

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EVOLUCION DE UN CICLON BAROTROPICO
EN UN PLANO BETA "

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

PRESENTA

RICARDO PRIETO GONZALEZ

TESIS DIRIGIDA POR. DR. JULIAN ADEM CHAHIN

MEXICO, D. F.

1993

49
25

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En este trabajo se estudia el movimiento de ciclones tropicales en el contexto de un modelo barotrópico no divergente, sin flujo ambiental. Con este propósito, se expone un método para obtener una solución en serie de la ecuación de vorticidad barotrópica no divergente en un plano beta y se aplica al caso de un vórtice.

Se obtiene una fórmula que describe el desarrollo de la función de corriente de un vórtice simétrico como función del radio, velocidad máxima y latitud. Se presenta la evolución de la función de corriente de un vórtice ciclónico de 0 a 36 horas, calculando su trayectoria y comparando ésta con la de otro vórtice con los mismos valores numéricos de radio, velocidad máxima y latitud, pero con una distribución de vientos distinta.

Finalmente, se realiza el cálculo del campo de vientos del primer vórtice después de 36 horas de evolución y se compara con el medido en un ciclón real.

INDICE

	Pág.
INTRODUCCION	1
CAPITULO I	
DESCRIPCION GENERAL DE LOS CICLONES TROPICALES	5
1.1 ESTRUCTURA	6
1.2 CONDICIONES PARA EL DESARROLLO	9
1.3 TRAYECTORIA	10
1.4 MECANISMO ENERGETICO	12
1.5 IMPACTOS	13
CAPITULO II	
BASES FISICAS Y MATEMATICAS	15
2.1 ECUACION DE CONTINUIDAD	16
2.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO	18
2.2.1 Fuerza debida al gradiente de presión	20
2.2.2 Fuerza gravitacional	21
2.2.3 La fuerza de fricción	23
2.2.4 Fuerzas aparentes	23
2.2.5 Ecuaciones de movimiento	26
2.3 ECUACION DE VORTICIDAD	28

CAPITULO III	
SOLUCION EN SERIE DE LA ECUACION DE VORTICIDAD	32
3.1	SOLUCION EN SERIE PARA LA ECUACION DE VORTICIDAD BAROTROPICA NO DIVERGENTE 33
3.2	SOLUCION DE UNA ECUACION DE POISSON 34
3.3	SOLUCION EN SERIE PARA UN CICLON BAROTROPICO 35
CAPITULO IV	
MOVIMIENTO DE CICLONES EN UN PLANO BETA	41
4.1	DEFINICION DE LOS CICLONES 41
4.2	RESULTADOS 45
CONCLUSIONES	61
APENDICES	
APENDICE 1	64
Terminología de los ciclones tropicales en el Atlántico, Pacífico Nororiental y Pacífico Central	
APENDICE 2	67
Obtención de la ecuación (3.10)	
APENDICE 3	69
Solución para el caso general de flujo barotrópico no divergente	
BIBLIOGRAFIA	73

INTRODUCCION

El jueves 12 de noviembre de 1970, una apocalíptica tempestad se abatió sobre la desembocadura del río Ganges, en Bangladesh. Durante horas cayeron del cielo cataratas de agua, y violentísimos vientos que alcanzaban los 200 km por hora barrieron todo lo que encontraron a su paso. Pero lo peor fueron las enormes olas, de casi 10 metros de altura, que sumergieron la llana costa y llegaron hasta decenas de kilómetros tierra adentro. Cuando la tempestad amainó, se inició el recuento de víctimas, que finalmente sólo pudo obtenerse de modo aproximado: unos 500.000 muertos. Esta tragedia fue provocada por un fenómeno natural llamado ciclón tropical.

Pero, ¿qué es un ciclón tropical?

En Meteorología el término "ciclónico" implica un sentido de rotación alrededor del eje vertical local igual al de la rotación terrestre, esto es, visto desde arriba, contrario a las manecillas del reloj en el hemisferio norte, en el sentido de las manecillas del reloj en el hemisferio sur, e indefinido en el ecuador. El término opuesto es "anticiclónico" que significa tener un sentido de rotación alrededor de su eje vertical opuesto al de la rotación de

la Tierra, esto es, en el sentido de las manecillas del reloj en el hemisferio norte, en sentido antihorario en el hemisferio sur, e indefinido en el ecuador.

Un ciclón tiene un sistema cerrado de circulación con movimiento ciclónico. Como la circulación ciclónica y bajas presiones atmosféricas relativas normalmente coexisten, es común usar los términos "ciclón" y "baja" de forma intercambiable. Similarmente, los sistemas cerrados de circulación anticiclónica coexisten con altas presiones atmosféricas relativas, por lo que los términos "anticiclón" y "alta" también son usados indistintamente.

En latitudes templadas los ciclones son referidos como "depresiones" y el término "ciclón" se usa sólo para referirse a "ciclones tropicales". Estos últimos son conocidos por varios nombres según las regiones en donde ocurren:

- a) En el Atlántico Noroccidental, Golfo de México y Mar Caribe son conocidos como huracanes.
- b) En el Mar de Arabia y la Bahía de Bengala como ciclones.
- c) En el Mar de China y la costa de Japón como tifones.
- d) En el Océano Índico, al este de Mauricio y Madagascar, como ciclones.
- e) En el Océano Pacífico Nororiental como huracanes.

- f) En el Pacífico Sur, al este de Australia y Samoa como huracanes y willy willy. En las Filipinas son conocidos como baguios.

Estos sistemas de tormenta exigen, al menos, dos requisitos básicos: calor y humedad: como consecuencia, sólo se desarrollan en los trópicos, entre las latitudes de 5° y 20° norte y sur, en las regiones y temporadas en que la temperatura del mar es superior a 26°C. Casi de forma invariable, se mueven primero en dirección oeste y luego se alejan del ecuador, bien para azotar tierras con resultados desastrosos, o bien para continuar sobre el océano hasta alcanzar aguas más frías y extinguirse por sí mismos. Si su trayectoria pasa sobre tierra, la tormenta pronto se debilita y pierde destructividad.

Los ciclones intensos están entre los más destructivos de los desastres naturales, capaces de aniquilar poblaciones costeras y matar a miles de personas. Sin embargo, proporcionan precipitaciones esenciales para gran parte de las tierras que cruzan.

El pronóstico del movimiento de los ciclones es uno de los problemas más importantes en predicción meteorológica, por ello ha sido desarrollada con ese fin una cantidad considerable de investigación teórica y práctica.

El inicio en el estudio del efecto de la rotación de la Tierra en el movimiento de ciclones tropicales se atribuye a los trabajos de Rossby (1939, 1948). Desde entonces, se han desarrollado estudios teóricos y numéricos conducidos a examinar este efecto. Rossby, observando el hecho de que la fuerza de Coriolis es máxima en los polos y nula en el ecuador, sugirió que el efecto diferencial de esta fuerza a lo largo de la tormenta (que por la extensión de ésta es considerable), produciría una fuerza neta que causaría que el ciclón se moviera hacia el polo del hemisferio en que se encuentra.

Por otro lado, Adem (1956) analizó este efecto usando la ecuación de vorticidad, proponiendo que la advección diferencial de la vorticidad terrestre entre el oeste y el este del ciclón causarían que éste se movería inicialmente hacia el oeste. Entonces se desarrolla una circulación horizontal secundaria que mueve al vórtice hacia el norte. Esto es conocido como efecto beta (β), donde β es la variación espacial del parámetro de Coriolis.

La presente tesis analiza, desde la perspectiva del trabajo de Adem (1956), la evolución de un ciclón barotrópico inicialmente simétrico en un plano beta ($\beta = \text{cte.}$) sin flujo ambiental, lo que es considerado como el problema prototipo en la teoría del movimiento de ciclones tropicales.

CAPITULO I

DESCRIPCION GENERAL DE LOS CICLONES TROPICALES

Los ciclones tropicales están entre los más peligrosos y destructivos sistemas meteorológicos en la Tierra. Mientras la estructura y funcionamiento de una tormenta tropical madura es bien conocida, su origen es aún enigmático.

La fase antecedente de un ciclón tropical es conocida, en América, como "Perturbación Tropical" (ver Apéndice 1); los ciclones tropicales se caracterizan por una situación de isobaras* cerradas y se dividen en fases de acuerdo a la velocidad de su viento máximo sostenido en superficie (V.M.S.):

- a) "Depresión Tropical" (V.M.S. < 34 nudos**)
- b) "Tormenta Tropical" (34 nudos < V.M.S. < 64 nudos)
- c) "Huracán" (V.M.S. > 64 nudos)

* Isobara.- Una línea, sobre una superficie de referencia dada, trazada a través de todos los puntos donde la presión atmosférica tiene el mismo valor numérico.

** Nudo.- La unidad de velocidad en el sistema náutico: una milla náutica por hora. Es igual a 0.5144 m/s.

1.1 ESTRUCTURA

Un esquema general de la estructura de un huracán es mostrado en la figura 1, en donde está exagerada la escala vertical; los ciclones tropicales tienen un diámetro de varios cientos de kilómetros y una altura de alrededor de 15 km.

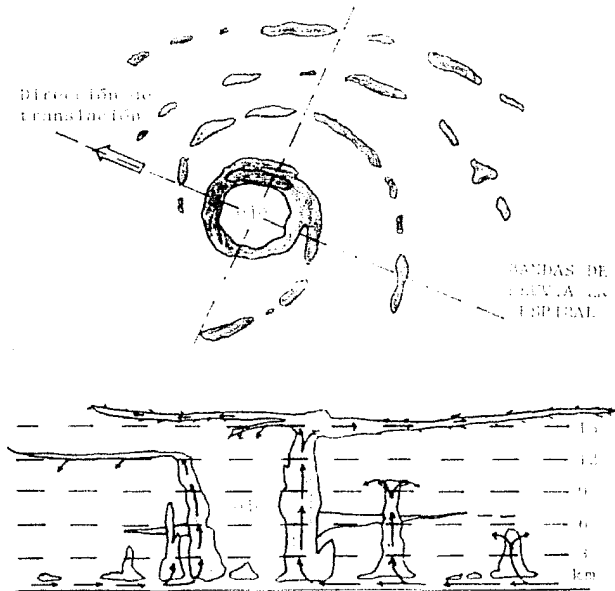


Figura 1. Esquema general de la estructura de un huracán (Hsu, 1988).

Este esquema es de un ciclón tropical del hemisferio

norte, ya que la circulación es antihoraria. La espiral ciclónica está marcada por bandas muy densas de nubes, de las que provienen lluvias torrenciales, y están separadas por áreas de lluvia ligera o sin lluvia; estas bandas espirales ascienden en capas de nubes cúmulus y cumulonimbus hacia el límite convectivo de formación de nubes, donde el vapor de agua condensado, en forma de cristales de hielo, es arrastrado en espirales de nubes cirrus. Nótese el fuerte flujo hacia adentro en los niveles inferiores, y el flujo correspondiente hacia afuera en los niveles altos. En el centro del huracán existe un "ojo", en donde hay viento en calma y cielo relativamente claro.

Para continuar describiendo las características generales de los ciclones tropicales, se hará uso de un caso particular: el huracán Frederic, el cual golpeó la costa de los estados de Alabama y Mississippi en los Estados Unidos, en septiembre de 1979, causando un daño económico estimado de 2,300 millones de dólares.

De acuerdo a De Angelis (1980), cuando el huracán Frederic se movía hacia el noroeste del Golfo de México el 11 y 12 de septiembre, una estación meteorológica en boya localizada a 26°N, 86°W, estaba directamente en el camino del huracán. La figura 2 es una gráfica de reportes regulares de presión, viento y altura de oleaje para los días y horas marcados. La mínima presión registrada fue de 959.3 mb a las 0200 UTC del 12 de

septiembre. El máximo viento sostenido fue de 66 nudos, y la ola más alta fue de cerca de 30 pies, ambos registrados a las 0000 UTC del 12 de septiembre de 1979.

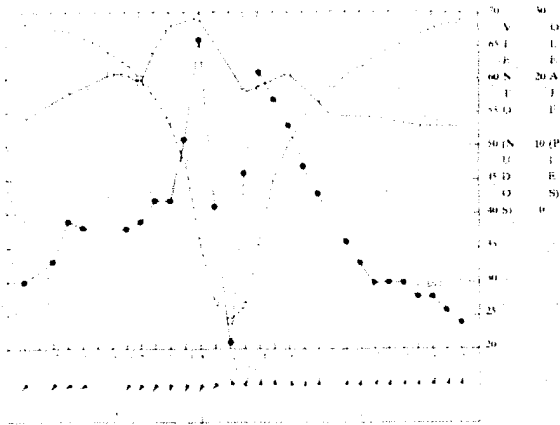


Figura 2. Registro de viento, oleaje y presión atmosférica captados por la boya 42003 del Servicio Meteorológico Nacional de los EE.UU., los días 11 y 12 de septiembre de 1979 (De Angelis, 1980).

