



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Caracterización de las Soluciones a la Ecuación  
de un Ducto Resonante en un Campo de Olas"

Tesis que para obtener el  
grado de Licenciatura en  
Física Presenta: Esteban  
Prado Bravo.

Director de Tesis:  
Dr. Steven Czitrom Baus.  
Facultad de Ciencias,  
septiembre de 1993.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

AGRADECIMIENTOS

RESUMEN

INTRODUCCION	1
CAPITULO I. Revisión de la Ecuación de Bernoulli	3
CAPITULO II. Ecuación Descriptiva del Problema	11
CAPITULO III. Soluciones	17
3.1. Solución Analítica	17
3.2. Solución Numérica	24
CAPITULO IV. Resultados	27
CAPITULO V. Discusión	37
CAPITULO VI. Conclusiones	40
ANEXO I	42
REFERENCIAS	48

## RESUMEN

Se analiza el movimiento oscilatorio generado al interior de un ducto semi-sumergido en un campo de olas mediante la ecuación de Bernoulli con la inclusión de pérdidas de energía por fricción y formación de vórtices (términos no-lineales) para simular el movimiento "real" del fluido (ecuación completa). Se obtiene una solución numérica para la ecuación completa del ducto y una solución analítica para la ecuación del ducto sin considerar los términos no-lineales (ecuación linealizada). Se determinan las condiciones para que la solución analítica describa adecuadamente el movimiento del fluido y sea equivalente a la solución numérica.

Estas condiciones acotan el tamaño de la amplitud normalizada  $A_n$  (definida como: tamaño de la ola dividida por la longitud del ducto), en términos de una razón de amortiguamiento  $Fr$  relacionada con la fricción en el fluido:  $A_n < 4eFr^2$ . Para estas  $A_n$  se obtienen olas amplificadas cuyo tamaño no disminuye significativamente si el ducto tiene desembocadura "acampanada" para evitar la generación de vórtices. Además el tamaño de la máxima amplificación está acotado por :  $1/2eFr$ .

Cuando el ducto tiene desembocadura "recta", la generación de vórtices afecta el valor de la máxima amplificación, provocando un drástico descenso en ella a medida que  $A_n$  aumenta, de tal forma que  $A_n$  debe ser mucho menor que  $4eFr^2$  ( $A_n \ll 4eFr^2$ ) para obtener la máxima amplificación.

Se comprueba el adecuado funcionamiento del modelo numérico mediante comparación con datos experimentales de diversas fuentes.

Usando los valores (amplitud, período y longitud de onda) típicos de las olas observadas en el mar se obtuvieron amplificaciones mayores que 1, para  $A_n$  pequeña. Por lo que resulta factible, al menos teóricamente, el buen funcionamiento de un sistema de bombeo que utiliza ductos resonantes para aprovechar el oleaje marino.

## INTRODUCCION.

El intercambio entre el mar y cuerpos de agua costeros en muchas ocasiones está limitado por restringidos canales de comunicación. Esta característica los hace vulnerables a la acumulación de material exógeno vertido en sus aguas. Así, numerosas lagunas costeras muestran altas concentraciones de sustancias diversas. Este impacto ambiental tiene consecuencias que pueden ir desde lo benéfico hasta lo desastroso y las medidas que se deben tomar pueden ser de naturaleza muy variada. Entre las posibles medidas se encuentra la de incrementar el intercambio entre los cuerpos de agua costeros y el mar, reduciendo así su tiempo de residencia (Merino et al., 1992).

Existen diversas alternativas para incrementar este intercambio. La apertura de canales artificiales ha sido la solución más socorrida que utiliza la energía de las mareas o corrientes locales para el lavado. En ocasiones, sin embargo, el transporte litoral de sedimentos ha provocado resultados inesperados. Este ha llegado tanto a cerrar el canal artificial como a provocar su ampliación, hasta destruir la barrera que dá lugar al cuerpo de agua costero.

Se han desarrollado sistemas de bombeo de agua activados por oleaje (Ruíz et al., en prensa) que podrían utilizarse para el lavado de cuerpos de agua costeros. Resulta muy atractivo utilizar una energía "limpia" disponible en grandes cantidades en el lugar de aplicación. La limitación del éxito de estos dispositivos se ha centrado en el uso de partes móviles que son un punto débil en el demandante ambiente marino.

En respuesta a este problema se han desarrollado sistemas de bombeo sin partes móviles. Uno de ellos, patentado en México por Ruíz, Alatorre y Merino (1988) amplifica el oleaje incidente mediante paredes convergentes. Un rectificador captura las crestas amplificadas provocando flujo por gravedad en un ducto que conecta al dispositivo con el cuerpo de agua costero. Las limitaciones

potenciales de este sistema consisten en la construcción de una estructura marina sujeta al embate de olas y tormentas y al posible asolve por transporte litoral.

En este trabajo se explora otra posibilidad de amplificación de oleaje mediante ductos resonantes y forma parte de un desarrollo tecnológico que se está llevando a cabo en el Instituto de Ciencias del Mar y Limnología, la Facultad de Ciencias y el Instituto de Ingeniería, UNAM. El principio de operación está basado en la obtención de oscilaciones resonantes en el interior de un ducto semi-sumergido en un campo de olas.

En el primer capítulo se lleva a cabo una revisión de la ecuación de Bernoulli para un flujo no estacionario. En el segundo se obtiene la ecuación que describe el movimiento de la columna de agua dentro del ducto resonante. En el siguiente se obtienen soluciones analíticas para la ecuación linealizada y numéricas para la ecuación completa llevando a cabo comparaciones entre ellas. En el cuarto capítulo se presentan los resultados obtenidos al comparar las soluciones con información experimental. En el penúltimo capítulo se lleva a cabo una discusión de los resultados obtenidos. En el último capítulo se presentan las conclusiones y además las sugerencias para analizar el movimiento dentro del ducto en diversas circunstancias.

CAPITULO I  
REVISION DE LA ECUACION DE BERNOULLI.

Es necesario recordar la ecuación de Bernoulli para su posterior aplicación en la descripción del movimiento del fluido dentro del ducto.

Queda totalmente determinado el estado de un fluido en movimiento si conocemos su velocidad  $U(x,y,z,t)$ , su presión  $P(x,y,z,t)$  y su densidad  $\rho(x,y,z,t)$ . Aclarando que estas magnitudes son funciones tanto de la posición como del tiempo. Así  $U$  es la velocidad del fluido en un punto determinado  $(x,y,z)$  del espacio y en un instante determinado  $t$ ; es decir, se refiere a puntos fijos en el espacio y no a partículas del fluido que se mueven en el espacio. Igual sucede para  $P$  y  $\rho$ .

Empezaremos con la ecuación que expresa la conservación de la materia. Consideremos un cierto volumen  $V_0$  del espacio. La masa de fluido contenida en este volumen es

$$\int_{V_0} \rho dV,$$

siendo  $\rho$  la densidad del fluido y realizándose la integración sobre el volumen  $V_0$ . La masa del fluido que pasa por unidad de tiempo a través de un elemento  $dA$  de la superficie que limita a este volumen es

$$\rho \vec{U} \cdot d\vec{A};$$

el módulo del vector  $dA$  es igual al área del elemento superficial y su dirección coincide con la normal a la misma. Por convenio, consideraremos que  $dA$  tiene el sentido normal hacia afuera. Entonces,

$$\rho \vec{U} \cdot d\vec{A},$$

es positivo si el fluido está saliendo del volumen y negativo si

el flujo es hacia el interior del mismo. La masa total de fluido que sale del volumen  $V_0$  en la unidad de tiempo es,

$$\oint_A \rho \vec{U} \cdot d\vec{A},$$

en donde la integración es sobre la superficie cerrada que limita el volumen en cuestión.

La disminución de la masa del fluido en el volumen  $V_0$  por unidad de tiempo puede escribirse como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV.$$

Igualando las expresiones anteriores, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = - \oint_A \rho \vec{U} \cdot d\vec{A}.$$

La integral de superficie puede transformarse mediante la fórmula de Green (Landau y Lifshitz, 1986) en una integral de volumen:

$$\oint_A \rho \vec{U} \cdot d\vec{A} = \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho \vec{U}) dV.$$

Con lo que,

$$\int_{V_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) \right] dV = 0.$$

Como esta ecuación debe ser válida para cualquier volumen, el integrando debe anularse, resultando

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0.$$

Relación conocida como la ecuación de continuidad.

Si el fluido tiene densidad constante la ecuación de continuidad se reduce a

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0,$$

que significa que la razón de expansión o compresión del fluido por unidad de volumen es nula, es decir se tiene un fluido incompresible.

Por otra parte, consideremos un fluido no viscoso en movimiento con velocidad  $U$  y sea  $V_0$  un volumen de control arbitrario. Sobre un elemento de superficie  $dA$  actúa una fuerza  $-PdA$  como se indica en la figura 1.

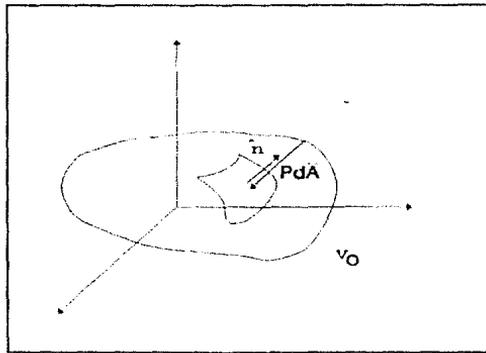


Figura 1. En un elemento de fluido limitado por un volumen  $V_0$  actúa una fuerza  $-PdA$  en dirección normal al elemento de superficie  $dA$ .

La fuerza total que actúa sobre este volumen es igual a la integral

$$-\oint_A Pd\vec{A},$$

de la presión sobre la superficie que limita el volumen. Transformando la integral de superficie en una integral de volumen (Landau y Lifshitz, 1986), se obtiene

$$-\oint_A P d\vec{A} = -\int_{V_0} \nabla P dV.$$

Así que el fluido que rodea a cualquier elemento de volumen  $dV$  ejerce sobre el mismo una fuerza

$$-dV\nabla P.$$

En otras palabras, sobre la unidad de volumen actúa una fuerza

$$-\nabla P.$$

Usando el resultado anterior podemos escribir la ecuación del movimiento de un elemento del fluido en términos del producto de la masa por unidad de volumen ( $\rho$ ) y de la aceleración ( $a$ ):

$$\rho \vec{a} = \rho \frac{d\vec{U}}{dt} = -\nabla P. \dots \dots (1)$$

La derivada de la velocidad que aparece en la relación anterior, no se refiere a la variación respecto al tiempo de la velocidad del fluido en un punto fijo del espacio, sino a la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula fluida determinada cuando se mueve en el espacio. Esta derivada puede expresarse en función de magnitudes que se refieren a puntos fijos en el espacio. Observemos que la variación  $dU$  de la velocidad de la partícula fluida dada durante el tiempo  $dt$  se descompone en dos partes, a saber, la variación durante  $dt$  de la velocidad en un punto fijo del espacio y la diferencia entre las velocidades (en el mismo instante) en dos puntos separados una distancia  $dr$ , siendo  $dr$  la distancia recorrida por la partícula de fluido dada durante el tiempo  $dt$ . La primera parte es

$$\left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right) dt,$$

en donde se considera que la derivada parcial de  $U$  respecto al tiempo corresponde a valores  $x, y, z$  constantes, es decir, a un punto determinado del espacio. La segunda parte es

$$dx \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} = (d\vec{r} \cdot \nabla) \vec{U}.$$

Así que,

$$d\vec{U} = \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right) dt + (d\vec{r} \cdot \nabla) \vec{U},$$

dividiendo ambos miembros por dt,

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \vec{a}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1) se tiene

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P. \dots \dots (2)$$

Esta es la ecuación de movimiento de un fluido sin fricción y en ausencia de fuerzas externas, conocida como la ecuación de Euler.

