

(30) 2 ejempl.



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

APLICACIONES DE LA FUNCION SPLINE CUBICA PARA EL AJUSTE DE CURVAS DEMOGRAFICAS

T E S I S

Que para obtener el título de:

A C T U A R I O

P r e s e n t a :

María Isabel Monterrubio Gómez

México, D. F.

1981



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

1. Introducción	1
2. Metodología	3
2.1 El Spline Cúbico como un caso de interpolación polinómica segmentaria	3
2.2 La función Spline Cúbica en el suavizamiento de curvas	11
3. Aplicación de la función Spline en curvas demográficas	18
3.1 Mortalidad	19
3.2 Fecundidad	25
3.3 Migración	42
4. Conclusiones	55
Anexo 1	
Anexo 2	
Bibliografía	

1. INTRODUCCION

La necesidad de recurrir a técnicas de suavizamiento dentro del contexto demográfico se debe a que sus estadísticas adolecen de errores de diversos tipos, principalmente falta de cobertura y mala declaración de edad. Debido a esto en las curvas que representan gráficamente estos datos aparecen irregularidades, las cuales pueden ser corregidas a través de distintos métodos como son: el método de la "mano alzada", ajustes de curvas teóricas por regresión o modelos demográficos como el logito en el caso de mortalidad, etc.

En este trabajo se presenta la aplicación de la función Spline Cúbica para suavizar las curvas de los fenómenos demográficos, mortalidad, fecundidad y migración. La función Spline Cúbica nació como un caso de interpolación segmentaria y en los últimos años se ha extendido su aplicación al suavizamiento de curvas, dadas sus características de construcción. Aquí se presenta el algoritmo desarrollado por Christian H. Reinsch^{1/}, donde el suavizamiento de curvas presenta ventajas sobre otros, ya que permite introducir restricciones sobre los límites de ajuste.

En el segundo capítulo se presenta la función Spline Cúbica como un caso de la interpolación polinómica segmentaria y después se presenta como una solución al suavizamiento de datos mediante el algoritmo de Reinsch. En el

^{1/}Reinsch, H. C., "Smoothing by Spline Functions", Numerische Mathematik, No. 10, 1967, pp. 177-183.

tercero se muestra su aplicación para suavizar el comportamiento por edad de tasas de mortalidad, fecundidad, para México, y de migración para una región de Yugoslavia. Por último, el cuarto capítulo contiene las conclusiones.

2. METODOLOGIA

En este capítulo presentamos el fundamento teórico - de la función Spline Cúbica. Primero lo haremos mostrándola como un caso de la interpolación polinómica segmentaria -donde tuvo su origen- y después como una solución al problema de suavizado de curvas.

2.1 El Spline Cúbico como un caso de interpolación polinómica segmentaria

La función Spline Cúbica es un caso particular de - las funciones Spline, quienes tienen su origen en la interpolación polinómica segmentaria, la cual a partir de - 1960 ha tenido gran aplicación en la teoría de aproximación, ajuste de datos, diferenciación e integración numérica y solución numérica de ecuaciones diferenciales y - ecuaciones integrales^{1/}. Esta interpolación a diferencia de la interpolación polinómica^{2/}, se aproxima a la función que se quiere interpolar a través -

^{1/} Véase: Atkinson, K. E., An introduction to numerical analysis, John Wiley & Sons, U. S., 1976 Forsythe, G. E., Malcolm, A. M. and Moler, B. C., Computer methods for mathematical computations, Prentice Hall, U. S., 1977.

^{2/} Para este tema ver: Atkinson, ibid; Forsythe, Malcom y Moler, ibid; Conte, S. D. y de Boor, C., "Interpolación y aproximación", Análisis numérico, segunda edición, - Mac. Graw Hill, México, 1977.

de subintervalos del intervalo total, es decir: dada una función $f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$ se quiere construir una función polinómica $P(x)$ que interpole a $f(x)$ en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n , donde

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

y la forma de aproximarse a la función $f(x)$ sea a través de subintervalos del intervalo total $[a, b]$, ésto es, para cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, \dots, n-1$ se construye $P(x)$ como cierto polinomio de grado menor que n : $P_i(x)$, tal que $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Las funciones Spline^{3/} son polinomios que interpolan a las funciones por medio de la interpolación polinómica segmentaria y son definidas de la siguiente forma:

consideremos un intervalo $[a, b]$ y una partición Δ sobre ese intervalo, tal que

$$\Delta : \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

donde x_0, x_1, \dots, x_n , no tienen porque estar igualmente espaciados.

$S(x)$ es una función Spline de orden m en $(-\infty, \infty)$ si

1. $S(x)$ es un polinomio de grado $\leq m$ en cada uno de los intervalos $(-\infty, x_0]$, $[x_0, x_1]$, \dots , $[x_{n-1}, x_n]$, $[x_n, \infty)$.
2. La función $S(x)$ y sus $m-1$ derivadas son continuas en $(-\infty, \infty)$.

La derivada de un Spline de orden m es otro Spline de orden $m-1$, y similarmente con sus integrales.

^{3/}Ver Atkinson, op. cit., pp. 141-143.

Entre todas las funciones Spline, la que más se utiliza es la función Spline Cúbica, ya que sus polinomios son fáciles de evaluar y no tienen comportamiento oscilatorio, característico de polinomios de mayor grado.

Función Spline Cúbica^{4/}.

Definición.

Dado un intervalo $[a, b]$ y una partición

$\Delta: \{a = x_0 < x_1 < \dots, < x_n = b\}$ de $[a, b]$, un Spline Cúbico $S_\Delta(x)$, respecto a esta partición es una función:

$$S_\Delta: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$$

- (i) La función $S_\Delta(x)$ y sus dos primeras derivadas existen y son continuas en $[a, b]$, es decir $S_\Delta(x) \in C^2 [a, b]$ ^{5/} (ver figuras 1 y 2).
- (ii) $S'''(x)$ acotada, $x \in [a, b]$ (ver figura 3).
- (iii) $S_\Delta(x)$ coincide con un polinomio cúbico en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, \dots, n-1$, es decir $S(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$ $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

^{4/} Esta parte está basada en los apuntes de Análisis Numérico I, impartidos en la Maestría de Computación del IIMAS, UNAM, México, 1981.

^{5/} Decimos que una curva C es continuamente derivable si $C'(f) = dC/df$, existe y es continua, la expresión "continuamente derivable" puede ser abreviada diciendo que la curva es una curva C^1 o de clase C^1 . En este caso podemos decir que $S(x)$ es una curva C^2 en $[a, b]$.

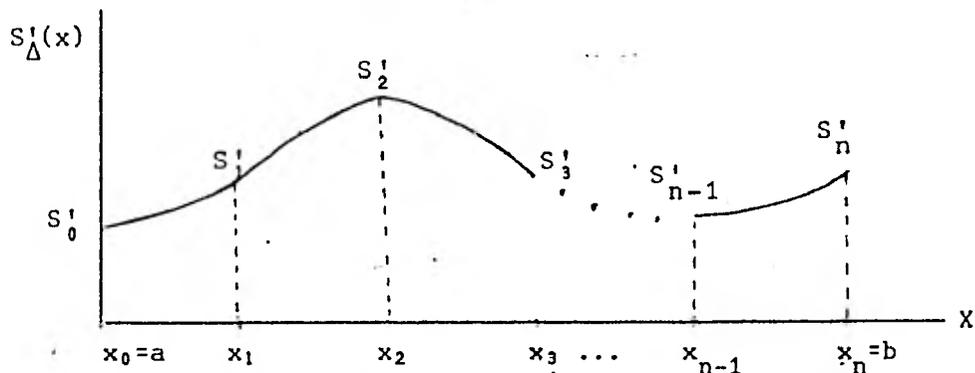


Figura 1

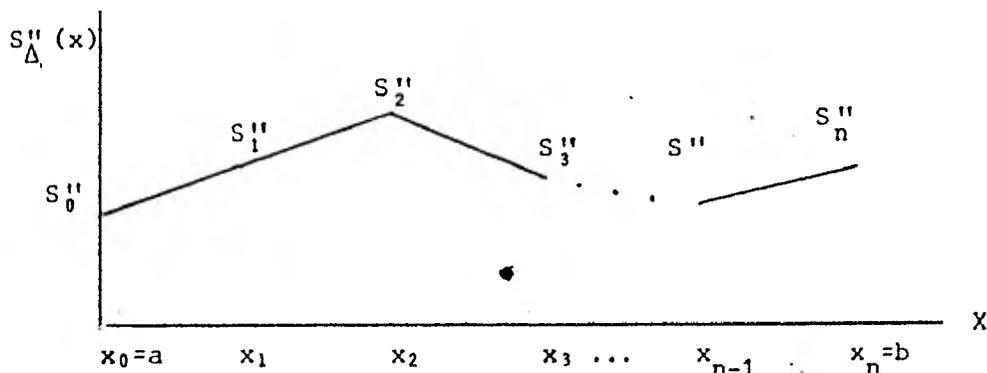


Figura 2

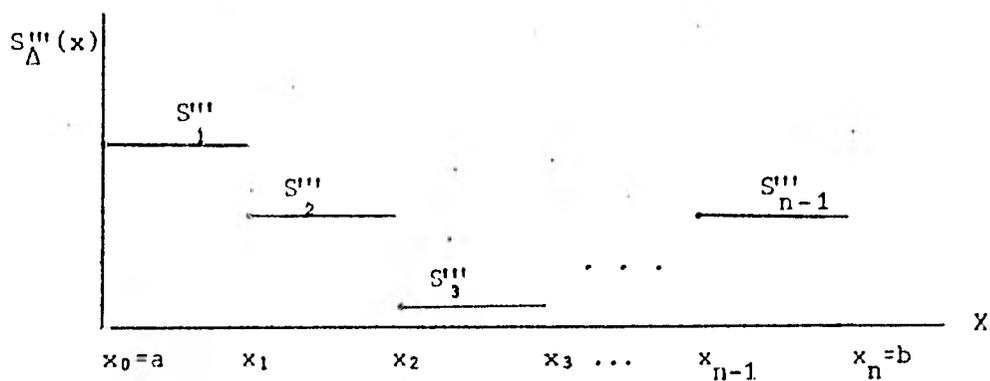


Figura 3

Observaciones:

- La condición (iii) implica que $S_{\Delta}(x) \in C^2(x_i, x_{i+1})$,
 $i = 1, \dots, n-1$.

- Al imponer (i) resultan las relaciones:

$$(a) S_{\Delta}(x_i)_- = S_{\Delta}(x_i)_+, \text{ donde } S_{\Delta}(x_i)_- = \lim_{h \rightarrow 0} (x_i - h) \frac{6}{y} \text{ y}$$

$$S_{\Delta}(x_i)_+ = \lim_{h \rightarrow 0} (x_i + h) \frac{7}{y}.$$

$$(b) S'_{\Delta}(x_i)_- = S'_{\Delta}(x_i)_+$$

$$(c) S''_{\Delta}(x_i)_- = S''_{\Delta}(x_i)_+ \frac{8}{y} \quad i = 1, \dots, n-1$$

Al coincidir $S_{\Delta}(x)$ con un polinomio cúbico en cada $[x_i, x_{i+1}]$ para $i = 0, \dots, n-1$.

$$S_{\Delta}(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

Se tienen en total $4n$ coeficientes desconocidos $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, los cuales serán determinados de la siguiente forma:

el hecho de que $S_{\Delta}(x)$ sea un polinomio interpolante en x_0, \dots, x_n implica

$$S(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

donde $f(x)$ es la función que se desea interpolar en $[a, b]$

Esto nos da $n + 1$ restricciones y junto con las condiciones de continuidad dadas en (a), (b), (c), tenemos en total:

$$n + 1 + 3(n-1) = 4n - 2$$

^{6/} Llamado límite por "la izquierda".

^{7/} Llamado límite por "la derecha".

^{8/} Cada uno de los x_i donde se cumplen las condiciones de continuidad son llamados nodos.

restricciones y $4n$ parámetros, de donde las 2 restricciones faltantes las tomamos de la forma en que valuamos $S(x)$ en $(-\infty, x_0] [x_n, \infty)$.

Pasamos ahora a la construcción de la función Spline Cúbica $S_{\Delta}(x)$.

Por ser $S_{\Delta}(x)$ Spline Cúbico, $S''_{\Delta}(x)$ es lineal en cualquier subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, inducido por la partición Δ en $[a, b]$, es decir

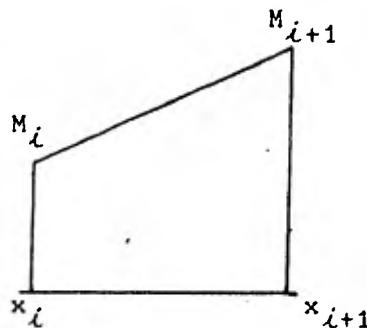


Figura 4

con $S''(x_i) = M_i$

por lo que

$$\frac{y - M_i}{x - x_i} = \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} \text{ para } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$y = M_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$$

desarrollando y haciendo $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$

$$S''_{\Delta}(x) = \frac{M_i(x_{i+1} - x_i)}{h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x + x_i)}{h_{i+1}} \quad i = 0, \dots, n-1$$

integrando dos veces

$$S_{\Delta}(x) = \frac{M_i}{6h_{i+1}} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_{i+1}} (x - x_i)^3 + A_i(x - x_i) + B_i$$

donde A_i y B_i $i = 0, \dots, n-1$ son constantes de integración.

De acuerdo a la definición del Spline, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} i) S'_{\Delta}(x_i)_- = S'_{\Delta}(x_i)_+ \\ ii) S(x_i) = f(x_i) \\ iii) S_{\Delta}(x_i)_- = S_{\Delta}(x_i)_+ = f(x_i) \end{array} \right\} i = 1, \dots, n-1$$

evaluando $S_{\Delta}(x)$ en x_i

$$S_{\Delta}(x_i) = \frac{M_i}{6h_{i+1}} (h_{i+1})^3 + B_i \quad 0 \leq i \leq n-1$$

$$f(x_i) = \frac{M_i}{6} (h_{i+1})^2 + B_i \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$f(x_0) = v_0 = M_0 h_1^2 + B_0$$

$$f(x_n) = v_n = \frac{M_n}{6} h_n^2 + A_{n-1} h_n + B_{n-1}$$

por lo que, despejando

$$B_i = f(x_i) - \frac{M_i}{6} (h_{i+1})^2$$

evaluando $S_{\Delta}(x)$ en x_{i+1}

$$S_{\Delta}(x_{i+1}) = \frac{M_{i+1}}{6} h_{i+1}^2 + A_i h_{i+1} + B_i = f(x_{i+1}) \quad i = 0, \dots, n-1$$

despejando A_i

$$A_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i) + \frac{h_{i+1}}{6} (M_i - M_{i+1})}{h_{i+1}} \quad i = 0, \dots, n-1$$

para poder determinar las constantes M_0, \dots, M_n se requiere

que $S'(x)$ sea continuo en $i = 1, \dots, n-1$

para $x = x_i$

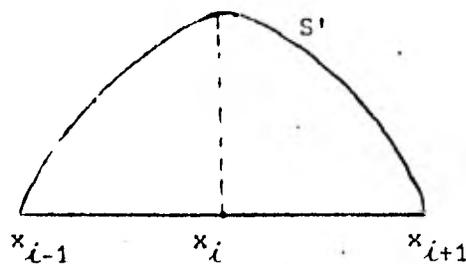


Figura 5

$$\begin{aligned}
 S'_{\Delta}(x_i)_{-} &= \frac{-M_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{M_i(x_i - x_{i-1})^2}{2h_i} + A_{i-1} \\
 &= S'_{\Delta}(x_i)_{+} = \frac{-M_i}{2h_{i+1}} + A_i \\
 \frac{-M_i}{2h_{i+1}} + A_i &= \frac{M_i(x_i - x_{i-1})^2}{2h_i} + A_{i-1}
 \end{aligned}$$

las ecuaciones anteriores nos indican continuidad en $S'_{\Delta}(x_i)$ $i = 1, \dots, n-1$, sustituyendo A_i y A_{i-1} obtenemos:

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \left(\frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3} \right) + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i}$$

este es un sistema de $n-1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas M_0, \dots, M_n . Si determinamos de alguna manera M_0 y M_n ^{7/}, el sistema se resuelve para M_1, M_2, \dots, M_{n-1} .

