30-a

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN CURSO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA CON ENFOQUE VECTORIAL AUXILIADO POR COMPUTADORA

T E S I S

que para obtener el título de

MATEMATICA

P R E S E N T A:

IRMA TERRAZAS MÉNDEZ

MÉXICO, D.F. 1993

INDÍCE

PRÓLOGO

El presente trabajo surge de la búsqueda de nuevos métodos de motivación para el estudio, en los alumnos de la Facultad de Ciencias. En particular de la materia de Geometría Analítica I, debido a la experiencia como profesora de la misma, de la M. en C. Jacqueline Cañetas Ortega, directora de ésta tesis. Nuestros objetivos son: crear un curso "motivante" desde el punto de vista didáctico y hacer más "activas" las clases tradicionales, mediante el uso de la computadora.

Como el nombre de la materia lo sugiere, ésta se puede dividir, básicamente, en dos partes: una analítica y otra, geométrica. Tradicionalmente la parte analítica es la parte "fuerte" del curso; aunque también, es la parte más árida. Debido a que la mayoría de las veces, es realmente difícil dibujar en el pizarrón lo que se pretende ejemplificar; esto en gran parte porque el pizarrón es un espacio bidimensional, y para aquellos ejemplos que requieren un espacio tridimensional se debe apelar no sólo a un dibujo con perspectiva, sino también a la visión matemática de cada alumno (y un tanto a la imaginación).

Aún cuando la pantalla de una computadora es también un espacio bidimensional, siempre será más exacto, más rápido y se obtendrá una mejor perspectiva, el dibujar en ella. Con todo esto, se logra llamar la atención del alumno hacia lo que realmente se quiere ejemplificar; por otra parte, resulta motivante el hecho de hacer un poco más dinámica una clase, que usualmente no lo es tanto.

Esta propuesta de curso está basada en el programa oficial para la materia de Geometría Analítica I, que se imparte en la Facultad de Ciencias y, en particular, tiene un enfoque vectorial sin olvidar por ello, mencionar el enfoque cartesiano. Este trabajo se divide en 4 capítulos escritos y 4 programas de computación ejecutables (uno por cada capítulo). Se omiten las demostraciones formales, ya que generalmente es más didáctico resolverlas en clase ó como una tarea para los alumnos.

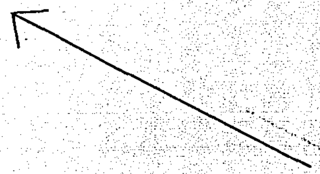
Los programas fuerón pensados y creados, de forma que los requerimientos de equipo de cómputo no sean sofisticados. Una computadora con 640 K de memoria, una tarjeta de graficación CGA, ó similar, y monitor monocromático, es suficiente para ejecutar los programas en cuestión; esto es con lo que, generalmente, cuenta cualquier computadora de tipo personal. Sin embargo, y debido a la resolución de cada tarjeta de graficación en particular, puede perderse precisión en algunos dibujos; por lo que lo más recomendable, para no perder precisión en los dibujos, es trabajar en una computadora con una tarjeta de graficación VGA, ó similar, y un monitor que soporte éste tipo de tarjeta, no importando sí es monocromático o a color.

Finalmente, es nuestro deseo que se cumplan los objetivos porpuestos y que se utilice éste trabajo, efectivamente, como material de apoyo en los cursos de Geometría Analítica.

I.T.M.
J.C.O.

1.1 Preliminares de Trigonometría.

Definición.- Un VECTOR es la trayectoria más corta entre dos puntos cualesquiera. Se le representa como una flecha.

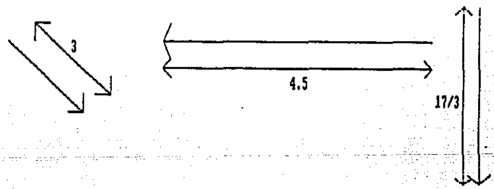


Un vector se caracteriza por tener DIRECCION, SENTIDO Y MAGNITUD.

a) La DIRECCION está dada por la forma de dibujar la trayectoria.

b) El SENTIDO está dado por la orientación de la flecha, cada dirección tiene dos sentidos opuestos.

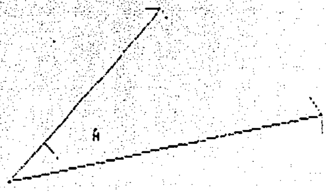
c) La MAGNITUD es la longitud de la flecha.



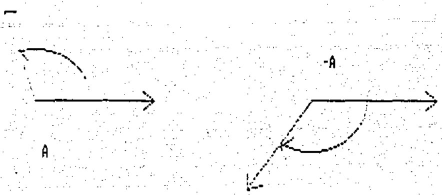
Ejemplos.-

1) El DESPLAZAMIENTO de un automóvil
2) La VELOCIDAD con que vuela un avión
3) La FUERZA con que empujamos un carro
4) Los EJES COORDENADOS.
5) Un POLINOMIO.

Definición : un ANGULO es la abertura entre dos direcciones. Denotaremos a los ángulos con letras mayúsculas, se ejemplifica un ángulo A.



Un ángulo A se dice POSITIVO si la abertura es en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj, y NEGATIVO (-A) en otro caso.



Definición : Un GRADO es la medida de un ángulo que divide a la circunferencia en 360 partes iguales. Un MINUTO es 1/60 de grado y un SEGUNDO es 1/60 de un minuto.

Definición : Un RADIAN es la medida de un ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio de una circunferencia.

Como la longitud de una circunferencia es $2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia, la circunferencia se puede subdividir en 2π arcos de longitud r, es decir :

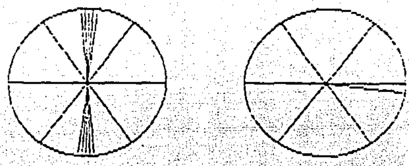
$$360 \text{ grados} = 2\pi \text{ radianes}$$

Igualdad que se traduce en las fórmulas siguientes :

$$1 \text{ grado} = 2\pi/360 \text{ radianes} = \pi/180 \text{ radianes}$$

$$1 \text{ radián} = 360/2\pi \text{ grados} = 180/\pi \text{ grados}$$

Se suprime la palabra radianes cuando se mide un ángulo con esas unidades.



360°   2¶ radianes

Ejemplos:

1.- Dar la medida en grados, minutos y segundos de los ángulos siguientes:

$A = \pi/6$ rad $B = 5\pi/4$ rad $C = 2/5$ rad

como 1 radián $= 180/\pi = 57^\circ 17'45''$, entonces :

$$A = (180/\pi)(\pi/6) = 30^\circ$$

$$B = (180/\pi)(5\pi/4) = 225^\circ$$

$$C = (2/5)(180/\Pi) = 72^\circ/\Pi$$

$$(2/5)(57^\circ 17'45'') = 22^\circ 55'6''$$

2.- Expresar en radianes los ángulos siguientes :

$A = 135^\circ$ $B = 25^\circ 30'$ $C = 42^\circ 24'35''$

como 1 grado $= \pi/180$ rad

$$A = (135)(\pi/180) = 3\pi/4 \text{ rad}$$

$$B = (25.5)(\pi/180) = 0.4451 \text{ rad}$$

$$C = (42 + \frac{24 \times 60 + 35}{3600}) = (42.41)(\frac{\Pi}{180}) = 0.7402 \text{ rad}$$

Ejercicios 1.1

Expresar, según corresponda, en grados, minutos y segundos ó en radianes, los siguientes ángulos:

1.- $A = 25^\circ 30'$

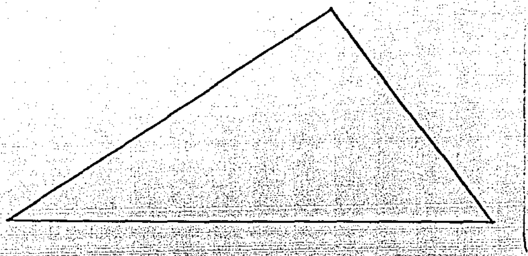
2.- $B = 12^\circ 12'20''$

3.- $C = 7\Pi/10$ rad

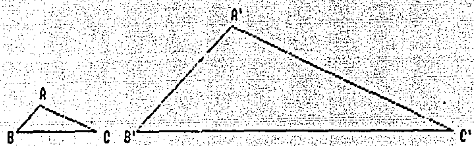
4.- $D = 1/4$ rad

1.2 Triángulos semejantes.

Un TRIANGULO se puede definir como un polígono de tres lados o de tres ángulos. En él que se cumple siempre que un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.



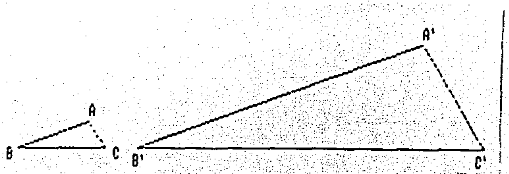
Definición.- Dos TRIANGULOS son SEMEJANTES si sus ángulos correspondientes son iguales y proporcionales los lados respectivos.



Se cumple : A=A', B=B', C=C' y AB/A'B' = AC/A'C' = BC/B'C'

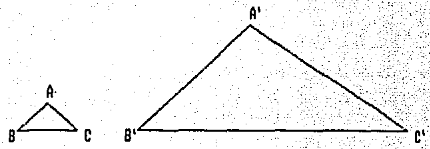
Casos de semejanza de triángulos :

a) Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivos iguales



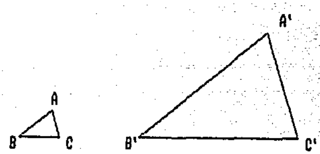
Se cumple : A=A', B=B'

b) Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman



Se cumple : A=A' y AB/A'B' = AC/A'C'

c) Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados correspondientes proporcionales



Se cumple : AB/A'B' = AC/A'C' = BC/B'C'

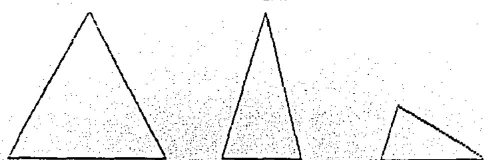
Podemos clasificar a un triángulo de dos formas distintas :

a) En función de la magnitud de los lados que representan al triángulo:

EQUILATERO.- cuando las tres magnitudes son iguales

ISOSCELES.- cuando dos magnitudes son iguales

ESCALENO.- cuando las tres magnitudes son distintas



b) En función de los ángulos que forman dichos lados:

RECTANGULO.- cuando dos lados forman un ángulo recto

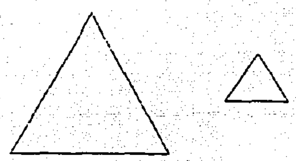
OBLICUANGULO.- cuando ninguno de sus angulos es recto, tenemos dos clases de triángulos:

ACUTANGULO.- cuando los tres ángulos son agudos

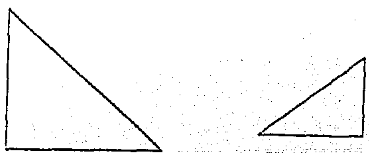
OBTUSANGULO.- cuando un ángulo es obtuso

Casos particulares de semejanza de triángulos:

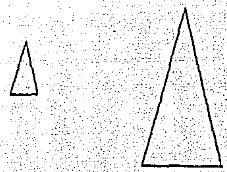
i) Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes



ii) Dos triángulos rectángulos cualesquiera son semejantes si tienen un ángulo agudo igual o proporcionales sus lados



iii) Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen un ángulo igual

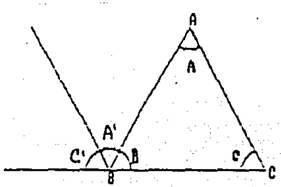


iv) Dos triángulos rectángulos e isósceles son siempre semejantes

Nos será útil más adelante la siguiente afirmación :

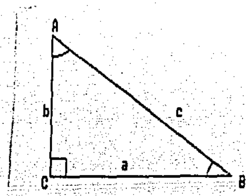
"La suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es de 180°".

La demostración es sencilla. Consideremos el triángulo de vértices A, B, C. Tracemos por el vértice B una paralela al lado AC. El ángulo C' es igual al ángulo C por ser alternos internos; y también son iguales el ángulo A y A' por ser correspondientes. Como $B+C'+A'=180^\circ$ tenemos que $B+C+A=180^\circ$ como queriamos demostrar.



1.3 Funciones Trigonométricas.

Tomemos un triángulo rectángulo cualquiera. Sean A, B, C los vértices del triángulo, los ángulos respectivos también A, B, C donde C es el ángulo recto y a, b, c las magnitudes de los lados opuestos a cada uno de los vértices.

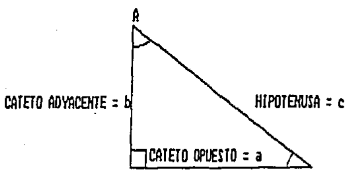


Al lado cuya magnitud es c se le llama HIPOTENUSA. En relación al ángulo B, el lado cuya magnitud es a es el CATETO ADYACENTE y el lado cuya magnitud es b es el CATETO OPUESTO. En relación al ángulo A el lado cuya magnitud es a es el CATETO OPUESTO y el lado cuya magnitud es b es el CATETO ADYACENTE.

Con esto podemos definir las funciones trigonométricas del ángulo A, en términos de las magnitudes de los lados del triángulo.

Definición.-

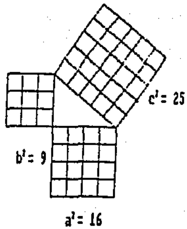
(SENO)	SEN A = cateto opuesto/hipotenusa	= a/c
(COSENO)	COS A = cateto adyacente/hipotenusa	= b/c
(TANGENTE)	TAN A = cateto opuesto/cateto adyacente	= a/b
(COTANGENTE)	COT A = cateto adyacente/cateto opuesto	= b/a
(SECANTE)	SEC A = hipotenusa/cateto adyacente	= c/b
(COSECANTE)	CSC A = hipotenusa/cateto opuesto	= c/a



Sea ABC un triángulo rectángulo cualquiera donde C es el ángulo recto y a, b, c las magnitudes de los lados opuestos a cada uno de los vértices, entonces se cumple el:

TEOREMA DE PITAGORAS: "La suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Ejemplo 1:

Sea el triángulo rectángulo ABC tal que $a=2$ y $c=2\sqrt{5}$. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo ABC.

Como el triángulo ABC es un triángulo RECTANGULO, podemos utilizar el TEOREMA DE PITAGORAS, $b^2=c^2-a^2=(2\sqrt{5})^2-(2)^2=20-4=16$, luego $b=4$; entonces:

SEN A = $2/2\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$ = COS B	COS A = $4/2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5$ = SEN B
TAN A = $2/4 = 1/2$ = COT B	COT A = $4/2 = 2$ = TAN B
SEC A = $2\sqrt{5}/4 = \sqrt{5}/2$ = CSC B	CSC A = $2\sqrt{5}/2 = \sqrt{5}$ = SEC B

Ejemplo 2:

Encontrar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo agudo A, en un triángulo rectángulo ABC, dado: sen $A=3/7$.

Por definición de la función SENO tenemos que SEN $A=a/c=3/7$, por lo tanto, se puede pensar que $a=3$ y $c=7$. Como el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, podemos utilizar el TEOREMA DE PITAGORAS; $b^2=c^2-a^2=7^2-3^2=49-9=40$, luego $b=2\sqrt{10}$, entonces:

SEN A = $3/7$	COS A = $2\sqrt{10}/7$	TAN A = $3/2\sqrt{10}$
COT A = $2\sqrt{10}/3$	SEC A = $7/2\sqrt{10}$	CSC A = $7/3$

Encontremos ahora las funciones trigonométricas de algunos ángulos fundamentales que utilizaremos más adelante.

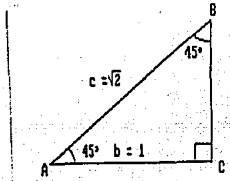
Encontrar las funciones trigonométricas de un ángulo de 45°:

Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles. Por definición si ABC es un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 grados y siendo isósceles tiene dos lados cuyas magnitudes son iguales, esto implica :

$$A = B = 45^{\circ} \quad y \quad a = b$$

Sea $a=b=1$; por el TEOREMA DE PITAGORAS $c=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, por lo tanto:

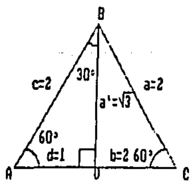
$SEN\ 45^{\circ} = 1/\sqrt{2}$
$COS\ 45^{\circ} = 1/\sqrt{2}$
$TAN\ 45^{\circ} = 1$
$COT\ 45^{\circ} = 1$
$SEC\ 45^{\circ} = \sqrt{2}$
$CSC\ 45^{2} = \sqrt{2}$



Encontrar las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°y 60°:

Sea ABC un triángulo equilátero. Por definición tenemos $a=b=c$, esto implica que cada uno de sus ángulos mide 60 grados. La bisectriz de un ángulo cualquiera por ejemplo de B, es la mediatriz del lado opuesto, con ella obtenemos dos triángulos rectángulos con la característica de tener un ángulo de 30 grados. Sean $a=b=c=2$, esto implica que $d=1$ y como ABD es un triángulo rectángulo, podemos aplicar el TEOREMA DE PITAGORAS, como $c=2$ y $d=1$ entonces $a=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$; por lo tanto:

$SEN\ 60^{\circ} = \sqrt{3}/2 = COS\ 30^{\circ}$
$COS\ 60^{\circ} = 1/2 = SEN\ 30^{\circ}$
$TAN\ 60^{\circ} = \sqrt{3} = COT\ 30^{\circ}$
$COT\ 60^{\circ} = 1/\sqrt{3} = TAN\ 30^{\circ}$
$SEC\ 60^{\circ} = 2 = CSC\ 30^{\circ}$
$CSC\ 60^{\circ} = 2\sqrt{3} = SEC\ 30^{\circ}$



Es esencial tomar en cuenta la importancia del TEOREMA DE PITAGORAS para triángulos rectángulos y de como utilizar las funciones trigonométricas de los ángulos de 30 y 60 grados, que hemos encontrado hasta ahora.

Enunciaremos algunas igualdades para las funciones trigonométricas de dos ángulos y demostraremos geométricamente las dos primeras, dejando como ejercicio las restantes:

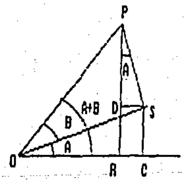
$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$$
$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$
$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$$
$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Demostraremos a continuación las siguientes afirmaciones:

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$$
$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Para facilitar la demostración, sean A y B ángulos agudos positivos, los dibujamos con un vértice común O. Sea P un punto cualquiera en el lado final del ángulo A+B. Tracemos los segmentos PA, PB, BC y BD de forma que PA sea perpendicular al lado inicial del ángulo A+B y BD sea perpendicular a AP. Como los triángulos OBC y DPB son rectángulos son semejantes, por lo que el ángulo que forman los lados DP y PB es igual al ángulo A. Del dibujo tenemos que:

$$\begin{aligned}\text{SEN}(A+B) &= AP/OP = (AD+DP)/OP\\ &= (CB+DP)/OP = CB/OP + DP/OP\\ &= (CB/OB)(OB/OP) + (DP/BP)(BP/OP)\\ &= (\text{SEN } A)(\text{COS } B) + (\text{COS } A)(\text{SEN } B)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{COS}(A+B) &= OA/OP = (OC-AC)/OP\\ &= (OC-DB)/OP = OC/OP - DB/OP\\ &= (OC/OB)(OB/OP) - (DB/BP)(BP/OP)\\ &= (\text{COS } A)(\text{COS } B) - (\text{SEN } A)(\text{SEN } B)\end{aligned}$$

Ejercicios 1.2

Sin tablas, ni calculadora, deduce el valor del seno y del coseno de 15 grados, mediante:

a) $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

b) $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$

Definición : Un TRIANGULO se considera RESUELTO cuando se han determinado las medidas de sus tres ángulos internos y las magnitudes de sus tres lados.

Ejemplo 1:

Resolver el triángulo rectángulo ABC donde $A=58°53'$ y $a=24.36$.

Como $A+B+C$ debe ser igual a 180 grados y $C=90°$, entonces $B=90°-58°53'=31°7'$. Conociendo los ángulos, podemos calcular las medidas de los lados restantes a tráves de las funciones trigonométricas que podemos obtener con calculadora:

$a/c=\text{SEN } A \qquad c=a/\text{SEN } A=24.36/0.8562=28.45$

$b/c=\text{COS } A \qquad b=(c)(\text{COS } A)=(28.75)(0.5168)=14.7$

Ejemplo 2:

Resolver el triángulo rectángulo ABC, donde $b=15.25$ y $c=32.68$.

Por definición de las funciones trigonométricas tenemos que:

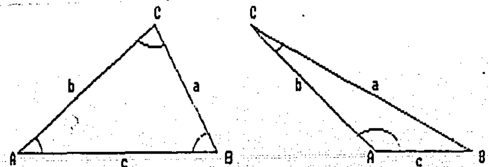
$\text{SEN } B=b/c=15.25/32.68=0.4666$, es decir $B = 27°49'$

Como $A+B+C$ debe ser igual a 180 grados y $C=90°$, entonces $A=90°-27°49'=62°11'$. Finalmente, para obtener el valor de a, sabemos que: $a/c=\text{COS } B \qquad a=(c)(\text{COS } B)=(32.68)(0.8844)=28.9$

1.4 Ley de los Senos y Ley de los Cosenos.

Hasta ahora hemos trabajado con triángulos rectángulos, pero veamos como resolver triángulo que no son rectángulos.

Definición : Un TRIANGULO OBLICUANGULO es aquél que no es rectángulo. En un triángulo oblicuángulo, los tres ángulos son agudos o dos son agudos y el tercero es obtusángulo.



¿Como resolvemos un triángulo oblicuángulo?

Con LA LEY DE LOS SENOS Y LA LEY DE LOS COSENOS.

LEY DE LOS SENOS

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos; esto es:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

son inmediatas las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{SEN } A}{\text{SEN } B} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\text{SEN } B}{\text{SEN } C} \qquad \frac{c}{a} = \frac{\text{SEN } C}{\text{SEN } A}$$

a continuación daremos una demostración geométrica de la LEY DE LOS SENOS.