Esta ecuación se simplifica notablemente en el caso de un flujo estacionario, entendiéndose por estacionario aquel flujo en el cual la velocidad es constante en el tiempo en cada punto ocupado por el fluido. En otras palabras, la velocidad es función sólo de las coordenadas, por lo que la derivada parcial de la velocidad respecto al tiempo es cero.

Si el fluido está en un campo gravitatorio, sobre cualquier volumen unidad actúa una fuerza adicional  $\rho g$ , siendo  $g$  la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza debe sumarse al segundo miembro de la ecuación (1) de modo que la ecuación de Euler (2) toma la forma:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g},$$

o en forma equivalente (Kemmer, 1986):

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\nabla U^2}{2} - \vec{U} \times \nabla \times \vec{U} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g}. \dots \dots (3)$$

Introduzcamos el concepto de "línea de corriente". Estas líneas tienen la propiedad de que la tangente a ellas en cualquier

punto indica la dirección de la velocidad en dicho punto. En el caso de flujo estacionario las líneas de corriente no varían con el tiempo, coincidiendo con las trayectorias de las partículas fluidas. En el flujo no estacionario las tangentes a las líneas de corriente dan las direcciones de las velocidades de las partículas fluidas en diversos puntos del espacio en un instante dado, mientras que las tangentes a las trayectorias indican las direcciones de las velocidades de las partículas de fluido dadas en distintos instantes de tiempo, por lo que no necesariamente coinciden.

Consideremos la figura 2, donde una línea de corriente en un fluido pasa por el punto Q.

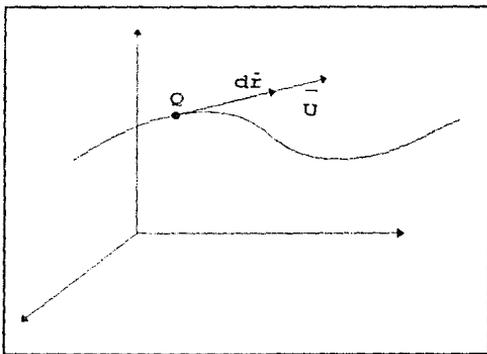


Figura 2.  $U$  y  $dr$  son paralelos sobre la misma línea de corriente.

Un elemento  $dr$  a lo largo de esta línea de corriente debe ser paralelo a  $U$  en el punto  $Q$  y por lo tanto:

$$d\vec{r} \cdot \vec{U} \times \nabla \times \vec{U} = 0.$$

Regresando a la ecuación (3) y multiplicándola escalarmente por  $dr$  obtenemos:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + d\vec{r} \cdot \frac{\nabla U^2}{2} = -d\vec{r} \cdot \frac{\nabla P}{\rho} + d\vec{r} \cdot \vec{g},$$

considerando que la aceleración gravitacional sólo tiene componente no nula en la dirección vertical (eje X) podemos escribir (Marsden y Tromba, 1981):

$$d\vec{r} \cdot \vec{g} = g dX, dP = d\vec{r} \cdot \nabla P, d\frac{U^2}{2} = d\vec{r} \cdot \frac{\nabla U^2}{2};$$

para transformar la ecuación anterior en:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + d\frac{U^2}{2} + \frac{1}{\rho} dP + g dX = 0,$$

a lo largo de una línea de corriente.

Integrando y diferenciando la ecuación anterior obtenemos:

$$d\left[\int \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + \frac{U^2}{2} + \frac{1}{\rho} \int dP + gX\right] = 0, \dots \dots (4)$$

que implica que la relación dentro de los corchetes debe ser constante sobre todos los puntos de una línea de corriente. Por lo que podemos escribir la forma general de la ecuación de Bernoulli como:

$$\int \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + \frac{U^2}{2} + \frac{1}{\rho} \int dP + gX = B. \dots \dots (5)$$

Una vez obtenida la ecuación de Bernoulli, la integración de ésta entre dos puntos sobre la misma línea de corriente origina:

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + \int_1^2 d\frac{U^2}{2} + \frac{1}{\rho} \int_1^2 dP + \int_1^2 g dX = 0. \dots \dots (6)$$

Si el flujo no es estacionario, pero la línea de corriente mantiene fija su forma, como en la figura 3, se cumplen las relaciones:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} \hat{e}_t, \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial t} dr (\cos 0) = \frac{\partial U}{\partial t} ds,$$

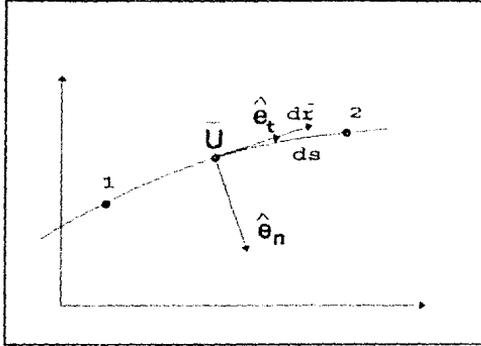


Figura 3. Línea de Corriente entre dos puntos mostrando la relación entre dr y ds.

donde ds es un elemento de arco paralelo a dr sobre la línea de corriente, que nos permite escribir la ecuación de Bernoulli para un flujo no estacionario en la forma:

$$\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} ds + \frac{U_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gX_2 = \frac{U_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gX_1 \dots \dots \dots (7)$$

Al obtener las ecuaciones de movimiento no hemos considerado los procesos de disipación de energía que pueden producirse en un fluido en movimiento como consecuencia de la fricción o rozamiento interno del fluido (viscosidad) y el intercambio térmico entre las diferentes partes del mismo. Consideramos que la densidad del fluido es constante y por lo tanto es un fluido incompresible. Se consideró un flujo no estacionario con líneas de corriente fijas.

CAPITULO II  
 ECUACION DESCRIPTIVA DEL PROBLEMA.

Un esquema del sistema bajo estudio se muestra en la figura 4. Un ducto cilíndrico de radio  $r$  y longitud total  $L+h$  se encuentra sumergido a una profundidad  $L$  en un fluido de densidad constante  $\rho$ , en el campo gravitacional.

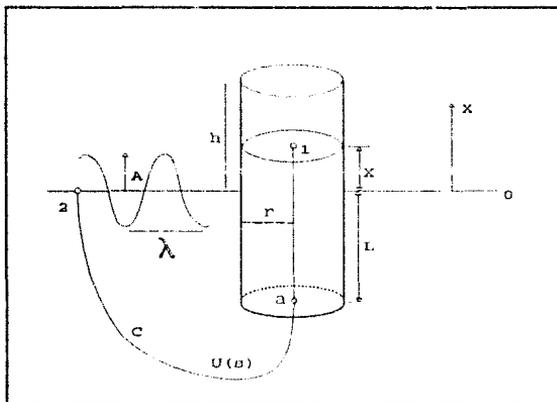


Figura 4 . El movimiento generado en el interior de un ducto semi-sumergido en un campo de olas puede describirse aplicando la ecuación de Bernoulli a la línea de corriente que une los puntos 2 y 1.

Nos interesa describir el movimiento de la superficie del fluido en el interior del ducto sujeto a una señal de presión en la boca inferior. Esta señal puede ser producto de un campo de oleaje en la superficie del fluido exterior al ducto.

El movimiento en el interior del ducto será de naturaleza oscilatoria en vista de que la fuerza restitutiva se debe a la gravedad y no es difícil imaginar que, si el fluido no es viscoso, cada partícula se moverá en vaivén sobre una línea invariante.

Podemos considerar que la superficie exterior al ducto permanece en reposo y por conveniencia tomaremos a este nivel de referencia como  $X=0$ . En el interior del ducto el desplazamiento de la superficie con respecto al nivel de referencia es  $X$ .

Suponemos que existe una línea de corriente (c) que en todo momento une al punto 1 con algún punto en la superficie exterior (ejemplificado por 2 en la figura 4).

Aplicando la ecuación de Bernoulli (7) a la línea de corriente se obtiene la relación que describe el movimiento de la superficie en el interior del ducto:

$$\int_2^1 \frac{\partial U}{\partial t} ds + \frac{U_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gX_1 = \frac{U_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gX_2, \dots \dots \dots (8)$$

donde:

$$X_1 = X, \dots X_2 = 0, \dots U_1 = X', \dots U_2 = 0, \dots \frac{[P_2 - P_1]}{\rho} = \frac{P}{\rho}, \dots$$

representan la posición y la velocidad para el punto 1 y 2 así como la señal de presión  $P$  en la superficie del fluido en el interior del ducto. Así que la ecuación de Bernoulli queda:

$$\int_2^1 \frac{\partial U}{\partial t} ds + \frac{U^2}{2} + gX = \frac{P}{\rho} \dots \dots \dots (9)$$

La señal de presión puede aplicarse indistintamente a la superficie del fluido dentro del ducto o a la apertura inferior si consideramos que en el interior del ducto el fluido actúa como una columna rígida de fluido. Así, la ecuación anterior describe el movimiento del fluido en el interior del ducto sujeto a una señal de presión en la apertura inferior.

Para evaluar la integral de la ecuación (9) no conocemos el comportamiento de la velocidad  $U$  respecto al tiempo y a la longitud  $s$  de la línea de corriente. Pero podemos tratar de aproximar sus valores a lo largo de la línea de corriente desde el punto 2 hasta el punto 1, mediante las siguientes consideraciones:

a) Dentro del ducto, desde el punto a en la entrada hasta el punto 1 en la superficie, la velocidad  $U$  no depende de  $s$  ya que el fluido se mueve como una columna rígida.

b) En la superficie exterior la velocidad  $U$  es casi nula. A medida que  $s$  aumenta hacia el punto a, la velocidad aumenta hasta un valor que se mantendrá independiente de  $s$  a partir del punto a.

Con base en las consideraciones anteriores podemos hacer una gráfica de la derivada parcial de la velocidad respecto al tiempo, a lo largo de la línea de corriente para cualquier  $t$  como puede verse en la figura 5.

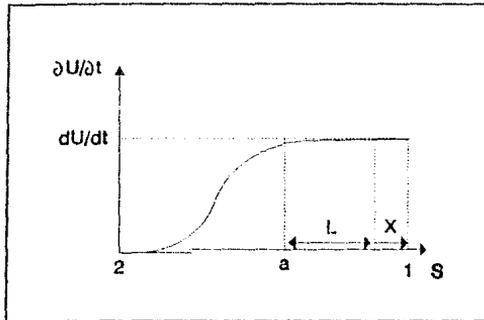


Figura 5. Variación de  $\partial U / \partial t$  respecto a  $s$ .

