.11407552
	-4.70411589	-6.80681724	5.36751374
	14.0727796	5.57487148	9.43384549
	8.35069231	-2.75050605	-7.11491918
	-4.70220447	-6.79580043	5.36503861
	13.9575414	5.52010979	9.4336624
	8.38751375	-2.7622602	-7.115602
	-4.69798847	-6.78442812	5.36303412
	13.8413741	5.46645247	9.43351409
	8.42506132	-2.77393217	-7.11613127
	-4.69139032	-6.77274344	5.36147964
	13.7242197	5.41395398	9.43339906

8.46338542	-2.78549795	-7.11651463
-4.68232173	-6.76079331	5.36035328
13.6060123	5.36267671	9.4333157
8.50254298	-2.79693073	-7.11676019
-4.67068236	-6.74862905	5.35963165
13.4866773	5.31269215	9.43326228
8.54259906	-2.80820039	-7.1168765
-4.6563572	-6.73630725	5.35928974
13.3661297	5.26408293	9.43323697
8.58362793	-2.81927283	-7.11687285
-4.63921422	-6.72389077	5.35930052
13.2442722	5.21694505	9.43323777
8.62571471	-2.83010909	-7.11675922
-4.61910095	-6.71145006	5.35963448
13.1209933	5.17139079	9.43326248
8.66895761	-2.84066434	-7.11654663
-4.59584044	-6.69906471	5.36025923
12.9961643	5.12755233	9.43330873
8.71347038	-2.85088652	-7.11624722
-4.56922594	-6.68682545	5.36113899
12.8696362	5.08558668	9.43337384
8.75938566	-2.86071457	-7.11587457
-4.53901418	-6.67483672	5.36223367
12.741235	5.04568185	9.43345486
8.8068595	-2.87007612	-7.11544389
-4.50491653	-6.66321994	5.36349836
12.6107562	5.00806528	9.43354844
8.85607694	-2.87888443	-7.1149725
-4.46658718	-6.65211796	5.3648821
12.4779567	4.97301525	9.43365082
8.9072599	-2.88703415	-7.11448023
-4.42360726	-6.64170074	5.36632658
12.3425454	4.94087653	9.43375769
8.96067771	-2.89439546	-7.11398993
-4.37546274	-6.63217341	5.36776477
12.2041683	4.91208265	9.43386406
9.01666236	-2.9008057	-7.11352815
-4.32151297	-6.62378736	5.36911873
12.0623891	4.8871882	9.4339642
9.07563022	-2.90605705	-7.11312596
-4.26094487	-6.61685606	5.37029753
11.9166604	4.86691703	9.43405137

9.1381151	-2.90987773	-7.11281999
-4.19270316	-6.61177879	5.3711941
11.7662795	4.85223717	9.43411767
9.20481993	-2.91190225	-7.11265343
-4.11538032	-6.6090768	5.37168207
11.6103211	4.84448178	9.43415375
9.27670247	-2.91162149	-7.11267703
-4.02703278	-6.60945198	5.37161293
11.447523	4.84555633	9.43414863
9.35512724	-2.90829358	-7.11294929
-3.924853	-6.61388744	5.37081524
11.276086	4.85831681	9.43408965
9.44215925	-2.90076983	-7.11353338
-3.80452997	-6.62383451	5.36910336
11.0932852	4.88732705	9.43396306
9.54120837	-2.88711094	-7.11448179
-3.6588367	-6.64160193	5.366322
10.8946174	4.94057502	9.43375734
9.65872875	-2.86356987	-7.11577067
-3.47386888	-6.67131375	5.3625388
10.6715513	5.03416835	9.43347744
9.81093461	-2.8205858	-7.1168649
-3.21446468	-6.72239845	5.35932387
10.4026472	5.21139538	9.4332395
10.0962508	-2.70000407	-7.11012776
-2.66250453	-6.83977818	5.37907365
9.95760333	5.76041713	9.43470006