Sea ABC un triángulo oblicuángulo cualquiera. En la fig.(a), los ángulos A y B son agudos, mientras que en la fig.(b), el ángulo B es obtuso. Trácese CD perpendicular a AB o a su prolongación. Sea h la longitud de CD. En cualquiera de las dos figuras se tiene que, en el triángulo rectángulo ACD, h=(b)(SEN A), mientras que, en el triángulo rectángulo BCD, h=(a)(SEN B); entonces,

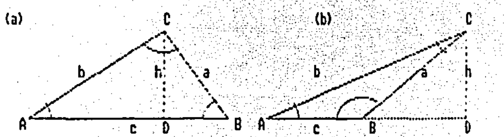
$$(a)(\text{SEN } B) = (b)(\text{SEN } A) \qquad a/\text{SEN } A = b/\text{SEN } B$$

De manera semejante, si se traza una perpendicular desde B a AC, o desde A a BC, se obtiene,

$$a/\text{SEN } A = c/\text{SEN } C \quad \text{ó} \quad b/\text{SEN } B = c/\text{SEN } C$$

Finalmente,

$$a/\text{SEN } A = b/\text{SEN } B = c/\text{SEN } C$$



Para resolver triángulos oblicuángulos cuando se conocen la medida de uno de los lados del triángulo y dos de sus ángulos, daremos dos ejemplos.

Ejemplo 1:

Resolver el triángulo ABC dados $c=25$, $A=35^\circ$ y $B=68^\circ$.

Para encontrar C: $C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-103^\circ=77^\circ$

Para encontrar a: $a=(c)(\text{SEN } A)/\text{SEN } C=(25)(\text{SEN } 35^\circ)/\text{SEN } 77^\circ$

$=(25)(0.5736)/0.9744=15$

Para encontrar b: $b=(c)(\text{SEN } B)/\text{SEN } C=(25)(\text{SEN } 68^\circ)/\text{SEN } 77^\circ$

$=(25)(0.9272)/0.9744=24$

Ejemplo 2:

Resolver el triángulo ABC dados $a=62.5$, $A=112^\circ30'$ y $C=42^\circ10'$.

Para encontrar B: $B=180^\circ-(C+A)=180^\circ-154^\circ30'=25^\circ30'$

Para encontrar b: $b=(a)(\text{SEN } B)/\text{SEN } A$

$=(62.5)(\text{SEN } 25^\circ30')/\text{SEN } 112^\circ20'$

$=(62.5)(0.4305)/0.9250=29.1$

Para encontrar c: $c=(a)(\text{SEN } C)/\text{SEN } A$

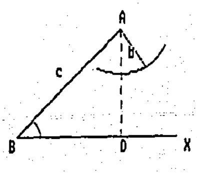
$=(62.5)(\text{SEN } 42^\circ10')/\text{SEN } 112^\circ20'$

$=(62.5)(0.6713)/0.9250=45.4$

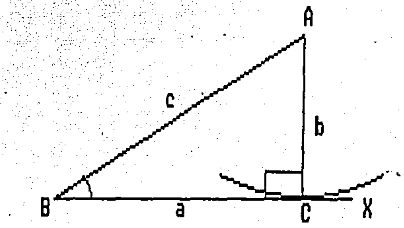
Para resolver triángulo oblicuángulos cuando se conocen las medidas de dos lados del triángulo y el ángulo opuesto a uno de ellos, se presentan 7 posibles tipos de soluciones. Discutiremos brevemente cada una de ellas.

Sean b, c y B los elementos conocidos del triángulo. Cuando el ángulo B es agudo tenemos 5 casos. Dibujamos el ángulo B y el lado BA=c, trazamos un arco con centro en A y radio igual a b (el lado opuesto al ángulo dado).

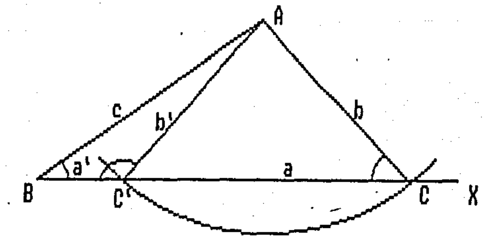
1.- Cuando $b<AC=c$ SEN B, el arco no corta a BX y, en consecuencia no se determina triángulo alguno.



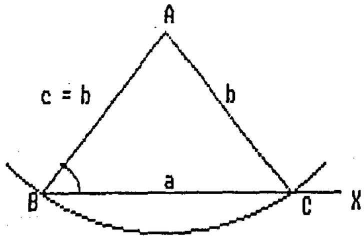
2.- Cuando b=AC=c SEN B, el arco es tangente a BX y queda determinado un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es C.



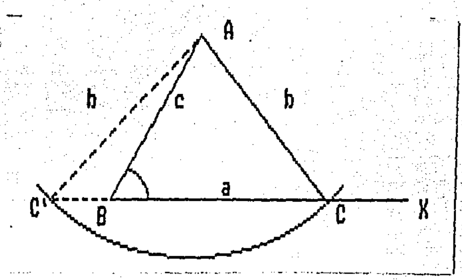
3.- Cuando b>AC=c SEN B y b<c, el arco corta a BX en dos puntos, C y C', a un mismo lado de B. Se determinan dos triángulos: ABC, en el que C es agudo, y ABC', en el que C'=180°-C.



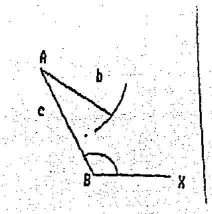
4.- Cuando b>AC=c SEN B y b=c, el arco corta a BX en los puntos C y B. Queda determinado un triángulo isósceles.



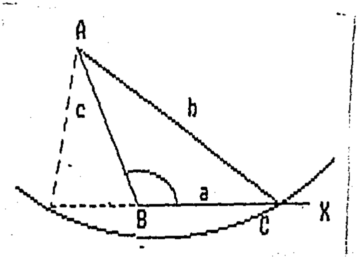
5.- Cuando b>c, el arco corta a BX en el punto C y corta la prolongación de BX en sentido contrario en el punto C'. Como el triángulo ABC' no contiene al ángulo dado B, queda determinado solamente el triángulo ABC.



Sean b, c y B los elementos conocidos. Cuando el ángulo B es obtuso, tenemos 2 posibilidades. Construimos el ángulo B y el lado BA=c, trazamos un arco con centro en A y radio igual a b (el lado opuesto al ángulo dado). 6.- Cuando b<c ó b=c, no se determina triángulo alguno.



7.- Cuando b>c, se determina un sólo triángulo.



Ejemplo 1:

Resolver el triángulo ABC dados c=628, b=480 y $C=55^{\circ}10'$.

Como C es agudo y c>b, la solución es única.

Para encontrar B: $\text{SEN } B = b \text{ SEN } C/c=(480)(\text{SEN } 55^{\circ}10')/628$

$=(480)(0.8208)/628=0.6274$

Por lo tanto $B = 38^{\circ}50'$

Para encontrar A: $A=180^{\circ}-(B+C)=180^{\circ}-94^{\circ}=86^{\circ}$

Para encontrar a: $a=(b)(\text{SEN } A)/\text{SEN } B$

$=(480)(\text{SEN } 86^{\circ})/\text{SEN } 38^{\circ}40'$

$=(480)(0.9976)/0.6271=764$

Ejemplo 2:

Resolver el triángulo ABC dados a=525, c=421 y $A=130^{\circ}50'$.

Como A es obtuso y a>c, existe una solución.

Para encontrar C: $\text{SEN } C = c \text{ SEN } A/a=(421)(\text{SEN } 130^{\circ}50')/525$

$=(421)(0.7566)/525=0.6067$

Por lo tanto $C = 37^{\circ}20'$

Para encontrar B: $B=180^{\circ}-(C+A)=180^{\circ}-168^{\circ}10'=11^{\circ}50'$

Para encontrar b: $b=(a)(\text{SEN } B)/\text{SEN } A$

$=(525)(\text{SEN } 11^{\circ}50')/\text{SEN } 130^{\circ}50'$

$=(525)(0.2051)/0.7566=142$

Ejemplo 3:

Resolver el triángulo ABC dados a=31.5, b=51.8 y $A=33^{\circ}40'$.

Como A es agudo y a<b, existe la posibilidad de dos soluciones.

Para encontrar B: $\text{SEN } B = b \text{ SEN } A/a=(51.8)(\text{SEN } 33^{\circ}40')/31.5$

$=(51.8)(0.5544)/31.5=0.9117$

Por lo tanto $B = 65^{\circ}40'$ y $B' = 180^{\circ}-65^{\circ}40' = 114^{\circ}20'$

Para encontrar C: $C=180^{\circ}-(A+B)=80^{\circ}40'$ y $C'=180^{\circ}-(A+B')=32^{\circ}$

Para encontrar c: $c=(a)(\text{SEN } C)/\text{SEN } A$

$=(31.5)(\text{SEN } 80^{\circ}40')/\text{SEN } 33^{\circ}40'$

$=(31.5)(0.9868)/0.5544=56.1$

Para encontrar c': $c'=(a)(\text{SEN } C')/\text{SEN } A$

$=(31.5)(\text{SEN } 32^{\circ})/\text{SEN } 33^{\circ}40'$

$=(31.5)(0.5299)/0.5544=30.1$

LEY DE LOS COSENOS

En todo triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos; es decir:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

A continuación daremos una demostración geométrica de la LEY DE LOS COSENOS.

Sea ABC un triángulo oblicuángulo cualquiera. En la fig.(a), los ángulos A y B son agudos, mientras que en la fig.(b), el ángulo B es obtuso. En el triángulo rectángulo ACD de cualquiera de las dos figuras, $b^2=h^2+(AD)^2$. En el triángulo rectángulo BCD de la fig.(a), $h=(a)(SEN\ B)$ y $DB=(a)(COS\ B)$. Entonces,

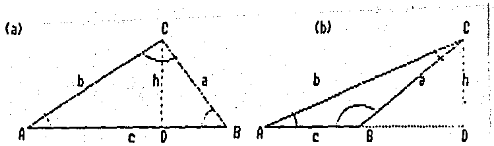
$$AD=AB-DB=c-((a)(COS\ B))\text{ y}$$
$$b^2=h^2+(AD)^2=(a^2)(SEN^2B)+c^2-2ca(COS\ B)+(a^2)(COS^2B)$$
$$=(a^2)(SEN^2B+COS^2B)+c^2-(2)(c)(a)(COS\ B)$$
$$=c^2+a^2-2ca\ COS\ B$$

En el triángulo rectángulo BCD de la fig.2,

$$h=(a)(SEN(180^o-B))=(a)(SEN\ B)\text{ y}$$
$$BD=(a)(COS(180^o-B))=(a)(-COS\ B)$$

Entonces $AD=AB+BD=c-(a)(COS\ B)$ y $b^2=c^2+a^2-2ca\ COS\ B$.

Las otras relaciones pueden obtenerse mediante un cambio cíclico de las letras.



Para resolver triángulos oblicuángulos cuando se conocen la medida de dos de los lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos, daremos dos ejemplos.

Ejemplo 1:

Resolver el triángulo ABC dados a=132, b=224 y $C=28°40'$.

Para encontrar c: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224)\cos 28°40'$

$= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224)(0.8774)$

$= 15714$, por lo tanto $c = 125$

Para encontrar A: $\text{SEN } A=(a)(\text{SEN } C)/c=(132)(\text{SEN } 28°40')/125$

$=(132)(0.4797)/125=0.5066$

Por lo tanto $A = 30°30'$

Para encontrar B: $\text{SEN } B=(b)(\text{SEN } C)/c=(224)(\text{SEN } 28°40')/125$

$=(224)(0.4797)/125=0.8596$

Por lo tanto $B = 120°50'$

Ejemplo 2:

Resolver el triángulo ABC dados a=322, c=212 y $B=110°50'$.

Para encontrar b: $b^2= c^2+ a^2- 2ca\cos B$

$=(212)^2+ (322)^2- 2(212)(322)\cos 110°50'$

$=(212)^2+ (322)^2- 2(212)(322)(-0.3557)$

$=197719 1$, por lo tanto $b = 444$

Para encontrar A: $\text{SEN } A=(a)(\text{SEN } B)/b=(322)(\text{SEN } 110°50')/444$

$=(322)(0.9346)/444=0.6778$

Por lo tanto $A = 42°40'$

Para encontrar C: $\text{SEN } C=(c)(\text{SEN } B)/b=(212)(\text{SEN } 110°50')/444$

$=(212)(0.9346)/444=0.4463$

Por lo tanto $C = 26°30'$

Para resolver triángulos oblicuángulos cuando se conocen la medida de los tres lados del triángulo daremos un ejemplo.

Ejemplo 3:

Resolver el triángulo ABC dados a=25.2, b=37.8 y c=43.4.

Para encontrar A: $\text{COS } A=b^2+c^2-a^2/2bc$

$=(37.8)^2+(43.4)^2-(25.2)^2/2(37.8)(43.4)$

$=0.8160$

Por lo tanto $A = 35°20'$

Para encontrar B: $\cos B = c^2 + a^2 - b^2 / 2ca$

$= (43.4)^2 + (25.2)^2 - (37.8)^2 / 2(43.4)(25.2)$

$= 0.4982$

Por lo tanto $B = 60°10'$

Para encontrar C: $\cos C = a^2 + b^2 - c^2 / 2ab$

$= (25.2)^2 + (37.8)^2 - (43.4)^2 / 2(25.2)(37.8)$

$= 0.0947$

Por lo tanto $C = 84°30'$

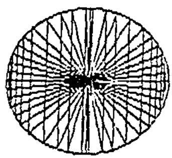
Ejercicios 1.3

Resuelve el triángulo ABC dados:

1) $A=54°40'$, $B=65°10'$ y $a=125$.
2) $A=75°20'$, $C=38°30'$ y $b=321$.
3) $B=112°20'$, $a=31.5$ y $b=40.2$.
4) $A=35°20'$, $a=320$ y $c=270$.
5) $a=6.34$, $b=7.30$ y $c=9.98$.

1.5 Circunferencia unitaria.

Recordemos que las funciones trigonométricas las definimos a partir de un triángulo rectángulo. Ahora vamos a considerar todos los triángulos rectángulos que tengan un vértice en común y cuya hipotenusa, por comodidad sea de magnitud uno.



Ahora bien, todos estos triángulos rectángulos así dibujados, geenran una circunferencia cuyo radio tiene la misma magnitud que la hipotenusa de cada uno de ellos, es decir 1, por lo que ésta circunferencia se define como CIRCUNFERENCIA UNITARIA.

Por definición sabemos que :

cos A = cateto adyacente/hipotenusa

sen A = cateto opuesto/hipotenusa

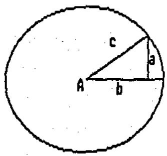
pero como la hipotenusa es igual a uno, entonces :

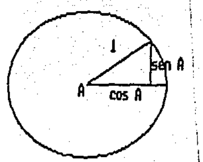
cos A = cateto adyacente

sen A = cateto opuesto

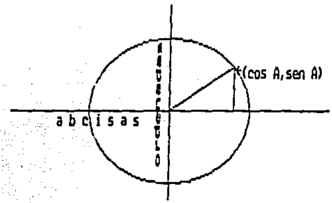
Como estos triángulos rectángulos cumplen el Teorema de Pitágoras tenemos que $a^2 + b^2 = c^2$, de donde :

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$



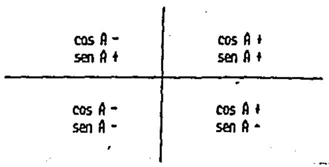


Como todos los catetos adyacentes de estos triángulos se encuentran en la misma dirección horizontal y los catetos opuestos en la misma dirección vertical, podemos comparar estas dos direcciones con el plano cartesiano. A la dirección horizontal le corresponden las abscisas y a la dirección vertical las ordenadas.



De esta forma a cada punto de la circunferencia unitaria lo podemos representar como (cos A, sen A).

Por último definimos donde son positivos o negativos el seno y el coseno.

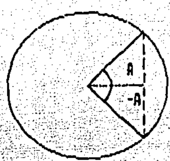


Anteriormente definimos ángulos positivos y negativos, ¿cómo vamos a interpretar el seno y el coseno de un ángulo negativo?. Sea A un ángulo cualquiera, dibujemos A y −A en la circunferencia unitaria.

Es fácil visualizar que para ambos ángulos la abscisa es la misma, $\cos(-A) = \cos A$

y la ordenada varía únicamente en el signo, es decir :

$$\operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen} A$$



Visualizemos ahora todas las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera A. Lo haremos únicamente para A entre 0 y 90°, fig.1, y para A entre 0 y 270°, fig.2. Los otros casos son análogos.

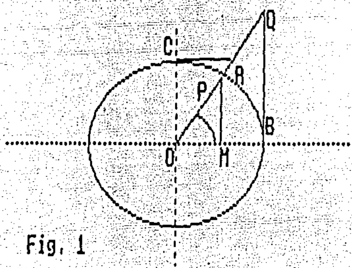


Fig. 1

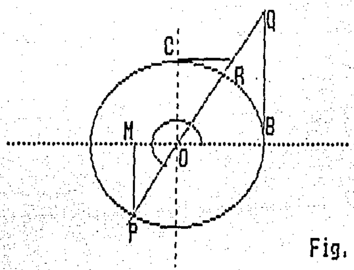


Fig. 2

La circunferencia unitaria corta a la dirección de las abscisas en B y a la dirección de las ordenadas en C, sea P el punto donde intersecta un lado del ángulo A; tracemos MP perpendicular a OB y las tangentes a la circunferencia en B y en C, de forma que corten a la prolongación de A en los puntos Q y R, respectivamente. En cada una de las figuras, los triángulos rectángulos OMP, OBQ y OCR son semejantes y, en consecuencia :

$$\operatorname{sen} A = MP/OP = MP \qquad \cot A = OM/MP = CR/OC = CR$$
$$\cos A = OM/OP = OM \qquad \sec A = OP/OM = OQ/OB = OQ$$
$$\tan A = MP/OM = BQ/OB = BQ \qquad \csc A = OP/MP = OR/OC = OR$$

La magnitud de cada función está dada por la longitud del segmento respectivo (MP, OM, BQ, etc.), y asignando el sentido apropiado a cada segmento obtenemos el signo correspondiente de la función. Los segmentos OQ y OR son negativos cuando están determinados sobre la prolongación del lado del ángulo y positivos en otro caso.

Veamos ahora una propiedad de las funciones trigonométricas. Tomemos a los ángulos de 0 y 360 grados sobre la circunferencia unitaria, por lo que vimos anteriormente tenemos que:

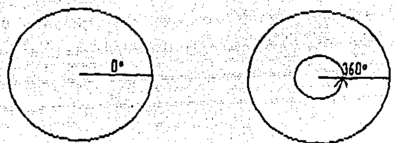
$$\cos 0 = 1 \qquad \text{sen } 0 = 0$$

$$\cos 360^\circ = 1 \qquad \text{sen } 360^\circ = 0$$

es decir,

$$\cos 0 = \cos 360^\circ = 1$$

$$\text{sen } 0 = \cos 360^\circ = 0$$

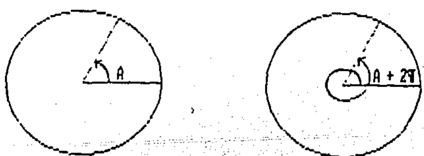


Definición .- Toda función que repite sus valores en ciclos definidos recibe el nombre de FUNCION PERIODICA. Al menor conjunto de valores correspondiente a un ciclo completo de la función se le denomina PERIODO de la función.

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas, en particular las funciones seno y coseno tienen un periodo de 2Π radianes (360 grados) es decir si A es un ángulo cualquiera:

$$\cos A = \cos (A + 2n\Pi) \qquad \text{sen } A = \text{sen } (A + 2n\Pi)$$

con n un número entero positivo



Concluiremos este repaso con unos ejercicios.

Ejercicios 1.4

1.-Sin recurrir a tablas ni calculadora, dar el valor de las funciones trigonométricas de un ángulo de :

a) 210 grados b) 105 grados c) 330 grados

2.-Resolver el triángulo ABC dados :

$B = 40^\circ 40'$ $a = 62.5$ $a = 51.5$

3.-Conociendo los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo de 45 grados, deducir los períodos de las funciones tan, cot, sec y csc.

2.1 Espacios vectoriales desde un punto de vista geométrico.

Los VECTORES en general, son elementos de un conjunto que cumplen con determinadas propiedades para una operación definida. En este caso, para nuestros intereses, diremos y consideraremos lo siguiente.

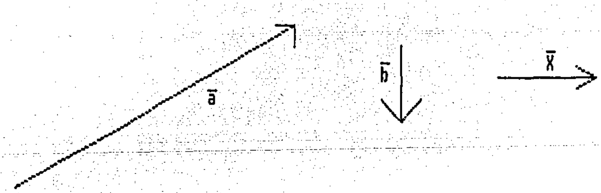
Definición.- Un VECTOR es la trayectoria más corta entre dos puntos cualesquiera, se le representa como una flecha y lo denotaremos como una letra minúscula o mayúscula con un guión encima: el vector a = $\bar{a}$, el vector X = $\bar{X}$.

Un vector se caracteriza por tener DIRECCION, SENTIDO Y MAGNITUD.

a) La DIRECCION está dada por la forma de dibujar la trayectoria.

b) El SENTIDO está dado por la orientación de la flecha, cada dirección tiene dos sentidos opuestos. Al punto donde inicia la flecha se le llama punto inicial y al punto donde termina se le llama punto final.

c) La MAGNITUD es la longitud de la flecha y la denotaremos por : $|\bar{a}|$.