Existen tres casos para seleccionar M_0 y M_n :

- 1) $S''(a) = S''(b) = 0$
- 2) $S'(a) = f'(a); S'(b) = f'(b)$
- 3) Por funciones periódicas: $f(a) = f(b), S'(a) = S'(b); M_0 = M_n$

seleccionando cualquiera de estos tres casos y resolviendo el sistema M_1, \dots, M_{n-1} , obtenemos los coeficientes de la función Spline Cúbica^{8/}.

^{7/} Recordemos las dos restricciones faltantes: como valor $S(x)$ en $(-\infty, x_0]$ y en $[x_n, \infty)$.

^{8/} Si se desea ver el planteamiento del sistema de acuerdo a la selección de los tres casos ver: Atkinson, K. E., op. cit., pp. 147-150.

2.2 La función Spline Cúbica en el suavizamiento de curvas

Dejando a un lado la extensa aplicación que tiene el Spline Cúbico en interpolación, lo presentamos ahora como solución al problema de suavizamiento de curvas. Para ello, nosotros exponemos a continuación un algoritmo para suavizar curvas, planteado por Christian H. Reinsch^{9/}.

Sean $x_i, y_i, i = 0, \dots, n$, dados con

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

se desea hallar la función de suavizamiento $f(x)$, - tal que

$$(1) \quad \text{minimice } \int_{x_0}^{x_n} g''(x)^2 dx$$

entre todas las funciones $g(x)$ sujetas a

$$(2) \quad \sum_{i=0}^n \left(\frac{g(x_i) - y_i}{\delta_{y_i}} \right)^2 \leq S, \quad g \in C^2[x_0, x_n]$$

donde $\delta_{y_i} \geq 0, i = 0, \dots, n$ y $S \geq 0$ son números dados.

Con la condición (1) se pide que la función sea lisa, ya que la segunda derivada de una función nos define su curvatura, es decir que tan rápido cambia su pendiente, - por lo que si la función es suave, $\int_{x_0}^{x_n} g''(x)^2 dx$, debe ser pequeña.

La restricción (2) nos permite controlar el nivel de suavizamiento (δ_{y_i}) para cada punto $y_i, i = 0, \dots, n$.

El número S sólo es introducido por conveniencia y - depende de los pesos relativos de $1/\delta_{y_i}^2, i = 0, \dots, n$.

^{9/} Reinsch, H. C., op. cit.

El autor recomienda tomar δ_{y_i} como un estimador de la desviación estandar de y_i , y en este caso el valor de S estará en

$$N - (2N)^{1/2} \leq S \leq N + (2N)^{1/2} \quad N = n+1$$

La solución de (1) y (2) puede ser obtenida a través de métodos de cálculo de variaciones^{10/}, introduciendo para ello el parámetro Lagrangiano ρ y la variable auxiliar z , con lo cual nos planteamos a encontrar el mínimo de la funcional

$$L(g, \rho, z) = \int_{x_0}^{x_n} g''(x)^2 dx + \rho \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{g(x_i) - y_i}{\delta_{y_i}} \right)^2 + z^2 - S \right\}$$

En este caso los puntos críticos están definidos por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial g} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones^{11/}, el autor encuentra que la función $f(x)$ óptima debe cumplir con

^{10/} No puede ser encontrada por métodos de cálculo diferencial e integral, dado que queremos una función que minimice $\int_{x_0}^x g''(x)^2 dx$ sobre un conjunto de funciones y no el mínimo de una función sobre un conjunto de puntos. Sobre Cálculo Variacional véase: Elsgoltz, L., "Cálculo variacional", Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, Ediciones de Cultura Popular, S. A., México, 1975.

^{11/} Para la resolución véase: Mendoza, B. L., Relaciones entre algoritmos de suavizamiento y filtros a tiempo discreto, tesis de matemático, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1980, pp. 93-101.

$$(1) f^{(k)}(x) = 0 \quad x_i < x < x_{i+1} \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$(2) f^{(k)}(x_i)_- - f^{(k)}(x_i)_+ = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, 1 & i = 0, \dots, n-1 \\ 0 & \text{si } k = 2 & i = 0, \dots, n \\ 20 \frac{f(x_i) - y_i}{\delta^2 y_i} & \text{si } k = 3 & i = 0, \dots, n \end{cases}$$

$$\text{con } f^{(k)}(x_i)_\pm = \lim_{h \rightarrow 0} f^{(k)}(x_i \pm h) \frac{12}{h^2}$$

$$f''(x_0)_- = f'''(x_0)_- = f''(x_n)_+ = f'''(x_n)_+ = 0 \frac{13}{h^2}$$

(1) y (2) implican que f óptimo es un Spline Cúbico, por lo cual:

$$(3) f(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad x_i \leq x < x_{i+1}$$

sustituyendo (3) en (2) obtenemos los coeficientes del Spline:

para $k = 2$

$$f''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i) \quad x_i \leq x < x_{i+1}$$

$$c_0 = c_n = 0$$

$$f''(x_i)_- = 2c_{i-1} + 6d_{i-1}(x_i - x_{i-1})$$

$$f''(x_i)_+ = 2c_i + 6d_i(x_i - x_i) = 2c_i$$

$$f''(x_i)_- - f''(x_i)_+ = 2c_{i-1} - 2c_i + 6d_{i-1}h_{i-1}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$\text{con } h_i = x_{i+1} - x_i$$

despejando, obtenemos

$$d_{i-1} = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_{i-1}}$$

^{12/} Para $k = 0$, $f^{(k)}$ es la función misma.

^{13/} Sólo por comodidad, la 1a. y 2a. derivadas, se denotarán por f' y f'' , en lugar de $f^{(1)}$ y $f^{(2)}$.

$$(4) \quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \quad i = 0, \dots, n-1;$$

para $k = 0$

$$f(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad x_i \leq x < x_{i+1}$$

$$f(x_i)_- = a_{i-1} + b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + d_{i-1}(x_i - x_{i-1})^3$$

$$f(x_i)_+ = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 + d_i(x_i - x_i)^3 = a_i$$

$$f(x_i)_- - f(x_i)_+ = a_{i-1} - a_i + b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}h_{i-1}^2 + d_{i-1}h_{i-1}^3$$

despejando, obtenemos:

$$b_{i-1} = (a_i - a_{i-1} - c_{i-1}h_{i-1}^2 - d_{i-1}h_{i-1}^3)/h_{i-1}$$

$$(5) \quad b_i = (a_{i+1} - a_i)/h_i - c_i h_i - d_i h_i^2 \quad i = 0, \dots, n-1;$$

para $k = 1$

$$f'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2 \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

$$f'(x_i)_- = b_{i-1} + 2c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + 3d_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2$$

$$f'(x_i)_+ = b_i + 2c_i(x_i - x_i) + 3d_i(x_i - x_i)^2 = b_i$$

$$f'(x_i)_- - f'(x_i)_+ = b_{i-1} - b_i + 2c_{i-1}h_{i-1} + d_{i-1}h_{i-1}^2$$

sustituyendo los valores de b_{i-1} , b_i , y c_i , obtenidos en

(4) y (5) llegamos a

$$h_{i-1}(2c_i/3 + c_{i-1}/3) + h_i(2c_i/3 + c_{i+1}/3) = (a_{i+1} - a_i)/h_i - (a_i - a_{i-1})/h_{i-1}$$

lo anterior puede escribirse como:

$$(6) \quad Tc = Q'a \frac{14/}{3}$$

donde

T = matriz tridiagonal, definida positiva de orden $n-1$:

$$t_{ii} = 2(h_{i-1} + h_i)/3 \quad t_{i, i+1} = t_{i+1, i} = h_i/3$$

^{14/} El (') indica que es su transpuesta.

Q = matriz tridiagonal con $n-1$ renglones y $n-1$ columnas:

$$q_{i-1, i} = 1/h_{i-1} \quad q_{i, i} = -1/h_{i-1} - 1/h_i \quad q_{i, i+1} = 1/h_i$$

$$c = (c_0, \dots, c_{n-1})'$$

$$a = (a_0, \dots, a_n)'$$

Es decir

$$T = \begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1)/3 & h_1/3 & 0 & \dots & 0 \\ h_1/3 & 2(h_1 + h_2)/3 & h_2/3 & 0 & \\ 0 & h_2/3 & 2(h_2 + h_3)/3 & h_3/3 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & h_{n-2}/3 \quad 2(h_{n-2} + h_{n-1})/3 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} q_{01} & q_{11} & q_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{12} & q_{22} & q_{32} & & \\ 0 & 0 & q_{23} & q_{33} & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & \dots & & q_{n-1, n-1} & q_{nn-1} & \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

para $k = 3$

$$f'''(x) = 6d_i$$

$$f'''(x_i)_- - f'''(x_i)_+ = 6d_i(d_{i-1} - d_i) = 2\rho \left[f(x_i) - y_i \right] / f''_{y_i}$$

sustituyendo d_{i-1} , d_i y $f(x_i)$ obtenemos

$$(c_{i-1} - c_i)/h_{i-1} + (c_{i+1} - c_i)/h_i = 2\rho(y_i - a_i)/\delta_{y_i}^2 \quad i = 0, \dots, n$$

haciendo

$$i = 0$$

$$\frac{c_1}{h_0} = 2\rho(y_0 - a_0)/\delta_{y_0}^2$$

$$i = 1$$

$$c_1/h_0 + (c_2 - c_1)/h_1 = 2\rho(y_1 - a_1)/\delta_{y_1}^2$$

.

.

.

$$i = n$$

$$c_{n-1}/h_{n-1} = 2\rho(y_n - a_n)/\delta_{y_n}^2$$

lo anterior puede ser escrito en forma de matrices, como:

$$(7) \quad Qc = \rho D^{-2}(y - a)$$

con

$$D = \text{diag}(\delta_{y_0}, \dots, \delta_{y_n}), \quad y = (y_0, y_1, \dots, y_n)'$$

multiplicando $Qc = \rho D^{-2}(y - a)$ por $Q' D^2$, obtenemos

$$Q' D^2 Qc = \rho Q' D^2 D^{-2} (y - a)$$

$$Q' D^2 Qc = \rho(Q'y - Q'a)$$

pero por (6) $Tc = Q'a$

$$(8) \quad Q' D^2 Qc + \rho Tc = Q'y$$

por (7) $(y - a) = \rho^{-1} D^2 Qc$

por lo que

$$(9) \quad a = y - \rho^{-1} D^2 Qc$$

Si el valor del parámetro ρ es determinado^{15/}, obtenemos el valor de c en (8) y el de a en (9), lo cual implica conocer también d_i de (4) y b_i de (5).

^{15/} Para la determinación del parámetro de Lagrange ver -
Reinsch, op. cit., p. 179.

3. APLICACION DE LA FUNCION SPLINE EN CURVAS DEMOGRAFICAS

Después de haber examinado en el capítulo anterior - los aspectos teóricos del Spline Cúbico, en el presente - los aplicamos -mediante el Algoritmo de Reinsch- para el suavizamiento de curvas de tipo demográfico, como son: mortalidad, fecundidad y migración. Para ello, utilizamos datos mexicanos en los dos primeros fenómenos: mortalidad y fecundidad; en el caso de migración datos de dos regiones de Yugoslavia.

En mortalidad, las curvas suavizadas fueron las correspondientes a las probabilidades de muerte, a nivel nacional, por sexo y grupos quinquenales de edad, para los años 1940, 1950, 1960 y 1970. Para la fecundidad se procedió a suavizar las curvas que se desprenden de las tasas específicas de fecundidad por edad, a nivel nacional, en los años de 1970, 1971, 1972, 1973 y 1974. Por último en migración, se suavizaron las curvas de las tasas quinquenales de emigración femenina, en Yugoslavia, correspondientes al año 1961.

Los cálculos para el suavizamiento en los tres casos, se realizaron a través del paquete de computación IMSL^{1/}, en el cual se encuentra implementado el algoritmo de Reinsch^{2/}.

^{1/} IMSL Library, Edition 7, Customer Relations, Sixth Floor, GNB Building 7500 Bellaire Boulevard, Houston, Texas - 77036, U. S. A., 1979.

^{2/} La rutina que lo contiene es la llamada ICSSCU, pp. - ICSSCU-1-ICSSCU-4.

3.1 Mortalidad

La aplicación de la función Spline Cúbica en mortalidad, se hizo para suavizar las curvas de probabilidades de muerte: ${}_nq_x$ por sexo y grupos quinquenales de edad para la República Mexicana durante los años 1940, 1950, 1960 y 1970. Los intervalos quinquenales de edad para los cuales suavizamos las probabilidades de muerte, fueron del 10-14 al 80-84 y el 85 y +. Obtuvimos las ${}_nq_x$ a partir de las tasas específicas de mortalidad ${}_nm_x$, observadas (Véase Cuadro 1), por medio de la conocida ecuación de Reed y Merrell^{5/}:

$${}_nq_x = 1 - \exp\{-(n \cdot {}_nm_x + 0.008 \cdot n^3 \cdot {}_nm_x^2)\} \quad (1)$$

donde

${}_nq_x$: probabilidad que tiene una persona de edad exacta x de fallecer antes de alcanzar la edad exacta $x + n$.

Sea ${}_nd_x$ el número de defunciones habidas dentro de las edades x y $x + n$ y l_x el número de sobrevivientes al inicio del intervalo, entonces ${}_nd_x = l(x) - l(x + n)$ y la probabilidad de muerte entre las edades n y $x + n$ es:

$${}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{l_x}$$

${}_nm_x$: tasa específica de mortalidad.

^{1/} Tomando como base los datos de diferentes tablas de mortalidad de Norteamérica para 1910, 1920 y 1930, estos autores llegaron a establecer a través de regresiones lineales que la mejor relación entre las tasas específicas ${}_nm_x$ y las probabilidades de muerte ${}_nq_x$, está dada por la ecuación (1).

Reed y Merrell, Un método rápido para la construcción de una tabla de vida abreviada, CELADE, San José, Costa Rica, 1972 (Serie D-49).

Cuadro 1

MEXICO: TASAS ESPECIFICAS DE MORTALIDAD OBSERVADAS,
MASCULINAS Y FEMENINAS, 1940, 1950, 1960, 1970

Grupos de edad x, x + 4	M A S C U L I N A S				F E M E N I N A S			
	1940	1950	1960	1970	1940	1950	1960	1970
10-14	0.004113	0.002689	0.001155	0.001238	0.003781	0.002395	0.001299	0.000989
15-19	0.006127	0.004276	0.002468	0.002011	0.005857	0.003407	0.001896	0.001372
20-24	0.009303	0.006094	0.003868	0.003273	0.008587	0.004689	0.002997	0.002109
25-29	0.010845	0.006933	0.004885	0.003956	0.009353	0.005643	0.003583	0.002701
30-34	0.012630	0.008348	0.005595	0.004777	0.010395	0.006453	0.004238	0.003416
35-39	0.014709	0.010635	0.007156	0.006245	0.011879	0.007799	0.005368	0.004461
40-44	0.017071	0.011668	0.008322	0.007627	0.013459	0.008449	0.006113	0.005180
45-49	0.020984	0.015473	0.010849	0.009813	0.015860	0.011013	0.007776	0.006719
50-54	0.024181	0.017322	0.013167	0.012696	0.018991	0.012955	0.009764	0.008781
55-59	0.030879	0.024153	0.019121	0.017762	0.024293	0.018657	0.014866	0.013027
60-64	0.041916	0.031409	0.023199	0.023898	0.039463	0.026717	0.020077	0.019245
65-69	0.056677	0.045367	0.036258	0.035111	0.053238	0.040774	0.032254	0.029570
70-74	0.084665	0.066187	0.051915	0.048947	0.084355	0.060262	0.047263	0.043724
75-79	0.109071	0.089083	0.075668	0.073511	0.110159	0.088254	0.072102	0.065176
80-84	0.151433	0.121147	0.098401	0.093190 ^{a/}	0.169685	0.120461	0.098773	0.089322 ^{a/}
85 y +	0.273626	0.232573	0.132656	0.163247 ^{a/}	0.318493	0.261604	0.173868	0.173578 ^{a/}

^{a/} Para 1970 m_{80-84} y m_{85y+} se calcularon como: ${}_5m_x = \frac{{}_5\bar{D}_x}{{}_5\bar{P}_x}$, en donde ${}_5\bar{D}_x$ es el promedio de de-
funciones ocurridas en los años 1969 a 1971 y ${}_5\bar{P}_x$ es la población calculada al 30 de ju-
nio de 1970.