Así la integral puede dividirse en dos trayectorias: desde el punto 2 al punto a en la boca del ducto y desde este último hasta el punto 1:

$$\int_2^1 \frac{\partial U}{\partial t} ds = \int_2^a \frac{\partial U}{\partial t} ds + \int_a^1 \frac{\partial U}{\partial t} ds.$$

Usando la figura 5, la segunda integral puede evaluarse como:

$$\int_2^1 \frac{\partial U}{\partial t} ds = \int_2^a \frac{\partial U}{\partial t} ds + (L+X) \frac{dU}{dt}$$

Ya señalamos que no tenemos manera de saber la forma de  $\partial U/\partial t$  desde el punto 2 al punto a, sin embargo, usando nuevamente la figura 5, el área bajo la curva puede aproximarse como una fracción  $\epsilon$  de  $LdU/dt$  por lo que la integral completa queda como (Knott & Flower, 1979):

$$\epsilon L \frac{dU}{dt} + (L+X) \frac{dU}{dt}$$

La fracción  $\epsilon$  queda como un parámetro de ajuste que se determina al comparar las soluciones a la ecuación con datos experimentales. Como se verá más tarde,  $\epsilon$  puede interpretarse como un incremento en la longitud efectiva del ducto originada por efectos de borde en la desembocadura de éste.

Los resultados anteriores permiten escribir la ecuación de Bernoulli en la forma:

$$[L(1+\epsilon)+X] \frac{dU}{dt} + \frac{U^2}{2} + gX = \frac{P}{\rho} \dots \dots \dots (10)$$

La ecuación (10) relaciona la señal de presión  $P$  en la desembocadura con la respuesta oscilatoria en la superficie dentro del ducto para un fluido ideal.

Como mencionamos antes un fluido ideal no existe (Landau y Lifshitz, 1986), razón por la cual debemos modificar la ecuación (10) agregando términos adicionales para obtener la ecuación de movimiento de un fluido real. Se procederá a modificar la ecuación añadiendo términos para incorporar el efecto de la fricción y de la pérdida de energía en la formación de vórtices en la boca del ducto (ver Knott & Mackley, 1980).

Para obtener el primer término que vamos a introducir en la ecuación (10) consideremos que en un fluido se presentan procesos de rozamiento interno cuando las distintas partículas se mueven entre sí. Con base en esto podemos suponer que existe una

transferencia de momento debida a la fricción interna (Landau y Lifshitz, 1986). En el caso del fluido dentro del ducto la presencia de la fricción genera una resistencia al movimiento que podemos considerar como una pérdida de presión proporcional a la velocidad  $U$  en la forma :  $P_f = CU = CX'$ .

El siguiente término por añadir está relacionado con la formación de vórtices en la desembocadura del ducto. Para ilustrar la forma en la que se generan estos vórtices presentamos la figura 6 tomada de Knott & Mackley (1980). Esta figura fue dibujada a partir de observaciones experimentales usando métodos de visualización de flujos.

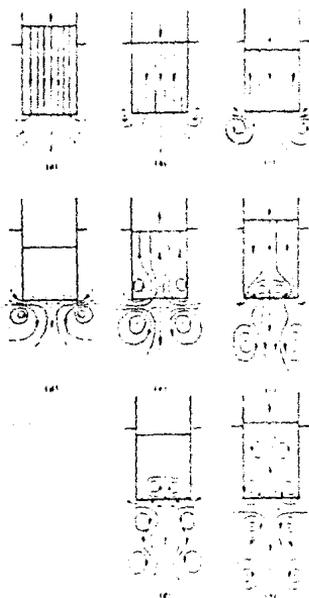


Figura 6. Formación de vórtices en la desembocadura de un ducto por el movimiento ascendente y descendente del fluido (tomado de Knott & Mackley, 1980).

Puede verse que al pasar el flujo la desembocadura del ducto, tanto en ascenso como en descenso, se producen remolinos en cada ciclo, que permanecen e interaccionan con los del siguiente ciclo para formar "calles" de anillos de vórtices que se propagan en ambas direcciones apartir de la boca a lo largo del eje vertical del ducto. Se observa que a lo largo del eje de simetría del ducto la concentración de vórtices es menos intensa.

La formación de vórtices puede relacionarse con una pérdida de presión, proporcional a la energía cinética en el flujo al cruzar la desembocadura del ducto. Así la pérdida de presión debida a los vórtices se escribe como:  $P_r = K_1 \rho (U^2/2)$ ,  $K_2 \rho (U^2/2)$ , donde  $K_1$  y  $K_2$  son fracciones de la energía cinética disponible para la formación de vórtices en la fase de subida y bajada del fluido, respectivamente (Knott & Mackley, 1980).

Cuando el fluido asciende por el ducto ( $U > 0$ ), la generación de vórtices implica una disminución de presión por lo que  $K_1 > 0$ . Al descender ( $U < 0$ ), la formación de vórtices aumenta la presión por lo que  $K_2 < 0$ . Estas consideraciones permiten escribir  $P_r = \rho K U^2/2$ , donde  $K$  toma los valores  $K_1$  y  $K_2$  antes mencionados.

Con la inclusión de los términos relacionados con la fricción y la formación de vórtices a la ecuación (10) se obtiene:

$$[L(1+e) + X] \frac{dU}{dt} + \frac{U^2}{2} + \frac{C}{\rho} U + gX + \frac{K}{2} U^2 = \frac{F}{\rho} \dots \dots (11)$$

Esta ecuación es la que se utilizó en este trabajo para describir el movimiento de la superficie en el interior del ducto cuando la boca está sujeta a una señal de presión inducida por oleaje.

CAPITULO III  
SOLUCIONES.

La presencia de los términos no lineales en la ecuación "completa" (11) dificultan considerablemente la obtención de soluciones analíticas .

Un posible camino a seguir es proponer una solución de la forma:

$$X=S_0+AS_1+A^2S_2+\dots=\sum_n A^n S_n(t),$$

donde  $S_0$  es la solución a la ecuación linealizada y  $A$  es la amplitud normalizada por la longitud del ducto, para encontrar una forma recurrente para obtener la ecuación que debe cumplir la  $k$ -ésima solución en términos de la solución anterior  $(k-1)$ . Sin embargo en este trabajo se optó por resolver la ecuación completa por métodos numéricos dejando para un trabajo futuro este método de aproximaciones sucesivas.

### 3.1. SOLUCION ANALITICA.

Se procedió a obtener la solución analítica de una versión linealizada de la ecuación (11) y determinar las condiciones bajo las cuales esta es una buena aproximación a la solución numérica de la ecuación completa.

Eliminando los términos  $X'^2$  y  $XX''$ , la ecuación linealizada es

$$L(1+e)X'' + \frac{C}{\rho}X' + gX = \frac{F}{\rho} \text{sen}(wt), \dots \dots (12)$$

donde se ha introducido una función sinusoidal de forzamiento que varía con el tiempo como aproximación para el campo de olas en la superficie exterior al ducto.

El sistema descrito por la ecuación (12) puede considerarse como un sistema oscilador masa-resorte forzado con amortiguamiento; donde la "masa" es la cantidad promedio de agua contenida en el ducto (proporcional a  $L$ ) y el "resorte" es la fuerza restauradora

debido a la aceleración gravitacional. El sistema descrito por la ecuación (12) posee una frecuencia natural de oscilación :

$$w_0 = \sqrt{\frac{g}{L(1+\epsilon)}} .$$

La ecuación lineal puede escribirse en forma alternativa:

$$X'' + \frac{C}{\rho L(1+\epsilon)} X' + \frac{g}{L(1+\epsilon)} X = \frac{P}{\rho} \text{sen}(wt) ,$$

y con la inclusión de los términos :

$$2\gamma = \frac{C}{\rho L(1+\epsilon)} , F_0 = \frac{P}{\rho L(1+\epsilon)} , w_0^2 = \frac{g}{L(1+\epsilon)} ;$$

queda :

$$X'' + 2\gamma X' + w_0^2 X = F_0 \text{sen}(wt) \dots \dots (13)$$

La ecuación anterior corresponde a la de un movimiento armónico forzado y amortiguado por fricción (Ross, 1974). Este movimiento puede considerarse como el que presenta una masa m sujeta a un resorte de constante de fuerza  $k = m(w_0)^2$ , sometido a una fuerza amortiguadora  $2\gamma X'$  y una fuerza externa  $F_0 \text{sen}(wt)$ . La aplicación de la fuerza periódica externa aumenta la energía mecánica del oscilador si actúa en el sentido del movimiento de la masa y absorbe energía del mismo si actúa en sentido opuesto al del movimiento. La amplitud de la oscilación es grande si la frecuencia de la fuerza externa  $w$  es próxima a la frecuencia natural del oscilador  $w_0$ . Para el caso que no haya amortiguamiento el tamaño de la amplitud tiende a infinito (resonancia pura) cuando  $w$  tiende a  $w_0$ .

La ecuación (13) tiene solución analítica formada por un término transitorio y un término estacionario, que se obtienen de la separación de la ecuación (13) en dos partes: ecuación homogénea y ecuación no homogénea.

La ecuación homogénea es:

$$X'' + 2\gamma X' + \omega_0^2 X = 0,$$

que tiene soluciones de tipo

$$X = e^{Mt};$$

por lo que la ecuación auxiliar es:

$$M^2 + 2\gamma M + \omega_0^2 = 0,$$

cuyas raíces son:

$$M_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, M_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2};$$

por lo que la solución general a la ecuación homogénea es

$$X = C_1 e^{M_1 t} + C_2 e^{M_2 t}.$$

Se observa que si

$$\gamma^2 - \omega_0^2 < 0, \gamma < \omega_0,$$

las raíces son complejas por lo que la solución es de naturaleza oscilatoria.

Existe una relación fundamental entre los parámetros  $\gamma$  y  $\omega_0$  que determina que tipo de movimiento presenta el sistema y que además, como se verá posteriormente, controla el tamaño de la amplificación.

Podemos definir esta relación como una razón de amortiguamiento:

$$Fr = \frac{\gamma}{\omega_0} = \gamma \sqrt{\frac{L(1+\epsilon)}{g}} = \frac{C}{2\rho\sqrt{gL(1+\epsilon)}}, \dots\dots\dots (14)$$

de tal forma que el valor de Fr es una cantidad adimensional que indica la magnitud de la fuerza de amortiguamiento y el tipo de movimiento debido a la acción de dicha fuerza sobre el sistema. Se tendrán tres posibles casos (Zill, 1988).

El primer caso cuando  $Fr = 1$ , implica que el coeficiente de

amortiguamiento es igual a la frecuencia natural de oscilación del sistema. Se dice que el sistema está críticamente amortiguado. La masa vuelve a su posición de equilibrio en el menor tiempo posible sin movimiento oscilatorio.