Ejemplos .- 1) El DESPLAZAMIENTO de un automóvil

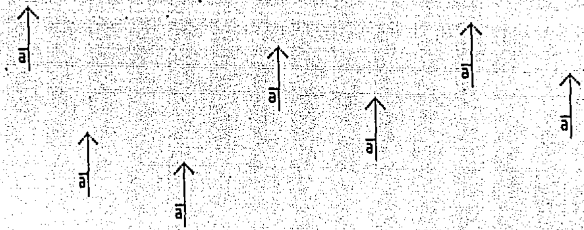
2) La VELOCIDAD con que vuela un avión

3) La FUERZA con que empujamos un carro

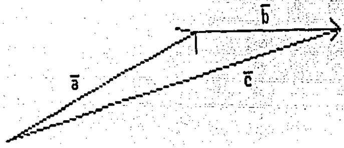
4) Un EJE COORDENADO.

5) Un POLINOMIO.

Definición.- Decimos que un VECTOR es LIBRE porque pueden variar los puntos entre los que se dibuja, siempre que conserve su dirección, su sentido y su magnitud.

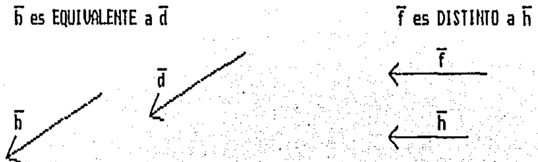


Supongamos ahora, que queremos sumar $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Como $\bar{b}$ es libre, hacemos coincidir el punto final de $\bar{a}$ con el punto inicial de $\bar{b}$, y definimos la suma de $\bar{a}$ más $\bar{b}$ como la trayectoria más corta entre el punto inicial de $\bar{a}$ y el punto final de $\bar{b}$, es decir, como el vector $\bar{c}$.



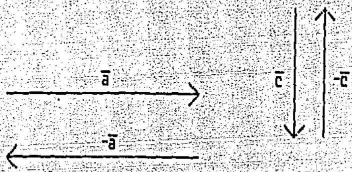
Definición.- Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores. Para sumarlos se hace coincidir el punto final de $\bar{a}$ con el punto inicial de $\bar{b}$ y de define la SUMA de $\bar{a}$ más $\bar{b}$ como el vector que tiene como punto inicial el punto inicial de $\bar{a}$ y como punto final el punto final de $\bar{b}$.

Definición.- Diremos que dos VECTORES son IGUALES o EQUIVALENTES cuando tienen la misma dirección, el mismo sentido y la misma magnitud. Y diremos que dos VECTORES son DISTINTOS cuando difieran en al menos una característica.



Definición.- El VECTOR NULO es aquel cuyos puntos inicial y final son el mismo, se le representa como un punto y lo denotaremos por $\bar{e}$ (el vector e).

Definición.- Para todo vector $\bar{a}$ existe un único vector que tiene la misma dirección y la misma magnitud que $\bar{a}$, pero tiene sentido contrario al de $\bar{a}$. A este vector se le denomina el INVERSO ADITIVO de $\bar{a}$ y lo denotamos como $-\bar{a}$.



Propiedades de la suma de vectores.

Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, vectores cualesquiera, se cumple :

a) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$

b) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

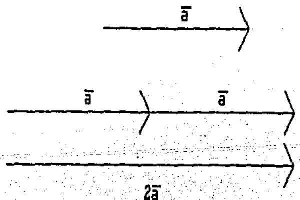
c) $\bar{a} + \bar{e} = \bar{a}$

d) $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{e}$

Se suguiere como ejercicio, demostrar estas propiedades.

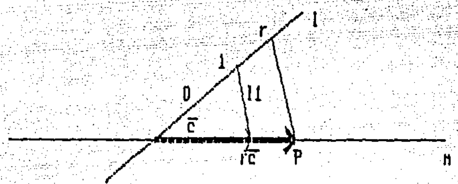
En lo sucesivo, llamaremos ESCALAR a todo número real.

Queremos definir el producto de un escalar por un vector. Y lo haremos mediante la operación que conocemos que es la suma. Imaginemos que queremos sumar dos veces un mismo vector $\bar{a}$, esto es $\bar{a}+\bar{a}$, lo cual por conveniencia escribimos como $2\bar{a}$, en otras palabras el escalar 2 por el vector $\bar{a}$.



Tomemos arbitrariamente un escalar r y un vector $\bar{c}$:

1. dibujemos una línea cualquiera y fijemos al azar un punto al que llamaremos O
2. dibujemos $\bar{c}$ de forma que su punto inicial coincida con O
3. marcamos sobre la línea la unidad (1) y r
4. unimos al punto 1 con el punto final de $\bar{c}$ con una línea l1
5. prolongamos la dirección de $\bar{c}$ en una línea m
6. trazamos una paralela a l1 por r que corte a la línea m en P
7. definimos $r\bar{c}$ como el vector cuyo punto inicial es O y cuyo punto final es P.



Hagamos notar que por la semejanza de triángulos tenemos:

$$\frac{|\bar{c}|}{1} = \frac{|r\bar{c}|}{|r|}$$

Definición.- Sean r un escalar y $\bar{a}$ un vector cualesquiera. Se llama PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR ($r\bar{a}$) al vector que tiene la misma dirección que $\bar{a}$, el mismo sentido que $\bar{a}$ si r es positivo y sentido opuesto al de $\bar{a}$ si r es negativo, y cuya magnitud es igual al producto de $|r|$ por la magnitud de $\bar{a}$.

Observación : Si $|r| < 1$ entonces $|r\bar{a}| < |\bar{a}|$

$|r| > 1$ entonces $|r\bar{a}| > |\bar{a}|$

$r = 0$ entonces $|r\bar{a}| = |0\bar{a}| = 0 = \bar{e}$

Propiedades del producto de un escalar por un vector.

Sean a, b escalares y $\bar{a}$, $\bar{b}$ vectores cualesquiera, se cumple :

a) $a(b\bar{a}) = (ab)\bar{a}$

b) $a(\bar{a} + \bar{b}) = a\bar{a} + a\bar{b}$

ç) $(a + b)\bar{a} = a\bar{a} + b\bar{a}$

d) $1\bar{a} = \bar{a}$

e) $-1\bar{a} = -\bar{a}$

Se suguiere como ejercicio, demostrar estas propiedades.

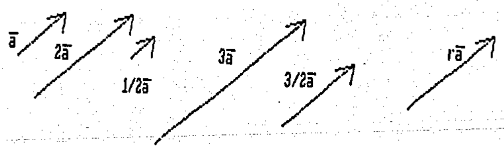
A partir de las operaciones definidas:

1)suma de vectores

2)producto de un escalar por un vector

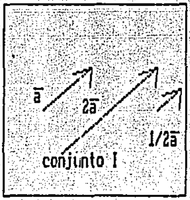
relacionaremos a los vectores entre sí.

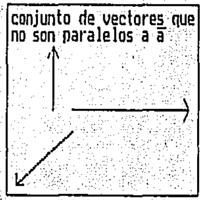
Sea $\bar{a}$ un vector cualquiera, mediante el producto de un escalar por un vector podemos relacionar a $\bar{a}$ con todos los vectores que sean un múltiplo escalar de $\bar{a}$: $2\bar{a}$, $1/2\bar{a}$, $3\bar{a}$, etc. Si a es un escalar cualquiera entonces $a\bar{a}$ es un múltiplo escalar de $\bar{a}$. Geométricamente tenemos un CONJUNTO de VECTORES PARALELOS.



El vector $\bar{a}$ y todos los vectores paralelos a él forman un conjunto llamémosle el CONJUNTO I; pero no son los únicos vectores que conocemos, existen muchos otros que no son paralelos a $\bar{a}$, el conjunto de todos aquellos vectores que no son paralelos a $\bar{a}$ incluye tanto vectores como el que va de un punto en ésta hoja hasta otro punto en nuestra cabeza, como vectores que podemos dibujar en la hoja.

Así, hemos clasificado a los vectores en dos conjuntos, uno que contiene a $\bar{a}$ y a todos los vectores paralelos a $\bar{a}$ (conjunto I) y otro que contiene a todos los que no son paralelos a $\bar{a}$.



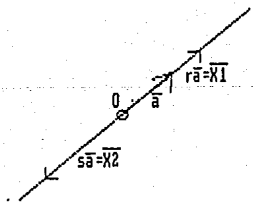


Es importante notar que el conjunto I es un CONJUNTO CERRADO bajo las operaciones definidas, es decir, dados dos vectores en el conjunto I, $\bar{a}$, $\bar{b}$ y cualquier escalar a, se cumple lo siguiente :

$\bar{a}+\bar{b}$ y $a\bar{a}$ son elementos del conjunto I

Así mismo, los elementos del conjunto I cumplen todas las propiedades de la suma de vectores y del producto de un escalar por un vector. Dejamos como ejercicio comprobarlo.

Para "visualizar" al conjunto I de alguna manera, tomemos un punto cualquiera como punto inicial de todos los elementos del conjunto I; recordemos que podemos hacer esto, porque los vectores son libres.



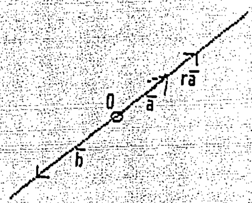
Analíticamente lo podemos representar de la siguiente manera:

$$\text{Conjunto I} = \{\bar{X}_i \mid \bar{X}_i = a_i\bar{a} \text{ con } a_i \text{ un escalar}\}$$

es decir, asociamos un escalar distinto a cada elemento del conjunto I; expresando a $\bar{X}_i$ en términos de $\bar{a}$, de tal forma que podemos referirnos a $\bar{X}_i$ por medio de a_i en términos de $\bar{a}$.

Ahora bien, tenemos representados a todos los vectores del conjunto I a partir de $\bar{a}$ (recordemos que $\bar{a}$ es un vector cualquiera), como todos ellos tienen la misma dirección podemos tomar algún otro vector $\bar{b}$ dentro del conjunto I y representar a los demás en función de él. De esta forma tenemos los mismos vectores pero representados de otra forma. Por ejemplo sea $\bar{X}1=3\bar{a}$ y sabemos que $\bar{b}=-2\bar{a}$, entonces $\bar{X}1$ es ahora igual a $-3/2\bar{b}$ y $\bar{a}=-1/2\bar{b}$; es decir, podemos caracterizar al MISMO conjunto I en función de $\bar{b}$:

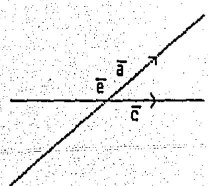
$$\text{Conjunto I} = \{\bar{X}_i \mid \bar{X}_i = b_i\bar{b} \text{ con } b_i \text{ un escalar}\}$$



Esto es, el conjunto I lo podemos caracterizar de distinta forma para cada vector en él; pero, sigue siendo el mismo conjunto.

Tomemos ahora el conjunto de todos los vectores que no podemos representar como $a\bar{a}$ para todo escalar a, geométricamente son aquellos vectores que no tienen la misma dirección de $\bar{a}$. Sin embargo, dentro de este conjunto podemos formar subconjuntos parecidos al conjunto I; si $\bar{c}$ es un vector cualquiera tal que $\bar{c}\neq a\bar{a}$ para todo escalar a, entonces todos los vectores paralelos a $\bar{c}$ forman un subconjunto similar al conjunto I.

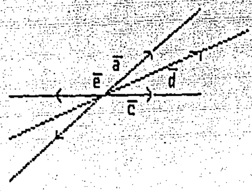
Tomemos entonces, dos conjuntos del tipo I; lo único que tendrán en común será el vector $\bar{e}$, por lo que los podemos dibujar de la siguiente forma:



Es decir, tomamos al vector $\overline{e}$ como punto inicial de cada uno de los vectores de ambos conjuntos.

La unión de estos dos conjuntos son todos los vectores de la forma $a\overline{a}$ ó $c\overline{c}$, donde a y c son escalares cualesquiera; dicho de otra forma, son todos los vectores paralelos a $\overline{a}$ ó a $\overline{c}$, sólo tenemos dos direcciones presentes.

Pero dado que los vectores son libres, podemos combinar las direcciones de $\overline{a}$ y $\overline{c}$ y obtener una nueva dirección; esto es, $\overline{d}\neq a\overline{a}$ y $\overline{d}\neq c\overline{c}$ para cualesquiera a y c escalares. La nueva dirección que obtuvimos es a partir del vector $\overline{d}=\overline{a}+\overline{c}$; notemos que $\overline{d}$ nos genera OTRO conjunto del tipo I.



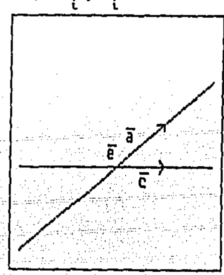
Combinando las direcciones de $\overline{a}$ y $\overline{c}$ con escalares cualesquiera, podemos obtener una infinidad de direcciones distintas y por lo tanto una infinidad de diferentes conjuntos del tipo I. En nuestro ejemplo tenemos, en particular, éste nuevo conjunto del tipo I:

$$\text{Conjunto I} = \{\overline{X}_i \mid \overline{X}_i = d_i\overline{d} \text{ con } d_i \text{ un escalar}\}$$

donde $\overline{d}=\overline{a}+\overline{c}$.

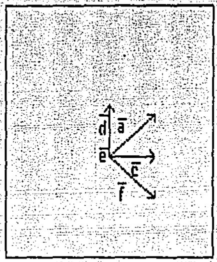
Ahora bien, al combinar $\overline{a}$ y $\overline{c}$ con escalares cualesquiera obtenemos nuevas direcciones y, este conjunto de nuevas direcciones nos genera un nuevo conjunto que llamaremos CONJUNTO II.

$$\text{Conjunto II} = \{\overline{Y}_i \mid \overline{Y}_i = a_i\overline{a}+c_i\overline{c} \quad \text{con } a_i, c_i \text{ escalares}\}$$



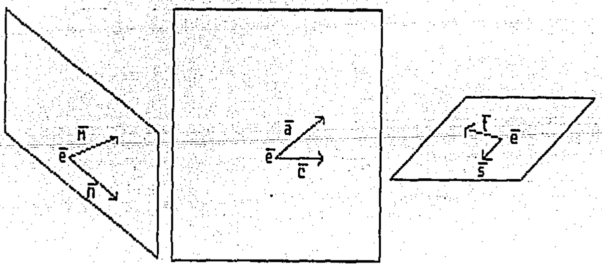
Como lo hicimos en el conjunto I, también dentro de este conjunto podemos tomar dos vectores $\overline{d}$ y $\overline{f}$ distintos de $\overline{a}$ y $\overline{c}$ y representar al conjunto II a partir de ellos, procurando obtener TODAS las direcciones presentes en el conjunto II (lo cual elimina el caso en que $\overline{d}=f1\overline{f}$, f1 un escalar, pues esto nos generaría un sólo conjunto del tipo I):

$$\text{Conjunto II} = \{\overline{Y}_i \mid \overline{Y}_i = d_i\overline{d}+f_i\overline{f} \quad \text{con } d_i, f_i \text{ escalares}\}$$



Se deja como ejercicio verificar que el conjunto del tipo II es cerrado bajo las operaciones definidas. (Es decir, cumple con las operaciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector).

Si cambiamos nuestras direcciones, es decir cambiamos a los vectores $\overline{a}$ y $\overline{c}$, podemos generar una infinidad de conjuntos del tipo II.



Cada uno de estos conjuntos del tipo II se representa como combinación de las dos direcciones que lo generan, por ejemplo:

$$\text{Conjunto II} = \{\overline{Y}_i \mid \overline{Y}_i = s_i\overline{s}+t_i\overline{t} \quad \text{con } s_i, t_i \text{ escalares}\}$$

y podemos cambiar la representación de cada uno de estos conjuntos del tipo II, utilizando cualesquiera dos vectores dentro del mismo conjunto, siempre que nos permitan generar todas las direcciones presentes en él:

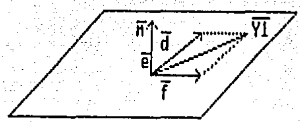
$$\text{Conjunto II} = \{\overline{Y}_i \mid \overline{Y}_i = s_i\overline{s}+t_i\overline{t} \quad \text{con } s_i, t_i \text{ escalares}\}$$
$$\text{Conjunto II} = \{\overline{Y}_i \mid \overline{Y}_i = q_i\overline{q}+r_i\overline{r} \quad \text{con } q_i, r_i \text{ escalares}\}$$

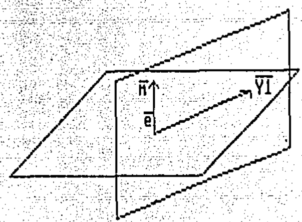
Así como hemos combinado los conjuntos del tipo I para obtener conjuntos del tipo II, podemos combinar un conjunto del tipo I y un conjunto del tipo II, de tal manera que el conjunto I NO ESTE CONTENIDO en el conjunto II:

$$\text{Conjunto I} = \{\overline{X}_i \mid \overline{X}_i = m_i\overline{m} \quad \text{con } m_i \text{ escalar}\}$$
$$\text{Conjunto II} = \{\overline{Y}_i \mid \overline{Y}_i = d_i\overline{d}+f_i\overline{f} \quad \text{con } d_i, f_i \text{ escalares}\}$$

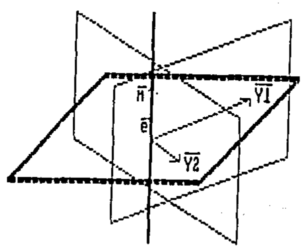
Tomemos al vector $\overline{m}$ del conjunto I y a un vector $\overline{Y1}=d1\overline{d}+f1\overline{f}$ del conjunto II, notemos que la combinación de éstas dos direcciones nos genera un NUEVO CONJUNTO DEL TIPO II, llamémosle:

$$\text{Conjunto II'} = \{\overline{Y'}_i \mid \overline{Y'}_i = m_i\overline{m}+y_i\overline{Y} \quad \text{con } m_i, y_i \text{ escalares}\}$$



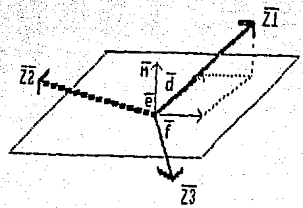


Y siempre que combinemos al vector $\overline{m}$ del conjunto I con un vector cualquiera $\overline{Y}_i = d_i\overline{d}+f_i\overline{f}$ del conjunto II, obtendremos un nuevo conjunto del tipo II'. Observemos que se han generado nuevas DIRECCIONES que NO ESTAN ni en el conjunto I, ni en el conjunto II.



Si ahora queremos considerar la UNION de TODOS LOS CONJUNTOS II', podemos observar que es lo mismo que si combinamos al vector $\overline{m}$ del conjunto I con los DOS vectores $\overline{d}$ y $\overline{f}$ del conjunto II; obtendremos nuevas direcciones que NO pertenecen ni al conjunto I, ni al conjunto II; éstas nuevas direcciones nos forman un nuevo conjunto, que llamaremos conjunto III,

$$\text{Conjunto III} = \{\overline{Z}_i \mid \overline{Z}_i = m_i\overline{m} + d_i\overline{d} + f_i\overline{f} \quad \text{con } m_i, d_i, f_i \text{ escalares}\}$$



Con un poco de imaginación notamos que todos los vectores $\overline{Z}_i$ que obtengamos de ésta forma, nos darán TODAS las direcciones que podemos dibujar en el espacio que tenemos; es decir, de alguna forma los vectores $\overline{Z}_i$ "llenan" nuestro espacio de dibujo (esto no lo dibujamos, por claridad).

Tomemos ahora otro conjunto I y otro conjunto II (recordando que el conjunto I NO ESTA CONTENIDO en el conjunto II).

$$\text{Conjunto I} = \{\overline{X}_i \mid \overline{X}_i = b_i\overline{b} \quad \text{con } b_i \text{ escalar}\}$$

$$\text{Conjunto II} = \{\overline{Y}_i \mid \overline{Y}_i = q_i\overline{q} + r_i\overline{r} \quad \text{con } q_i, r_i \text{ escalares}\}$$

Haciendo combinaciones del vector $\overline{b}$ con vectores $\overline{Y}_i = q_i\overline{q} + r_i\overline{r}$, obtendremos nuevamente diversos conjuntos del tipo II'. Pero, si combinamos al vector $\overline{b}$ con los dos vectores $\overline{q}$ y $\overline{r}$, obtendremos nuevamente EL MISMO CONJUNTO III. Lo único que hacemos es representar al mismo conjunto III, pero de otra forma, con otras direcciones:

$$\text{Conjunto III} = \{\overline{Z}_i \mid \overline{Z}_i = b_i\overline{b} + q_i\overline{q} + r_i\overline{r} \quad \text{con } b_i, q_i, r_i \text{ escalares}\}$$

Siempre que combinemos al vector que genera un conjunto I con los dos vectores que generan a un conjunto II (y que el conjunto I no este contenido en el conjunto II), estaremos representando al MISMO CONJUNTO III de distinta forma.

Definición.- Sean $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ n vectores y $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ n escalares cualesquiera. A una expresión de la forma:

$$\bar{b} = \sum a_i \bar{a}_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

se le conoce como COMBINACION LINEAL. Generalmente se dice que $\bar{b}$ es combinación lineal de los vectores $\bar{a}_i$.

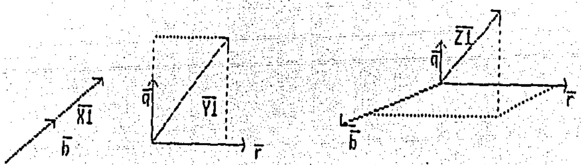
Por ejemplo, si definimos los siguientes conjuntos:

Conjunto I = $\{\bar{X}_i \mid \bar{X}_i = b_i \bar{b}$ con b_i escalar$\}$

Conjunto II = $\{\bar{Y}_i \mid \bar{Y}_i = q_i \bar{q} + r_i \bar{r}$ con q_i, r_i escalares$\}$

Conjunto III = $\{\bar{Z}_i \mid \bar{Z}_i = b_i \bar{b} + q_i \bar{q} + r_i \bar{r}$ con b_i, q_i, r_i escalares$\}$

la expresión $\bar{X}1 = b1\bar{b}$, la leeremos como: $\bar{X}1$ ES COMBINACION LINEAL DE $\bar{b}$; la expresión $\bar{Y}1 = q1\bar{q} + r1\bar{r}$, la leeremos como: $\bar{Y}1$ ES COMBINACION LINEAL DE $\bar{q}$ y de $\bar{r}$; y la expresión $\bar{Z}1 = b1\bar{b} + q1\bar{q} + r1\bar{r}$, la leeremos como: $\bar{Z}1$ ES COMBINACION LINEAL DE $\bar{b}$, $\bar{q}$ y $\bar{r}$.