Fuente: para 1940, 1950 y 1960: Benítez, R. y Cabrera, G., Tablas abreviadas de mortalidad de la población de México, El Colegio de México, México, 1967, pp.41-42.
Para 1970: Dirección General de Estadística (DGE), Tablas abreviadas de mortalidad para ocho regiones de México, 1970, SIC, México, 1976, Evaluación y Análisis, Serie III, No. 3, pp. 17-18.

Define el riesgo de fallecer por unidad de tiempo entre las edades x y $x + n$:

$${}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}$$

donde

${}_n L_x$ representa el número de años persona vividos entre las edades x y $x + n$ en la población estacionaria que define la tabla de mortalidad.

En la práctica, la obtención de ${}_n m_x$, es bajo el siguiente supuesto:

$${}_n m_x = \frac{{}_n D_x}{{}_n P_x}$$

donde ${}_n D_x$ son las defunciones habidas entre las edades x y $x + n$ y ${}_n P_x$ es la población media de ese período, que se toma como estimación del tiempo vivido, para las mismas edades.

Calculadas las probabilidades de muerte (ver Cuadro 2), procedimos a suavizarlas^{4/} por sexo y año.

El sistema llevado a cabo para el suavizamiento, en todos los años fue:

1. Transformamos por comodidad las edades x , haciendo:

$$i = \frac{x - 5}{5}, \quad x: 10, 15, \dots, 80, 85$$

por lo cual obtuvimos: $i = 1, 2, \dots, 16$

2. Dimos tres niveles de suavizamiento, por cada grupo de edad $\delta_{y_i}^n$, $i = 1, \dots, 16$; $n = 1, 2, 3$, los cuales fueron calculados a partir de las probabi-

^{4/} Los cálculos fueron hechos a través de la rutina ICSSCU, en la cual se encuentra implementada el algoritmo de Reinsch. Para la utilización de la rutina ver Anexo 1.

Cuadro 2

MEXICO: PROBABILIDADES DE MUERTE MASCULINAS Y FEMENINAS, 1940, 1950, 1960, 1970^{a/}

Grupos de edad x, x + 4	M A S C U L I N A S				F E M E N I N A S			
	1940	1950	1960	1970	1940	1950	1960	1970
10-14	0.020372	0.018714	0.013362	0.011909	0.007747	0.006476	0.006172	0.004934
15-19	0.030207	0.028894	0.021171	0.016902	0.012270	0.009439	0.010009	0.006838
20-24	0.045532	0.042097	0.030047	0.023194	0.019169	0.014882	0.016242	0.010494
25-29	0.052892	0.045772	0.034118	0.027852	0.024152	0.017768	0.019601	0.013421
30-34	0.061347	0.050750	0.040948	0.031790	0.027618	0.020985	0.023624	0.016946
35-39	0.071107	0.057799	0.051893	0.038303	0.035197	0.026511	0.030780	0.022078
40-44	0.082081	0.065250	0.056799	0.041434	0.040823	0.030139	0.037473	0.025594
45-49	0.099999	0.076470	0.074670	0.053691	0.052912	0.038192	0.047972	0.033081
50-54	0.114400	0.090914	0.083240	0.062879	0.063877	0.047738	0.061658	0.043029
55-59	0.143883	0.114900	0.114275	0.089383	0.091509	0.071840	0.085269	0.063218
60-64	0.190499	0.180346	0.146177	0.125671	0.109999	0.095875	0.113134	0.092077
65-69	0.249186	0.235875	0.204587	0.185786	0.166903	0.149823	0.162042	0.138193
70-74	0.349812	0.348769	0.284888	0.262834	0.230697	0.212230	0.218962	0.197908
75-79	0.427219	0.430462	0.364505	0.361771	0.318913	0.306295	0.311306	0.281168
80-84	0.541638	0.584062	0.462277	0.460340	0.394492	0.395662	0.377888	0.365291
85 y +	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

^{a/} Calculadas a partir de la fórmula de Reed y Merrell (véase el texto).

lidades de muerte, de la siguiente forma: cada $q_x^{5/}$ fue multiplicada por "un tanto por uno" esperado de alejamiento (t_x^n , $i = 1, \dots, 16$; $n = 1, 2, 3$), definiendo ésto el valor de $\delta_{y_i}^n$, es decir:

$$\delta_{y_i}^n = t_x^n \cdot q_x^n; n = 1, 2, 3; i = 1, \dots, 16$$

los valores de t_x^n para $n = 1, 2, 3$.

$$t_x^1 = 0.1 \quad t_x^2 = 0.2 \quad t_x^3 = 0.3 \quad i = 1, \dots, 16$$

3. Para el suavizamiento general (S) se dieron tres valores por cada t_x^n , los cuales fueron:

$$S^1 = 0.10 \quad S^2 = 0.16 \quad S^3 = 0.21^{6/}$$

Obtenidas las curvas suavizadas por sexo, para todos los años, se graficaron para decidir sobre el "mejor suavizamiento", el cual debería ser aquel que no tuviera "picos".

El "mejor suavizamiento", en todos los casos se produjo con:

$$S = 0.21 \text{ y } t_x^3 = 0.1 \quad i = 1, \dots, 16$$

El Cuadro 3 muestra los valores de δ_{y_i} ($i = 1, \dots, 16$) - obtenidos a través de $t_x^3 = 0.1$ por sexo y años: 1940, 1950, 1960 y 1970 y el Cuadro 4 contiene los valores por sexo - de las ${}_5q_x$ que resultaron del "mejor suavizamiento" para

^{5/} Recordemos que esta i es simple notación, debido a la transformación de las x ($x = 10, 15, \dots, 80, 85$), por lo que cada q_x sigue siendo quinquenal.

^{6/} Trabajamos también con valores iguales y mayores que 1: 1.0, 1.6, 2.1, 10, 16, 21; pero dado que los valores "suavizados" que obtuvimos, se alejaban demasiado de los observados decidimos no incluirlos.

Cuadro 3

VALORES DE $\delta_{y_i}^{a/}$ PARA HOMBRES Y MUJERES, 1940, 1950, 1960, 1970 ($t_i = 0.10$)^{a/}

Grupos de edad x, x + 4	H O M B R E S				M U J E R E S			
	$\delta_{y_i}^{1940}$	$\delta_{y_i}^{1950}$	$\delta_{y_i}^{1960}$	$\delta_{y_i}^{1970}$	$\delta_{y_i}^{1940}$	$\delta_{y_i}^{1950}$	$\delta_{y_i}^{1960}$	$\delta_{y_i}^{1970}$
10-14	0.002037	0.001874	0.001336	0.001191	0.000775	0.000648	0.000617	0.000493
15-19	0.003021	0.002889	0.002117	0.001690	0.001227	0.000944	0.001010	0.000684
20-24	0.004553	0.004210	0.003005	0.002319	0.001917	0.001488	0.001624	0.001049
25-29	0.005289	0.004577	0.003412	0.002785	0.002415	0.001777	0.001960	0.001342
30-34	0.006135	0.005075	0.004095	0.003179	0.002762	0.002099	0.002362	0.001695
35-39	0.007111	0.005780	0.005189	0.003830	0.003520	0.002651	0.003078	0.002208
40-44	0.008208	0.006525	0.005680	0.004143	0.004082	0.003014	0.003747	0.002559
45-49	0.010000	0.007647	0.007467	0.005369	0.005291	0.003819	0.004797	0.003308
50-54	0.011440	0.009091	0.008324	0.006288	0.006388	0.004774	0.006166	0.004303
55-59	0.014388	0.011490	0.011428	0.008938	0.009151	0.007184	0.008527	0.006322
60-64	0.019050	0.018035	0.014618	0.012567	0.010999	0.009588	0.011313	0.009208
65-69	0.024919	0.023588	0.020459	0.018579	0.016690	0.014982	0.016204	0.013819
70-74	0.034981	0.034877	0.028489	0.026283	0.023070	0.021223	0.021896	0.019791
75-79	0.042722	0.043046	0.036451	0.036177	0.031891	0.030630	0.031131	0.028117
80-84	0.054164	0.058406	0.046228	0.046034	0.039449	0.039566	0.037789	0.036529
85 y +	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000

$$\frac{a/}{i} = \frac{x - 5}{5}$$

todos los años.

Posteriormente presentamos las gráficas de las probabilidades de muerte observadas y suavizadas (definitivas), por sexo y año.

3.2 Fecundidad

Para este fenómeno procedimos a suavizar las curvas de las tasas específicas de fecundidad (${}_n f_x$), las cuales representan el número medio de nacimientos anuales por mujer entre las edades x y $x + n$:

$${}_n f_x = \frac{{}_n B_x}{{}_n P_x^f}$$

donde ${}_n B_x$ son los nacidos vivos registrados en un año, de madres cuyas edades están entre x y $x + n$; y ${}_n P_x^f$ es la población femenina cuyas edades están entre x y $x + n$, estimadas al 30 de junio de ese mismo año.

Las tasas que decidimos suavizar son las correspondientes a México por grupos quinquenales de edad -del 15-19 al 45-49- para los años 1970, 1971, 1972, 1973 y 1974; para ello procedimos a calcularlas tomando los datos de un estudio de la Dirección General de Estadística^{7/}.

Dado que los datos (para todos los años) agrupan las edades 40-49, para encontrar los grupos 40-44 y 45-49, se procedió de la siguiente manera:

^{7/} Véase: Dirección General de Estadística (DGE), Los niveles de la fecundidad en México, 1960-1970, SPP, México, 1978, Estadísticas Vitales, Serie I, No. 3, pp. 15-19.

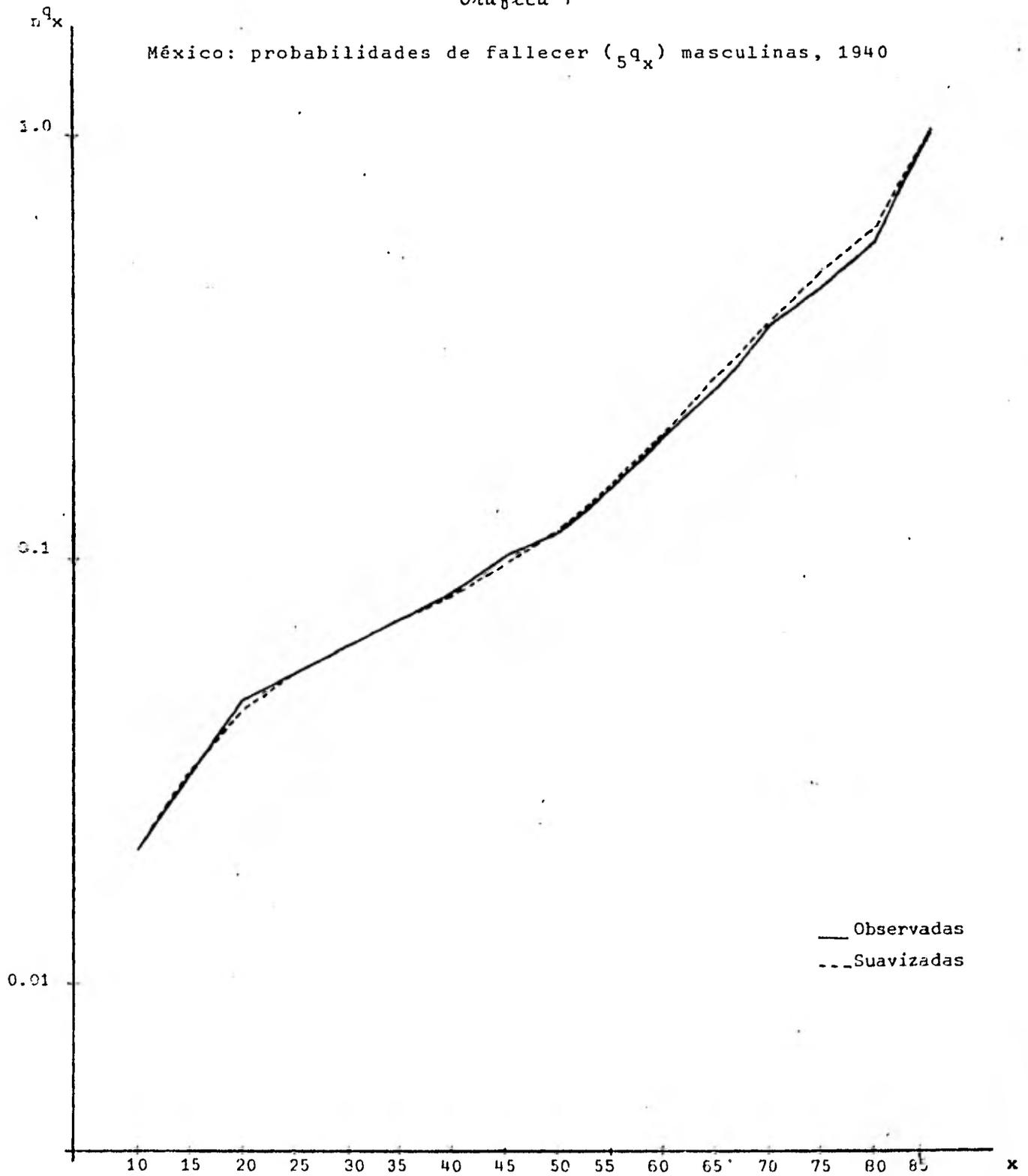
Cuadro 4

MEXICO: PROBABILIDADES DE MUERTE MASCULINAS Y FEMENINAS, SUAVIZADAS POR LA FUNCION
 SPLINE CUBICA, 1940, 1950, 1960, 1970 (S = 0.21, τ_{λ} = 0.10)^{a/}

Grupos de edad x, x + 4	M A S C U L I N A S				F E M E N I N A S			
	1940	1950	1960	1970	1940	1950	1960	1970
10-14	0.020258	0.018709	0.013354	0.011903	0.007746	0.006474	0.006171	0.004933
15-19	0.031104	0.029610	0.021275	0.016944	0.012283	0.009449	0.010018	0.006840
20-24	0.043750	0.040093	0.029704	0.023123	0.019150	0.014855	0.016216	0.010490
25-29	0.053358	0.046463	0.034366	0.027811	0.024110	0.017774	0.019608	0.013421
30-34	0.061689	0.051385	0.041262	0.032047	0.027746	0.021028	0.023660	0.016962
35-39	0.070894	0.057010	0.050694	0.037681	0.034952	0.026396	0.030696	0.022031
40-44	0.081986	0.064105	0.058675	0.042364	0.041166	0.030289	0.037565	0.025655
45-49	0.096201	0.074368	0.071747	0.052180	0.052239	0.037880	0.047810	0.032972
50-54	0.116006	0.092646	0.086227	0.064382	0.065248	0.048420	0.062005	0.043191
55-59	0.147497	0.126296	0.110849	0.087864	0.088291	0.070233	0.084533	0.062990
60-64	0.196650	0.180853	0.147479	0.125737	0.114205	0.098103	0.114240	0.092575
65-69	0.266616	0.256926	0.203846	0.184557	0.160102	0.143969	0.156981	0.135045
70-74	0.358458	0.353335	0.288243	0.272661	0.228219	0.212793	0.217597	0.193304
75-79	0.470185	0.466638	0.408693	0.398390	0.339177	0.328359	0.322969	0.295305
80-84	0.597930	0.592275	0.569188	0.563680	0.519763	0.514521	0.505654	0.485195
85 y +	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

