



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Formación de Estructura
a Gran Escala
en el Universo

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

P r e s e n t a :

Pedro Posada de la Concha

México, D. F.

1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

Introducción	1
---------------------	----------

Capítulo 1

1.1 Cosmología Newtoniana	2
1.2 Cantidades observables	6
1.3 Métrica de Robertson-Walker	9
1.4 Soluciones de la ecuación de Friedmann	12
1.5 Decaimiento de la velocidad y la frecuencia	14
1.6 El tiempo de expansión del universo	16
1.7 El horizonte	19
1.8 Historia térmica del universo	22
1.9 Inflación	24

Capítulo 2

2.1 Formación de estructura	28
2.2 Análisis Newtoniano para crecimiento de perturbaciones	29
2.3 Análisis relativista para crecimiento de perturbaciones	37
2.4 El espectro de potencias y la función de correlación	41
2.5 Perturbaciones adiabáticas e isotérmicas	44

2.6 Amortiguamiento no colisional	45
2.7 Amortiguamiento colisional	46
2.8 Materia oscura caliente y fría	48
2.9 Perturbaciones en un universo inflacionario	50
2.10 Sesgo	53
2.11 Fluctuaciones en la radiación de fondo	55

Capítulo 3

3.1 Observaciones	57
3.2 Cúmulos	57
3.3 Supercúmulos	65
3.4 Vacíos	71
3.5 Estructura a z grandes	74
3.6 La topología del universo	75
3.7 Medición de las fluctuaciones en la radiación de fondo	78
Conclusiones	81
Bibliografía y referencias	83

Introducción

La distribución de materia en el universo es un problema cosmológico contemporáneo que involucra ámbitos teóricos y observacionales.

A través de la historia se ha descubierto que la materia en el universo dista mucho de distribuirse de una manera homogénea e isotrópica. Las estrellas, por ejemplo, tienden a acumularse en grupos conocidos como galaxias. En las últimas décadas se ha encontrado que esta tendencia a acumularse, que rompe la homogeneidad e isotropía, se extiende a estructuras de mayor escala, como cúmulos y supercúmulos de galaxias.

En el aspecto teórico, este problema ha sido estudiado hasta la segunda mitad de este siglo, y se ha desarrollado en el escenario que provee el modelo del universo estandar de Friedmann-Robertson-Walker (F-R-W), apoyado en tres fuertes pilares observacionales: a) la expansión del universo a una velocidad proporcional a la distancia, $\vec{v} = H\vec{r}$, donde v es la velocidad, r es la distancia y H es el parámetro de Hubble, con un valor estimado de $100 h$ km/seg/Mpc, con $0.4 \leq h \leq 1.0$; b) la abundancia de elementos ligeros predichos por la teoría de la nucleosíntesis; y c) la radiación de fondo de microondas.

El hecho de que los modelos de formación de estructura estén apoyados en el modelo de F-R-W implica que la falta de certidumbre respecto de los parámetros cosmológicos de este modelo limita también a la teoría de formación de estructura. De esta manera, la determinación de la geometría y composición del universo es de vital importancia para entender cómo se forma la estructura a gran escala.

Una de las principales limitaciones para entender lo inhomogéneo y anisotrópico de la distribución de materia en el universo es la alta homogeneidad e isotropía en que se basa el modelo de F-R-W (fuertemente apoyado en la isotropía de la radiación de fondo). Uno de los principales problemas teóricos de un buen modelo de formación de estructura, radica en establecer el origen, evolución y tipo de partículas o materia de la estructura en el universo, así como la escala a la cual se presentan estas inhomogeneidades.

En esta tesis se hace un estudio del problema de formación de estructura a gran escala en el universo. En el primer capítulo se estudiarán los modelos cosmológicos que proveen el escenario de la formación de esta estructura. En el segundo capítulo se estudiarán los modelos teóricos, y finalmente, en el capítulo tres discutirán los resultados observacionales de la distribución de materia en el universo.

1.1 Cosmología Newtoniana

La teoría de Gravitación Newtoniana se puede utilizar para construir modelos cosmológicos, suponiendo que el universo es un fluido homogéneo e isotrópico, en donde cada galaxia es un punto material. Uno de los principales datos observacionales es la expansión del universo, a una velocidad proporcional a la distancia, es decir, entre más lejos se encuentre un objeto, mayor será su velocidad de expansión. La relación entre la velocidad y la distancia del objeto es conocida como la ley de Hubble. Esta ley puede ser deducida de las ecuaciones para un fluido perfecto. Para esto, considérese la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0. \quad (1.1.1)$$

Suponiendo un fluido irrotacional, esto es $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, la velocidad \vec{v} puede ser escrita como el gradiente de una función escalar ψ :

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \psi, \quad (1.1.2)$$

donde $\psi = \psi(r, t)$. Sustituyendo \vec{v} de (1.1.2) en la ecuación (1.1.1) y considerando que la densidad sólo depende del tiempo (condición de homogeneidad), se tiene:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla^2 \psi = 0. \quad (1.1.3)$$

Resolviendo esta ecuación para ψ se obtiene:

$$\psi = -\frac{1}{6} \frac{\dot{\rho}}{\rho} r^2 - \frac{A}{r} + B, \quad (1.1.4)$$

donde A y B son las constantes de integración. Finalmente, sustituyendo este resultado en (1.1.1):

$$\vec{v} = \left(-\frac{1}{3} \dot{\rho} \frac{r}{\rho} + \frac{A}{r^2} \right) \vec{r}. \quad (1.1.5)$$

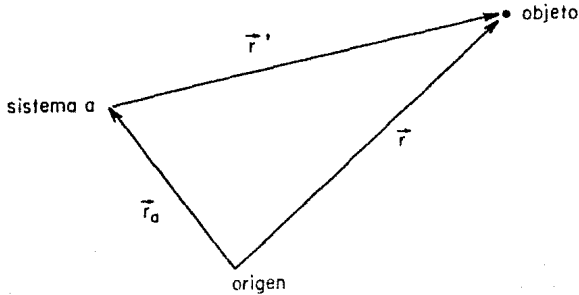
Esta ecuación tiene el problema de tener una singularidad cuando $r = 0$. Para eliminarla se elige $A = 0$, de manera que la expresión para \vec{v} queda como:

$$\vec{v} = -\frac{1}{3} \dot{\rho} \vec{r} \equiv H \vec{r}, \quad (1.1.6)$$

la cual es la ley de Hubble y donde $H = H(t)$. La linealidad de esta ecuación garantiza que sea la misma independientemente del sistema, condición obvia para un universo isotrópico:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_a = H\vec{r} - H\vec{r}_a = H(\vec{r} - \vec{r}_a) = H\vec{r}', \quad (1.1.7)$$

donde \vec{v}' y \vec{r}' denotan la velocidad y posición de un objeto respecto de cualquier sistema de referencia, \vec{v} y \vec{r} la velocidad y posición de este objeto respecto al origen y \vec{v}_a y \vec{r}_a la velocidad y posición del sistema de referencia respecto al origen (gráfica 1).



Gráfica 1.- Posición y velocidad de un objeto respecto de dos sistemas de referencia

Para hacer un análisis de la dinámica de este modelo, considérese la fuerza por unidad de masa que siente un punto material de este fluido debido al efecto gravitacional de toda la materia restante.

Esta fuerza es dada por la ley de Gravitación universal

$$\frac{F}{m} = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}. \quad (1.1.8)$$

Considérese ahora un sistema de referencia ubicado en cualquier punto de este fluido. Aplicando el teorema de Gauss, se puede considerar únicamente el efecto debido a la masa contenida en una esfera centrada en el sistema de referencia y de radio la distancia al punto material (gráfica 2).

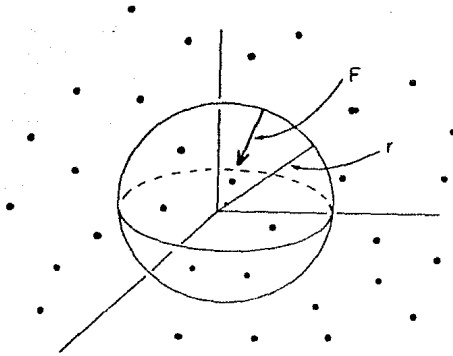
Esta masa es:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho r^3. \quad (1.1.9)$$

Sustituyendo la ley de Hubble en la ley de Gravitación, ecuación (1.1.8) se tiene:

$$\frac{d(Hr)}{dt} = r\dot{H} + Hr\dot{r} = r\dot{H} + rH^2 = -\frac{4\pi}{3}G\rho r,$$

esto es:



Gráfica 2.- Ilustración de la fuerza ejercida sobre un punto material, debido a una distribución homogénea de materia

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho, \quad (1.1.10)$$

que es la ecuación para la evolución del parámetro de Hubble con el tiempo.

Multiplicando la ley de Gravitación (ecuación (1.1.8)), por dr/dt e integrando se tiene:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r} = A, \quad (1.1.11)$$

la cual es una ecuación de conservación de energía, en donde el primer término representa la energía cinética por unidad de masa, el segundo la energía potencial por unidad de masa y A es la energía total por unidad de masa. A puede ser evaluada calculando la energía total en el tiempo actual t_0 , usando los valores actuales de la constante de Hubble H_0 , la densidad ρ_0 y el radio r_0 . Sustituyendo A en (1.1.11) y usando la ecuación (1.1.9), se llega a la ecuación:

$$\dot{r}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 r_0^3}{3r} - \frac{8\pi G r_0^2}{3} \left[\rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G} \right]. \quad (1.1.12)$$

Se observa que el cuadrado de la velocidad es inversamente proporcional al radio. De esta forma en $r = 0$, la velocidad se hace infinita, es decir, se tiene una singularidad en un principio. Esta singularidad es interpretada como una condición inicial, a $r = 0$, donde

toda la masa esta concentrada en un punto, teniéndose una velocidad de expansión y una densidad infinita. Este momento es conocido como "La gran explosión".

El comportamiento de la velocidad depende del signo de la cantidad $[\rho_o - 3H_o^2/8\pi G]$. Para hacer un análisis más fácil se define la densidad crítica como:

$$\rho_c \equiv \frac{3H_o^2}{8\pi G}, \quad (1.1.13)$$

y:

$$\Omega_o \equiv \rho_o/\rho_c. \quad (1.1.14)$$

Si $\Omega_o < 1$, el segundo término de la ecuación diferencial es siempre positivo, y cuando $r \rightarrow \infty \dot{r} \rightarrow H_o^2 r_o^2 [1 - \Omega_o]$, es decir, el universo se expandirá por siempre, tendiendo la velocidad asintóticamente a una constante.

Si $\Omega_o > 1$, el segundo término de la ecuación es negativo y la ecuación es del tipo:

$$\dot{r}^2 = \frac{k}{r} - c, \quad (1.1.15)$$

definiendo:

$$k \equiv (8\pi G \rho_o r_o^3 / 3).$$

y

$$c \equiv H_o^2 r_o^2 [\Omega_o - 1].$$

Cuando $r = k/c$, $\dot{r} = 0$, es decir, hay un punto de máxima expansión en donde se alcanza un radio máximo y posteriormente empieza un periodo de contracción ($\dot{r} < 0$). En este caso se ha sugerido que al final de la contracción se vuelve a repetir el ciclo, teniendo un universo oscilante. La ecuación (1.1.15) puede ser integrada para los tres diferentes casos. Para esto, tómesese como condiciones iniciales $r = 0$ cuando $t = 0$. Para $\Omega_o < 1$, la solución está dada por:

$$t = -\frac{r}{c} \left(\frac{k}{r} - c \right)^{1/2} - \frac{k}{(-c)^{3/2}} \operatorname{scnh}^{-1} \left(-\frac{cr}{k} \right)^{1/2}. \quad (1.1.16)$$

De esta ecuación puede ser deducida la edad del universo para este caso, sustituyendo k , c y valuando $r = r_o$ se llega a la siguiente expresión:

$$t_o = \frac{1}{H_o} \left[\frac{1}{1 - \Omega_o} - \frac{\Omega_o}{(1 - \Omega_o)^{3/2}} \operatorname{scnh}^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_o}{\Omega_o} \right)^{1/2} \right] \quad (1.1.17).$$

La solución para $\Omega_o > 1$ es:

$$t = -\frac{r}{c} \left(\frac{k}{r} - c \right)^{1/2} + \frac{k}{c^{3/2}} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{cr}{k} \right)^{1/2}, \quad (1.1.18)$$

y la edad del universo es:

$$t_o = \frac{1}{H_o} \left[-\frac{1}{\Omega_o - 1} + \frac{\Omega_o}{(\Omega_o - 1)^{3/2}} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\Omega_o - 1}{\Omega_o} \right)^{1/2} \right] \quad (1.1.19).$$

Para el caso $\Omega_o = 1$:

$$r = \frac{3}{2} k^{1/2} t^{2/3}. \quad (1.1.20)$$

Sustituyendo este resultado en la ley de Hubble:

$$H = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{2}{3} t^{-1}, \quad (1.1.21)$$

la edad del universo resulta ser:

$$t_o = \frac{2}{3H_o}. \quad (1.1.22)$$

La ecuación (1.1.20) puede ser expresada de diferente forma, sustituyendo la expresión para k , con $\rho_o = \rho_c$ y usando (1.1.22):

$$r = r_o \left(\frac{t}{t_o} \right)^{2/3}. \quad (1.1.23)$$

Sustituyendo H de (1.1.21) en la ecuación (1.1.10) se tiene la solución para la densidad en función del tiempo:

$$\rho = (6\pi G t^2)^{-1}. \quad (1.1.24)$$

Es decir, en este caso donde $\Omega_o = 1$, el universo se expandirá por siempre, en tanto que la velocidad va disminuyendo acercándose asintóticamente a 0.

Como se ha visto, las tres diferentes soluciones dependen de la densidad de materia en el universo. Los diferentes comportamientos son debidos al hecho de que exista la suficiente materia en el universo para poder frenar la expansión por medio de fuerzas gravitacionales. En caso de no ser así, la materia no será suficiente para poder detener la expansión. La densidad límite que divide cada uno de los tres casos es, como ya se vió, la definida como ρ_c (densidad crítica).

1.2 Cantidades Observables

Existen en este contexto, básicamente Newtoniano, resultados que pueden ser respaldados por pruebas observacionales, por ejemplo, el corrimiento de la luz emitida por una

fuerza que se mueve con una velocidad v , debido al efecto Doppler y el corrimiento debido al efecto gravitacional. Para esto, considérese la ecuación hidrodinámica de movimiento y la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -3H\rho, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{4\pi G\rho r}{3}. \quad (1.2.2)$$

El primer término de la expansión en serie de la solución, para t pequeña alrededor de t_0 , es:

$$\rho \approx \rho_0 - 3H_0(t - t_0)\rho_0, \quad v \approx H_0 r - H_0^2 r(t - t_0) - \frac{4\pi}{3} G\rho_0 r(t - t_0). \quad (1.2.3)$$

Escribiendo ρ_0 en función de Ω_0 de las ecuaciones (1.1.13) y (1.1.14), la velocidad es:

$$v \approx H_0 r - H_0^2 \left(1 + \frac{\Omega_0}{2}\right) r(t - t_0). \quad (1.2.4)$$

Considérese ahora la distancia a la que se encuentra un fotón a un tiempo t , el cual llegará al observador en el tiempo actual t_0 , nótese que en este caso $t < t_0$. Considérese además el corrimiento de éste, predicho por la ley de Hubble debido al efecto Doppler:

$$r = -c(t - t_0), \quad (1.2.5)$$

$$1 - \frac{\omega'}{\omega_{em}} = \Delta' = \frac{v}{c}, \quad (1.2.6)$$

donde c es la velocidad de la luz, ω' es la frecuencia observada desde un sistema de laboratorio y ω_{em} es la frecuencia emitida por la fuente. Considerando la energía asociada a un fotón $E = h\omega$ y la pérdida de energía debido a un campo gravitacional se tiene:

$$\omega_{obs} - \omega' = \left[\frac{\phi(r) - \phi(0)}{c^2} \right] \omega', \quad (1.2.7)$$

donde ω_{obs} es la frecuencia corrida por el efecto gravitacional y ϕ el potencial gravitacional dado por la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho. \quad (1.2.8)$$

Para una simetría esférica (universo isotrópico) tal que la densidad sólo depende del tiempo:

$$\phi = \frac{2\pi}{3} G\rho r^2 + cte. \quad (1.2.9)$$

Aproximando $\rho \approx \rho_o$, la ecuación (1.2.7) se puede escribir como:

$$\omega_{obs} - \omega' \approx \frac{2\pi}{3c^2} G\rho_o r^2 \omega'. \quad (1.2.10)$$

Considerando ahora el corrimiento total Δ , como la suma de los dos corrimientos, esto es:

$$\Delta = \Delta' + \left(\frac{\omega' - \omega_{obs}}{\omega'} \right). \quad (1.2.11)$$

Sustituyendo Δ' de (1.2.6) y sustituyendo (1.2.10) se tiene:

$$\Delta \approx \frac{v}{c} - \frac{2\pi G\rho_o r^2}{3c^2}. \quad (1.2.12)$$

Eliminando el tiempo en (1.2.4) por medio de (1.2.5), sustituyendo r en (1.2.12) y poniendo ρ_o en función de Ω_o (ecuaciones (1.1.13) y (1.1.14)), se obtiene:

$$\Delta \approx \left(\frac{r}{c/H_o} \right) + \left(\frac{r}{c/H_o} \right)^2 \left(1 + \frac{\Omega_o}{4} \right). \quad (1.2.13)$$

Una mejor aproximación a esta ecuación se obtiene usando el efecto Doppler de relatividad especial a segundo orden:

$$\Delta' \approx \frac{v}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2, \quad (1.2.14)$$

de manera que, a orden r^2 , se obtiene la ecuación:

$$\Delta \approx \left(\frac{r}{c/H_o} \right) + \left(\frac{r}{c/H_o} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\Omega_o}{4} \right). \quad (1.2.15)$$

En este caso la corrección de relatividad especial es pequeña.

La ecuación (1.2.15) puede ser resuelta para r a orden Δ^2 :

$$r \approx \frac{c}{H_o} \left[\Delta - \left(1 + \frac{\Omega_o}{2} \right) \Delta^2 \right]. \quad (1.2.16)$$

Esta ecuación puede ser escrita en función del corrimiento de la longitud de onda. Para esto, se define z como:

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \quad (1.2.17)$$

donde λ es la longitud de onda de la luz. Utilizando la expresión que relaciona la longitud de onda con la frecuencia, $\omega = 2\pi c/\lambda$, se puede encontrar una expresión para el corrimiento de la frecuencia en función de z :

$$\Delta = \frac{z}{1+z}. \quad (1.2.18)$$

La ecuación (1.2.15) ya en función de z y a orden z^2 es:

$$r \approx \frac{c}{H_0} \left[z - \left(2 + \frac{\Omega_0}{2} \right) z^2 \right]. \quad (1.2.19)$$

Esta ecuación predice la distancia a la que se encuentra un objeto que emite luz, la cual tiene un corrimiento z .

Correspondientemente, para el tiempo de emisión de la luz, la cual llegará al observador a $t = t_0$, se encuentra:

$$t \approx -\frac{1}{H_0} \left[z - \left(2 + \frac{\Omega_0}{2} \right) z^2 \right] + t_0. \quad (1.2.20)$$

Otro parámetro medible para este modelo es el diámetro angular, que podemos calcular conociendo el tamaño de una galaxia (l) y la distancia a la que se encuentra. Esta expresión resulta ser:

$$\Theta = \frac{l}{r} \approx \frac{lH_0}{cz} \left[1 + \left(2 + \frac{\Omega_0}{2} \right) z \right]. \quad (1.2.21)$$

1.3 Métrica de Robertson-Walker

Como se ha visto, la teoría de gravitación Newtoniana predice un comportamiento dinámico del universo. También predice tres tipos de comportamientos para el modelo cosmológico, dependiendo de la cantidad de materia que contenga el universo. Sin embargo, existe otra teoría con la que también se puede construir un modelo cosmológico. Esta es la teoría General de la Relatividad formulada por Albert Einstein en 1916. En ella se relaciona la geometría del espacio-tiempo, por medio de la métrica, con la distribución de las fuentes gravitacionales, que son la materia y la energía, la cual es introducida por medio del tensor energía-momento. Esta relación está dada por medio de las ecuaciones de campo de Relatividad General, que en un sistema con $c = 1$, están dadas por:

$$R_i^k - \frac{1}{2} R \delta_i^k + \Lambda g_i^k = -8\pi G T_i^k. \quad (1.3.1)$$

en donde R_i^k es el tensor de Ricci, R el escalar de curvatura T_i^k es el tensor de energía-momento \dagger y Λ es la constante cosmológica. Esta constante, a pesar de ser un término de completés en las ecuaciones de campo, es físicamente innecesaria, y fue introducida por la falta de aceptación que tuvieron originalmente los modelos cosmológicos, construidos a partir de las ecuaciones de campo. Para todo este desarrollo se tomará como cero, aunque existen modelos cosmológicos que si la consideran.

\dagger Con $R = R_i^i$; $R_i^k = g^{km} R_{im} = g^{km} R_{im}^k$; $R_{im}^k = \partial_m \Gamma_{it}^k - \partial_t \Gamma_{im}^k + \Gamma_{jm}^k \Gamma_{it}^j - \Gamma_{jt}^k \Gamma_{im}^j$;
 $\Gamma_{mt}^k = (1/2) g^{kj} (\partial_l g_{jm} + \partial_m g_{jt} - \partial_j g_{mt})$.

Se puede construir una métrica que sea homogénea e isotrópica, partiendo de la ecuación para alguna superficie tridimensional. Existen básicamente tres tipos de espacios que cumplen con las propiedades de homogeneidad e isotropía: el elíptico, el plano y el hiperbólico. Estos tres espacios son los correspondientes en tres dimensiones a los que serían en dos dimensiones una esfera, un plano y una "silla de montar", respectivamente. Entonces su ecuación es simplemente una extensión a tres dimensiones de los espacios mencionados. Por ejemplo, para el caso de una esfera, la extensión a una superficie tridimensional está definida por la ecuación:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2, \quad (1.3.2)$$

en donde a representa el radio de esta hipersfera. Tomando un elemento de línea espacial sobre la superficie se tiene:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2, \quad (1.3.3)$$

Diferenciando la ecuación (1.3.2), se puede eliminar la variable x_4 en (1.3.3), y ponerla en función de las otras tres variables:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \quad (1.3.4)$$

Con el cambio de variable $x_1 = r' \operatorname{sen} \theta \cos \phi$, $x_2 = r' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$, $x_3 = r' \cos \theta$, con $r = r'/a$, el elemento de línea es:

$$dl^2 = a^2 \left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 \right).$$

En el caso general, para cualquier superficie, se obtiene:

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (1.3.5)$$

en donde k toma los valores de 1 para una superficie elíptica, 0 para una plana y -1 para una hiperbólica, y a es conocido en general como el factor de escala.

Considerando el elemento de línea cuatridimensional, es decir, ya con la coordenada temporal, se tiene que:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (1.3.6)$$

Recordando la definición de la métrica:

$$ds^2 = g_{ij} x^i x^j,$$

ésta resulta tener la siguiente forma:

$$g_{tt} = 1, \quad g_{rr} = -\frac{a^2}{1 - kr^2},$$

$$g_{\theta\theta} = -a^2 r^2, \quad g_{\phi\phi} = -a^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Esta métrica es conocida como la métrica de Robertson-Walker, donde a sólo puede ser una función del tiempo y no de las coordenadas espaciales ya que de otra forma el espacio no sería homogéneo e isotrópico.

Además de la métrica, la función que aparece en las ecuaciones de campo de Einstein es el tensor de energía-momento. Para este modelo se considera el tensor de energía-momento de un fluido perfecto:

$$T_k^i = (\rho + p)U^i U_k - p\delta_k^i.$$

Si se considera un sistema de referencia tal que $U^i = \delta_t^i$, donde t representa la coordenada temporal, entonces las únicas componentes diferentes de cero son:

$$T_0^0 = \rho; \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p, \quad (1.3.7)$$

en donde p (la presión) y ρ (la densidad de energía) sólo dependen del tiempo.

Se puede sustituir la métrica y el tensor de energía-momento en las ecuaciones de campo para encontrar condiciones sobre a , p y ρ . De las 10 ecuaciones de campo sólo existen 4 diferentes de cero (las de la diagonal). Por simetría, las tres componentes espaciales son iguales por lo que sólo se tienen 2 ecuaciones, una para la parte temporal y otra para la parte espacial. Para la parte temporal de la ecuaciones de campo se obtiene:

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{k}{2}, \quad (1.3.8)$$

nótese que si en la ecuación (1.1.11) se sustituye la expresión para la masa de la ecuación (1.1.9) se obtiene la expresión (1.3.8), con $A = -k/2$. La ecuación para la parte espacial, con una simple transformación lleva a:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}a(\rho + 3p). \quad (1.3.9)$$

Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Friedmann.

La ecuación (1.3.8) puede ser escrita como:

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \Omega - 1, \quad (1.3.10)$$

en donde $\Omega \equiv \rho/\rho_c$ y $H \equiv \dot{a}/a$. De esta ecuación se observa que si $k = 1$, $\Omega > 1$, es decir, cuando $\rho > \rho_c$ el universo es elíptico y se tiene un universo con curvatura positiva cerrado sobre si mismo y de extensión finita. Para $k = 0$, $\Omega = 1$, es decir cuando $\rho = \rho_c$ se tiene un universo plano de extensión infinita y con curvatura cero. En el tercer caso si

$k = -1$, $\rho < \rho_c$ y se tiene un universo hiperbólico con curvatura negativa, abierto y con una extensión infinita.

1.4 Soluciones de la ecuación de Friedmann

Las ecuaciones de Friedmann pueden ser resueltas para a , si se considera una ecuación de estado que relacione la presión con la densidad. La dependencia de la densidad con a se encuentra a partir de una de las propiedades del tensor energía-momento, que es la ley de conservación para la energía y para el momento:

$$T^{ik};_k = 0. \quad (1.4.1)$$

Para la parte temporal, esta condición lleva a:

$$d(\rho a^3) = -pd(a^3). \quad (1.4.2)$$

lo cual no es otra cosa más que la segunda ley de la termodinámica para un proceso adiabático, es decir, se ha supuesto que se conserva la entropía. (ρa^3) representa la energía interna. Recuérdese que ρ , en unidades donde $c = 1$, es la densidad de materia como de energía.