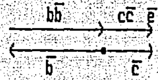
Entonces diremos que, las combinaciones lineales de dos conjuntos I nos generan UN conjunto II y las combinaciones lineales de UN conjunto I y UN conjunto II nos generan EL conjunto III.

Tomemos una combinación lineal bien particular de todas las anteriores, sea $\bar{b} = \sum a_i \bar{a}_i$ $i = 1, \ldots, n$ y $a_i = 0$ para toda i. Dibujamos ésta combinación lineal como un punto. El vector que nos representa este punto es el vector $\bar{e}$.

A la expresión $\bar{e} = \sum a_i \bar{a}_i$ $i = 1, \ldots, n$ y $a_i = 0$, para toda i, le llamaremos COMBINACION LINEAL NULA TRIVIAL.

Cabe recalcar que no siempre es necesario que los escalares sean iguales a cero para obtener el vector $\bar{e}$, por ejemplo $\bar{e}=\bar{b}+(-\bar{b})$ para cualquier vector $\bar{b}$.

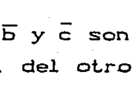
Si tomamos dos vectores $\bar{b}$ y $\bar{c}$ en un conjunto I, siempre podremos encontrar escalares b y c, tales que: $\bar{e}=b\bar{b}+c\bar{c}$; esto es porque ambos vectores son uno múltiplo del otro.



Si tomamos tres vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en un conjunto I, también podremos encontrar escalares a, b, c, diferentes de cero, tales que: $\bar{e}=a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}$.

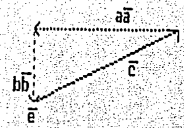
Análogamente para más de tres vectores en el conjunto I.

En cambio, si tomamos dos vectores no paralelos $\bar{b}$ y $\bar{c}$ en un conjunto II, NO podemos obtener al vector $\bar{e}$ como combinación lineal de $\bar{b}$ y $\bar{c}$ (con escalares distintos de cero). La única combinación lineal que satisface $\bar{e}=b\bar{b}+c\bar{c}$, es la combinación lineal nula trivial (es decir, b=c=0).



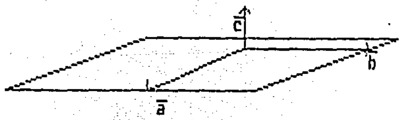
Si los dos vectores $\bar{b}$ y $\bar{c}$ son paralelos , podemos representar a uno como combinación lineal del otro y tendríamos un caso análogo al del conjunto I.

Sí tomamos tres vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en un conjunto II, ¿podremos encontrar escalares a, b, c diferentes de cero tales que : $\bar{e}=a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}$?. La respuesta es SI, porque siempre podremos expresar a uno de ellos como combinación lineal de los otros dos digamos $\bar{c}=a\bar{a}+b\bar{b}$, por lo tanto $\bar{e}=-(a\bar{a}+b\bar{b})+\bar{c}$.



Análogamente para más de tres vectores en el conjunto II.

Ahora tomemos tres vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ en el conjunto III, de forma que $\bar{a}$ sea el vector que genera un conjunto I y $\bar{b}$ y $\bar{c}$ sean vectores en un conjunto II (donde el conjunto I no está contenido en el conjunto II), ¿podremos encontrar escalares a, b y c diferentes de cero tales que $\bar{e}=a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}$?. La respuesta es NO, porque no podemos expresar a $\bar{c}$ como combinación lineal de $\bar{a}$ y $\bar{b}$.



Pero, sí tomamos cuatro vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{d}$ en el conjunto III tales que $\bar{d}$ sea combinación lineal de $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$. Podremos encontrar escalares a, b, c y d diferentes de cero tales que : $\bar{e}=a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d}$.

Dejamos como ejercicio, discutir cuando podemos representar al vector $\bar{e}$ en cada una de las tres clases de conjuntos de vectores que tenemos, como combinación lineal de más de tres vectores.

Definición.- Sean $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n\}$ n vectores, diremos que son VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES si la única combinación lineal de ellos igual al vector $\bar{e}$ es la combinación lineal nula trivial, esto es:

$$\bar{e}=\sum a_i\bar{a}_i \quad i = 1,\ldots,n \text{ y } a_i=0 \text{ para toda } i.$$

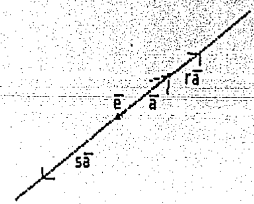
En otras palabras, no podemos representar a alguno de ellos en términos de los demás.

Definición.- Sean $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n\}$ n vectores, diremos que son VECTORES LINEALMENTE DEPENDIENTES si podemos encontrar una combinación lineal de ellos igual al vector $\bar{e}$ distinta de la combinación lineal nula trivial, esto es:

$$e=\sum a_i\bar{a}_i \quad i = 1,\ldots,n \text{ y } a_i\neq0 \text{ para alguna } i.$$

En otras palabras, podemos representar a alguno de ellos en términos de los demás.

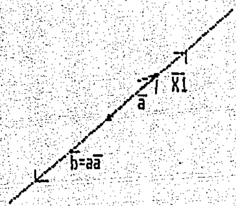
Regresemos ahora al conjunto I (conjunto de todos los vectores paralelos entre sí) y sea $\bar{a}$ un vector de este conjunto sabemos que podemos caracterizar a todo el conjunto I en términos de $\bar{a}$ de la siguiente forma:



si $\bar{X}$ es cualquier vector en el conjunto I, entonces $\bar{X}=a\bar{a}$ para algun escalar $a\neq0$. Decimos que el conjunto $\{\bar{a}\}$ GENERA al conjunto I, es decir podemos representar a todos los vectores del conjunto I como una combinación lineal de $\bar{a}$.

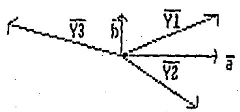
Debemos notar sin embargo, que esto sucede PARA CADA vector en el conjunto I, es decir si $\bar{X}$ es un vector cualquiera en el conjunto I podemos representar a todos los demás vectores como combinación lineal de $\bar{X}$.

Ahora bien, ¿qué pasa si tenemos dos vectores $\{\bar{a},\bar{b}\}$? ¿Podremos decir que ambos generan al conjunto I?



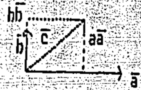
SI pero, $\bar{X}_i = a_i\bar{a}+b_i\bar{b} = a_i\bar{a}+b_i(a\bar{a}) = (a_i+b_ia)\bar{a}$ y como a_i, b_ia son escalares, entonces $\bar{X}_i = a_i'\bar{a}$, $a_i'=a_i+b_ia$; por lo tanto obtenemos el mismo conjunto y podemos decir que $\bar{b}$ "está de más" en la generación del conjunto I; dado que uno de ellos siempre lo podemos representar como combinación lineal del otro $\bar{b}=a\bar{a}$, entonces CUALQUIER CONJUNTO MINIMO QUE GENERE AL CONJUNTO I TIENE UN SOLO ELEMENTO.

Tomemos ahora a un conjunto II , sabemos que no podemos caracterizar al conjunto II con un sólo vector porque no todos sus elementos son paralelos entre sí. Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores no paralelos en el subconjunto II, ¿podremos representar como combinación lineal de ellos a cualquier vector en este conjunto II? Como lo vimos anteriormente SI podemos encontrar $a,b\neq 0$ tales que: $\bar{Y}=a\bar{a}+b\bar{b}$, para cualquier $\bar{Y}$ en este conjunto II.



¿Qué pasa si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son paralelos entre sí? Entonces podemos representar a uno en términos del otro y tendríamos un conjunto con un sólo vector, el cual no nos sirve para generar a TODO el conjunto II. En otras palabras NECESITAMOS QUE $\bar{a}$ Y $\bar{b}$ SEAN VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

¿Qué pasa si tenemos un conjunto de tres vectores $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ para generar al subconjunto II? Como lo vimos anteriormente uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros dos,



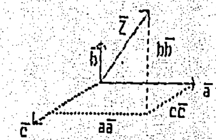
es decir los vectores del conjunto $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ NO son linealmente independientes. Esto significa que UNICAMENTE NECESITAMOS UN CONJUNTO DE DOS VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES PARA GENERAR A TODO UN CONJUNTO II.

También podemos notar que esto sucede PARA CUALQUIER par de vectores linealmente independientes en este conjunto II, es decir si $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ son vectores cualesquiera linealmente independientes en este conjunto II podemos representar a todos los demás vectores como combinación lineal de ellos.

Vayamos ahora al conjunto III, sabemos que no podemos caracterizar al conjunto III con un conjunto de dos vectores, porque lo generamos a partir de tres direcciones.

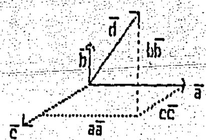
Sean $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ vectores en el conjunto III tales que ninguno sea combinación lineal de los otros, es decir tales que sean linealmente independientes ¿podremos representar como combinación lineal de ellos a cualquier vector en el conjunto III?

Como lo vimos anteriormente SI podemos encontrar a,b,c≠0 tales que: $\bar{Z}=a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}$, para cualquier $\bar{Z}$ en el conjunto III.



Recalquemos que es importante que los tres vectores sean linealmente independientes porque si alguno de ellos se puede representar en términos de otro ó de los otros dos, se tendría un conjunto con dos vectores que no nos sirve para generar a TODO el conjunto III.

¿Qué pasa si tenemos un conjunto de cuatro vectores $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}\}$ para generar al conjunto III?



Necesariamente uno de ellos es una combinación lineal de los otros tres, es decir estos vectores NO son linealmente independientes. Esto significa que UNICAMENTE NECESITAMOS UN CONJUNTO DE TRES VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES PARA GENERAR A TODO EL CONJUNTO III.

También podemos notar que esto sucede PARA CUALQUIER trio de vectores linealmente independientes en el conjunto III, es decir si $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ son vectores cualesquiera linealmente independientes en el conjunto III podemos representar a todos los demás vectores como combinación lineal de ellos.

Definición.- Al conjunto de vectores en términos del cual representamos a todos y cada uno de los demás vectores en un conjunto y que tiene las siguientes características :

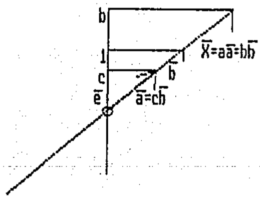
a) Ser subconjunto del conjunto que vamos a representar

b) Ser un conjunto linealmente independiente

c) Generar a todos los vectores del conjunto (incluso a los del propio subconjunto)

se le llama BASE del conjunto que representa.

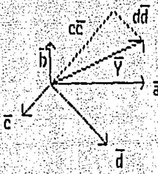
Por ejemplo, si $\{\overline{a}\}$ es tal que para todo $\overline{X}$ en el conjunto I, $\overline{X}=a\overline{a}$ para algun escalar a, entonces $\{\overline{a}\}$ ES BASE DEL CONJUNTO I. Por otro lado vimos que LAS BASES NO SON UNICAS. Supongamos que $\overline{X}=a\overline{a}$ para todo $\overline{X}$ en el conjunto I y para algun escalar a, sea $\overline{b}$ en el conjunto I, ahora queremos representar a todo vector $\overline{X}$ como $\overline{X}=b\overline{b}$ para algun escalar b y sabemos que $\overline{a}=c\overline{b}$, geométricamente encontramos b así,



y analíticamente $\overline{X}=a\overline{a}=a(c\overline{b})=b\overline{b}$, donde b=ac.

Tomemos ahora una base $\{\overline{a},\overline{b}\}$ para un conjunto II, sabemos que $\overline{Y}=a\overline{a}+b\overline{b}$ para todo $\overline{Y}$ en este conjunto II y para algunos escalares a y b. Sean $\overline{c}$ y $\overline{d}$ vectores en este conjunto II, ahora queremos representar a todo vector $\overline{Y}$ como $\overline{Y}=c\overline{c}+d\overline{d}$ para algunos escalares c y d, ¿que hacemos?.

Sabemos que podemos encontrar una combinación lineal para $\bar{a}$ y otra para $\bar{b}$ en términos de $\bar{c}$ y $\bar{d}$, es decir $\bar{a}=c1\bar{c}+d1\bar{d}$ y $\bar{b}=c2\bar{c}+d2\bar{d}$, geométricamente encontramos c y d así,



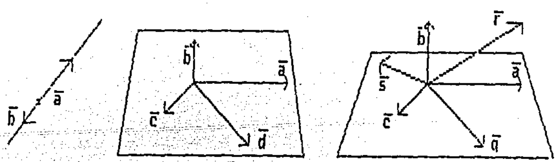
y analíticamente $\bar{X}=a\bar{a}+b\bar{b}$, luego

$$\bar{X}=a(c1\bar{c}+d1\bar{d})+b(c2\bar{c}+d2\bar{d})$$
$$\bar{X}=(ac1+bc2)\bar{c}+(ad1+bd2)\bar{d}$$
$$\bar{X}=c\bar{c}+d\bar{d}$$

Lo que estamos haciendo recibe el nombre de CAMBIO DE BASE. Es decir, buscamos la representación de un sólo vector en términos de distintas bases.

Definición .- La CARDINALIDAD de un conjunto A es el número de elementos del conjunto. Se denota por #A.

Algo que tienen en común las bases de un ESPACIO VECTORIAL y es conveniente notarlo, es que siempre tendrán la misma cardinalidad. Por ejemplo todas las bases del conjunto I tienen cardinalidad 1, todas las bases de cualquier conjunto II tienen cardinalidad 2 y todas las bases del conjunto III tienen cardinalidad 3.

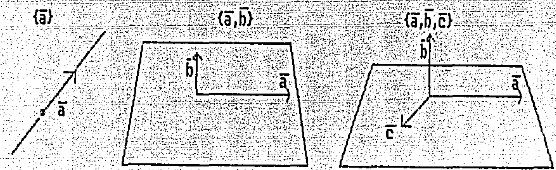


Definición : Sea U el conjunto de todos los vectores, donde definimos dos operaciones entre vectores llamadas suma y producto de un escalar por un vector y donde se cumplen todas las propiedades de estas operaciones. Al conjunto U con estas características se le llama ESPACIO VECTORIAL.

A los conjuntos I, II, III se les llama ESPACIOS VECTORIALES.

Definición.- A la cardinalidad de cualquier conjunto base de un espacio vectorial se llama la DIMENSION del espacio vectorial.

La dimensión del espacio vectorial que representa cualquier conjunto I es 1. La dimensión del espacio vectorial que representa cualquier conjunto II es 2, y la dimensión del espacio vectorial representado por el conjunto III es 3.

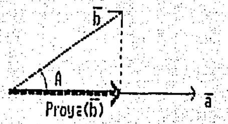


Por otro lado, si relacionamos a los tres espacios vectoriales I, II y III, tendremos que cualquier espacio vectorial I está contenido en algún espacio vectorial II y cualquier espacio vectorial II a su vez, está contenido en el espacio vectorial III; es decir, los espacios vectoriales I y II SON SUBESPACIOS VECTORIALES del espacio vectorial III.

2.2 Otras operaciones entre vectores.

Hasta ahora hemos manejado dos tipos de operaciones entre vectores la suma y el producto de un escalar por un vector; a continuación definiremos una tercera operación, que nos será útil en lo sucesivo, a través de UN significado geométrico.

Definición .- Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$ vectores cualesquiera y A el ángulo entre ellos, la PROYECCION (ortogonal) DE $\bar{a}$ EN $\bar{b}$ que denotamos por $Proy_{\bar{a}}(\bar{b})$ será el vector que tiene la misma dirección de $\bar{a}$, es paralelo a $\bar{a}$ y cuya magnitud es $|Proy_{\bar{a}}(\bar{b})|=|\bar{b}|\cos A$.



$Proy_{\bar{a}}(\bar{b})=c\bar{a}$, donde $|c\bar{a}|=|\bar{b}|\cos A$ porque fabricamos un triángulo rectángulo y el cateto adyacente $|Proy_{\bar{a}}(\bar{b})|$ es el valor de la hipotenusa por cosA.

Como cosA varía entre -1 y 1, el sentido de la proyección será positiva si $\cos A>=0$ y negativa si $\cos A<0$.

Si ahora multiplicamos por $|\bar{a}|$, obtenemos lo que vamos a definir como el PRODUCTO PUNTO,

$$|\bar{a}|\,|c\bar{a}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos A$$

Definición .- Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$ vectores cualesquiera y A el ángulo entre ellos, definimos la operación llamada PRODUCTO PUNTO (también llamada PRODUCTO ESCALAR, PRODUCTO INTERIOR) como :

$$\bar{a}\bullet\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos A$$

Propiedades del producto punto :

1) NO es una operación cerrada, porque operamos dos vectores y obtenemos como resultado un escalar.

2) $\bar{a}\bullet\bar{b} = \bar{b}\bullet\bar{a}$

3) $a(\bar{a}\bullet\bar{b}) = (a\bar{a})\bullet\bar{b} = \bar{a}\bullet(a\bar{b})$

4) $\bar{a}\bullet(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bullet\bar{b} + \bar{a}\bullet\bar{c}$

5) $\bar{a}\bullet\bar{b} = 0$ si $\bar{a}$ ó $\bar{b} = \bar{e}$

si $\bar{a}$ y $\bar{b} \neq \bar{e}$, pero $A = 90°$ ó $270°$

Se suguiere como ejercicio, demostrar estas propiedades.

Hasta el momento hemos caracterizado a los vectores geométricamente como flechas y hemos dicho que para identificarlos se requiere conocer su magnitud, su dirección y su sentido. A partir de todo lo visto anteriormente y en particular de la definición y propiedades del producto punto, vamos a encontrar una representación analítica de la magnitud, de la dirección y del sentido de un vector.

Sea $\bar{X}$ un vector cualquiera en un espacio vectorial, podemos calcular su magnitud (módulo, tamaño, norma) analíticamente como sigue:

$$\bar{X}\bullet\bar{X} = |\bar{X}||\bar{X}| \cos 0 = |\bar{X}|^2$$

es decir, $|\bar{X}| = \sqrt{\bar{X}\bullet\bar{X}}$

es claro que el ángulo entre un vector y el mismo es cero, como sabemos $\cos 0 = 1$.

Como las magnitudes son no negativas $|\bar{X}|>0$ siempre y será igual a cero si $\bar{X}=\bar{e}$.

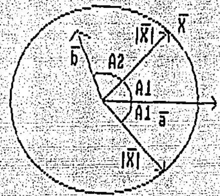
Para caracterizar debidamente al vector $\bar{X}$ debemos encontrar analíticamente su dirección y su sentido; para ello tomemos en cuenta que $\bar{X}$ lo podemos escribir como combinación lineal de los vectores que son la base del espacio vectorial, es decir, si $\{\bar{a},\bar{b}\}$ es una base del espacio de dimensión dos donde se encuentra $\bar{X}$, podemos escribir :

$\bar{X} = a\bar{a}+b\bar{b}$, entonces,

$$|\bar{X}| = \sqrt{\bar{X}\bullet\bar{X}}$$
$$= \sqrt{(a\bar{a}+b\bar{b})\bullet(a\bar{a}+b\bar{b})}$$
$$= \sqrt{a^2|\bar{a}|^2+ba|\bar{b}||\bar{a}|\cos A+ab|\bar{a}||\bar{b}|\cos A+b^2|\bar{b}|^2}$$

$$|\bar{X}| = \sqrt{a^2|\bar{a}|^2+b^2|\bar{b}|^2+2ab|\bar{a}||\bar{b}|\cos A}$$

Ahora debemos encontrar el ángulo A1 entre $\bar{X}$ y $\bar{a}$, y el ángulo A2 entre $\bar{X}$ y $\bar{b}$; es decir, relacionamos la dirección de $\bar{X}$ con las direcciones que conocemos (las direcciones de los vectores de la base). Es conveniente notar que el ángulo entre $\bar{X}$ y $\bar{a}$, por ejemplo, no es suficiente para caracterizar la dirección de $\bar{X}$, debido a que el coseno es una función periódica, por lo cual necesitamos A2.



Para encontrar los ángulos A1 y A2 recurrimos nuevamente al producto punto,

$$\bar{a}\bullet\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos A, \text{ de donde}$$

$$\cos A = \bar{a}\bullet\bar{b} \;/\; |\bar{a}||\bar{b}|$$

por lo tanto, para A1 y A2 tenemos :

$$\cos A1 = \bar{a}\bullet\bar{X} \;/\; |\bar{a}||\bar{X}| = \bar{a}\bullet(a\bar{a}+b\bar{b}) \;/\; |\bar{a}||a\bar{a}+b\bar{b}|$$

$$\cos A2 = \bar{b}\bullet\bar{X} \;/\; |\bar{b}||\bar{X}| = \bar{b}\bullet(a\bar{a}+b\bar{b}) \;/\; |\bar{b}||a\bar{a}+b\bar{b}|$$

Como ya tenemos una expresión para $|a\bar{a}+b\bar{b}|$, sustituimos :

$$\cos A1 = \bar{a}\bullet(a\bar{a}+b\bar{b})/|\bar{a}|\sqrt{a^2|\bar{a}|^2+b^2|\bar{b}|^2+2ab|\bar{a}||\bar{b}|\cos A}$$

$$= a|\bar{a}|^2+b|\bar{a}||\bar{b}|\cos A/|\bar{a}|\sqrt{a^2|\bar{a}|^2+b^2|\bar{b}|^2+2ab|\bar{a}||\bar{b}|\cos A}$$

$$\cos A2 = \bar{b}\bullet(a\bar{a}+b\bar{b})/|\bar{b}|\sqrt{a^2|\bar{a}|^2+b^2|\bar{b}|^2+2ab|\bar{a}||\bar{b}|\cos A}$$

$$= b|\bar{b}|^2+b|\bar{a}||\bar{b}|\cos A/|\bar{b}|\sqrt{a^2|\bar{a}|^2+b^2|\bar{b}|^2+2ab|\bar{a}||\bar{b}|\cos A}$$

Podemos obtener A1 y A2 calculando ambas expresiones pero, es conveniente encontrar una forma de simplificarlas.