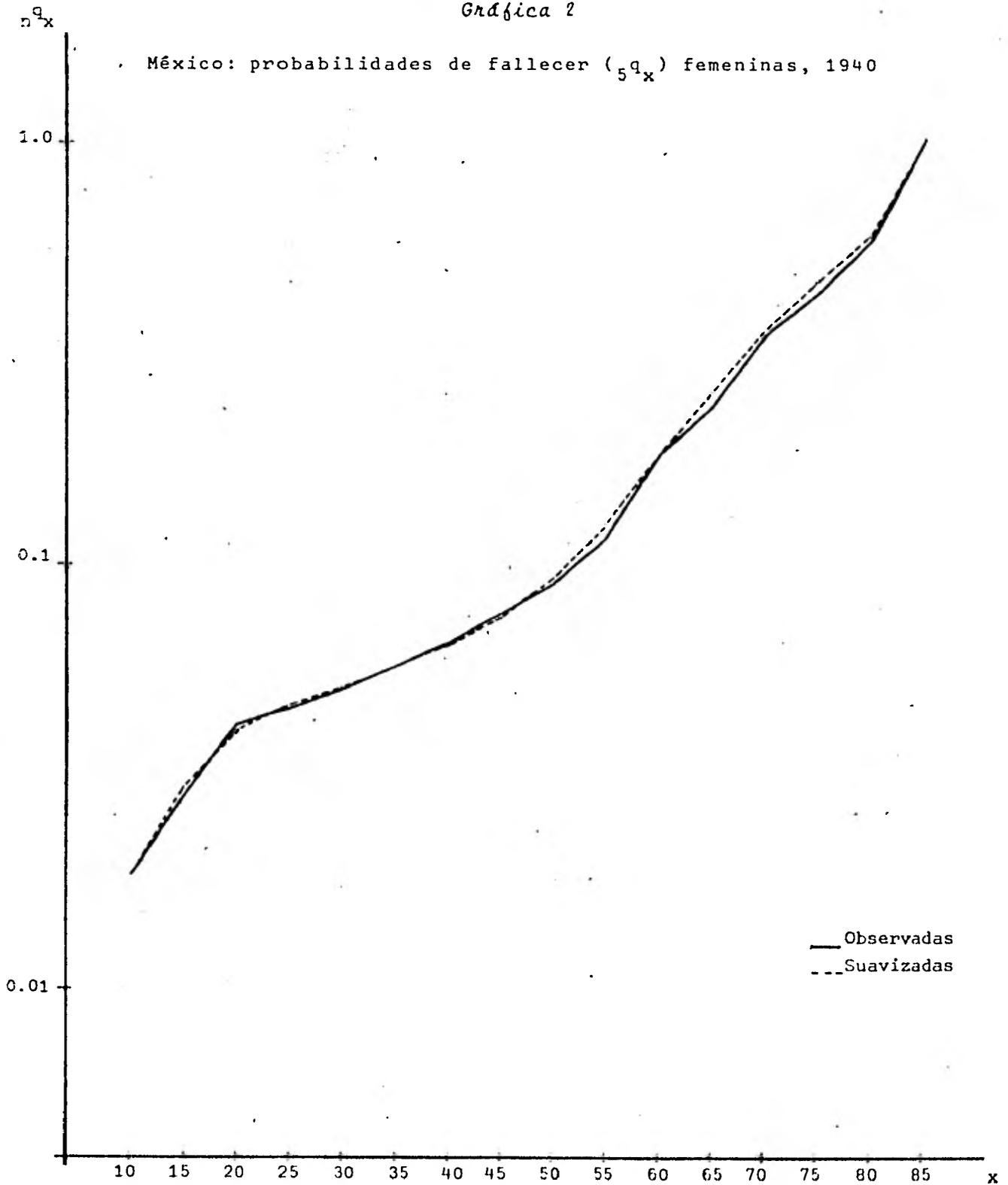
^{a/} Para la interpretación de estos parámetros véase el texto.

Gráfica 1



Fuente: Cuadro 2 y Cuadro 4.

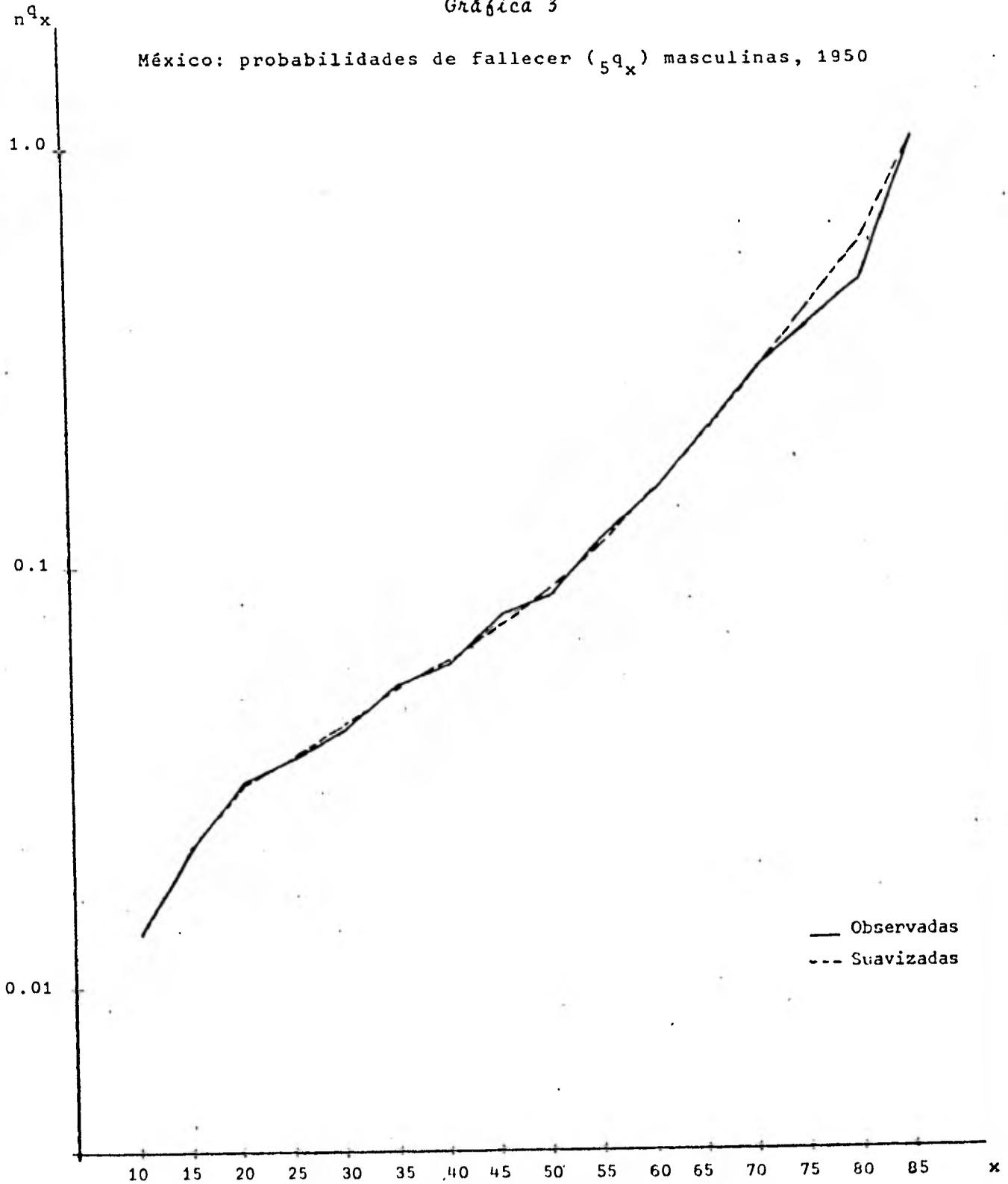
Gráfica 2



Fuente: Cuadro 2 y Cuadro 4.

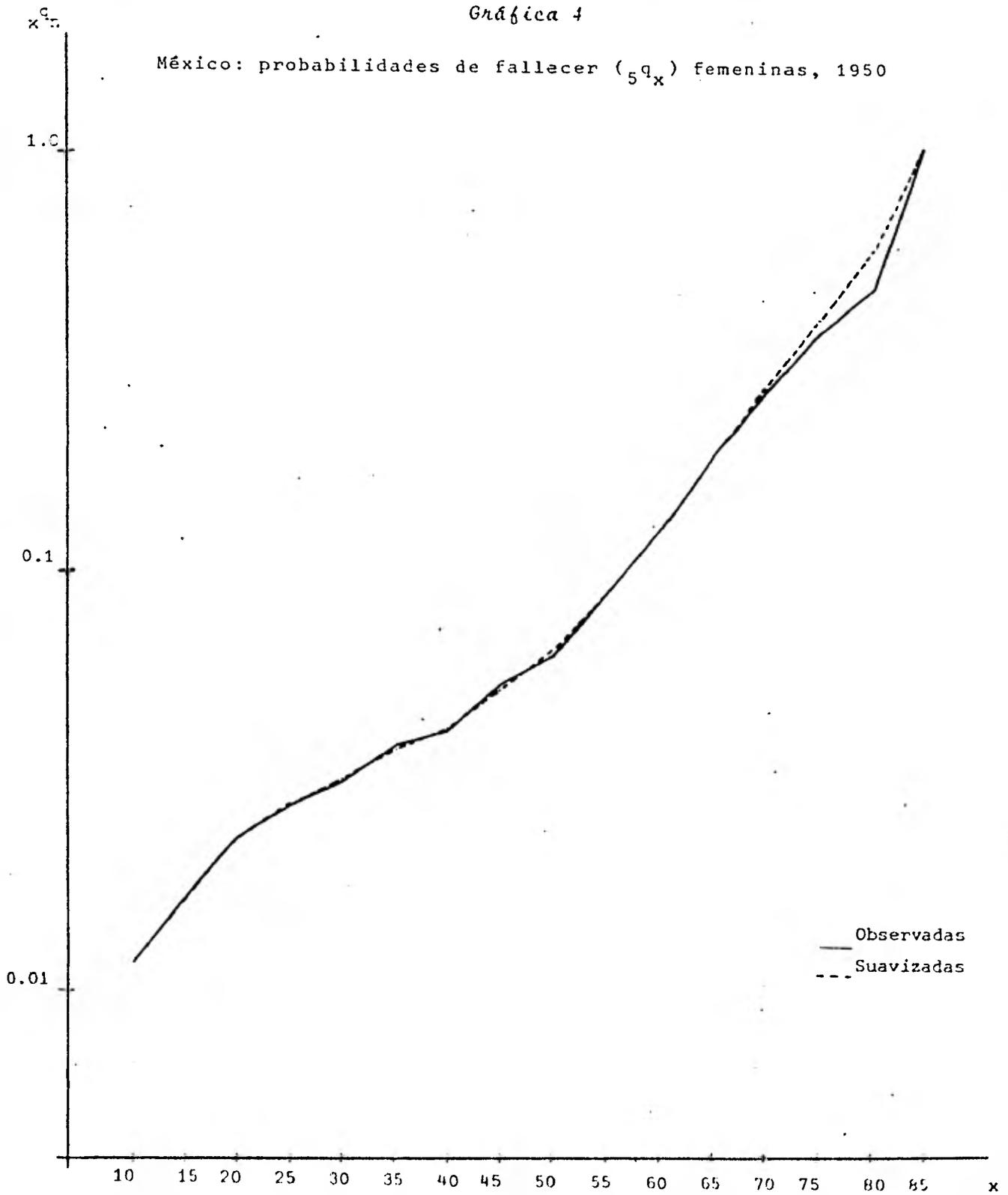
Gráfica 3

México: probabilidades de fallecer (${}_5q_x$) masculinas, 1950



Fuente: Cuadro 2 y Cuadro 4.

Gráfica 4

México: probabilidades de fallecer (${}_5q_x$) femeninas, 1950

Fuente: Cuadro 2 y Cuadro 4..

Gráfica 6

 n^a_x México: probabilidades de fallecer (${}_5q_x$) femeninas, 1960

1.0

0.1

0.01

— Observadas

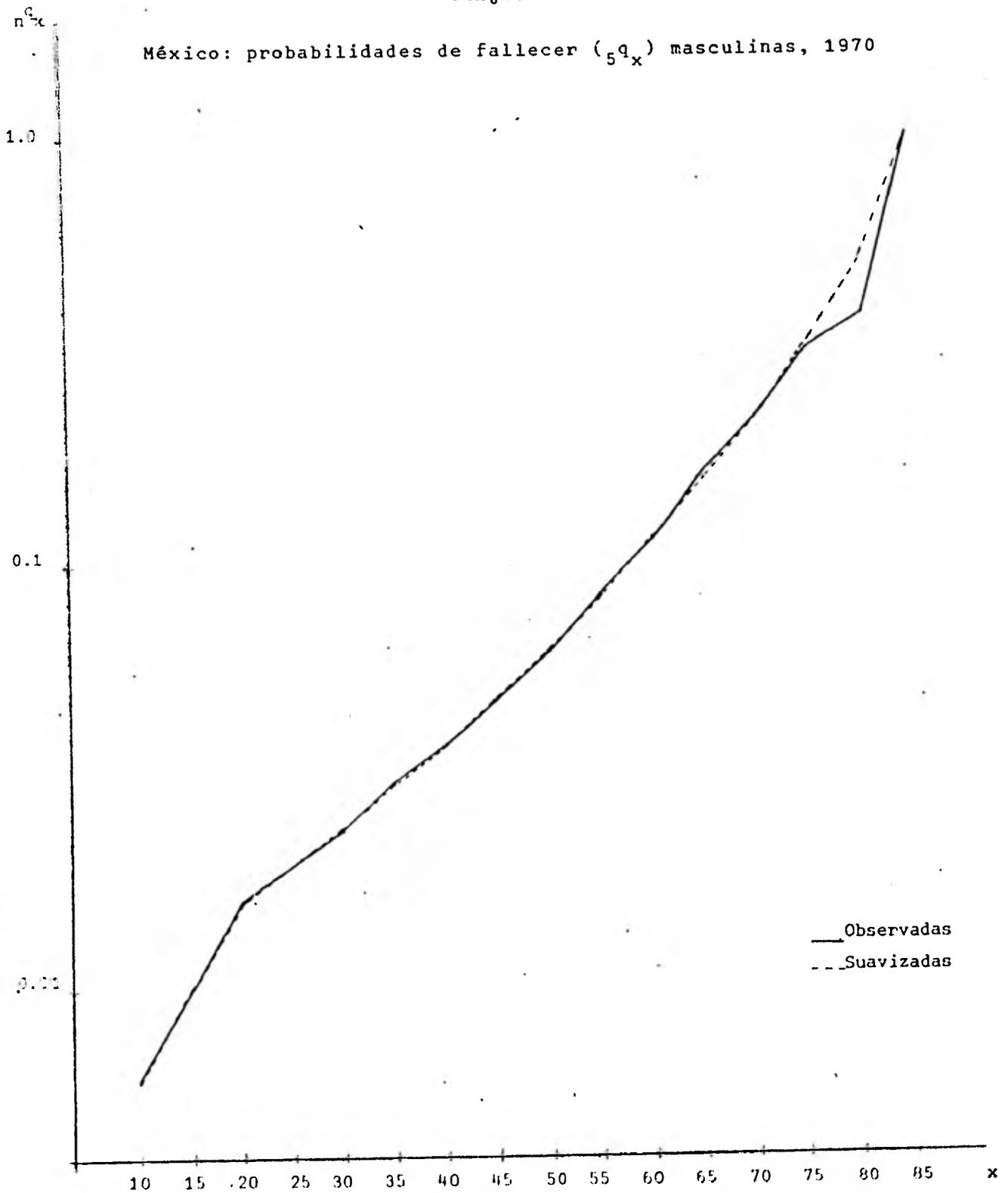
--- Suavizadas

10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 x

Fuente: Cuadro 2 y Cuadro 4.