APENDICE I

```
READY.
```

PROGRAMA INNOSTE

```
1 REM     SOLUCION CERRADA DEL MECANISMO DE LA PLATAFORMA DE STEWART (MPS).
2 REM     ESTE PROGRAMA OBTIENE EL POLINOMIO DE GRADO 16 REQUERIDO PARA RESOLVER
3 REM  EL PROBLEMA DIRECTO DE POSICION DEL MPS
10 REM LECTURA DE PARAMETROS DE STEWART
11 DIM A(2).AC(3.2.2).B(2).BC(4.7).C(2).FM(16.2).H(3).LR(3).LS(3).LP(3).MU(3)
12 DIMM2(3).QC(9,3).R(2).RR(3,3),S(2),SI(3).SR(3,3),T(2).UC(3,3).VC(3,3).WC(3,3)
13 DIMEU(4,2),X(3,3),UM(3).VM(3).WM(3)
100 FORI=1TO3
110 READLR(I).LS(I).LP(I)
120 AUX=0
130 FORJ=1TO3
140 READSR(J,I).RR(J.I)
150 WC(J.I)=SR(J,I)-RR(J,I):REM   COMPONENTES DE SR-RR
160 AUX=WC(J,I)↑2+AUX
170 NEXTJ
180 M2(I)=AUX:REM  CUADRADOS DISTANCIAS SR-RR
190 NEXTI
195 REM     CALCULO DE MU. SIGMA Y RADIOS H
200 FORI=1TO3
210 SI(I)=(1+LR(I)↑2/M2(I)-LS(I)↑2/M2(I))/2
220 MU(I)=SQR(LR(I)↑2/M2(I)-SI(I)↑2)
230 H(I)=MU(I)*SQR(M2(I))
240 NEXTI
245 REM      CALCULO DE LOS VECTORES UNITARIOS U, V, W  (UC, VC, WC)
250 FORI=1TO3
260 FORJ=1TO3
270 WC(J,I)=WC(J,I)/SQR(M2(I))
280 NEXTJ
290 NEXTI
300 FORI=1TO3
305 QU=WC(1.I)/WC(2,I)
310 UC(1,I)=1/SQR(QU↑2+1)
320 UC(2,I)=-UC(1,I)*QU
330 NEXTI
340 FORI=1TO3
350 VC(1,I)=-WC(3,I)*UC(2,I)
360 VC(2,I)=WC(3,I)*UC(1,I)
370 VC(3.I)=WC(1,I)*UC(2.I)-WC(2.I)*UC(1.I)
380 NEXTI
385 REM      CALCULO DE LOS VECTORES QR('QM')
390 FORI=1TO3
400 FORJ=1TO3
410 QM(J.I)=SI(I)*(SR(J.I)-RR(J.I))+RR(J.I)
420 NEXTJ
430 NEXTI
435 REM         CALCULO DE Q-UES MINUSCULAS (QC)
440 FORI=1TO3
445 REM         FUNCION J=MOD(I.3)+1
450 IFI=1 THENJ=2:GOTO480
460 IFI=2THENJ=3:GOTO480
470 IFI=3THENJ=1
480 FORL=1TO4
490 GOSUB620
500 QC(L.I)=2*H(I)*H(J)*AUX
510 NEXTL
520 FORL=5TO6
530 GOSUB620
540 QC(L.I)=2*H(I)*AUX
```

```
550 NEXTK
560 FORK=7TO8
570 GOSUB620
580 QC(K,I)=2*H(J)*AUX
590 NEXTK
600 GOSUB620
610 QC(9,I)=LP(I)↑2-H(I)↑2-H(J)↑2-AUX
611 NEXTI
612 GOTO770
615 REM      PRODUCTOS PUNTUALES NECESARIOS PARA LAS Q-UES MINUSCULAS
620 AUX=0
630 FORL=1TO3
635 IFK>4THENSO=QM(L,J)-QM(L,I)
640 ONKGOSUB680,690,700,710,720,730,740,750,760
650 AUX=AUX+AYU
660 NEXTL
670 RETURN
680 AY=UC(L,I)*UC(L,J):RETURN
690 AY=UC(L,I)*VC(L,J):RETURN
700 AY=VC(L,I)*UC(L,J):RETURN
710 AY=VC(L,I)*VC(L,J):RETURN
720 AY=SO*UC(L,I):RETURN
730 AY=SO*VC(L,I):RETURN
740 AY=-SO*UC(L,J):RETURN
750 AY=-SO*VC(L,J):RETURN
760 AY=SO↑2:RETURN
765 REM   CALCULO DE LAS A(IJ)   [AC]
770 FORI=1TO3
780 AC(I,0,0)=QC(1,I)+QC(5,I)+QC(7,I)+QC(9,I)