En el segundo caso, si  $\gamma > 1$ , el coeficiente de amortiguamiento es grande comparado con la frecuencia natural de oscilación, es decir el sistema está sobreamortiguado. La fuerza de amortiguamiento es tan grande que el sistema no oscila y solamente vuelve a su posición de equilibrio.

Finalmente, si  $\gamma < 1$  significa que el coeficiente de amortiguamiento es pequeño comparado con la frecuencia natural de oscilación así que el sistema está subamortiguado. Al ser pequeña la fuerza de amortiguamiento permite que el sistema adquiera un movimiento oscilatorio alrededor de la posición de equilibrio.

En el caso del ducto resonante el coeficiente de amortiguamiento  $\gamma$  es menor que la frecuencia natural de oscilación (Knott & Mackley, 1980) y las raíces de la ecuación auxiliar son complejas, por lo que el fluido dentro del ducto adquiere un movimiento oscilatorio. El sistema está subamortiguado y la solución a la ecuación homogénea posee un término transitorio en la solución completa. Este tiene la forma:

$$X_c = e^{-\gamma t} [C_1 \cos \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} t + C_2 \sen \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} t],$$

donde se observa que después de un tiempo largo,  $\gamma t \gg 1$ , resulta despreciable esta solución debido a que su amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo.

Una vez obtenida la solución transitoria para la parte homogénea de la ecuación (13) vamos a obtener la solución para la parte no homogénea:

$$X'' + 2\gamma X' + w_0^2 X = F_0 \sen(wt);$$

para la cual proponemos una solución particular similar a la fuerza externa de la forma:

$$X = b \operatorname{sen}(wt + \phi),$$

que al sustituir en la ecuación (13) y después del álgebra correspondiente obtenemos el valor de la amplitud  $b$ , dado por:

$$b = \frac{F_0}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\gamma^2 w^2}}.$$

Por lo que la solución particular (también se le llama solución estacionaria) puede escribirse como:

$$x_p = \frac{F_0 \operatorname{sen}(wt + \phi)}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\gamma^2 w^2}}.$$

Reuniendo las soluciones transitoria y particular e imponiendo como condiciones iniciales que la masa comienza a oscilar a partir de la posición de equilibrio y desde el reposo:  $x = 0$  y  $x' = 0$ , podemos escribir la solución total como:

$$x = \frac{p \left[ \frac{-\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\alpha} e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\sqrt{w_0^2 - \gamma^2} t + \alpha) + \operatorname{sen}(wt + \phi) \right]}{\rho \sqrt{(w^2 L(1+e) - g)^2 + \frac{C^2 w^2}{\rho^2}}}, \dots \dots (15)$$

donde:

$$\phi = \arctan \frac{2\gamma w}{(w^2 - w_0^2)}, \quad \alpha = \arctan \left[ \frac{\operatorname{sen}\phi \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}}{(\gamma \operatorname{sen}\phi + w \operatorname{cos}\phi)} \right].$$

Ya que se tiene una solución analítica para la ecuación linealizada, debemos determinar las condiciones bajo las cuales ésta es una buena aproximación a la solución de la ecuación completa (11).

La ecuación (11) puede escribirse agrupando los términos que dependen de la velocidad al cuadrado para obtener:

$$[L(1+\epsilon) + X] X'' + \frac{C}{\rho} X' + gX + \left[ \frac{1+K}{2} \right] X'^2 = \frac{P}{\rho} \text{sen}(wt) \dots \dots \dots (16)$$

De esta ecuación obtendremos las condiciones para que los términos no lineales sean despreciables y la solución (15) sea una buena aproximación para describir el desplazamiento del agua en el interior del ducto resonante.

Estas condiciones son:

- a) Que  $X \ll L(1+\epsilon)$  para que el primer término no-lineal ( $XX''$ ) se haga despreciable respecto a  $L(1+\epsilon)X''$ .
- b) Los términos no lineales relacionados con el cuadrado de la velocidad deben ser muy pequeños comparados con el término relacionado con la fricción.

Para satisfacer la condición dada en a) debemos encontrar el máximo valor de X y acotarlo con  $L(1+\epsilon)$ . El máximo de X se obtiene de la solución analítica (15) para condiciones de resonancia

$$X = \frac{P}{\rho \sqrt{[w_0^2 L(1+\epsilon) - g]^2 + \frac{C^2 w_0^2}{\rho^2}}} = \frac{P}{C w_0};$$

usando la relación (14) para Fr y la frecuencia natural de oscilación podemos escribir la cota al máximo desplazamiento como

$$X_{\max} = \frac{P}{2\rho w_0 Fr \sqrt{gL(1+\epsilon)}} = \frac{P}{2\rho g Fr} \ll L(1+\epsilon) \dots \dots \dots (17)$$

De la condición dada en b) y considerando que los valores máximo y mínimo de K son 1 o -1, según sea la dirección del movimiento del fluido, obtenemos:

$$\left[ \frac{K+1}{2} \right] X'^2 = X'^2 \ll \frac{C}{\rho} X' = 2\gamma L(1+\epsilon) X' = 2FrL(1+\epsilon) w_0 X',$$

de donde:

$$X' \ll 2\gamma L(1+\epsilon) = 2Frw_0 L(1+\epsilon).$$

Podemos obtener el valor máximo para la velocidad X' derivando

la ecuación (15) en condiciones de resonancia

$$X' = \frac{P}{2\rho Fr\sqrt{gL}(1+\epsilon)}$$

Sustituyendo en la última relación se obtiene:

$$X' = \frac{P}{2\rho Fr\sqrt{gL}(1+\epsilon)} \ll 2FrL(1+\epsilon)w_0,$$

de donde se obtiene una cota superior al tamaño de la señal de presión en la boca del ducto

$$\frac{P}{L(1+\epsilon)} \ll 4\rho gFr^2 \dots \dots \dots (18)$$

La señal de presión en la boca del ducto (P) se relaciona con la amplitud de la ola en la superficie mediante un coeficiente de atenuación. Este coeficiente proviene de la disminución de la señal de presión generada por el oleaje con la profundidad y tiene la siguiente forma (Bowden, 1983 página 82):

$$\frac{\cosh k(h-z)}{\cosh kh}$$

donde h es la profundidad del agua,  $k = 2\pi/\lambda$  y  $\lambda$  es la longitud de onda de la ola superficial.

Para un período dado,  $\lambda$  se obtiene de la relación de dispersión del oleaje para una profundidad de agua dada por (Bowden, 1983):

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = gk \tanh kh,$$

si la profundidad del agua (h) es muy grande el factor de atenuación se convierte en

$$e^{-kL(1+\epsilon)},$$

mientras que la relación de dispersión es

$$w^2 = gk.$$

En condiciones de resonancia

$$w^2 = w_0^2 = \frac{g}{L(1+\epsilon)},$$

por lo que  $K = 1/L(1+\epsilon)$  y el factor de atenuación se reduce a  $e^{-1}$ . De esta forma, la señal de presión en la boca del ducto puede escribirse como  $P = \rho g A e^{-1}$ . Sustituyendo esta  $P$  en las ecuaciones (17) y (18) se obtienen dos cotas al tamaño de la ola ( $A$ ) en la superficie para que los términos no lineales sean despreciables:

$$\frac{A}{L(1+\epsilon)} \ll 2eFr, \quad \frac{A}{L(1+\epsilon)} \ll 4eFr^2 \dots \dots \dots (19)$$

Los valores de  $Fr$  encontrados por Knott & Mackley (1980) son mucho menores a 0.5 por lo que  $4eFr^2 < 2eFr$  de tal forma que si se cumple la segunda cota dada por la ecuación (19), automáticamente se cumple la primera y la solución analítica describirá adecuadamente el comportamiento del sistema.

### 3.2. SOLUCION NUMERICA.

Hemos mencionado con anterioridad la dificultad para resolver la ecuación completa por métodos ordinarios. Así que recurrimos a un esquema numérico para obtener los valores de  $X'$  y  $X''$  que, al sustituirse en la ecuación completa, proporcionan un algoritmo para encontrar el valor de la solución  $X$ .

Si el desplazamiento de la columna de agua a tres tiempos consecutivos  $t - dt$ ,  $t$  y  $t + dt$  se define como:

$$X, X_1, X_2$$

Los valores aproximados para  $X'$  y  $X''$  pueden escribirse de la siguiente manera:

$$X' = \frac{(X_1 - X)}{dt}, X_1' = \frac{(X_2 - X_1)}{dt}, X'' = \frac{(X_1' - X')}{dt} = \frac{(X_2 - 2X_1 + X)}{dt^2}$$

Al sustituir en la ecuación completa se tiene:

$$\frac{[L(1+\epsilon) + X_1] (X_2 - 2X_1 + X)}{dt^2} + \frac{C(X_1 - X)}{\rho dt} + \frac{(1+K) (X_1 - X)^2}{2dt^2} + gX = \frac{F}{\rho} \text{sen}(wt) \dots (20)$$

De la ecuación (20) podemos despejar el valor de  $X_2$  para obtener la forma de la solución numérica:

$$X_2 = 2X_1 - X + \frac{dt^2}{[L(1+\epsilon) + X_1]} \left[ \frac{F}{\rho} \text{sen}(wt) - \frac{C(X_1 - X)}{\rho dt} - \frac{(1+K) (X_1 - X)^2}{2dt^2} - gX \right] \dots (21)$$

Esta última es una relación recurrente para el cálculo numérico de una nueva posición de la columna en términos de las posiciones a dos tiempos anteriores y de la función de forzamiento.

La relación obtenida no es exacta pues incluye errores, por ejemplo de redondeo y truncamiento relacionados con la capacidad de almacenamiento de la computadora. En nuestro caso, para la ecuación del ducto, si el error se propaga e incrementa con el tiempo (a cada paso de la integración), significa que el esquema numérico utilizado es inestable; si el error decae al transcurrir el tiempo, el esquema es estable (Ramming & Kowalik, 1980).

Para determinar la estabilidad del esquema numérico utilizado (21) se realizó una comparación con datos experimentales.

#### DESCRIPCION DEL PROGRAMA

En el anexo 1 se presenta un listado del programa utilizado en donde se incluye la solución analítica para obtener una comparación gráfica entre ésta y la numérica. Las unidades empleadas se expresan en el sistema MKS.

A cada paso de la integración se determina el signo de la velocidad de la columna de agua para aplicar el algoritmo adecuado y determinar así el desplazamiento de la columna al nuevo tiempo  $t + dt$ . Posteriormente se recorren los tiempos un  $dt$  para realizar un

nuevo cálculo al siguiente tiempo. Las condiciones iniciales en la integración son  $x=0$  y  $x'=0$  para poder comparar directamente con la solución analítica en la gráfica que se genera como salida del programa. Este programa fue escrito en Turbo Pascal.

## CAPITULO IV

### RESULTADOS.

Se llevó a cabo una comparación entre la solución numérica y la solución analítica mediante las gráficas generadas por el programa (figuras 7, 8, y 9). En ellas pueden verse graficadas el tiempo (eje horizontal) y la altura de la ola (eje vertical) en la superficie exterior al ducto (línea continua) y las respuestas numérica y analítica de la superficie interior al ducto (líneas punteadas). También se indican los valores utilizados para algunos parámetros del modelo. El eje vertical se encuentra normalizado con la longitud del ducto. En las tres gráficas el valor empleado para la razón de amortiguamiento es  $Fr=0.05$ , donde  $Fr$  es una cantidad adimensional relacionada con la presencia de la fricción en el movimiento del fluido.