Dada una ecuación de estado ($p = \alpha \rho$), con $\alpha = cte$, se puede resolver (1.4.2) encontrándose que la solución está dada por:

$$\rho \propto a^{-3(1+\alpha)}. \quad (1.4.3)$$

Los valores de α más usados son los siguientes:

$$RADIACION \quad (p = \frac{1}{3}\rho) \quad \longrightarrow \quad \rho \propto r^{-4} \quad (1.4.4)$$

$$MATERIA \quad (p = 0) \quad \longrightarrow \quad \rho \propto r^{-3} \quad (1.4.5)$$

$$VACIO FALSO \quad (p = -\rho) \quad \longrightarrow \quad \rho \propto cte. \quad (1.4.6)$$

Como se discutirá más adelante el universo es en el principio dominado por radiación, y posteriormente por materia. En este caso no existe un periodo en el que el universo sea dominado por vacío falso, sin embargo, existen algunos modelos como los del universo inflacionario, en los cuales existe un periodo de tiempo donde se tiene una densidad de energía del vacío falso.

La dependencia respecto al factor de escala a en las ecuaciones (1.4.4), (1.4.5) y (1.4.6), es la misma que respecto a la r usada en la sección 1.1, salvo alguna constante, debido a que r crece linealmente con a . Como r representa la distancia de dos puntos sobre la superficie tridimensional, estas distancias son proporcionales al radio de la superficie.

Volviendo a la solución para las ecuaciones de campo, dividiendo (1.3.8) entre a y sumando (1.3.9), se tiene para el caso $p = 0$, la ecuación:

$$2\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{\dot{k}}{a} = 0. \quad (1.4.7)$$

La solución a esta ecuación para $\Omega_o > 1$ ($k = 1$), en función de la variable θ , que satisface $d\theta = dt/a$, es:

$$a = a_o \frac{\Omega_o}{2(\Omega_o - 1)} (1 - \cos\theta), \quad t = H_o^{-1} \frac{\Omega_o}{2(\Omega_o - 1)^{3/2}} (\theta - \text{sen}\theta), \quad \Omega = \frac{2}{1 + \cos\theta}. \quad (1.4.8)$$

Y para $\Omega_o < 1$ ($k = -1$), la solución en función de ψ , con $\psi = i\theta$, es:

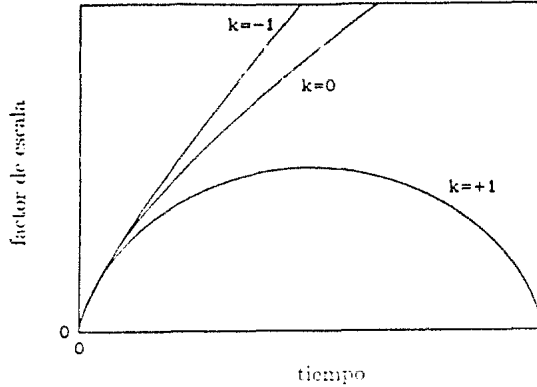
$$a = a_o \frac{\Omega_o}{2(1 - \Omega_o)^{3/2}} (\cosh\psi - 1), \quad t = H_o^{-1} \frac{\Omega_o}{2(1 - \Omega_o)^{3/2}} (\text{sen}\psi - \psi), \quad \Omega = \frac{2}{1 + \cosh\psi}. \quad (1.4.9)$$

Para $\Omega_o = 1$ ($k = 0$), se tiene una solución explícita en el tiempo:

$$a = a_o \left(\frac{t}{t_o} \right)^{2/3}. \quad (1.4.10)$$

Estas soluciones son las correspondientes a los modelos de Friedmann. En el primer caso tenemos un universo cerrado (elíptico) que se expande hasta alcanzar un punto máximo y posteriormente se contrae. Para el segundo caso el modelo es abierto (hiperbólico) y se expande indefinidamente. El tercer caso corresponde a un universo abierto (plano) que se expande también indefinidamente. Las tres diferentes soluciones, son mostradas en la gráfica 3.

La semejanza con los modelos clásicos es obvia, y existen muy pocas diferencias, una de ellas es que la relatividad general provee de una expresión para el tipo de energía total del sistema. La constante A en la ecuación (1.1.11), que representa la energía total, es equivalente al factor $-k/2$ de la ecuación (1.3.8), aunque éste está normalizado. De esta manera, en el caso de un universo plano se tiene una energía total de 0, para el caso abierto la energía total es positiva, mientras que para el caso cerrado la energía total del sistema es negativa. Otras de las diferencias son básicamente conceptuales. En el modelo clásico lo que se tiene es un fluido en expansión en un escenario tridimensional con interacción gravitacional. Para el caso de la relatividad lo que se tiene es una expansión del espacio mismo. En los modelos clásicos la variable usada es r , y representa la distancia tridimensional de un punto material al centro del sistema de referencia. Esta variable representaría, en un contexto de relatividad general, un elemento de línea espacial sobre la superficie tridimensional. En los modelos de Friedmann se usa a , que representa una especie de "radio" del espacio, el cual es conocido como el factor de escala.



Gráfica 3.- Soluciones del factor de escala como función del tiempo, para cada uno de los modelos de Robertson-Walker, elíptico ($k=1$), plano ($k=0$) e hiperbólico ($k=-1$).

También se pueden encontrar soluciones para el caso en que $p = 1/3\rho$, es decir, el caso de un universo dominado por radiación. Para $\Omega_0 > 1$ la solución es:

$$a = A \sec \theta, \quad t = A'(1 - \cos \theta), \quad \Omega = \frac{1}{\cos^2 \theta}. \quad (1.4.11)$$

Para $\Omega_0 < 1$:

$$a = B \sinh v, \quad t = B'(\cosh v - 1), \quad \Omega = \frac{1}{\cosh^2 v}. \quad (1.4.12)$$

Y para $\Omega_0 = 0$:

$$a = C t^{1/2}. \quad (1.4.13)$$

En estas soluciones el comportamiento cualitativo para los casos en donde $\Omega_0 \neq 1$ es el mismo que para los casos en donde la presión es cero. En el primer caso también se tiene un universo periódico, finito y cerrado. En el segundo caso un universo abierto infinito y que se expande por siempre. En el último caso, es decir, para un universo plano dominado por radiación, la dependencia con el tiempo crece más lentamente que en el caso de un universo dominado por materia ($p = 0$), aunque en este caso la expansión también es indefinida.

1.5 Decaimiento de la velocidad y la frecuencia

El cambio en la velocidad de una partícula que se mueve libremente es una característica de un universo en expansión. Para deducir esto, considérese la ecuación de movimiento de una partícula no necesariamente sin masa:

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu u^\nu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0, \quad (1.5.1)$$

la cual es la ecuación de una geodésica, donde $u^\mu = dx^\mu/ds$ y λ es un parámetro afín. La cuadrivelsidad puede ser expresada en términos de la velocidad espacial como $u^\mu = (u^0, u^i) = (\gamma, \gamma v^i)$, donde $|\vec{v}| = h_{ij}v^i v^j$, siendo h_{ij} la parte espacial de la métrica y $\gamma \equiv (1 - |\vec{v}|^2)^{-1/2}$. Si se elije el elemento de línea tetradimensional como el parámetro afín, la ecuación de la geodésica para la parte temporal es:

$$\frac{du^0}{ds} + \Gamma_{\nu\alpha}^0 u^\nu u^\alpha = 0. \quad (1.5.2)$$

Para la métrica de Robertson-Walker, las únicas componentes en los símbolos de Christoffel diferentes de cero son $\Gamma_{ij}^0 = (\dot{a}/a)h_{ij}$. Usando el hecho que $h_{ij}u^i u^j = |\vec{u}|^2$, la ecuación de la geodésica es:

$$\frac{du^0}{ds} + \frac{\dot{a}}{a} |\vec{u}|^2 = 0. \quad (1.5.3)$$

De la condición de norma se tiene que: $(u^0)^2 - |\vec{u}|^2 = 1$. Diferenciando esta expresión se obtiene que $u^0 du^0 = |\vec{u}| d|\vec{u}|$, por lo que (1.5.3) puede escribirse como:

$$\frac{1}{u^0} \frac{d|\vec{u}|}{ds} + \frac{\dot{a}}{a} |\vec{u}| = 0. \quad (1.5.4)$$

Como $u^0 = dt/ds$ esta ecuación se reduce a:

$$\frac{d|\vec{u}|}{|\vec{u}|} = -\frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.5.5)$$

la cual, integrando se tiene que:

$$\frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}_0|} = \frac{a_0}{a}. \quad (1.5.6)$$

Si se considera una partícula con una velocidad no relativista, entonces el factor $\gamma \approx 1$, por lo que $|\vec{u}| \approx |\vec{v}|$. En este caso el cambio en la velocidad de una partícula queda expresado como:

$$\frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}_0|} = \frac{a_0}{a}. \quad (1.5.7)$$

En el caso de fotones, este fenómeno se manifiesta como un corrimiento en la frecuencia. Supóngase que un fotón es emitido desde un fuente con una frecuencia ω_1 . Este fotón es recibido en un punto cercano con una frecuencia ω_2 . Si estos dos puntos no se

encuentran muy alejados, la velocidad relativa entre el emisor y el receptor (v_{21}) no es muy grande, y el corrimiento de la frecuencia es dado por efecto Doppler clásico:

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_1 v_{21}. \quad (1.5.8)$$

Usando la ley de Hubble, definida en la expresión (1.1.6):

$$\omega_1 - \omega_2 = H l_{21} \omega_1, \quad (1.5.9)$$

donde l_{21} es la distancia entre el emisor y el receptor. En el límite cuando l_{21} tiende a cero, se tiene:

$$d\omega = -H\omega dl. \quad (1.5.10)$$

Usando el hecho de que $dl = dt$ y $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{d(\ln a)}{dt}$, se encuentra sustituyendo en (1.5.10):

$$d\omega = -\omega \frac{d(\ln a)}{dt} dt. \quad (1.5.11)$$

Integrando esta ecuación:

$$\omega = \omega_o \left(\frac{a_o}{a} \right). \quad (1.5.12)$$

Es decir, la frecuencia cambia inversamente con el factor de escala.

Esta ecuación en función de la longitud de onda es:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda} = \frac{a_o}{a}, \quad (1.5.13)$$

lo que implica directamente:

$$1 + z = \frac{a_o}{a}. \quad (1.5.14)$$

En un universo en expansión un fotón que se mueve libremente tendrá un corrimiento en la frecuencia y por lo tanto una pérdida de energía, debido a la expansión misma. Esto es debido a que la longitud de onda de la luz es una distancia física la cual cambia con el factor de escala.

1.6 El tiempo de expansión del universo

Las ecuaciones de Friedmann pueden ser integradas para obtener el tiempo de expansión del universo, quedando éste en función del tipo de universo que se tiene, es decir, del valor de Ω_o . Además hay que considerar si se tiene un universo dominado por materia (DM) o por radiación (DR). La densidad para cada uno de estos casos, se obtiene de la ecuación (1.4.3) y es:

$$\rho/\rho_o = (a/a_o)^{-3} \quad (DM), \quad (1.6.1)$$

$$\rho/\rho_o = (a/a_o)^{-4} \quad (DR). \quad (1.6.2)$$

Sustituyendo ρ en la ecuación (1.3.8), multiplicando por dos, reacomodando términos y tomando un sistema de unidades tal que $c = 1$, se tiene para cada uno de los dos casos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_o}\right)^2 + \frac{k}{a_o^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_o \frac{a_o}{a} \quad (DM), \quad (1.6.3)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_o}\right)^2 + \frac{k}{a_o^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_o \left(\frac{a_o}{a}\right)^2 \quad (DR). \quad (1.6.4)$$

Usando (1.3.9), (1.5.14) y haciendo el cambio de variable $x = a/a_o$ se tiene que si:

$$t \equiv \int_0^{a(t)} \frac{da}{a};$$

entonces:

$$t = H_o^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[1 - \Omega_o + \Omega_o x^{-1}]^{1/2}} \quad (DM), \quad (1.6.5)$$

y:

$$t = H_o^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[1 - \Omega_o + \Omega_o x^{-2}]^{1/2}} \quad (DR). \quad (1.6.6)$$

Integrando la ecuación para el caso de un universo dominado por materia y tomando el caso $\Omega_o > 1$, se tiene que:

$$t = H_o^{-1} \frac{\Omega_o}{2(\Omega_o - 1)^{3/2}} \times \left[\cos^{-1} \left(\frac{\Omega_o z - \Omega_o + 2}{\Omega_o z + \Omega_o} \right) - \frac{2(\Omega_o - 1)^{1/2} (\Omega_o z + 1)^{1/2}}{\Omega_o (1 + z)} \right]. \quad (1.6.7)$$

Para el caso $\Omega_o < 1$:

$$t = H_o^{-1} \frac{\Omega_o}{2(1 - \Omega_o)^{3/2}} \times \left[-\cosh^{-1} \left(\frac{\Omega_o z - \Omega_o + 2}{\Omega_o z + \Omega_o} \right) + \frac{2(1 - \Omega_o)^{1/2} (\Omega_o z + 1)^{1/2}}{\Omega_o (1 + z)} \right]. \quad (1.6.8)$$

Para un universo plano lo que se obtiene es:

$$t = (2/3)H_0^{-1}(1+z)^{-3/2} \quad (1.6.9)$$

Para calcular la edad del universo se toma $z = 0$, esto es, cada vez que se ve un objeto con un corrimiento z , se está viendo ese objeto en el pasado, ya que la luz que emite el objeto tarda cierto tiempo en llegar al observador. Si se quiere ver un objeto en el presente, se tiene que elegir uno que esté a una distancia cero, es decir, con corrimiento cero. La edad de universo para el caso cerrado es:

$$t_o = H_0^{-1} \frac{\Omega_o}{2(\Omega_o - 1)^{3/2}} \left[\cos^{-1}(2\Omega_o^{-1} - 1) - \frac{2}{\Omega_o}(\Omega_o - 1)^{1/2} \right]. \quad (1.6.10)$$

Utilizando el hecho de que:

$$\cos^{-1}\left(\frac{2}{\Omega_o} - 1\right) = 2\operatorname{scn}^{-1}\left(1 - \frac{1}{\Omega_o}\right)^{1/2},$$

y reacomodando términos, la edad del universo puede escribirse como:

$$t_o = \frac{1}{H_0} \left(-\frac{1}{\Omega_o - 1} + \frac{\Omega_o}{(\Omega_o - 1)^{3/2}} \operatorname{scn}^{-1}\left(\frac{\Omega_o - 1}{\Omega_o}\right)^{1/2} \right),$$

que es exactamente la misma expresión deducida para la edad del universo en el análisis Newtoniano (ecuación (1.1.19)).

Para el caso abierto:

$$t_o = H_0^{-1} \frac{\Omega_o}{2(1 - \Omega_o)^{3/2}} \left[\frac{2}{\Omega_o}(1 - \Omega_o)^{1/2} - \operatorname{cosh}^{-1}(2\Omega_o^{-1} - 1) \right]. \quad (1.6.11)$$

Usando la siguiente identidad:

$$\operatorname{cosh}^{-1}\left(\frac{2}{\Omega_o} - 1\right) = 2\operatorname{scnh}^{-1}\left(\frac{1}{\Omega_o} - 1\right)^{1/2},$$

se tiene que la edad del universo puede escribirse como:

$$t_o = \frac{1}{H_0} \left(\frac{1}{1 - \Omega_o} - \frac{\Omega_o}{(1 - \Omega_o)^{3/2}} \operatorname{scnh}^{-1}\left(\frac{1 - \Omega_o}{\Omega_o}\right)^{1/2} \right),$$

la cual es nuevamente la misma expresión que en el análisis Newtoniano (ecuación (1.1.17)).

Finalmente, la edad del universo para el caso plano es:

$$t_o = \frac{2}{3}H_0^{-1}, \quad (1.6.12)$$

Como se ve, también se recupera la edad del universo para el caso plano en el análisis Newtoniano (ecuación (1.1.22)).

La edad del universo resulta ser una función decreciente de Ω_o , es decir, mientras más grande la densidad existe una desaceleración más rápida. Un caso extremo es que cuando $\Omega_o \rightarrow 0$, en la ecuación (1.6.8), $t \rightarrow H_o^{-1}(1+z)^{-1} = 9.78 \times 10^9 h^{-1} (1+z)^{-1}$, y la edad del universo es:

$$t = H_o^{-1},$$

es decir, la edad del universo para un universo carente de materia y radiación.

Considerando ahora el caso de un Universo dominado por radiación, si se integra la ecuación (1.6.6):

$$t = H_o^{-1} \frac{(\Omega_o(1+z)^2)^{1/2} - (\Omega_o(1+z)^2 - \Omega_o + 1)^{1/2}}{(\Omega_o - 1)(1+z)}. \quad (1.6.13)$$

Entonces la edad del universo ($z = 0$) es:

$$t_o = H_o^{-1} \frac{\Omega_o^{1/2} - 1}{\Omega_o - 1}. \quad (1.6.14)$$

Analizando también los casos límites vistos en el caso de un universo dominado por materia, se tiene que para un universo plano la edad es:

$$t_o = \frac{1}{2} H_o^{-1}. \quad (1.6.15)$$

De la ecuación (1.6.4), para $\Omega_o = 0$, se obtiene $t_o = H_o^{-1}$, igual que en el caso de un universo dominado por materia. Esto es obvio ya que en este caso límite se tiene el mismo tipo de universo.

Otro caso que resulta ser de fácil análisis es el de un universo plano en donde existe materia y energía del vacío falso (equivalente a una constante cosmológica). Para este caso se tiene que la presente edad del universo es:

$$t_o = \frac{2}{3} H_o^{-1} \Omega_{vac}^{-1/2} \ln \left[\frac{1 + \Omega_{vac}^{1/2}}{(1 - \Omega_{vac})^{1/2}} \right], \quad (1.6.16)$$

donde $\Omega_{vac} = \rho_{vac}/\rho_c$ y se está asumiendo que $\Omega_{vac} + \Omega_{materia} = 1$. De esta expresión se puede ver que para un universo con $\approx 15\%$ de materia es más viejo que H_o^{-1} y si se toma el caso de un universo sin materia en donde sólo existe energía del vacío falso se tiene que $t_o \rightarrow \infty$.

1.7 El horizonte

Un punto de fundamental importancia en la cosmología, radica en el hecho de que sólo existe una región en el universo que está en contacto causal, es decir, sólo una porción del universo ha logrado intercambiar información, partiendo del supuesto que la velocidad de

la luz es la velocidad límite para este intercambio. El horizonte de partículas es definido como la superficie en la cual se encontrarían los objetos más lejanos que hubieran podido intercambiar alguna información con el observador. La región dentro de esta superficie, sería la parte del universo causalmente conectada. La distancia espacial recorrida por la luz desde esta superficie hasta el observador, es definida como la distancia al horizonte. Para calcular esta distancia, sin pérdida de generalidad, se puede colocar al observador en el origen de coordenadas, de forma que los rayos de luz llegan de manera radial, y por lo tanto $d\theta = d\phi = 0$. La distancia espacial se calcula integrando la parte espacial de la métrica de Robertson-Walker (ecuación (1.3.5)):

$$d(t) = \int_0^r a(t) \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}}. \quad (1.7.1)$$

De la ecuación de movimiento de un fotón ($ds^2 = 0$), se tiene que:

$$\int_0^r \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = \int_0^t \frac{dt}{a(t)},$$

lo que implica:

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.7.2)$$

donde $d_H(t)$ es la distancia al horizonte a un tiempo t , la expresión anterior también puede ser escrita como:

$$d_H(t) = a(t) \int_0^{a(t)} \frac{da(t')}{\dot{a}(t')a(t')}. \quad (1.7.3)$$

La expresión para $\dot{a}(t)$ depende del tipo de universo. es decir, si éste es dominado por materia o por radiación. La expresión para cada caso puede ser dada a partir de (1.6.3) y (1.6.4) en forma general como:

$$\dot{a}^2 = a_o^2 H_o^2 \left[1 - \Omega_o + \Omega_o \left(\frac{a_o}{a} \right)^{1+3\alpha} \right], \quad (1.7.4)$$

donde $\alpha = 0$ para el caso de un universo dominado por materia y $\alpha = 1/3$ para el caso de un universo dominado por radiación. Sustituyendo la expresión para $\dot{a}(t)$ de (1.7.4) en (1.7.3) haciendo el cambio de variable $x = a/a_o$, y usando (1.5.14) se tiene que:

$$d_H = \frac{1}{H_o(1+z)} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[x^2(1 - \Omega_o) + \Omega_o x^{1-3\alpha}]^{1/2}}. \quad (1.7.5).$$

Para el caso de un universo dominado por materia ($\alpha = 0$) la distancia al horizonte es:

$$d_H = \frac{1}{H_o(1+z)(\Omega_o - 1)^{1/2}} \cos^{-1} \left[1 - \frac{2(\Omega_o - 1)}{\Omega_o(1+z)} \right], \quad (1.7.6)$$

para el caso en que $\Omega_o > 1$. Para el caso plano se tiene que:

$$d_H = 2H_o^{-1}(1+z)^{-3/2}. \quad (1.7.7)$$

Esta expresión en función del tiempo (ecuación (1.6.9)) es:

$$d_H = 3t. \quad (1.7.8)$$

Finalmente para el caso $\Omega_o < 1$:

$$d_H = \frac{1}{H_o(1+z)(1-\Omega_o)^{1/2}} \cosh^{-1} \left[1 + \frac{2(1-\Omega_o)}{\Omega_o(1+z)} \right]. \quad (1.7.9)$$

Estas tres expresiones siempre son cantidades finitas para todo el rango de z . En particular cuando $z \rightarrow \infty$, es decir, en el momento de la gran explosión, $d_H \rightarrow 0$. En el caso de un universo plano o abierto, en donde el volumen del espacio es infinito, es claro que sólo una fracción del universo estará causalmente conectada. Para el caso de un universo cerrado, la fracción del universo que está causalmente conectada es la razón entre la distancia al horizonte y la circunferencia del universo, es decir, $d_H/2\pi a(t)$, en donde $2\pi a(t)$ es la longitud de la circunferencia. Sustituyendo la expresión para d_H , escribiendo $a(t)$ como $a(t) = a_o/(1+z)$ y usando el hecho de que $aH(\Omega_o - 1)^{1/2} = 1$ de la ecuación (1.3.10) para el caso cerrado, se tiene que:

$$\frac{d_H(t)}{2\pi a(t)} = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left[1 - \frac{2(\Omega_o - 1)}{\Omega_o(1+z)} \right]. \quad (1.7.10)$$

Esta expresión es cero al momento de la gran explosión, es decir, en este momento todo el universo está causalmente desconectado. Esta razón es 1/2 cuando $1+z = (\Omega_o - 1)/\Omega_o$, es decir, en este momento un fotón que salió desde un punto en el momento de la gran explosión ha recorrido la mitad del universo, llegando al punto que se encontraba justo en el polo opuesto. De esta manera el universo entero es visible desde cualquier punto, esto es, la luz ha llegado desde el punto más remoto del universo. De la ecuación (1.4.8) se puede deducir que el punto de máxima expansión para el caso cerrado, es cuando $\theta = \pi$ y de esta forma:

$$\frac{a_{max}}{a_o} = \frac{\Omega_o}{\Omega_o - 1}.$$

Usando nuevamente (1.5.14), se deduce que, cuando $1+z = (\Omega_o - 1)/\Omega_o$ es cuando el universo está en el punto de máxima expansión. Como el periodo de contracción es simétrico, un fotón habrá completado una vuelta alrededor de universo, justo en un ciclo completo de expansión y contracción.

Para el caso de un universo dominado por radiación, la expresión (1.7.5) se convierte en:

$$d_H = \frac{1}{H_0(1+z)} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{(x^2(1-\Omega_0) + \Omega_0)^{1/2}}. \quad (1.7.11)$$

Para el caso plano ($\Omega_0 = 1$) se obtiene:

$$d_H = \frac{1}{H_0(1+z)^2}. \quad (1.7.12)$$

La solución para el caso cerrado ($\Omega_0 > 1$) es:

$$d_H = \frac{1}{H_0(1+z)(\Omega_0 - 1)^{1/2}} \operatorname{sen}^{-1} \left[(1-z)^{-1} \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right)^{1/2} \right]. \quad (1.7.13)$$

Finalmente para el caso de un universo abierto ($\Omega_0 < 1$):

$$d_H = \frac{1}{H_0(1+z)(1-\Omega_0)^{1/2}} \ln \left\{ (1-z)^{-1} \left(\frac{1-\Omega_0}{\Omega_0} \right)^{1/2} + \left[1 + \left(\frac{1-\Omega_0}{\Omega_0} \right) (1-z)^{-2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (1.7.14)$$

En un universo de Robertson-Walker dominado por materia o por radiación la distancia al horizonte es una función que vale cero en el momento de la gran explosión. En un principio no existían regiones del universo causalmente conectadas, a pesar de que la distancia entre cualesquiera dos objetos también tiende a cero en el momento de la gran explosión. Esto se debe al hecho de que la distancia física entre estos objetos, creció en un principio más rápido que su distancia al horizonte. Gradualmente la velocidad de expansión disminuyó y objetos cercanos empezaron a entrar en contacto causal, pero incluso hoy en día existen regiones del universo que no están causalmente conectadas.

1.8 Historia térmica del universo

El hecho de que la densidad de materia en el universo decaiga como $\rho_m \propto a^{-3}$ y la de radiación como $\rho_r \propto a^{-4}$, sitúa al universo actualmente en un periodo donde la dinámica, y los procesos a gran escala están dominados por la densidad de materia, la cual es aproximadamente 100 veces mayor que la densidad de radiación. Sin embargo, en épocas muy tempranas, cuando el factor de escala era muy pequeño y existían temperaturas muy elevadas, la radiación y las partículas relativistas fueron más importantes que la materia ordinaria.

La dependencia de la temperatura con el factor de escala durante este periodo de tiempo puede ser fácilmente deducida. Recordando que un objeto que se encuentra a una temperatura T , contiene una densidad de energía de radiación ρ que varía como $\rho \propto T^4$ y usando (1.4.4), se obtiene directamente que:

$$T \propto a^{-1}.$$

$$(1.8.1)$$

Cuando el universo se encontraba a una temperatura $T > 10^{12}K$, contenía una gran variedad de partículas en equilibrio térmico. Entre estas partículas se encontraban: fotones, leptones, mesones y nucleones, así como sus antipartículas. A tiempos posteriores $T \approx 10^{12}K$, el universo contenía fotones, muones, antimuones, electrones, positrones, neutrinos y antineutrinos, además de protones en la misma cantidad de neutrones. Todas estas partículas estaban aún en equilibrio térmico. Conforme la temperatura cayó por debajo de $T \approx 10^{12}K$, los muones y antimuones comenzaron a aniquilarse y de esta forma desaparecieron la mayoría de muones. Los neutrinos y antineutrinos se desacoplaron de las demás partículas a una temperatura de $T \approx 1.3 \times 10^{11}K$, dejando electrones, positrones, fotones y unos pocos nucleones en equilibrio térmico. Cuando la temperatura cayó por debajo de 5×10^9K , aproximadamente 4 segundos después de la gran explosión, hubo un periodo de aniquilación de los pares electrón-positrón.