790 AC(I,0,1)=2*(QC(2,I)+QC(8,I))
800 AC(I,0,2)=-QC(1,I)+QC(5,I)-QC(7,I)+QC(9,I)
810 AC(I,1,0)=2*(QC(3,I)+QC(6,I))
820 AC(I,1,1)=4*QC(4,I)
830 AC(I,1,2)=-2*(QC(3,I)-QC(6,I))
840 AC(I,2,0)=-QC(1,I)-QC(5,I)+QC(7,I)+QC(9,I)
850 AC(I,2,1)=-2*(QC(2,I)-QC(8,I))
860 AC(I,2,2)=QC(1,I)-QC(5,I)-QC(7,I)+QC(9,I)
870 NEXTI
875 REM        CALCULO DE AI,BI,CI,RI,SI,TI
880 FORI=0TO2
890 A(I)=AC(3,2,I)
900 B(I)=AC(3,1,I)
910 C(I)=AC(3,0,I)
920 R(I)=AC(2,I,2)
930 S(I)=AC(2,I,1)
940 T(I)=AC(2,I,0)
950 NEXTI
955 REM DE AQUI, VA A CALCULAR B(IJ) [TABLA 1 DEINNOCENTI E PARENTI-CASTELLI]
960 GOSUB4030
965 REM       CALCULO DE D,E,F  (COEFICIENTES DE ECUACIONES 16 Y 20)
970 FORI=0TO2
980 BC(I,2)=AC(1,I,2)
990 BC(I,1)=AC(1,I,1)
1000 BC(I,0)=AC(1,I,0)
1010 NEXTI
1015 REM      CONSTRUCCION DEL POLINOMIO DE GRADO 16 [ECUACION 20 DE INNOCENTI]
1020 READA$
1030 IFA$="FIN"THEN1405
1040 B$=LEFT$(A$,1)
1050 J=VAL(B$)
1060 FORI=0TO2
1070 FM(I,0)=BC(I,2-J)
1080 NEXTI
1090 FORI=2TO6
1100 ONI-1GOSUB1290,1300,1310,1320,1330
1110 B$=MID$(A$,I,1)
```

```
1120 J=VAL(B$)
1130 JA=-(J>2)*(10-J)-(J<3)*(2-J)
1140 FORK=0TOX1
1150 FORL=0TOX2
1160 FM(K+L,1)=BC(K,JA)*FM(L,0)+FM(K+L,1)
1170 NEXTL
1180 NEXTK
1190 FORL=0TOX1+X2
1200 IFI=6THENGOSUB1260:GOTO1220
1210 FM(L,0)=FM(L,1)
1220 FM(L,1)=0
1230 NEXTL
1240 NEXTI
1250 GOTO1020
1255 REM     RUTINA DE COEFICIIENTES DE PRODUCTOS DE POLINOMIOS
1260 B$=RIGHT$(A$,2):J=VAL(B$)
1270 FM(L,2)=J*FM(L,1)+FM(L,2)
1280 RETURN
1285 REM      AQUI SE ESTABLECEN X1 Y X2
1290 X1=2:X2=2:RETURN
1300 X1=2:X2=4:RETURN
1310 X1=2:X2=6:RETURN
1320 X1=4:X2=8:RETURN
1330 X1=4:X2=12:RETURN
1335 REM        COMIENZO ZONA DE DATOS
1340 DATA 7.6,16.14.1,-2.5.5,-.2,0,4,10
1350 DATA 13.9.5.5.13.5,-5.8,-2,2,7,5
1360 DATA 12.8.21.7,19,3.6,4.8,3.1,1.5,-9.3,6.8
1361 REM      HASTA AQUI DATOS DE STEWART
1362 REM       LA SIGUIENTE LINEA CONTIENE LOS INDICES PARA LA OBTENCION DE BIJ
1363 DATA1166+1,1346-2,3344+1,1355+1,2345-1,1256-1,2246+1,FIN
1364 :
1365 REM      DATOS PARA MULTIPLICACION DE LOS POLINOMIOS DE LA ECUACION 20
1370 DATA002237+2,111137+1,011237-4,111236-1,012236+3.122234-1
1380 DATA022235-2,112235+1,222233+1,001247+3,000077+1,000257-2
1390 DATA001157+1.000167-1,011147-1,022244+1,012245-1,011246+1
1400 DATA002246-2.002255+1,001256-1.000266+1,FIN
1403 REM  LINEAS 1405 A 1470 REALIZAN LA DIVISION SINTETICA ENTRE (X-A)
1404 REM  DONDE A ES UN VALOR SOLICITADO OPORTUNAMENTE AL USUARIO