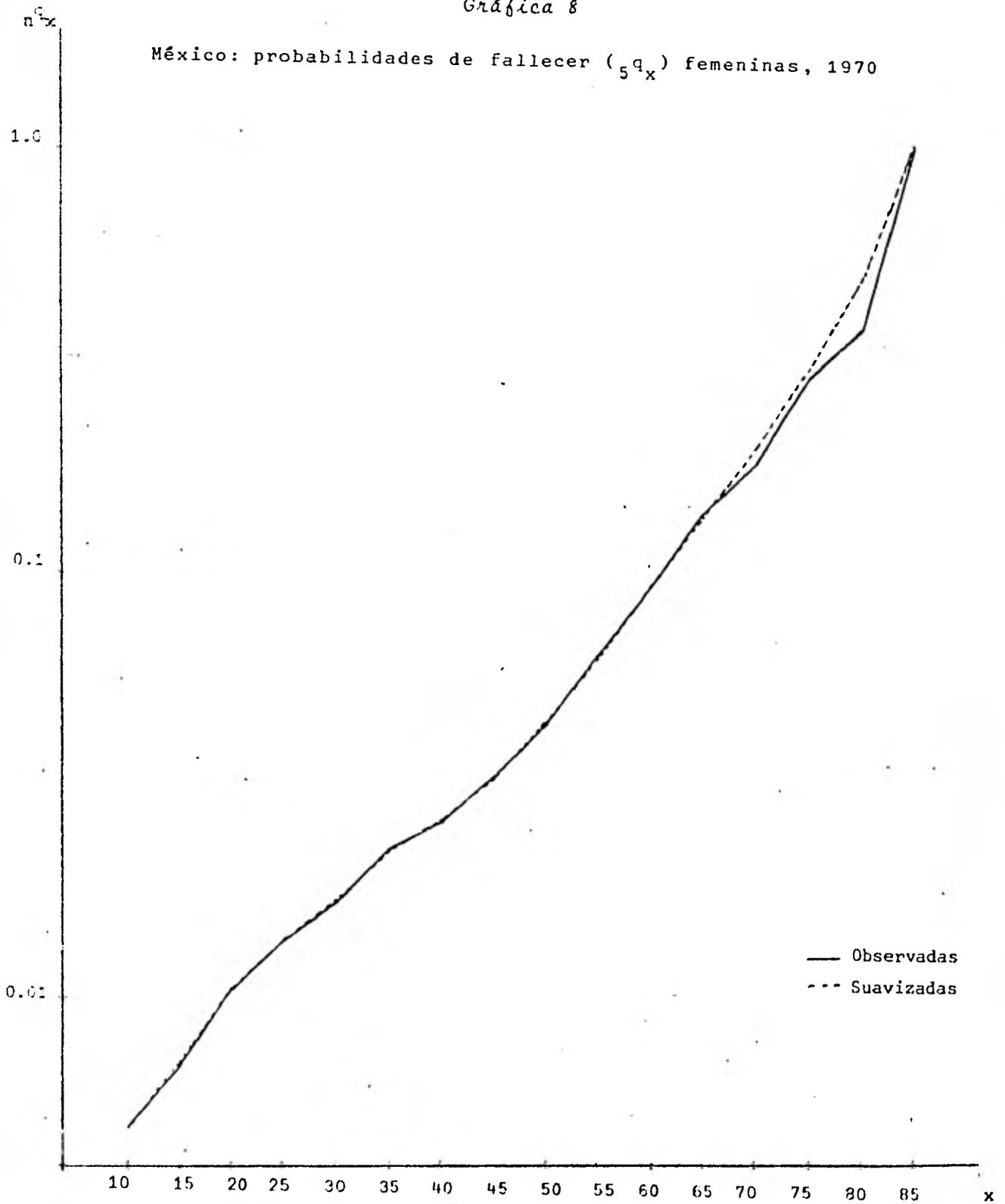


Gráfica 7

México: probabilidades de fallecer (${}_5q_x$) masculinas, 1970

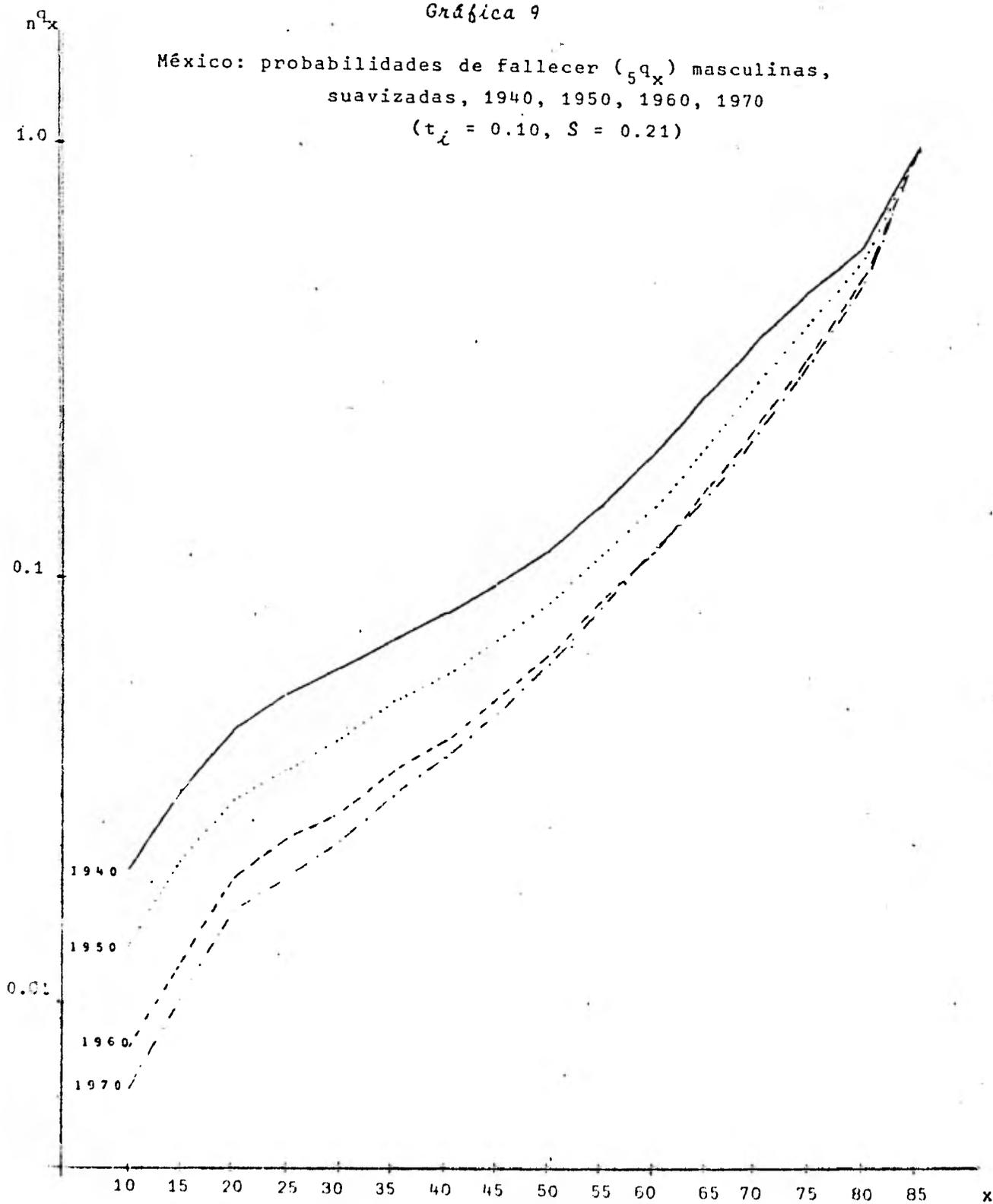
Fuente: Cuadro 2 y Cuadro 4.

Gráfica 8

México: probabilidades de fallecer (${}_5q_x$) femeninas, 1970

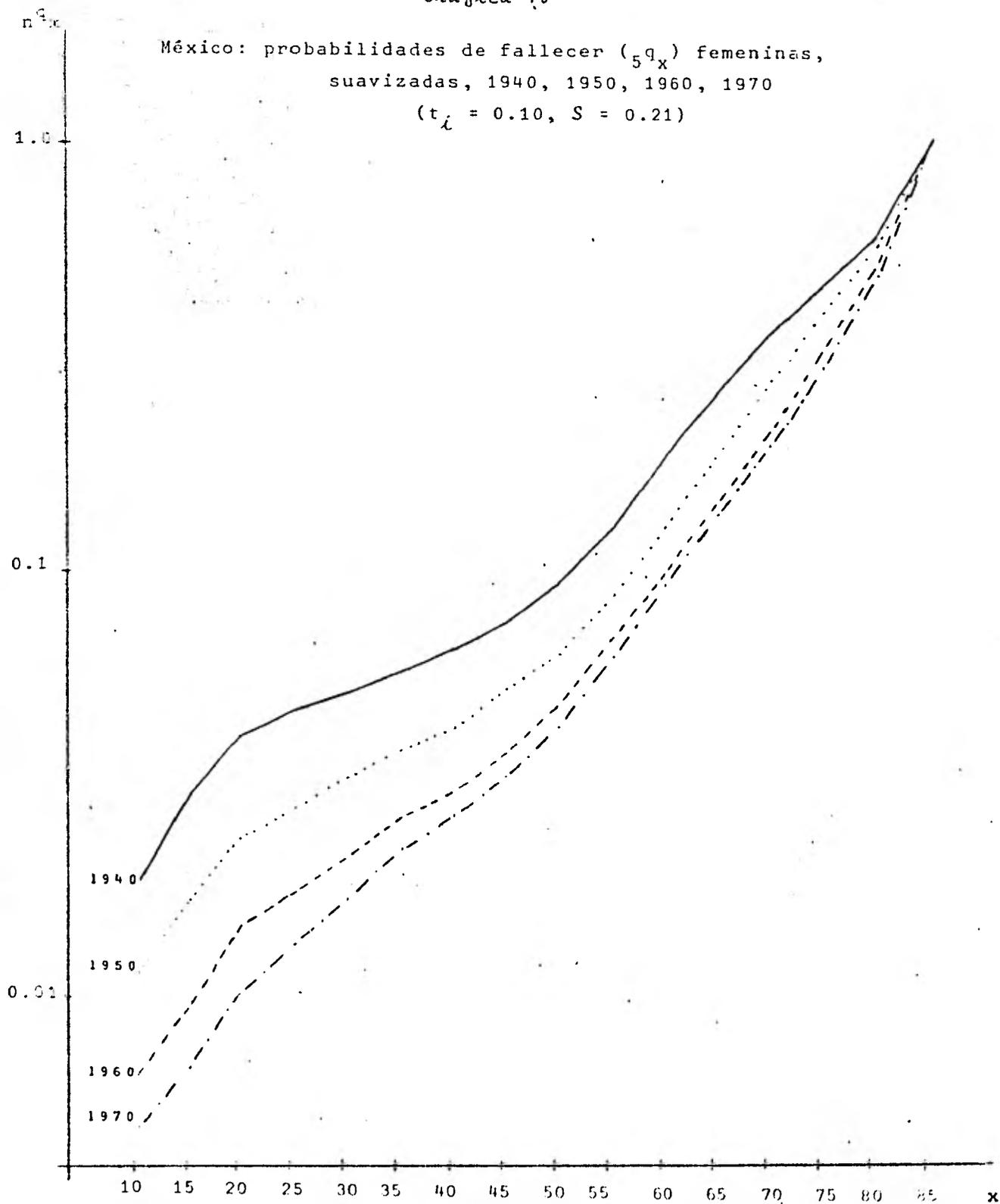
Fuente: Cuadro 2 y Cuadro 4.

Gráfica 9



Fuente: Cuadro 4.

Gráfica 10



Fuente: Cuadro 4.

tomamos ${}_5f_{40} / {}_5f_{45} = k$

pero por definición de tasa específica de fecundidad

$$({}_5B_{40} / {}_5P_{40}^f) / ({}_5B_{45} / {}_5P_{45}^f) = k$$

Siendo

$$Z \cdot {}_{10}B_{40} = {}_5B_{40}$$

$$Y \quad (1-Z) \cdot {}_{10}B_{40} = {}_5B_{45}$$

$$\text{entonces } Z / {}_5P_{40}^f = (1-Z) k / {}_5P_{45}^f$$

$$\text{despejando } Z = (k / {}_5P_{45}^f) / (1 / {}_5P_{40}^f + k / {}_5P_{45}^f)$$

El valor de k para el cálculo de Z , fue $k = 2$, ya que de acuerdo a los datos obtenidos de la Encuesta Mexicana de Fecundidad, se encontró que ${}_5f_{40} = 2 \cdot {}_5f_{45}^{\frac{8}{}}$.

Las poblaciones ${}_5P_{40}$ y ${}_5P_{45}$ para 1971-1974 fueron encontradas por interpolación geométrica a partir de las de 1970 y 1975^{9/}. Halladas las poblaciones para 1971-1974 - procedimos a calcular Z , ${}_5B_{40}$, ${}_5B_{45}$, ${}_5f_{40}$ y ${}_5f_{45}$, correspondientes a cada uno de los años de estudio: 1970, 1971, 1972, 1973, 1974^{10/}.

El Cuadro 5 muestra las ${}_5f_x$ ($15 \leq x \leq 45$) observadas. Teniendo las tasas, procedimos a suavizarlas utilizando - para todos los años (1970 a 1974) el siguiente sistema:

1. Transformación de las edades x de la forma:

$$i = \frac{x - 10}{5}; \quad x = 15, 20, \dots, 40, 45$$

obteniendo entonces para cada año, siete datos.

^{8/} Secretaría de Programación y Presupuesto (SPP), Encuesta Mexicana de Fecundidad, Vol. I, CGSNI, México, 1979, p. 138.

^{9/} Para el cálculo de las poblaciones ver Anexo 2.

^{10/} Véase Anexo 2.

2. El nivel de suavizamiento por edad (δ_{y_i} ; $i = 1, \dots, 7$),

fue dado por:

$$\delta_{y_i} = t_i \cdot f_i \quad i = 1, \dots, 7$$

donde: t_i , indica "un tanto por uno" esperado de alejamiento y f_i , es la tasa de fecundidad por edad.

Los valores de t_i ($i = 1, \dots, 7$) con los que trabajamos fueron:

$$t_i^1 = 0.10; \quad t_i^2 = 0.20$$

3. Para el nivel de suavizamiento general (S) dimos cinco valores:

$$\begin{array}{lll} S^1 = 0.11 & S^2 = 0.12 & S^3 = 0.135 \\ S^4 = 0.16 & S^5 = 0.21 & \end{array}$$

Por lo tanto obtuvimos diez curvas suavizadas para cada año, de las cuales "la mejor comportada", fue para $t_i = 0.10$ y $S = 0.135$ ($i = 1, \dots, 7$). El Cuadro 6 contiene los valores de δ_{y_i} , Para $t_i = 0.10$ ($i = 1, \dots, 7$).