A una temperatura aproximada de 10^9K ($t \approx 150$ seg.), los neutrones empezaron a fusionarse con protones, debido a fuerzas nucleares, formando un gas ionizado, principalmente de hidrógeno helio y algunos isótopos de estos dos elementos. La cantidad de hidrógeno que se creó es conocido como hidrógeno primordial, con una abundancia de aproximadamente 75%, mientras que la cantidad de helio creado fué de aproximadamente 25%.

Uno de los periodos más importantes de actividad se dió entre $T \approx 10^5K$ y $T \approx 10^3K$ en donde ocurrieron tres eventos importantes en la vida del universo, los cuales dieron lugar a la era dominada por la materia, a la creación de átomos y a lo que actualmente se conoce como la radiación de fondo.

El primero de estos tres eventos fue el de equilibrio entre la densidad de materia y la densidad de radiación. Este es el instante en donde la densidad de materia y la densidad de radiación tuvieron el mismo valor, y a partir del cual termina el periodo dominado por radiación y se entra en un régimen dominado por materia. Se estima que este momento ocurrió cuando el universo tenía una edad de $t \approx 1400$ años, es decir, una temperatura de $T \approx 64,000K$ (estas estimaciones de obtienen considerando $\Omega_m = h - 1$).

El segundo de estos eventos que tomó lugar fue la recombinación. Conforme la temperatura disminuyó los electrones libres perdieron energía, cayendo en el potencial de los núcleos y dando lugar a átomos de hidrogeno y helio. Comúnmente la recombinación se define como el momento en que el 90% de electrones están combinados con núcleos y sólo existe un 10% de electrones libres, este momento ocurrió a $t \approx 140,000$ años después de la gran explosión, cuando el universo se encontraba a una temperatura de $T \approx 3600K$, considerando nuevamente un universo plano, y el máximo valor estimado para el parámetro de Hubble.

El último de estos tres eventos fue el desacoplamiento de fotones con la materia. A medida que el universo se fue expandiendo y la temperatura disminuyó, el equilibrio térmico entre materia y radiación llegó a su fin, de esta manera, los fotones se desacoplaron dejando

de interaccionar con la materia. Este desacoplamiento ocurrió a un tiempo de $t \approx 180,000$ años, correspondiente a una temperatura de $T \approx 3,000K$ (con $\Omega_0 = h = 1$). Esta radiación es conocida como radiación de fondo de microondas y actualmente se ha detectado con una temperatura de tan sólo $2.7 K$, debido al hecho de que su frecuencia ha sido corrida por la expansión (ecuación (1.5.12)). La temperatura de la radiación desacoplada en ese momento era la correspondiente temperatura que tenía la densidad de materia, ya que para ese entonces el universo se encontraba en el periodo dominado por materia. A fin de estimar la relación entre temperatura y densidad de materia, considérese la expresión para la densidad numérica n , de partículas de un gas en equilibrio térmico, en términos de su función de distribución espacial $f(\vec{p})$:

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3 p. \quad (1.8.2)$$

donde g son los grados internos de libertad. La función de distribución $f(\vec{p})$, está dada por la función de distribución de Fermi-Dirac o la de Bose-Einstein:

$$f(\vec{p}) = (\exp((E - \mu)/T) \pm 1)^{-1}, \quad (1.8.3)$$

donde E es la energía, tal que $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$ y μ es el potencial químico. Sustituyendo (1.8.3) y escribiendo la integral el función de la energía se tiene que (1.8.2) es:

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{-1/2}}{\exp((E - \mu)/T) \pm 1} E dE. \quad (1.8.4)$$

En el caso en que $T \gg m$ y $T \gg \mu$, la integral anterior es:

$$n = (\zeta(3)/\pi^2) g T^3, \quad (1.8.5)$$

para la estadística de Bose-Einstein y:

$$n = (3/4)(\zeta(3)/\pi^2) g T^3, \quad (1.8.6)$$

para la estadística de Fermi-Dirac. $\zeta(3)$ es la función zeta de Riemann de tres y tiene un valor de $\zeta(3) \approx 1.2$. Como se puede apreciar $n \propto T^3$ tanto para bosones como para fermiones.

1.9 Inflación

A pesar del éxito de los modelos cosmológicos de Robertson-Walker, estos modelos tiene algunas implicaciones que están en contradicción con varias observaciones.

El primero de estos problemas, es conocido como el problema de la llaneza. Actualmente no se sabe cual de los tres modelos de Robertson-Walker (plano, hiperbólico o elíptico), corresponde al tipo de universo en el que vivimos. Sin embargo, existen límites

respecto a la densidad, que sitúan al universo con una densidad tal que: $0.2 < \Omega_0 < 2$. Considerando la ecuación (1.3.10), escrita como:

$$\frac{k}{a^3} = \Omega - 1, \quad (1.9.1)$$

es fácil darse cuenta, que si \dot{a} disminuye en el tiempo, como ocurre en los modelos de Robertson-Walker, Ω cada vez se aleja más de 1. Para que actualmente se tenga un valor, en el rango antes mencionado, es necesario que el universo haya tenido una densidad inicial con un valor extremadamente cercano al valor crítico. Es decir, es difícil justificar por qué el universo empezó con un valor inicial en la densidad tan específico.

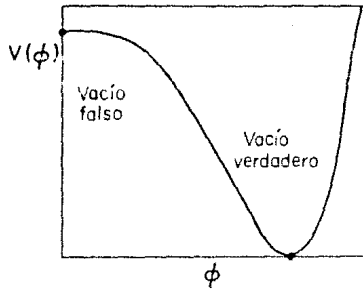
El segundo problema que tiene el modelo clásico, es el problema de la desconexión causal. La radiación de fondo de microondas, mencionada en la sección anterior, ha sido detectada con un valor correspondiente a una temperatura de aproximadamente 2.7 K, en cualquier dirección, es decir, con un muy alto nivel de isotropía. Esto implica que dos regiones que se encuentran actualmente muy alejadas, pero no necesariamente causalmente desconectadas, tuvieron la misma temperatura durante el desacoplamiento entre radiación y materia, ya que las dos radiaron a la misma temperatura. La distancia correspondiente entre estas regiones, en el momento del desacoplamiento, es mayor que la distancia al horizonte en esa época (ver sección 1.7), por lo que se encontraban causalmente desconectadas y no podía haber existido algún proceso físico que les permitiera tener la misma temperatura.

Estos problemas, entre otros, son resueltos por un modelo propuesto por Alan H. Guth (1981) conocido como el universo inflacionario. Este modelo fue corregido por Linde (1981) y Albrecht y Steinhardt (1982), con el modelo de el nuevo universo inflacionario. Aquí será planteado directamente el segundo modelo.

La idea en la que se basa este modelo, es que existió un breve periodo de tiempo durante el cual la materia estuvo en un estado metaestable de "vacío falso", el cual originó que el universo se expandiera en forma exponencial, durante este periodo de tiempo de vacío falso. En este lapso, el universo se expandió por un factor de aproximadamente 10^{50} veces más de lo que se hubiera expandido en la cosmología estándar.

El modelo del universo inflacionario requiere de un campo escalar de Higgs Φ , con un potencial efectivo $V(\Phi)$, similar al mostrado en la gráfica 4. Una de las motivaciones para este tipo de campo escalar tiene su origen en teorías de unificación de las interacciones fuerte, débil y electromagnética, ya que esta forma para el potencial también se requiere en este tipo de teorías de gran unificación.

El valor $V(\Phi)$ representa la densidad de energía. El valor máximo que se aprecia en la gráfica 4, que se da alrededor de $\Phi = 0$, corresponde a una región inestable, donde la densidad de energía es aproximadamente constante. Este es el periodo donde se supone el universo estuvo dominado por un vacío falso el cual tiene la propiedad de tener una densidad de energía constante. Posteriormente, el valor del potencial decae mediante una transición de fase, hasta un estado estable, donde el potencial oscila y el cual corresponde



Gráfica 4.-Potencial efectivo como función del campo escalar, para un universo inflacionario

a un vacío verdadero.

El periodo de inflación ocurre durante este estado de vacío falso, cuando la densidad de energía es constante. Para calcular la solución para el factor de escala en el modelo inflacionario considérese una de las ecuaciones de Friedmann (ecuación (1.3.5)) y por facilidad considérese el caso plano ($k = 0$):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (1.9.2)$$

La solución a esta ecuación, considerando que la densidad es constante es:

$$a(t) \propto \exp(\chi t), \quad (1.9.3)$$

donde $\chi = (8\pi G\rho/3)^{1/2}$. Recordando que el parámetro de Hubble es definido como $H = \dot{a}/a$, entonces $H = \chi$. Durante este periodo de inflación el parámetro de Hubble es constante.

Una forma de interpretar que una densidad de energía constante origine un proceso de inflación es por medio de la presión. En la ecuación (1.3.9) se puede ver que la aceleración originada por una densidad y una presión positiva, es negativa, es decir, la velocidad de expansión va disminuyendo. Si la presión es negativa y tiene un valor de $p = -\rho$ (ecuación (1.4.6)), la ecuación (1.3.9) implica una aceleración positiva, esto es, la velocidad de expansión aumenta. De esta forma, una presión negativa puede ser interpretada como una fuente de inflación.

Durante el periodo de inflación, la densidad del universo se ajusta hasta alcanzar un valor extremadamente cercano a 1. Si el universo tiene un periodo en donde el factor de escala crece exponencialmente, \dot{a} también crecerá exponencialmente. En la ecuación (1.9.1) es directo ver, que si \dot{a} crece, $\Omega \rightarrow 1$, independientemente de su valor inicial. En

este modelo no es nada extraño que el valor de la densidad actual, esté tan cercano al valor de la densidad crítica.

Para entender como se resuelve el problema de la desconexión causal, fijese en el horizonte de eventos. Este se define como la superficie que divide la región del universo, que nunca más volverá a estar en contacto causal, aunque podría haberlo estado en el pasado. De la definición es claro que la expresión para la distancia al horizonte de eventos es la misma que para el horizonte de partículas, pero integrando de un tiempo t hasta infinito (ecuación (1.7.2)):

$$d_{HE}(t) = a(t) \int_t^{\infty} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.9.4)$$

Para el caso de inflación, la distancia al horizonte de eventos se obtiene calculando la expresión (1.9.4) con $a = a_0 \exp H(t - t_0)$:

$$d_{HE} = H^{-1}. \quad (1.9.5)$$

De esta forma, la distancia al horizonte permanece constante, ya que H es constante durante el periodo de inflación. El hecho de que en el modelo estándar no todo el universo este causalmente conectado, a pesar de que cualesquiera dos objetos pudieron haber estado en el pasado tan cerca como se quiera, se debe a que al principio la distancia entre estos dos objetos creció más rápido que su distancia al horizonte. En el modelo inflacionario dos regiones muy alejadas pudieron estar en contacto causal porque su horizonte de eventos permaneció constante, entonces en algún momento, cuando se encontraban suficientemente cercanas, estuvieron dentro de su horizonte de eventos y de esta forma causalmente conectadas.

2.1 Formación de estructura

Una de las hipótesis fundamentales en que se basa la cosmología estándar, es la isotropía y la homogeneidad del universo. Esta hipótesis, conocida como principio cosmológico, parece ser cierta a escalas suficientemente grandes, ($\geq 200 \text{ Mpc } \dagger$). Sin embargo, a escalas más pequeñas, las inhomogeneidades que se presentan son evidentes, como lo es la existencia de galaxias, cúmulos y supercúmulos. Estas estructuras se presentan en escalas de 10-100 Kpc para galaxias y de 10 y 100 Mpc para cúmulos y supercúmulos respectivamente. En estas regiones la densidad alcanza un factor de hasta 100 a 1000 veces más grande que el promedio de densidad en el universo. Otro tipo de inhomogeneidades que existen son los denominados "vacíos", los cuales son regiones de muy baja densidad, con una densidad numérica de galaxias por debajo del promedio, y cuyos tamaños son del orden de 100-200 Mpc.

Se asume comúnmente que la estructura actual en el universo es el resultado final de pequeñas fluctuaciones en la densidad, existentes en las primeras etapas del universo y que, mediante algún proceso, han evolucionado hasta formar las estructuras actuales.

Una de las restricciones que surgen con respecto a las homogeneidades observadas actualmente, es que éstas deben de ser compatibles con las observaciones de la radiación de fondo de 2.7 K. Las observaciones indican que la radiación de fondo es altamente homogénea e isotrópica con $\delta T/T \approx 10^{-6}$. La dependencia que existe entre la fluctuación en la densidad y la fluctuación en la temperatura, la cual será deducida en este capítulo (sección 2.11):

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = ctc \frac{\delta T}{T}. \tag{2.1.1}$$

restringe a las inhomogeneidades en la densidad de materia. La homogeneidad e isotropía en la radiación de fondo implican que el universo tuvo una distribución de materia altamente homogénea e isotrópica en épocas muy tempranas, es decir, las inhomogeneidades en la densidad están restringidas, por el fondo de microondas, a ser muy pequeñas en la época del desacoplamiento (sección 1.8).

Si se supone un proceso gravitacional como la fuente de evolución de estas inhomogeneidades, como se verá más adelante, éstas crecen, en un régimen lineal, proporcional al factor de escala, es decir, $\delta \rho/\rho \propto a \propto t^{2/3}$. Este tipo de evolución no permite a las inhomogeneidades crecer hasta alcanzar las altas densidades que se tienen en las actuales estructuras, ya que el factor de escala ha crecido desde el desacoplamiento un factor de 1000, es decir, la mayor densidad que se podría alcanzar teniendo en cuenta la restricción del fondo de microondas sería de $\delta \rho/\rho \approx 10^{-3}$. Esta es una estimación muy burda, ya que

$\dagger 1 \text{ pc} = 3.08 \times 10^{18} \text{ cm}; 1 \text{ Kpc} = 10^3 \text{ pc}; 1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc}$

un análisis en un régimen lineal restringe a la perturbación a ser menor que la unidad y para esperar estructuras más densas habría que comparar con los resultados de teorías en regímenes no lineales.

Entre los elementos más importantes a considerar en la teoría estándar está el tipo de universo en el que se desarrolla el crecimiento de las inhomogeneidades (hiperbólico, elíptico o plano), además de la composición de la materia que tiene el universo. Otros elementos importantes involucran el conocimiento de las condiciones iniciales en las perturbaciones, como lo son su naturaleza, su amplitud, el espectro de potencias (definido en la siguiente sección), así como el mecanismo mediante el cual evolucionan estas perturbaciones. Además hay que considerar algunos efectos que pueden borrar las inhomogeneidades, etc.

2.2 Análisis newtoniano para crecimiento de perturbaciones

Uno de los análisis que puede hacerse para explicar la evolución de la estructura en el universo, es un análisis de Jeans para crecimiento de perturbaciones. Este supone que el tipo de estructuras que se tienen actualmente es el resultado final de la evolución de pequeñas inhomogeneidades que existían en una época cercana a la gran explosión y que, mediante un proceso gravitacional, han evolucionado hasta formar la estructura que existe actualmente. Para este análisis se supone que el universo es un fluido perfecto que está interaccionando gravitacionalmente. Por lo tanto, se consideran las ecuaciones de Euler para un fluido: la ecuación de continuidad y la ecuación de momento y, por último, la interacción gravitacional por medio de la ecuación de Poisson. Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \phi &= 0, \\ \nabla^2 \phi &= 4\pi G \rho, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

donde la densidad de materia ρ , la presión p , el potencial gravitacional ϕ y la velocidad \vec{v} son funciones que en general dependen de la posición y del tiempo. Considétese ahora a cada una de las variables de estas ecuaciones como su solución espacialmente homogénea más una perturbación. Estas perturbaciones representan las inhomogeneidades que se tienen a cada tiempo:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t),$$

$$p = p_0 + p_1(\vec{r}, t),$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1(\vec{r}, t),$$

$$\phi = \phi_o + \phi_1(\vec{r}_1, t), \quad (2.2.2)$$

Las soluciones homogéneas estan dadas por :

$$\rho_o = \rho_o(t_o) a^{-3}(t),$$

$$\vec{v}_o = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r},$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi_o = \frac{4\pi G \rho_o}{3} \vec{r}. \quad (2.2.3)$$

donde a es el factor de escala, definido en la sección 1.3, normalizado a 1 al tiempo presente. y t_o es la edad del universo. La presión puede escribirse en términos de la densidad, por medio de la siguiente ecuación de estado:

$$p = \alpha \rho. \quad (2.2.4)$$

Sutituyendo ahora las ecuaciones (2.2.2) en las ecuaciones (2.2.1), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho_1 + \frac{\dot{a}}{a} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \rho_1 + \rho_o (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_1) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}_o}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_o \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_o + \frac{\dot{a}}{a} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + \\ \frac{1}{\rho_o + \rho_1} \vec{\nabla} p_o + \frac{1}{\rho_o + \rho_1} \vec{\nabla} p_1 + \vec{\nabla} \phi_o + \vec{\nabla} \phi_1 &= 0, \\ \nabla^2 \phi_1 &= 4\pi G \rho_1. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

En este punto, la no linealidad del término $1/(\rho_o + \rho_1)$ no permite simplificar estas ecuaciones. Una de las formas de hacerlo es suponer que la perturbación es pequeña, hacer un desarrollo de Taylor para este término y despreciar los términos de segundo orden. Suponiendo que la variación en la perturbación también es pequeña, esto es, del orden de la perturbación, lo que se obtiene es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho_1 + \frac{\dot{a}}{a} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \rho_1 + \rho_o (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}_1 + \frac{\alpha}{\rho_o} \vec{\nabla} \rho_1 + \vec{\nabla} \phi_1 &= 0, \\ \nabla^2 \phi_1 &= 4\pi G \rho_1, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

donde se ha eliminado la presión por medio de (2.2.4). Si se define:

$$\delta(\vec{r}, t) \equiv \rho_1 / \rho_0. \quad (2.2.7)$$

Las ecuaciones (2.2.6) se convierten en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial t} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \delta + \frac{\dot{a}}{a} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \delta + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}_1 + a \vec{\nabla} \delta + \vec{\nabla} \phi_1 &= 0, \\ \nabla^2 \phi_1 &= 4\pi G \rho_0 \delta. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Estas ecuaciones se simplifican considerablemente pasándolas al espacio de Fourier mediante la transformación:

$$\Psi(\vec{r}, t) = (2\pi)^{-3} \int \Psi_k(t) \exp\left(\frac{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}{a(t)}\right) d^3k, \quad (2.2.9)$$

donde Ψ puede ser δ , \vec{v}_1 , ϕ_1 . Una componente particular de Fourier está caracterizada por su amplitud, $|\Psi|$, por su número de onda comóvil, k , donde $k = |\vec{k}|$ y por su fase. La distancia física y el número de onda físico se obtienen mediante el factor de escala:

$$dr_{fís} = a(t) dr, \quad k_{fís} = k/a(t)$$

Mientras que la longitud de onda de la perturbación está relacionada al número de onda por medio de:

$$\lambda = 2\pi/k, \quad \lambda_{fís} = a(t)\lambda.$$

En el espacio de Fourier las ecuaciones (2.2.8) tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_k - \frac{i\vec{k}}{a} \cdot \vec{v}_k &= 0, \\ \frac{d(a\vec{v}_k)}{dt} - i\vec{k} a \delta_k - i\vec{k} \phi_k &= 0, \\ \phi_k &= -\frac{4\pi G \rho_0}{k^2} a^2 \delta_k. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Descompóngase ahora la perturbación en el campo de velocidades en una parte rotacional (\vec{v}_\perp) y otra irrotacional (\vec{v}_\parallel):

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel, \quad \vec{v}_k = \vec{v}_\perp(\vec{k}) + \vec{v}_\parallel(\vec{k}), \quad (2.2.11)$$

donde:

$$\nabla \cdot \vec{v}_\perp = 0, \quad \nabla \times \vec{v}_\parallel = 0,$$

y

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_\perp(\vec{k}) = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{v}_\parallel(\vec{k}) = |\vec{k}| |\vec{v}_\parallel(\vec{k})|. \quad (2.2.12)$$

Nótese que \vec{v}_\parallel puede ser escrito como el gradiente de un campo escalar, mientras que \vec{v}_\perp puede ser escrito como el rotacional de un campo vectorial.

Por facilidad considérese que $\vec{v}_\perp = 0$, es decir, el campo de velocidades es únicamente irrotacional. Haciendo estas consideraciones se encuentra una ecuación para δ_k de las ecuaciones (2.2.10):

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \left(\frac{\alpha k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_o\right)\delta_k = 0 \quad (2.2.13)$$

La solución de esta ecuación depende en primera instancia del tipo de universo que se tenga, es decir, de la variación de a con respecto al tiempo. Como ya se sabe, ésta es diferente en cada una de las soluciones de los modelos de Friedmann. Primero se analizará la solución más fácil, que corresponde al caso de un universo estático, el cual no es un universo físicamente posible, pero que puede dar una idea del comportamiento de la solución. En este caso lo que se tiene es: $\dot{a} = 0$, haciendo esta sustitución en (2.2.13) queda la ecuación:

$$\ddot{\delta}_k + \left(\frac{\alpha k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_o\right)\delta_k = 0 \quad (2.2.14)$$

La solución a esta ecuación depende del signo del coeficiente de δ_k . En el caso en que éste sea positivo lo que tenemos es un oscilador armónico:

$$\delta_k = A_1 \cos \eta t + A_2 \sin \eta t, \quad (2.2.15)$$

donde:

$$\eta = \left(\frac{\alpha k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_o\right)^{1/2},$$

es decir, la perturbación en la densidad no crece y queda oscilando. En el caso de que el signo sea negativo, la solución es de tipo exponencial:

$$\delta = B_1 e^{\eta t} + B_2 e^{-\eta t}, \quad (2.2.16)$$

donde:

$$\eta = \left(4\pi G\rho_o - \frac{\alpha k^2}{a^2}\right)^{1/2}.$$

En este caso la perturbación crece, dependiendo de las condiciones iniciales. La condición que divide estas dos posibilidades ($\eta = 0$) depende de k , es decir, para que la perturbación pueda crecer se debe tener un coeficiente negativo, por lo que k debe ser menor que un cierto valor crítico conocido como el número de onda de Jeans (k_j) cuyo valor es:

$$k_j = \left(\frac{4\pi G \rho_0 a^2}{a} \right)^{1/2}. \quad (2.2.17)$$

que se obtiene directamente de la condición $\eta = 0$. En el caso de un universo en expansión, la solución depende también del hecho de que k sea mayor o menor que el valor crítico de Jeans, separando de esta forma los modos gravitacionales estables e inestables. Físicamente ésto se debe al hecho de que la inhomogeneidad en la densidad crecerá si las fuerzas de presión son más pequeñas que las gravitacionales y, por lo tanto, esa inhomogeneidad será un punto atractor de materia. En el caso de un universo dominado por materia sin presión (polvo), se tiene que $\alpha = 0$, y no existen restricciones en el tamaño para que la perturbación crezca. Las fuerzas de presión no existen y no interactúan en contra de las fuerzas gravitacionales.

Si se supone que el universo se expande conforme una ley de potencias $a(t) \propto t^n$, se puede encontrar una solución que depende de la longitud de onda. Para longitud de onda corta ($k \gg k_j$) la perturbación oscila como:

$$\delta(t) \sim \exp(\pm i\theta t), \quad (2.2.18)$$

en donde:

$$\theta = \frac{\alpha k}{a(t)(1-n)}.$$

La solución para el crecimiento de la perturbación también depende de α es decir, también se tendría diferente solución si el universo estuviera dominado por materia o por radiación.

Dentro de las suposiciones más comunes se toma un universo dominado por materia. La justificación para hacer esto es que las inhomogeneidades están sometidas a cierto tipo de amortiguamientos que no les permiten crecer, sino hasta que entren en un periodo en donde el universo esté dominado por materia (secciones 2.7 y 2.6)). Esta época se da aproximadamente 1400 años después de la gran explosión.

A continuación se analizarán las soluciones para el crecimiento de las perturbaciones para cada una de las diferentes soluciones de los modelos de Friedmann.

En el caso de un universo plano ($a = Bt^{2/3}$, $\rho_0 = (6\pi G t^2)^{-1}$) la ecuación (2.2.13) se convierte en:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t} \dot{\delta} - \frac{2}{3t^2} \delta = 0, \quad (2.2.19)$$

cuya solución es:

$$\delta = A_1 t^{2/3} + A_2 t^{-1}. \quad (2.2.20)$$

Sólo el primer término de la solución contribuye al crecimiento de la perturbación, ya que el segundo es decreciente con el tiempo. La solución para el crecimiento de la perturbación crece con el factor de escala:

$$\delta \propto a. \quad (2.2.21)$$

Para analizar los otros dos casos, existe el problema de que no se tiene la solución para a como función del tiempo, pero sí como función de θ y v definidas en el capítulo 1 (ecuaciones (1.4.8) y (1.4.9)). Aplicando el mismo cambio de variable de las ecuaciones (1.4.8) y (1.4.9), la ecuación (2.2.13), para el caso hiperbólico, toma la siguiente forma:

$$\frac{d^2 \delta}{dv^2} + \frac{\operatorname{senh} v}{(\cosh v - 1)} \frac{d\delta}{dv} - \frac{3}{(\cosh v - 1)} \delta = 0. \quad (2.2.22)$$

La solución de esta ecuación está dada por:

$$\delta = B_1 \left[-\frac{3v \operatorname{senh} v}{(\cosh v - 1)^2} + \frac{5 + \cosh v}{\cosh v - 1} \right] + B_2 \left[\frac{\operatorname{senh} v}{(\cosh v - 1)^2} \right]. \quad (2.2.23)$$

Mientras que para el caso elíptico se obtiene:

$$\frac{d^2 \delta}{d\theta^2} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{(1 - \cos \theta)} \frac{d\delta}{d\theta} - \frac{3}{(1 - \cos \theta)} \delta = 0, \quad (2.2.24)$$

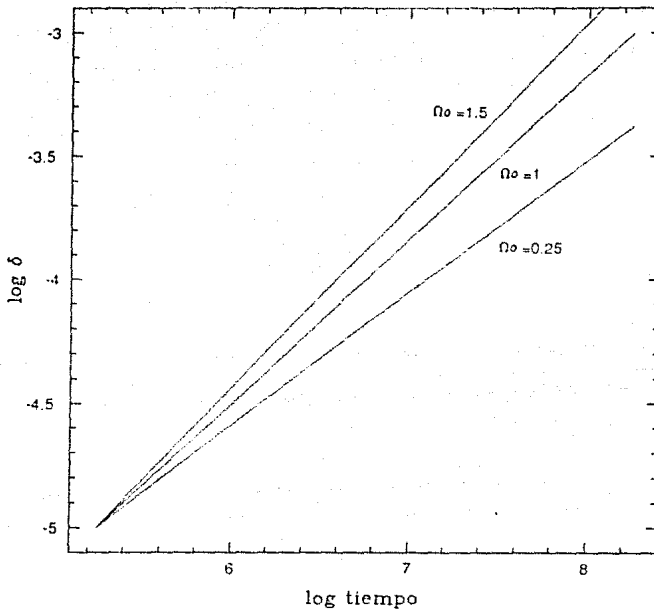
cuya solución es:

$$\delta = C_1 \left[-\frac{3\theta \operatorname{sen} \theta}{(1 - \cos \theta)^2} + \frac{5 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right] + C_2 \left[\frac{\operatorname{sen} \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \right]. \quad (2.2.25)$$

A fin de comparar las diversas soluciones, se presentan sus gráficas para cada uno de los tres casos, partiendo de la misma condición inicial (ver gráfica 1). Para poder hacer la comparación se tiene que graficar contra el tiempo, por lo que la tabulación se hace paramétricamente, es decir, teniendo δ y t como función de θ y v (ecuaciones (1.4.8) y (1.4.9)).