1405 FORI=0TO16:FM(I,0)=0:FM(I,2)=FM(I,2)/1E28:NEXTI
1410 INPUT"VALOR A DEL FACTOR (X-A)":A
1420 FM(15.0)=FM(16.2)
1430 FORI=14TO0STEP-1
1440 FM(I,0)=FM(I+1,0)*A+FM(I+1,2)
1450 NEXTI
1460 R=FM(0,0)*A+FM(0,2)
1470 PRINT"P(A)=RESIDUO="R
1480 GOTO1410
4020 REM  DESDE LAS LINEA 4030 HASTA LA 5170=>RUTINA PARA LA OBTENCION DE BIJ
4030 READA$:IFA$="FIN"THENRETURN
4040 FORI=1TO3STEP2
4050 J=1-(I>2)
4060 B$=MID$(A$,I,1):JA=VAL(B$)
4070 ONJAGOSUB5060.5070,5080.5120,5130.5140
4080 B$=MID$(A$.I+1.1):JA=VAL(B$)
4090 ONJAGOSUB5090.5100.5110,5150,5160,5170
5000 EU(0,J)=X0*Y0
5010 EU(1,J)=X1*Y0+X0*Y1
5020 EU(2,J)=X0*Y2+X1*Y1+X2*Y0
5030 EU(3,J)=X1*Y2+X2*Y1
5040 EU(4,J)=X2*Y2
5045 NEXTI
5050 B$=RIGHT$(A$.2):JA=VAL(B$)
5051 FORI=0TO4
5052 FORJ=3TO7
5053 BC(I.J)=EU(I.1)*EU(J-3,2)*JA+BC(I.J)
```

```
5054 NEXTJ
5055 NEXTI
5056 GOTO4030
5060 X0=A(0):X1=A(1):X2=A(2):RETURN
5070 X0=B(0):X1=B(1):X2=B(2):RETURN
5080 X0=C(0):X1=C(1):X2=C(2):RETURN
5090 Y0=A(0):Y1=A(1):Y2=A(2):RETURN
5100 Y0=B(0):Y1=B(1):Y2=B(2):RETURN
5110 Y0=C(0):Y1=C(1):Y2=C(2):RETURN
5120 X0=R(0):X1=R(1):X2=R(2):RETURN
5130 X0=S(0):X1=S(1):X2=S(2):RETURN
5140 X0=T(0):X1=T(1):X2=T(2):RETURN
5150 Y0=R(0):Y1=R(1):Y2=R(2):RETURN
5160 Y0=S(0):Y1=S(1):Y2=S(2):RETURN
5170 Y0=T(0):Y1=T(1):Y2=T(2):RETURN
5200 FORI=1TO3
5210 READX(1,I),X(2,I),X(3,I)
5220 NEXTI
5230 FORJ=1TO3
5240 UM(J)=0:VM(J)=0:WM(J)=0
5250 NEXTJ
5260 FORJ=1TO3
5270 FORI=1TO3
5280 UM(J)=UC(I,J)*(X(I,J)-QM(I,J))+UM(J)
5290 VM(J)=VC(I,J)*(X(I,J)-QM(I,J))+VM(J)
5300 WM(J)=WC(I,J)*(X(I,J)-QM(I,J))+WM(J)
5310 NEXTI
5320 NEXTJ
5321 FORI=1TO3
5322 IFUM(I)>=0THENAY=0
5323 IFUM(I)<0THENAY=1
5324 TN(I)=TAN((ATN(VM(I)/UM(I))+AY*π)/2)
5325 NEXTI
5326 INPUT"R,S";R,S:AUX=0
5327 FORI=0TO2:FORJ=0TO2:AUX=AUX+AC(R,I,J)*TN(R)↑I*TN(S)↑J:NEXT:NEXT
5330 DATA7.953538.-4.5880935,15.2901806,-2.6094293,-6.8945779,6.2395535
5340 DATA-7.0922245,5.4310495,9.438531
5350 DATA6.8867648,-3.3006202,16.5807314,-4.7021189,2.1088681,10.6439635
5355 DATA2.1249326,13.706124,9.5739055
5360 DATA8.2538913,5.1078311,14.5915415,-4.8826171,2.4727683,10.1985254
5370 DATA-.6782282.-10.517259,7.4218082
5380 DATA9.0901681,5.3394494,13.5384749,-4.0776390,.6285160,11.7423785
5390 DATA1.4067563,-10.8359226,7.1884731
5430 PRINTSQR((X(1,3)-X(1,1))↑2+(X(2,3)-X(2,1))↑2+(X(3,3)-X(3.1))↑2)
10000 PRINTFRE(0)-(FRE(0)<0)*65536
10010 PRINT(QM(1,2)-QM(1,1))*UC(1,1)

READY.
```