El patrón mostrado es clásico en el paso de un huracán, con presiones atmosféricas bajando precipitadamente, para después levantarse en forma semejante a un reflejo de espejo. Los vientos del noroeste alcanzaban su máxima velocidad mientras se acercaba el centro del huracán, caían a brisas moderadas en el ojo, y entonces viraban abruptamente (del sur) con

renovada fuerza huracanada. Las olas crecían mientras avanzaba la tormenta, para después tener una decaída irregular pero gradual.

1.2 CONDICIONES PARA EL DESARROLLO

Numerosas observaciones han demostrado que las condiciones necesarias para el desarrollo de tormentas tropicales y huracanes son generalmente:

- a) Una superficie marina con temperatura mayor a 26°C.
- b) Cambios pequeños en la dirección y rapidez del viento con la altura, entre las partes bajas y altas de la troposfera*.
- c) Una distribución de temperatura con la altura que permita la formación de nubes cumulonimbos.
- d) Una "perturbación inicial" consistente en la existencia de una concentración de vorticidad ciclónica en las partes bajas y medias de la troposfera.
- e) Una localización en donde la fuerza de Coriolis no sea demasiado pequeña, es decir, más allá de los 4 o 5° de latitud hacia el polo (generalmente se forman en latitudes entre 5 y 25°).

*Troposfera.-La porción de la atmósfera desde la superficie terrestre hasta la tropopausa; esto es, hasta una altura que va de 10 a 20 km.

1.3 TRAYECTORIA

El movimiento de los ciclones tropicales resulta, principalmente, debido a que las tormentas están sumergidas en una región de aire en movimiento de escalas mayores, conocida como "corriente conductora" (steering current), que tiende a mover la circulación de los niveles bajos y altos y la convección de cumulonimbus en la dirección de dicho flujo (ver por ejemplo: Adem y Lezama, 1959). El ciclón por sí mismo es parte del flujo de gran escala, por lo cual es difícil definir apropiadamente la corriente conductora. El movimiento del ciclón está también influenciado por la fuerza de Coriolis.

Las trayectorias más comunes de los ciclones tropicales están ilustradas en la figura 3.

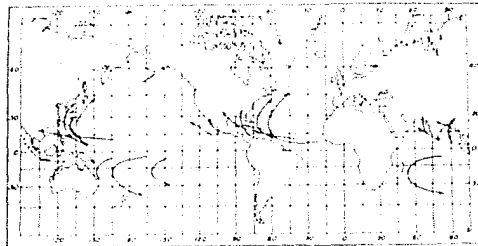


Figura 3. Trayectorias más comunes de los ciclones tropicales (Simpson y Riehl, 1981).

Todas estas trayectorias tienen una cosa en común: la tendencia a moverse hacia el polo del hemisferio en que se encuentran. Esta tendencia, compartida por los ciclones en todas las latitudes, indica cierta propulsión por una fuerza independiente de la fuerza debida a la corriente conductora.

Como fue sugerido por Rossby (1948), la aceleración hacia el polo de los ciclones y la aceleración hacia el ecuador de los anticiclones puede originarse de la variación del parámetro de Coriolis a lo largo de la tormenta, pero es todavía muy difícil medir esta aceleración. Esta situación puede aportar una fracción apreciable del desplazamiento total, lo que está especialmente apoyado por los llamados "supertifones" con un diámetro suficientemente grande para no estar sometidos a la influencia de la corriente conductora; estos supertifones generalmente tienen una trayectoria estacionaria hacia el noroeste. Una tercera fuerza se origina de la superposición de la corriente conductora y el vórtice, y que causará una oscilación sinusoidal alrededor de la trayectoria media. (Riehl 1979, pág. 488).

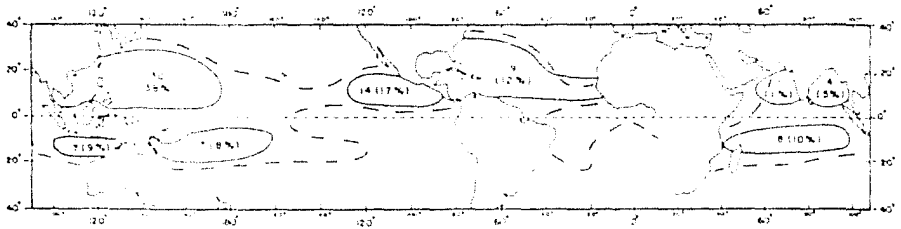


Figura 4. Regiones donde se desarrollan los ciclones tropicales: Número anual promedio (y porcentaje del total global). La línea de segmentos largos representa la isoterma de los 26.5°C para el mes de agosto en el hemisferio norte y para enero en el hemisferio sur (Gray, 1968).

Como se muestra en las figuras 3 y 4, los ciclones tropicales ocurren en las regiones del océano con aguas cálidas, excepto en el Atlántico sur. Nótese que la región del Pacífico noroccidental tiene más ciclones tropicales que cualquier otro lugar en los trópicos.

1.4 MECANISMO ENERGETICO

Los ciclones tropicales son un sistema abierto. Importan calor latente con el flujo de los niveles inferiores, y exportan energía geopotencial y calor sensible a los niveles superiores. Su tremenda energía y violencia provienen del calor latente de condensación (598 calorías por gramo) liberado a la atmósfera mientras el vapor de agua se condensa. Sólo un

pequeño porcentaje (alrededor del 3%) del calor latente liberado es convertido a energía cinética (Riehl 1979, pág. 446). Mientras el centro ciclónico permanece sobre aguas tibias, el suministro de energía es casi ilimitado. Mientras más y más aire húmedo se dirige hacia el centro de la tormenta, para reemplazar el aire calentado que asciende rápidamente, más y más calor es liberado a la atmósfera y la circulación del viento continúa incrementándose.

1.5 IMPACTOS

La importancia y peligro de los ciclones tropicales difieren entre tierra firme y superficie marina. Sobre los océanos, las actividades humanas en riesgo son primeramente instalaciones petroleras, barcos y tráfico aéreo. En tierra, se ven amenazadas las vidas y actividades humanas en ciudades, pueblos, industrias y cultivos que se encuentran, particularmente, a lo largo de las costas.

En la costa, los mayores impactos de un huracán que golpea tierra son debidos a: marea, vientos, lluvias y tornados*. De

*Tornado.- Una violenta columna de aire en rotación, colgante de una nube cumulonimbus y con una forma de embudo o tuba. Su vórtice, con un diámetro del orden de cientos de metros, rota usualmente en sentido ciclónico con vientos máximos de entre 45 a 130 m/s.

éstos, la marea provocada por la tormenta es responsable de alrededor del 90% de las muertes (Pielke 1990, pág. 59).

Sin embargo, los efectos de viento y marea están concentrados dentro de unos pocos kilómetros de la costa, mientras que las lluvias copiosas frecuentemente afectan áreas a cientos de kilómetros de la costa. Al mismo tiempo, es importante reconocer los aspectos benéficos de la lluvia provocada por las tormentas tropicales. En huracanes débiles o aún moderados, cantidades de lluvia típicas de 10 cm pueden ser muy importantes en el balance hidrológico de la región (Anthes 1982, pág. 7).

Los huracanes que afectan la costa oeste de México son muy importantes para la agricultura, proveyendo de lluvias para propósitos de irrigación (Serra, 1971). Por otro lado, Sugg (1968) muestra que los huracanes frecuentemente han terminado períodos prolongados de sequía en los Estados Unidos; por ejemplo, el huracán Connie de 1955 terminó con un período de 16 meses de sequía sobre una región de 171,000 kilómetros cuadrados.

CAPITULO II

BASES FISICAS Y MATEMATICAS

Como se describió en el capítulo anterior, los ciclones tropicales son fenómenos naturales en los que intervienen procesos mecánicos y termodinámicos. Debido a la complejidad que representa considerar la totalidad de dichos procesos, en lo que resta de este trabajo se ignorarán los aspectos termodinámicos y se harán algunas simplificaciones a los mecánicos.

Este capítulo está dedicado a presentar las bases físicas y matemáticas más relevantes, necesarias para investigar el efecto de la variación del parámetro de Coriolis en la trayectoria de un ciclón tropical.

Se considerará un sistema de coordenadas sobre la superficie terrestre, con el eje x dirigido hacia el este, el eje y dirigido hacia el norte, y el eje z en la dirección vertical (ver figura 5).

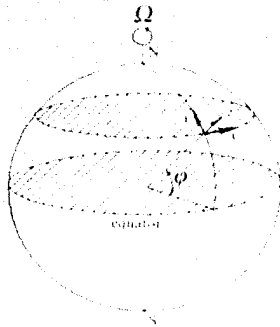


Figura 5. Sistema de coordenadas sobre la superficie terrestre.

2.1 ECUACION DE CONTINUIDAD

El principio de conservación de la masa en un fluido impone ciertas restricciones al campo de velocidades. A continuación se deriva la ecuación diferencial que expresa este principio.

Considérese una superficie cerrada A que está en una posición fija relativa al eje de coordenadas y que encierra un volumen V ocupado enteramente por un fluido. Si ρ es la densidad del fluido en la posición $r=(x, y, z)$ y al tiempo t , la masa del fluido encerrada por la superficie a cualquier instante es $\int \rho \, dV$ y la razón neta a la cual la masa fluye hacia afuera a través de la superficie es $\int \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} \, dA$, donde $\mathbf{u}=(u, v, w)$ es el vector velocidad del fluido; dV y dA son elementos del volumen encerrado y del área que lo rodea, y \hat{n} un vector normal, hacia afuera. En la ausencia

de fuentes de fluido la masa se conserva, entonces se tendrá

$$\frac{d}{dt} \int \rho \, dV = - \int \rho \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA, \quad (2.1)$$

la cual, diferenciando dentro del signo de integral y transformando la integral sobre la superficie, se puede escribir como

$$\int \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right\} dV = 0. \quad (2.2)$$

La relación (2.2) es válida para todos los volúmenes V que estén enteramente en el fluido, lo que es posible sólo si el integrando es idénticamente cero en cualquier parte del fluido. Entonces

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (2.3)$$

en todos los puntos del fluido.

La ecuación diferencial (2.3) es una de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos. Como es una ecuación en derivadas parciales, ello implica que la velocidad es continua. Por esta razón la ecuación (2.3) es comúnmente llamada "ecuación de continuidad".

Una forma distinta de la ecuación (2.3) se obtiene desarrollando el término de la divergencia, obteniendo:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.4)$$

en donde $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ es conocida como la "derivada material" y tiene sentido sólo si es aplicada a una variable de campo (esto es, una función de \mathbf{r} y t), y se dice que es la derivada respecto al tiempo siguiendo el movimiento del fluido.

Un fluido es llamado "incompresible" cuando la densidad de un elemento de fluido no es afectada por cambios en la presión. Para un fluido incompresible, la razón de cambio de ρ siguiendo el movimiento es cero, es decir,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 . \quad (2.5)$$

La ecuación de continuidad tomará entonces la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (2.6)$$

2.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones de movimiento son un conjunto de ecuaciones hidrodinámicas que representan la aplicación de la segunda ley de Newton. Establecen que la razón de cambio de momento de un fluido con respecto al tiempo, es igual a la suma vectorial de todas las fuerzas actuantes sobre ese fluido, lo que se

puede escribir simbólicamente como

$$\frac{D \mathbf{u}}{D t} = \sum \mathbf{F}, \quad (2.7)$$

en donde el lado izquierdo representa la razón de cambio de la velocidad \mathbf{u} . El lado derecho representa la suma de las fuerzas actuantes por unidad de masa.

Las fuerzas que, en primera instancia, afectan los movimientos atmosféricos de interés meteorológico son: la fuerza debida al gradiente de presión, la fuerza gravitacional y la fricción. Si, como es el caso, el movimiento es referido a un sistema coordinado que rota con la Tierra, deben ser incluidas entre las fuerzas actuantes ciertas "fuerzas aparentes": la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis. La naturaleza de estas fuerzas aparentes será discutida en la sección 2.2.4.