Como se ve, el crecimiento de la perturbación resulta ser mayor para el caso de un universo elíptico, en tanto que la perturbación crece de manera más lenta en el caso hiperbólico. El plano resulta ser un caso intermedio de los otros dos. La diferencia en las soluciones se debe a que en el caso hiperbólico la velocidad de expansión del universo es más grande, por lo que es más difícil que la perturbación se desacople de la expansión. En el caso elíptico la velocidad de expansión del universo es menor, por lo que es más fácil que la perturbación caiga en su propio potencial y le gane a la expansión.

Hasta este punto se han considerado las diferentes posibilidades de evolución para δ en un universo dominado por materia. Estas soluciones únicamente son válidas en el régimen



Gráfica 1.- Perturbación en la densidad como función del tiempo para los diferentes modelos de Robertson-Walker

lineal, es decir, $\delta < 1$. En el régimen no lineal δ no es necesariamente pequeña, por lo que se consideran todos los términos, incluyendo los no lineales. Uno de los problemas inmediatos que surgen de estas consideraciones es que aparece de nuevo el término $1/(\rho_0 + \rho_1)$. Si se considera completo, en primer lugar no se puede recuperar la ecuación para la solución no perturbada, por lo que no se reducen las ecuaciones, teniéndose que sustituir cada uno de los términos para la solución de fondo; además, existen problemas para escribir este término en el espacio de Fourier. Una de las formas en que se evita este problema, es considerar el caso en que el universo es dominado por polvo ($p = 0$), por lo que sólo se deducirán las ecuaciones para este caso, en donde este término desaparece. Las ecuaciones (2.2.5) toman la forma:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_1 + \frac{\dot{a}}{a}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\rho_1 + \rho_o(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_1) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1 + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1 + \vec{\nabla}\phi_1 = 0,$$

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (2.2.26)$$

Y en el espacio de Fourier:

$$\dot{\delta}_k - \frac{i\vec{k}}{a} \cdot \vec{v}_k - \frac{i\vec{k}}{a} \cdot (\delta_k * \vec{v}_k) = 0,$$

$$\frac{d(a\vec{v}_k)}{dt} - i\vec{k}\phi_k - i(\vec{v}_k * (\vec{k} \cdot \vec{v}_k)) = 0,$$

$$\phi_k = -\frac{4\pi G \rho_o}{k^2} a^2 \delta_k, \quad (2.2.27)$$

en donde $*$ denota convolución definida por:

$$f_k * g_k = (2\pi)^{-3/2} \int f(\vec{\omega})g(\vec{k} - \vec{\omega})d^3\vec{\omega}.$$

Una de las formas de resolver las ecuaciones (2.2.27) es usando un método espectral directo, que consiste en tomar solamente un número finito de modos en la transformación al espacio de Fourier. Para esto debe tomarse una transformación discreta definida como:

$$\Psi(\vec{r}, t) = (2\pi)^{-3} \sum_{\vec{k}} \Psi_k(t) e^{i\vec{r} \cdot \vec{k}} \left(\frac{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}{a(t)} \right). \quad (2.2.28)$$

Suponiendo que la velocidad sólo tiene una parte irrotacional, surge una nueva variable ψ , que representa el campo escalar cuyo gradiente es la velocidad:

$$\vec{v} = \nabla \psi.$$

Escribiendo las ecuaciones con esta nueva variable obtenemos, ya en el espacio de Fourier, lo siguiente:

$$\dot{\delta}_k - \frac{k^2}{a^2} \psi_k - \frac{1}{a^2} \vec{k} \cdot \sum_{\vec{\omega}} (\vec{k} - \vec{\omega}) \delta_k \psi_{(k-\omega)} = 0,$$

$$\dot{\psi}_k - \frac{1}{2a^2} \sum_{\vec{\omega}} \vec{\omega} \cdot (\vec{k} - \vec{\omega}) \psi_{\omega} \psi_{k-\omega} + \phi_k = 0,$$

$$\phi_k = -\frac{4\pi G \rho_0}{k^2} a^2 \delta_k. \quad (2.2.29)$$

Estas ecuaciones ((2.2.27) para el caso continuo y (2.2.29) para el caso discreto) presentan el problema de no tener una solución analítica, por lo que se tienen que resolver con algún método numérico. Como condiciones iniciales comúnmente se toma una distribución de amplitudes de las perturbaciones de forma Gaussiana, además de fases al azar para el contraste de densidad (en el espacio de Fourier). Otro método comúnmente usado para análisis no lineales consiste en simulaciones de n-cuerpos, cuyos resultados son descritos en la sección 2.8.

2.3 Análisis relativista para crecimiento de perturbaciones

El análisis de crecimiento de perturbaciones, puede ser hecho en el contexto de la teoría general de la relatividad. En este caso, se hace un análisis perturbativo de las ecuaciones de campo de Einstein, con un tensor de energía-momento perturbado en la densidad en la presión y en la cuadrivelocidad:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1,$$

$$p = p_0 + p_1,$$

$$U^\mu = U_0^\mu + U_1^\mu. \quad (2.3.1)$$

La métrica se escribe como la métrica de Robertson-Walker más una perturbación:

$$g_{\mu\nu}^{tot} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.3.2)$$

La libertad que se tiene para escoger un sistema de referencia ofrece cuatro grados de libertad sobre h , por conveniencia elijase $h_{tt} = h_{ti} = 0$.

Las ecuaciones de campo perturbadas se obtienen directamente de la ecuación (1.3.1):

$$\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta [g_{\mu\nu} R] = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}.$$

o equivalentemente:

$$\delta R_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} - 4\pi G \delta [g_{\mu\nu} T], \quad (2.3.3)$$

donde T es la traza del tensor energía momento, $T = 3p - \rho$. Para facilitar el análisis se define:

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T,$$

y se toma la cuadrivelocidad como:

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0).$$

Una condición que debe tomarse para preservar la normalización de la velocidad U , está dada por:

$$\delta(g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu) = -2U^\lambda{}_{;\lambda} = 0$$

La perturbación que se obtiene a primer orden para el tensor $S_{\mu\nu}$ es:

$$\begin{aligned} \delta S_{\mu\nu} = & p_0 h_{\mu\nu} + p_1 g_{\mu\nu} + (p_0 + p_0)(U_{\mu t} + U_{t\mu} + U_{\mu 1} U_{1\mu}) + \\ & (p_1 + \rho_1) U_{\mu t} U_{t\mu} + \frac{1}{2} u_{\mu\nu} (3p_1 - \rho_1) - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} (3p_0 - \rho_0), \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

mientras que la perturbación que se obtiene en el tensor de Ricci, escribiéndolo en función de la métrica perturbada, es:

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{;\nu} - (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{;\lambda}, \quad (2.3.5)$$

donde

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [h_{\rho\mu}{}_{;\nu} + h_{\rho\nu}{}_{;\mu} + h_{\mu\nu}{}_{;\rho}]. \quad (2.3.6)$$

Las componentes para la perturbación en los símbolos de Christoffel dan:

$$\delta\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ii} (h_{ij,k} + h_{ik,j} + h_{jk,i} - 2\Gamma_{jk}^\rho h_{i\rho}). \quad (2.3.7)$$

en donde los símbolos de Christoffel se calculan con la métrica no perturbada. Más explícitamente:

$$\delta\Gamma_{jk}^t = \frac{1}{2} h_{jk,t}, \quad (2.3.8)$$

$$\delta\Gamma_{ij}^t = \frac{1}{2} g^{ii} \left(h_{ij,t} - 2\frac{\dot{a}}{a} h_{ij} \right), \quad (2.3.9)$$

$$\delta\Gamma_{tt}^t = \delta\Gamma_{tt}^i = \delta\Gamma_{tt}^\lambda = 0. \quad (2.3.10)$$

Finalmente, lo que se obtiene es:

$$\delta R_{tt} = \frac{1}{2} g^{ii} \left[h_{ii,tt} - 2\frac{\dot{a}}{a} h_{ii,t} + 2 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{ii} \right], \quad (2.3.11)$$

$$\delta R_{ti} = \frac{1}{2} \left[g^{\lambda\lambda, i} \left(h_{\lambda\lambda,t} - 2\frac{\dot{a}}{a} h_{\lambda\lambda} \right) + g^{\lambda\lambda} \left(h_{\lambda\lambda,ti} - 2\frac{\dot{a}}{a} h_{\lambda\lambda,i} \right) \right] -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[g^{\lambda\lambda, \lambda} \left(h_{\lambda i, t} - 2 \frac{\dot{a}}{a} h_{\lambda i} \right) + g^{\lambda\lambda} \left(h_{\lambda i, t\lambda} - 2 \frac{\dot{a}}{a} h_{\lambda i, \lambda} \right) \right] + \\
& \frac{1}{4} \left[g^{jj} \left(h_{\lambda j, t} - 2 \frac{\dot{a}}{a} h_{\lambda j} \right) \right] g^{\lambda\lambda} (g_{t\lambda, j} + g_{j\lambda, i} - g_{ij, \lambda}) - \\
& \frac{1}{4} \left[g^{jj} \left(h_{ij, t} - 2 \frac{\dot{a}}{a} h_{ij} \right) \right] g^{\lambda\lambda} g_{\lambda\lambda, j}, \tag{2.3.12}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\delta R_{ij} = & \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda, j} (h_{\lambda\lambda, i} - 2\Gamma_{i\lambda}^{\rho} h_{\rho\lambda}) + \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} (h_{\lambda\lambda, ij} - 2\Gamma_{i\lambda, j}^{\rho} h_{\rho\lambda} - 2\Gamma_{i\lambda}^{\rho} h_{\rho\lambda, j}) - \\
& \frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \left[\frac{1}{2} g^{kk} \left(h_{kk, t} - 2 \frac{\dot{a}}{a} h_{kk} \right) \right] + \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} (h_{\lambda\lambda, k} - 2\Gamma_{k\lambda}^{\rho} h_{\rho\lambda}) \Gamma_{ij}^k + \frac{\dot{a}}{2a} h_{ij, t} + \\
& \frac{1}{2} g^{kk} (h_{ik, \lambda} + h_{\lambda k, i} - h_{i, \lambda k} - 2\Gamma_{\lambda i}^{\rho} h_{k\rho}) \Gamma_{jk}^{\lambda} + \frac{\dot{a}}{2a} \left(h_{ij, t} - 2 \frac{\dot{a}}{a} h_{ij} \right) + \\
& (h_{j\lambda, k} + h_{k\lambda, j} - h_{j k, \lambda} - 2\Gamma_{kj}^{\rho} h_{\lambda\rho}) \Gamma_{\lambda i}^k - \frac{3\dot{a}}{2a} h_{ij, t} + \\
& (h_{ik, j} + h_{jk, i} - h_{ij, k} - 2\Gamma_{ji}^{\rho} h_{k\rho}) \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\lambda\lambda, k}. \tag{2.3.13}
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones se simplifican considerablemente para el modelo plano, por lo que sólo se analizarán para este caso, en donde la métrica está dada por la expresión (1.3.6) (con $k = 0$). Por facilidad, tórnese un sistema de unidades en donde la velocidad de la luz vale 1, además, tórnese la convención contraria para los signos de la parte espacial y la parte temporal. En este caso la métrica que se tiene es:

$$g_{tt} = -1, \quad g_{ij} = \delta_{ij} a^2, \quad g_{it} = 0,$$

quedando, finalmente, las ecuaciones perturbadas:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 h_{kk}}{\partial x^i \partial x^j} - a^2 h_{ij, tt} + \\
& a\dot{a} [h_{ij, t} - \delta_{ij} h_{kk, t}] + 2\dot{a}^2 [-2h_{ij} + \delta_{ij} h_{kk}] = \\
& -8\pi G (\rho_o - p_o) a^2 h_{ij} - 8\pi G a^4 \delta_{ij} (p_1 - p_1), \tag{2.3.14}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial h_{kk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^k} \right) \right] = 16\pi G a^2 (\rho_o + p_o) U_1^i, \tag{2.3.15}$$

$$h_{kk,t} - 2\frac{\dot{a}}{a}h_{kk,t} + 2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}\right)h_{kk} = -8\pi G(\rho_1 + 3p_1)a^2. \quad (2.3.16)$$

Las ecuaciones de movimiento para un fluido pueden ser obtenidas de la ecuación de conservación, $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$. Pero en este caso se obtienen también aplicando el operador $\partial/\partial x^i$ y $\partial/\partial t + 3\dot{a}/a$ a las ecuaciones (2.3.14) y (2.3.15) respectivamente. Usando (2.3.15), (2.3.16) y la traza de (2.3.14), se tiene la ecuación de conservación para el momento:

$$\frac{\partial}{\partial t}[a^3 U_1^i(\rho_o + p_o)] = -a^3 \frac{\partial p_1}{\partial x^i}. \quad (2.3.17)$$

Tomando la divergencia de la ecuación (2.3.15), usando (2.3.16) y la traza de (2.3.14), se tiene la ecuación de conservación para la energía:

$$\dot{\rho}_1 + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_1 + p_1) = -(\rho_o + p_o)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{2a^2}\right) + \nabla \cdot U_1\right]. \quad (2.3.18)$$

Las ecuaciones (2.3.16), (2.3.17) y (2.3.18) forman un conjunto completo de ecuaciones que se puede resolver, aunque para esto es conveniente escribirlas de otra manera. Definiendo: $h \equiv -\sum_1^3 h_{ii}/a^2$, $\Theta \equiv \nabla \cdot U_1$, recordando la definición de δ (ecuación (2.2.7)) y usando (2.2.4), la ecuación (2.3.16) queda como:

$$h_{,tt} + 2Hh_{,t} - 3H^2(1 + 3\alpha)\delta = 0, \quad (2.3.19)$$

mientras que (2.3.18) toma la forma:

$$\dot{\delta} + \left(1 + \frac{p_o}{\rho_o}\right)\left(\Theta - \frac{h_{,t}}{2}\right) + 3H\left(\alpha - \frac{p_o}{\rho_o}\right)\delta = 0. \quad (2.3.20)$$

Aplicando el operador $(\nabla \cdot)$ y pasando al espacio de Fourier, la ecuación (2.3.17) se convierte en:

$$\dot{\Theta} + (2 - 3\alpha)H\Theta - \frac{k^2\alpha}{a^2(1 + p_o/\rho_o)}\delta = 0. \quad (2.3.21)$$

Estas últimas tres ecuaciones pueden ser resumidas aún más usando el hecho de que $p_o/\rho_o = \alpha$, definiendo $\phi \equiv \Theta/H$ y usando $y \equiv \ln(a)$ como la variable temporal. Se tiene entonces el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$h'' + \frac{1}{2}(1 - 3\alpha)h' - 3(1 + 3\alpha)\delta = 0,$$

$$\delta' + (1 + \alpha)\left(\phi - \frac{h'}{2}\right) = 0,$$

$$\phi' - \frac{1}{2}(9\alpha - 1)\phi = 0, \quad (2.3.22)$$

donde la prima denota $d/dy = H^{-1}d/dt$ y el último término en (2.3.21) ha sido despreciado, es decir, estas soluciones sólo son válidas para perturbaciones de longitud de onda grandes.

El sistema anterior tiene como solución para cada una de las variables una ley de potencias:

$$\delta = A_1 \frac{(1+\alpha)}{2} t^{-1} + A_2 \frac{(1+\alpha)}{2} t^{(2+6\alpha)/(3+3\alpha)} + A_3 \alpha (1+\alpha)(9\alpha-1) t^{(9\alpha-1)/(3+3\alpha)}, \quad (2.3.23)$$

$$\phi = B_1 (3\alpha + 1/2)(1-\alpha)(9\alpha-1) t^{(9\alpha-1)/(3+3\alpha)}, \quad (2.2.24)$$

$$h = C_1 + C_2 t^{-1} + C_3 t^{(2+6\alpha)/(3+3\alpha)} + C_4 2(1+3\alpha)(1+\alpha) t^{(9\alpha-1)/(3+3\alpha)}, \quad (2.3.25)$$

$$h' = D_1 \left(-\frac{3}{2}(1+3\alpha)\right) + D_2 (1+3\alpha) t^{(2+6\alpha)/(3+3\alpha)} + D_3 (1+3\alpha)(1+\alpha)(9\alpha-1) t^{(9\alpha-1)/(3+3\alpha)}. \quad (2.3.26)$$

En particular, para el caso de un universo dominado por materia, se tiene que $\alpha = 0$ y la solución para δ tiene la forma:

$$\delta = E_1 t^{2/3} + E_2 t^{-1}. \quad (2.3.27)$$

La solución para el caso de un universo dominado por polvo es exactamente igual que la solución para δ en el análisis Newtoniano, ecuación (2.2.20). En este caso el análisis para la Teoría General de la Relatividad no cambia la solución correspondiente al análisis newtoniano.

Por otro lado, la solución para un universo dominado por radiación ($\alpha = 1/3$), está dada por:

$$\delta = D_1 t^{-1} + D_2 t + D_3 t^{1/2}. \quad (2.3.28)$$

En este análisis, a diferencia del Newtoniano, se encuentra una solución para la perturbación en el caso dominado por radiación. Como se mencionó anteriormente esta solución no es muy importante ya que el crecimiento empieza en la época de dominio por la materia.

2.4 El espectro de potencias y la función de correlación

Una de las funciones que se utilizan para determinar la evolución de las perturbaciones es el espectro de potencias, el cual está relacionado directamente con la distribución de

densidad del universo y se define como $|\delta_k|^2$, donde δ_k representa la transformada de Fourier del contraste de densidad, dado por:

$$\xi(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}, \quad (2.4.1)$$

en donde ρ es la densidad en cualquier punto del espacio y $\bar{\rho}$ es la densidad promedio del universo. Este contraste de densidad coincide con la variable usada en el análisis lineal para perturbaciones ($\delta = \rho_1/\rho_0$), es decir, el espectro de potencias es el cuadrado de la norma de la fluctuación en la densidad, normalizada a la densidad promedio, en el espacio de Fourier. En el problema de formación de estructura, lo que interesa es conocer este espectro como función del tiempo, para lo que se da un espectro de potencias inicial y se evoluciona en el tiempo vía algún mecanismo que haga crecer las inhomogeneidades al estado que se observa actualmente.

Este espectro de potencias depende del tipo y evolución de las fluctuaciones iniciales; en la ausencia de un modelo adecuado, éste se toma usualmente una ley de potencias:

$$|\delta_k|^2 \propto k^n. \quad (2.4.2)$$

Considérese ahora la función de correlación, definida como:

$$\xi(r) \equiv \langle \delta(\vec{x} + \vec{r})\delta(\vec{x}) \rangle \equiv V^{-1} \int_0^V \delta(\vec{x} + \vec{r})\delta(\vec{x})dV. \quad (2.4.3)$$

La manera más común de calcular esta función de correlación no es por medio de la distribución de densidad de masa, sino por medio de la distribución de galaxias ó de cúmulos de galaxias, lo cual es obvio debido a que es más fácil determinar estas distribuciones que la de toda la masa. La función de correlación para galaxias esta definida como:

$$\xi_{gg}(r) \equiv \langle \delta_n(\vec{x} + \vec{r})\delta_n(\vec{x}) \rangle, \quad (2.4.4)$$

donde δ_n se refiere a la densidad numérica de galaxias. La función de correlación para galaxias coincidiría con la función de correlación para la densidad total de masa, si la densidad numérica de galaxias ($n(x)$) fuera proporcional a la densidad de masa ($\rho(x)$), $n(x) = cte \rho(x)$; en otras palabras, si toda la masa que existe en el universo estuviera solamente concentrada en galaxias.

Una de las ventajas más importantes que ofrece la función de correlación, es que ésta tiene una interpretación física, ya que que por medio de ella podemos medir la probabilidad conjunta, sobre una distribución al azar y promediada sobre todo el espacio, de encontrar dos galaxias separadas por una distancia r en dos elementos de volumen δV_1 y δV_2 .

$$\langle \delta P_{12} \rangle = n^2 \delta V_1 \delta V_2 [1 + \xi(r)], \quad (2.4.5)$$

donde n es la densidad numérica media, la cual es independiente de la posición. La función de correlación está dando el exceso de probabilidad sobre una distribución azarosa

de Poisson, es decir, cuando la función de correlación es cero recuperamos la probabilidad conjunta para una distribución de Poisson:

$$\delta P = n^2 \delta V_1 \delta V_2. \quad (2.4.6)$$

Esto también puede ser planteado de diferente forma:

$$\delta P = n \delta V [1 + \xi(r)], \quad (2.4.7)$$

es la probabilidad de encontrar una galaxia a una distancia r de otra galaxia dada.

Tomando la transformada de Fourier de la función de correlación y aplicando el teorema de Parseval se obtiene que:

$$\xi(\vec{r}) = (2\pi)^{-3} V^{-1} \int |\delta_k|^2 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3 k, \quad (2.4.8)$$

y por lo tanto:

$$|\delta_k|^2 = V \int \xi(\vec{r}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3 r. \quad (2.4.9)$$

Es decir, el espectro de potencias es la transformada de Fourier de la función de correlación.

De la expresión (2.4.8) puede ser deducida una expresión para la función de correlación correspondiente al espectro de potencias, para una ley de potencias. Suponiendo isotropía en el universo, es decir, $\xi(\vec{r}) = \xi(r)$, se encuentra que la función de correlación está dada por:

$$\xi(r) = \frac{Ar^{-n-3}}{2\pi^2} \int_0^\infty u^{n+1} \text{senc } u \, du \quad (2.4.10)$$

$$= \frac{Ar^{-n-3}}{2\pi^2} \Gamma(n+2) \text{senc}[(n+2)\pi/2]. \quad (2.4.11)$$

Considere ahora el valor *rms* del contraste de densidad:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \equiv (\delta(\vec{x})\delta(\vec{x}))^{1/2}. \quad (2.4.12)$$

Aplicando el teorema de Parseval en la expresión anterior se tiene que:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 = V^{-1} \int_0^\infty \frac{k^3 |\delta_k|^2}{2\pi^2} \frac{dk}{k}. \quad (2.4.13)$$

La contribución a $(\delta\rho/\rho)^2$, de un intervalo logarítmico en k , está dado por la primitiva de la ecuación (2.4.13):

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}(k)\right)^2 = V^{-1} \frac{k^3 |\xi_k|^2}{2\pi^2}. \quad (2.4.14)$$

Esta expresión está indicando el valor de la amplitud de las inhomogeneidades, no como una función de una coordenada espacial, sino como una función de la escala de la longitud de la perturbación.

2.5 Perturbaciones adiabáticas e isotérmicas

Como se mencionó en la sección 1.8 el plasma primordial contenía diferentes tipos de partículas (protones, electrones, neutrinos etc), además de radiación electromagnética (fotones), de manera que las fuentes de energía eran de diferente naturaleza. Las fluctuaciones iniciales en la densidad, que originan la estructura, deben contemplar el tipo de energía que está fluctuando, es decir, si es una fluctuación en la densidad numérica de algún tipo de partícula, o si es una fluctuación en la densidad de radiación. Existen dos hipótesis principales acerca de la naturaleza de estas fluctuaciones. La primera sugiere una fluctuación en la curvatura del espacio, es decir, una fluctuación en donde todas las fuentes de curvatura son perturbadas (radiación y materia), este tipo de fluctuaciones son conocidas como fluctuaciones adiabáticas, ya que la fluctuación en el número de partículas de alguna especie, por unidad comovil, desaparecen. En este caso las fluctuaciones en la densidad de materia y radiación están relacionadas por:

$$\frac{\delta\rho_m}{\rho_m} = \frac{3\delta\rho_r}{4\rho_r}, \quad (2.5.1)$$

además de que todas las componentes en la densidad de materia participan:

$$\delta \equiv \frac{\delta n_B}{n_B} = \frac{\delta n_x}{n_x}, \quad (2.5.2)$$

donde n_B es la densidad numérica bariónica y n_x está referida a cualquier otra especie.

En el caso de fluctuaciones adiabáticas, sólo las perturbaciones que comprenden masas mayores que $10^{13} M_\odot$ son las que pueden sobrevivir; perturbaciones con masas más pequeñas son borradas por la viscosidad fotónica (secciones 2.6 y 2.7) en una época antes del desacoplamiento. Es decir, las masas características esperadas son del orden de $10^{13} - 10^{15} M_\odot$ que, como se verá en el siguiente capítulo, conforman aproximadamente la masa contenida en un supercúmulo.

El segundo tipo de fluctuaciones son conocidas como isotérmicas, ya que éstas originan sólo pequeñas fluctuaciones en la temperatura, a muy tempranas épocas, cuando la densidad de radiación es mucho mayor que la densidad de materia. En las fluctuaciones isotérmicas, únicamente es perturbada la densidad de materia, mientras que la densidad de radiación permanece constante $\delta\rho_r = 0$; de esta forma, éstas no son fluctuaciones en la densidad total de energía, por lo que no pueden caracterizarse como una fluctuación en

la curvatura local. Estas se pueden ver como fluctuaciones en la ecuación local de estado. En este tipo de fluctuaciones pueden existir perturbaciones de cualquier tamaño, pero se asume que las amplitudes más grandes en la densidad corresponden a perturbaciones en las masas más pequeñas; de esta manera las estructuras más pequeñas son las primeras en colapsarse y, posteriormente, su mutua atracción dará lugar a estructuras más grandes.

La formación de estructura es diferente dependiendo del tipo de fluctuación que se tenga, debido a que cada tipo de fluctuaciones evoluciona en forma diferente.

Es conveniente dividir las fluctuaciones en modos adiabáticos e isotérmicos, ya que éstos no interactúan y, además, evolucionan en forma separada en un amplio rango de longitudes de onda. Las fluctuaciones adiabáticas siguen siéndolo para longitudes de onda grandes, cuando la entropía es conservada y la difusión fotónica puede ser despreciada. Cuando las fluctuaciones son isotérmicas, no hay difusión de fotones y éstas pueden convertirse en fluctuaciones adiabáticas por medio de interacciones gravitacionales. Este efecto es pequeño para longitudes de onda menores que el tamaño del horizonte.