Dado que al suavizar nosotros sólo pretendimos corregir la estructura por edad de las tasas específicas de fecundidad y no la descendencia final de las mujeres (dada

por $\sum_{x=15}^{45} 5 \cdot f_{x, x+4}$), las tasas suavizadas (mejor comportadas) para todos los años fueron multiplicadas por la siguiente proporción (véase Cuadro 7):

$$\frac{\sum_{x=15}^{45} 5 \cdot f_{x, x+4}^{(o)}}{\sum_{x=15}^{45} 5 \cdot f_{x, x+4}^{(s)}}$$

Cuadro 5

MEXICO: TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD,
OBSERVADAS 1970, 1971, 1972, 1973, 1974

Grupos de edad	1970	1971	1972	1973	1974
15-19	0.087869	0.093791	0.100369	0.121481	0.121923
20-24	0.281610	0.285612	0.288382	0.319432	0.315396
25-29	0.309808	0.311894	0.310525	0.330751	0.316010
30-34	0.246278	0.247085	0.253678	0.254277	0.244634
35-39	0.209734	0.206480	0.212450	0.210857	0.201370
40-44	0.100479	0.099050	0.098567	0.072267	0.073654
45-49	0.050239	0.049525	0.049280	0.036130	0.036827

Fuente: a) tasas de fecundidad de 15-19 a 35-39 fueron calculadas con datos de: Dirección General de Estadística (DGE), Los niveles de la fecundidad en México, 1960-1974, SPP, México, 1978, Estadísticas Vitales, Serie I, No. 3, pp. 15-19.

b) Para las tasas 40-44 y 45-49 véase Anexo 2.

Cuadro 6

VALORES DE $\delta_{y_i}^{a/}$, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974

($t_i = 0.10$)

Grupos de edad	1970	1971	1972	1973	1974
15-19	0.008787	0.009379	0.010037	0.012148	0.012192
20-24	0.028161	0.028561	0.028838	0.031943	0.031540
25-29	0.030981	0.031189	0.031053	0.033075	0.031601
30-34	0.024628	0.024709	0.025368	0.025428	0.024463
35-39	0.020973	0.020648	0.021245	0.021086	0.020137
40-44	0.010048	0.009905	0.009857	0.007227	0.007365
45-49	0.005024	0.004953	0.004928	0.003613	0.003683

$$\frac{a/}{i} = \frac{x - 5}{5}$$

Cuadro 7

PROPORCIONES, PARA OBTENER LAS TASAS SUAVIZADAS
DEFINITIVAS, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974

Años	$\sum_{x=15}^{45} 5 \cdot \frac{(o) a/}{f(x) x, x + 4}$	$\sum_{x=15}^{45} 5 \cdot \frac{(s) b/}{f(x) x, x + 4}$	
	(1)	(2)	$\frac{(1)}{(2)}$
1970	6.430090	5.824750	1.103925
1971	6.467185	5.859770	1.103659
1972	6.566250	5.948430	1.103863
1973	6.725975	6.077375	1.106724
1974	6.549070	5.936640	1.103161

a/ Tasas observadas.

b/ Tasas suavizadas.

donde $f_{x, x+4}^{(o)}$ son las tasas específicas observadas y $f_{x, x+4}^{(s)}$ son las tasas suavizadas (mejor comportadas). Este último ajuste se hizo para cada año. Las tasas obtenidas mediante el procedimiento anterior, fueron consideradas las definitivas (ver Cuadro 8).

Las gráficas 11 a 15 muestran las tasas observadas y tasas definitivas para los años 1970, 1971, 1972, 1973 y 1974.

3.3 Migración

Ya que nuestro objetivo es presentar la aplicación de la función Spline Cúbica para suavizar curvas de tipo demográfico, y que para México no contamos con información acerca de este último fenómeno para calcular tasas de migración, decidimos tomar datos de un país que permitiera calcularlas. Es por esto que la curva que suavizamos proviene de datos de tasas femeninas por grupos de edad quinquenales de emigración para dos regiones de Yugoslavia en el año de 1961 (véase Cuadro 9). Esta curva contiene 18 grupos quinquenales de edad: del 0-4 al 80-84 y el 85 y +.

Definamos que es una tasa de emigración por grupo de edad ($n M_x^{ij}$)

$$n M_x^{ij} = \frac{n P_x^{ij}}{n P_x^i}$$

donde $n P_x^{ij}$ es la población de inviduidas entre la edad x y $x+n$ que emigran de la zona i a la zona j ; $n P_x^i$ es la po-

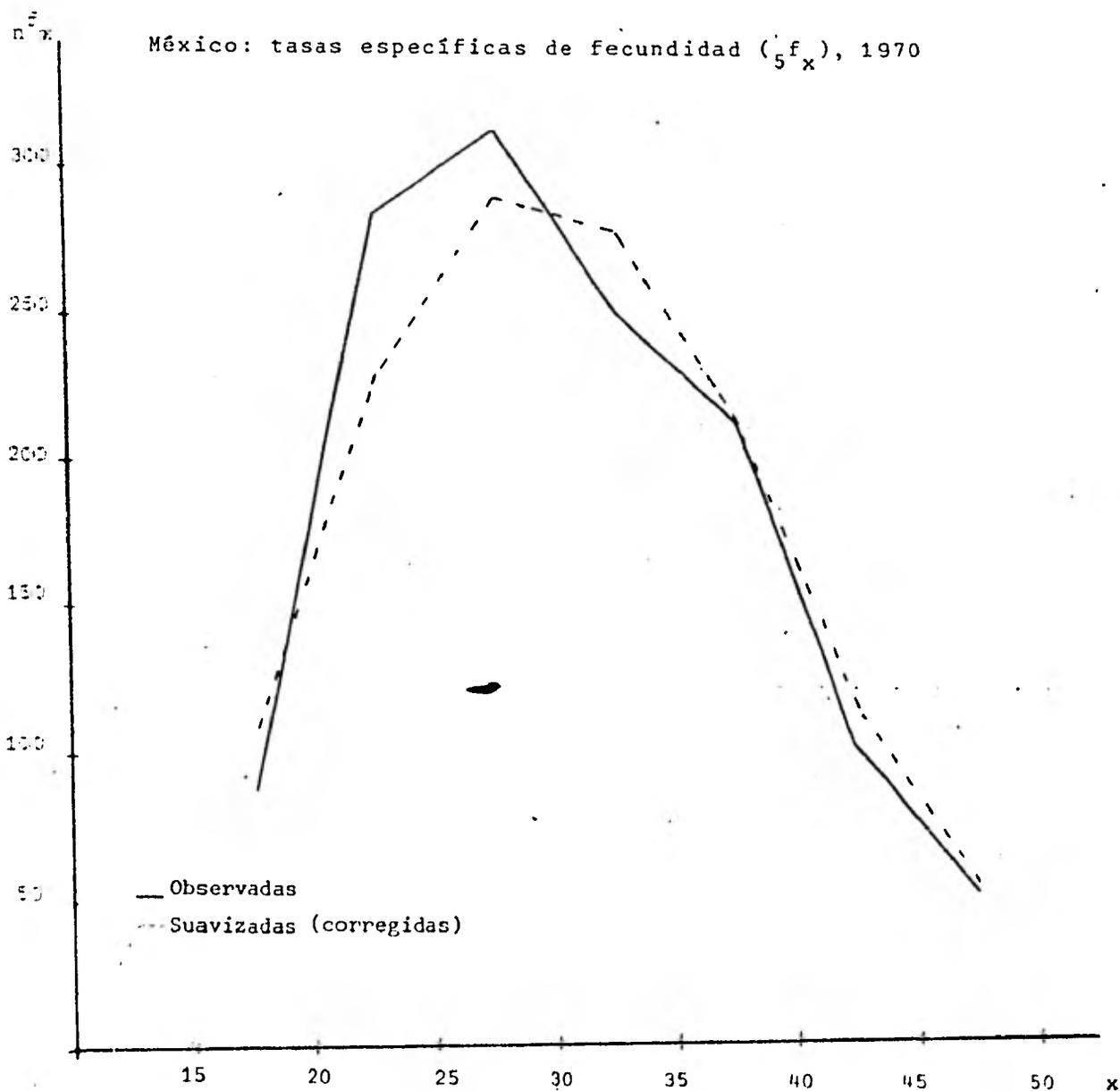
Cuadro 8

MEXICO: TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD SUAVIZADAS POR LA FUNCION SPLINE CUBICA (${}_5f_x^s$) Y
 TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD DEFINITIVAS (${}_5f_x^d$), 1970, 1971, 1972, 1973, 1974
 ($S = 0.135$, $t_i = 0.10$)^{a/}

Grupos de edad	1970		1971		1972		1973		1975	
	${}_5f_x^s$	${}_5f_x^d$								
15-19	0.096457	0.106481	0.103613	0.114353	0.110803	0.122311	0.133254	0.147475	0.153198	0.149145
20-24	0.206416	0.227868	0.209672	0.231406	0.212972	0.235092	0.243010	0.268945	0.235888	0.260222
25-29	0.260813	0.287918	0.261400	0.288496	0.263437	0.290798	0.288209	0.318968	0.276584	0.305117
30-34	0.248981	0.274856	0.247981	0.273686	0.250718	0.276758	0.257860	0.285380	0.247728	0.273284
35-39	0.190499	0.210297	0.188727	0.208290	0.191280	0.211147	0.176097	0.194891	0.171758	0.189477
40-44	0.112876	0.124606	0.111689	0.123267	0.112612	0.124308	0.082118	0.090881	0.084252	0.092944
45-49	0.048909	0.053992	0.048871	0.053937	0.047865	0.052836	0.034928	0.038656	0.035920	0.039626

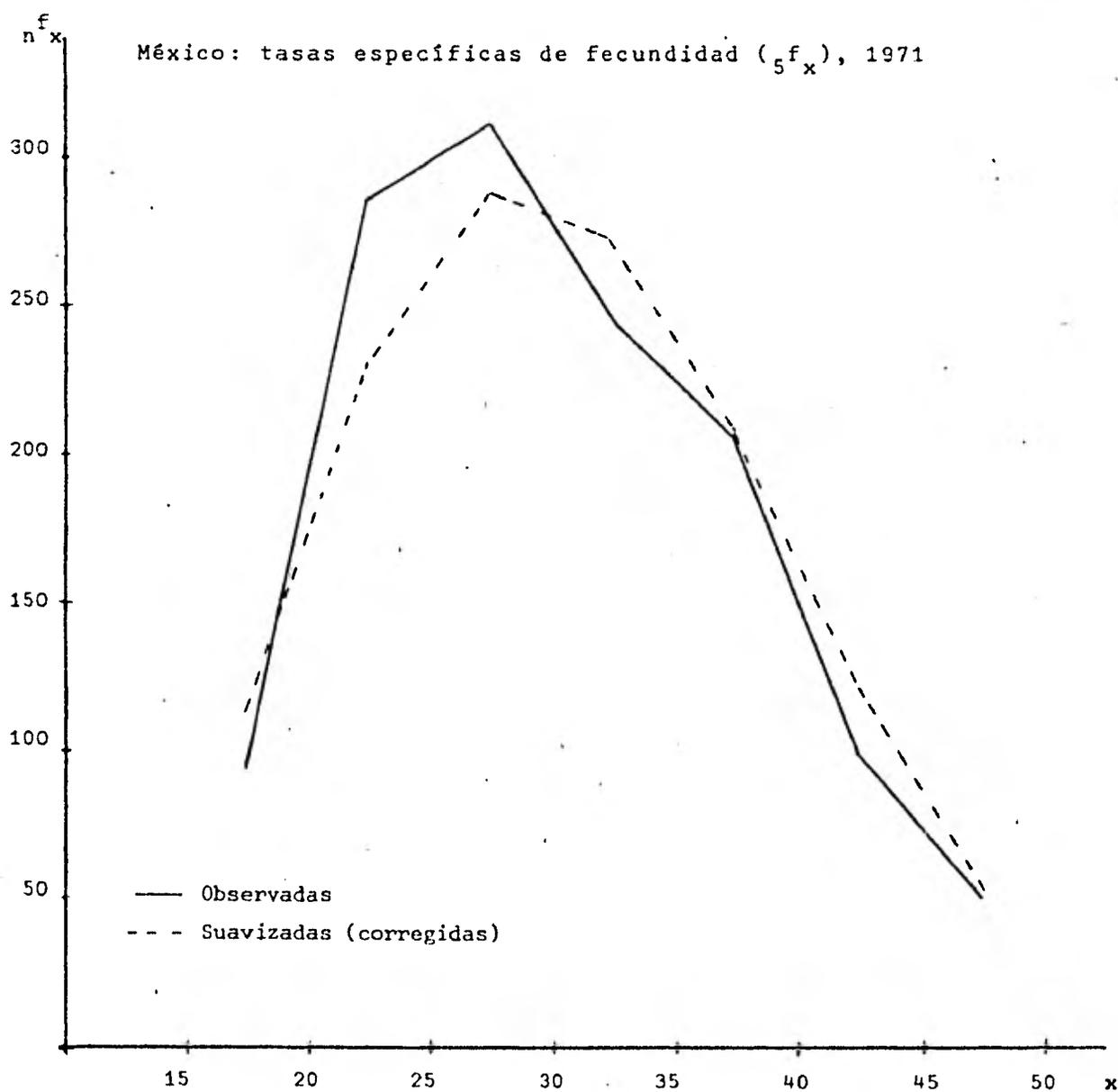
^{a/} Para la interpretación de éstos parámetros véase texto.

Gráfica 11



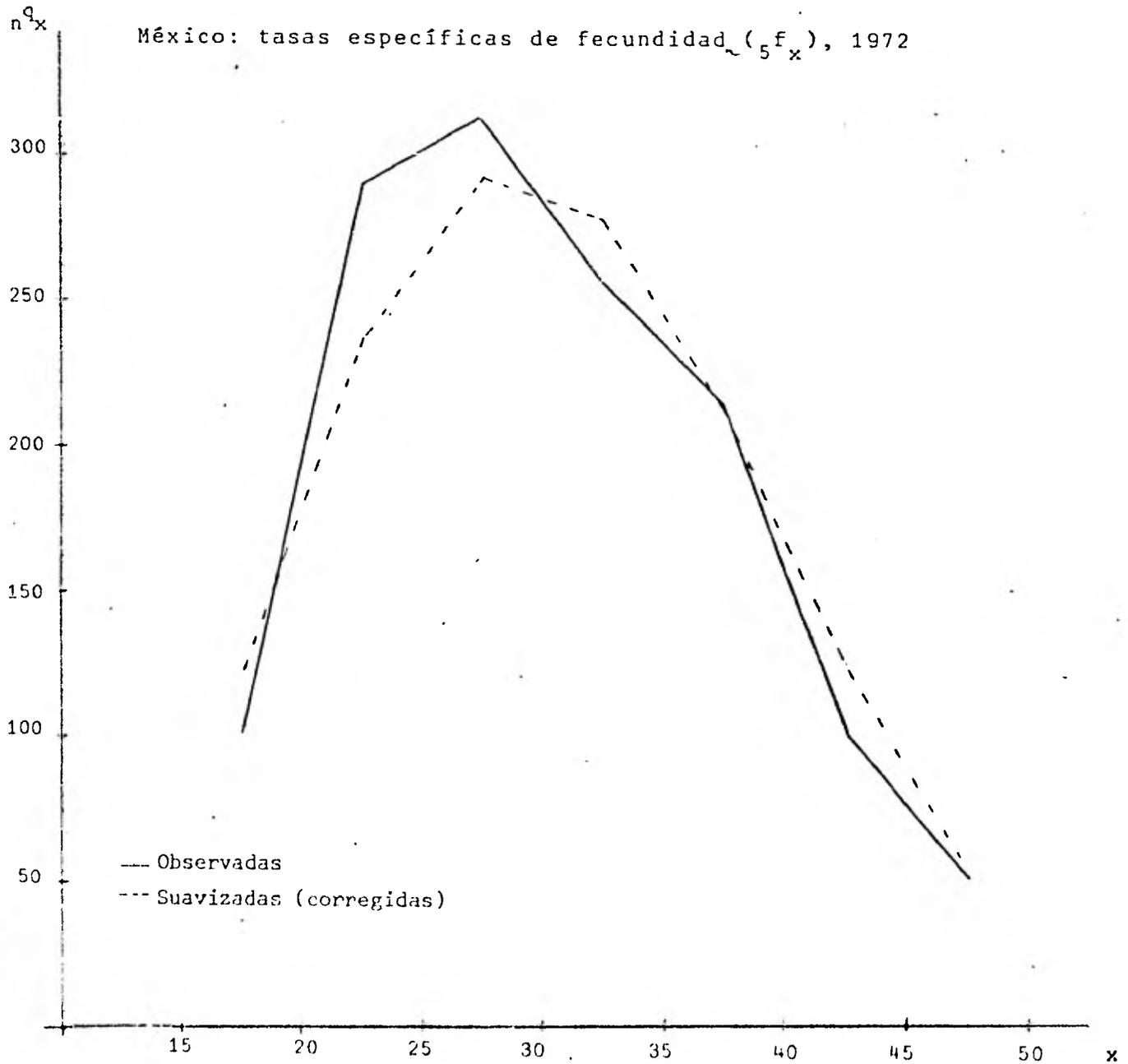
Fuente: Cuadro 5 y Cuadro 8.