¿Qué es lo que hacemos? Buscamos una BASE ORTONORMAL, esto es, una base $\{\bar{a},\bar{b}\}$ tal que suceda lo siguiente :

Que el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ sea 90° ó 270° (ORTOgonalidad), para que cos A = 0, eliminando así el doble producto.
Que $|\bar{a}| = 1$ y $|\bar{b}| = 1$ (NORMALización).

Con esto tenemos que $|\bar{X}| = \sqrt{a^2+b^2}$, luego entonces :

$$\cos A1 = \bar{a}\bullet(a\bar{a}+b\bar{b})/|\bar{a}|\sqrt{a^2+b^2}$$
$$= a\bar{a}\bullet\bar{a}+\bar{a}\bullet b\bar{b}/(1)\sqrt{a^2+b^2}$$
$$= a|\bar{a}|^2+b(0)/\sqrt{a^2+b^2}$$
$$= a/\sqrt{a^2+b^2}$$

en forma análoga obtenemos :

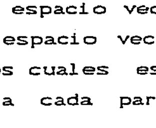
$$\cos A2 = b\ /\sqrt{a^2+b^2}$$

Definición.- A partir de cualquier vector $\bar{a}$ podemos obtener un VECTRO UNITARIO o VERSOR de la siguiente forma:

$$\hat{a}=\bar{a}/|\bar{a}|$$

la norma de $\hat{a}$ siempre es igual a 1, $|\hat{a}|=1$.

Proposición.- Sean I y J un par de vectores en un espacio vectorial de dimensión dos, tales que {I,J} sea una base ortonormal (donde el ángulo entre I y J es de 90°). A dicha base se le conoce como la BASE CANONICA.

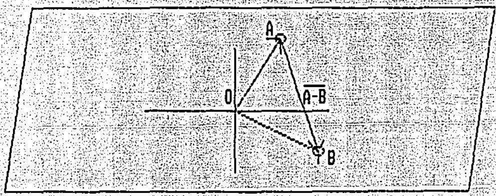


Definición.- Sea V un espacio vectorial de dimensión dos. Se llama PLANO AFIN asociado al espacio vectorial V, a un conjunto de elementos A,B,C,....., entre los cuales está definida una operación llamada DIFERENCIA, tal que a cada par ordenado de puntos (A,B) corresponde la diferencia A-B, que es un vector de V, teniendo lugar los siguientes axiomas :

1) $A - B = -(B - A)$

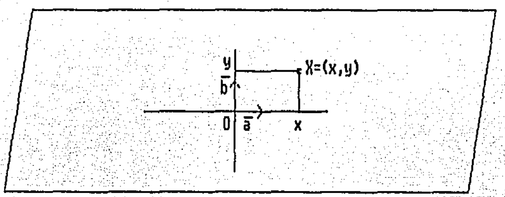
2) $(C - B) + (B - A) = C - A$

3) Si O es un punto del plano afín, a cada vector $\overline{X}$ de V le corresponde un único punto X tal que $X - O = X$

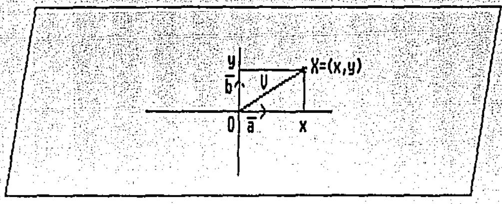


En particular, {I,J} es la base ortonormal asociada a todo plano afín, sin embargo recordemos que I y J son vectores libres, por lo que podemos dibujarlos en distintos lugares.

Definición.- En lo sucesivo llamaremos PLANO CARTESIANO o SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS a un espacio afín asociado a un espacio vectorial de dimensión dos, donde hemos definido un punto fijo O, llamado origen, y una base $\{\overline{a},\overline{b}\}$, de forma tal que a cada punto X le corresponden dos números reales (x,y), llamados COORDENADAS CARTESIANAS del punto X, y recíprocamente, a todo par de números reales (x,y) le corresponde un punto X del plano cartesiano. En particular al origen se le asocian las coordenadas $(0,0)$. El plano cartesiano se representa de la siguiente forma.



Ahora bien, a todo punto X del plano cartesiano le corresponde un vector V que podemos definir a partir del origen O y de la base $\{\bar{a},\bar{b}\}$, como $V = x\bar{a} + y\bar{b}$, donde (x,y) son las coordenadas del punto X.



Si sucede que $\{\bar{a},\bar{b}\}$ es una base ortonormal entonces el sistema coordenado se llama SISTEMA COORDENADO ORTOGONAL.

Es conveniente hacer notar que los PUNTOS que hemos definido como elementos del plano cartesiano son elementos FIJOS, mientras que los VECTORES son elementos LIBRES.

Definición.- Dados dos puntos X1, X2 de coordenadas (x1,y1), (x2,y2) respectivamente, definimos la DISTANCIA entre ellos como un número real d (módulo o norma del vector) :

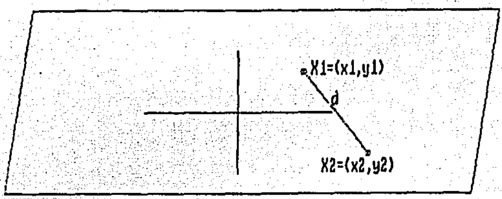
$$d(X1,X2) = |(x1I+y1J) - (x2I+y2J)|$$
$$= |(x1-x2)I + (y1-y2)J|$$

dado que I y J son vectores ortonormales y $|\bar{a}| = \bar{a}\bullet\bar{a}$, tenemos que la distancia entre dos puntos X1 y X2 es :

$$d^2 = (x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2$$

Si llamamos $\bar{X}$ al vector distancia entre X1 y X2, tenemos que

$$d(X1,X2) = |\bar{X}|$$



Ejemplo:

Dado cualquier vector $\bar{a}$ en un espacio vectorial de dimensión dos, encontrar una base ortonórmal que contenga su dirección.

¿Que hacemos? Buscamos una base $\{\bar{a},\bar{b}\}$ tal que :

el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ sea $90°$ o $270°$, y

$|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$

Conocemos la base $\{I,J\}$, que relaciona un espacio de dimensión dos con el plano cartesiano, entonces podemos representar al vector $\bar{a}$ en términos de ésta base como $\bar{a} = a1I + a2J$

como queremos que $|\bar{a}| = 1$, escribimos :

$$\bar{a} = a1I + a2J$$

$$(1/|\bar{a}|)(\bar{a}) = (a1/|\bar{a}|)I + (a2/|\bar{a}|)J$$

sean $a1'=a1/|\bar{a}|$ y $a2'=a2/|\bar{a}|$

Para encontrar un vector $\bar{b}$ ortogonal al vector $\bar{a}$, utilizamos el hecho de que $\bar{b}\bullet\bar{a} = 0$, luego entonces :

$$\begin{aligned}
\bar{b}\bullet\bar{a} &= (b1I + b2J)(a1'I + a2'J) \\
&= a1'b1\ I\bullet I + a1'b2\ I\bullet J + a2'b1\ J\bullet I + a2'b2\ J\bullet J \\
&= a1'b1|I|^2 + a1'b2|I||J|\cos 90° + a2'b1|J||I|\cos 90° + a2'b2|J|^2 \\
&= a1'b1 + a2'b2 \qquad \text{porque } \cos 90°=0 \text{ y } |I|=|J|=1
\end{aligned}$$

como queremos $a1'b1 + a2'b2 = 0$, proponemos :

1) $\bar{b} = a2'I - a1'J$

$= (a2/|\bar{a}|,-a1/|\bar{a}|)$, si el ángulo es $270°$

2) $\bar{b} = -a2'I + a1'J$

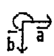
$= (-a2/|\bar{a}|,a1/|\bar{a}|)$, si el ángulo es $90°$

enfatizemos que lo único que varia entre estos vectores es el signo (es decir, el sentido), ambos tienen las mismas componentes pero tienen distinto signo.

Al vector $\bar{b}$ del inciso 2), le llamaremos ($\bar{b}$ ORTOGONAL) $\bar{b}^{\perp}$.

Definición.- Sea $\{\bar{a},\bar{b}\}$ una base ortonormal en un espacio de dimensión dos, se dice que la base es DERECHA si el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es de $90°$y se dice que es IZQUIERDA si el ángulo es de $270°$.

DERECHA



IZQUIERDA

Ejemplo numérico:

Sea $\bar{a} = 3I + 2J$ un vector en un espacio de dimensión dos, encontrar una base ortonormal derecha que contenga la dirección de $\bar{a}$.

1o.- Obtenemos la norma de $\bar{a}$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\bullet\bar{a}} = \sqrt{(3I+2J)\bullet(3I+2J)} = \sqrt{9|I|^2+6|I||J|+6|I||J|+4|J|^2}$$

como I y J son ortonormales $|I|=|J|=1$ y $I\bullet J = 0$

$$= \sqrt{9(1)+6(0)+6(0)4(1)} = \sqrt{13}$$

2o. Normalizamos a $\bar{b}$ (encontramos el versor):

$$\hat{a} = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3I+2J)$$

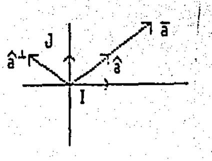
$$= \frac{3}{\sqrt{13}} I + \frac{2}{\sqrt{13}} J$$

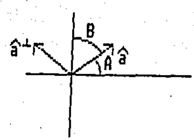
3o. Buscamos una base ortonormal derecha, es decir, queremos un vector perpendicular a $\hat{a}$; como lo vimos anteriormente lo único que necesitamos es permutar las componentes de $\hat{a}$ y cambiar un signo:

$$\hat{a}^{\perp} = \frac{-2}{\sqrt{13}} I + \frac{3}{\sqrt{13}} J$$

Notemos que:

$$\hat{a} = \frac{3}{\sqrt{13}} I + \frac{2}{\sqrt{13}} J = \cos A \; I + \cos B \; J$$





Con todo lo anterior ya podemos fabricar una base ortonormal derecha en un espacio vectorial de dos dimensiones.

Ahora hagamos todo lo anterior para $\bar{X}$, un vector cualquiera en un espacio vectorial de dimensión tres. Sea $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ una base del espacio vectorial, sabemos que la magnitud de $\bar{X}$ es :

$$|\bar{X}| = \sqrt{\bar{X}\bullet\bar{X}}$$

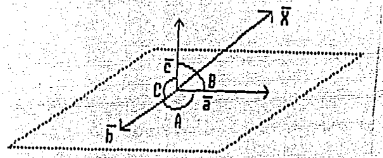
representamos a $\bar{X}$ como combinación lineal de los vectores de la base:

$$\bar{X} = a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}$$

luego,

$$|\bar{X}| = \sqrt{(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c})\bullet(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c})}$$

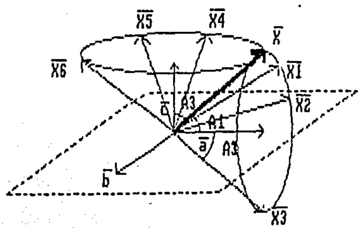
$$= \sqrt{\begin{aligned}&a^2|\bar{a}|^2+ba|\bar{b}||\bar{a}|\cos A+ca|\bar{c}||\bar{a}|\cos B\\ &+b^2|\bar{b}|^2+ab|\bar{a}||\bar{b}|\cos A+bc|\bar{b}||\bar{c}|\cos C\\ &+c^2|\bar{c}|^2+ac|\bar{a}||\bar{c}|\cos B+cb|\bar{c}||\bar{b}|\cos C\end{aligned}}$$



$$|\bar{X}| = \sqrt{a^2|\bar{a}|^2+b^2|\bar{b}|^2+c^2|\bar{c}|^2+2ab|\bar{a}||\bar{b}|\cos A+2ac|\bar{a}||\bar{c}|\cos B+2bc|\bar{b}||\bar{c}|\cos C}$$

donde A es el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$, B es el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{c}$, y C es el ángulo entre $\bar{b}$ y $\bar{c}$.

Nuevamente, para encontrar la dirección y el sentido de $\bar{X}$, debemos relacionar la dirección de $\bar{X}$ con las direcciones de los vectores de la base. Ahora es conveniente recalcar que no es suficiente conocer uno o dos ángulos, por ejemplo el ángulo A1 entre $\bar{X}$ y $\bar{a}$ y el ángulo A3 entre $\bar{X}$ y $\bar{c}$, sino que debemos conocer los tres ángulos, es decir también el ángulo A2 entre $\bar{X}$ y $\bar{b}$.



Para encontrar los ángulos A1, A2 y A3 recurrimos nuevamente al producto punto; ejemplificaremos únicamente como obtener A3.

$$\bar{b}\bullet\bar{c} = |\bar{b}||\bar{c}|\cos C, \text{ de donde}$$

$$\cos C = \bar{b}\bullet\bar{c} \,/\, |\bar{b}||\bar{c}|$$

por lo tanto, para A3 tenemos :

$$\cos A3 = \bar{c}\bullet\bar{X} \,/\, |\bar{c}||\bar{X}|$$

$$= \bar{c}\bullet(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c})/|\bar{c}||a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}|$$

sustituyendo $|a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}|$ por la expresión que obtuvimos anteriormente tenemos,

$$\cos A3 = \frac{\bar{c}\bullet(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c})}{|\bar{c}|\sqrt{a^2|\bar{a}|^2+b^2|\bar{b}|^2+c^2|\bar{c}|^2+2ab|\bar{a}||\bar{b}|\cos A+2ac|\bar{a}||\bar{c}|\cos B+2bc|\bar{b}||\bar{c}|\cos C}}$$

$$\cos A3 = \frac{a|\bar{c}||\bar{a}|\cos B+b|\bar{c}||\bar{b}|\cos C+c|\bar{c}|^2}{|\bar{c}|\sqrt{a^2|\bar{a}|^2+b^2|\bar{b}|^2+c^2|\bar{c}|^2+2ab|\bar{a}||\bar{b}|\cos A+2ac|\bar{a}||\bar{c}|\cos B+2bc|\bar{b}||\bar{c}|\cos C}}$$

Para simplificar estas expresiones buscamos una base ortonormal $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ que cumpla lo siguiente :

Que el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ sea 90°,
que el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{c}$ sea 90°,
y que el ángulo entre $\bar{b}$ y $\bar{c}$ sea 90°(ORTOgonalidad), para que $\cos A = \cos B = \cos C = 0$, eliminando así los doble productos
Que $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$ (NORMALización).

Con esto tenemos que $|\bar{X}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, luego entonces :

$$\cos A3 = \bar{c}\bullet(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c})/|\bar{c}|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$= a(\bar{c}\bullet\bar{a})+b(\bar{c}\bullet\bar{b})+c(\bar{c}\bullet\bar{c})/(1)\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

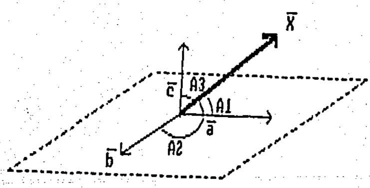
$$= a(0)+b(0)+c(1)/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$= c \,/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

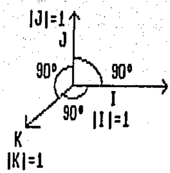
en forma análoga, obtenemos :

$$\cos A1 = a \,/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\cos A2 = b \,/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$



Proposición.- Sean I, J y K una terna de vectores en un espacio vectorial de dimensión tres, tales que {I,J,K} sea una base ortonormal derecha. A dicha base se le conoce como la BASE CANONICA.

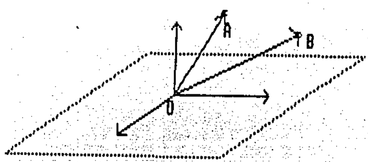


Definición.- Sea V un espacio vectorial de dimensión tres. Se llama ESPACIO AFIN asociado al espacio vectorial V, a un conjunto de elementos A,B,C,....., entre los cuales está definida una operación llamada DIFERENCIA, tal que a cada par ordenado de puntos (A,B) corresponde la diferencia A-B que es un vector de V, teniendo lugar los siguientes axiomas :

1) $A - B = -(B - A)$

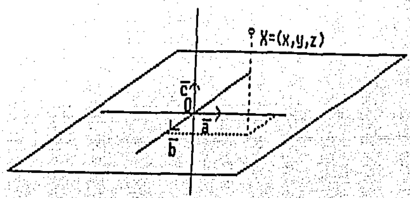
2) $(C - B) + (B - A) = C - A$

3) Si O es un punto del espacio afin, a cada vector X de V le corresponde un único punto X tal que $X - O = X$

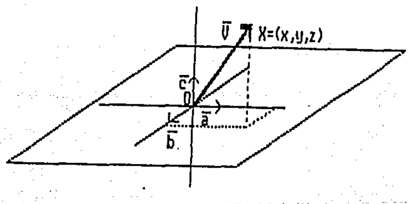


En particular, {I,J,K} es la base ortonormal asociada a todo espacio afin.

Definición.- En lo sucesivo llamaremos ESPACIO EUCLIDIANO o SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS a un espacio afin asociado a un espacio vectorial de dimensión tres, donde hemos definido un punto fijo O llamado origen y una base $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$, de forma tal que a cada punto X le corresponden tres números reales (x,y,z), llamados COORDENADAS CARTESIANAS del punto X, y recíprocamente, a toda tercia de números reales (x,y,z) le corresponde un punto X del espacio euclidiano. En particular al origen se le asocian las coordenadas $(0,0,0)$. El espacio euclidiano se representa de la siguiente forma :



Ahora bien, a todo punto X del espacio euclidiano le corresponde un vector V que podemos definir a partir del origen O y de la base $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$, como $V=x\bar{a}+y\bar{b}+z\bar{c}$, donde (x,y,z) son las coordenadas del punto X.



Si sucede que $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ es una base ortonormal entonces el sistema coordenado se llama SISTEMA COORDENADO ORTOGONAL.

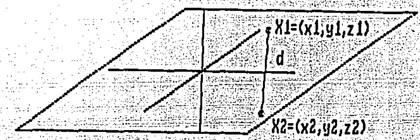
Es conveniente hacer notar que los PUNTOS que hemos definido como elementos del espacio euclidiano son elementos FIJOS, mientras que los VECTORES son elementos LIBRES.

Definición.- Dados dos puntos X1, X2 de coordenadas (x1,y1,z1), (x2,y2,z2) respectivamente, definimos la DISTANCIA entre ellos como un número real d (módulo o norma del vector) :

$$d(X1,X2) = |(x1I+y1J+z1K) - (x2I+y2J+z2K)|$$
$$= |(x1-x2)I + (y1-y2)J + (z1-z2)K|$$

dado que I, J y K son vectores ortonormales y $|\bar{a}| = \bar{a}\bullet\bar{a}$ para todo $\bar{a}$, tenemos que la distancia entre dos puntos X1 y X2 es :

$$d^2 = (x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2 + (z1 - z2)^2$$



Si llamamos $\bar{X}$ al vector distancia entre X1 y X2, tenemos que

$$d(X1,X2) = |\bar{X}|$$

Ejemplo:

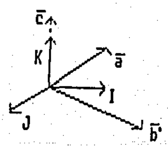
Dados dos vectores cualesquiera, no paralelos, $\{\bar{a},\bar{b}\}$ en un espacio vectorial de dimensión tres, encontrar una base ortonormal que contenga la dirección de al menos uno de ellos.

¿Qué hacemos? Si el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es 90°, los normalizamos y calculamos un $\bar{c}$, tal que $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ sea una base ortonormal; si no, buscamos una base $\{\bar{a},\bar{b}',\bar{c}\}$ tal que :

el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}'$ sea 90°,

el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{c}$ sea 90° y

el ángulo entre $\bar{b}'$ y $\bar{c}$ sea 90° y los normalizamos, es decir: $|\bar{a}| = |\bar{b}'| = |\bar{c}| = 1$



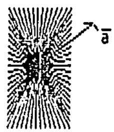
Para dar claridad al ejemplo, consideraremos que una vez obtenida la base ortonormal, $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}=\{\bar{a},\bar{b}',\bar{c}\}$.

Conocemos la base $\{I,J,K\}$, que relaciona un espacio de dimensión tres con el espacio euclidiano, entonces podemos representar a los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ en términos de ésta base como :

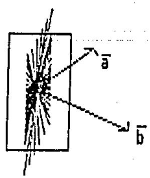
$$\bar{a} = a1I + a2J + a3K$$
$$\bar{b} = b1I + b2J + b3K$$
$$\bar{c} = c1I + c2J + c3K$$

Queremos que $\bar{a}\bullet\bar{c} = 0$ y al mismo tiempo $\bar{b}\bullet\bar{c} = 0$.

Geométricamente en el espacio euclidiano, todos los vectores perpendiculares al vector $\bar{a}$ (aquellos que cumplen $\bar{a}\bullet\bar{c} = 0$) son de la siguiente forma:



De todos estos vectores queremos UNO que además cumpla $\bar{b}\bullet\bar{c} = 0$, geométricamente tenemos lo siguiente :



Entonces tenemos :

$$\begin{aligned}\bar{a}\bullet\bar{c} &= (a1I+a2J+a3K)\bullet(c1I+c2J+c3K)\\ &= a1c1|I|^2+a1c2|I||J|\cos A+a1c3|I||K|\cos B+\\ &\qquad a2c1|J||I|\cos A+a2c2|J|^2+a2c3|J||K|\cos C+\\ &\qquad a3c1|K||I|\cos B+a3c2|K||J|\cos C+a3c3|K|^2\end{aligned}$$

como $\{I, J, K\}$ es una base ortonormal, $|I| = |J| = |K| = 1$

y $|I||J|\cos A = |I||K|\cos B = |J||K|\cos C = 0$, luego

$$\bar{a} \bullet \bar{c} = a1c1 + a2c2 + a3c3$$

análogamente obtenemos,

$$\bar{b} \bullet \bar{c} = b1c1 + b2c2 + b3c3$$

Y necesitamos que :

$$\bar{a} \bullet \bar{c} = a1c1 + a2c2 + a3c3 = 0$$

$$\bar{b} \bullet \bar{c} = b1c1 + b2c2 + b3c3 = 0$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, para resolverlo fijemos una de las incógnitas y resolvamos el sistema por determinantes.