Para poder elegir entre estos dos tipos de fluctuaciones se debe determinar qué tipo de estructura es la primera en formarse. Como ya se mencionó, para una fluctuación adiabática, las estructuras más grandes son las primeras en formarse, mientras que en las fluctuaciones isotérmicas se forman primero las más pequeñas. Existen dos argumentos para poder elegir a favor de las adiabáticas: el primero tiene que ver con la orientación de las galaxias y cúmulos dentro de los supercúmulos y el otro se refiere a la segregación de diferentes tipos de galaxias en algunos supercúmulos (estos argumentos serán discutidos en el siguiente capítulo).

2.6 Amortiguamiento no colisional

Antes de que las perturbaciones empiecen a crecer, cuando se alcanza una equivalencia en la densidad bariónica y la densidad fotónica ($t = t_{eq}$), las partículas que no sufren colisiones pueden fluir fuera de regiones sobredensas y hacia adentro de regiones de baja densidad. Este efecto puede llegar a borrar las inhomogeneidades que existen en esos momentos, por lo que es importante considerarlo en el estudio de formación de estructura. Una estimación de la escala de amortiguamiento no colisional puede hacerse de la siguiente manera: una vez que cierta especie se desacopla del plasma, ésta viaja simplemente en caída libre, dentro del universo en expansión. El movimiento de esta partícula puede elegirse a lo largo de $d\phi = d\theta = 0$, de manera que la distancia física que recorre una partícula que se propaga libremente es $a(t)dr = r(t)dt$ (ecuación (1.3.5)). La distancia coordenada recorrida por una partícula que fluye libremente desde algún tiempo inicial t_i hasta un tiempo t , está definida como la escala de fluido libre:

$$\lambda_{fl} \equiv r(t) - r(t_i) = \int_{t_i}^t \frac{r(t)}{a(t)} dt. \quad (2.6.1)$$

Recuérdese que la distancia recorrida es $a(t)$ veces la distancia comóvil. Este fenómeno

toma lugar únicamente antes de que la perturbación empiece a crecer, por lo que la escala de fluido libre debe ser calculada desde un tiempo 0 hasta el momento en que se da la equivalencia entre radiación y materia (t_{eq}):

$$\lambda_{fl} = \int_0^{t_{eq}} \frac{v(t)}{a(t)} dt. \quad (2.6.2)$$

Es conveniente calcular esta integral en dos partes, una en un régimen relativista, es decir, en donde la velocidad de la partícula es cercana a la de la luz ($v \approx 1$) y la otra en un régimen no relativista ($v \leq 1$). Sea t_R el tiempo que divide estos dos regímenes. Entonces (2.6.2) queda expresada como:

$$\lambda_{fl} = \int_0^{t_R} \frac{1}{a(t)} dt + \int_{t_R}^{t_{eq}} \frac{v(t)}{a(t)} dt. \quad (2.6.3)$$

Durante todo este tiempo el universo ha sido dominado por radiación, por lo que el factor de escala se escribe como $a \propto t^{1/2}$, (ecuación (1.4.13)). La primera integral se calcula directamente con esta sustitución. Ahora bien, como la especie está propagándose libremente, su momento sólo decaerá con el factor de expansión $p \propto a(t)^{-1}$ (ecuación (1.5.7)). En un régimen no relativista: $p = mv$, entonces v puede escribirse como $v(t) = a_R/a(t)$. Haciendo esta sustitución para la segunda integral, la expresión anterior es:

$$\lambda_{fl} = 2 \frac{t_R}{a_R} + \int_{t_R}^{t_{eq}} \frac{a_R}{a^2(t)} dt, \quad (2.6.4)$$

donde $a_R = a(t_R)$. Usando de nuevo el hecho de que $a \propto t^{1/2}$ se tiene que $t = t_R(a(t)/a_R)^2$ e integrando, finalmente se obtiene que la escala de fluido libre es:

$$\lambda_{fl} \approx \left(\frac{t_R}{a_R} \right) [2 + \ln(t_{eq})]. \quad (2.6.5)$$

λ_{fl} da la escala máxima para la cual las perturbaciones son amortiguadas, es decir, a escalas menores que la escala de fluido libre, las inhomogeneidades serán borradas.

2.7 Amortiguamiento colisional

Como los bariones son partículas colisionales, éstos no sufren el amortiguamiento descrito en la sección anterior. Sin embargo, el plasma fotón-barión está sometido a otro tipo de amortiguamiento alrededor de la época de recombinación. Conforme se alcanza el desacoplamiento, el camino libre del fotón se vuelve más largo y los fotones pueden difundirse fuera de regiones sobredensas hacia regiones de menor densidad, creando un amortiguamiento en el plasma fotón-barión; éste efecto es conocido como el amortiguamiento de Silk. La función que caracteriza el amortiguamiento es conocido como la longitud de difusión fotónica. Para hacer una estimación de esta cantidad, considérese el camino libre medio del fotón:

$$\lambda_\gamma = (X_e n_e \sigma_T)^{-1}, \quad (2.7.1)$$

donde σ_T es la sección de cruce de Thomson, X_e es la fracción de ionización del electrón y n_e es la densidad numérica de electrones. Justo antes del desacoplamiento $X_e \approx 1$, mientras que alrededor del tiempo de desacoplamiento $X_e \approx 0.1$. A partir de este momento la ionización residual va disminuyendo, hasta congelarse a un valor de $X_e \approx 3 \times 10^{-5} (\Omega_b^{1/2} / \Omega_B h)$. Al considerar este tipo de efectos, la suposición de un fluido perfecto deja de ser válida para cualquier perturbación de longitud de onda $\lambda \leq \lambda_\gamma$ y el flujo de fotones debe amortiguar completamente cualquier perturbación de este tamaño. En un tiempo Δt un fotón sufre $\Delta t / \lambda_\gamma(t)$ colisiones (en unidades de $c = 1$) y, de esta forma, la trayectoria es la de un caminante al azar caracterizado por una distancia coordinada media, cuyo cuadrado es:

$$(\Delta r)^2 = \frac{\Delta t}{\lambda_\gamma(t)} \frac{\lambda_\gamma(t)^2}{a(t)^2}, \quad (2.7.2)$$

es decir, el número de choques por el cuadrado de la camino libre medio del fotón; el factor $a(t)$ es debido al hecho de que no se está considerando la distancia física, sino la distancia coordinada. Integrando esta ecuación hasta el tiempo del desacoplamiento, que es cuando dejan de interactuar los fotones con el plasma, lo que se obtiene es el cuadrado de la longitud de difusión fotónica:

$$\lambda_s^2 = \int_0^{t_{des}} \frac{\lambda_\gamma}{a^2(t)} dt. \quad (2.7.3)$$

La raíz de esta cantidad es conocida como la escala de amortiguamiento de Silk.

Si se asume que el universo es dominado por materia alrededor de la época en la cual se da el desacoplamiento, el factor de escala evoluciona como $a(t) \propto t^{2/3}$ (ecuación (1.4.10)). La constante de proporcionalidad puede calcularse tomando el valor observacional de la constante de Hubble; esta expresión resulta ser:

$$a(t) = [t/2 \times 10^{17} (\Omega_0 h^2)^{-1/2} s t \eta]^2/3. \quad (2.7.4)$$

Sustituyendo (2.7.4) en (2.7.3) e integrando, se obtiene:

$$\lambda_s^2 = \frac{3 t_{des} \lambda_\gamma(t_{des})}{5 a_{des}^2}. \quad (2.7.5)$$

El tiempo al cual se da la recombinación depende de las cantidades Ω_0 y Ω_B . Sustituyendo el factor de escala, el cual ha sido calculado en la época del desacoplamiento como $a(t_{des}) \approx (1100)^{-1}$ y sustituyendo $X_e \approx 0.1$, la escala de amortiguamiento de Silk tiene un valor de:

$$\lambda_s = 3.5 (\Omega_0 / \Omega_B)^{1/2} (\Omega_0 h^2)^{-3/4} Mpc. \quad (2.7.6)$$

Un hecho intrigante es que la escala de Silk es cercana a la escala de cúmulos de galaxias en la época del desacoplamiento.

2.8 Materia oscura caliente y fría

Como se ha estado mencionando, la formación de estructura comienza cuando el universo empieza a ser dominado por la materia ($t = t_{eq}$), por lo que éste es el momento más conveniente para especificar el espectro de potencias. Para esto se tiene que tomar en cuenta el amortiguamiento de las perturbaciones. Existen, como ya se vió, dos tipos de amortiguamiento, dependiendo del tipo de partículas que se tienen. Para partículas no colisionales, como pueden ser partículas masivas de interacción débil (PMID), la escala de amortiguamiento está dada por la escala de fluido libre $\lambda_D \equiv \lambda_{fl}$; mientras que para bariones, esta escala está dada por la escala de Silk $\lambda_D \equiv \lambda_s$. Un punto importante es el hecho de especificar la amplitud del modo justo cuando éste acaba de cruzar el horizonte (sección 1.7): antes de que cualquier proceso microfísico pueda borrar las perturbaciones. Recuérdese que un cambio físico en una perturbación puede ocurrir sólo cuando se encuentra dentro del horizonte, ya que las perturbaciones fuera del horizonte están causalmente desconectadas.

Especificar la amplitud del modo en este momento tiene la ventaja de tener una interpretación física, que corresponde a la amplitud de la perturbación en el potencial gravitacional (ecuación (2.2.10)). La escala que da el tamaño del horizonte justo en el tiempo de equivalencia entre radiación y materia está dada por:

$$\lambda_{eq} = \frac{ct_{eq}}{a_{eq}} \approx 13(\Omega_b h^2)^{-1} Mpc. \quad (2.8.1)$$

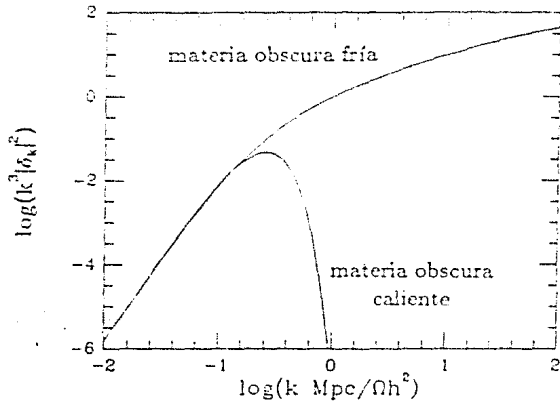
Existen dos casos límites para la escala de amortiguamiento; el primero es cuando $\lambda_D \approx \lambda_{eq}$, lo cual se da para PMID como neutrinos ligeros. Estos neutrinos ligeros, al encontrarse en un régimen relativista, ($v \approx 1$), borrarán las perturbaciones en todas las escalas que se encuentren dentro del horizonte. En este caso, la escala de amortiguamiento es mucho más grande que aquella que contiene una masa galáctica y es cercana a la que contiene una masa de un supercúmulo. Este caso límite es conocido como *materia oscura caliente*. El espectro de potencias, en este caso, está dado por:

$$\begin{aligned} |\delta_k|^2 &= Ak^{2+n} 10^{-2(k/k_\nu)^{1.5}} \\ &= Ak^{2+n} \exp[-4.61(k/k_\nu)^{1.5}], \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

donde el segundo término se debe al amortiguamiento originado por el flujo de neutrinos. La escala de amortiguamiento del neutrino es $\lambda_\nu = 40(m_\nu/30eV)^{-1} Mpc$, lo que implica, $k_\nu = 0.16(m_\nu/30eV) Mpc^{-1}$.

El espectro procesado ($|\delta_k|^2 k^3$), o lo que es lo mismo, el cuadrado de la amplitud de las perturbaciones (ecuación (2.4.14)), se muestra para este caso en la gráfica 2. Un rasgo

muy significativo del espectro es la caída brusca, que se tiene para longitud de onda corta, $\lambda \approx 40(m_\nu/30eV)^{-1}$ Mpc, debido al amortiguamiento no colisional. De esta manera, las primeras estructuras en formarse serán las de tamaño aproximado al de un supercúmulo ($10^{15} M_\odot$). El hecho de que esta escala sea tan grande implica que el colapso tuvo que haberse dado recientemente, ($z \leq 3$). Zeldovich (1970) ha argumentado que, cuando las perturbaciones en la escala λ_D son no lineales, éstas evolucionan en forma altamente no esférica y el resultado puede dar objetos de una dimensión, parecidos a pancakes. Una vez que un pancake se forma y crece de manera no lineal en una de sus dimensiones, los bariones pueden chocar con cualquier otro barión y disipar su energía gravitacional; de esta forma, los bariones puede fragmentarse y condensarse en estructuras más pequeñas, como objetos del tamaño de una galaxia. A diferencia de los bariones, los neutrinos no colisionan y no disipan su energía gravitacional, permaneciendo en nos condensados. Se han hecho simulaciones numéricas para modelar la formación de estructura en un universo dominado por neutrinos (Centrella y Melott 1982 y White 1983). Estas simulaciones muestran una estructura como de celdas, la cual parece ser cualitativamente similar a la de vacíos y estructuras filamentosas observadas, que serán discutidos en el siguiente capítulo. Uno de los problemas que presentan estas simulaciones es que la época en que se deben haber creado estas estructuras como pancakes debe ser muy reciente, ($z \leq 1$) y es difícil reconciliar esto con observaciones de galaxias y de cúmulos o corrientes mayores que 1.



Gráfica 2.- Espectro procesado como función de la longitud de onda para el caso de materia oscura caliente y materia oscura fría, poco después del tiempo de equivalencia entre radiación y materia.

El otro caso límite es cuando $\lambda_D \leq 1 \text{ Mpc}$ ($\lambda_D \ll \lambda_{ij}$), lo cual ocurre para PMID que se convierten en partículas no relativistas antes de la época dominada por la materia, por lo

que la escala de amortiguamiento es muy pequeña. En este caso, las primeras estructuras en formarse tienen una masa del orden de masas galácticas. Este caso es conocido como *materia oscura fría*. Si se asume que λ_D es pequeña, el espectro de potencias, para este caso, está dado por:

$$|\delta_k|^2 = \frac{Ak^{2+n}}{(1 + \beta k + \omega k^{1.5} + \gamma k^2)^2}, \quad (2.8.3)$$

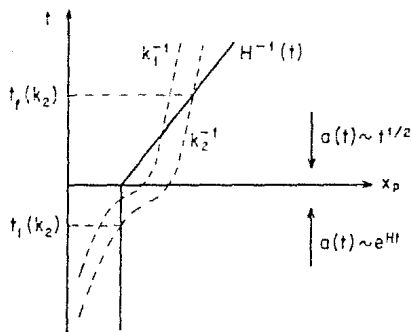
donde $\beta = 1.7(\Omega_0 h^2)^{-1} Mpc$, $\omega = 9.0(\Omega_0 h^2)^{-1.5} Mpc^{1.5}$, $\gamma = 1.0(\Omega_0 h^2)^{-2} Mpc^2$.

El espectro procesado para la materia oscura fría se muestra también en la gráfica 2. En este caso la escala de amortiguamiento es irrelevante, mientras que la forma inicial del espectro es muy importante. A diferencia del modelo de materia oscura caliente, en este modelo la formación de estructura ocurre en forma jerárquica, es decir, las estructuras empiezan a aparecer de escalas pequeñas a escalas más grandes. En las simulaciones hechas para este modelo de materia oscura fría, Davis (1985,1987,1988), encontró que la forma de la función de correlación de sus simulaciones es consistente con funciones de correlación calculadas observacionalmente, siempre y cuando $\Omega_0 h \sim 0.2$, con la suposición de que la masa en el universo se encuentra distribuida de igual manera que la distribución de fuentes (otra hipótesis alterna es discutida en la sección 2.10). Además se encontró que la época de formación de objetos de tamaño galáctico es relativamente reciente, pero todavía consistente con las observaciones. Estas simulaciones se ajustan también a observaciones de densidades internas y potenciales gravitacionales de hilos de galaxias, además de densidades numéricas de galaxias y cúmulos. Uno de los inconvenientes de estas simulaciones es que este modelo predice una función de correlación para cúmulos de un factor de 3 por debajo de la estimada observacionalmente, de manera que vacíos tan grandes como el de Bootes (sección 3.8) no pueden ser predichos. Además existe el inconveniente de la preferencia de este modelo por $\Omega_0 h \sim 0.2$, lo cual está en contradicción con otras estimaciones, además de la predicción del modelo inflacionario.

2.9 Perturbaciones en un universo inflacionario

El tamaño de la longitud de onda de una perturbación es una distancia física, por lo que ésta crece proporcional a el factor de escala. En la sección 1.7 se demostró que en el modelo estandar de Robertson-Walker dos regiones cualesquiera no han estado causalmente conectadas por siempre, debido al hecho de que al principio, el horizonte de eventos es más pequeño que la distancia física que las separa. En el caso de las perturbaciones se presenta un problema similar, ya que si se supone que las perturbaciones son originadas en épocas muy tempranas la longitud de onda de éstas debería ser extremadamente pequeña, más pequeña que el horizonte, para poder justificar el hecho de que un proceso físico pueda originarlas. Para tener longitudes de onda suficientemente grandes, del orden de galaxias, cúmulos o supercúmulos, se requiere, en el modelo estandar, que la longitud de onda de las perturbaciones haya sido más grande que el horizonte de eventos. El modelo de inflación

además de los éxitos mencionados en la sección 1.9 resuelve este problema. La solución es muy similar a la planteada para resolver el problema de la desconexión causal. Si la distancia al horizonte permanece constante durante la inflación, cualquier perturbación podría haber estado en contacto causal. Al aumentar el tamaño de la longitud de onda como el factor de escala y tener un horizonte constante, se justifica que en algún momento esta perturbación estuvo dentro del horizonte, y de esta forma causalmente conectada. En la Gráfica 3 se aprecia la evolución de la longitud de onda de dos perturbaciones, comparada con el radio de Hubble (la distancia al horizonte). Como se puede ver, la longitud de onda de la perturbación, en un principio, es más pequeña que el horizonte, posteriormente la perturbación entra en un periodo de desconexión causal, es decir sale del horizonte en t_1 , terminando por entrar nuevamente al horizonte en t_f , el cual ya evoluciona de diferente forma, debido a que termina el periodo de inflación.



Gráfica 3.- Evolución de la longitud de onda de dos fluctuaciones de longitud de onda comovil k_1^{-1} y k_2^{-1} (líneas punteadas) en un universo inflacionario, comparadas con el horizonte (línea continua)

Durante el periodo de inflación cuando una perturbación sale del horizonte, como se aprecia en la gráfica 3, tiene un valor en la amplitud que es el mismo para cualquier escala. Para demostrar esto, considérese una perturbación en el campo de Higgs del universo inflacionario ($\delta\Phi$), calculando el gradiente de esta perturbación a una escala del tamaño del horizonte, se tiene:

$$\nabla(\delta\Phi) \sim \frac{d\delta\Phi}{dr} \sim \frac{\delta\Phi}{H^{-1}}, \quad (2.9.1)$$

ya que $r \approx H^{-1}$ (el radio del horizonte). Una fluctuación en el campo de Higgs origina una fluctuación en la energía del orden de:

$$\delta E_1 \sim [\nabla(\delta\Phi)]^2 \sim (\delta\Phi)^2 H^2, \quad (2.9.2)$$

calculando la energía sobre todo el volumen a la escala del horizonte se tiene que:

$$\delta E \sim (\delta\Phi)^2 H^{-1}, \quad (2.9.3)$$

ya que $V \propto H^{-3}$. Si se considera una fluctuación de naturaleza cuántica como origen de las perturbaciones, éstas están condicionadas por el principio de incertidumbre $\delta E \delta t \sim 1$, de manera que una fluctuación que origina una energía δE puede crearse siempre y cuando exista un periodo de tiempo $1/\delta E$. Para que una fluctuación no desaparezca debe vivir el tiempo suficiente para cruzar el horizonte y salir de la región que se encuentra en contacto causal. De manera que la perturbación debe crecer a una velocidad aproximada a la de un fotón (que es la manera como evoluciona el horizonte), además, ésta debe recorrer un distancia del orden del radio de Hubble. De esta forma, el tiempo de vida esta dado por $\delta t \sim d_{HE} \sim H^{-1}$ (en unidades de $c = 1$). Sustituyendo la expresión para el tiempo y para la energía (ecuación (2.9.3)) en la expresión para el principio de incertidumbre se tiene que:

$$(\delta\Phi)^2 H^{-2} \sim 1. \quad (2.9.4)$$

Lo que implica que una perturbación en el campo es proporcional al cuadrado del parametro de Hubble, el cual es constante durante el periodo de inflación.

Una vez que una perturbación sale del horizonte, ésta se encuentra causalmente desconectada, por lo que no existe un mecanismo que pueda cambiar su amplitud, de esta forma la amplitud de la perturbación permanece constante después de que cruza el horizonte. Posteriores perturbaciones de longitud de onda menor abandonarán el horizonte tiempo después, cuando su longitud de onda alcance el tamaño del horizonte, pero la amplitud tendrá el mismo valor que las perturbaciones que abandonaron el horizonte con anterioridad. Si se considera que una perturbación en el campo de Higgs origina una perturbación en el potencial gravitacional tal que:

$$\frac{\delta\Phi}{\Phi} \propto \frac{\delta\phi}{\phi}, \quad (2.9.5)$$

donde ϕ denota el potencial gravitacional. El mecanismo antes mencionado implica que:

$$\frac{\delta\phi}{\phi}(k) = cte, \quad (2.9.6)$$

lo cual es conocido como invarianza de escala, es decir, la amplitud tiene el mismo valor independientemente de la longitud de la perturbación.

El hecho de que la amplitud de la perturbación en el potencial permanezca constante fuera del horizonte, y sea invariante de escala, implica un cambio en la fluctuación en la densidad. De la ecuación (2.2.10) es directo que:

$$|\delta\phi_k| \propto |\delta_k| k^{-2}. \quad (2.9.7)$$

donde $\delta\phi$ denota la fluctuación en el potencial gravitacional, en el espacio de Fourier. Haciendo la misma deducción que se hizo para la ecuación (2.4.14) pero ahora para el potencial gravitacional se tiene que:

$$\left(\frac{\delta\phi}{\phi}(k)\right)^2 = V^{-1} \frac{k^3 |\delta P_k|^2}{2\pi^2}. \quad (2.9.8)$$

Dividiendo (2.4.14) entre (2.9.8) usando (2.9.7) y considerando invarianza de escala en la fluctuación en el potencial gravitacional, se tiene que:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}(k)\right) \propto k^2. \quad (2.9.9)$$

En la gráfica 2 se aprecia claramente que escalas que no han tenido amortiguamientos (longitudes de onda grande) varían conforme (2.9.9). La expresión para el espectro de potencias se obtiene directamente de la expresión (2.4.14) y de (2.9.9):

$$|\delta_k|^2 \propto k, \quad (2.9.10)$$

que corresponde a la expresión (2.4.2) con $n = 1$, y lo cual se conoce como el espectro de Harrison-Zeldovich.

2.10 Sesgo

Como se mencionó en la sección 2.8 una de las hipótesis que se hace en cuanto a la distribución de masa en el universo, es que ésta se encuentra distribuida de la misma forma que las fuentes luminosas, es decir, la luz está indicando los lugares donde se concentra la masa. En el modelo de materia oscura fría, las simulaciones predicen una densidad del universo por debajo de la esperada. Este problema, y otros planteados más adelante, son resueltos por una hipótesis de sesgo. La suposición que hace este modelo es que las regiones más densas en el universo, como galaxias o cúmulos de galaxias se formaron cuando la densidad excedió un cierto valor crítico llamado umbral. Considérese en un proceso estocástico, para una distribución de amplitudes en la densidad de forma Gaussiana. Calcúlese $\xi_{>\nu}$, la función de correlación para la distribución de densidad que yace sobre un cierto valor crítico $\nu\sigma$, donde σ es la varianza de la distribución, es decir, la función de correlación valuada en cero ($\sigma = \xi(0)$). Específicamente $\xi_{>\nu}(\tau)$ es el exceso de probabilidad normalizado, de que $\delta_2 \equiv \delta(x_2) > \nu\sigma$, dado que, $\delta_1 \equiv \delta(x_1) > \nu\sigma$ donde δ_1 y δ_2 son los contrastes de densidad para dos puntos x_1 y x_2 , respectivamente.

La probabilidad de que al elegir un punto al azar, éste tenga un contraste de densidad mayor que el umbral es:

$$P_1 = \int_{\nu\sigma}^{\infty} P(y) dy, \quad (2.10.1)$$

donde $P(y) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-y^2/\sigma^2)$. La probabilidad de que ambos contrastes de densidad estén sobre el umbral es:

$$P_2 = \int_{\nu\sigma}^{\infty} \int_{\nu\sigma}^{\infty} P(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad (2.10.2)$$

donde la distribución de probabilidad conjunta es:

$$P(y_1, y_2) = (2\pi)^{-1} [\xi^2(0) - \xi^2(r)]^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{\xi(0)y_1^2 + \xi(0)y_2^2 - 2\xi(r)y_1 y_2}{2[\xi^2(0) - \xi^2(r)]} \right\}. \quad (2.10.3)$$

Como ya se vió, $\xi_{>\sigma}$ es el exceso de probabilidad normalizada, esto es, $(P(a|b) - P(b))/P(b)$. Entonces sustituyendo la expresión para probabilidad condicional: $P(a|b) = P(a \cap b)/P(b)$, lo que se tiene es:

$$\xi_{>\sigma} = \frac{P(a \cap b)/P(b) - P(b)}{P(b)}, \quad (2.10.4)$$

en donde a representa el evento de que δ_1 esté sobre el umbral, en tanto que b es el evento de que δ_2 este sobre el umbral, esto es, $P(a \cap b) = P_2$ y $P(b) = P_1$. De la expresión anterior es directo que:

$$1 + \xi_{>\sigma}(r) = \frac{P_2}{P_1^2} =$$

$$(2/\pi)^{1/2} [\operatorname{erfc}(\nu/2^{1/2})]^{-2} \times \int_{\nu}^{\infty} e^{-1/2y^2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\nu - y\xi(r)/\xi(0)}{2[2(1 - \xi^2(r)/\xi^2(0))]^{1/2}} \right] dy. \quad (2.10.5)$$

Para $\xi \ll 1$ esta expresión puede ser simplificada a:

$$\xi_{>\sigma}(r) = \left(e^{\nu^2/2} \int_{\nu}^{\infty} e^{-1/2y^2} dy \right)^{-2} \xi(r)/\sigma^2, \quad (2.10.6)$$

y para $\nu \gg 1$:

$$\xi_{>\sigma} = (\nu^2/\sigma^2)\xi(r). \quad (2.10.7)$$

Es decir, lo que se tiene es un factor entre una función de correlación que corresponde a regiones donde el contraste de densidad excedió un cierto valor crítico (galaxias, cúmulos), respecto a la función correlación de la distribución total de densidad.