Gráfica 12



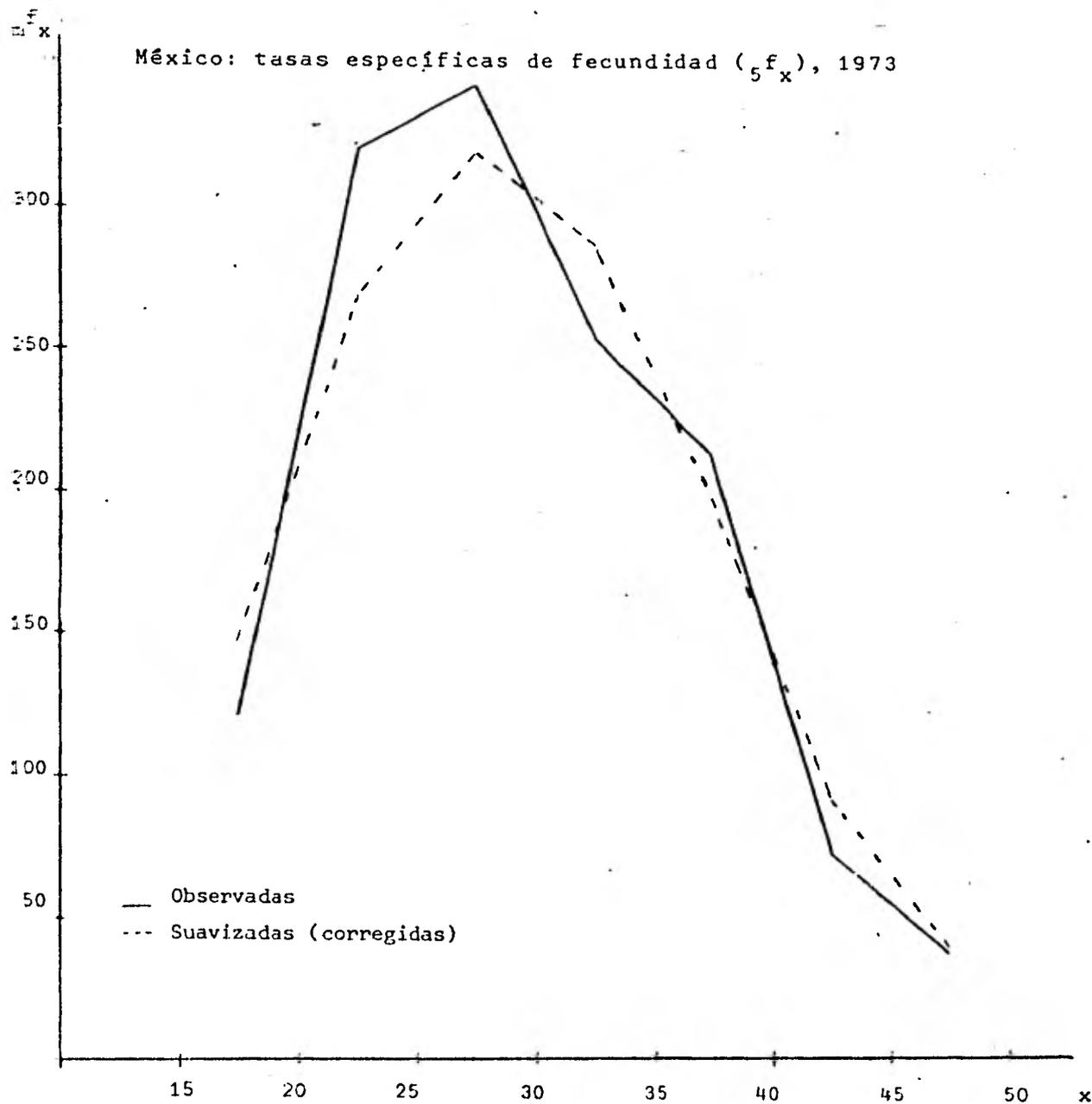
Fuente: Cuadro 5 y Cuadro 8.

Gráfica 13

México: tasas específicas de fecundidad (${}_5f_x$), 1972

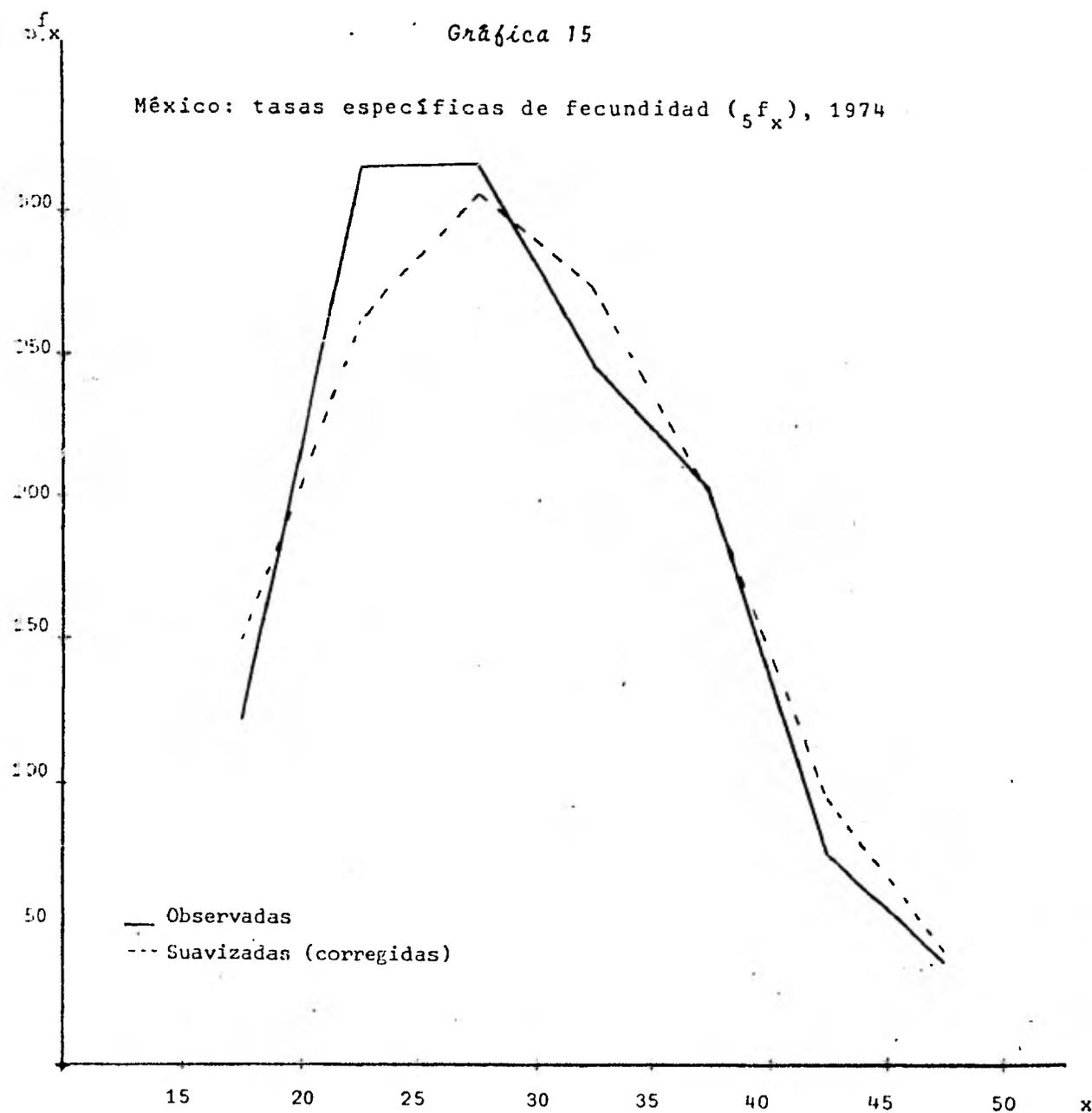
Fuente: Cuadro 5 y Cuadro 8.

Gráfica 14



Fuente: Cuadro 5 y Cuadro 8.

Gráfica 15

México: tasas específicas de fecundidad (${}_5f_x$), 1974

Fuente: Cuadro 5 y Cuadro 8.

blación censal de individuos de la zona i cuyas edades estan entre x y $x + n$.

El procedimiento utilizado para suavizar la curva fue el siguiente:

1. Se llevó a cabo una transformación para la edad, parecida a los dos fenómenos anteriores:

$$i = \frac{x}{5}, \quad x = 0, 5, \dots, 85$$

2. Las δ_{y_i} , $i = 0, \dots, 17$ fueron calculadas mediante la relación :

$$\delta_{y_i} = t_i \cdot M_i \quad i = 0, \dots, 17$$

con M_i = tasa femenina quinquenal de emigración,

t_i : "tanto por uno" esperado de alejamiento.

Al principio utilizamos los mismos valores para t_i que para los datos de mortalidad, es decir $t_i^1 = 0.1$, $t_i^2 = 0.2$, $t_i^3 = 0.3$; y siendo también los valores de S (suavizamiento general), los mismos que aplicamos para mortalidad

$$S^1 = 0.10, \quad S^2 = 0.16, \quad S^3 = 0.21$$

Pero al graficar los resultados obtenidos, observamos que las nueve curvas "suavizadas", a partir del grupo de edad 50-54 seguían manteniendo los "picos" y dado que la curva que seleccionaremos como la "mejor" debería presentar un comportamiento parecido al planteado por Rogers^{11/} en su libro, decidimos hacer lo siguiente:

ya que los modelos presentados por Rogers a partir del grupo 50-54 indican un aumento en la emigración, llegando ésta a su fin en el grupo 60-64, y a partir de éste un descenso hasta llegar a cero en el grupo

^{11/} Rogers, A., Introduction to multiregional mathematical demography, John Wiley & Sons, New York, 1975, p. 150.

Cuadro 9

SLOVENIA: TASAS QUINQUENALES DE EMIGRACION FEMENINAS
 (${}_5M_x$), DE SLOVENIA AL RESTO DE YUGOSLAVIA, 1961

Grupos de edad	${}_5M_x$
0-4	0.002832
5-9	0.002294
10-14	0.001485
15-19	0.005158
20-24	0.007170
25-29	0.005534
30-34	0.003756
35-39	0.001765
40-44	0.001013
45-49	0.000543
50-54	0.000663
55-59	0.000629
60-64	0.000884
65-69	0.000949
70-74	0.000876
75-79	0.001111
80-84	0.000704
85 y +	0.000000

Fuente: Rogers, A., Introduction to multiregional mathematical demography, John Wiley & Sons, New York, 1975, p. 70.

Cuadro 10

VALORES DE $\delta_{y \frac{a}{i}}$, 1961. $(t_i = 0.1, i = 1, \dots, 10, t_{11} = 1.0, t_i = 2 \cdot t_{i-1}, i = 12, \dots, 17)$

Grupos de edad	$\delta_{y \frac{a}{i}}$
0-4	0.000283
5-9	0.000229
10-14	0.000149
15-19	0.000516
20-24	0.000717
25-29	0.000553
30-34	0.000376
35-39	0.000177
40-44	0.000101
45-49	0.000054
50-54	0.000066
55-59	0.001258
60-64	0.003536
65-69	0.007592
70-74	0.014016
75-79	0.035552
80-84	0.045056
85y +	0.000000

$$\frac{a}{i} = \frac{x}{5}$$

85 y +, decidimos aplicar una δ_{y_i} $i = 11, \dots, 17$ ($\delta_x = 55, \dots, 85$) que fuera creciendo conforme avanza la edad, ya que al crecer δ_{y_i} , más nos alejamos del valor original.

Es por ésto que a partir del grupo 55-59 ($i = 11$) hicimos

$$\delta_{y_i} = (t_{i-1} \cdot 2) \cdot M_i \quad i = 12, \dots, 17$$

es decir, para cada grupo de edad nos alejamos dos veces más que el grupo de edad anterior.

Los valores para los cuales se obtuvo el mejor suavizamiento fueron:

$$S = 0.16, \quad t_i = 0.1, \quad i = 0, \dots, 10; \quad t_{11} = 1.0$$

siendo el valor final de $t_i = 128$ para $i = 17$.

El Cuadro 10 muestra los valores de las δ_{y_i} ($i = 0, \dots, 17$) con los cuales se llevó a cabo el mejor suavizamiento. - Las tasas suavizadas, se encuentran contenidas en el Cuadro 11.

La gráfica 16 muestra la curva de las ${}_s M_x$ observadas y mejor suavizadas.

Cuadro 11

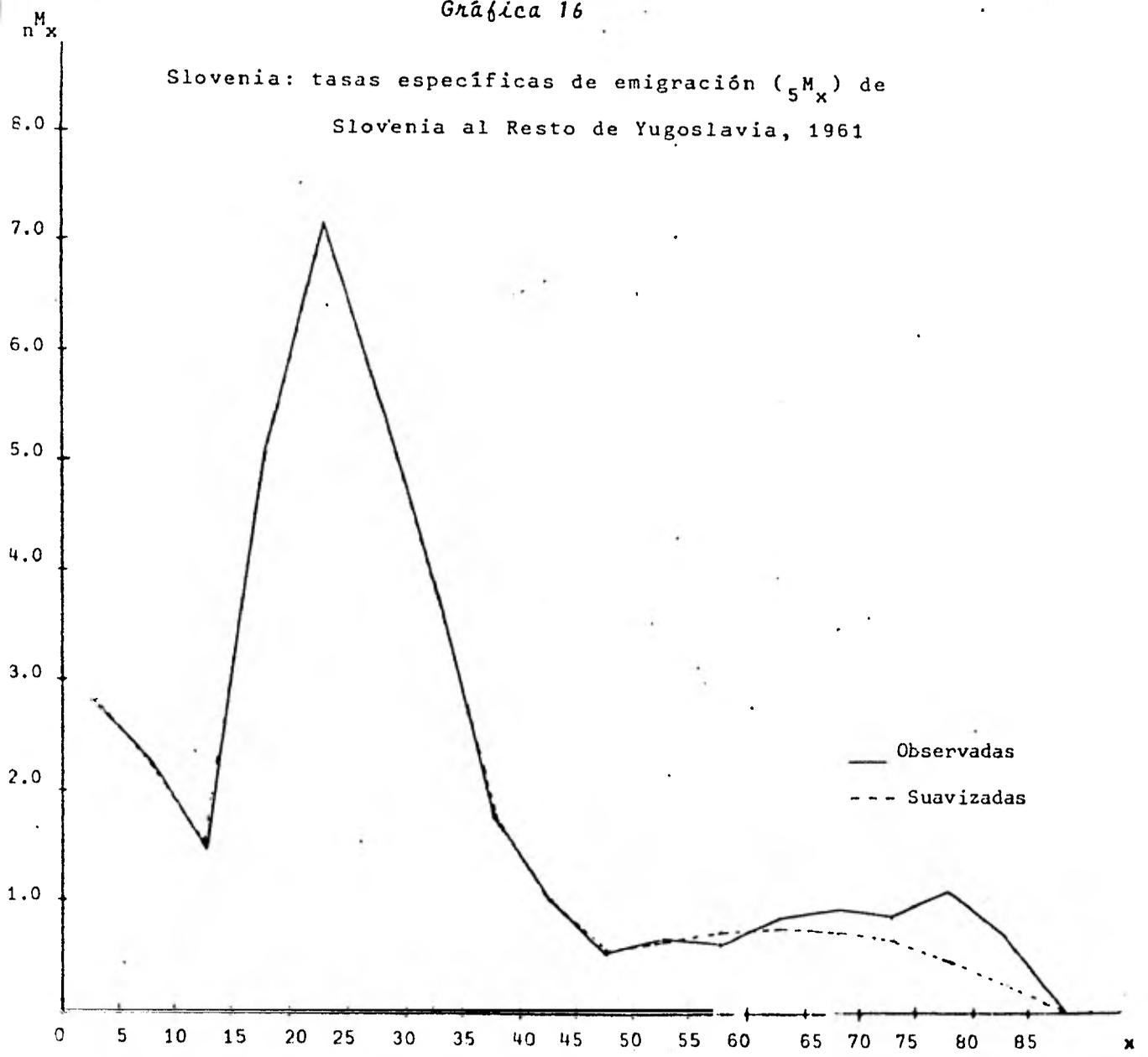
SLOVENIA: TASAS DE EMIGRACION FEMENINA SUAVIZADAS POR LA FUNCION SPLINE CUBICA, DE SLOVENIA AL RESTO DE YUGOSLAVIA, 1961
 (S = 0.16, $t_i = 0.1(i=0, \dots, 10)$ $t_{11} = 1.0$, $t_i = 2 \cdot t_{i-1}$, $i = 12, \dots, 17$)^{a/}

Grupos de edad	δ_{y_i}
0-4	0.002833
5-9	0.002292
10-14	0.001487
15-19	0.005149
20-24	0.007156
25-29	0.005543
30-34	0.003753
35-39	0.001766
40-44	0.001013
45-49	0.000543
50-54	0.000663
55-59	0.000716
60-64	0.000753
65-69	0.000747
70-74	0.000657
75-79	0.000487
80-84	0.000259
85y +	0.000000

^{a/} Para la interpretación de estos parámetros véase texto.