2.2.1 Fuerza debida al gradiente de presión

Considérese algún volumen V dentro de un fluido. La presión p ejercida sobre la superficie externa del volumen provoca una fuerza que actúa sobre él igual a la integral de la presión tomada sobre la superficie externa del volumen

$$= \int p \hat{n} \, dA. \quad (2.8)$$

Transformando la integral (2.8) a una integral de volumen, se tiene

$$= \int p \hat{n} \, dA = - \int \nabla p \, dV. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, el fluido que rodea cualquier elemento de volumen dV ejerce sobre dicho elemento una fuerza igual a

$$= \nabla p \, dV. \quad (2.10)$$

La masa del elemento diferencial de volumen es el producto de la densidad ρ por el volumen: $dm = \rho \, dV$. Entonces, la fuerza total debida al gradiente de presión por unidad de masa es

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.11)$$

2.2.2 Fuerza gravitacional

La ley de Newton de la gravitación universal establece que cualesquiera dos cuerpos en el universo se atraen mutuamente con una fuerza proporcional a sus masas e inversamente proporcional a la distancia que los separa. Entonces, si dos cuerpos con masas M y m están separados por una distancia $r = |\vec{r}|$ (con el vector \vec{r} dirigido hacia la masa m como se muestra en la figura 7), la fuerza gravitacional ejercida por la masa M sobre la masa m será

$$\vec{F}_B = - \frac{G M m}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (2.12)$$

donde G es una constante llamada constante de la gravitación universal.

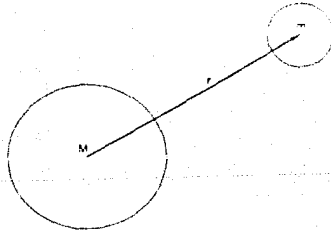


Figura 7. Dos masas esféricas cuyos centros están separados una distancia r .

La ley de gravitación expresada en la relación (2.12) se aplica únicamente a masas "puntuales", puesto que para objetos de extensión finita el vector \vec{r} variará de una parte del objeto a otra. En este caso la ecuación (2.12) todavía es aplicable si $|\vec{r}|$ es interpretada como la distancia entre los centros de masa de los cuerpos. Entonces, si la masa de la Tierra es designada como M y m es la masa de un elemento de la atmósfera, la fuerza por unidad de masa ejercida sobre el elemento de la atmósfera por la atracción gravitacional de la Tierra es

$$-\frac{\vec{F}}{m} = \vec{g}^* = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) . \quad (2.13)$$

En Meteorología Dinámica se acostumbra usar como coordenada vertical la altura sobre el nivel del mar. Si el radio medio de la Tierra es designado por a y la distancia sobre el nivel del mar es z , entonces la relación (2.13) se puede reescribir como

$$\vec{g}^* = \frac{g_0^*}{(1 + z/a)^2} , \quad (2.14)$$

donde $g_0^* = -\frac{GM}{a^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$ es el valor de la fuerza gravitacional al nivel del mar. Para aplicaciones meteorológicas, $z \ll a$ y entonces con un error despreciable se puede establecer que $\vec{g}^* = g_0^*$ y tratar a la fuerza gravitacional como una constante.

2.2.3 La fuerza de fricción

La fuerza de fricción por unidad de masa (F_f), es debida a la fuerza mecánica de resistencia ofrecida por un medio o cuerpo hacia el movimiento relativo de otro medio o cuerpo en contacto con el primero.

En el caso de la atmósfera y para movimientos de escala sinóptica (~ 1000 km) lejanos de la superficie terrestre, las fuerzas de fricción son pequeñas (en comparación con la fuerza debida al gradiente de presión y la fuerza de Coriolis). Por ejemplo, la fuerza de fricción a una altura de 610 m sobre la superficie es 5.7 veces menor que la fuerza de Coriolis a una latitud de 37°N , mientras que cerca de la superficie (~ 50 m) es sólo 1.7 veces menor (Hsu 1988, pág. 137). Por simplicidad y en primera aproximación, la fuerza de fricción será despreciada, por lo que en este trabajo se considerará $F_f = 0$.

El término de fricción se vuelve importante en niveles cercanos a la superficie y, para el caso particular en estudio, en el momento en que un ciclón tropical entra al continente.

2.2.4 Fuerzas aparentes

Con base en la ecuación (2.7), la segunda ley de Newton aplicada a un elemento de fluido de densidad ρ , moviéndose con una velocidad \vec{u} en la presencia de un gradiente de presión ∇p y un campo gravitacional descrito por \vec{g}^* , y despreciando las fuerzas

de fricción, es

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{g}^* - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (2.15)$$

que se aplica a un marco de referencia inercial. El interés de esta tesis está centrado en el movimiento relativo a ejes fijos con respecto a la superficie de la Tierra, la cual gira con una velocidad angular constante $\vec{\Omega}$ (fig. 5). Un sistema coordenado que rota con la Tierra no es inercial y fuerzas aparentes se originan, las cuales deben ser consideradas por un observador que participa en el movimiento de rotación. Este es el origen de las fuerzas aparentes.

Un vector \vec{A} en un marco de referencia Σ que rota con una velocidad angular $\vec{\Omega}$ con respecto al marco de referencia Σ' , tendrá una componente de movimiento $\vec{\Omega} \cdot \vec{A}$ en el sistema de referencia Σ' debido al movimiento relativo de ambos marcos de referencia (Spiegel 1978, pág. 147); por lo tanto

$$\left(\frac{D\vec{A}}{Dt} \right)_{\Sigma'} = \left(\frac{D\vec{A}}{Dt} \right)_{\Sigma} + \vec{\Omega} \cdot \vec{A}, \quad (2.16)$$

en donde el subíndice indica diferenciación con respecto al marco de referencia respectivo.

Ahora se representará la diferenciación en el sistema Σ' y las cantidades referidas a ese sistema con primas ('), mientras

que las cantidades no primadas serán referidas al sistema Σ . Si en particular el vector \vec{A} es el vector de posición \vec{r} , entonces de (2.17) se obtiene

$$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{\Omega} \cdot \vec{r} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \text{y } \frac{D' \vec{u}'}{Dt} &= \frac{D \vec{u}'}{Dt} + \vec{\Omega} \cdot \vec{u}' \\ &= \frac{D \vec{u}}{Dt} + \left(\frac{D \vec{\Omega}}{Dt} \right) \cdot \vec{r} + 2 \vec{\Omega} \cdot \vec{u} + \vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Al término $2 \vec{\Omega} \cdot \vec{u}$ se le denomina la aceleración de Coriolis y se aplica particularmente a partículas móviles en sistemas en rotación. Es perpendicular a la dirección de movimiento y al eje de rotación terrestre. La fuerza de Coriolis actúa como una "fuerza deflectora", normal a la velocidad, hacia la derecha del movimiento en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el hemisferio sur.

El término $\vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{r})$ es la aceleración centrípeta, y al término $\left(\frac{D \vec{\Omega}}{Dt} \right) \cdot \vec{r}$ a veces se le llama aceleración lineal.

Por lo tanto, en un marco de referencia que gira con una velocidad angular constante, la ecuación (2.15) se convierte en

$$\frac{D \vec{u}}{Dt} + 2 \vec{\Omega} \cdot \vec{u} + \vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}^* \quad (2.19)$$

$$\text{ó } \frac{D \vec{u}'}{Dt} = 2 \vec{u}' \times \vec{\Omega} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}^*, \quad (2.20)$$

donde $\vec{g} = \vec{g}^* - \Omega \times (\Omega \times \vec{r})$ es la aceleración debida a la gravedad que incluye a la aceleración centrífuga $-\Omega \times (\Omega \times \vec{r})$.

2.2.5 Ecuaciones de movimiento

El sistema de coordenadas que se está considerando (fig. 5) no es estrictamente cartesiano debido a que las direcciones de los ejes son funciones de la posición sobre la esfera terrestre. Si los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} están dirigidos a lo largo de los ejes x , y , z respectivamente, entonces considerando el cambio de los ejes con la posición se tendrá

$$\begin{aligned} \frac{D\hat{i}}{Dt} = & \left(\frac{D\Omega}{Dt} - \frac{u\nu \tan \phi}{a} + \frac{u\omega}{a} \right) \hat{i} \\ & + \left(\frac{D\nu}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{\omega\nu}{a} \right) \hat{j} + \left(\frac{D\omega}{Dt} - \frac{u^2}{a} + \frac{\nu^2}{a} \right) \hat{k}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde ϕ es la latitud y a es el radio terrestre. Además

$$\begin{aligned} 2\vec{u} \times \Omega = & 2\Omega(u \sin \phi - \omega \cos \phi) \hat{i} \\ & - 2\Omega u \sin \phi \hat{j} + 2\Omega \omega \cos \phi \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Las magnitudes de los distintos términos en las ecuaciones (2.21) y (2.22) serán muy distintas dependiendo de la escala de los movimientos en estudio. Para movimientos conocidos como de escala sinóptica, es decir, sistemas típicamente de 1000 km

en la dimensión horizontal que es mucho más grande que su dimensión vertical (del orden de 10 km), las velocidades verticales (del orden de 1 cm/s) son mucho más pequeñas que las velocidades horizontales (~10 m/s); por lo tanto, en la ecuación de momento (2.20) los términos que involucran w , en primera aproximación, pueden ser despreciados. Con esto, y debido a que aquellos términos que tienen al radio de la Tierra en el denominador son menores en alrededor de un orden de magnitud que los otros términos (por lo que serán despreciados), en primera aproximación la relación (2.20) puede ser simplificada a

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (2.23)$$

donde $f = 2\Omega \sin\theta$ es conocido como *parámetro de Coriolis* y ahora

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \hat{\mathbf{i}} \frac{Du}{Dt} + \hat{\mathbf{j}} \frac{Dv}{Dt}, \quad (2.24)$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.25)$$

en donde todos los términos son vectores en el plano horizontal, y expresada en sus componentes x (este) y y (norte):

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + f v, \quad (2.26)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) - f u. \quad (2.27)$$

La componente vertical de la ecuación de movimiento es:

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) - (g) \quad (2.28)$$

En la atmósfera las aceleraciones verticales del viento $\left(\frac{Dw}{Dt}\right)$ son pequeñas comparadas con la aceleración de la gravedad y la debida al gradiente de presión; por lo tanto, si se desprecia el término $\left(\frac{Dw}{Dt}\right)$, se tendrá una "atmósfera hidrostática"; entonces la ecuación (2.28) se reduce a la ecuación hidrostática:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho (g) \quad (2.29)$$

la que indica que la fuerza debida a la presión atmosférica en cualquier punto es igual al peso de la columna de aire, con sección transversal unitaria, que se encuentra sobre dicho punto.

2.3 ECUACION DE VORTICIDAD

La ecuación de movimiento empleada en lo que resta de esta tesis es la relación conocida en Meteorología como "ecuación de vorticidad", la cual se aplica a una atmósfera barotrópica* que se supone homogénea, de densidad uniforme y en

**Barotrópico*.- El estado de un fluido en el que las superficies de densidad constante (o temperatura) coinciden con las superficies de presión constante.

la cual se ignoran los movimientos verticales ($w=0$). Estas condiciones convierten a las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.6) en las ecuaciones que definen lo que es llamado flujo barotrópico no divergente:

$$\frac{Dv}{Dt} + f u = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} , \quad (2.30)$$

$$\frac{Du}{Dt} - f v = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} , \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \quad (2.32)$$

donde $\Phi = \frac{P}{\rho}$ es conocido como geopotencial.

De la ecuación (2.32) se sigue que $v dx - u dy$ es una diferencial exacta, digamos igual a $d\psi$. Entonces

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y} , \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.33)$$

y la función escalar desconocida $\psi(x,y,t)$, llamada "función de corriente", está definida por

$$\psi - \psi_0 = \int (v dx - u dy) , \quad (2.34)$$

donde ψ_0 es una constante y la integral de línea está tomada a lo largo de una curva arbitraria que une algún punto de referencia O con

el punto P de coordenadas x, y .

Con objeto de eliminar las dificultades que se presentan con el uso de las coordenadas cartesianas tangenciales a la superficie terrestre, se aproximará el parámetro de Coriolis con una relación lineal: Escogiendo una latitud central φ_0 (en donde $y = 0$) y usando el teorema de Taylor, se tiene

$$f = f_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=0} y, \quad (2.35)$$

pero

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} (2 \Omega \sin \varphi) \right|_{\varphi_0} = \frac{2 \Omega}{a} \cos \varphi_0 = \beta, \quad ,$$

entonces

$$f = f_0 + \beta y. \quad (2.36)$$

A esto se le conoce como aproximación del plano beta.