Al adoptar la hipótesis de sesgo surgen varios hechos interesantes. Una vez que la función de correlación para galaxias ξ_{gg} es determinada, se puede calcular la función de

correlación para la densidad de masa, que resulta ser más pequeña por un factor proporcional a r^2 . Esto implica que existirá un factor que haga más pequeño en el valor de $|\delta|^2$ respecto al inferido de la función de correlación para una distribución de galaxias. Es decir, la distribución de masa es menos aglomerada que la distribución de galaxias, y habrá una gran población de una distribución más uniformemente distribuida de pseudogalaxias o galaxias fracasadas que no han sido detectadas. Esto puede llevar a reconciliar el problema de modelos que predicen $\Omega_m = 1$, ya que la población de estas galaxias fracasadas proveerían una cantidad de densidad de masa que podría complementar Ω_m , determinada a partir de la medición de masa inferida de galaxias brillantes. Una suposición que hay que tomar en cuenta es que existe alguna razón por la cual esta materia no es brillante hoy en día.

La idea de sergo también se ha sugerido como una explicación para la discrepancia que existe entre la función de correlación para galaxias y la función de correlación para cúmulos (capítulo 3), ya que se considera que los cúmulos se formaron en los picos de densidad de la distribución de densidad para galaxias. También se presume que los cúmulos ricos se forman en picos altos de densidad.

Sin embargo, existen algunos problemas importantes respecto a la hipótesis del sergo. Uno de ellos es la pregunta respecto a cuál es el mecanismo físico que lo produce, podría ser este un proceso gravitacional ó quizá la población primordial de galaxias envenena el medio ambiente inhibiendo el desarrollo de posteriores formaciones, como galaxias comunes. Si hay necesariamente un gran número de galaxias fracasadas, estas deberían tener algún efecto observacional. Ellas podrían estar llenado los vacíos, o actuar como lentes gravitacionales.

2.11 Fluctuaciones en la radiación de fondo

El modelo de la cosmología estandar predice una radiación de fondo con un espectro de Planck. La predicción de esta radiación fué confirmada en 1965 con el descubrimiento de una radiación isotrópica con un espectro de Planck y con una temperatura correspondiente de $\approx 3K$.

Cuando el universo se encontraba a muy altas temperaturas, todas las partículas, incluyendo fotones estuvieron presentes en el plasma primordial. Aproximadamente en $z = 1000$, estos fotones dejaron de estar en equilibrio térmico con las bariones. La radiación desacoplada en ese entonces es la que ahora recibimos como esa radiación de fondo, la cual ha cambiado su temperatura debido a que ha disminuido por la expansión (ecuación (1.5.12)). Como esta radiación de fondo no ha tenido prácticamente interacción con la materia, y la forma de ésta no es cambiada por la expansión, sigue teniendo un espectro de Planck.

A pesar de tener una radiación de fondo altamente isotrópica existen varios mecanismos que dan origen a fluctuaciones en la temperatura correspondiente a la radiación de fondo $\delta T/T$, pero únicamente dos están directamente relacionados con fluctuaciones en la densidad de materia. El principal efecto a gran escala es el efecto Sachs-Wolfe, éste es

debido al corrimiento al rojo que un fotón experimenta en un campo gravitacional. El cambio en la frecuencia de un fotón que pasa por un potencial gravitacional está dado por:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} \approx \Delta\phi, \quad (2.11.1)$$

donde $\Delta\phi$ es la diferencia en el potencial gravitacional. En el caso de un fotón con el espectro de Planck un cambio en la frecuencia origina un cambio en la temperatura dado por:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta\nu}{\nu} \approx \Delta\phi. \quad (2.11.2)$$

Por lo tanto, si existe una fluctuación en la fuente del potencial gravitacional, habrá un corrimiento en la frecuencia de los fotones. De esta forma la temperatura en un campo de densidad inhomogéneo y no estacionario depende de la posición.

Para escalas pequeñas la principal contribución en la variación de la temperatura es dada por el efecto de Silk. Este efecto se debe al hecho de que una fluctuación en la densidad numérica de bariones implica una fluctuación en la temperatura, por lo que esta región radiará a una diferente frecuencia. La relación entre las fluctuaciones entre la densidad numérica de bariones y la temperatura es deducida a partir de ecuación (1.8.6):

$$\frac{n_B}{T^3} = cte, \quad (2.11.3)$$

diferenciando esta ecuación es inmediato que:

$$\frac{\delta T(r)}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta\rho(r)}{\rho}. \quad (2.11.4)$$

Las inhomogeneidades en la distribución de la densidad implican inhomogeneidades en la distribución de temperatura.

Los dos efectos descritos anteriormente crean inhomogeneidades en la radiación de fondo, debido a efectos que están directamente relacionados con fluctuaciones en la densidad de materia. El hecho de poder observar esas fluctuaciones en la radiación de fondo lleva a dos resultados observacionales de gran relevancia. El primero es la determinación de las amplitudes de las fluctuaciones en la densidad de materia en la época del desacoplamiento. De esta forma se tendría información acerca de las condiciones iniciales en la distribución de materia en el universo temprano. El segundo es una forma de conocer la forma de la estructura a gran escala, denominada como la topología del universo. Considerando que ésta no sufre grandes cambios a escalas de tiempo de la edad del universo, un mapeo del universo en épocas recientes podría ser una forma de conocer la topología que tiene el universo incluso en el tiempo presente.

3.1 Observaciones

El estudio de la distribución de materia, o al menos de la materia observada, que se presenta en forma de galaxias cúmulos y supercúmulos de galaxias, es de vital importancia para decifrar la estructura a gran escala en el universo. Las primeras observaciones sugirieron que a escalas pequeñas (≤ 20 Mpc) las galaxias mostraban una tendencia a acumularse, en tanto que a escalas mayores parecía haber una distribución al azar. Sin embargo, en años recientes se ha empezado a encontrar estructuras y movimientos a escalas más grandes, del orden de ≈ 100 Mpc (Neta & Balcells 1988).

Un punto de suma importancia en el conocimiento de las estructuras que se tiene actualmente es que esto lleva a una clara idea del tipo de distribución que se tuvo originalmente. Esto se debe a que las estructuras evolucionan muy poco en el tiempo, por ejemplo, un objeto con una velocidad típica de $\approx 10^3$ km/s únicamente se mueve $\approx 10h^{-1}$ Mpc, en un tiempo de Hubble. De esta forma la topología y distribución de materia es prácticamente la misma que la que se tuvo originalmente.

Son necesarios surveys extensivos de núlos de corrimientos de galaxias para cubrir volúmenes y escalas suficientemente grandes. Estos han sido hecho por varios grupos, y dentro de las revelaciones más importantes que se tiene están:

1.- Los cúmulos y supercúmulos trazan la estructura a escalas grandes ($\geq 100h^{-1}$ Mpc), revelando un fuerte agrupamiento. Estos resultados son expresados en términos de la función de correlación (ecuación (2.4.3)).

2.- Se ha reportado un movimiento de bulto del grupo local de galaxias de ≈ 600 km/s, relativa al fondo de microondas.

3.- El acumulamiento de objetos a grandes corrimientos, como cuasares y galaxias lejanas.

4.- Se ha revelado una estructura como de red o esponja así como la existencia de vacíos a escalas ≥ 100 Mpc.

5.- Se han encontrado límites superiores para las fluctuaciones del fondo de microondas en varias escalas angulares, y hasta recientemente se han reportado mediciones de estas fluctuaciones.

En este capítulo se hará una revisión de las observaciones que han llevado a las conclusiones mencionadas anteriormente.

3.2 Cúmulos

Para poder usar los cúmulos de galaxias como posibles trazadores del universo, se requieren de muestras completas de cúmulos sobre grandes volúmenes. Para este estudio existen tres diferentes catálogos que han presentado un buen grado de confiabilidad. Ellos son, el catálogo de Abell, hecho en 1955, para cúmulos ricos, el catálogo de Zwicky, hecho

en 1968, de galaxias y cúmulos de galaxias, y el catálogo de cúmulos hecho por Shectman en 1985.

El catálogo de Abell contiene un total de 2712 cúmulos, correspondientes a los cúmulos más ricos y densos encontrados en las placas del survey del cielo de Palomar, y definidos por los siguientes criterios de selección: a) cada cúmulo debe contener al menos 50 miembros en un rango de magnitud de m_3 a $m_3 + 2$, donde m_3 es la magnitud de la galaxia más brillante; b) todos los miembros deben estar contenidos dentro de una esfera de radio de $1.5h^{-1}$ Mpc alrededor del centro del cúmulo; c) el cúmulo debe estar en un rango de $0.02 \leq z \leq 0.2$; y d) los cúmulos deben estar sobre la declinación norte -27° .

Para cada cúmulo el catálogo de Abell da su posición en el cielo; la magnitud de la décima galaxia más brillante (m_{10}); la distancia de grupo (D), definida como una función de z ; y la clasificación de la riqueza, definida a partir del número de galaxias contenidas en el cúmulo, (ver tabla 1). Para las estadísticas hechas sobre el catálogo de Abell de los 2712 cúmulos se consideran sólo 1682 cúmulos ricos, correspondientes a distancias de grupo desde $D=1$ hasta 6, y con riqueza desde $R=1$ hasta 5.

Distancia de grupo			Riqueza		
D	$\langle z_{est} \rangle$	$N_c (R \geq 1)$	R	N_g	N_g
1	0.0283	9	(0)	(30-49)	$(\geq 10^3)^*$
2	0.0400	2	1	50-79	1224
3	0.0577	33	2	80-129	383
4	0.0787	60	3	130-199	68
5	0.131	657	4	200-299	6
6	0.198	921	5	≥ 300	1
Total		1682	Total ($R \geq 1$)		1682

Tabla 1.- Distribución de los cúmulos de Abell con la distancia y la riqueza. $D \equiv$ distancia de grupo, $z_{est} \equiv$ corrimiento estimado, $N_c \equiv$ número de cúmulos. $N_g \equiv$ número de galaxias. $R \equiv$ riqueza

La densidad espacial media que presentan estos cúmulos ricos es del orden de $10^{-5} h^3 \text{ Mpc}^{-3}$. Se aprecia también que la densidad decrece rápidamente conforme aumenta la riqueza, es decir, existen mas cúmulos que contienen menor número de galaxias.

El catálogo de Zwicky contiene alrededor de 30.000 galaxias más brillantes que 15.7^m , identificadas en las placas del survey del cielo Palomar. Contiene 9700 cúmulos de galaxias visibles en estas placas, ($m \approx 20$). Los criterios usados para esta selección fueron los siguientes: a) los cúmulos deben contener al menos 50 galaxias en un rango de magnitud que va desde m_1 hasta $m_1 + 3$, donde m_1 es la magnitud de la galaxia más brillante; b) estas galaxias deben yacer dentro de los contornos del cúmulo; c) no existe ninguna restricción

respecto al rango del corrimiento para las galaxias; y d) los cúmulos deben estar al norte de la declinación -3° .

El catálogo de Zwicky contiene sistemas que son menos ricos que los del catálogo de Abell, por lo que hay un aumento en el número de cúmulos en el catálogo de Zwicky. Los cúmulos de Zwicky también son comúnmente más grandes y con una densidad más baja que los cúmulos de Abell.

El catálogo de Shectman se basó en el conteo de galaxias hecho por Shane y Wirtanen, que se basó en el survey astrofísico del observatorio de Lick. Este incluye aproximadamente 10^6 galaxias más brillantes que 19^m y con una declinación $\delta \geq -22.5^\circ$. En este conteo un gran número de cúmulos, definidos para este catálogo como regiones con una alta densidad numérica de galaxias, son fácilmente reconocidos. Shectman ha identificado una muestra de 646 cúmulos de galaxias. Estos están localizados en una latitud galáctica $|b| \geq 40^\circ$. La selección se basó en una densidad local máxima sobre un cierto valor umbral dado. Un valor umbral seleccionado de 5 galaxias contadas por bin fue usado para este catálogo. El procedimiento para el catálogo de Shectman selecciona cúmulos que son considerablemente más pobres que los cúmulos de Abell para riquezas de $R \geq 1$; de esta forma la densidad numérica media es más grande que la densidad de los cúmulos de Abell, sólo el 40% de los cúmulos de Shectman son cúmulos de Abell.

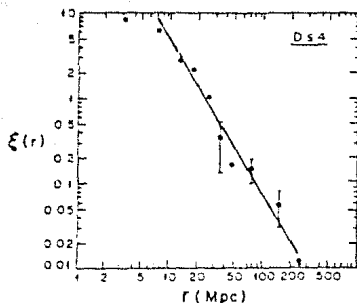
El catálogo de Abell ha sido sujeto a numerosos estudios, con la intención de lograr determinar la distribución de cúmulos ricos. Abell (1958, 1961) encontró que la distribución superficial en su muestra estadística fue altamente no azarosa. Bogar y Wagoner (1973), Hauser y Peebles (1973), y Rood (1976), también encontraron fuerte evidencia de que existe agrupamiento entre los cúmulos de Abell. Bahcall y Soneira (1983, 1984) encontraron también que los cúmulos de galaxias se agrupan fuertemente en el espacio, formando cúmulos de cúmulos de galaxias, o supercúmulos.

La función de correlación (sección 2.4) es una de las mejores herramientas para medir cuantitativamente el acumulamiento entre objetos. Esta función de correlación fué determinada por Bahcall y Soneira (1983), usando la muestra estadística de Abell para cúmulos ricos, a partir de la relación:

$$\xi_{cc} = \frac{F(r)}{F^R(r)} - 1, \quad (3.2.1)$$

donde $F(r)$ es la frecuencia observada de pares de cúmulos con una separación r , para la muestra de Abell, en tanto que $F^R(r)$ es la correspondiente frecuencia de pares al azar, la cual fue determinada de un conjunto de 1000 catálogos hechos al azar. La función de correlación de cúmulos se presenta en la gráfica 1.

Como se puede observar a una escala de ≤ 25 Mpc existe una fuerte correlación espacial. Una correlación más débil se encuentra a una escala de $\approx 50h^{-1}$ Mpc y posiblemente hasta escalas de $\approx 100h^{-1}$ Mpc, donde $\xi_{cc} \approx 0.1$. Sobre una escala de $150h^{-1}$ Mpc no existe ninguna correlación significativa. La función de correlación de cúmulos fue calculada por Bahcall y Soneira (1983) como:



Gráfica 1.- La función de correlación de cúmulos, para la muestra de Abell.

$$\xi_{cc} = 360r^{-1.8} = (r/26)^{-1.8}, \quad r \leq 100h^{-1}Mpc. \quad (3.2.2)$$

El estudio de la distribución de materia en el espacio fue clásicamente estudiada por medio de la distribución de galaxias. Esta última, a diferencia de la distribución de cúmulos ricos, traza principalmente los detalles en estructuras pequeñas o intermedias. Los surveys hechos para galaxias, revelan estructuras bien definidas, frecuentemente alrededor de vacíos (sección 3.4). Una gran fracción de estas galaxias parecen estar en distribuciones geométricas como de hojas, con estructuras a veces filamentosarias, tales como el supercúmulo de Perseus (sección 3.5). La función de correlación para la distribución de galaxias ha sido calculada por Peebles y Groth (1977) y Davis y Peebles (1983) como:

$$\xi_{gg} = 20r^{-1.8} = (r/5)^{-1.8} \quad r \leq 20h^{-1}Mpc. \quad (3.2.3)$$

La función de correlación para galaxias tiene la misma forma que la función de correlación para cúmulos ricos, pero a diferencia de lo que se podía esperar tiene una magnitud más pequeña por un factor de ≈ 18 , es decir, existe una mayor correlación entre cúmulos que entre galaxias. La función para cúmulos también se extiende a mayores separaciones que la función para galaxias. La longitud de escala de correlación para cúmulos (donde la función de correlación se hace uno) es: $r_0 \approx 26h^{-1}Mpc$, en comparación de $r_0 \approx 5h^{-1}Mpc$ para galaxias.

Este trabajo ha sido corroborado con investigaciones hechas por varios autores en donde se tomaron diferentes parámetros para la muestra de Abell, como la riqueza, la distancia de grupo y el corrimiento al rojo (Bahcall (1988), sección 3.2). En todos ellos se encuentran resultados de acuerdo a lo mencionado anteriormente, con las diferencias esperadas de las variaciones tomadas en los parámetros.

Para el catálogo de cúmulos de Shectman, la función de correlación fue calculada por Shectman (1985):

$$\xi_{cc} \approx 180r^{-1.8} \approx (r/18)^{-1.8}, \quad (3.2.4)$$

esta función de correlación es aproximadamente 10 veces más grande que la de galaxias y es un factor de aproximadamente 2 veces más pequeña que la función de correlación para cúmulos ricos de Abell. Esta diferencia era esperada debido a que la densidad espacial para los cúmulos de Shectman es aproximadamente 6 veces mayor que para los cúmulos de Abell de esta forma las dos funciones de correlación son compatibles.

La marcada diferencia en los criterios de selección para el catálogo de Zwicky hace imposible una comparación directa entre las funciones de correlación para estos dos catálogos. Sin embargo, en todos los diferentes estudios se muestra una consistencia en los resultados. Esto hace creer en la realidad y universalidad de la función de correlación.

La correlación cruzada (ξ_{gc}) mide el exceso de probabilidad sobre una muestra al azar, de encontrar una galaxia dentro de una separación dada de un cúmulo. Esta correlación ha sido estudiada por Peebles y Seldner (1977) y por Efstathiou (1988). Y esta ha sido estimada por un modelo de una ley de potencia doble (Peebles 1980):

$$\xi_{gc} = (r/7)^{-2.7} + (r/12.5)^{-1.7}, \quad r \leq 40h^{-1} Mpc, \quad (3.2.5)$$

donde el primer término representa el perfil estándar de densidad interna de galaxias y el segundo término es producido por el agrupamiento de cúmulos. Es también esperado que la correlación cruzada sea una media geométrica de la función de correlación de galaxias y de cúmulos, es decir:

$$\xi_{gc}(r) \approx \xi_{gg}^{1/2} \xi_{cc}^{1/2}, \quad (3.2.6)$$

Sustituyendo (3.2.2) y (3.2.3) se tiene:

$$\xi_{gc} \approx 85r^{-1.8}, \quad (3.2.7)$$

lo cual es aproximadamente el segundo término de la ecuación (3.2.5), siendo, por lo tanto, consistente.

Existen varias observaciones que apoyan la realidad física de la función de correlación para cúmulos. Dentro de éstas se encuentran:

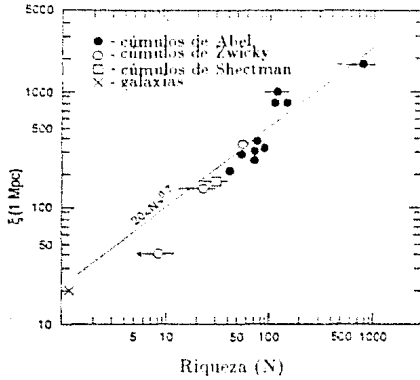
1.- La función de correlación de cúmulos da resultados consistentes en diferentes regiones del cielo.

2.- La función de correlación hecha para el catálogo de Abell es consistente con las hechas para los catálogos de Zwicky (Postman (1986) y Shectman (1985)).

3.- La función de correlación para cúmulos y para galaxias, es consistente con la función de correlación cruzada cúmulo-galaxia.

La evidencia listada anteriormente sugiere una realidad de la función de correlación, y hace improbable el hecho de que esta sea una consecuencia del catálogo usado.

Estudios llevados a cabo principalmente por (Bahacall y Soneira 1983), han mostrado que la función de correlación para cúmulos depende también de la riqueza de los cúmulos. Este dependencia aparece en la gráfica 2.



Gráfica 2.- Dependencia de la función de correlación con la riqueza (N), para diferentes catálogos.

Esta dependencia puede ser bien aproximada por:

$$\xi(1 \text{ Mpc}) \approx 20 N^{-0.7} \tag{3.2.8}$$

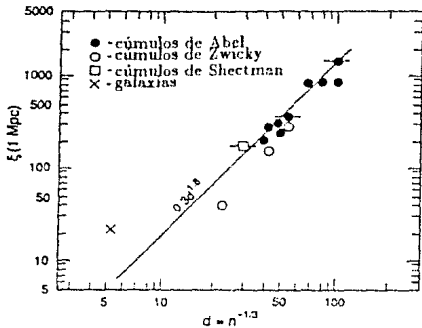
donde N es la riqueza del sistema. Esta dependencia sugiere que los cúmulos ricos pueblan las estructuras a escalas grandes y también sugiere que estos son eficientes trazadores de la estructura a gran escala en el universo.

La dependencia de la riqueza con la luminosidad y la masa del sistema, sugiere la idea de que la función de correlación para la distribución total de masa podría corresponder a una extrapolación de la función en la gráfica 2, y apoya la idea de un modelo de sesgo (sección 2.10) de formación de galaxias y de otras estructuras.

Han existido diferentes explicaciones al incremento observado de la función de correlación con la riqueza, pero hasta ahora este fenómeno no ha sido entendido completamente.

Un punto importante radica en el hecho de que la forma de la función de correlación es la misma ley de potencias para galaxias para cúmulos y, como se verá en la sección 3.3, para supercúmulos. Esto hace pensar que una condición inicial o alguna evolución subsecuente puede ser la responsable de este fenómeno. En la gráfica 3 se muestra la amplitud de la

función de correlación para varios sistemas (galaxias cúmulos y supercúmulos) como una función de la separación media entre los objetos de la muestra (d).



Gráfica 3.- Dependencia de la función de correlación con la separación media de los objetos en diferentes muestras (d).

La separación media esta relacionada a la densidad espacial media por medio de $d = n^{-1/3}$. Es evidente de la gráfica 3 que la correlación aumenta con la separación media. Una función de correlación adimensional normalizada a a separación media de la muestra fue calculada por Bahacall (1988), y tiene la siguiente forma:

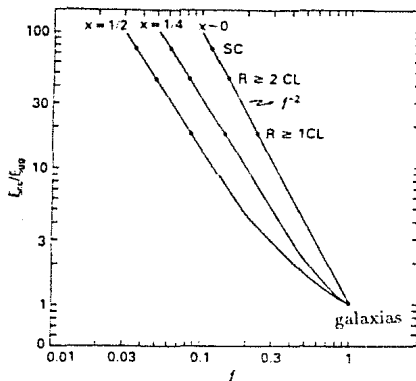
$$\xi(r) \approx 0.3(r/d_i)^{-1.8}, \quad (3.2.9)$$

en donde d_i es la separación media de la muestra que está siendo considerada. Esta función de correlación tan general sugiere un proceso de acumulamiento invariante de escala.

La diferencia mostrada en la función de correlación de galaxias respecto a la de cúmulos radica, entre otras cosas, en el hecho de que no todas las galaxias son miembros de cúmulos, la otra explicación podría ser la hipótesis de sesgo (sección 2.10). Si f es la fracción de galaxias encontradas en cúmulos, esta fracción representa la probabilidad de que al elegir una galaxia al azar, esté correlacionada con un cúmulo rico. Un estudio hecho por Bahacall (1986), llevó a los resultados mostrados en la gráfica 4, en donde se grafica la dependencia de la razón de las dos funciones de correlación (ξ_{cc}/ξ_{gg}) con f , donde $x = \xi_{gg}^f/\xi_{gg}$, siendo ξ_{gg}^f la correlación de la $(1-f)$ fracción de galaxias fuera de los cúmulos ricos. Esta relación puede ser expresada como:

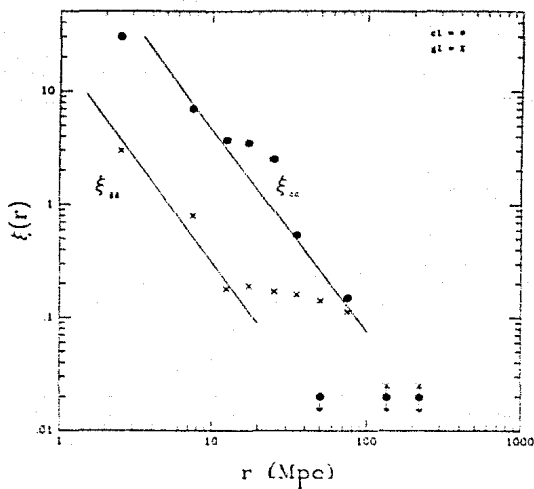
$$\left(\frac{\xi_{cc}}{\xi_{gg}}\right)^{1/2} = \frac{1 - (1-f)(\xi_{gg}^f/\xi_{gg})^{1/2}}{f} \quad (3.2.10)$$

Los resultados de este modelo sugirieron que la fracción de galaxias asociadas con cúmulos ricos es mayor que lo que se creía anteriormente, y la mayoría de éstas estarían distribuidas en "colas" exteriores de estos cúmulos. Investigaciones recientes han sugerido que los cúmulos poseen generalmente una estructura elongada (con colas) que contiene una considerable fracción de galaxias.



Gráfica 4.-Razón de las funciones de correlación para cúmulos y para galaxias, en función de la fracción de galaxias contenidas en cúmulos (f), donde $x = \xi_{gg}^f/\xi_{gg}$, siendo ξ_{gg}^f la correlación de la $(1-f)$ fracción de galaxias fuera de los cúmulos ricos.

Varios surveys de corrimientos de galaxias hechos por Gregory (1981), Giovanelli (1986) y De Lapparent (1986) sugirieron que que las galaxias podían estar distribuidas sobre la superficie que define un modelo de cáscaras con cúmulos ricos localizados en las intersecciones de éstas. Este modelo está de acuerdo con la correlación observada para galaxias y para cúmulos. Bahacall (1988a) ha hecho simulaciones de este modelo distribuyendo galaxias al azar sobre estas superficies y formando cúmulos en las intersecciones, encontrando que los resultados son consistentes con las observaciones en pequeñas escalas. Sin embargo este modelo exhibe una cola de débil correlación positiva a escalas mayores, y



Gráfica 5.- Funciones de correlación para cúmulos y para galaxias es el modelo de cascaras, comparadas con las funciones de correlacion observadas (lineas).

que no son compatibles con las observaciones. Estos resultados son mostrados en la gráfica 5.

3.3 Supercúmulos

La distribución de galaxias ésta agrupada en todas las escalas, habiendo grupos binarios, triples y en general desde unas pocas hasta cientos de galaxias por grupo; éstos son conocidos como cúmulos.

Existe también otro tipo de agrupamientos de galaxias, conocidos como supercúmulos; un supercúmulo es definido como un grupo de ricos cúmulos y es identificado como un aumento en la densidad espacial de cúmulos. Estos supercúmulos tienen diámetros de entre uno y hasta diez veces el de un cúmulo y tienen menor densidad y, aunque no hay duda sobre su existencia, hay algunos problemas para definir sus límites. Por ejemplo, es difícil decir donde un supercúmulo empieza y donde este acaba. Incluso hay hipótesis acerca de que los supercúmulos están interconectados entre sí formando una gran red tridimensional (sección 3.6).