APENDICE J

ESTUCHE D. Y H.

La notación de Denavit y Hartenberg proporciona medios convenientes para estudiar cadenas cinemáticas. Su uso es relativamente sencillo si las formas de los eslabones de la cadena cinemática bajo estudio son simples, si hay simetría, etc. Sin embargo, su comprensión puede representar una dificultad considerable, si por ejemplo, los origenes de los diferentes sistemas de referencia no están localizados dentro del volumen de los eslabones, si éstos no son simétricos, si los ejes de los pares cinemáticos forman ángulos distintos de 0 o de 90 grados, etc.

Como puede verse, para emplear ágilmente la notación de D. y H., el analista necesita un entrenamiento especial (al menos así lo detectó el autor, a quien le costó bastante trabajo formarse un esquema mental adecuado de los entes <ejes, parámetros y variables> que intervienen en la notación en cuestión).

Buscando sortear los obstáculos, el autor ideó un conjunto de piezas (estuche D. y H.) que permiten armar muy diversas formas de cadenas cinemáticas. Las piezas básicas del estuche D. y H. (que se ilustran en la figura) son una estrella conectora (que no es otra cosa que una pieza cirular de escaso espesor, con ocho ranuras <raunuras consecutivas forman ángulos de 45 grados>), y un ensamble que constituye un par de revoluta (conjunto PR)[1]. Cada extremo del ensamble PR tiene una ranura compatible con las ranuras de las estrellas conectoras (el ancho de raunura es igual al espesor de las estrellas conectoras y al de los extremos de los conjuntos PR), de modo que un conjunto PR puede unirse a una estrella conectora (pueden también encadenarse estrellas conectoras). Una pieza adicional necesaria (no ilustrada) es una base con una ranura, a la que pueden conectarse ya sea una estrella conectora, o bien, un conjunto PR.

Suponiendo que a cada extremo de los conjuntos PR está unida permanentemente una estrella conectora, un extremo de uno de dichos conjuntos puede conectarse de 49 formas diferentes (puesto que en cada extremo hay 7 ranuras libres) a un extemo de otro. Esto da una idea de la gran variedad de cadenas que pueden construirse con el estuche D. y H., y por supuesto, la cantidad de posibilidades aumenta conforme aumenta la cantidad de piezas. A los ejes (hechos de alambre) de los conjuntos PR, puede pegarse con cinta adhesiva (o colocarse con corchos) información relativa a los parámetros y variables.

El estuche D. y H. puede usarse, por ejemplo, en un laboratorio de robótica, asignando a los alumnos el siguiente ejercicio:

1.-Ensamblar una cadena cinemática abierta cualquiera.