En la figura 7, para una amplitud normalizada  $An = A/L = 0.0500$ , se observa que en los primeros ciclos la respuesta muestra los efectos del término transitorio. Posteriormente la solución se estabiliza al minimizarse este último. Al principio las dos soluciones (analítica y numérica) son casi idénticas, sin embargo después del tercer ciclo la solución analítica aumenta en relación a la solución numérica, esto se debe a que la solución analítica no incluye los términos no-líneales. Esta diferencia de tamaños permite distinguir las dos soluciones en la gráfica.

En la figura 8, para una amplitud de forzamiento menor  $An = 0.0250$ , se observa que a partir del cuarto ciclo las dos soluciones se separan aunque la diferencia es menor que la obtenida en la figura 7.

En la figura 9, para una amplitud normalizada  $An = 0.0022$ , las dos soluciones tienen una buena coincidencia.

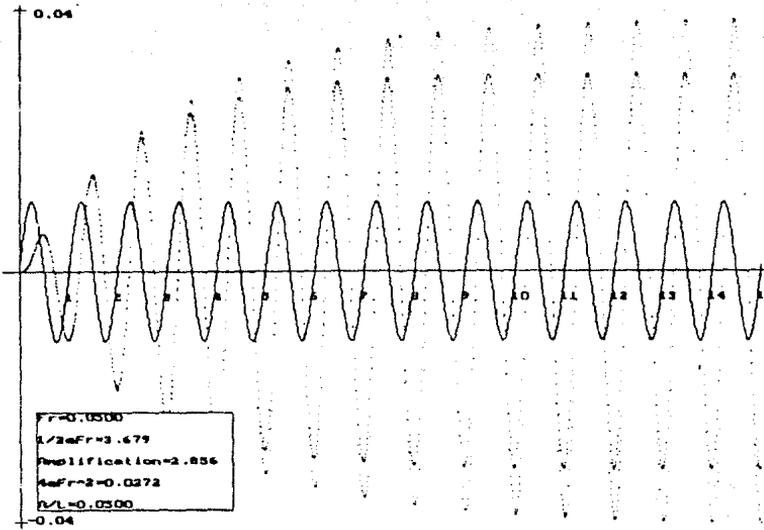


FIGURA 7

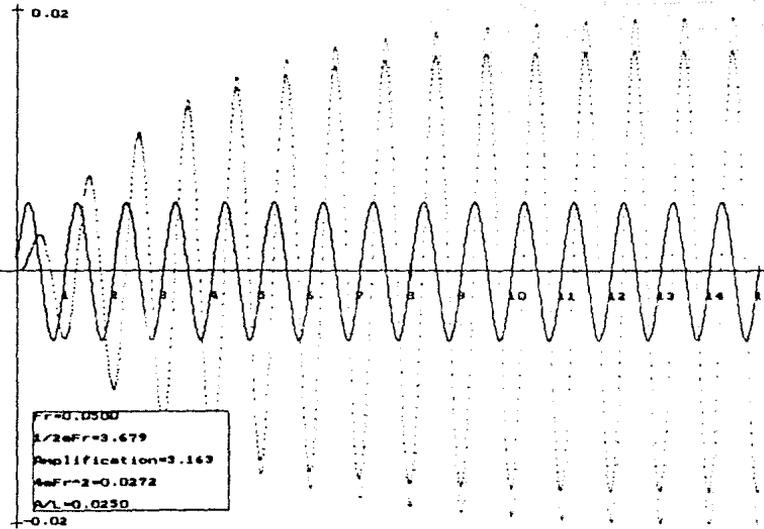


FIGURA 8

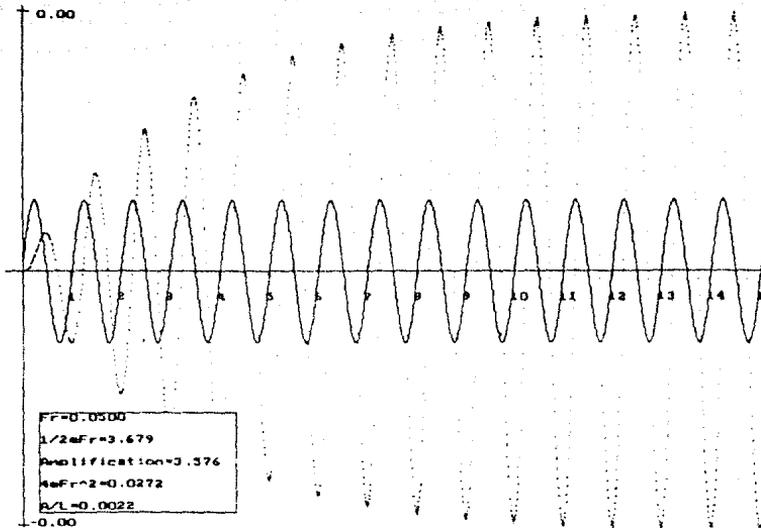


FIGURA 9

Figura 7, 8 y 9. Comparación gráfica entre la solución analítica y la solución numérica (líneas punteadas) a la ecuación para un ducto resonante forzado por una ola incidente (línea firme). El eje vertical ha sido normalizado con la longitud del ducto resonante.

Por otra parte, usando la relación (19) para determinar la cota superior para A de tal forma que la solución analítica a la ecuación linealizada se parezca a la solución (numérica) de la ecuación "completa", se tiene:

$$\frac{A}{L(1+e)} \ll 4eFr^2 = 0.0272$$

De las tres integraciones mostradas en las figuras 7, 8 y 9 la única que cumple con esta cota es la figura 9 ( $A_n = 0.0022$ ) en la que en efecto la solución numérica y la analítica son muy parecidas lo que valida la relación (19).

El desacuerdo entre las soluciones numérica y analítica en las

gráficas 7 y 8 consiste en que la numérica muestra desplazamientos menores sobre todo en las crestas y en los valles. Este desacuerdo proviene de la acción de los términos no-lineales que representan una pérdida de energía en la generación de vórtices ( $K X'^2/2$ ) y en el cambio de masa del oscilador armónico ( $X'^2/2$  y  $XX''$ ).

Se realizó una comparación entre las ampliificaciones obtenidas con el modelo numérico y datos experimentales obtenidos en el estanque de olas del Instituto de Ingeniería, UNAM (Czitron et al., 1993). En estos experimentos (ver figura 10) se introduce un ducto en un campo de olas de período  $T$  y amplitud  $A$  dados y se midieron las crestas y los valles de la oscilación inducida dentro del ducto con una escala graduada adherida a éste. Con los datos se calculó la ampliificación de la ola para diferentes longitudes sumergidas del ducto en varios campos de oleaje.

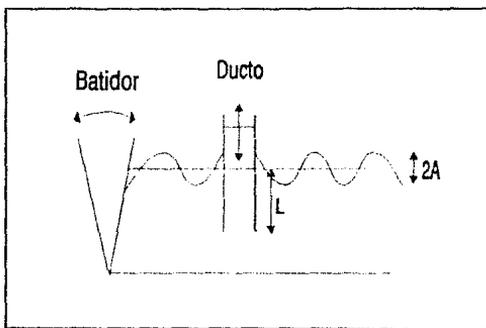
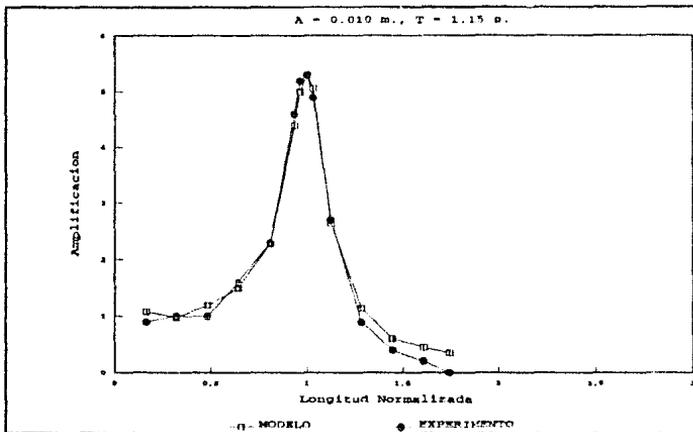
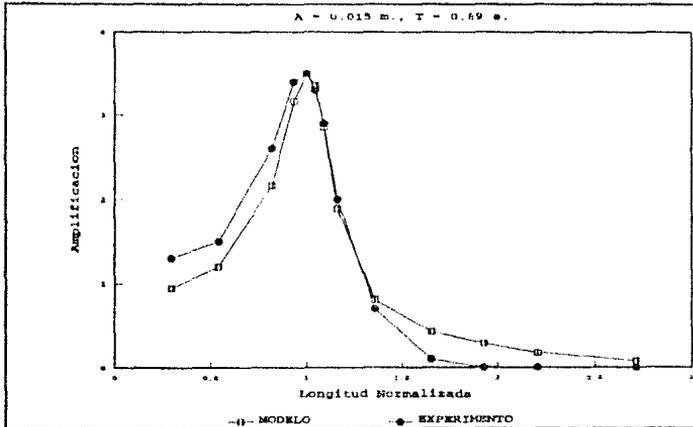


Figura 10. Diagrama esquemático del experimento de medición de ampliificación de oleaje con ductos resonantes.

En las figuras 11 y 12 pueden verse gráficas de las ampliificaciones observadas contra la longitud del ducto. Esta longitud está normalizada respecto a la longitud resonante para ese período, de tal forma que la máxima ampliificación se localiza en el punto 1 (sobre el eje  $X$ ). Las dos olas incidentes utilizadas tienen

los siguientes datos :  $A=0.015\text{m}$ ,  $T=0.89\text{s}$ ,  $Fr=0.003$  y  $A=0.010\text{m}$ ,  $T=1.15\text{s}$ ,  $Fr=0.007$  respectivamente.



Figuras 11 y 12. Variación de la amplificación con la longitud normalizada del ducto para dos periodos y amplitudes de ola (11:  $T=0.89\text{s}$ ,  $A=0.015\text{m}$ ; 12:  $T=1.15\text{s}$ ,  $A=0.01\text{m}$ ) para datos experimentales y modelados.

La oscilación dentro del ducto es igual a la exterior (Amplificación = 1) para longitudes sumergidas pequeñas. La amplificación aumenta para longitudes sumergidas mayores hasta un máximo cuando la frecuencia natural de oscilación del ducto corresponde a la frecuencia del oleaje incidente. Posteriormente la amplificación se reduce hasta que las oscilaciones dentro del ducto desaparecen.

En la figura 11 y 12 también pueden verse las amplificaciones predichas por el modelo numérico para  $K1 = 0.85$  y  $K2 = -0.85$ . El parámetro de ajuste  $\epsilon$  para cada experimento ( $\epsilon = 0.0875$  y  $\epsilon = 0.0570$  para las figuras 11 y 12 respectivamente) se calculó usando la relación

$$\epsilon = \frac{g}{L} \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 - 1,$$

que permite la coincidencia de la amplificación máxima en las observaciones y el modelo para la misma longitud sumergida.