El estudio de supercúmulos es de gran importancia ya que esto provee entre otras cosas de:

1.- Una idea de cómo es la estructura a gran escala, así como información de la época de formación de galaxias.

2.- Contiene información acerca de la naturaleza de fluctuaciones primordiales.

3.- Puede dar una medida de la cantidad de masa del universo, esto es por que la expansión de Hubble es desacelerada, debido a la sobredensidad del supercúmulo. Conociendo la desaceleración, se podría tener una estimación de la masa dinámica.

Desde los primeros surveys ha habido evidencia de la existencia de supercúmulos. Incluso desde 1930 Shapley muestra pruebas que podían sugerir agrupamiento de cúmulos. Otra gran agrupación en Piscis es encontrada por Zwicky en 1937. Abell es el primero en sugerir la la existencia de asociación entre cúmulos de galaxias.

Los primeros survey de galaxias débiles fueron hechos por Hubble (1934) y por Shane y Wirtanen (1967). Ellos encontraron numerosos cúmulos densos y grupos. Shane (1975) detalla una concentración de nubes, que contiene 12 cúmulos de galaxias, a una distancia de 440 Mpc.

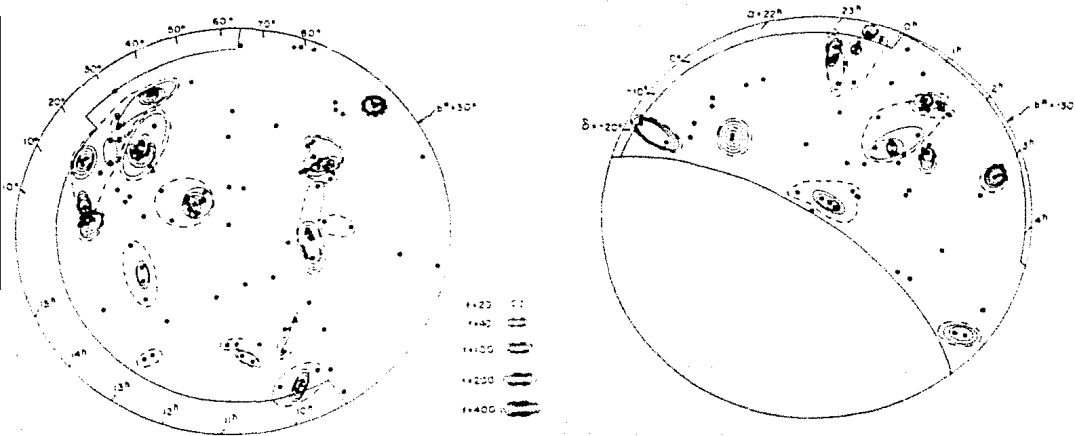
Los primeros catálogos hechos para supercúmulos a partir del catálogo de Abell fueron hechos por el mismo Abell (1961), Rood (1976) y Murray (1978) así como Thuan (1980). Sin embargo, no hubo comparaciones confiables con distribuciones al azar. Más recientemente Bahacall y Soneira (1984) construyeron un catálogo de supercúmulos a $z \leq 0.08$, y con $D \leq 4$, con una muestra de los 104 cúmulos más cercanos de Abell.

El número de supercúmulos encontrados se obtuvo determinando el número de veces que es más grande la densidad en una región, respecto a la densidad media de cúmulos (f). Al elegir un valor del parámetro f , se buscan las regiones que tengan f veces la densidad media, y cada una de estas es identificada como un supercúmulo. La densidad de un supercúmulo es dada entonces por:

$$n_{sc} = f n_s \quad (3.3.1)$$

donde n_{sc} es la densidad espacial de cúmulos y n_s representa la densidad espacial media de cúmulos. Este estudio fue hecho para valores de f que van desde 10 hasta 400. Un total de 16 cúmulos con $R \geq 1$ son encontrados para un valor de $f = 20$. El número de cúmulos encontrados por supercúmulo varió de 2 a 15 para $f = 20$, en tanto para $f = 400$ varió de 2 a 3. La fracción de cúmulos conteniendo supercúmulos fue del 54 % a $f = 20$, y se redujo a 16 % a $f = 400$. Comparaciones con catálogos hechos al azar muestran que las cantidades, así como las fracciones encontradas son altas, respecto a distribuciones azarosas. La fracción de espacio ocupado por estos supercúmulos fue de $\approx 3\%$ a $f = 20$, y se observó que decrece rápidamente con el incremento de f . Estos resultados son mostrados en la gráfica 6, la tabla 2 y la gráfica 7.

Debido al gran tamaño de los supercúmulos, la regiones de interés para la función de correlación abarca $\approx 100 - 150h^{-1}$ Mpc. Escalas más pequeñas corresponden a escalas de menor tamaño que los supercúmulos, en tanto que las escalas mayores son del orden de



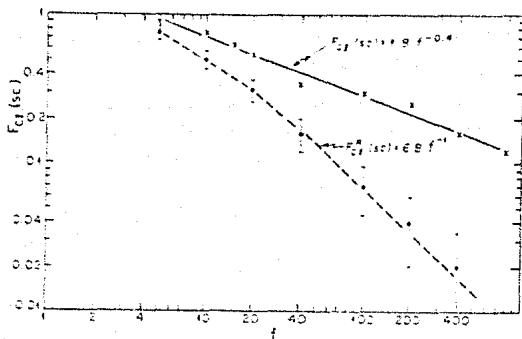
Gráfica 6.- Supercúmulos definidos en función del número de veces que es mayor la densidad respecto al promedio (f).

	f			
	20	40	100	400
N_{sc}	16	12	11	7
$n_{cl/sc}$	2-15	2-7	2-7	2-3
ΔR_{max} (Mpc)	145	36	36	13
$\langle \Delta R_r \rangle$ (Mpc)	27.1	7.6	7.6	4.5
$\langle \Delta R_z \rangle$ (Mpc)	28.6	14.5	13.5	4.5
$F_c(sc)$	0.54	0.34	0.30	0.16
V_{sc}/V	0.03	0.005	0.003	0.0004

Tabla 2.- N_{sc} (número total de supercúmulos), $n_{cl/sc}$ (número de cúmulos por supercúmulo), ΔR_{max} (tamaño lineal del supercúmulo más grande), $\langle \Delta R_r \rangle$ y $\langle \Delta R_z \rangle$ (media proyectada y separación medida por corrimiento para pares de cúmulos en supercúmulos), $F_c(sc)$ (fracción de cúmulos que pertenecen a supercúmulos) y V_{sc}/V (fracción de volumen ocupado por supercúmulos) como una función de f .

los límites de la muestra. Los resultados implicaron la existencia de grandes estructuras a escalas de $\approx 100 - 150h^{-1} Mpc$.

Otros estudios más recientes han sido hechos por Kopylov (1987) a $z \leq 0.2$ calculando



Gráfica 7.- La fracción de todos los cúmulos que son miembros de supercúmulos como una función de f . Para muestras observacionales (línea continua) y para una catálogo heurístico al azar (línea punteada).

la función de correlación como $\xi_{c,c}(100 - 150h^{-1} \text{ Mpc}) = 0.47 \pm 0.14$.

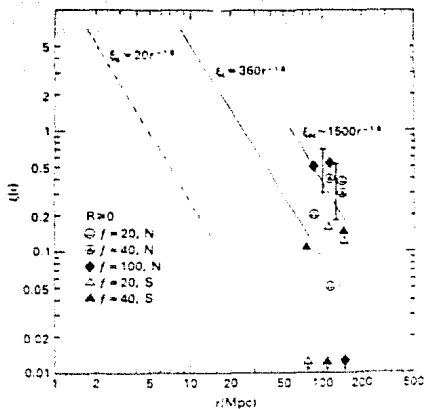
Las observaciones de Tully (1986, 1987) de la distribución de cúmulos a escalas mayores de $\approx 300h^{-1} \text{ Mpc}$ ha indicado una tendencia de agrupamiento entre supercúmulos. En la gráfica 8 se muestra la función de correlación encontrada para supercúmulos, comparada con las funciones de correlación para galaxias y para cúmulos. La función de correlación para supercúmulos fue calculada por Balcells y Burgert (1986) como:

$$\xi_{c,c} \approx 1500r^{-1.5} \approx (r/60)^{-1.5} \quad (3.3.2)$$

Esta función de correlación da una buena estimación acerca del agrupamiento de supercúmulos, pero no es posible determinar por medio de ella las estructuras filamentosarias o planas que pueden existir entre supercúmulos, así como tampoco da información acerca de los vacíos contenidos en estas estructuras.

Un rasgo muy importante en la distribución de galaxias es la existencia del Supercúmulo de Virgo, del cual forma parte nuestra galaxia. Este supercúmulo es también llamado el Supercúmulo Local, y uno de sus principales miembros es el Cúmulo de Virgo, el cual se encuentra aproximadamente en el centro del supercúmulo. Este supercúmulo tiene una longitud de aproximadamente 40 Mpc, y presenta un forma elongada de proporción 6:1, así como una velocidad de dispersión de $\approx 350 \text{ km/s}$ (Oort 1983).

Otro gran supercúmulo, es el conocido como Supercúmulo de Coma que contiene a los cúmulos ricos de Coma y de Abell. Las partes más densas van desde $11^h, 20^m, 6200 \text{ km/s}$ hasta $13.6^h, 35^m, 7400 \text{ km/s}$, es decir, una extensión aproximada de 160 Mpc Tiene una



Gráfica 8.- Funciones de correlación para galaxias cúmulos y supercúmulos.

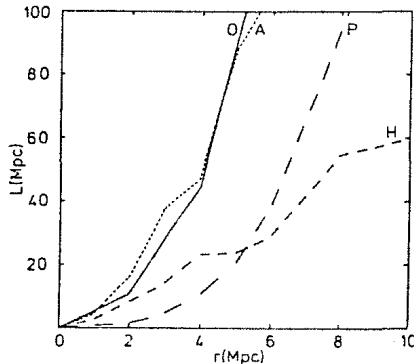
proporción de 7:1, y una velocidad de dispersión de aproximadamente de 300 km/s, con una masa calculada de poco menos de $10^6 M_{\odot}$ (Oort 1983).

Einasto (1980), investigando estructuras a gran escala en el hemisferio galáctico sur, encontró una estructura como de cordillera que se extiende desde el cúmulo de Perseus (Abell 426) a una región alrededor de $23.3^h + 25^m$ así como otra un poco más pequeña y angosta que se extiende desde Abell 426 hasta Abell 194. Estas dos estructuras son consideradas por los autores como miembros de un gran supercúmulo conocido como el supercúmulo de Perseus, el cual cubre un área de $\approx 2000 Mpc^2$. La parte más densa contiene tres cúmulos de Abell, y la estructura de este supercúmulo consiste en delgadas estructuras filamentosas, su masa es estimada del orden de $10^{16} M_{\odot}$, y tiene una velocidad de dispersión de $\approx 400 km/s$.

Existe una cuarta gran estructura conocida como el Supercúmulo de Hércules. Esta contiene dos grupos de cúmulos ricos uno cercano a Abell 2151 con una velocidad de 11,000 km/s y el otro cerca de Abell 2199 con una velocidad de 9,000 km/s, es decir, se encuentra a una distancia de 200 Mpc, y tiene un diámetro aproximado de 140 Mpc (Oort 1983).

Como se ha mencionado, un supercúmulo a veces se presenta como una estructura elongada y algunas veces filamentaria, como el supercúmulo de Perseus. Para tener una estimación del tipo de geometría de estos aglomeramientos uno debe recurrir a diferentes métodos. Uno de estos métodos consiste en rodear cada galaxia de una esfera imaginaria, y hacer crecer el radio de la esfera (Zeldovich 1982). Conforme el radio va creciendo, los bordes de las esferas empezarán a unirse formando estructuras. El tamaño y forma de estas estructuras dependerán del radio de las esferas que rodean a cada galaxia Este procedimiento ha sido usado para medir el tamaño de las diferentes estructuras de las

distribuciones obtenidas por observaciones, así como en diferentes modelos, además de distribuciones al azar. Los resultados son mostrados en la gráfica 9.



Gráfica 9.- Longitud máxima de regiones conectadas, como una función del radio que rodea cada galaxia, para un modelo de acumulación jerárquico (H), modelo de distribución de Poisson (P), simulación de N-cuerpos para un escenario adiabático (A) y distribución obtenida por observaciones (O).

Estos resultados concluyen que las mayoría de las galaxias yacen en estructuras de supercúmulos, y que además llenan un 1 % de todo el espacio. La forma que presentan este tipo de estructuras puede ser una estructura prolata o de disco. En el caso del supercúmulo de Hércules, así como el de Coma, las observaciones se inclinan a tener una estructura prolata. En el caso de supercúmulo de Perseus, lo que se tiene es una estructura claramente filamentaria.

Un rasgo importante que se tiene en casi todos los supercúmulos, es que éstos no presentan grandes concentraciones en el centro, de manera que no han tenido tiempo de virializarse, y por lo tanto no han alcanzado un equilibrio gravitacional.

Giovanelli (1983) ha encontrado que la estructura en el supercúmulo de Perseus es definida principalmente por galaxias de tipos primordiales, este fenómeno puede ser de gran importancia para saber como han sido formadas estas estructuras. Un estudio hecho por S. Zieba, ha mostrado que las galaxias E y SO tienen una mayor tendencia a acumularse respecto a las espirales. Esto ocurre a escalas pequeñas del orden de $0.5''$ a $1''$ así como en escalas de $5''$ a $10''$. Este índice de concentración no difiere de una distribución azarosa en escalas de $5''$ ó más. Mientras que para galaxias elípticas esta tendencia a agruparse persiste en escalas de al menos $24''$. Este estudio fue hecho en la región polar galáctica norte, un estudio más extenso debe hacerse en más regiones para tener un resultado concluyente.

Los cúmulos de galaxias son comúnmente elongados, y en promedio sus elongaciones son mayores que el de galaxias elípticas. En este tipo de estructura, es por lo tanto muy fácil determinar su orientación (Carter y Metcalfe (1983), haciendo un estudio en 14 diferentes cúmulos, encontraron que en 10 de éstos el ángulo de posición de las galaxias centrales difieren solo 15° respecto al ángulo del cúmulo al que pertenecen. Además se ha encontrado en los supercúmulos de Coma y Perseus una correspondencia entre los ángulos de posición del eje principal de los cúmulos y la orientación de la cadena del supercúmulo. Binggeli (1982) ha hecho el descubrimiento importante de que existe una correlación general entre la orientación del eje principal del cúmulo y la dirección del cúmulo vecino más cercano, siempre y cuando éste esté a una distancia menor de 30-40 Mpc. Binggeli ha comparado la orientación de un cúmulo con la dirección hacia más distantes cúmulos y ha encontrado una correlación diferente en escalas mayores que 100 Mpc.

La evidencia de una correlación entre propiedades de galaxias y cúmulos sobre escalas de supercúmulos da una fuerte evidencia a favor de que los supercúmulos se formaron antes o simultáneamente que los cúmulos.

MacGillavry (1982) encontró que en el Supercúmulo Local, las galaxias tienden a estar alineadas a lo largo del plano de este supercúmulo. Tiffi (1980) también encontró que la posición de los ángulos para galaxias dobles en la misma región tienden a estar paralelos y posiblemente también paralelo con la elongada superestructura a la que pertenecen. A pesar de todo esto, las evidencias no son totalmente convincentes.

Una pregunta de gran importancia para el conocimiento de supercúmulos es si éstos forman entidades discretas, o si están interconectados entre sí. Einasto (1980) llegó a la conclusión de que supercúmulos vecinos están en contacto y tienen elementos en común. También hay evidencias de que varias ramas o filamentos de la compleja estructura de Perseus y sus alrededores están conectados, pero se necesitan mucho más investigaciones en velocidades radiales para probar esta conexión. También existe una delgada cadena que conecta al Supercúmulo de Virgo con el de Coma, así como una conexión entre el gran supercúmulo de Coma y el de Hércules. En la sección 3.6 es presentado un estudio más detallado sobre estas posibles conexiones.

Otra pregunta fundamental es, si fueron los cúmulos ó los supercúmulos los primeros en formarse; los dos diferentes modelos de fluctuaciones, Adiabáticas e Isotérmicas, predicen cada una de estas posibilidades respectivamente (sección 2.5). Un argumento a favor de que fueron primero los supercúmulos como ya se vió es el de la orientación de los cúmulos dentro de supercúmulos. Otro argumento es la segregación de diferentes tipos de galaxias en las ramas principales del supercúmulo de Perseus, la cual está a favor de las fluctuaciones adiabáticas.

3.4 Vacíos

Un vacío es una región donde la densidad de galaxias es substancialmente más pequeña que sus alrededores, o que el promedio de toda una muestra completa de galaxias.

Una de las primeras referencias hechas sobre vacíos, es la presentada por Gregory y Thompson (1978) y Chincarini, Rood y Thompson (1981). Ellos hacen referencia a un par de vacíos con una longitud característica de > 40 Mpc localizados en las inmediaciones del los supercúmulo de Coma y Hércules, respectivamente.

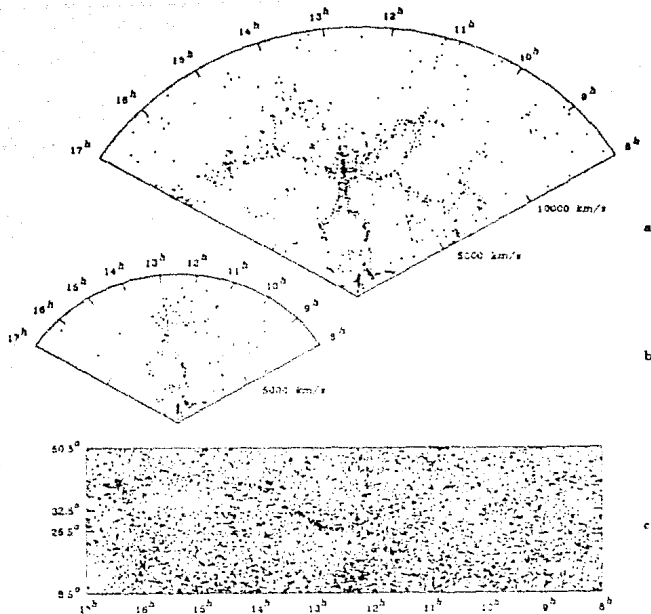
Tully (1982) hizo un estudio en donde encuentra que la gran mayoría de galaxias en supercúmulos están localizadas en 9 nubes con espacios vacíos entre ellas.

Una lista extensiva de surveys han determinado que los vacíos mencionados anteriormente están en las inmediaciones de los supercúmulos de Coma y de Hércules, respectivamente y tienen longitudes características que van desde el cúmulo de Coma ($\alpha = 12^h 57^m, \delta = 28^\circ 15', V = 6955$ km/s) hasta el cúmulo A1656 ($\alpha = 11^h 42^m, \delta = 20^\circ 7', V = 6446$ km/s), para el primero, en tanto que el segundo se expande desde el cúmulo de Hércules ($\alpha = 16^h 3^m, \delta = 17^\circ 53', V = 11,122$ km/s) hasta el cúmulo A2199 ($\alpha = 16^h 27^m, \delta = 38^\circ 28', V = 9261$ km/s). Balcells (1986) señala que estos dos vacíos son segmentos de dos vacíos aún más grandes, los cuales pueden ser apreciados en la gráfica 10. Esta gráfica muestra parte de un survey extenso de 12,000 galaxias ilustrado por de Lapparent (1986). De Lapparent notó una longitud característica de 50 Mpc para los vacíos de Coma y Hércules.

Kirshner (1981) encontró una región con una densidad menor que la esperada con un radio de ≈ 60 Mpc centrado en ($\alpha = 14^h 50^m, \delta = 46^\circ, V = 15,550$ km/s), localizado en la región de Bootes (este vacío es conocido como el vacío de Bootes), y reportó que se encuentra cerca de un gran supercúmulo. Un estudio llevado a cabo por Balcells (1982) en base a la muestra de cúmulos de Abell, sugiere que existe una gran cantidad de supercúmulos en la periferia del vacío de Bootes el cual se extiende, según la distribución de Abell desde $l' = 140^\circ$ hasta 240° , $b = 30^\circ$ hasta 50° , $z = 0.03$ hasta 0.08 , con una longitud característica de ≈ 300 Mpc. Batusky y Burns (1985) en base a este mismo catálogo encontraron una lista de 102 candidatos a supercúmulos y 29 candidatos a vacíos con $z \approx 0.1$. Esto y otras observaciones han sugerido que los vacíos normalmente están rodeados de grandes estructuras, de mayor densidad, con un exceso de galaxias, como lo son los supercúmulos.

Se han hecho algunas pruebas para confirmar la escasez de materia dentro de vacíos. Botham (1986) presenta evidencias de que los vacíos de Hércules y Coma están desprovistos de materia. Krumm y Brosch (1984) han sugerido que los vacíos no contienen una población significativa de protogalaxias H I. Sin embargo, Brosch y Gondhalekar (1984) han detectado algunas líneas de absorción en los vacíos de Bootes y el de Perseus-Pisces. Esto sugiere que existe un enriquecimiento químico de gas en estos vacíos.

Un vacío típico tiene un radio de $R_v \approx 25$ Mpc y normalmente se encuentra rodeado de cascadas de supercúmulos. Esta característica, como se verá más adelante, imprime una velocidad de expansión del vacío de aproximadamente 1150 km/s. Para estudiar la dinámica de una galaxia contenida en un cúmulo dentro de uno de los supercúmulos que forman la cascara que rodea a un vacío, considere la velocidad total (V_g) de esta galaxia como: $V_g = V_{vir} + V_H + V_{in} + V_{out} + V_{ex}$ donde todas estas velocidades son, la velocidad de virialización (V_{vir}), relativa al centro del cúmulo, la velocidad de Hubble (V_H), la



Gráfica 10.- a) Mapa de velocidad Doppler centrado en la línea recta en una declinación $26.5^{\circ} \leq \delta \leq 32.5^{\circ}$, con $m_p \leq 15.5$ y $v \leq 15,000$ km/s. b) Misma figura que a) pero con $m_p \leq 14.5$ y $v \leq 10,000$ km/s. c) Mapa proyectado de objetos con $m_p \leq 15.5$, en una región $8^h \leq \alpha \leq 17^h$ y $8.5^{\circ} \leq \delta \leq 50.5^{\circ}$.

velocidad hacia el centro del cúmulo (V_{in}), debido a la sobredensidad de éste, la velocidad hacia afuera del vacío (V_{out}), debida a la baja densidad de éste, en tanto que la última es una componente extra causado por un hipotética explosión que originó el vacío (V_e).

Para entender la velocidad que se denota como V_{out} , considérese en un modelo muy sencillo, donde exista un vacío de baja densidad ρ_v dentro de una distribución uniforme de materia de densidad mayor ρ_u . Considérese la velocidad relativa a la expansión de Hubble y despréciase la velocidad virial, de manera que $V_H = V_{vir} = 0$. Para fines dinámicos se puede pensar que existe un punto material (la galaxia en la cáscara) que interactúa gravitacionalmente con una región de densidad negativa, es decir, se resta una densidad ρ_u a toda la muestra, de manera que el vacío queda con una densidad $\rho_{uv} = \rho_v - \rho_u$. Esta interacción con una densidad negativa se traduce en una fuerza repulsiva que hace que se expanda el vacío, convirtiéndose en una estructura esférica, ya que los puntos más

cercanos al centro del vacío sentirán una mayor repulsión hasta emparejarse con los más externos. Para calcular esta velocidad simplemente usamos la ley de gravitación:

$$\frac{dV_{out}}{dt} = \frac{GM_{ur}}{R_c^2} \quad (3.4.1)$$

donde M_{ur} es la masa correspondiente a una densidad ρ_{ur} , contenida en el vacío. Una burda integración desde 0 hasta el tiempo actual lleva a:

$$V_{out} \approx \frac{GM_{ur}}{R_c^2} t_o$$

donde t_o es el tiempo actual, escrito en términos del parametro de Hubble se tiene:

$$V_{out} \approx \frac{GM_{ur}}{R_c^2} H_o^{-1} \quad (3.4.2)$$

Si se supone que $\rho_c = 0$, entonces puede ser calculada la masa contenida en este vacío, de esta forma se tiene que: $V_{out} \approx 600 \text{ km/s}$, V_{in} se ha supuesto que tiene un valor de $\approx 300 \text{ km/s}$ (Rood 1958). Una explosión, como origen de un vacío, eyecta una masa de M_{ur} . La distancia media de este material hacia el centro del vacío es $\approx 0.5R_c$, y de esta forma $V_{in} \approx 0.2R_c H_o^{-1} \approx 250 \text{ km/s}$. Este análisis predice una velocidad de expansión, de un vacío de tamaño típico, de aproximadamente 1150 km/s.

3.5 Estructura a z grandes

Se han hecho intentos para determinar estructura a escalas aún más grandes que la de supercúmulos. Uno de los objetos que contiene información a muy altos corrimientos son los cuasares, los cuales están a distancias de hasta $z = 4$. Se ha encontrado que existen agrupamientos entre cuasares. Oort (1981) reportó tres pares de cuasares con una separación de entre 2 y 27 Mpc. Otra media docena más fue encontrada en otros surveys que cubrían grandes áreas. Igualmente se encontraron con una separación muy pequeña de entre 22 y 52 Mpc (Oort 1983). Se encontró además un grupo de tres cuasares en un radio de tan solo 0.1 Mpc (Burbidge 1980). La probabilidad de encontrar grupos tan aglomerados en una muestra con una distribución al azar es muy baja. Un supercúmulo de $\approx 140 \text{ Mpc}$, a una $z = 0.37$ que contiene 4 cuasares fue reportado por Webster (1982). Trabajos basados en surveys de cuasares más extensos hechos por Kravtsovsky (1986), Shaver (1984) (1988) y (Zhu y Chu 1987), han revelado una significativa correlación espacial entre cuasares a grandes separaciones ($\approx 100h^{-1} \text{ Mpc}$) y han encontrado que cuasares con $z < 1.5$ ó 2 están fuertemente correlacionados. Shanks (1987) usando una muestra mas pequeña, encontró una fuerte correlación entre cuasares a separaciones pequeñas ($< 10h^{-1} \text{ Mpc}$) pero una correlación insignificante a grandes escalas. Estos resultados sugieren que aún a escalas muy grandes existe correlación entre la materia.