Diferenciando las relaciones (2.30) y (2.31) con respecto a x y y respectivamente y restando, se obtiene la ecuación de vorticidad, la cual contiene sólo la función de corriente como variable dependiente:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\nabla^2 \psi, \psi) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.37)$$

donde J es el jacobiano: $J(\nabla^2\phi, \psi) = \psi_y (\nabla^2\phi)_x - \psi_x (\nabla^2\phi)_y$,
 los subíndices indican derivada parcial respecto a esa variable y ∇^2 es
 el operador de Laplace $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

La ecuación barotrópica de vorticidad representa un modelo de un fluido homogéneo, incompresible, confinado entre fronteras horizontales y sin fricción. Definitivamente la atmósfera no cumple con estas condiciones. Sin embargo, esta aproximación está justificada observacionalmente a un nivel atmosférico de alrededor de 500 mb, en el cual la ecuación de vorticidad sirve como una ecuación de pronóstico para movimientos de escala sinóptica, siendo un caso particular de éstos los relacionados con los ciclones tropicales.

CAPITULO III

SOLUCION EN SERIE DE LA ECUACION DE VORTICIDAD

En este capítulo se expone la técnica desarrollada por Adem (1956), por medio de la cual una ecuación de pronóstico o sistema de ecuaciones pueden ser integradas, y se aplica al caso específico de la ecuación de vorticidad.

La solución obtenida por este método es una solución en serie que tiene como variable al tiempo y puede ser particularmente útil cuando se quieran obtener soluciones analíticas aproximadas. Con este método es posible comprender la influencia de los distintos parámetros involucrados en el pronóstico.

La solución en serie aquí presentada, tiene una orientación especial hacia el estudio de vórtices atmosféricos.

3.1 SOLUCION EN SERIE PARA LA ECUACION DE VORTICIDAD BAROTROPICA NO DIVERGENTE

Dando la función de corriente ψ en $t = 0$ y condiciones de frontera para la derivada ψ_t , se puede calcular ψ_t resolviendo la ecuación de vorticidad barotrópica no divergente (2.37).

Diferenciando la relación (2.37) con respecto a t , se obtiene

$$\nabla^2 \psi_{tt} = J(\nabla^2 \psi_t, \psi) + J(\nabla^2 \psi, \psi_t) - \beta \psi_{tx} \quad (3.1)$$

en donde ψ_t puede ser calculada de (2.37). Nótese que la ecuación (3.1) tiene la misma forma que la ecuación (2.37) en su derivada mayor respecto al tiempo.

Similarmente, por diferenciación sucesiva con respecto a t , se pueden obtener las ecuaciones dando las derivadas de orden mayor

$$\nabla^2 \psi_{ttt} = J(\nabla^2 \psi_t, \psi) + 2J(\nabla^2 \psi_t, \psi_t) + J(\nabla^2 \psi, \psi_{tt}) - \beta \psi_{ttx} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_{tttt} = & J(\nabla^2 \psi_{ttt}, \psi) + 3J(\nabla^2 \psi_{tt}, \psi_t) + 3J(\nabla^2 \psi_t, \psi_{tt}) \\ & + J(\nabla^2 \psi, \psi_{ttt}) - \beta \psi_{tttx} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por lo tanto se tiene la posibilidad de obtener una solución en serie para la ecuación de vorticidad resolviendo las ecuaciones (2.37), (3.1), (3.2), (3.3),... las cuales son todas del mismo tipo en su derivada mayor respecto al tiempo.

La solución se obtiene como una serie de Taylor:

$$\Psi = \Psi \Big|_{t=0} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=0} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \Big|_{t=0} t^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3} \Big|_{t=0} t^3 + \dots, \quad (3.4)$$

donde Ψ es la función de corriente en el tiempo inicial $t_0=0$, y Ψ es la función de corriente al tiempo t . Este desarrollo es con el objeto de considerar funciones de corriente que hagan que la serie converja con pocos términos; es decir, que las derivadas $\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}$ sean pequeñas comparadas con la derivada anterior $\frac{\partial^n}{\partial t^n}$.

3.2 SOLUCION DE UNA ECUACION DE POISSON

En esta sección se presenta una solución de una ecuación del tipo

$$\nabla^2 z = F(x, y), \quad (3.5)$$

donde $F(x,y)$ es función de las variables x, y . Se

comenzará por derivar una solución de esa ecuación, de forma tal que sea de utilidad en la obtención de soluciones analíticas para las ecuaciones (2.37), (3.1), (3.2), (3.3).

Escribiendo (3.5) en coordenadas polares (r, θ) y considerando que la función $V(x, y)$ puede ser expresada como una suma de términos del tipo $F_1(r) \text{sen}(n\theta)$ y $F_2(r) \text{cos}(n\theta)$, donde n es un entero, entonces se tendrá una ecuación del tipo:

$$\nabla^2 z = F_n(r) \begin{vmatrix} \cos n\theta \\ \text{sen } n\theta \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Una solución a esta ecuación es:

$$z = \left[\frac{r^n}{2n} \int r^{-n+1} F_n(r) dr - \frac{r^{-n}}{2n} \int r^{n+1} F_n(r) dr \right] \begin{vmatrix} \cos n\theta \\ \text{sen } n\theta \end{vmatrix}, \quad (3.7)$$

lo cual puede ser comprobado por sustitución directa en la ecuación (3.6).

3.3 SOLUCION EN SERIE PARA UN CICLON BAROTROPICO

Sea Ψ la función de corriente que representa la circulación horizontal de un vórtice. Supóngase que la función de corriente inicial $\Psi(r)$ es función solamente de r ,

tal que para $r > r_c$ es igual a cero (en este caso r_c es el radio o tamaño del vórtice); considérese además que $\Psi(r)$ y sus primeras tres derivadas son funciones continuas y diferenciables. Sustituyendo $\Psi(r)$ en (2.37) se obtiene:

$$\nabla^2 \Psi_t = -\beta \cos \theta \frac{d\Psi}{dr}, \quad (3.8)$$

en donde Ψ_t puede ser obtenida aplicando la ecuación (3.7) y especificando las condiciones a la frontera. Suponiendo ahora que Ψ_t es igual a cero en $r = R_o$ (R_o es el radio de la región en que se encuentra el vórtice), se obtiene:

$$\Psi_t = -\frac{\beta \cos \theta}{r} \int_0^r \Psi(r) r dr + \frac{\beta r \cos \theta}{R_o^2} \int_0^r \Psi(r) r dr. \quad (3.9)$$

Se supondrá ahora que $R_o \gg r_c$, por lo que el último término del segundo miembro de la ecuación (3.9) puede ser despreciado.

Sustituyendo $\Psi(r)$, (3.8) y (3.9) en (3.1) se obtiene, después de alguna manipulación (ver Apéndice 2):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_{tt} = & \beta \sin \theta \left[-\frac{1}{r} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{d(\nabla^2 \Psi)}{dr} \int_0^r \Psi(r) r dr \right] + \\ & + \beta^2 \left[\frac{\Psi}{2} + \frac{\cos \theta}{2r^2} \int_0^{r_c} \frac{d\Psi}{dr} r^2 dr \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

en donde, aplicando nuevamente (3.7) y condiciones de frontera

del tipo usado para determinar Ψ_t (esto es $\Psi_{tt} = 0$ en $r = R_0$), se obtiene Ψ_{tt} .

De manera similar, se pueden obtener las derivadas de orden mayor. Por ejemplo, Ψ_{ttt} contiene términos con $\beta \cos \theta$, $\beta^2 \sin 2\theta$ y $\beta^3 \cos 3\theta$.

Considerando ahora el valor numérico de la variación del parámetro de Coriolis (β), que es del orden de $10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, y haciendo el análisis del orden de los coeficientes de β para las escalas y velocidades involucradas en un ciclo tropical, puede verse que los términos en potencias superiores de β son pequeños comparados con los términos de β a la primera potencia; por ejemplo, en (3.10) el término en β^2 es, para propósitos prácticos, despreciable comparado con el término en β . Para el propósito de este trabajo es suficiente considerar los términos en β^m sólo con $m = 1$.

Resolviendo la ecuación (3.1) los términos $J(\nabla^2 \Psi_t, \Psi)$ y $J(\nabla^2 \Psi, \Psi_t)$ dan origen a un término en β , y $\beta \Psi_{ttx}$ da origen a un término en β^2 . Ahora, en la ecuación (3.2), los únicos términos en β son $J(\nabla^2 \Psi, \Psi_{tt})$ y $J(\nabla^2 \Psi_{tt}, \Psi)$; en (3.3) los términos en β son $J(\nabla^2 \Psi, \Psi_{ttt})$ y $J(\nabla^2 \Psi_{ttt}, \Psi)$; y así para las demás ecuaciones.

Aplicando iterativamente la ecuación (3.7) y siguiendo un procedimiento similar, se obtiene que la solución puede ser

escrita en la forma

$$\Psi(r, \theta, t) = \Psi(r) + \beta \cos \theta \left[F_1 t - \frac{F_3}{3!} t^3 + \frac{F_5}{5!} t^5 - \dots \right] - \beta \sin \theta \left[\frac{F_2}{2} t^2 - \frac{F_4}{4!} t^4 + \frac{F_6}{6!} t^6 - \dots \right] + R, \quad (3.11)$$

donde $F_n = -\frac{1}{2r} \int_0^r F_n^* r^2 dr + \frac{r}{2} \int_{r_0}^r F_n^* dr$,

con $F_1^* = -\frac{d\Psi}{dr}$,

$$F_n^* = \frac{1}{r} \left[\frac{d(\nabla^2 \Psi)}{dr} F_{n-1} - \frac{d\Psi}{dr} F_{n-1}^* \right]$$

y R representa la suma de los términos que contienen β a una potencia mayor que uno, es decir, β^m , $m > 1$.

Considerando ahora la siguiente función de corriente particular:

$$\Psi(r) = \Psi_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2n} \right\}, \quad r < r_0$$

$$\Psi(r) = 0, \quad r > r_0 \quad (3.12)$$

con el entero $n > 4$. Esta función de corriente representa el movimiento horizontal en un vórtice ciclónico de radio r_0 cuando $\Psi_0 < 0$, y uno anticiclónico cuando $\Psi_0 > 0$. La función (3.12) fue escogida porque representa aproximadamente la función de corriente en un ciclón real y porque ella y sus primeras tres derivadas son continuas en r_0 .

El valor de Ψ_0 está dado como una función del radio r_0 y de la máxima velocidad en el vórtice $v_{\text{máx}} = \left(\frac{d\Psi}{dr}\right)_{\text{máx}}$. Por ejemplo, para $n=4$, $v_{\text{máx}}$ está en $(r/r_0)^2 = 1.7$ y $\Psi_0 = -0.525 r_0 v_{\text{máx}}$.

Sustituyendo la ecuación (3.12) en la (3.11) se obtiene

$$\frac{\Psi}{\Psi_0} = \frac{\Psi}{\Psi_0} + r_0 \beta \cos \theta \left[G_1 t + G_3 \left(\frac{v_{\text{máx}}}{r_0}\right)^2 t^3 + G_5 \left(\frac{v_{\text{máx}}}{r_0}\right)^4 t^5 + \dots \right] + r_0 \beta \sin \theta \left[G_2 \left(\frac{v_{\text{máx}}}{r_0}\right) t^2 + G_4 \left(\frac{v_{\text{máx}}}{r_0}\right)^3 t^4 + \dots \right] + R, \quad (3.13)$$

donde G_1, G_2, G_3, \dots son funciones de la variable adimensional r/r_0 .

Esta solución puede ser también escrita en la forma

$$\frac{\Psi}{\Psi_0} = \frac{\Psi}{\Psi_0} + \Lambda \cos \theta \left[G_1^* T + G_3^* T^3 + \dots \right] + \Lambda \sin \theta \left[G_2^* T^2 + G_4^* T^4 + \dots \right] + R, \quad (3.13')$$

donde G_1^*, G_2^*, \dots son funciones de la variable r/r_0 y dependen directamente de la función de corriente inicial: $T = \left(\frac{v_{\text{máx}}}{r_0}\right) t$ es un tiempo adimensional que también puede ser escrito como $T = \frac{\Psi}{r_0^2} t$; $\Lambda = r_0^2 \beta / v_{\text{máx}}$ (o también $\Lambda = r_0^3 \beta / \Psi_0$) es una constante.