Sea $c3=N\neq 0$ (es decir, c3 es un número real cualquiera), con esto tenemos que los términos a3c3 y b3c3 son constantes y nuestras ecuaciones quedan de la siguiente manera:

$$a1c1 + a2c2 = -a3c3$$

$$b1c1 + b2c2 = -b3c3$$

Calculamos el determinante del sistema:

$$Ds = \begin{vmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{vmatrix} = a1b2 - b1a2$$

(al que supondremos, distinto de cero).

Calculamos el determinante para c1:

$$Dc1 = \begin{vmatrix} -a3c3 & a2 \\ -b3c3 & b2 \end{vmatrix} = -a3c3b2 + b3c3a2$$

Calculamos el determinante para c2:

$$Dc2 = \begin{vmatrix} a1 & -a3c3 \\ b1 & -b3c3 \end{vmatrix} = -a1b3c3 + b1a3c3$$

Como $c1 = \dfrac{Dc1}{Ds}$ y $c2 = \dfrac{Dc2}{Ds}$ obtenemos :

$$c1 = \frac{-a3c3b2 + b3c3a2}{a1b2 - b1a2} = \frac{c3(-a2b3 - a3b2)}{a1b2 - b1a2} = \frac{c3\begin{vmatrix} a2 & a3 \\ b2 & b3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{vmatrix}}$$

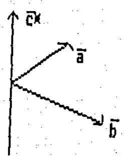
$$c_2 = \frac{-a_1b_3c_3 + b_1a_3c_3}{a_1b_2 - b_1a_2} = \frac{c_3(-a_1b_3 - b_1a_3)}{a_1b_2 - b_1a_2} = \frac{-c_3\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Ahora bien, como c_1 y c_2 están dadas en términos de $c_3=N$ esto quiere decir que, toda la familia de vectores perpendiculares a $\bar{a}$ y a $\bar{b}$ son paralelos entre si; dicho de otra forma todo $\bar{c}$ que cumpla ser perpendicular a $\bar{a}$ y a $\bar{b}$ es de la forma $\bar{c}=l\bar{c}^*$, propongamos $c_3=Ds$ para que c_1 y c_2 queden como un determinante. Obtenemos entonces el vector que buscábamos :

$$\bar{c}^* = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} I - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} J + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} K$$

escrito en base a sus coordenadas tenemos que :

$$\bar{c}^* = (a_2b_3-b_2a_3,\ -a_1b_3+b_1a_3,\ a_1b_2-b_1a_2)$$



Este vector lo vamos a calcular mediante la operación anterior que llamaremos PRODUCTO CRUZ (PRODUCTO VECTORIAL, PRODUCTO EXTERNO) y que denotaremos :

$$\bar{c}^* = \bar{a}\times\bar{b}$$

Existe una regla práctica para recordar los determinantes que componen a $\bar{c}^*$, considerándolas como resultado del desarrollo del determinante :

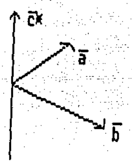
$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} I & J & K \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

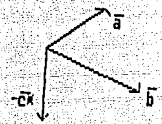
Recalquemos que en el producto cruz operamos dos vectores y obtenemos como resultado otro vector.

El producto cruz ejemplifica como distinguir una base ortonormal derecha de una base ortonormal izquierda en un espacio vectorial de tres dimensiones.

Si $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{c}*$; diremos que la base $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ es una BASE ORTOGONAL DERECHA.

Si $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{c}*$; diremos que la base $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ es una BASE ORTOGONAL IZQUIERDA.





Nuestro próximo objetivo es darle una interpretación geométrica al producto cruz. Para ello calculemos la magnitud de $\bar{a}\times\bar{b}$.

$$|\bar{a}\times\bar{b}|^2 = \begin{vmatrix} a2 & a3 \\ b2 & b3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a1 & a3 \\ b1 & b3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{vmatrix}^2$$
$$= (a2b3-a3b2)^2 + (a1b3-b1a3)^2 + (a1b2-b1a2)^2$$

desarrollando esto tenemos que es igual a

$$= (a1^2+a2^2+a3^2)(b1^2+b2^2+b3^2) - (a1b1+a2b2+a3b3)^2$$

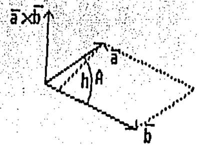
como $|\bar{a}|=\bar{a}\bullet\bar{a}$, $\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos A$ y $\cos^2 A = 1-\operatorname{sen}^2 A$,

$$= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-(\bar{a}\bullet\bar{b})^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\cos^2 A$$
$$= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\operatorname{sen}^2 A$$

donde A es el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

Concluimos que $|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\operatorname{sen}A$.

Vamos a demostrar ahora que $|\bar{a}\times\bar{b}|$ es el área del paralelogramo que forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Ilustremos esto de la siguiente forma :



En el dibujo trazamos la perpendicular h del final de $\bar{a}$ hacia $\bar{b}$, formando un triángulo rectángulo. Por definición de la función seno tenemos que $\text{sen}A=h/|\bar{a}|$, de donde $h=|\bar{a}|\text{sen}A$; se sigue que el área del paralelogramo es $|\bar{a}||\bar{b}|\text{sen}A$.

Es conveniente hacer notar que estamos haciendo una comparación entre dos números $(|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}||\bar{b}|\text{sen}A)$, lo cual es perfectamente válido.

Propiedades del producto cruz :

1) Es una operación cerrada porque operamos dos vectores y obtenemos otro vector.

2) $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$

3) $r(\bar{a}\times\bar{b}) = (r\bar{a})\times\bar{b} = \bar{a}\times(r\bar{b})$, r es un número real.

Notemos que : $\bar{a}\times\bar{a} = -(\bar{a}\times\bar{a})$, lo que implica que $\bar{a}\times\bar{a}=0$.

Se deja como ejercicio, comprobar analítica o geométricamente, éstas propiedades.

Ejercicios 2.1

1.- Calcular el área del triángulo de vértices

a) (0,-2,1), (1,-1,-2) y (-1,1,0).

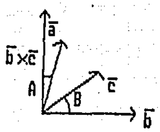
b) (1,1,-1), (2,1,0) y (0,,1,0).

Veamos ahora una nueva operación entre vectores, que tiene la particularidad de ser una combinación del producto punto y del producto cruz.

Definición .- Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ vectores en un espacio de tres dimensiones. Entonces definimos el TRIPLE PRODUCTO ESCALAR como sigue :

$$\begin{aligned} \bar{a}\bullet(\bar{b}\times\bar{c}) &= |\bar{a}|\,|\bar{b}\times\bar{c}| \cos A \\ &= |\bar{a}|\,|\bar{b}|\,|\bar{c}| \cos B \cos A \end{aligned}$$

donde A es el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}\times\bar{c}$, y B es el ángulo entre $\bar{b}$ y $\bar{c}$.



Si $\bar{a}=a1I+a2J+a3K$, $\bar{b}=b1I+b2J+b3K$ y $\bar{c}=c1I+c2J+c3K$, entonces definimos el TRIPLE PRODUCTO ESCALAR como sigue :

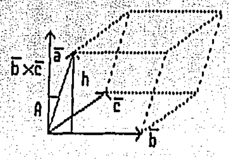
$$\begin{aligned} \bar{a}\bullet(\bar{b}\times\bar{c}) &= (a1I+a2J+a3K)\bullet\left(\begin{vmatrix} b2 & b3 \\ c2 & c3 \end{vmatrix} I + \begin{vmatrix} b1 & b3 \\ c1 & c3 \end{vmatrix} J + \begin{vmatrix} b1 & b2 \\ c1 & c2 \end{vmatrix} K\right) \\ &= a1\begin{vmatrix} b2 & b3 \\ c2 & c3 \end{vmatrix} - a2\begin{vmatrix} b1 & b3 \\ c1 & c3 \end{vmatrix} + a3\begin{vmatrix} b1 & b2 \\ c1 & c2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Es conveniente notar que si calculamos este determinante, ya no necesitamos conocer explícitamente los ángulos B y A.

Ahora vamos a darle una interpretación geométrica al triple producto escalar, para ello vamos a demostrar que el volúmen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ es:

$$\bar{a}\bullet(\bar{b}\times\bar{c}) = \begin{vmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{vmatrix}$$

Ilustremos de la siguiente forma.



Como sabemos el volúmen del paralelepípedo está dado por el producto del área de la base por la altura; pero, el área de la base es el área del paralelogramo formado por los vectores $\bar{b}$ y $\bar{c}$, es decir, el área de la base es $|\bar{b}\times\bar{c}|$. En el dibujo trazamos la perpendicular h del final de $\bar{a}$ hacia la base del paralelepípedo, formando un triángulo rectángulo. Por definición de la función coseno tenemos que $\cos A = h/|\bar{a}|$, de donde $h=|\bar{a}|\cos A$; se sigue que el volúmen del paralelepípedo es $|\bar{b}\times\bar{c}|\,|\bar{a}|\cos A = |\bar{a}\bullet(\bar{b}\times\bar{c})|$.

Recalquemos que $\bar{a}\bullet(\bar{b}\times\bar{c})=-\bar{a}\bullet(\bar{b}\times\bar{c})$, pero como el volúmen del paralelepípedo tiene que ser positivo, tomamos el valor absoluto de $\bar{a}\bullet(\bar{b}\times\bar{c})$.

Propiedades del triple producto escalar :

1) No es una operación cerrada porque operamos tres vectores y obtenemos un escalar.

2) $\bar{a}\bullet(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}\bullet(\bar{c}\times\bar{a}) = \bar{c}\bullet(\bar{a}\times\bar{b})$

3) $\bar{a}\bullet(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{a}\bullet(-\bar{c}\times\bar{b}) = -(\bar{a}\bullet(\bar{c}\times\bar{b}))$
$= -(\bar{b}\bullet(\bar{a}\times\bar{c}))$
$= -(\bar{c}\bullet(\bar{a}\times\bar{b}))$

Hereda las propiedades del producto punto y del producto cruz como número real.

Se deja como ejercicio, comprobar analítica o geométricamente, éstas propiedades.

Ejercicios 2.2

1) Calcular el volúmen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores 3J+2K, I+2J+K y -J+4K.

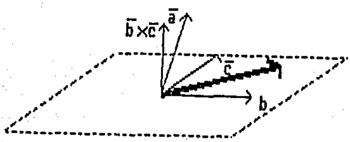
2) Encontrar el volúmen del tetraedro cuyos vértices son (1,0,2), (4,3,0), (2,0,1) y (3,4,0).

Veamos ahora una nueva operación entre vectores, que es una combinación del producto cruz.

Definición .- Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ vectores en un espacio de tres dimensiones. Entonces definimos el TRIPLE PRODUCTO VECTORIAL como sigue:

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\bullet\bar{b})\bar{c} - (\bar{a}\bullet\bar{c})\bar{b}$$

Por todo lo que hemos visto sabemos que $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ es un vector perpendicular a $\bar{a}$ y a $(\bar{b}\times\bar{c})$, lo ilustramos de la siguiente forma:



Se deja como ejercicio verificar la igualdad:

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\bullet\bar{b})\bar{c} - (\bar{a}\bullet\bar{c})\bar{b}$$

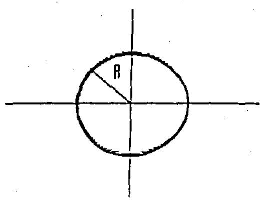
3.1 Coordenadas polares.

Nuestro objetivo en este capítulo será determinar la ecuación de una figura geométrica dada. Una figura geométrica (por ejemplo una curva) se da, generalmente, por su DEFINICION.

Así, consideremos que estamos definiendo UN CONJUNTO DE PUNTOS X (la figura geométrica en cuestión) por medio de una propiedad P. Entonces, entre todas las figuras geométricas, una figura será del tipo X SI Y SOLAMENTE SI posee la propiedad P.

Ejemplo:

Consideremos una figura geométrica muy conocida: LA CIRCUNFERENCIA. Si nos situamos en el plano cartesiano, podemos definir a una circunferencia como EL CONJUNTO DE PUNTOS que equidistan del origen una distancia R.



La propiedad P con que hemos definido a la figura geométrica es una condición que deben de cumplir cada uno de los puntos que la componen. Esto significa que todo punto de la figura geométrica debe cumplir la propiedad P. En nuestro ejemplo, todo punto de la circunferencia debe equidistar una distancia R con el origen.

Una figura geométrica no debe satisfacer necesariamente una sola propiedad, puede satisfacer dos o más. Por ejemplo, podemos tener una figura geométrica que satisfaga 1) pasar por un punto dado y 2) conservar una distancia constante a alguno de los ejes cartesianos.

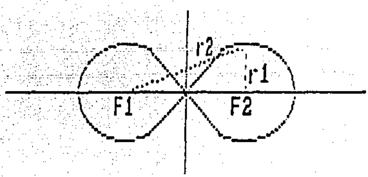
Definición.- Al conjunto de puntos que cumplen ciertas propiedades o condiciones geométricas particulares, se le llama LUGAR GEOMETRICO.

Entonces la circunferencia es un lugar geométrico. Otros ejemplos de lugares geométricos son las curvas planas llamadas: LEMNISCATA Y CARDIOIDE.

LA LEMNISCATA está definida como el lugar geométrico de todos los puntos para los cuales el producto de sus distancias r1 y r2 a dos puntos fijos F1 y F2, cuyas coordenadas cartesianas son (a,0) y (-a,0) respectivamente, tiene el valor constante a^2; es decir:

$$r1^2=(x-a)^2+y^2 \qquad r2^2=(x+a)^2+y^2$$

$$(r1)^2(r2)^2=[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]=a^2$$



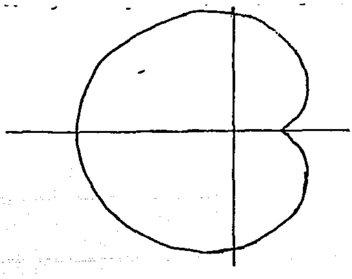
De la defincción de la lemniscata obtenemos la ecuación:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$$

que es de cuarto grado, y obviamente presenta alguna dificultad para trabajar con ella.

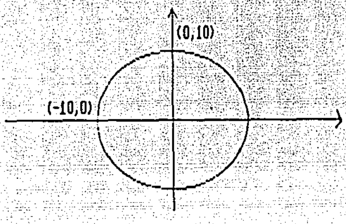
LA CARDIOIDE es otro lugar geométrico que tiene una ecuación de cuarto grado :

$$(x^2+y^2)^2-2y^2(2x-1)-2x^3=0$$



Para trabajar con estos lugares geométricos introduciremos un nuevo par de coordenadas.

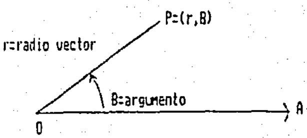
Hasta ahora nos hemos situado por comodidad, en el plano cartesiano. Este sistema coordenado cartesiano utiliza números reales (coordenadas) para relacionar a los puntos de las figuras geométricas.



Pero, el sistema coordenado cartesiano NO es el único sistema en el que se pueden representar las distintas figuras geométricas. Vamos a introducir y ejemplificar otro sistema de coordenadas llamado SISTEMA DE COORDENADAS POLARES; la ventaja de utilizar este sistema de coordenadas, radica en la facilidad de representar ciertos lugares geométricos.

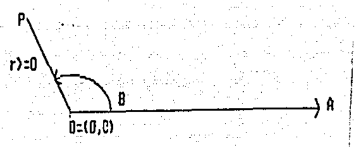
En el sistema de coordenadas polares, un punto se localiza especificando su posición con respecto a un eje fijo y a un punto fijo sobre ese eje. El eje se llama EJE POLAR y el punto fijo se llama POLO.

Sea $\overline{OA}$ el eje polar y O el polo. Sea P un punto cualquiera en el plano coordenado. Tracemos el vector $\overline{OP}$ y llamemos r a su magnitud; sea B el ángulo AOP.

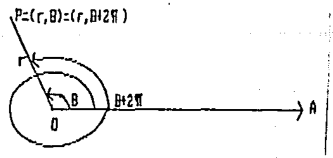


De esta manera, determinamos la posición de P con respecto al eje polar y al polo, mediante r y B. Estos números reciben el nombre de COORDENADAS POLARES del punto P, P=(r,B). Generalmente a r se le conoce como radio vector y a B como ángulo polar o argumento de P.

El ángulo polar B se mide como en trigonometría considerando el eje polar como lado inicial y el radio vector como lado final del ángulo; algunos autores admiten que el radio vector pueda tomar todos los valores reales, otros consideran que el radio vector nunca debe ser negativo. Nosotros seguiremos este último convenio. El polo se representa como O=(0,C), donde C es cualquier ángulo.

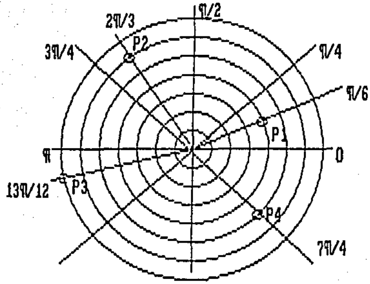


Es evidente que un par de coordenadas polares (r,B) nos representa un único punto P; sin embargo, no es cierto que un punto P este representado por un único par de coordenadas polares. Un punto P=(r,B) también se representa como P=(r,B+2Πn), donde n es un entero cualquiera.



Esta particularidad de las coordenadas polares nos conduce en algunos casos, a resultados que difieren de aquellos obtenidos en el sistema coordenado cartesiano.

Para nuestros propósitos convendremos en que el ángulo polar de un punto P, es $0^\circ <= B <= 360^\circ$. Para localizar puntos en el sistema coordenado polar es conveniente utilizar la representación que consiste de una serie de circunferencias concéntricas y rectas concurrentes. Las circunferencias tienen como centro común al polo y sus radios son múltiplos enteros del radio más pequeño tomado como unidad. Todas las rectas pasan por el polo, los ángulos entre cada par de rectas son iguales.



Ejemplificamos en está representación los puntos:

P1 =(4, Π/6) P2=(6, 2Π/3) P3=(-7, 75°) P4=(5, 7Π/4)

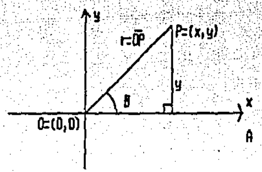
Para poder representar un punto (x,y) del plano cartesiano en términos de (r,B) en el sistema coordenado polar, debemos conocer la relación que existe entre (x,y) y (r,B).

Para obtener relaciones sencillas hacemos coincidir el origen (0,0) del plano cartesiano con el polo O del sistema polar y la dirección de las abscisas con la dirección del eje polar.

Sea P un punto de coordenadas (x,y). Trazamos el vector $\overline{OP}$ cuya magnitud será el radio vector r y lo calculamos como la distancia de O a P, entonces $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ahora trazamos la perpendicular de P al eje de las abscisas cuya longitud es y, obteniendo un triángulo rectángulo que contiene al ángulo B, de las relaciones trigonométricas que ya conocemos tenemos que:

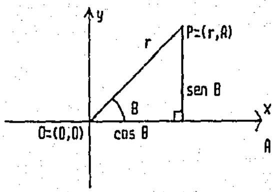
$$\cos B = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{sen } B = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



Recíprocamente si tenemos un punto P de coordenadas polares (r,B), trazamos otra vez un triángulo rectángulo y a partir de las relaciones trigonométricas que conocemos obtenemos:

$x = r \cos B \qquad y = r \text{ sen} B \qquad B = \text{arctg } (y/x)$

aplicando el Teorema de Pitágoras obtenemos: $r^2=x^2+y^2$.



Ejemplo 1:

Hallar las coordenadas (x,y) del punto P cuyas coordenadas polares son $(4,120°)$.

Utilizando las relaciones que obtuvimos anteriormente obtenemos:

$$x = r \cos A = (4)(\cos 120°) = (4)(-1/2) = -2$$

$$y = r \text{ sen} A = (4)(\text{sen } 120°) = (4)(\sqrt{3}/2) = 2\sqrt{3}$$

entonces $P = (-2,2\sqrt{3})$.

Ejemplo 2:

Hallar las coordenadas polares (r,B) del punto P cuyas coordenadas cartesianas son (3,-5).

Utilizando las relaciones que obtuvimos anteriormente obtenemos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$B = \text{arctg } (y/x) = \text{arctg } (-5/3)$$

como sabemos, existe un número ilimitado de ángulos que cumplen nuestra relación pero, hemos dicho que utilizaremos aquél que sea menor de 360°; por lo que $B = 300^\circ 58'$.

Hacemos la aclaración de que sabemos: $y=-5<0$, y es por eso que $B = 300^\circ 58'$; porque arctg $(5/-3)$ = arctg $(-5/3)$.

Ejercicios 3.1

1.- Hallar la ecuación en coordenadas polares de la lemniscata, cuya ecuación en coordenadas cartesianas es: $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$ (Lo único que requerimos es sustituir : $x=r\cos A$, $y=r\,\text{sen}A$ y aplicar relaciones trigonométricas adecuadas).

2.- Hallar la ecuación en coordenadas polares de la cardioide, cuya ecuación en coordenadas cartesianas es: $(x^2+y^2)^2-2y^2(2x-1)-2x^3=0$.

Con las coordenadas polares logramos ecuaciones más sencillas para nuestros lugares geométricos. Por último ejemplificaremos lo sencillo que resulta representar a una circunferencia en coordenadas polares.