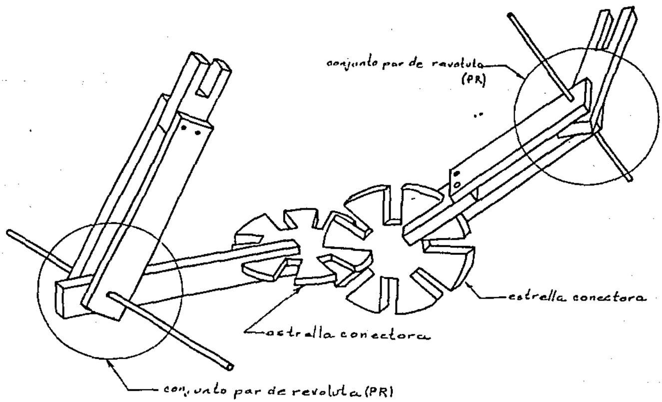
[1]Puede diseñarse también un ensamble para pares prismáticos.

2.-Identificar ejes y parámetros de Denavit y Hartenberg.

3.-Fijar en una posición y medir los ángulos de los conjuntos PR.

4.-Calcular, mediante el método visto en capitulo 2 para resolver el problema directo, la posición de un punto especifico del eslabón extremo.

Después de realizar los cálculos en una computadora, puede estimarse si los resultados obtenidos mediante ellos, corresponden a la posición física del punto cuya posición se desea conocer.



BIBLIOGRAFÍA

[1].-Agrawal, V. P. and J. S. Rao,
The Mobility Properties of Kinematic Chains,
Mechanism and Machine Theory Vol. 22, No. 5, pp. 497-504, 1987

[2].-Agrawal, V. P. and J. S. Rao,
Structural Classification of Kinematic Chains and Mechanisms,
Mechanism and Machine Theory Vol. 22, 489-496, 1987

[3].-Agrawal, V. P. and J. S. Rao,
Identification and Isomorphism of Kinematic Chains and Mechanisms,
Mechanism and Machine Theory, Vol. 24, No.4, pp. 309-321, 1989

[4].-Ángeles, J.,
Analysis, Synthesis, and Optimization of Spatial Kinematic Chains,
Springer Velag, 1982

[5].-Hervé, J. M.,
Analyse Sructurelle des Mecanismes par Groupes des Deplacements,
Mechanism and Machine Theory, Vol. 13, pp. 437-450, 1978

[6] Rojas, A. y Álvarez, B.,
Divisiones de Ingeniería Mecánica y Eléctrica y
de Estudios de Postgrado, Facultad de Ingeniería UNAM
Análisis Cinemático de Manipuladores con 3 y 5 Articulaciones
Memoria del Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería

[7].-Innocenti, C. and V. Parenti-Castelli,
Direct Position Analysis of the Stewart Mechanism Platform,
Mechanism and Machine Theory, Vol. 25, No. 6., pp. 611-621, 1990

[8].-Rooney J., and Earl, C. F.,
Some Kinematic Structures for Robot Manipulators Designs,
Trans. ASME J. of Mechanisms, Transmissions,
and Design, 105, 15 (1983)

[9].-Shanipoor, M.,
Kinematics of a Parallel-Serial (Hybrid) Manipulator,
Journal of Robotic Systems, Vol. 9, No. 1, pp. 17-36, 1992

[10].-Shujun, Li,
Computer-Aided Structure Synthesis of Spatial Kinematic Chains,
Mechanism and Machine Theory, Vol. 25, No. 6, pp. 645-653, 1990

[11].-Wohlhart, K.,
On Isomeric Overconstrained Space Mechanisms,
Proc. 8th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms,
Prague, 1991

[12].-Chang-de-Zhang and Shin Min Song,
Forward Kinematics of a Class of Parallel (Stewart) Platforms
with Closed-Form Solutions,
Journal of Robotic Systems, Vol. 9, No. 1, pp. 93-112, 1992

REFERENCIAS ADICIONALES

[A1].-Denavit, J., and Hartenberg, R. S., A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 77, 1955, pp. 215-221

[A2].-Deo, N., Graph Theory with Application to Engineering and Computer Science, Prentice Hall, New York, 1974

[A3].-Hunt, K. J., Kinematic Geometry of Mechanisms, p. 426, Clarendon Press, Oxford, 1978