Como se ha mencionado anteriormente  $\epsilon$  indica un incremento en la longitud efectiva del ducto debido a los efectos de borde en la boca. El coeficiente de amortiguación  $Fr$  ( $Fr=0.003$  y  $Fr=0.007$  en cada caso) se ajustó para que los máximos del modelo coincidieran con los máximos del experimento.

Las figuras 11 y 12 indican que con los ajustes realizados el modelo numérico reproduce con buen éxito las observaciones. El modelo entonces puede usarse con confianza en la predicción del desempeño de los ductos resonantes.

Otra comprobación del desempeño adecuado del modelo se llevó a cabo usando datos publicados por Knott & Mackley (1980) y corriendo el modelo para circunstancias similares. En las figuras 13 y 14 pueden verse gráficas contra el tiempo de las oscilaciones observadas y modeladas para un ducto semi-sumergido en un estanque sin oleaje. El agua en el ducto se elevó hasta una altura de 6 cm y se dejó ir para oscilar libremente. En el primer caso (figura 13) un acampanamiento en la boca del ducto ( $K1 = 0$ ,  $K2 = 0$ ) elimina la

formación de anillos y las oscilaciones disminuyen su amplitud más lentamente. En el segundo caso (figura 14) las pérdidas de energía por generación de anillos de vórtices ( $K1 = 0.9$  y  $K2 = 0.96$ ) provocan una amortiguación rápida de las oscilaciones. En ambos casos el modelo numérico simuló las observaciones adecuadamente.

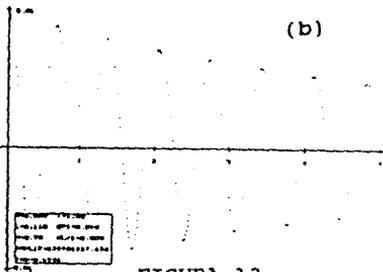
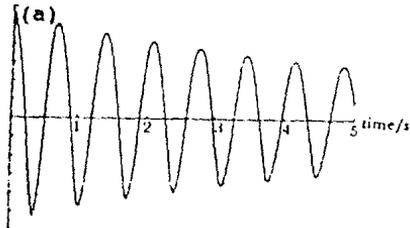


FIGURA 13

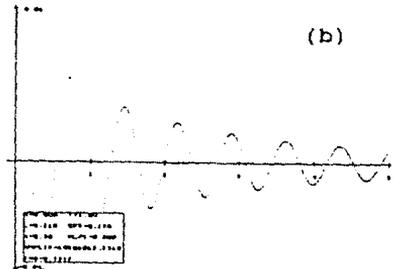
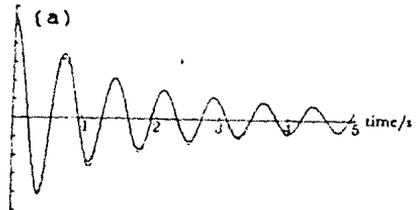


FIGURA 14

Figuras 13 y 14. a) Oscilaciones libres en un ducto con un desplazamiento inicial de 0.06 m en la superficie interior b) Respuesta numérica bajo las mismas condiciones. En 13:  $L=0.11\text{m}$ ,  $\epsilon=0.09$ ,  $K1=K2=0$  y  $Fr=0.011$ . En 14:  $L=0.11\text{m}$ ,  $\epsilon=0.19$ ,  $K1=0.9$ ,  $K2=0.96$  y  $Fr=0.025$ .

Una vez satisfechos con el comportamiento realista de las soluciones numéricas, se procedió a estudiar la amplificación en condiciones de resonancia usando diferentes amplitudes de la ola

incidente para varias longitudes de ducto. Las integraciones se realizaron durante suficientes ciclos para que decayeran los efectos transitorios.

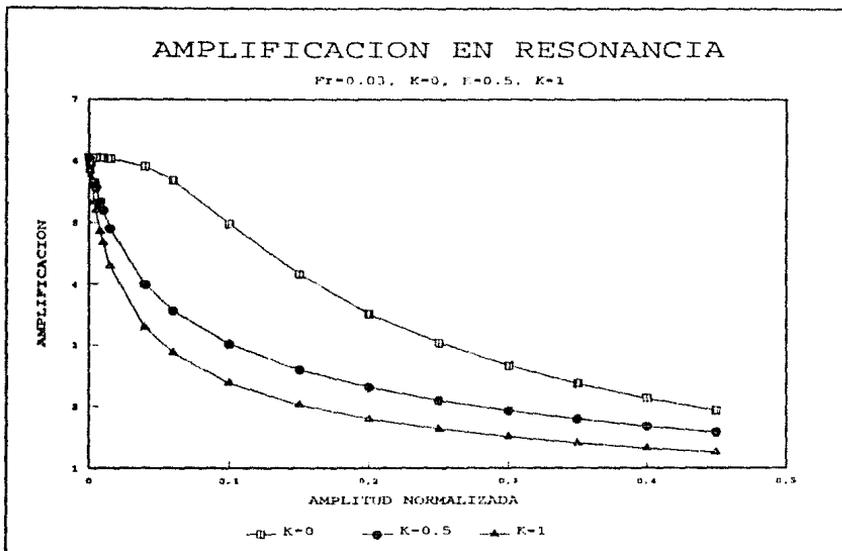


Figura 15. Amplificaciones modeladas en resonancia contra la amplitud de la ola incidente normalizada con la longitud del ducto. Se realizaron corridas para  $Fr=0.03$ ,  $K=0$ ,  $K=0.5$ , y  $K=1$ . Para  $L=10, 7, 5, 3$  y  $2$  m.

En la figura 15 pueden verse las amplificaciones en resonancia graficadas contra la amplitud de la ola incidente normalizada con la longitud del ducto de la corrida en cuestión ( $A_n = A/L(1+\epsilon)$ ). Se utilizaron tres ductos de diferentes formas de desembocadura: acampanada ( $K=0$ ), semi-acampanada ( $K=0.5$ ) y recta ( $K=1$ ). Se consideró un factor de amortiguamiento  $Fr = 0.03$  para todos los casos.

En el primer caso para  $K = 0$  (para un ducto con la boca acampanada para evitar pérdidas por formación de vórtices), los datos obtenidos mediante varias ejecuciones del programa cayeron todos sobre la misma curva, es decir la curva representa una familia de amplificaciones que proporciona información general sobre el movimiento del fluido en el ducto. A medida que  $A_n$  disminuye, el factor de amplificación aumenta hasta llegar a un máximo (6.0) para  $A_n$  pequeña. Puede considerarse que la máxima amplificación se mantiene constante para valores de  $A_n$  dentro del intervalo de 0 a 0.02.

Por otra parte, podemos calcular el valor de la máxima amplificación de la solución analítica usando la amplitud  $b$  de la solución particular dividida por la amplitud  $A$  de la ola externa. Se tiene:

$$b = \frac{P/\rho}{\sqrt{[w^2 L(1+\epsilon) - g]^2 + \frac{C^2 w^4}{\rho^2}}}$$

Sustituyendo  $P = \rho g A / \epsilon$  en condiciones de resonancia

$$b = \frac{g A \epsilon^{-1}}{\frac{C}{\rho} \sqrt{\frac{g}{L(1+\epsilon)}}}$$

y como

$$\frac{C}{\rho} = 2Fr \sqrt{gL(1+\epsilon)}$$

la amplificación de la solución analítica es:

$$Amplif = \frac{b}{A} = \frac{1}{2\epsilon Fr} \dots \dots \dots (22)$$

Sustituyendo  $Fr = 0.03$  se obtiene una amplificación de 6.13, consistente con el máximo en la figura 15, que se obtuvo por métodos numéricos.

Esto significa que la amplificación de un ducto resonante

tiene una cota superior, dada por la ecuación (22), que es inversamente proporcional al coeficiente de amortiguamiento  $Fr$ .

En el segundo caso para  $K = 0.5$ , o sea incluyendo el 50 por ciento del efecto de los términos no-lineales asociados a la formación de vórtices, se observa que la amplificación decrece rápidamente a medida que  $An$  aumenta, por lo que no hay intervalo dentro del cual la amplificación se mantenga constante.

La disminución en la amplificación a medida que  $An$  aumenta en la figura 15 es entonces producto del incremento de la influencia de los términos no-lineales a medida que aumenta el forzamiento externo. En la misma figura se muestra una familia de amplificaciones para  $K = 1$  (tercer caso), o sea incluyendo el efecto máximo de los términos no-lineales asociados a la formación de vórtices. Se observa un descenso mucho más dramático en la amplificación a medida que aumenta el valor de la amplitud normalizada  $An$ , lo que pone de relieve el efecto importante de la formación de vórtices en la desembocadura del ducto. Entonces la cota superior al tamaño de la ola externa ( $An$ ) para que los términos no-lineales sean despreciables (ecuación 19) se convierte también en la condición para que se obtengan las máximas amplificaciones del oleaje, en resonancia. En el caso de la figura 15, para olas incidentes de tamaño  $An \ll 4eFr^2 = 0.0097$ , el resultado es consistente con las máximas amplificaciones. Cuando la desembocadura del ducto tiene forma de campana ( $K = 0$ ), las máximas amplificaciones se mantienen para  $An$  sustancialmente mayor a esta cota.

En vista de todo lo anterior puede considerarse que la figura 15 representa una caracterización de las soluciones a la ecuación de un ducto resonante en un campo de olas.

## CAPITULO V

### DISCUSION.

El tipo de olas que es posible localizar en el medio marino está determinado por la cantidad adimensional conocida como "inclinación" de la ola (Kinsman, 1965). Esta inclinación se define como el cociente del doble de la amplitud y la longitud de onda de la ola:  $I_n = 2A/\lambda$ . Los valores de la inclinación para las olas observadas en el mar están situados en el intervalo 0.008 a 0.099. Ahora bien, la longitud de onda se relaciona con el periodo de la ola para aguas profundas mediante  $\lambda = gT^2/2\pi$  (Bowden, 1964), mientras que para un ducto en resonancia  $\omega_0 = \sqrt{g/L} = 2\pi/T$ , por lo que para condiciones de resonancia, la longitud del ducto y la longitud de la onda se relacionan mediante  $\lambda = 2\pi L$ . Así,  $I_n = 2A/\lambda = A/\pi L$ ; por lo que la amplitud normalizada  $A_n = A/L$  se encuentra en el intervalo 0.025 a 0.314; para las olas observadas en el océano. Refiriéndonos a la figura 15, para valores de  $A_n$  próximos al extremo derecho del intervalo, los términos no-lineales llegan a tener una marcada influencia en las amplificaciones posibles. Asimismo, en esa zona del intervalo de  $A_n$ , la formación de vórtices en la boca del ducto exacerba drásticamente la disminución de la amplificación.