Ejemplo:

La ecuación en coordenadas cartesianas de una circunferencia es: $x^2+y^2=a^2$, donde a es el radio de la circunferencia; como sabemos, en coordenadas polares: $r^2=x^2+y^2$, por lo tanto la ecuación en coordenadas polares de la circunferencia es: $r^2=a^2$.

Los lugares geométricos que estudiaremos en particular son:

La RECTA, el PLANO, la CIRCUNFERENCIA, la ESFERA y las CONICAS (ELIPSE, HIPERBOLA, PARABOLA).

3.2 La recta en dos y tres dimensiones.

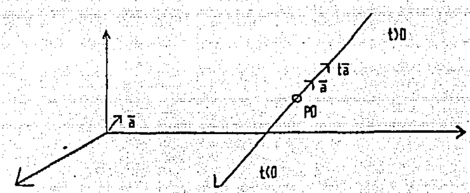
Iniciaremos el estudio de estos lugares geométricos con la RECTA, por ser el lugar geométrico mas accesible.

3.2.1 Representaciones de la recta en dos y tres dimensiones.

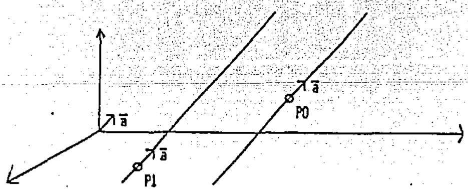
DefincIón.- Una RECTA es el lugar geométrico de todos los puntos que se describen a partir de un punto fijo PO (llamado punto de apoyo) y de un vector dado $\bar{a}$.

$$L = \{P \mid P = PO + t\bar{a} \quad \text{con } t \text{ un escalar}\}$$

En otras palabras, me sitúo en un punto PO y lo considero como punto inicial de todos los vectores paralelos al vector $\bar{a}$.



Como hemos visto que los vectores son libres, se podría pensar que estas dos rectas son iguales,



sin embargo, recalcamos que los puntos no son libres y al cambiar de posición a $\bar{a}$ cambiamos al punto de apoyo, por lo que estas dos rectas son distintas. Lo más que podemos decir de ambas rectas es que son paralelas.

Ejemplo:

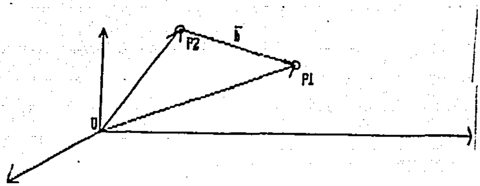
Sea $L1 = \{P \mid P=(0,0,0) + t(a1I+a2J+a3K) \quad t \text{ un escalar}\}$

y sea $L2 = \{P \mid P=(1,6,3) + t(a1I+a2J+a3K) \quad t \text{ un escalar}\}$

L1 y L2 son rectas paralelas, tienen la misma dirección pero son distintas como conjunto de puntos.

Ahora bien, para caracterizar a un punto P1 en el espacio cartesiano lo hacemos con referencia a un punto fijo llamado origen; es decir, tenemos un vector que tiene como punto inicial al origen y como punto final al punto P1.

Si tenemos dos puntos P1 y P2 los representamos como vectores $\overline{OP1}$ y $\overline{OP2}$; podemos relacionar a P2 en términos de P1 mediante el vector $\overline{b}$ que va de P1 a P2, donde $\overline{b} = \overline{OP2} - \overline{OP1}$.

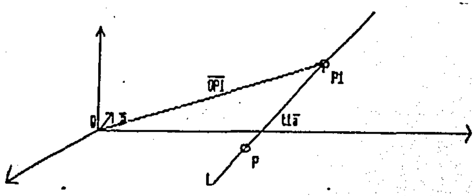


En nuestra recta, a partir de PO podemos caracterizar todos los puntos que nos refieren los vectores paralelos al vector dado $\overline{a}$,

$$L = \{P \mid P-PO = t\overline{a} \text{ con } t \text{ un escalar}\} \ldots\ldots (1)$$

cada vez que cambiemos el punto PO a otro, P1, contenido en nuestro lugar geométrico, obtendremos un nuevo punto P que nos refiere a un vector paralelo a $\overline{a}$, es decir :

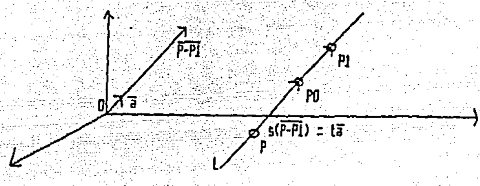
$$P-PO = t1\overline{a} = \overline{PP1}$$



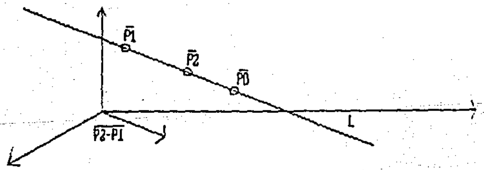
De esta forma concluimos que la caracterización de una recta no es única, porque la puedo describir a partir de un vector que sea paralelo al vector dado $\bar{a}$, siempre que conserve la dirección de $\bar{a}$. En particular podemos tomar como vector a cualquier vector $\overline{P2-P1}$, si P2 es un punto en L; entonces:

$$L = \{P \mid P-PO = s(\overline{P2-P1}) \quad s \text{ un escalar}\}\ldots\ldots(2)$$

es decir (1) = (2).



Si tenemos dos puntos cualesquiera P1 y P2, podemos definir al conjunto de puntos que se obtienen a partir de un punto fijo y de un vector dado, es decir podemos definir una recta.



Obtenemos la dirección de la recta como la diferencia de P1 y P2,

$$L = \{P \mid P = PO + t(\overline{P2-P1}) \quad t \ \text{ un escalar}\}$$

recalquemos que como t es un escalar es lo mismo definir $\overline{P2-P1}$ que $\overline{P1-P2}$, y que PO, el punto de apoyo, puede ser cualquier punto contenido en nuestro lugar geométrico.

Ejemplo:

Encuentre la recta que pasa por P1=(6,4,2) y P2=(1,1,1).

L = {P | P=P0+t($\overline{P1-P2}$) t un escalar}

L = {P | P=P0+t[(6,4,2)-(1,1,1)] t un escalar}

L = {P | P=P0+t(5,3,1) t un escalar}

L = {(x,y,z) | (x,y,z)=(1,1,1)+t(5I+3J+K) t un escalar}

De este ejemplo reescribimos la representación de la recta como:

L = {(x,y,z) | (x,y,z)=(x0,y0,z0)+t(a1I+a2J+a3K) t un escalar}

dado que en particular, P1 y P2 son puntos en el espacio cartesiano.

Luego entonces, otra forma de representar a la recta es mediante lo que se conoce como LAS ECUACIONES PARAMETRICAS de la recta; las cuales se obtienen a partir de:

L = {(x,y,z) | (x,y,z)=(x0,y0,z0)+t(a1I+a2J+a3K) t un escalar}

L = {(x,y,z) | (x,y,z)=(x0+ta1,y0+ta2,z0+ta3) t un escalar}

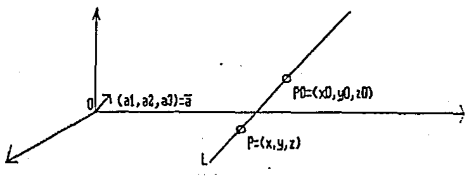
y de aqui: x = x0+ta1 y = y0+ta2 z = z0+ta3

Notemos que para un punto, tenemos que t es el mismo escalar en las tres ecuaciones.

Supongamos ahora que a1,a2 y a3 son distintos de cero, como t es el mismo escalar para cada una de las tres ecuaciones paramétricas de la recta en cada punto, tenemos que:

$$t = \frac{x-xo}{a1} = \frac{y-yo}{a2} = \frac{z-zo}{a3}$$

son las ECUACIONES SIMETRICAS de la recta en el espacio cartesiano.



Por otro lado, si conocemos dos puntos P1 y P2 de la recta podemos representarla a partir de:

$$L = \{P \mid P=P0+t(P2-P1) \quad t \text{ un escalar}\}$$

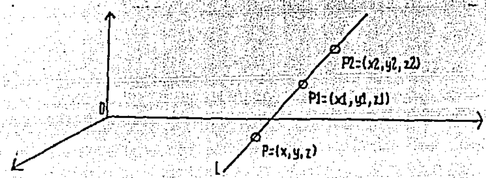
de la siguiente forma:

$$P0+t(P2-P1)=[x-x1+t(x2-x1), y-y1+t(y2-y1), z-z1+t(z2-z1)]$$

Si (x2-x1), (y2-y1) y (z2-z1) no son cero, entonces:

$$\frac{x-x1}{x2-x1} = \frac{y-y1}{y2-y1} = \frac{z-z1}{z1-z2}$$

es la representación de una recta en el espacio cartesiano A PARTIR DE DOS DE SUS PUNTOS.



Ejercicios 3.2

1.- Obtener las representaciones paramétrica y simétrica, de las rectas dadas por:

a) $P0=(2,-1,3)$, $\overline{a}=(-1,1,2)$.

b) $P0=(5,-1,2)$, $\overline{a}=-I+3J+2K$.

2.- Obtener la representación de la recta que pasa por $P1=(-3,4,-1)$ y $P2=(0,-1,2)$.

Si nos situamos en el plano cartesiano, entonces una recta la representamos como:

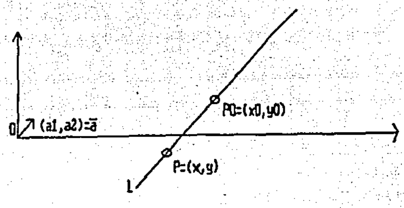
$$L = \{(x,y) \mid (x,y) = (x0,y0) + t\,(a1,a2) \quad t \text{ un escalar}\}$$

LAS ECUACIONES PARAMETRICAS de la recta, en el plano cartesiano, son:

$$x = x0+ta1 \qquad y = y0+ta2$$

y si a1 y a2 son distintos de cero, podemos representar a la recta como:

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2}$$



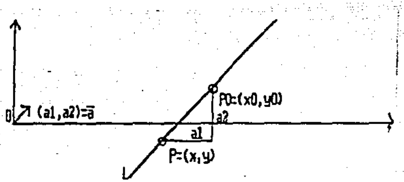
De ésta ultima igualdad obtenemos otra representación de la recta que nos es más familiar:

$$y-y_0 = \frac{a_2}{a_1}(x-x_0)$$

donde a_2/a_1 es la PENDIENTE m de la recta,

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

es decir, $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$



Por otro lado, si conocemos dos puntos P_1 y P_2 de la recta en el plano cartesiano, podemos representarla a partir de:

$$L = \{P \mid P=P_0+t(P_2-P_1) \quad t \text{ un escalar}\} \text{ y de}$$

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

de la siguiente forma:

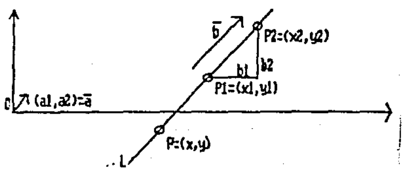
$P_2-P_1 = \bar{b}$, por lo que $(x_2-x_1, y_2-y_1)=b_1I+b_2J$, luego

$b_1=x_2-x_1$ y $b_2 = y_2-y_1$

entonces:

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

es la representación de una recta en el plano cartesiano A PARTIR DE DOS DE SUS PUNTOS.



Todas estas representaciones nos llevan a necesitar una representación general de la recta en el plano cartesiano, la cual obtenemos a partir de:

$$y-y0 = \frac{a2}{a1}(x-x0)$$

realizando las operaciones indicadas:

$$a1y-a1y0 = a2x-a2x0$$

$$a2x - a1y + (a1y0-a2x0) = 0$$

$$a2x + (-a1)y + [a2(-x0)+(-a1)(-y0)] = 0$$

como a2 y a1 son escalares cualesquiera y (x0,y0) es un punto fijo, definimos LA ECUACION GENERAL DE LA RECTA EN EL PLANO CARTESIANO como:

$$Ax + By + C = 0$$

(porque es una ecuación general lineal en dos variables).

De la ecuación general de la recta en el plano cartesiano, si A,B y C son distintos de cero, obtenemos otra representación de la recta:

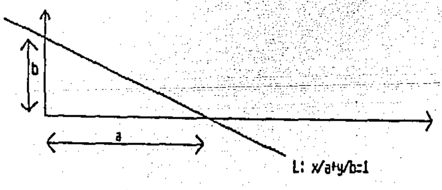
$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax + By = -C$$

$$(-A/C)x + (-B/C)y = 1$$

$$x/a + y/b = 1$$

donde $a=-C/A$ y $b=-C/B$ son las magnitudes de los segmentos que intercepta la recta en los ejes coordenados. A ésta representación se le llama ECUACION SIMETRICA de la recta en el plano cartesiano.

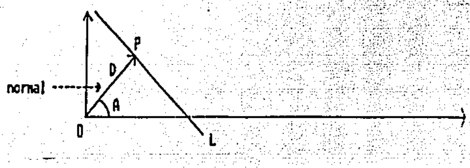


Dada una recta en el plano cartesiano, tracemos por el origen una perpendicular a la recta dada y llamémosla normal. Sea P el punto de intersección de la normal con la recta dada y digamos que el vector de dirección de la normal va del origen hacia P.

Si A es el ángulo que forman la normal con el eje de las abscisas y D = $|\overline{OP}|$, la ecuación dada de la recta en el plano cartesiano puede escribirse como:

$$x \cos A + y \operatorname{sen} A - D = 0;$$

a ésta representación de la recta se le denomina la ECUACION NORMAL de la recta en el plano cartesiano.

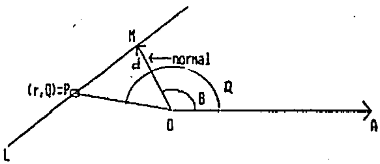


Dada una recta en el plano polar, tracemos por el polo una perpendicular a la recta dada y llamémosla normal. Sea M el punto de intersección de la normal con la recta dada y digamos que el vector de dirección de la normal va del polo hacia M; sea B el ángulo que forman la normal y el eje polar.

Tomemos en la recta dada un punto arbitrario P cuyas coordenadas polares son r y Q. En el triángulo rectángulo OMP obtenemos la ecuación:

$$r = \frac{d}{\cos(Q-B)}$$

que satisfacen todos los puntos de la recta dada. A ésta representación de la recta se le conoce como la ECUACION POLAR de la recta en el plano cartesiano.



Finalmente recordemos que podemos encontrar un vector perpendicular a otro en el plano cartesiano, intercambiando las componentes y cambiándole el signo a una de ellas. Notemos que en la ecuación:

$$a2x + (-a1)y + [a2(-x0)+(-a1)(-y0)] = 0$$

tenemos precisamente al vector $(a2,-a1)$ que es perpendicular a $(a1,a2)$.

Como $(a1,a2)$ y $(a2,-a1)$ son perpendiculares sabemos que su producto punto es igual a cero, es decir:

$$(a2,-a1)\bullet(a1,a2) = 0$$

Entonces a partir de la ecuación:

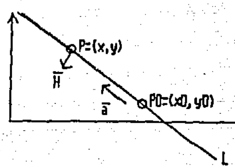
$$a2x + (-a1)y + [a2(-x0)+(-a1)(-y0)] = 0$$

llegamos a otra representación de la recta en el plano cartesiano:

$$(a2,-a1)\bullet[(x-x0),(y-y0)] = 0$$

esto es, si $\overline{H}=(a2,-a1)$ es perpendicular a $\overline{a}$, podemos representar a la recta en el plano cartesiano como:

$$\overline{H}\bullet(\overline{P-PO}) = 0$$



Ejercicios 3.3

1.- Determinar la pendiente y las ecuaciones paramétricas de la recta definidad por:

a) $PO=(-3,5)$, $\overline{a}=(2,-1)$

b) $PO=(2,-3)$, $\overline{a}=(1,1)$

2.- Determinar la ecuación de la recta definidad por:

a) $P1=(-3,5)$, $P2=(-2,-7)$

b) $P1=(-1,-1)$, $P2=(3,7)$

3.- Determinar las eucaciones general y simétrica de la recta:

a) Del ejercicio 1 a)

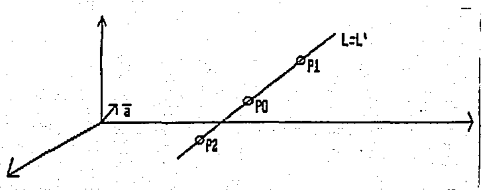
b) Del ejercicio 2 b)

4.- Determinar la ecuación normal de la recta dada por, $A=7/6\pi$ y $D=2$.

5.- Determinar la ecuación polar de la recta que pasa por $(\pi/6,-3)$ y es paralela al eje polar.

3.2.2 Intersección de dos rectas en dos y tres dimensiones.

Volvamos al espacio cartesiano. Sean P1 y P2 un par de puntos distintos en el espacio cartesiano y sea $L=\{P|P=P1+t(P2-P1) \quad t \text{ escalar}\}$ una recta que pasa por P1 y P2. Supongamos que $L'=\{P|P=P0+s\bar{a} \quad s \text{ escalar}\}$ es otra recta que también pasa por P1 y P2. Deseamos mostrar que L'=L.



Como P1 y P2 son puntos en L', existen escalares s1 y s2 distintos tales que $P1=P0+s1\bar{a}$ y $P2=P0+s2\bar{a}$; entonces, para un punto P en L tenemos que para algún escalar t,

$$P = P1+t(P2-P1) = (P0+s1\bar{a})+t(P0+s1\bar{a}-P0-s2\bar{a})$$

$$P = P0+s1\bar{a}+t(s1-s2)\bar{a} = P0+[s1+t(s1-s2)]\bar{a}$$

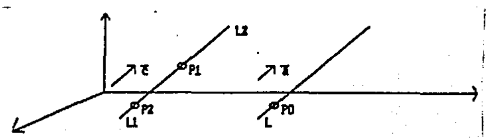
esto es, si P es un punto en L entonces P es un punto en L'.

Ahora bien, si P es un punto en L', entonces para algún escalar s,

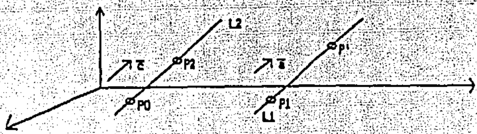
$$P = P0+s\bar{a} = P1-s1\bar{a}+s\bar{a} = P1+(s-s1/s2-s1)(P2-P1)$$

es decir, si P es un punto en L' entonces P es un punto en L. Dicho de otra forma L=L'.

Recordemos ahora que dos vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ son paralelos si uno es un escalar por el otro, es decir, $\bar{a} = t\bar{b}$. De aquí, definiremos que dos rectas $L1=\{P|P=P1+s\bar{a} \quad s \text{ escalar}\}$, $L2=\{P|P=P2+t\bar{b} \quad t \text{ escalar}\}$ son paralelas si los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ son paralelos.



Tomemos ahora un punto fijo P1 en el espacio cartesiano y una recta $L=\{P \mid P=P0+s\bar{a} \ \ s \text{ escalar}\}$; mostraremos que por P1 pasa solamente UNA paralela a L.

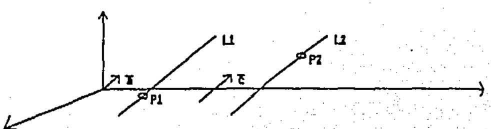


Sea $L1=\{P \mid P=P1+t\bar{a} \ \ t \text{ escalar}\}$ una recta paralela a L que pasa por P1. Sea $L2=\{P \mid P=P2+u\bar{b} \ \ u \text{ escalar}\}$ otra recta que pasa por P1 y también es paralela a L. Como P1 es un punto de L2, existe un escalar u1 tal que $P1=P2+u1\bar{b}$; además como L2 es paralela a L, $\bar{a}=r\bar{b}$ para algún escalar r, tenemos entonces $P1+\bar{a}=P2+(u1+r)\bar{b}$. Esto es, que $P'=P1+\bar{a}$ está en la intersección de L1 y L2; pero P1 y P' son puntos distintos, y ambos estan en la intersección de L1 y L2. De acuerdo con lo que vimos anteriormente esto implica que L1=L2. Dicho de otra forma por P1 sólo pasa UNA paralela a L.

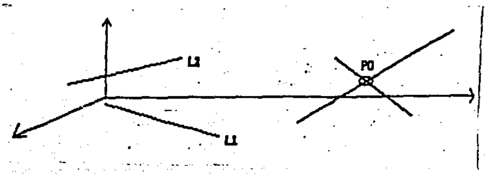
Por otro lado, si tenemos dos rectas $L1=\{P \mid P=P1+s\bar{a} \ \ s \text{ escalar}\}$ y $L2=\{P \mid P=P2+t\bar{b} \ \ t \text{ escalar}\}$ paralelas, entonces L1=L2 ó la intersección de L1 y L2 es vacía. Es claro, por todo lo que hemos visto hasta ahora, que si dos rectas son paralelas no deben intersectarse en punto alguno, pero, supongamos que encontramos un punto de intersección P0. Entonces existen escalares s0 y t0 tales que $P0=P1+s0\bar{a}=P2+t0\bar{b}$; como además L1 y L2 son paralelas, $\bar{a}=r\bar{b}$ para algún escalar r. De aquí tenemos que,

$$P0+\bar{a} = P1+(s0+1)\bar{a} = P2+(t0+r)\bar{b}$$

es decir, $P'=P0+\bar{a}$ está en la intersección de L1 y L2. Nuevamente L1=L2 porque no puede suceder que P0 y P', siendo puntos distintos, esten en la intersección de ambas rectas.



Si sucede que L1 y L2 son rectas NO paralelas, entonces se intersectan en UN sólo punto ó NO se intersectan. Debe ser claro que puede darse el caso en que dos rectas no paralelas en el espacio NO se intersecten. Imaginemos una recta en el techo de un cuarto y otra que no sea paralela a la primera, en el piso del mismo cuarto, fig.(a); sí suponemos que se intersectan, fig.(b), debe ser únicamente en un sólo punto.