Nótese en la ecuación (3.13') que si el tiempo adimensional T es menor a la unidad, las potencias T^m con $m > 1$ serán menores que T , y dependiendo del comportamiento de las funciones G_1^*, G_2^*, \dots , la solución en serie (3.13') podrá ser truncada con relativamente pocos términos.

La solución (3.14) expresa el comportamiento de un vórtice como función de la latitud, la máxima velocidad en el vórtice, el radio del mismo y puede ser utilizada para estudios comparativos de vórtices variando estos tres parámetros; por ejemplo, para estudiar la evolución de dos vórtices similares en su campo de velocidades, pero de un tamaño distinto, o en una localización geográfica diferente. Una solución para el caso general del flujo barotrópico no divergente se considera en el Apéndice 3.

CAPITULO IV

MOVIMIENTO DE CICLONES EN UN PLANO BETA

La solución en serie de la ecuación de vorticidad presentada en el capítulo anterior, será aplicada a la función de corriente dada por la ecuación (3.12), considerando los casos representativos $n = 4$ y $n = 8$, los que serán referidos como Ciclón 1 y Ciclón 2 respectivamente, calculándose la evolución en el tiempo de sus funciones de corriente con el fin de comparar los resultados obtenidos.

4.1 DEFINICION DE LOS CICLONES

La función de corriente dada por la ecuación (3.12)

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^n, & r < r_0 \\ \Psi &= 0, & r > r_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

define la forma de los vórtices, la cual es caracterizada por tres parámetros: Ψ_0 , r_0 y n .

r_0 representa su tamaño inicial.

La derivada $\frac{d\Psi}{dr}$ representa la velocidad del viento tangencial en el vórtice. En este caso $\frac{d\Psi}{dr}$ es proporcional a Ψ_0 , por ello Ψ_0 está relacionada con la velocidad máxima ($v_{\text{máx}}$) o fuerza del ciclón; mientras que el parámetro n influye en la concentración del viento alrededor del centro, puesto que el máximo de viento se acerca al centro cuando n crece.

Los perfiles de los ciclones a ser estudiados tendrán los siguientes valores de los parámetros:

Ciclón No. 1:

$$\Psi_0 = -1.575 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s} \quad (v_{\text{máx}} = 30 \text{ m/s})$$

$$r_0 = 10^7 \text{ m}$$

$$n = 4$$

Ciclón No. 2:

$$\Psi_0 = -1.177 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s} \quad (v_{\text{máx}} = 30 \text{ m/s})$$

$$r_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$n = 8$$

El Ciclón 1, el caso antecedente, corresponde al vórtice estudiado por Adem (1956), quien pronosticó su evolución por un

período de 10 horas. El Ciclón 2 tiene el mismo tamaño y $v_{m\acute{a}x}$ que el Ciclón 1, pero, para propósitos comparativos, difiere apreciablemente en la concentración de viento. La figura 6 muestra la función de corriente para ambos ciclones, y la figura 7 el perfil inicial de vientos tangenciales.

En el Ciclón 1 la distancia $r_{m\acute{a}x}$, a la cual se alcanza la velocidad máxima, es de 378 Km, mientras que para el Ciclón 2 es de 258 Km.

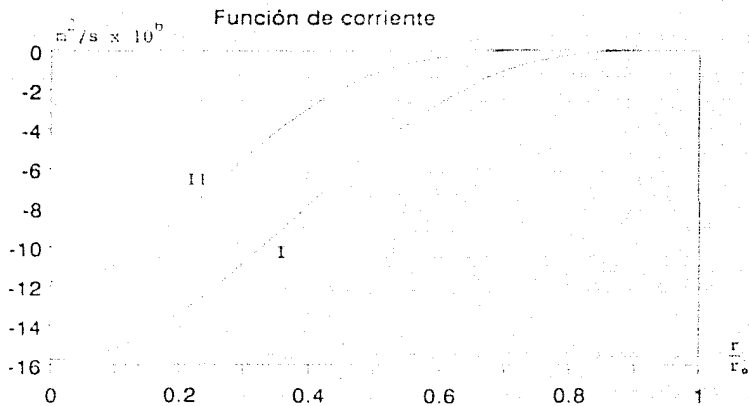


Figura 6. Perfil de la función de corriente inicial (Ψ) como función de (r/r_0) para el Ciclón No. 1 (I) y el Ciclón No. 2 (II).

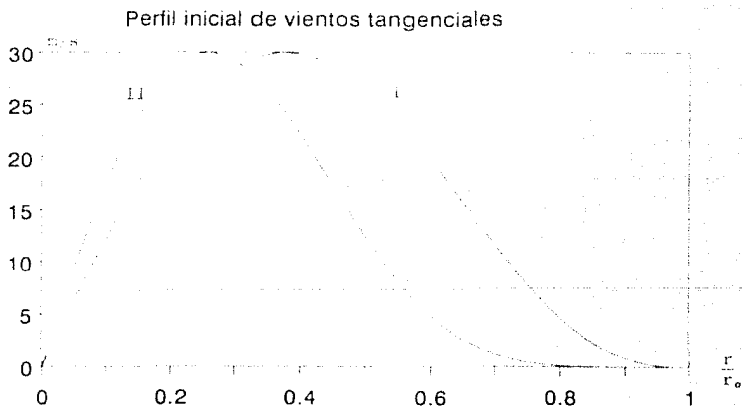


Figura 7. Perfiles iniciales de viento tangencial como función de (r/r_0) para el Ciclón No. 1 (I) y el Ciclón No. 2 (II).

4.2 RESULTADOS

En esta sección se examinará el problema básico del movimiento de los ciclones 1 y 2 en un plano beta, sin flujo ambiental. Se ha escogido $\beta = 2.23 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ que corresponde a 12.5° de latitud norte.

Para el Ciclón 1 los resultados correspondientes al cálculo de los términos de la serie βt , βt^3 y βt^5 evaluados para $|\cos \theta| = 1$ y los términos βt^2 y βt^4 para $|\sin \theta| = 1$, se muestran gráficamente en la figura 8 a un tiempo $t = 36$ horas. Para el Ciclón 2 se muestran los mismos resultados en la figura 9, pero en este caso $t = 18$ horas y el término βt^5 no fue calculado.

A partir del análisis de las figuras 8 y 9, es notable la importancia que tiene la distribución inicial de vientos (fig. 7), en la contribución de los distintos términos (βt , βt^2 , ...) de la solución en serie a un tiempo dado. Es decir, el tiempo de pronóstico usando n términos de la solución en serie depende fuertemente de la distribución inicial de vientos.

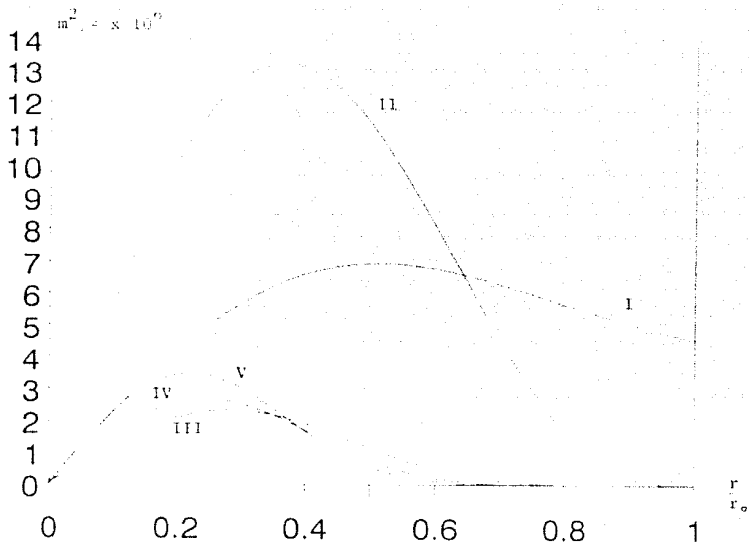


Figura 8. CICLÓN No. 1: Gráfica de los términos βt , βt^3 y βt^5 de la solución en serie evaluados para $|\cos \theta| = 1$ (líneas I, III y V respectivamente) y βt^2 , βt^4 evaluados para $|\sin \theta| = 1$ (líneas II y IV respectivamente), a un tiempo $t = 36$ hr.

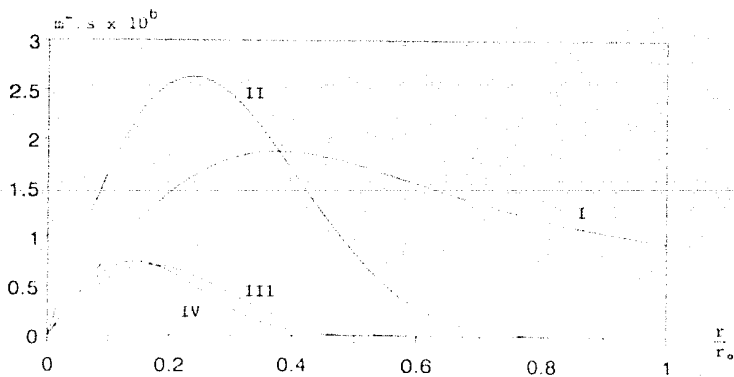


Figura 9. CICLÓN No. 2: Gráfica de los términos βt y βt^3 de la solución en serie evaluados para $|\cos \theta| = 1$ (líneas I y III respectivamente) y βt^2 , βt^4 evaluados para $|\sin \theta| = 1$ (líneas II y IV respectivamente), a un tiempo $t = 18$ hr.

La figura 10 muestra la evolución de la función de corriente del Ciclón 1, a $t = 0, 12, 24$ y 36 horas. Se observa que las isolíneas* exteriores de la función de corriente tienen una evolución asimétrica, con una marcada elongación hacia el oeste; las isolíneas internas permanecen más simétricas. Es notable también un aumento en el gradiente o "apiñamiento" de las isolíneas al paso del tiempo, sobre todo en la mitad este del ciclón. La última isolínea externa dibujada es la primera que no se cierra.

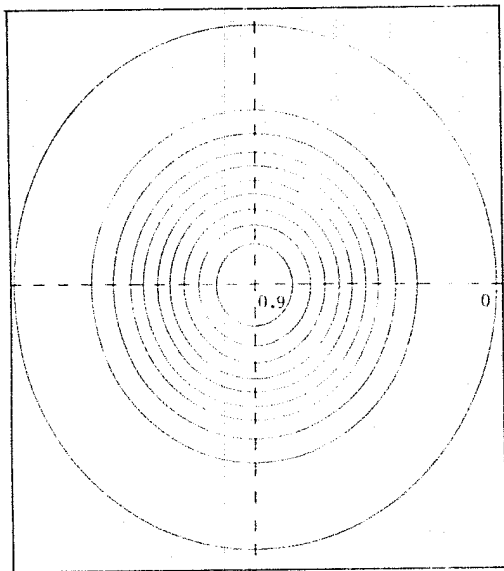
Por otro lado, el tamaño del ciclón, considerado como el "radio" de la primera isolínea externa cerrada, disminuye con el paso del tiempo, hasta cerca de un 60% del tamaño original en $t = 36$ hrs.

No se muestra la función de corriente en $t = 48$ horas debido a que, para este tiempo, hay una clara deformación en la gráfica, entendiéndose con esto que es necesario realizar el cálculo con más términos de la solución en serie para obtener un resultado satisfactorio.

La Tabla I indica la posición, en coordenadas polares, del máximo de la función de corriente del Ciclón 1 como función del tiempo. El máximo de la función de corriente es considerado en este trabajo como el centro del ciclón, ya que dicho máximo se traduce en una región interior del vórtice donde la velocidad del viento es mínima, lo que equivale en un caso real al ojo del ciclón.