Aunque las máximas inclinaciones en el oleaje marino corresponden a olas de periodo corto (2 a 5 segundos) que tienen poca persistencia y además una proporción de energía relativamente pequeña (Kinsman, 1965), no debemos despreciar del todo estas olas, pues para valores de  $A_n$  cercanos a 0.3 la amplificación obtenida es casi tres veces el tamaño de la ola incidente, por lo que un sistema de bombeo con estas olas funcionaría bien, siempre y cuando la desembocadura del ducto sea acampanada.

Por otra parte, considerando que la mayor energía y persistencia se encuentra en el oleaje llamado "de fondo" con periodos entre 8 y 12 segundos (McLellan, 1975), para el que la inclinación observada es menor (0.008 a 0.02), resultando que:

0.027 < An < 0.06. Refiriéndonos nuevamente a la figura 15, para este intervalo alrededor de An podemos ver que se generan las máximas amplificaciones sobre todo para ductos con la boca acampanada (K = 0); por lo que un sistema de bombeo diseñado para los períodos entre 8 y 12 segundos (16m < L < 36m) funcionaría óptimamente.

Al calcular los valores de L (16m < L < 36m) para captar el oleaje de mayor energía no hemos considerado que la señal de presión es variable (Psen(wt)), y que al tomar los valores comprendidos entre P y -P, produce un movimiento no uniforme en el interior del ducto. Este movimiento no uniforme es más notorio si la longitud de onda λ de la señal de presión es menor que el radio del ducto, pues si el tamaño del intervalo es igual o mayor que la longitud de onda λ, la señal de presión realizará al menos una oscilación completa, dentro de ese intervalo. Así que debemos imponer condiciones al tamaño del radio del ducto en términos de λ, para que la señal de presión pueda considerarse uniforme.

Consideremos que la señal de presión tiene la forma Psen(kx), donde  $k=2\pi/\lambda$  es la constante de propagación o número de onda (Beiser, 1986), y que el tamaño del intervalo es Δx=2r, donde 2r es el diámetro de la desembocadura del ducto. Es necesario que la variación de la presión sea pequeña dentro del intervalo Δx=2r, para que el movimiento en el interior del ducto pueda considerarse uniforme.

El incremento de una función f puede calcularse como (Rey, 1960): Δf = f'(x)Δx. Si Δx es pequeño se tiene Δf = df = f'(x) Δx; es decir el incremento Δf de la función es igual a la diferencial df de la función, suponiendo que la función es lineal en Δx.

Considerando f = Psen(kx), el porcentaje de variación de la señal de presión puede calcularse como:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{df}{f} = \frac{f'(x_0) \Delta x}{f} = \frac{kP \cos(kx_0) \Delta x}{P \sin(kx)} = \frac{k \Delta x}{\sin(kx)} = \frac{2rk}{\sin(kx)}$$

si queremos que el porcentaje de variación de la señal de presión sea pequeño, por ejemplo menor que 1%, se tiene

$$\frac{2kr}{\text{sen}(kx)} < \frac{1}{100},$$

de donde

$$2kr < \frac{\text{sen}(kx)}{100} \leq \frac{\text{sen}(kx)}{100} \leq \frac{1}{100}.$$

Recordando que  $k=2\pi/\lambda$  y  $\lambda=2\pi L$ , la ecuación anterior se transforma en

$$2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)r = \frac{4\pi r}{\lambda} < \frac{1}{100},$$

de donde se obtiene

$$r < \frac{\lambda}{400\pi} = \frac{2\pi L}{400\pi} = \frac{L}{200} = \frac{gT^2}{800\pi^2} \dots \dots \dots (23)$$

La ecuación (23) limita el tamaño del radio del ducto en términos de la longitud de onda o el período de la señal de presión, o la longitud del ducto; para que el movimiento en el interior del ducto pueda considerarse uniforme. Por ejemplo para una ola de período  $T=10s$  el radio del ducto debe ser  $r=12.4cm$ , para que la señal de presión tenga una variación del 1% como máximo.

## CAPITULO VI CONCLUSIONES.

Se obtuvo una solución analítica para la ecuación linealizada de un ducto resonante en un campo de olas.

Se confirmó el correcto desempeño del modelo numérico para la ecuación completa al compararse con la solución analítica y con datos experimentales de distintas fuentes.

Se obtuvieron dos parámetros adimensionales que rigen el comportamiento del sistema:

a) Fr: razón de amortiguamiento definida como el cociente del coeficiente de amortiguamiento ( $\gamma$ ) y la frecuencia natural de oscilación.

b) An: amplitud normalizada definida como el tamaño de la ola incidente dividida por la longitud del ducto.

Se encontró una relación para determinar el tamaño de la máxima amplificación posible en un ducto en términos de la razón de amortiguamiento:  $1/2eFr$ .

Se acotó el tamaño del radio del ducto para que la señal de presión sea uniforme:  $r < L/200$ .

Se determinó una cota para An en términos de Fr ( $An < 4eFr^2$ ) dentro de la cual los términos no-lineales no provocan una disminución significativa del tamaño de la amplificación.

Estas cotas ayudan a interpretar la gráfica en la Figura 15 como parte de una familia de curvas de forma similar, en las que el máximo está definido por  $1/2eFr$  y el ancho de este máximo por  $4eFr^2$ . Sin embargo cuando el coeficiente K es igual a cero, en ausencia de vórtices en la boca del ducto, las máximas amplificaciones en resonancia persisten más allá de esta cota.

Un sistema de bombeo diseñado para aprovechar el oleaje de mayor energía en el océano ( $8 \text{ s} < T < 12 \text{ s}$ ) funcionaría óptimamente.

El desempeño del ducto resonante depende críticamente del coeficiente K (relacionado con la geometría de la desembocadura del

ducto,  $0 \leq K \leq 1$ ) y del coeficiente de amortiguamiento  $Fr$  ( $Fr < 0.5$ ) por lo que es importante minimizar estos parámetros en la medida de lo posible en el diseño y construcción.

Como resultado de este trabajo, se identifican algunas líneas de investigación a seguir en el futuro:

- 1) Estudiar teórica y experimentalmente el parámetro  $Fr$  para determinar su valor real y su comportamiento bajo diferentes condiciones (distintos radios y rugosidades del ducto, fluidos de distinta viscosidad, etc).
- 2) Estudiar teórica y experimentalmente el acampanamiento de la boca del ducto para minimizar las pérdidas por formación de vórtices.
- 3) Analizar el comportamiento del sistema en condiciones de bombeo.

ANEXO I.

PROGRAMA DUCTOS.

{Modela los ductos resonantes con las ecuaciones de Knott & Flower}  
USES

Crt, Graph;

{Longitudes de tubo y periodos naturales de oscilacion.

$T=2*\text{Pi}*\text{SQR}(L/g)$

L=0.2, T=0.89714	L=1, T=2.0061	L=6, T=4.9138	L=20, T=8.9714
L=0.3, T=1.09876	L=2, T=2.8370	L=7, T=5.3076	L=30,
T=10.9876			
L=0.4, T=1.26875	L=3, T=3.4746	L=8, T=5.6740	L=50,
T=14.1850			
L=0.6, T=1.55389	L=4, T=4.0121	L=9, T=6.0182	L=70,
T=16.7840			
L=0.8, T=1.79428	L=5, T=4.4857	L=10, T=6.3437	L=100,
T=20.0607			

la long. de onda de una ola profunda es  $L*2*\text{Pi}$

CONST

A=0.01; T=0.94; EPS=0.09; L=0.2\*(1+EPS); Fr=0.05;  
H=0.5; D=0.026; PROF=1.7; K1=0.5; K2=0.5;  
AT=T/100; Pi=3.141592; w=2\*Pi/T; g=9.81;  
CICLOS=15; RHO=1026; R=D/2; {TRANSIT=2/(T\*Fr)\*SQRT(L/g);}  
{colores a usar}  
CPANT=3; CEJES=4; CFORZ=blue; CRES=blue; CANAL=magenta;  
CFVentana=1; CLVentana=1;  
Dir='c:\tp\bgi'; {directorio archivos .TPU, .BGI}

VAR

X, X1, XMAX, XMIN, X2MAX, X2MIN, TOTAL, ABAJO, CDIVRHO: REAL;  
I, J, MaxX, MaxY: INTEGER; {contadores y máximo no. de pixels}  
X2: ARRAY [1..TRUNC(CICLOS\*T/AT)] OF REAL;  
BOMBEO: ARRAY [1..CICLOS] OF REAL;  
Errorcod, Dispositivo, Modo: Integer;

{Bajada normal}

FUNCTION F1X2 : REAL;  
BEGIN

F1X2:=2\*X1-X+AT\*AT\*(g\*(ABAJO\*SIN(w\*I\*AT)-X1)-(1-K2)\*(X1-X)\*(X1-X)  
/(2\*AT\*AT)-CDIVRHO\*(X1-X)/AT)/(X1+L);  
END;

{Subida normal}

```
FUNCTION F2X2 : REAL;  
BEGIN
```

```
F2X2:=2*X1-X+AT*AT*(g*(ABAJO*SIN(w*I*AT)-X1)-(1+K1)*(X1-X)*(X1-X)  
/(2*AT*AT)-CDIVRHO*(X1-X)/AT)/(X1+L);  
END;
```

{Subida arriba del colector}

```
FUNCTION F3X2 : REAL;  
BEGIN
```

```
F3X2:=2*X1-X+AT*AT*(g*(ABAJO*SIN(w*I*AT)-H)-(1+K1)*(X1-X)*(X1-X)  
/(2*AT*AT)-CDIVRHO*(X1-X)/AT)/(H+L);  
END;
```

{Subida con masa 0 desde -L}

```
FUNCTION F4X2 : REAL;  
BEGIN
```

```
F4X2:=X1+AT*EXP(0.5*LN(g*(L+ABAJO*SIN(w*I*AT))));  
END;
```