Otro tipo de objetos que también están distribuidos a grandes distancias son nubes intergalácticas conocidas como nubes de Lyman- α , las cuales se consideran como galaxias

fallidas. Algunas de éstas se encuentran a $z > 2$. Una forma de poder identificar esta nube es por medio del espectro de cuasares. Las nubes de Lyman- α tienen un alto contenido de hidrógeno, por lo que emiten y absorben en las líneas de Lyman α . El espectro proveniente del cuasar sufrirá líneas de absorción al pasar por cada una de estas nubes. Si las nubes se encuentran a diferentes distancias tendrán diferente velocidad, por lo que las líneas de absorción estarán corridas respecto a las líneas hechas por otra nube, formándose de esta manera un conjunto de líneas conocidas como bosque de Lyman- α . Con el corrimiento de cada línea se puede determinar la distancia a la que se encuentra esa nube. Si se tienen espectros de diferentes cuasares, se puede tener un buen mapeo de la distribución de las nubes de Lyman- α . Entre los resultados más importantes obtenidos principalmente por Sargent (1980) se ha encontrado que no existe un acumulamiento en las nubes de Lyman- α , y que de existir sería prácticamente nulo. No se reportaron evidencias de existencias de vacíos de nubes de Lyman- α en los espectros. De esta manera no parece existir correlación entre este tipo distribución.

Otro tipo de distribución que puede ser estudiada de la misma forma, son objetos que tienen líneas de emisión de elementos pesados. Estos objetos se cree que son galaxias distantes. (Sargent 1988) encontró que estos objetos sí presentan un acumulamiento, además se encontraron líneas de absorción equidistantes en espectros provenientes de cuasares separados por varios minutos de arco, lo cual provee evidencia a favor de la existencia de grandes estructuras, o acumulamientos a gran escala.

Sin embargo, a pesar de los trabajos mencionados anteriormente, a la fecha no existen surveys suficientemente profundos para verificar la posible correlación de estructura a escalas mayores que supercúmulos. Algunos autores, principalmente los que defienden modelos cosmológicos homogéneos, consideran que no existen inhomogeneidades a escalas mayores y que la hipótesis en la que se basan los modelos de Friedmann-Robertson-Walker puede estar justificada. Frenk ha hecho algunas pruebas calculando la velocidad de un objeto debido a toda la distribución de materia que proveen los surveys más profundos (≤ 200 Mpc), él ha comprobado que esta velocidad coincide con las medidas observacionalmente. Esta similitud sugiere que la materia restante que pudiera estar interaccionado con este objeto tiene un efecto nulo, por lo que debe estar homogéneamente distribuida. Además, los modelos de formación de estructura, principalmente los de materia oscura caliente y fría, no predicen inhomogeneidades muy grandes a escalas más grandes que las del orden de supercúmulos (gráfica 2 del capítulo 2). Otras pruebas hechas para estimar densidades, muestran que conforme se elija una escala mayor, la densidad tiende a una constante, es decir, estas pruebas sugieren que a escalas mayores, pero no demasiado grandes, la densidad de esta región del universo tiende a ser la densidad promedio. Hacen falta muchos estudios para tener un resultado concluyente.

3.6 La Topología del universo

Uno de los problemas más importantes en cosmología consiste en caracterizar la

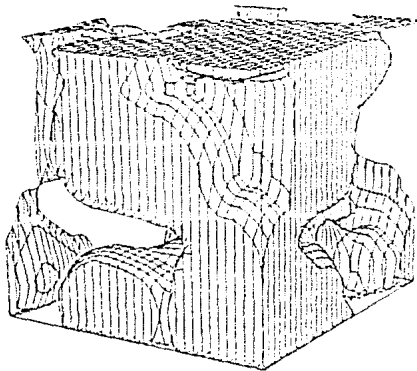
topología a gran escala en el universo. Originalmente fueron planteados dos modelos respecto a ésta.

El primer modelo fue propuesto por Peebles y Soneira (1978). En este modelo las regiones de alta densidad como cúmulos y supercúmulos son regiones aisladas en un mar de baja densidad (menor que el promedio), el cual constituye una única región conectada. Este modelo es conocido como el modelo de acumulamiento jerárquico, y ha sido apoyado por simulaciones numéricas hechas por Peebles y Soneira. En estas simulaciones se han partido de condiciones iniciales en donde se distribuyen azarosamente cúmulos esféricos en un espacio vacío. Este modelo aparece de forma natural en un modelo de materia oscura fría en donde las galaxias se forman primero y posteriormente los cúmulos y supercúmulos.

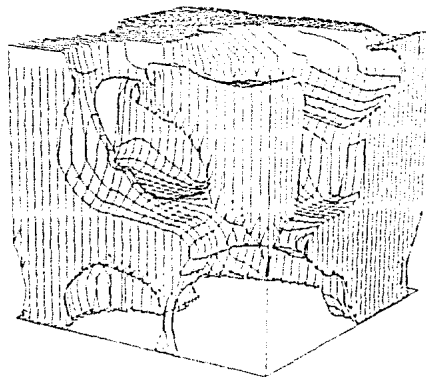
El segundo modelo fue sugerido por Joovyer y Elmasto (1978) y es basado en un modelo de fluctuaciones adiabáticas. Este modelo muestra una estructura como de celdas, donde las paredes constituyen las regiones de alta densidad y las celdas representan las regiones vacías, como sería un panel de abejas. En este modelo por lo regular tres o más paredes se intersectan en las aristas, causando de esta forma, por interacción gravitacional, que varias galaxias se congreguen en estas regiones, formando un filamento denso. Cuatro o más aristas se intersectan en los vértices, formando un cúmulo de muy alta densidad. De esta manera, en el modelo de celdas son los vacíos los que forman regiones aisladas, mientras que las regiones de alta densidad constituyen una única estructura conectada. Shandarin (1982) desarrolló una prueba, basado en una muestra de $40h^{-1}$ Mpc, para poder discernir entre estos dos modelos. Esta prueba consiste en la misma idea planteada en la sección 3.2, donde a cada galaxia se le asocia un esfera imaginaria, y se le hacen crecer hasta el punto en que empiecen a intersectarse formando de esta manera regiones conectadas. El radio crítico (r_c) definido como el radio para en cual empiezan a formarse estas regiones conectadas, será diferente en cada uno de los dos modelos. En un modelo de acumulamiento jerárquico se espera sea mayor que el radio crítico para una muestra azarosa de Poisson (r_p). Esto es debido a que las regiones de alta densidad son regiones aisladas. Para el modelo de celdas el radio crítico será menor que r_p , ya que las galaxias forman regiones interconectadas. Shandarin encontró que $r_c < r_p$ de manera que el modelo de celdas fue favorecido. Sin embargo, trabajos posteriores como el de Melott (1983) y Davis (1985) no mostraron una prueba contundente a favor de ninguno de estos dos modelos.

Gott Melott y Dickinson (1986) plantearon un nuevo modelo basado en las observaciones del catálogo CfA conocido como el modelo de esponja. Para esto, ellos se fijaron en una región que estuviera incluida en el catálogo de Zwicky ($\delta > 0$) y la cual estuviera a una latitud galáctica alta. Para este estudio se eligió el octante definido por el triángulo esférico ABC , donde A está a $\delta = 90^\circ$, B a $\delta = 0^\circ$, $\alpha = 9^h49^m$ y C a $\delta = 0$. Posteriormente fue elegido un cubo en esta región, con una longitud diagonal de $50h^{-1}$ Mpc, que corresponde a una longitud de $28.9h^{-1}$ Mpc por cada uno de sus lados. El número de galaxias incluidas en esta muestra fue de 153 e incluyó el supercúmulo de Virgo. Este cubo fue dividido en un arreglo de 64 celdas ($4 \times 4 \times 4$), cada una de una longitud de $7.2h^{-1}$ Mpc. La densidad numérica media fue de 2.39 galaxias por celda. La mediana resultó ser

de una galaxia por celda. De las 64 celdas 27 no presentaron galaxias y se encontraron 26 celdas con más de 2 galaxias. La densidad de cada una de las celdas fue calculada y se asumió la misma a lo largo de toda la celda. Posteriormente la densidad fue suavizada con un función cúbica suavizadora de "hatbox", de esta forma, se tuvo una distribución suave en la densidad. En las gráficas 11 y 12 se muestran las regiones de alta densidad (densidad mayor que el promedio) y las regiones de baja densidad (densidad menor que el promedio), respectivamente. En estas figuras las superficies que dividen las dos regiones son aumentadas de manera que el volumen ocupada por cada una de estas es justamente la mitad.



Gráficas 11.- Regiones de alta densidad.



Gráfica 12.- Región de baja densidad.

Las gráficas 11 y 12 muestran claramente que tanto las regiones de alta como de baja densidad forman cada una, una única estructura conectada, por ejemplo, se podría ir a todos los puntos de la región de alta densidad, únicamente viajando sobre esta región y de igual manera para la región de baja densidad. De esta forma se podría asumir que sólo se tiene un supercúmulo y un vacío. La estructura descrita anteriormente es topológicamente conocida como una esponja, en donde cada una de las regiones es geométricamente equivalente e indistinguible de la otra, además de encontrarse interconectadas, es decir, sería imposible separar las dos regiones sin tener que hacerles cortes a cada una de estas región.

Existe un argumento teórico que apoya esta topología de esponja. Las fluctuaciones primordiales tienen una distribución Gaussiana con fases al azar, de forma que las fluctuaciones positivas esta tan favorecidas como las negativas. Además, los tipos de amor-

tiguamientos a las que están sometidas las fluctuaciones, borran tanto las fluctuaciones positivas como las negativas, es decir, se debería tener dos tipos de regiones totalmente simétricas. La única topología que conserva esta condición de simetría es la topología de esponja, a diferencia de el modelo de celdas y el de acumulamiento jerárquico.

3.7 Medición de las fluctuaciones en la radiación de fondo

Los primeros intentos para detectar anisotropía en la radiación de fondo, fueron hechos en escalas angulares de $2'$ a $180''$ y aparte del término dipolar debido al movimiento peculiar del cúmulo local, no fue observada ninguna anisotropía por encima de $\Delta T/T \approx 10^{-4} - 10^{-3}$. En los últimos años, el rango de sensibilidad aumentó hasta niveles del orden de $\Delta T/T \approx 10^{-5}$. Aún así, no fue detectada ninguna anisotropía intrínseca en la radiación de fondo. Uno de los principales problemas en la detección de anisotropías, es que existen varios efectos que ponen un límite a la resolución en las mediciones. Estos pueden ser desde los mismos límites de los instrumentos de medición, hasta efectos que originan señales que causan ruidos mayores que las fluctuaciones de la misma radiación. Entre estos efectos se encuentran: señales emitidas por fuentes de radio discretas, emisión sincrotrón galáctica, emisión libre-libre galáctica, emisión de polvo galáctico y el efecto Sunyaev-Zeldovich. Todos estos efectos han impuesto límites superiores a las anisotropías en la radiación de fondo.

Para escalas angulares pequeñas $< 1'$ ha habido muchos trabajos que reportan límites superiores para las fluctuaciones, entre los que se encuentran: Fomalont (1984), Kuo (1984), Martín y Partridge (1988), Fomalont (1988), Hogan y Partridge (1989) y Kreysa y Chini (1989). Todos estos resultados son resumidos en la tabla 3.

En varias mediciones hechas para escalas angulares de $1' - 1''$, particularmente importantes en teorías de formación de galaxias, también han sido reportados límites superiores en las fluctuaciones. En tabla 4 son presentados los resultados obtenidos por Uson y Wilkinson (1984), Readhead (1989), Myers (1992), Berlin (1984), Meinhold y Lubin (1991), Alsop (1992) y de Bernardis (1990).

Los límites superiores para escalas angulares de 1 a $20''$ encontrados por Timbie y Wilkinson (1990), Andreani (1990), Mandolesi (1986), Cottingham (1987), Boulig (1991), Page (1990) y Meyer (1991) son sintetizados en la tabla 5.

No fue sino hasta 1992 que se reportaron anisotropías, a escalas grandes ($\geq 7''$), inherentes a la radiación de fondo del orden de $\Delta T/T \approx 6 \times 10^{-6}$ (Smoot 1992), a partir de los datos obtenidos de las mediciones hechas por el satélite COBE (COsmic Background Explorer). Entre los resultados obtenidos por el COBE está la detección de una radiación de fondo, con espectro casi perfecto de cuerpo negro, a una temperatura de $2.726 \pm 0.010^\circ\text{K}$ (Mather 1993). Otro rasgo importante en el mapeo de temperaturas hechas para todo el cielo por el COBE es que la función de correlación para la temperatura, definida como:

$$C(\alpha) = \langle T_1 T_2 \rangle, \quad (3.7.1)$$

	escala angular	$\Delta T \times 10^4$
Fomalont <i>et al.</i> 1984	18"	95
	30"	80
	60"	50
Knoke <i>et al.</i> 1984	6"	320
	12"	170
	18"	120
Martin & Partridge	18"-160"	40
Fomalont <i>et al.</i> 1988	12"	55
	18"	12
	30"	8
	60"	6
Hogan & Partridge	5:4-48"	63
	10"-48"	32
	18"-50"	16
Kreysa & Chini	30"	26

Tabla 3.- Límites superiores a $\Delta T/T$ a escalas angulares $< 1'$.

	escala angular	$\Delta T \times 10^4$
Uson & Wilkinson 1984	1:4	2.1
	1:4	3.9
	1:8	1.7
	1:8	1.6
	12"	9.6
Readhead <i>et al.</i> 1989	2:6	1.9
	25'	30
	1:8	4.5
Berlin <i>et al.</i> 1984	4:5-9:5	1 ^b
Meinhold & Lubin 1991	20'-30'	3.5
Alsop <i>et al.</i> 1992	30'	15
de Bernardis <i>et al.</i> 1990	15'-100'	20-30

Tabla 4.- Límites superiores a $\Delta T/T$ a escalas angulares de $1'$ a 1° .

donde T_1 y T_2 son las temperaturas medidas para dos direcciones \hat{r}_1 y \hat{r}_2 y α es tal

	escala angular	$\Delta T/T \times 10^5$
Timbie & Wilkinson 1990	1°7	7.4
	1°1	11
	0°4-3°5	20
Andreani <i>et al.</i> 1990	2°5	33
	5°	29
Mandolesi <i>et al.</i> 1986	2°-10°	50 - 70
Cottingham	3°-25°	20
Boughn <i>et al.</i> 1991	3°	10
	30°	4
Page <i>et al.</i> 1990	10°	9.3
Meyer <i>et al.</i> 1991	13°	1.6
	3°-22°	4

Tabla 5.- Límites superiores a $\Delta T/T$ a escalas angulares de $1''$ a $20''$.

que $\cos\alpha = \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2$, exhibe estructura en escalas de $7'$ a $90''$ (Smoor 1992). Además el espectro de potencias para las fluctuaciones primordiales, deducido mediante mediciones en la temperatura, es consistente con el espectro de Harrison-Zeldovich, con un índice de $n = 1.1 \pm 0.5$ (Smoor 1992). Este espectro es predicho por un modelo de cosmología inflacionaria (sección 2.9). Los resultados obtenidos para las mediciones en las fluctuaciones de la radiación de fondo no son aún contundentes, ya que las anisotropías detectadas por el COBE podrían deberse a contaminación por emisiones galácticas o extragalácticas, independientes de la radiación de fondo. Por esto, se siguen planeando experimentos que confirmen esta detección.

Conclusiones

El problema de formación de estructura en el universo no ha sido aún resuelto ni observacional ni teóricamente.

Los surveys más profundos (≤ 200 Mpc), muestran que la estructura a gran escala en el universo está determinada por un fuerte acumulamiento entre galaxias, cúmulos y supercúmulos. Para determinar estructuras a mayores escalas se requieren de estudios más profundos. Sin embargo, algunos trabajos sugieren, de manera indirecta, que a escalas mayores el universo tiende a ser homogéneo, en acuerdo al modelo de Friedmann-Robertson-Walker (F-R-W).

La topología de la estructura en el universo, es también un problema que no está del todo definido; existen tres propuestas respecto a esta topología. Los dos modelos clásicos, el Modelo de Celdas, donde las regiones de baja densidad están aisladas y rodeadas de paredes de alta densidad y el Modelo de Acumulamiento Jerárquico, donde las estructuras se encuentran aisladas en un mar de baja densidad, han sido cuestionados con un modelo reciente de topología de esponja, donde las dos regiones, tanto las de baja como las de alta densidad, son dos únicas regiones que se encuentran interconectadas entre sí y son topológicamente equivalentes una de la otra. Sin embargo, hasta al momento no se tienen resultados contundentes.

Los intentos hechos para detectar la amplitud de las inhomogeneidades en la época de desacoplamiento entre radiación y materia, tuvieron resultados recientemente. Mediciones como las efectuadas por el COBE han detectado inhomogeneidades del orden de $\Delta T/T \approx 10^{-6}$, a escalas muy grandes ($\geq 7''$). Estas mediciones corresponden a distancias de incluso miles de Mpc en la época actual. Aun así, hace falta mucho trabajo para corroborar estos resultados, además de mediciones a escalas menores.

En el aspecto teórico se tienen explicaciones para el origen de las fluctuaciones iniciales (semillas de estructura). Estas son asociadas a fluctuaciones cuánticas que existían en el campo de Higgs, durante el periodo de inflación, que pudieron haberse creado en épocas muy tempranas, incluso desde la era de Planck. Además, el modelo inflacionario provee un mecanismo para tener el espectro de potencias de Harrison-Zeldovich.

Los trabajos teóricos para la evolución de las inhomogeneidades primordiales han dado soluciones analíticas para su evolución únicamente en el régimen lineal, es decir, soluciones para periodos muy pequeños de tiempo o para escalas muy grandes, que no han alcanzado regímenes no lineales. Estas soluciones crecen proporcionalmente al factor de escala en el caso de un universo dominado por materia sin presión, y proporcionalmente al cuadrado del factor de escala para el caso de un universo dominado por radiación. Además las soluciones son diferentes también dependiendo del tipo de modelo F-R-W que se tenga.

La solución para el régimen no lineal no ha sido totalmente resuelta. Se han hecho una gran cantidad de intentos, como métodos numéricos para resolver ecuaciones no lineales así como simulaciones de N-cuerpos. Estas simulaciones han sido hechas principalmente

para dos tipos de partículas, las que proveen un escenario de materia oscura caliente y las que proveen un escenario de materia oscura fría, ninguna de los dos tipos de simulaciones han sido completamente satisfactorios. aunque, en la década de los 80's, existió cierta preferencia por el escenario de materia oscura fría.

Algunos autores han propuesto una hipótesis de sesgo para lograr ajustar los resultados de algunas simulaciones, lo que implica que la correlación para la distribución de materia en el universo es diferente de la inferida por medio de galaxias. Esta hipótesis también da una solución para explicar los altos potenciales inferidos de mediciones de las velocidades peculiares de algunos objetos, además de que puede proveer un universo con una densidad crítica, predicho por la inflación.

Este campo es sumamente amplio y existen muchas preguntas sin respuesta. El problema de formación de estructura a gran escala en el universo es un problema que se encuentra abierto y su estudio está teniendo una gran actividad en la actualidad.

Bibliografía

- Blau Steven K. & Guth Alan M., 1987, "*Inflationary Cosmology*", publicado en "*300 Years of Gravitation*", Cambridge University
- Branderberger Robert H., 1991, "*Inflationary-Universe Models, Cosmics Strings and the Formation of Structure*", notas distribuidas en la escuela de verano de altas enegías y cosmología, International Center Theoretical Physics, Trieste Italia
- Dolgovf A.D., Sazhin M.V. & Zeldovich Y.B., 1990, "*Modern cosmology*", Editions Frontieres
- Freuk Carlos. 1991, "*Model of Large Scale Structure*", publicado en "*The Birth and Early Evolution of Our Universe*", Royal Swedish Academy of Sciences
- Kolb Edward W. & Turner Michael S., 1990. "*The Early Universe*", Addison-Wesley Publishing Company
- Peebles P.J.E., 1980. "*The Large Scale Structure of the Universe*", Priceton University
- Silk J. & Vittorio N., "*The Large Scale Structure of the Universe. Theory and Observation Constraints*", notas distribuidas en la escuela de verano E. Fermi
- Weinberg Steven, 1972, "*Gravitation and Cosmology*", John Wiley & Sons, Inc
- Zeldovich Y.B. & Novikov I.D., 1983, "*The Structure and Evolution of the Universe*", University of Chicago

Referencias

- Abell, 1958, *Ap. J. Supp.*, **3**:211.
- Abell, 1961, *Astron. J.*, **66**:607.
- Albrecht y Steinhardt, 1982, *Phys. Rev. Lett.*, **48**:1220.
- Alsop, 1992, *Ap. J.*, **388**:242.
- Andreani, 1990, *Soc. Astron. Ital. Mem.*, **61**:169.
- Bahcall, 1982, *Ap. J. Lett.*, **258**:L17.
- Bahcall y Soncira, 1983, *Ap. J.*, **270**:20.

- Bahcall y Soneira, 1984, *Ap. J.*, 277:27.
 Bahcall, 1986, *Ap. J. Lett.*, 302:L41.
 Bahcall y Burgett, 1986, *Ap. J. Lett.*, 300:L35.
 Bahcall, 1988, *Ann. Rev.*, 631.
 Bahcall, 1988a, *I. A. U. Synn. No.* 130:229.
 Batusky y Burns, 1985, *Astron. J.*, 90:1413.
 Berlin, 1984, *Sobshch. Spets. Astrofiz. Obs.*, 41:5.
 Binggeli, 1982, *Astron. Astrophys.*, 107:432.
 Bogard y Wagoner, 1973, *Ap. J.*, 181:609.
 Bothun, 1986, *Ap. J.*, 308:510.
 Boughn, 1991, " *After the First Three Minutes* ", *New York: Am. Inst. Phys.*, 107.
 Brosh y Gondhalekar, 1984, *Astron. Astrophys.*, 140:L37.
 Burbidge, 1980, *Ap. J. Lett.*, 242:L55.
 Carter y Metcalfe, 1983, *M.N.R.A.S.*, 191:325.
 Centrella y Melott, 1982, *Nature*, 305:196.
 Chicarini, 1981, *Ap. J. Lett.*, 249:L57.
 Cottingham, 1987, *Tesis de Doctorado, Princeton Univ.*
 Davis y Peebles, 1983, *Ap. J.*, 267:465.
 Davis 1985, *Ap. J. Supp.*, 57:241. *Ap. J.*, 292:371. *Nature*, 317:595.
 Davis, 1987, *ibid.*, 330:451.
 Davis, 1988, *ibid.*, 327:507.
 De Bernardis, 1990, *Ap. J. Lett.*, 360:L31.
 De Lapparent, 1986, *Ap. J. Lett.*, 302:L1.
 Efsthathiou, 1988, *Proc. Vatican. Conf.*, (1987).
 Einasto, 1980, *M.N.R.A.S.*, 193:353.
 Fomalont, 1984, *Ap. J. Lett.*, 277:L23.
 Fomalont, 1988, *Astron. J.*, 96:1187.
 Giovanelli, 1986, *Ap. J.*, 300:77.
 Gott, 1986, *Ap. J.*, 306:341.
 Gregory y Thompson, 1978, *Ap. J.*, 222:784.
 Gregory, 1981, *Ap. J.*, 243:411.
 Ghutt, 1981, *Phys. Rev.*, D23:347.
 Hauser y Peebles, 1973, *Ap. J.*, 185:757.
 Hogan y Partridge, 1989, *Ap. J. Lett.*, 341:L29.
 Hubble, 1934, *Ap. J.*, 79:S.
 Joeveer y Einasto, 1978, *I. U. A. Sym.*, 79:241.
 Kirshner, 1981, *Ap. J. Lett.*, 248:L57.
 Knoke, 1984, *Ap. J.*, 284:479.
 Kopylov, 1987, *Proc. Semin. Large Scale Structure of the Universe*, 1986:39.
 Kreyss y Chini, 1989, *Third ESO-Cern Symposium*, 433.
 Krum y Brosh, 1984, *Astron. J.*, 89:1461.

Kruszewsky, 1986, *Princeton Univ.*
 Linde, 1981, *Phys. Rev.*, 108B:3S9.
 Mac Gillavry, 1982, *M.N.R.A.S.*, 198:605.
 Mandolesi, 1986, *Nature*, 319:751.
 Martin y Partridge, 1984, *Ap. J.*, 284:479.
 Meinhold y Lubin, 1991, *Ap. J. Lett.*, 370:L11.
 Meyer, 1991, *Ap. J. Lett.*, 371:L7.
 Murray, 1978, *Ap. J. Lett.*, 219:LS9.
 Myres, 1992, *Ap. J.*
 Oort, 1981, *Astron. Astrophys.*, 94:359.
 Oort, 1983, *Ann. Rev.*, 373.
 Page, 1990, *Ap. J. Lett.*, 355:L1.
 Peebles, 1973, *Ap. J.*, 185:757.
 Peebles y Groth, 1977, *Ap. J.*, 217:385.
 Peebles y Seldner, 1977, *Ap. J.*, 215:703.
 Peebles y Soncira, 1978, *Ap. J.*, 83:S45.
 Peebles, 1980, *Les Houches Sess.*, 32.
 Postman, 1986, *Astron. J.*, 91:1267.
 Readhead, 1989, *Ap. J.*, 346:506.
 Rood, 1976, *Ap. J.*, 207:16.
 Rood, 1988, *Ann. Rev.*, 245.
 Sargent, 1980, *Ap. J. Supp.*, 42:41.
 Sargent, 1988, *I. A. U. Sym.*, 130:333.
 Shandarin, 1982, *Pis'ma Astr. Zh.*, 9:195.
 Shane y Wirtanen, 1967, *Publ. Lick Obs.*, 22 part 1.
 Shane, 1975, *Galaxies and the Universe, Stars and Stellar System*, 9:647.
 Shanks, 1987, *M.N.R.A.S.*, 227:793.
 Shaver, 1984, *Astron. Astrophys.*, 136:L9.
 Shaver, 1988, *I. U. A. Sym.*, 130:359.
 Shectman, 1985, *Ap. J. Supp.*, 57:77.
 Smoot, 1992, *Ap. J. Lett.*, 396:L1.
 Soncira y Peebles, 1978, *Ap. J.*, 83:S45.
 Thuan, 1980, *Physical Cosmology Les Houches Sess*, 32:277.
 Tiffi, 1980, *Ap. J.*, 239:445.
 Timbie y Wilkinson, 1990, *Ap. J.*, 353:140.
 Tully, 1982, *Ap. J.*, 273:390.
 Tully, 1986, *Ap. J.*, 303:25.
 Tully, 1987, *Ap. J.*, 323:1.
 Uson y Wilkinson, 1984, *Ap. J. Lett.*, 277:L1, *Ap. J.*, 283:471.
 Webster, 1982, *M.N.R.A.S.*, 199:683.
 White, 1983, *Ap. J. Lett.*, 274:L1.

Zeldovich, 1970, *Astron. Astrophys.*, 5:84.

Zeldovich, 1982, *Nature*, 300:407.