***Isolínea.-** Una línea, sobre una superficie de referencia dada, trazada a través de todos los puntos donde una cantidad determinada tiene el mismo valor numérico.

a) $t = 0$



b) $t = 12 \text{ hr}$

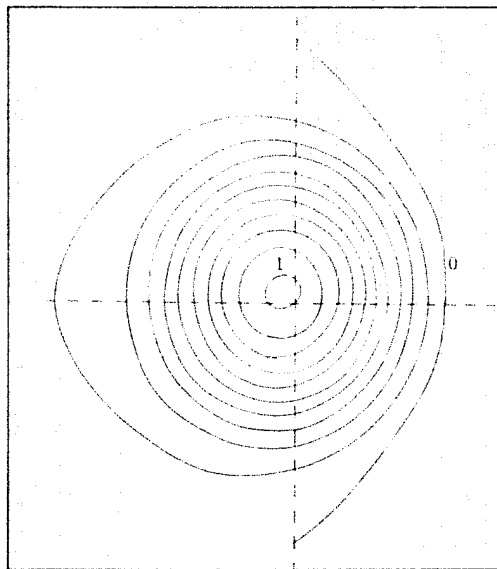
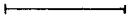
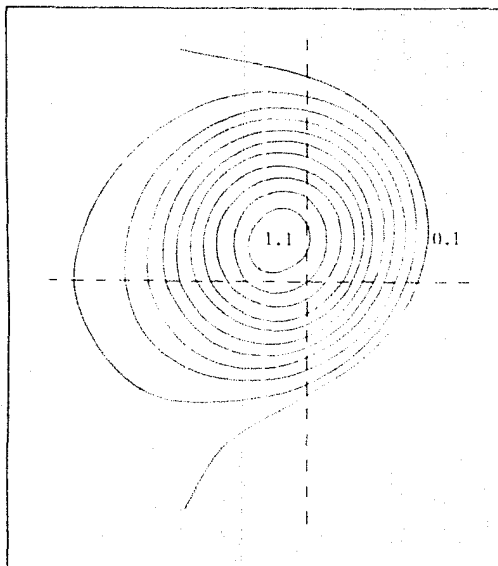


Figura 10. Evolución de las isolíneas de la función de corriente (Ψ), evaluadas al tiempo indicado. El intervalo entre cada isolínea es de $\Psi_0/10 = 1.575 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$. Se indican los valores Ψ_0 de la función de corriente para las isolíneas más interna y externa dibujadas. Escala:  500 km

c) $t = 24$ hr



d) $t = 36$ hr

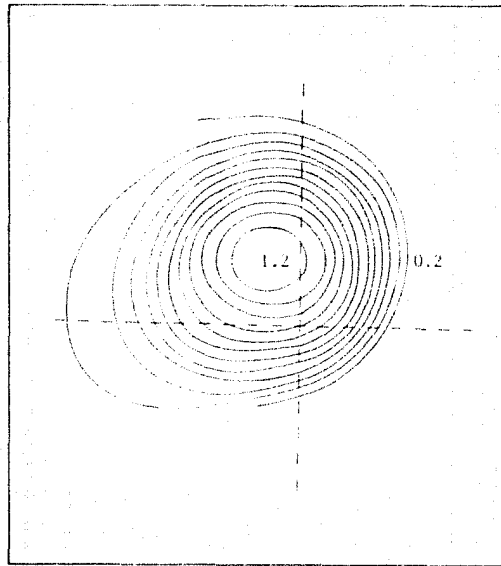


Figura 10. Continuación.

TABLA 1
POSICION DEL CENTRO
DEL CICLON 1 COMO
FUNCION DEL TIEMPO

Tiempo (hr)	Distancia del centro respecto a la posición inicial (km)	Angulo del centro medido en sentido antihorario a partir del este (radianes)
0	0	-
6	33	2.75
12	77.5	2.48
18	132	2.32
24	186	2.20
30	240	2.10
36	296	2.02
42	355	1.96
48	410	1.93

La figura 11 muestra la trayectoria a intervalos de 6 horas del centro del Ciclón 1, durante las primeras 48 horas de evolución. El origen de coordenadas es la posición inicial ($t = 0$).

En las figuras 10 y 11 es evidente el desplazamiento del Ciclón 1 hacia el noroeste. La velocidad y dirección de translación de este desplazamiento son analizadas en las figuras 12 y 13. En las primeras 42 horas de evolución se observa una aceleración en el movimiento del centro del ciclón, incrementándose su velocidad de translación de 1.53 m/s en las primeras 6 horas a 2.96 m/s en $t = 42$ horas.

Este desplazamiento hacia el noroeste y la aceleración del ciclón son consistentes con los resultados obtenidos por diversos investigadores que han analizado el movimiento de vórtices en un plano beta (por ejemplo: De Maria, 1985; Ross y Kurihara, 1992; Chan y Williams, 1987).

Vórtice No. 1

Trayectoria

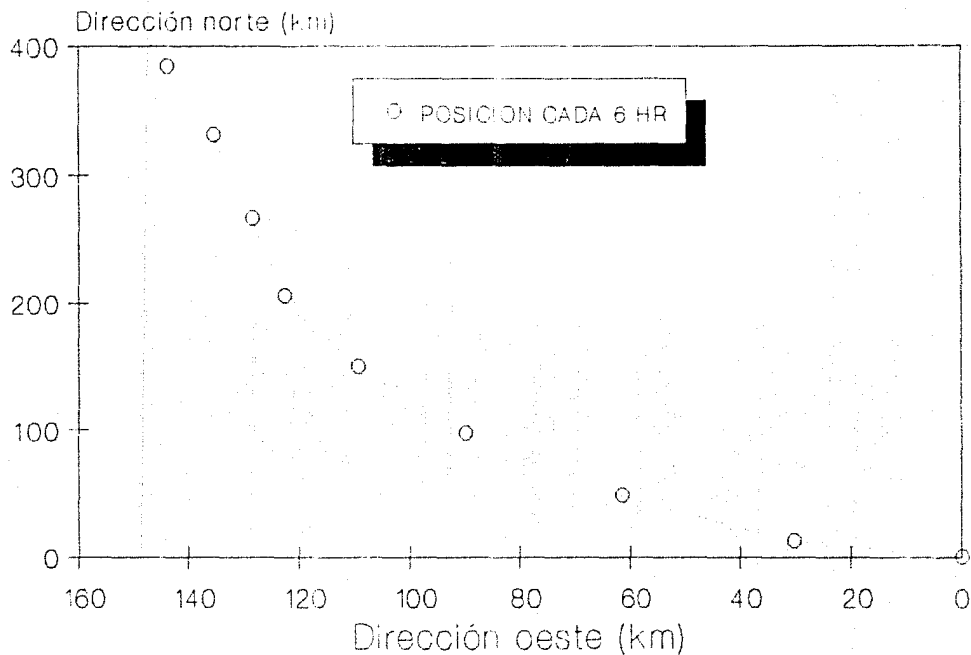


Figura 11. Trayectoria del Ciclón 1 durante una simulación de 48 horas en un plano beta, donde los octágonos indican la posición del centro a intervalos de 6 horas.

VORTICE No. 1

Velocidad de translación

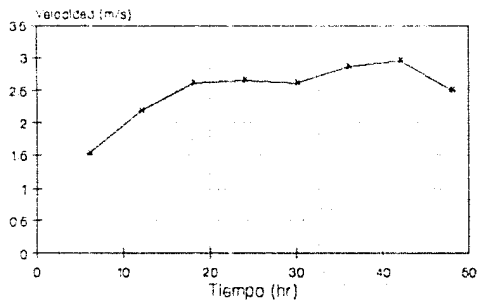


Figura 12. Evolución de la velocidad de translación del Ciclón 1 a intervalos de 6 horas.

Dirección de translación

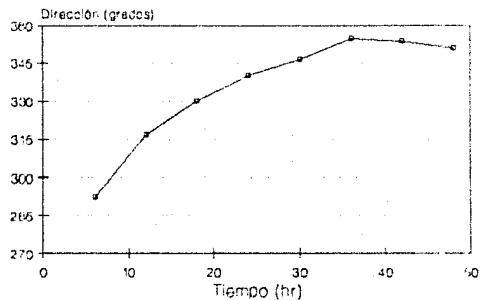


Figura 13. Dirección de translación del Ciclón 1 a intervalos de 6 horas (grados, medidos en dirección horaria desde el norte).

En la figura 13 se observa que la dirección de translación aumenta monótonamente de 292° (medidos en dirección horaria desde el norte), a $t=6$ horas, hasta 355° en $t=36$ horas; disminuyendo luego a 351° en $t=48$ horas. Este comportamiento en la dirección de translación no es observado en los trabajos citados (De María, 1985, etc.). La justificación de este resultado es atribuible a la distribución inicial de vientos del Ciclón 1, pues, como demostraron Fiorino y Elsberry (1989), la translación del vórtice asociada con el efecto beta depende sensiblemente de la forma de esta distribución.

En el caso del Ciclón 2 se realizó el cálculo de su trayectoria usando cuatro términos de la solución en serie (βt , $\beta^2 t^2$, $\beta^3 t^3$ y $\beta^4 t^4$). La Tabla 2 indica la posición, en coordenadas polares, del máximo de la función de corriente para el Ciclón 2 como función del tiempo.

La figura 14 muestra la trayectoria a intervalos de 6 horas del centro del Ciclón 2, durante las primeras 24 horas de evolución. A partir de $t = 18$ horas es evidente que son necesarios más términos de la solución en serie para poder hacer un pronóstico adecuado.

TABLA 2

POSICION DEL CENTRO DEL CICLON 2 COMO FUNCION DEL TIEMPO

Tiempo (hr)	Distancia del centro respecto a la posición inicial (km)	Angulo del centro medido en sentido antihorario a partir del este (radianes)
0	0	-
6	20	2.60
12	51	2.45
18	90	2.55
24	120	2.76
30	130	3.16

Vórtice No. 2

Trayectoria

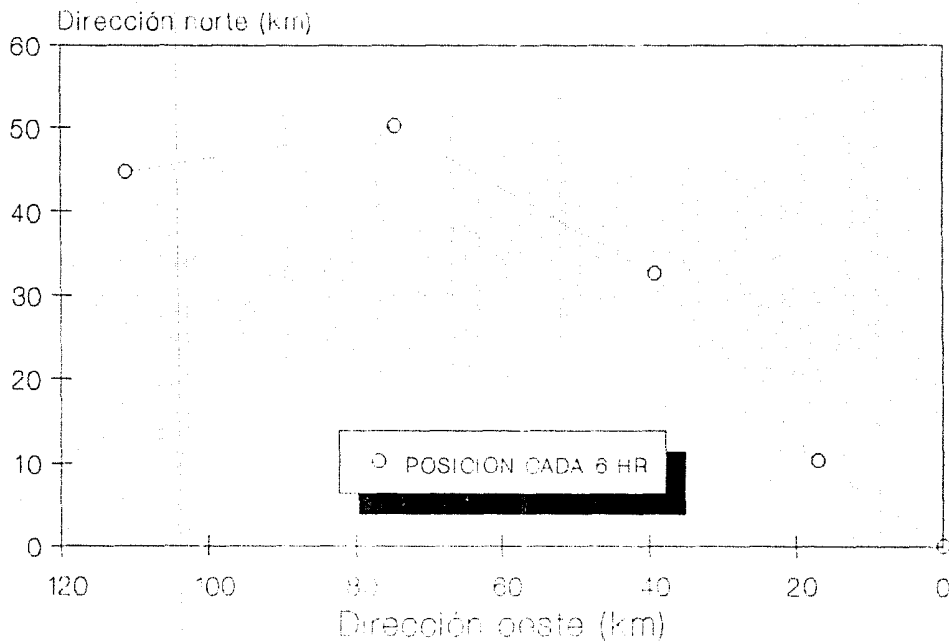


Figura 14. Trayectoria del Ciclón 2 durante una simulación de 24 horas en un plano beta, donde los octágonos indican la posición del centro a intervalos de 6 horas.

La velocidad de translación del Ciclón 2 (figura 15) se incrementa de 0.93 m/s en las primeras 6 horas a 1.83 m/s en $t = 18$ horas. Al comparar este resultado con la velocidad de translación desarrollada por el Ciclón 1, se verifican las observaciones en relación a que los ciclones grandes tienen una velocidad de translación mayor a la de ciclones pequeños (Anthes, 1982, pág. 107).

La dirección de translación del Ciclón 2 es analizada en la figura 16. El desplazamiento es en dirección noroeste, pero tiene una evolución distinta a la del Ciclón 1, atribuyéndose este comportamiento a la influencia de la distribución inicial de vientos.

VORTICE No. 2

Velocidad de translación

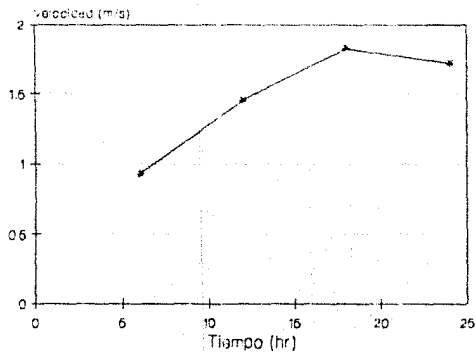


Figura 15. Evolución de la velocidad de translación del Ciclón 2 a intervalos de 6 horas.