{Se calcula la solución analítica}

```
FUNCTION ANALITICA : REAL;  
VAR PHI,ALPHA: REAL;  
BEGIN
```

```
IF g/L-w*w=0 THEN PHI:= Pi/2 ELSE PHI:=  
ARCTAN(-CDIVRHO*w/(L*(g/L-w*w)));  
ARCTAN(SIN(PHI)*SQRT(g/L-SQR(CDIVRHO/(2*L)))/(COS(PHI)*w+  
SIN(PHI)*CDIVRHO/(2*L)));  
g*ABAJO*(SIN(w*I*AT+PHI)-SIN(PHI)*EXP(-(CDIVRHO/(2*L)*I*AT))  
*SIN(SQRT(g/L-SQR(CDIVRHO/(2*L)))*I*AT+ALPHA)/SIN(ALPHA))/  
(SQRT(SQR(g-w*w*L)+SQR(w*CDIVRHO)));  
END;
```

```
FUNCTION COSH(A1:REAL):REAL;  
BEGIN
```

```
COSH:=(EXP(A1)+EXP(-A1))/2;  
END;
```

```
FUNCTION TANH(A1:REAL):REAL;  
BEGIN
```

```
TANH:=(EXP(A1)-EXP(-A1))/(EXP(A1)+EXP(-A1));  
END;
```

```

FUNCTION ATENUACION(A1:REAL):REAL; {Eje z+ hacia arriba: A1 es
negativa}
VAR LAMDA: REAL;
BEGIN
    {Se calcula la long. de onda en aguas profundas}

LAMDA:= g*T*T/(2*Pi);

    {Reducimos lamda iterativamente hasta que su periodo en
    aguas someras no es mayor que el de aguas profundas}

WHILE LAMDA/TANH(2*Pi*PROF/LAMDA) > g*T*T/(2*Pi) DO
LAMDA:=LAMDA*0.99;

    {Se calcula el factor de atenuacion}

ATENUACION:= COSH((PROF+A1)*2*Pi/LAMDA)/COSH(PROF*2*Pi/LAMDA);
END;

FUNCTION EQUISG(A1:REAL) : INTEGER;
BEGIN
    EQUISG:=TRUNC(A1*(MaxX-20)/CICLOS{ + 1});
END;

FUNCTION YEG(A1:REAL) : INTEGER;
BEGIN
    YEG:=TRUNC(MaxY-(MaxY-10)*(A1-XMIN)/(XMAX-XMIN));
END;

PROCEDURE F5X2; {Procedimiento para calcular la nueva X2}
BEGIN

{Cuando X1=X, comparar con la ola afuera, decidir si sube o baja}

IF (X1 = X) AND (X1 > A*SIN(w*I*AT)) THEN X:=X+0.00000000001;
IF (X1 = X) AND (X1 <=A*SIN(w*I*AT)) THEN X:=X-0.00000000001;

{De bajada}

IF X1 < X THEN
    BEGIN
        X2[I]:=F1X2;
        IF X1 <= -L THEN
            BEGIN
                SOUND(3000); X1:=-L; X2[I]:=F4X2; NOSOUND;
            END;
        IF X > H THEN
            BEGIN
                BOMBEO[1+TRUNC(I*AT/T)]:=X-H;    X1:=H-(X-X1);    X:=H;
            X2[I]:=F1X2;
            END;
        END;
    END;

```

{De subida}

```
IF X1 > X THEN
  BEGIN
    X2[I]:=F2X2;
    IF X1 > H THEN X2[I]:=F3X2;
  END;
END;

PROCEDURE GRAFICAR2;
VAR CAD: string; {Para poner texto en la gráfica}
    PIx, PIy, PFX, PFy,
    BIX, BIY, BFX, BFy: Integer; {Para unir puntos de la gráfica}
    Ventana: ViewPortType;
    L2: Real;
    FRcad, Tcad, Lcad, EPScad, Hcad, MLScad, AMPLIF1cad, LIMcad,
    NORMcad,
    AMPLIF1cad, TNOcad: String; {Datos de la Ventana}
    RENGLON1, RENGLON2, RENGLON3, RENGLON4, RENGLON5: String;

PROCEDURE INICIALIZAR; {Inicializa modo de gráfica}

BEGIN {inicializar}
  Dispositivo:= Detect;
  InitGraph(Dispositivo,Modo,Dir);
  Errorcod:=GraphResult;
  If Errorcod <> grOK then
    Begin {if}
      writeln('Error de gráfica:',GraphErrorMsg(Errorcod));
      Halt;
    End; {if}
END; {inicializar}

BEGIN {GRAFICAR2}

  {Inicializa modo de gráfica}
  INICIALIZAR;

  {Obtiene máximo no. de pixels}
  MaxX:=GetMaxX;
  MaxY:=GetMaxY;

  {Colores pantalla y ejes}
  SetBkColor(CPANT);
  SetPalette(15,CEJES);

  {Pinta Eje Y}
  Line(15,0,15,MaxY); {Pinta Eje}
  Line(10,5,20,5); {Pinta división de Ymax}
  Line(10,MaxY-5,20,Maxy-5); {Pinta división de Ymin}
  str(xmax:5:2,cad);
  OutTextXY(20,5,cad); {Pone marca max}
```

```

str(xmin:5:2,cad);
OutTextXY(20,MaxY-10,cad); {Pone marca min}

{Pinta Eje X}
Line(0,YEG(0),MaxX,YEG(0)); {Pinta Eje}
{Pinta las divisiones del Eje}
For i:=1 to CICLOS do
Begin {for}
    Line(EQUISG(i)+15,YEG(0)-5,EQUISG(i)+15,YEG(0)+5);
    str(i,cad);
    OutTextXY(EQUISG(i)+12,YEG(0)+20,cad);
End; {for}

{Grafica forzamiento y respuesta contra el tiempo}
PFx:=EQUISG(0)+15; PFy:=YEG(0);

For I:=1 to TRUNC(CICLOS*T/AT)-1 do
Begin {for}
    PIX:=PFx; PIY:=PFy;
    {PutPixel(EQUISG(I*AT/T)+15,YEG(A*SIN(w*I*AT)),CFORZ);}
    PFx:=EQUISG(I*AT/T)+15; PFy:=YEG(A*SIN(w*I*AT));
    Setcolor(CFORZ);
    Line(PIX,PIY,PFx,PFy);
    PutPixel(EQUISG(I*AT/T)+15,YEG(X2[I]),CRESP);
    PutPixel(EQUISG(I*AT/T)+15,YEG(ANALITICA),CANAL);
End; {for}

        {Crea ventana con datos de la gráfica}
With Ventana do
Begin {With}
    X1:= 30; X2:=Round(MaxX*0.3); {Tamaño de la ventana}
    Y1:=round(MaxY*0.78); Y2:= MaxY-17;
    Rectangle(X1-1,Y1-1,X2+1,Y2+1);
    SetViewPort(X1,Y1,X2,Y2,ClipOn);
End; {With}
SetColor(CLVentana);
ClearViewPort; {Quita todo lo que hay dentro de la Ventana}
L2:=L/(1+EPS);
    Str ( Fr : 6 : 4 , FRcad ) ;    Str ( T : 4 : 2 , Tcad ) ;
Str(1/(2*2.7183*Fr):5:3,AMPLIFcad);
    Str ( EPS : 4 : 3 , EpsCad ) ;    Str ( A / L2 : 6 : 4 , NORMcad ) ;
Str(4*2.7183*Fr*Fr:6:4,LIMcad);
    Str ( ( X 2 M A X / A ) : 5 : 3 , A M P L I F c a d ) ;
Str((2*Pi*SQRT(L/g)):6:4,TNOCad);
Str(L2:5:3,Lcad);
RENGLON1:='Fr='+FRcad+ ' L='+Lcad;
RENGLON2:='1/2eFr='+AMPLIFcad;
RENGLON3:='Amplificacion='+AMPLIFcad;
RENGLON4:='4eFr^2=' +LIMcad;
RENGLON5:='A/L='+NORMcad;
OutText(RENGLON1);

```

```
OutTextXY(0,20,REGLON2);
OutTextXY(0,40,REGLON3);
OutTextXY(0,60,REGLON4);
OutTextXY(0,80,REGLON5);
```

```
END; {GRAFICAR2}
```

```
{Inicia el programa}
```

```
BEGIN
```

```
ClrScr;
```

```
{Condiciones iniciales}
```

```
X:=0.0; X1:=0.0; XMAX:=A; XMIN:=-A;
X2MAX:=0.; X2MIN:=0.0;
ABAJO:= A*ATENUACION(-L); CDIVRHO:= Fr*2*SQRT(g*L);
```

```
FOR I:=1 TO CICLOS DO BOMBEO[I]:=0;
```

```
FOR I:=1 TO TRUNC(CICLOS*T/AT) DO
```

```
  BEGIN
```

```
    F5X2;
```

```
    IF X2[I] > XMAX THEN XMAX:=X2[I];
```

```
    IF X2[I] < XMIN THEN XMIN:=X2[I];
```

```
    IF (X2[I] > X2MAX) AND (I > (CICLOS-2)*T/AT) THEN
```

```
  X2MAX:=X2[I];
```

```
    IF (X2[I] < X2MIN) AND (I > (CICLOS-2)*T/AT) THEN
```

```
  X2MIN:=X2[I];
```

```
    X:=X1; X1:=X2[I];
```

```
  END;
```

```
XMAX:=A/(2*2.7183*Fr);XMIN:=-XMAX;
```

```
{Se calcula la cantidad bombeada por segundo}
```

```
TOTAL:=0; J:=0;
```

```
FOR I:=1 TO CICLOS DO
```

```
  BEGIN
```

```
    TOTAL:=TOTAL + BOMBEO[I];
```

```
    IF BOMBEO[I] = 0 THEN J:=J+1;
```

```
  END;
```

```
TOTAL:=TOTAL*3*1000000*Pi*R*R/(T*(CICLOS-J+0.0000001));
```

```
GRAFICAR2;
```

```
READLN;
```

```
CLOSEGRAPH; {Termina modo de gráfica}
```

```
END.
```

## REFERENCIAS.

1. Beiser, A., 1986. Conceptos de Física Moderna. Editorial McGraw-Hill.
2. Bowden, K.F., 1983. Physical oceanography of coastal waters. John Wiley & Sons Inc.
3. Czitrom, S.P.R., E. Prado, R. Peralta, M. Merino, F. Ruíz & M.A. Alatorre, 1993. "Resonant Duct Wave Amplification". Proceedings of the European Wave Energy Symposium, Edinburgh, Scotland, July 21-25, 1993.
4. Knott, G.F. & J.O. Flower, 1979. "Simulations studies of the basic non-linear effects of wave-energy conversion by an overtopping water-column". Energy Conversion. Vol. 19, pp 59-69.
5. Knott, G.F. & M.R. Mackley, 1980. "On eddy motions near plates and ducts, induced by water waves and periodic flows". Philosophical Transactions of the Royal Society London. Vol. A294, pp 599-623.
6. Kemmer, N., 1986. Análisis vectorial. Editorial Reverté, S. A.
7. Kinsman, B., 1965. Wind Waves. Prentice-Hall, inc.
8. Landau, L.D. y E.M. Lifshitz, 1986. Mecánica de Fluidos. Editorial Reverté, S. A.
9. Marsden, J.E. y A.J. Tromba, 1981. Cálculo vectorial. Fondo Editorial Interamericano, S.A.
10. McLellan, H.J., 1975. Elements of Physical Oceanography. Pergamon Press Ltd.

11. Merino, M., F. Ruíz, M.A. Alatorre y S.P.R. Czitrom, 1990. Informe final del proyecto "Desarrollo de un dispositivo de bombeo de agua mediante energía oceánica". Presentado al CIT-SOMEX, 26 p.
12. Ramming, H.G. & Z. Kowalik., 1980. Numerical Modelling of Marine Hidrodynamics. Applications to Dynamic Physical Processes. Elsevier Scientific Publishing Company.
13. Rey, J., P. Pi y C.A. Trejo, 1960. Análisis Matemático. Volumen I. Editorial Kapelusz.
14. Ross, S.L., 1974. Diferential equations. Xerox College Publishing.
15. Ruiz, F., M.A. Alatorre y M. Merino, 1988. "Dispositivo Rectificador y Amplificador de Oleaje". Registro Federal de la Propiedad Intelectual y Desarrollo Tecnológico (Número de Registro 11525). México.
16. Zill, D.G., 1988. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica S.A.