Gráfica 16

Slovenia: tasas específicas de emigración (${}_5M_x$) de
Slovenia al Resto de Yugoslavia, 1961



Fuente: Cuadro 9 y Cuadro 11.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha mostrado que el algoritmo de Reinsch para la solución de la función Spline puede ser de utilidad en el contexto de la demografía, como una técnica de suavizamiento al irregular comportamiento por edad de la mortalidad, la fecundidad y la migración.

De los tres fenómenos demográficos considerados, los ajustes realizados en mortalidad resultaron los mejores, ya que la curva ajustada al comportamiento por edad de las probabilidades de fallecer difirió muy poco de la observada, debido principalmente a que este comportamiento es monótono creciente conforme avanza la edad, a partir de los diez años, en la especie humana.

En el caso de las tasas de fecundidad por edad de la madre cuyo comportamiento típico tiene la forma de una "campana", la curva ajustada presentó una ligera diferencia sólo entre los 20 y 30 años de edad con respecto a la observada, lo cual seguramente se debe a que en la curva observada se presenta un cierto desplazamiento de la edad de las madres por el registro tardío de sus hijos, pues en los cinco casos considerados se trabajó con nacimientos registrados y no con nacimientos ocurridos durante el año calendario.

En el caso de la emigración de la región de Slovenia al resto del Yugoslavia, el método mostró su amplia flexibilidad, pues hasta los 55 años de edad mostró un ajuste suave y casi coincidente con la curva de las tasas de emigración observadas, y después de los 55 años de edad per-

mitió ajustar un patrón coherente (descendiente conforme aumenta la edad) con el observado en diferentes países^{1/}.

Finalmente, es importante destacar que la aplicación del algoritmo de Reinsch para la solución de la función Spline puede ser más amplia que en los casos aquí presentados, se puede utilizar para el ajuste de patrones estándar para la aplicación del sistema logito en mortalidad y fecundidad, para el ajuste de las tasas por edad de la participación de la población en las actividades económicas, para suavizar estructuras por edad de la población censada, o bien para ajustar el irregular comportamiento, cuando se deba a problemas en la información, de tendencias históricas de los diversos fenómenos demográficos.

^{1/} Rogers, A., and Castro, J. L., Model schedules in multistate demographic analysis: the case of migration, IIASA, Laxenburg, Austria, 1981 (W P-81-22).

ANEXO 1

Rutina ICSSCU^{1/}

El propósito de esta rutina es suavizar datos por medio de la función Spline Cúbica, utilizando para ello el algoritmo de Reinsch.

Los elementos que la contienen son:

Elementos de entrada

X Vector de longitud NX. Contiene las abcisas de los NX puntos dados como datos: (X(I), F(I)), I = 1, ..., NX. Con X(I) < X(I + 1).

F Vector de longitud NX. Contiene las ordenadas o valores de la función a suavizar.

DF Vector de longitud NX. Contiene los valores de δ_{y_i} , es decir DF(I) = $\delta_y(I)$, I = 1, ..., NX.

NX Valor que indica el número de elementos en X, F, DF y Y. Este valor siempre debe ser mayor o igual que 2.

^{1/} Se encuentra contenida en el paquete de computación IMSL Library, Edition 7, Customer Relations, Sixt Floor, GNB Building 7500 Bellaire Boulevard, Houston, Texas 77036, U. S. A., 1979, pp. ICSSCU-1-ICSSCU-4. Este paquete de computación se encuentra en el Centro de servicios de Cómputo (CSC) de la Universidad Nacional Autónoma de México.

SM Número no negativo, controla el nivel de suavizamiento general (conocido también por S).

IC Indica el número de renglones de la matriz C.

WK Vector de longitud $7 * NX + 14$. Indica el área de trabajo^{2/}.

Elementos de salida

Y, C Coeficientes del Spline Cúbico. Y es un vector de longitud NX. C es una matriz de NX-1 renglones por 3 columnas.

El vector Y contiene los valores suavizados de la función F.

El valor del Spline en un punto T, para $T \in [X(I), X(I + 1)]$ está dado por

$$S(T) = ((C(I, 3) * D + C(I, 2)) * D + C(I, 1)) * D + Y(I). \quad D = T - X(I).$$

IER Parámetro de error. Indica tres tipos de errores por los cuales no se puede llevar a cabo el suavizamiento.

IER = 129, IC es menor que NX-1.

IER = 130, NX es menor que 2.

IER = 131, no se cumple que $X(1) < \dots < X(N)$.

El llamado a la rutina es:

CALL ICSSCU (X, F, DF, NX, SM, Y, C, IC, WK, IER)

^{2/}No es parte del algoritmo, sino que es un indicador de la computadora.

ANEXO 2

1. Cálculo de las poblaciones femeninas ${}_5P_{40}^f$ y ${}_5P_{45}^f$ para los años 1971, 1972, 1973 y 1974

Estas poblaciones fueron encontradas por interpolación geométrica a partir de las poblaciones femeninas ${}_5P_{40}^f$ y ${}_5P_{45}^f$ de 1970 y 1975^{1/}, es decir:

$${}_5P_{40}^n = {}_5P_{40}^{1970} (1 + r_1)^{t-1} \quad n = 1971, \dots, 1975$$

$${}_5P_{45}^n = {}_5P_{45}^{1970} (1 + r_2)^{t-1} \quad n = 1971, \dots, 1975$$

donde r_1 y r_2 son las tasas de crecimiento entre 1970 y 1975 para ${}_5P_{40}$ y ${}_5P_{45}$, respectivamente; t es el número de años entre 1970 y n . A continuación damos los valores de r_1 y r_2 y ${}_5P_{40}$ y ${}_5P_{45}$ para 1970 y 1975.

$$r_1 = 0.032494 \quad r_2 = 0.042767$$

$$1970 \quad \begin{cases} {}_5P_{40} = 1028697 \\ {}_5P_{45} = 811201 \end{cases}$$

^{1/} Las poblaciones ${}_5P_{40}^f$ y ${}_5P_{45}^f$ para 1970 fueron encontradas al estimar su población censal al 30 de junio de 1970. Véase: Dirección General de Estadística (DGE), IX Censo General de Población, 1970, SIC, México, 1972.

Para 1975 ${}_5P_{40}^f$ y ${}_5P_{45}^f$ fueron tomadas de: Dirección General de Estadística (DGE), Proyecciones de la población mexicana, 1970-2000, SPP, México, 1978, Evaluación y Análisis, Serie III, No. 8, p. 56.

^{2/} Por comodidad hicimos ${}_5P_x^f = {}_5P_x^f$.

$$1975 \left\{ \begin{array}{l} {}_5P_{40} = 1207051 \\ {}_5P_{45} = 1000151 \end{array} \right.$$

Los valores obtenidos para las poblaciones fueron:

Año	${}_5P_{40}$ (1)	${}_5P_{45}$ (2)	${}_{10}P_{40}$ (1) + (2)
1971	1062124	845894	1908018
1972	1096637	882071	1978708
1973	1132271	919794	2052065
1974	1169063	959131	2128194

Puesto que ${}_5P_{40}$ que obtuvimos en todos los años es menor que la que aparece en el estudio de la Dirección General de Estadística^{3/}, distribuimos esta última en la primera mediante la relación:

$${}_5P_x^D = {}_5P_x^O \left(1 + \frac{{}_{10}P_{40}^E - {}_{10}P_{40}^O}{{}_{10}P_{40}^E} \right) \quad x = 40, 45$$

donde

${}_5P_x^D$: población femenina definitiva.

${}_5P_x^O$: población femenina obtenida por interpolación geométrica.

${}_{10}P_x^E$: población femenina del estudio de la DGE.

${}_{10}P_{40}^O$: población femenina obtenida de sumar ${}_5P_{45}^O$ y ${}_5P_{40}^O$.

Las poblaciones definitivas ${}_5P_{40}$ y ${}_5P_{45}$ para todos los años fueron :

Año	${}_5P_{40}$	${}_5P_{45}$	${}_{10}P_{40}$
1970	1028697	811201	1839898
1971	1062142	845909	1908050
1972	1096674	882100	1978774
1973	1132329	919841	2052170
1974	1169143	959197	2128340

^{3/} Dirección General de Estadística, op. cit.

2. Obtención de Z , ${}_5B_{40}$, ${}_5B_{45}$, ${}_5F_{40}$, ${}_5F_{45}$

Cálculo de Z .

Este se llevó a cabo mediante la fórmula vista en el capítulo 3:

$$Z = (K / {}_5P_{45}^f) / (1 / {}_5P_{40}^f + K / {}_5P_{45}^f)$$

Los valores hallados en Z para los años de estudio, fueron:

$$\begin{aligned} Z_{1970} &= 0.717213 & Z_{1971} &= 0.715201 & Z_{1972} &= 0.713180 \\ Z_{1973} &= 0.711150 & Z_{1974} &= 0.709112 \end{aligned}$$

Cálculo de ${}_5B_{40}$ y ${}_5B_{45}$

Estos dos valores fueron obtenidos de las relaciones

$$\begin{aligned} {}_5B_{40}^n &= Z^n \cdot {}_{10}B_{40}^n & n &= 1970, \dots, 1975 \\ {}_5B_{45}^n &= (1 - Z^n) \cdot {}_{10}B_{40}^n \end{aligned}$$

Los nacidos vivos cuya edad de la madre está entre 40 y 49 años (${}_{10}B_{40}$) se obtuvieron también del estudio de la Dirección General de Estadística.

Los valores encontrados para ${}_5B_{40}^n$ y ${}_5B_{45}^n$, $n = 1970, \dots, 1975$ se muestran a continuación:

Año	${}_5B_{40}$	${}_5B_{45}$
1970	103362	40754
1971	105205	41894
1972	108090	43470
1973	81824	33234
1974	86112	35324

Encontrados los nacimientos (${}_5B_x$) y las poblaciones femeninas estimadas al 30 de junio (${}_5P_x^f$) para $x = 40, 45$, se calcularon las tasas específicas de fecundidad (${}_5f_x$) para los grupos de edad 40-44 y 45-49 mediante la relación

$${}_5f_x = \frac{{}_5B_x}{{}_5P_x^f}$$

Los resultados obtenidos para los años en estudio se muestran en el Cuadro 5 (Capítulo 3).

BIBLIOGRAFIA

Atkinson, K. E., An introduction to numerical analysis, John Wiley & Sons, U. S., 1976.

Benítez, R. y Cabrera, G., Tablas abreviadas de mortalidad de la población en México, El Colegio de México, México, 1967.

Bers, L., Cálculo diferencial e integral, volumen I, Editorial Interamericana, México, 1972.

Bourgeois-Pichat, J., La demografía, Editorial Ariel, Barcelona, 1978.

Buse, A. and Lim, L., "Cubic splines as a special case of restricted least squares", Journal of the American Statistical Association, March 1977, Volume 72, Number 357.

Conte, S. D. y de Boor, C., Análisis numérico, segunda edición, Mc. Graw Hill, México, 1977.

Courant R. y Fritz J., Introducción al cálculo y al análisis matemático, Editorial Limusa, México, 1974.

Chackiel, J. y Macció, G., Evaluación y corrección de datos demográficos, CELADE, Santiago de Chile, 1978, (Serie B-39).

de Boor, C., A practical guide to splines, Springer-Verlay, New York, Inc., 1978.

Dirección General de Estadística (DGE), Los niveles de la fecundidad en México, 1960-1974, SPP, México, 1978, Estadísticas vitales, Serie I, No. 3.

----- Proyecciones de la población mexicana, 1970-2000 (nivel nacional), SPP, México, 1978, Evaluación y Análisis, Serie III, No. 8.

----- Tablas abreviadas de mortalidad para ocho regiones de México, 1970, SIC, México, 1976, Evaluación y Análisis, Serie III, No. 3.

Elsgolts, L., Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, Ediciones de Cultura Popular, S. A., México, 1975.

Forsythe, G. E., Malcolm, A. M., and Moler, B. C., Computer methods for mathematical computations, Prentice Hall, U. S., 1977.

Gerard, H. y Wunsch, G., Demografía, Editorial Pirámide, S. A., Madrid, 1975.

IMSL Library, Edition 7, Customer Relations, Sixth Floor, GNB Building 7500 Bellaire Boulevard, Houston, Texas, 77036, U. S. A., 1979.

Lang, S., Cálculo II, Fondo Educativo Interamericano, S. A., México, 1976.

Leguina, J., Fundamentos de demografía, Siglo XXI, Madrid, 1976.

McNeil, R. D., Trussell, T. J., and Turner, C. J., "Spline interpolation of demographic data, Demography, May 1977, Volume 14, No. 2.

Mendoza, B. L., Relaciones entre algoritmos de suavizamiento y filtros a tiempo discreto, Tesis de matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1980.

Minujin, A., Ajuste de datos demográficos. Experiencia con dos técnicas, Documento presentado en la Segunda Reunión Nacional sobre Investigación Demográfica, CONACYT, México, 1980.

Poirier, D. J., "Piecewise regression using cubic splines", Journal of the American Statistical Association, September 1973, Volume 63, Number 243.

Pressat, R., El análisis demográfico, F. C. E., México, 1967.

Reed y Merrell, Un método rápido para la construcción de una tabla de vida abreviada, CELADE, San José, Costa Rica, 1972 (Serie D-49).

Reinsch, H. C., "Smoothing by spline functions", Numerische Mathematik, No. 10.

Rogers, A., Introduction to multiregional mathematical demography, John Wiley & Soons, New York, 1975.

----- and Castro, J. L., Model schedules in multistate demographic analysis: the case of migration, IIASA, Laxenburg, Austria, 1981 (W P-81-22).

Schoenberg, I., Cardinal spline interpolation, SIAM, Philadelphia, 1973.

Secretaría de Programación y Presupuesto (SPP), Encuesta Mexicana de Fecundidad, Volumen I, CGSNÍ, México, 1979.

Smith, L. P., "Splines as a useful and convenient statistical tool", The American Statistician, May 1979, Volumen 33, No. 2.

Wold, S., "Spline functions in data analysis", Technometrics, February 1974, Volume 16, No. 1.