Dirección de translación

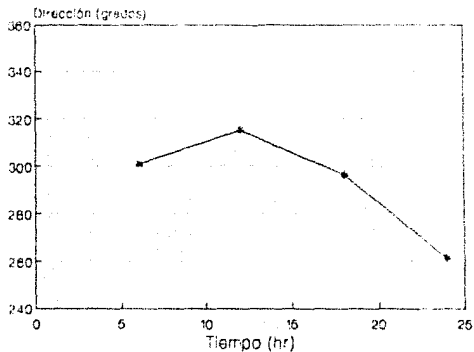


Figura 16. Dirección de translación del Ciclón 2 a intervalos de 6 horas (grados, medidos en dirección horaria desde el norte).

Finalmente, se realizó el cálculo del campo de vientos para el Ciclón 1 después de 36 horas de evolución, usando la fórmula

$$V(r, \theta) = \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.2)$$

donde V es la velocidad del viento y Ψ está dada por la ecuación (3.11).

Las isotacas* calculadas a partir de esta fórmula son dibujadas en la figura 17, a intervalos de 10 m/s. Para propósitos comparativos, en la figura 18 se muestran las isotacas de nivel bajo (950 mb) en nudos del huracán Inez el 18 de septiembre de 1966 (Anthes, 1982, pág. 20). Se observa claramente una distribución similar, tanto en magnitud como en distribución espacial, existiendo una diferencia importante en el tamaño de los ciclones.

*Isotaca.- Una línea en una superficie dada que conecta los puntos con igual velocidad del viento (también llamada isovela).

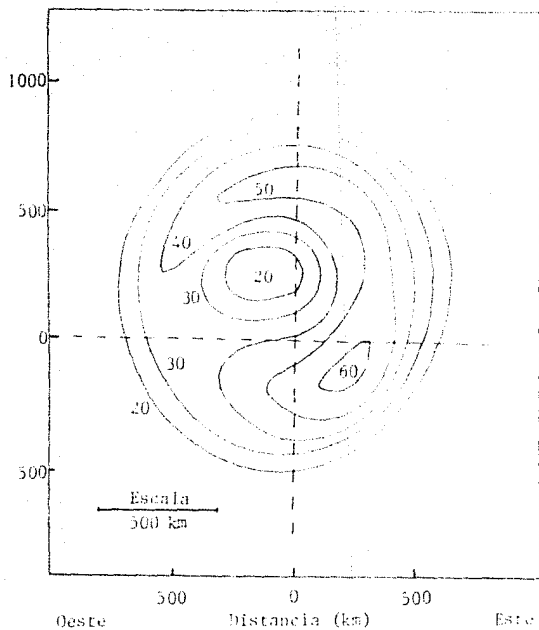


Figura 17. Isotacas (m/s) del Ciclón No. 1 obtenidas después de 36 horas de simulación. El intervalo entre cada isotaca es de 10 m/s.

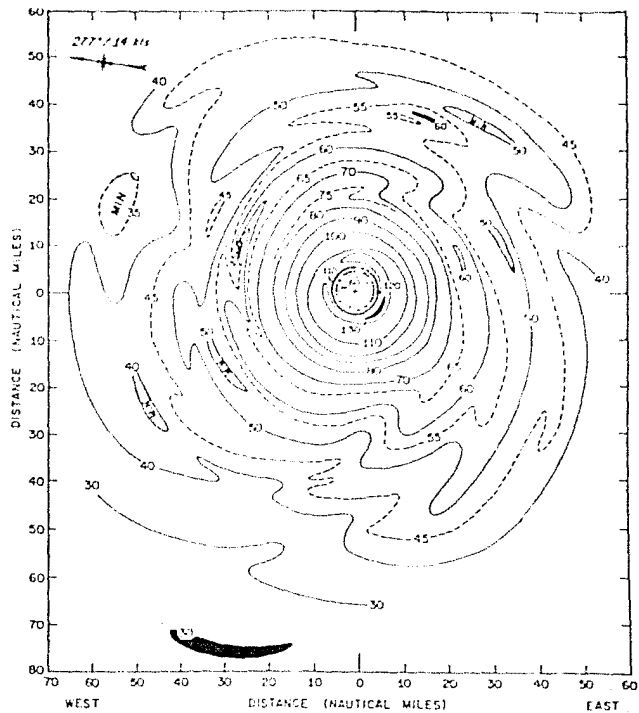


Figura 18. Isotacas de nivel bajo (950 mb) en nudos, del huracán Inez el 18 de septiembre de 1966 (Authos, 1982).

CONCLUSIONES

El movimiento de ciclones en un plano beta descrito a través de un modelo barotrópico no divergente, usando una solución en serie de la ecuación de vorticidad, tiene resultados semejantes a los obtenidos, durante las primeras horas de evolución, con experimentos numéricos y otras soluciones analíticas sobre el tema reportados en la literatura.

Se observó que la forma de la distribución inicial del viento en el ciclón tiene una marcada influencia sobre el tiempo de pronóstico y sobre la evolución de la velocidad y dirección de translación de los ciclones. Esto confirma el hecho observado de que ciclones grandes tienen una velocidad de translación mayor a la de ciclones pequeños.

En la evolución simulada de los ciclones considerados, inicialmente simétricos, se aprecian cambios en su tamaño y en el campo de vientos, así como un movimiento de translación en la dirección noroeste.

Después de 36 horas de simulación de un ciclón con radio inicial de 1,000 km (Ciclón 1) se observó que su tamaño disminuyó alrededor de un 40% y el campo de vientos se intensificó reproduciendo en forma aproximada el medido en ciclones reales, tanto en magnitud como en distribución espacial; con un claro movimiento de translación en dirección noroeste a una velocidad que se incrementó de 1.53 m/s en las primeras 6 horas a 2.86 m/s a un tiempo $t=36$ hr.

En el caso de los ciclones considerados y a partir de las gráficas que muestran la contribución radial de los diferentes términos de la solución en serie (figuras 8 y 9), se nota que mientras mayor sea el orden de los términos, su contribución afecta un área más cercana al origen que la región afectada por el término anterior; entonces será posible tener una simulación a un tiempo mucho mayor con relativamente pocos términos de la solución en serie, una vez que el ciclón se haya alejado lo suficiente del origen como para no ser afectado por el resto de los términos de la solución en serie.

En el futuro, se tiene contemplado continuar estudiando el movimiento de ciclones tropicales en un plano beta, particularmente los siguientes casos:

- i) Interacción entre dos ciclones.
- ii) Interacción entre un ciclón y un anticiclón.
- iii) Incorporación de la fricción en superficie.
- iv) Movimiento de ciclones inmersos en un flujo ambiental.
- v) Movimiento de ciclones, regenerándolos después de cierto intervalo de tiempo.

Si se quiere realizar una comparación del movimiento de translación entre un ciclón real y uno simulado, es necesario considerar en la simulación la corriente conductora externa al ciclón; para lo cual son necesarios datos abundantes, sobre todo de las regiones externas inmediatas al ciclón.

Este trabajo es una visión limitada de los procesos físicos que ocurren en un ciclón tropical, pues no se incluyen cálculos relativos a los mecanismos termodinámicos que mantienen al ciclón; además de que no se intenta modelar su estructura vertical, así como tampoco se consideran procesos de intensificación o decaimiento, interacción con los alrededores a través de las diferentes fronteras, ni zonas de precipitación.

APENDICE 1

TERMINOLOGIA DE LOS CICLONES TROPICALES EN EL ATLANTICO, PACIFICO NORORIENTAL Y PACIFICO CENTRAL

CENTRO.- Es el eje vertical o núcleo de un ciclón tropical. Determinado regularmente por patrones de vorticidad en nubes, viento y/o distribución de presión.

CICLON SUBTROPICAL.- Es un sistema de bajas presiones, desarrollándose sobre aguas subtropicales, que inicialmente contiene unas cuantas características tropicales. Con el paso del tiempo, el ciclón subtropical puede convertirse en tropical.

CICLON TROPICAL.- Un sistema cerrado de circulación con movimiento ciclónico, de carácter no frontal y escala sinóptica (1000 km), desarrollado sobre aguas tropicales o subtropicales y que tiene una circulación superficial definitivamente organizada.

DEPRESION SUBTROPICAL.- Un ciclón subtropical en el cual el viento máximo sostenido es menor o igual a 33 nudos.

DEPRESION TROPICAL.- Un ciclón tropical en el cual el viento máximo sostenido es menor o igual a 33 nudos.

EXTRATROPICAL.- Es un término usado para indicar que un ciclón ha perdido sus características tropicales. El término implica desplazamiento desde los trópicos hacia el polo y la conversión de la fuente de energía primaria del ciclón de la liberación de calor latente de condensación a procesos baroclínicos. Es importante notar que los ciclones pueden ser

extratropicales y todavía mantener vientos de huracán o de tormenta tropical.

FUERZA.- El promedio de la velocidad de los vientos en la circulación ciclónica.

HURACAN.- Un ciclón tropical de núcleo cálido en el cual el viento máximo sostenido es mayor o igual a 64 nudos.

INTENSIDAD.- Es indicada por el valor extremo de alguna variable meteorológica en un ciclón tropical. La presión mínima a nivel del mar y los vientos máximos sostenidos son comúnmente usados como una medida de intensidad.

MURO DE NUBES.- Una banda organizada de profundas nubes cumuloformes que rodean el área central de un ciclón tropical. El muro de nubes puede estar totalmente cerrado o rodear parcialmente el centro.

OJO.- El área central de un ciclón tropical cuando más de la mitad está rodeada por un muro de nubes.

ONDA TROPICAL.- Una vaguada o máximo de curvatura ciclónica en los vientos alisios del este. La onda puede alcanzar amplitud máxima en la parte inferior de la troposfera media, o puede ser el reflejo de una baja fría en la troposfera superior, o una extensión ecuatorial de una vaguada de latitudes medias.

PERTURBACION TROPICAL.- Un sistema discreto de convección aparentemente organizada, originada en los trópicos o subtrópicos, teniendo un carácter no frontal migratorio y que mantenga su identidad por lo menos durante 24 horas.

SUPER HURACAN.- Un huracán con vientos máximos sostenidos mayores o iguales a 130 nudos.

TAMAÑO.- El área de extensión de la circulación ciclónica es medida como la extensión en la que la velocidad de los vientos está por arriba de 17 m/s, o como el radio promedio de la última isobara externa cerrada, aunque estos dos valores no son exactamente equivalentes.

TORMENTA SUBTROPICAL.- Un ciclón subtropical en el cual el viento máximo sostenido está en el intervalo de 34 a 63 nudos inclusive.

TORMENTA TROPICAL.- Un ciclón tropical de núcleo cálido bien organizado, en el cual el viento máximo sostenido está en el intervalo de 34 a 63 nudos inclusive.

VIENTO MAXIMO SOSTENIDO.- Es la velocidad más alta de los vientos en superficie promediados durante un período de un minuto.

APENDICE 2

OBTENCION DE LA ECUACION (3.10)

Desarrollando la ecuación (3.1) se obtiene

$$\nabla^2 \Psi_{tt} = \Psi_y (\nabla^2 \Psi)_x - \Psi_x (\nabla^2 \Psi)_y + \Psi_{ty} (\nabla^2 \Psi)_x - \Psi_{tx} (\nabla^2 \Psi)_y - \beta \Psi_{tx} , \quad (\text{A2.1})$$

considerando ahora que $\Psi = \Psi(r)$, tomando en cuenta la transformación a coordenadas polares, la ecuación (3.8), y desarrollando los factores del primero y segundo término del lado derecho de la ecuación (A2.1), se tiene:

$$(\nabla^2 \Psi)_x = -(\beta \cos \theta \frac{d\Psi}{dr})_x = -\beta \left\{ \cos \theta \frac{d^2\Psi}{dr^2} r_x - \text{sen } \theta \frac{d\Psi}{dr} \theta_x \right\} ,$$

$$(\nabla^2 \Psi)_y = -\beta \left\{ \cos \theta \frac{d^2\Psi}{dr^2} r_y - \text{sen } \theta \frac{d\Psi}{dr} \theta_y \right\} ,$$

$$\Psi_y = \frac{d\Psi}{dr} r_y , \quad \Psi_x = \frac{d\Psi}{dr} r_x ,$$

$$\text{con} \quad r_x = \cos \theta , \quad r_y = \text{sen } \theta ,$$

$$\theta_x = -\frac{\text{sen } \theta}{r} , \quad \theta_y = \frac{\cos \theta}{r} .$$

Entonces, los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación (A2.1) se reducen a:

$$\begin{aligned} \Psi_y (\nabla^2 \Psi)_x - \Psi_x (\nabla^2 \Psi)_y &= \beta \text{sen } \theta \left(\frac{d\Psi}{dr} \right)^2 (r_y \theta_x - r_x \theta_y) \\ &= -\frac{\beta \text{sen } \theta}{r} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right)^2 . \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

Desarrollando los factores de los términos tercero y cuarto del lado derecho de la ecuación (A2.1), se tiene

$$(\nabla^2 \Psi)_x = \left(\frac{d\nabla^2 \Psi}{dr} \right) r_x, \quad (\nabla^2 \Psi)_y = \left(\frac{d\nabla^2 \Psi}{dr} \right) r_y,$$

$$\Psi_{tx} = \Psi_{tr} r_x + \Psi_{t\theta} \theta_x, \quad \Psi_{ty} = \Psi_{tr} r_y + \Psi_{t\theta} \theta_y$$

y tomando en cuenta la ecuación (3.9) donde se ha despreciado el término proporcional a R_0^{-2} , se obtiene

$$\begin{aligned} \Psi_{ty} (\nabla^2 \Psi)_x - \Psi_{tx} (\nabla^2 \Psi)_y &= \left(\frac{d\nabla^2 \Psi}{dr} \right) \Psi_{t\theta} (\theta_y r_x - \theta_x r_y) \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{d\nabla^2 \Psi}{dr} \right) \frac{\beta \operatorname{sen} \theta}{r} \int_0^r \Psi(r) r dr. \end{aligned} \quad (\text{A2.3})$$

Desarrollando el último término de la ecuación (A2.1)

$$\begin{aligned} -\beta \Psi_{tx} &= -\beta (\Psi_{tr} r_x + \Psi_{t\theta} \theta_x) \\ &= -\beta \left\{ \left[-\beta \cos \theta \Psi(r) + \frac{\beta \cos \theta}{r^2} \int_0^r \Psi(r) r dr \right] \cos \theta + \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{\beta \operatorname{sen} \theta}{r} \int_0^r \Psi(r) r dr \right] \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{-r} \right) \right\} \\ &= \beta^2 \left[\cos^2 \theta \Psi(r) + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta}{r^2} \int_0^r \Psi(r) r dr \right] \\ &= \beta^2 \left[\frac{\Psi(r)}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2r^2} \int_0^r \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) r^2 dr \right]. \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (A2.2), (A2.3) y (A2.4) en (A2.1) se obtiene la ecuación (3.10)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_{tt} &= \beta \operatorname{sen} \theta \left[-\frac{1}{r} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{d(\nabla^2 \Psi)}{dr} \int_0^r \Psi(r) r dr \right] + \\ &\quad \beta^2 \left[\frac{\Psi}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2r^2} \int_0^r \frac{d\Psi}{dr} r^2 dr \right]. \end{aligned}$$

APENDICE 3

SOLUCION PARA EL CASO GENERAL DE FLUJO BAROTROPICO NO DIVERGENTE

Una función de corriente siempre se puede escribir en la forma

$$\Psi = \Psi_0 P_1 \left(\frac{x}{r_0}, \frac{y}{r_0} \right), \quad (\text{A3.1})$$

donde P_1 es función de las variables adimensionales x/r_0 y y/r_0 ; Ψ_0 y r_0 son factores de escala: Ψ_0 normaliza la altura de la función de corriente y r_0 el plano x - y . Ψ_0 y r_0 se considerarán como parámetros. Por ejemplo, en el caso de un vórtice, se ha escogido r_0 como el radio del vórtice y Ψ_0 como el valor de la función de corriente en el centro del vórtice.

La variación del parámetro de Coriolis (β) será usada como parámetro y se considerará constante por razones de simplicidad.

Sustituyendo (A3.1) en (2.37) se obtiene:

$$\nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\Psi_0^2}{r_0^4} P_3 - \beta \frac{\Psi_0}{r_0} P_4, \quad (\text{A3.2})$$

donde P_3 y P_4 son funciones de las variables adimensionales x/r_0 y y/r_0 .

Si se considera que $(\Psi_0 / r_0^3 \beta) = \text{cte.}$, integrando (A3.2) se obtiene

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi_0 s P_5,$$

en donde $s = \frac{\Psi_0}{r_0^3}$ y P_5 es función de x/r_0 y y/r_0 .

De manera semejante se pueden obtener, bajo la misma suposición $(\frac{\Psi_0}{r_0^3} \beta) = \text{cte.}$,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \Psi_0 s^2 P_6, \quad \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3} = \Psi_0 s^3 P_7$$

donde P_6, P_7, \dots son funciones de las variables adimensionales x/r_0 y y/r_0 .

Sustituyendo los valores anteriores de $\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3}, \dots$ en la solución en serie (3.4) se obtiene el siguiente resultado para un fluido incompresible, barotrópico, no divergente:

Sea la función de corriente inicial Ψ dada por (A3.1) y sea β constante. Si escogemos como parámetros Ψ_0, r_0 y β tales que $(\Psi_0 / r_0^3 \beta) = \text{cte.}$, entonces la función de corriente Ψ a un tiempo posterior puede ser escrita como una serie en el tiempo adimensional $\tau = (\Psi_0 / r_0^3) t$ en la forma

$$\Psi / \Psi_0 = P_1 + P_2 \tau + P_3 \tau^2 + \dots$$

donde P_1, P_2, P_3, \dots son funciones de las variables adimensionales x/r_0 y y/r_0 .

Como la solución es independiente de la selección arbitraria de Ψ_0 , r_0 y β , es posible, sin pérdida de generalidad, escoger estos valores de forma tal que $(\Psi_0 / r_0^2 \beta) = \text{cte.}$, pero variando todavía Ψ_0 , r_0 y β con propósitos comparativos. Por lo tanto, el tiempo al cual los primeros n términos de la serie tienen buena aproximación a la función de corriente es proporcional a r_0^2 / Ψ_0 (ver figura 19).

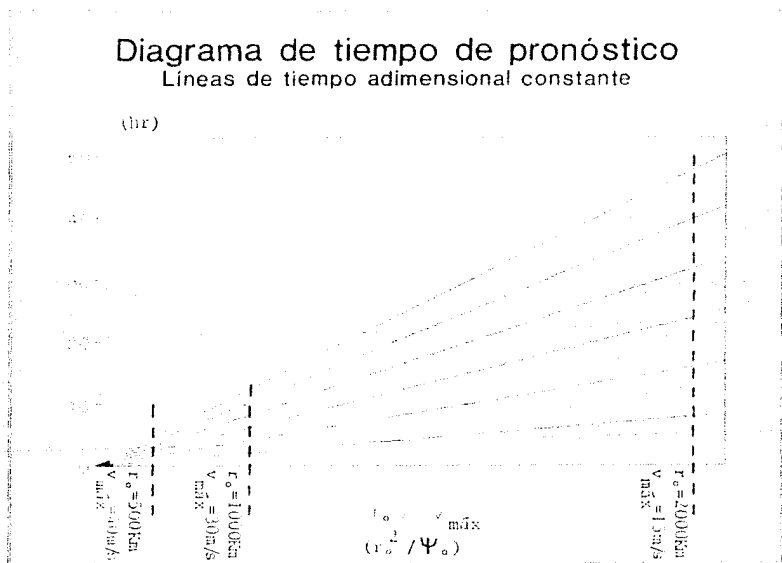


Figura 19. Diagrama de tiempo de pronóstico. La ordenada representa el tiempo en horas y la abscisa la razón r_0^2 / v_{\max} donde v_{\max} es la velocidad máxima del ciclón y r_0 es el radio; en general, la abscisa puede ser tomada como r_0^2 / Ψ_0 donde Ψ_0 y r_0 son factores de escala de la función de corriente y del plano x-y respectivamente. Las rectas representan líneas de tiempo adimensional constante $\tau = (\Psi_0 / r_0^2) t$ de la solución en serie. Cuando r_0^2 / Ψ_0 aumenta, el tiempo de pronóstico también aumenta.

Una conclusión importante de la discusión previa, es que el intervalo de tiempo usado en el pronóstico depende de la escala de los movimientos o perturbaciones que se quieran pronosticar. Para pronosticar sistemas de escala atmosférica grande, se necesita pronosticar a partir de una función de corriente suavizada tal que $\frac{r_0^2}{\Psi_0} \geq C$, y usar cierto intervalo de tiempo que depende del valor de C ; mientras que para pronosticar sistemas de escala menor, se necesitan intervalos de tiempo más pequeños, puesto que en este caso C es menor.

Existen dos fenómenos meteorológicos importantes en los que r_0^2 / Ψ_0 es pequeño: el caso de un ciclón tropical, en donde se tienen velocidades grandes concentradas en un radio relativamente pequeño; y el caso de una corriente de chorro, en donde velocidades altas se encuentran concentradas en una sección transversal comparativamente pequeña.

BIBLIOGRAFIA

- Adem, J., 1956: A series solution for the barotropic vorticity equation and its application in the study of atmospheric vortices. *Tellus*, **8**, 364-372.
- Adem, J., 1958: On the relation between pressure and wind, with particular reference to a vortex. *Tellus*, **10**, 326-330.
- Adem, J., y Lezama, P., 1959: On the motion of a cyclone embedded in a uniform flow. *Tellus*, **12**, 255-258.
- Anthes, R. A., 1982: Tropical cyclones. Their evolution, structure and effects. American Meteorological Society, 208 pp.
- Batchelor, G.K., 1967: An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press, London, 615 pp.
- Bluestein, H.B., 1992: Synoptic-Dynamic Meteorology in Midlatitudes. Vol. I, Principles of Kinematics and Dynamics. Oxford University Press, N.Y., 431 pp.
- Chan, J.C., y Williams, R.T., 1987: Analytical and numerical studies of the beta-effect in tropical cyclone motion. Part I: Zero mean flow. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1257-1265.
- De Angelis, D., 1980: Hurricane Alley. *Mar. Weather Log*, **24**, 24-28.

- De Maria, M., 1985: Tropical cyclone motion in a nondivergent barotropic model. *Mon. Weather Rev.*, **113**, 1199-1210.
- Dutton, J. A., 1976: *The Ceaseless Wind*. Mc Graw Hill, 579 pp.
- Fiorino, M., y Elsberry, 1989: Some aspects of vortex structure related to tropical cyclone motion. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 975-990.
- Gray, W.M., 1968: Global view of the origin of tropical disturbances and storms. *Mon. Wea. Rev.*, **96**, 669-700.
- Hastenrath, S., 1991: *Climate Dynamics of the Tropics*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands, 455 pp.
- Houghton, J. T., 1986: *The Physics of atmospheres*. Cambridge University Press. Second edition, 271 pp.
- Hsu, S.A., 1988: *Coastal Meteorology*. Academic Press, Inc., 260 pp.
- Kasahara, A., 1957: The numerical prediction of hurricane movement with the barotropic model. *J. Meteor.*, **14**, 386-402.
- Pielke, R. A., 1990: *The hurricane*. Routledge Press, London, 228 pp.
- Riehl, H., 1979: *Climate and Weather in the Tropics*. Academic Press, London, 611 pp.

Ross, R., y Kurihara, Y., 1992: A simplified scheme to simulate asymmetries due to the beta effect in barotropic vortices. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 1620-1628.

Rossby, C.G., 1939: Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semipermanent centers of action. *J. Marine Res.*, **2**, 38-55.

Rossby, C.G., 1948: On displacements and intensity changes of atmospheric vortices. *J. Marine Res.*, **7**, 157-187.

Serra, S., 1971: Hurricanes and tropical storms of the west coast of Mexico. *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 302-308.

Simpson, R., y Riehl, H., 1981: The hurricane and its impact. Louisiana State University Press, 398 pp.

Smith, R.K., y Dietachmayer, G., 1990: A numerical study of tropical cyclone motion using a barotropic model. Part I: The role of vortex asymmetries. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **116**, 337-362.

Smith, R.K., y Ulrich, W., 1990: An analytical theory of tropical cyclone motion using a barotropic model. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 1973-1986.

Spiegel, M.R., 1978: *Mecánica Teórica*. McGraw-Hill, México, 363 pp.

Sugg, A.L., 1968: Beneficial aspects of the tropical cyclone. *J. Appl. Meteor.*, **7**, 39-45.