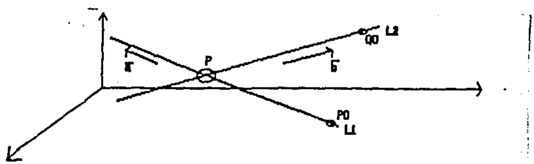
De acuerdo con lo que hemos visto, si se intersectan en más de un punto, L1=L2; pero, como son no paralelas, no pueden ser la misma recta. Por eso la intersección de ambas rectas no puede contener más de un punto.

Sean $L1=\{P|P=PO+s\bar{a},\ s\ \text{escalar}\}$, $L2=\{P|P=QO+tb,\ t\ \text{escalar}\}$. Como son no paralelas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son linealmente independientes, entonces existen u y v, tales que el punto $P=PO+u\bar{a}=QO+v\bar{b}$ está en ambas rectas, es decir:

$$PO - QO = -u\bar{a} + v\bar{b}$$

$$(PO-QO)\bullet(\bar{a}\times\bar{b}) = 0 \qquad (1)$$

por lo tanto, P es el punto de intersección de L1 y L2; y la condición para que se intersecten las rectas, está dada por la igualdad (1).



Ejemplo 1:

Determinar si las siguientes rectas son paralelas y si existe un punto de intersección.

L1={P|P=(1,3,-2)+s(3,-6,9) s escalar}

L2={P|P=(2,1,7)+t(-2,4,-6) t escalar}

L1 y L2 serán paralelas si existe un escalar r tal que,

(3,-6,9)=r(-2,4,-6)

es decir, 3=-2r, -6=4r y 9=-6r; es claro que r=-3/2. Por lo que L1 y L2 son paralelas.

Según lo que definimos, debe suceder que L1=L2 ó L1 y L2 no se intersectan. El punto P1=(1,3,-2) está en L1 pero no está en L2, por lo que L1 no es igual a L2; entonces L1 y L2 no se intersectan.

Ejemplo 2:

Determinar si las siguientes rectas son paralelas y si existe un punto de intersección.

L1={P|P=(9,2,-11)+s(2,1,-3) s escalar}

L2={P|P=(2,-1,3)+t(1,1,2) t escalar}

L1 y L2 serán paralelas, si existe un escalar u tal que,

(2,1,-3)=u(1,1,2)

es decir: 2=u, 1=u y -3=2u; es clarop que no existe un escalar que cumpla las tres ecuaciones. Por lo que L1 y L2 son NO paralelas.

Según lo que definimos, L1 y L2 pueden o no intersectarse; para saberlo, calculamos el siguiente triple producto escalar:

$$\overline{P2P1}\times(\bar{a}\bullet\bar{b}) = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

Donde: P1=(9,2,-11), P2=(2,-1,3), $\bar{a}$=(2,1,-3) y $\bar{b}$=(1,1,2).

Como el triple producto escalar es distinto de cero, entonces L1 y L2 NO se intersectan.

Ejemplo 3:

Determinar si las siguientes rectas son paralelas y si existe un punto de intersección.

L1={P|P=(1,3,0)+s(2,1,1) s escalar}

L2={P|P=(2,1,0)+t(1,3,1) t escalar}

Dejamos como ejercicio verificar que las rectas son NO paralelas.

Según lo que definimos, L1 y L2 pueden o no intersectarse; para saberlo, calculamos el siguiente triple producto escalar:

$$\overline{P2P1}\times(\bar{a}\bullet\bar{b}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donde: $P1=(1,3,0)$, $P2=(2,1,0)$, $\bar{a}=(2,1,1)$ y $\bar{b}=(1,3,1)$.

Como el triple producto escalar es igual a cero, entonces L1 y L2 se intersectan. En el punto de intersección debe suceder que:

$1+2s=2+t \qquad 3+s=1+3t \qquad s=t$

resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$s=1$ y $t=1$

al sustituir estos valores encontramos el punto de intersección de L1 y L2:

$P=(3,4,1)$

Ejercicios 3.4

1.-Determinar si las siguientes rectas son paralelas y encontrar su punto de intersección.

a) $L1=\{P\,|\,P=(6,2,3)+s(4,-1,2) \quad s \text{ escalar}\}$

$L2=\{P\,|\,P=(0,8,-1)+t(2,1,2) \quad t \text{ escalar}\}$

b) $L1=\{P\,|\,P=(4,0,-2)+s(2,0,3) \quad s \text{ escalar}\}$

$L2=\{P\,|\,P=(-1,2,-3)+t(9,4,1) \quad t \text{ escalar}\}$

Veamos en que varia todo lo que hemos venido platicando sobre rectas paralelas y sus intersecciones, entre rectas que están en el espacio cartesiano y las que están en el plano cartesiano.

Ejemplo:

Determine la recta que pasa por $(1,-3)$ y es paralela a la recta que pasa por $(-5,8)$ y $(3,0)$.

Sabemos que sólo existe una recta que pasa por $(1,-3)$ y es paralela a la que pasa por $(-5,8)$ y $(3,0)$. La recta que pasa por $(-5,8)$ y $(3,0)$ es: $\quad (3,0)-(-5,8) = (8,-8) = 8(1,-1)$

$\{P\,|\,P= (3,0)+t(1,-1) \quad t \text{ escalar})$

y la recta que buscamos pasa por $(1,-3)$ y es paralela a $(1,-1)$,

$L = \{P\,|\,P=(1,-3)+t(1,-1) \quad t \text{ escalar}\}$

$L = \{P\,|\,P=(1+t,-3-t) \quad t \text{ escalar}\}$

Si L1 y L2 son rectas NO paralelas en el plano cartesiano, entonces se intersectan en un sólo punto. Nuevamente debe ser claro que deben de intersectarse en un sólo punto; ya que si tienen más de un punto de intersección deben ser la misma recta, pero esto no puede ser porque son NO paralelas.

Ejemplo 1:

Determine la intersección de las rectas L1, que pasa por $(0,1)$ y $(2,4)$, y L2 que pasa por $(-2,3)$ y $(2,9)$.

Las rectas L1 y L2 son,

$$(2,4)-(0,1) = (2,3)$$

$$L1 = \{P \mid P=(2,4)+s(2,3) \text{ s escalar}\}$$

$$(2,9)-(-2,3) = (4,6) = 2\,(2,3)$$

$$L2 = \{P \mid P=(2,9)+t(2,3) \text{ t escalar}\}$$

por lo que ambas rectas son paralelas, entonces no se intersectan en punto alguno.

Ejemplo 2:

Determine la intersección de las rectas $L1: 3x+2y-7=0$ y $L2: x+5y+2=0$.

Dejamos como ejercicio verificar que las rectas son NO paralelas. Resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$3x+2y=7$$

$$x+5y=-2$$

y obtenemos que el punto de intersección es $P=(3,-1)$.

Ejercicios 3.5

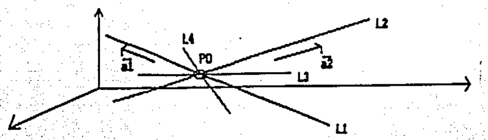
1.- Determine si son o no paralelas las siguientes rectas, en caso afirmativo, calcular el punto de intersección.

a) La recta que pasa por $(2,3)$ paralela a $(1,1/3)$ y la recta que pasa por $(2,3)$ paralela a $(1,-1/3)$

b) $L1 = \{P \mid P=(-4,0)+s(1,2) \text{ s escalar}\}$ y
$L2 = \{P \mid P=(0,1)+t(2,-3) \text{ t escalar}\}$.

3.2.3 Familias de rectas en dos y tres dimensiones.

Sabemos que si tenemos dos rectas en el espacio cartesiano que se intersectan, lo hacen en un sólo punto PO. Pero, es claro que no son las únicas rectas que pasan por ese punto PO.

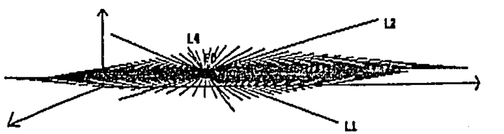


¿Qué es lo que varía entre todas estas rectas? El vector de dirección.

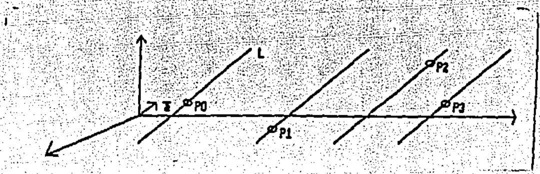
Cualquier recta de este conjunto tiene una ecuación de la forma $L=\{P|P=PO+t\bar{a}_i$ t escalar$\}$, donde $\bar{a}_i$ es un vector en CUALQUIER dirección. De esta forma, a partir del punto de intersección PO de dos rectas cualesquiera, formamos lo que se llama una FAMILIA DE RECTAS cuya ecuación es en general,

$$F : \{P|P=PO+ta_i \text{ t escalar, } a_i \text{ un vector de dirección}\}$$

Una familia de rectas de este tipo, donde el vector de dirección puede tomar cualquier dirección, nos genera TODO el espacio cartesiano (por claridad en el dibujo, ésto no se muestra).



Podemos tener otro tipo de familia de rectas. Tomemos una recta cualquiera en el espacio cartesiano $L = \{P \mid P=P0+t\bar{a} \text{ t escalar}\}$ y $\bar{a}$ un vector de dirección fijo; ahora tomemos todas las rectas paralelas a L, es decir, variemos el punto de apoyo P0.

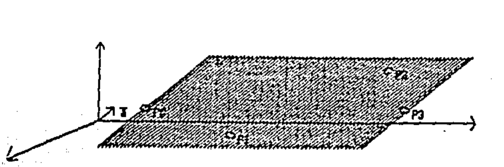


La ecuación en general de esta familia de rectas es:

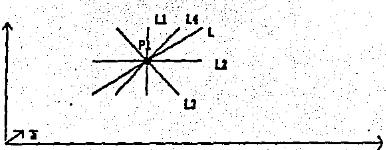
$$F : \{L \mid L=Pi+t\bar{a} \text{ t escalar}\}$$

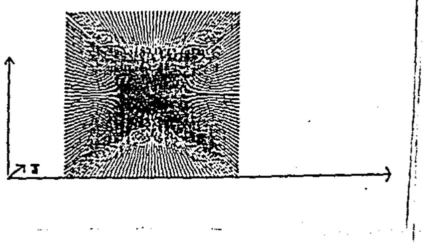
donde $\bar{a}$ es una dirección fija y Pi es cualquier punto de apoyo, que no este contenido en una recta previa de la familia; esto es, si tomamos como punto de apoyo a un punto de una recta de la familia, obtendremos, nuevamente, ésta última.

Como únicamente nos movemos en una dirección, con ésta familia de rectas, NO generamos a todo el espacio cartesiano.



Ahora tomemos una recta cualquiera en el plano cartesiano. Sea $L = \{P \mid P=P1+t\bar{a} \text{ t escalar}\}$; nuevamente variemos el vector de dirección.





obtenemos una familia de rectas en el plano cartesiano que tiene como ecuación general,

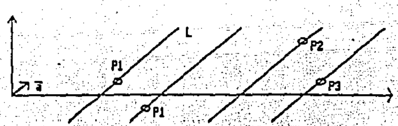
$$F : \{L \mid L=P1+t\bar{a}_i \ \ t \text{ escalar}\}$$

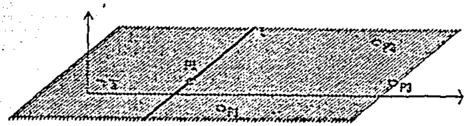
donde $\bar{a}_i$ es un vector en cualquier dirección. Esta familia de rectas nos genera TODO el plano cartesiano.

Si ahora tomamos la misma recta L en el plano cartesiano $L=\{P \mid P=P1+t\bar{a} \ \ t \text{ escalar}\}$ y variamos el punto de apoyo, la familia de rectas que obtenemos tiene como ecuación general,

$$F : \{L \mid L=Pi+t\bar{a} \ \ t \text{ escalar}\}$$

donde $\bar{a}$ es un vector de dirección fijo y Pi es un punto cualquiera, no contenido en una recta ya definida. Es claro que este tipo de familia TAMBIEN nos genera TODO el plano cartesiano.





En general, podemos formar la familia de rectas que pasa por el punto de intersección de dos rectas cualesquiera de la siguiente manera; sean L1 y L2 dos rectas cualesquiera en el plano cartesiano que se intersectan en el punto P0:

$$L1 : A1x+B1y+C1=0 \qquad L2 : A2x+B2y+C2=0 \qquad P0=(x0,y0).$$

Consideremos a1 y a2 escalares, entonces sucede que:

$$a1L1 : a1(A1x+B1y+C1) = a1A1x+a1B1y+a1C1=0$$

$$a2L2 : a2(A2x+B2y+C2) = a2A2x+a2B2y+a2C2=0$$

por otro lado, como $P0=(x0,y0)$ es un punto de ambas rectas, debe cumplir la ecuación de cada una ellas,

$$A1x0+B1y0+C1=0$$

$$A2x0+B2y0+C2=0$$

y también debe cumplir las ecuaciones al multiplicarlas por a1 y a2,

$$a1(A1x0+B1y0+C1) = a1A1x0+a1B1y0+a1C1=0$$

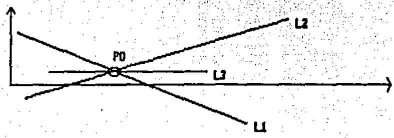
$$a2(A2x0+B2y0+C2) = a2A2x0+a2B2y0+a2C2=0$$

Ahora sumamos a1L1 y a2L2 evaluadas en P0,

$$a1L1+a2L2 : a1A1x0+a1B1y0+C2 + a2A2x0+a2B2y0+a2C2=0$$

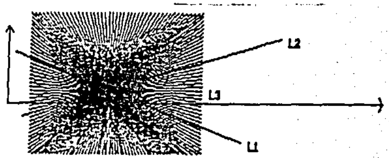
$$L3 : Ax0 + By0 + C = 0$$

donde A = a1A1+a2A2, B = a1B1+a2B2 y C = a1C1+a2C2.



De ésta forma obtenemos una nueva recta L3 que también intersecta a L1 y L2 en el punto P0. Si tomamos a1 y a2 en los reales, obtendremos una familia de rectas como combinación lineal de L1 y L2; la ecuación de la familia queda:

$$F : \{L \mid L = a1L1 + a2L2 = 0,\ a1 \text{ y } a2 \text{ escalares}\}$$



Ejemplo:

Encontrar una recta de la familia de rectas que tiene como punto de intersección, el de las rectas:

$$L1 : 2x - y = 1$$

$$L2 : 3x + 4y = 2$$

La familia de rectas tiene la ecuación:

$$F : \{L \mid L=s(2x-y-1)+t(3x+4y-2) = 0 \quad s,t \text{ escalares}\}$$

entonces una recta es,

$$L3 : 2(2x-y-1) + (-1)(3x+4y-2) = 0$$

$$L3 : x -6y = 0$$

Ejercicios 3.6

Dadas las rectas:

1.- $L1$: $3x-8y+12=0$ y $L2$: $2x+3y=7$, $PO=(-3,1)$

2.- $L1$: $2x+3y-7=0$ y $L2$: $5x-2y=8$, $PO=(0,0)$

a) Hallar la ecuación de la familia de rectas que pasa por la intersección de ellas.

b) Hallar la ecuación del miembro de la familia, que pasa por el punto indicado.

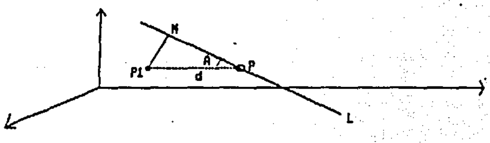
3.2 4 Distancias.

3.2.4.1 Distancia de un punto a una recta en dos y tres dimensiones.

Vamos ahora a calcular la distancia de un punto $P1$ a una recta L en el espacio cartesiano. Sean $P1=(x1,y1,z1)$ y,

$$L: \frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c}$$

A partir de $P1$ trazamos una perpendicular a L, sea N la intersección de la perpendicular y L; sea $P=(p,q,r)$ un punto en L.



Entonces $d=|\overline{NP1}|=|\overline{PP1}|\text{sen}A$, donde A es el ángulo entre L y $\overline{PP1}$; por lo definimos, $|\overline{PP1}\times\overline{L}|=|\overline{PP1}|\,|\overline{L}|\text{sen}A$ donde $\overline{L}=[a,b,c]$, luego,

$$\text{sen } A = |\overline{PP1}\times\overline{L}|/|\overline{PP1}|\,|\overline{L}|$$

por lo que,

$$d = |\overline{PP1}|\text{sen } A = |\overline{PP1}|\,|\overline{PP1}\times\overline{L}|/|\overline{PP1}|\,|\overline{L}| = |\overline{PP1}\times\overline{L}|/|\overline{L}|$$

$$d = \frac{|[x1-p,y1-q,z1-r] \times [a,b,c]|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Ejemplo:

Calcular la distancia del punto P1=(1,-2,3) a la recta L: x/4=y+4/-3=z-1.

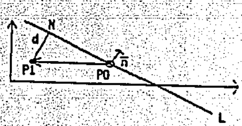
Sea P=(0,4,1) un punto en L, entonces $\overline{PP1}$=[1,2,2] y $\overline{L}$=[4,-3,1],

$$d = \frac{|[1,2,2] \times [4,-3,1]|}{|[4,-3,1]|} = \frac{|[8,7,-11]|}{\sqrt{26}} = 3$$

Platiquemos la situación análoga en el plano cartesiano. Sea L: Ax+By+C=0 una recta y P1=(x1,y1) un punto, ambos en el plano cartesiano; calculemos la distancia de P1 a L.

Tomemos un punto P0=(x0,y0) en L y un vector normal $\overline{n}$ a L, tenemos entonces,

$$P0\overline{P1} = [x0-x1, y0-y1]$$
$$\overline{n} = [A,B]$$



Tracemos por P1 la perpendicular $\overline{NP1}$ a L. La distancia d=$|\overline{NP1}|$ es el módulo de la proyección del vector $\overline{POP1}$ sobre la dirección de $\overline{n}$, así tenemos,

$$d = \left|\overline{POP1} \bullet \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|}\right| = \left|[x0-x1, y0-y1] \bullet \left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right]\right|$$

$$d = \frac{|Ax1+By1-(Axo+Byo)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Como P0 pertenece a L, -(Ax0+By0)=C, luego

$$d = \frac{|Ax1+By1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ejemplo:

Calcular la distancia del punto $P=(1,-3)$ a la recta $4x-3y=-5$.

$$d = \frac{|(4)(1)-(3)(-3)+5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{18}{5}$$

3.2.4.2 Distancia entre dos rectas en tres dimensiones.

Como consecuencia del problema anterior surge la inquietud de calcular la distancia entre dos rectas. La mínima distancia entre dos rectas en el espacio cartesiano que no se intersectan, está dada por la longitud de la perpendicular común entre los dos puntos más cercanos.

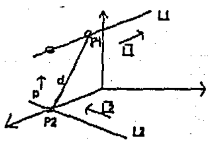
Ejemplo:

Calcular la distancia entre las rectas:

$L1$: $x+5/3 = y+5/2 = z-1/-2$ y $L2$: $x-9/6 = y/-2 = z-2/-2$

Sean $P1=(-5,-5,1)$ y $P2=(9,0,2)$ puntos en $L1$ y $L2$, $\overline{L1}$ y $\overline{L2}$ los vectores directores de $L1$ y $L2$, respectivamente. Calculamos un vector unitario $\hat{p}$ en la dirección perpendicular a $L1$ y $L2$, utilizamos el producto cruz,

$$\hat{p} = \frac{\overline{L1}\times\overline{L2}}{|\overline{L1}\times\overline{L2}|} = \frac{[3,2,-2] \times [6,-2,1]}{|\overline{L1}\times\overline{L2}|} = \frac{[2,3,6]}{7}$$



Por último, la longitud de la perpendicular común entre los dos puntos más cercanos, o sea la distancia entre las dos rectas, es igual al módulo de la proyección de $\overline{P1P2}$ sobre la perpendicular misma,

$$\overline{P1P2} = [14,5,1]$$

recordemos que para el cálculo de la proyección utilizamos el producto punto,

$$d = |\overline{P1P2}\bullet\hat{p}| = |[14,5,1]\bullet[2/7,3/7,6/7]| = 7$$

En este ejemplo $d = |\overline{P1P2}\bullet\hat{p}|$, porque $\hat{p}$ es un vector unitario; si no lo fuera tendríamos:

$$d = |\overline{P1P2}\bullet\overline{p}|/|\overline{p}|$$

Ejercicios 3.7

1.- Calcular la distancia entre el punto y la recta dados,

a) $P=(6,-3,3)$ y $L: x=(3-y)/2=(-z+6)/2$

b) $P=(-1,2,3)$ y $L: (x-7)/6=(y+3)/-2=z/3$

c) $P=(4,-1)$ y $L: 3x-4y+12=0$

d) $P=(2,-3)$ y $L: 4x-5y+10=0$

2.- Calcular la distancia entre las rectas siguientes,

a) $L: (x-1)/2=y+2=z-3$ y $L: (x+2)/-3=y-2=(z+1)/2$

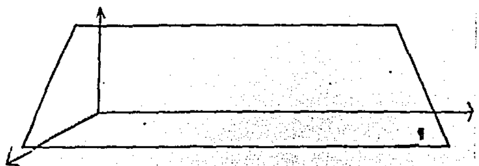
b) $L: (x-1)/2=y-4=(z-5)/2$ y $L: (x-2)/-1=(y-8)/3=(z-11)/4$

3.- a) Deducir la fórmula para calcular la distancia entre dos rectas paralelas en el espacio.

b) Calcular la distancia entre las dos rectas paralelas, $L: (x-2)/3=(y-2)/4=(8-z)/4$ y $L: (x-1)/3=(2-y)/-4=(z+3)/-4$

3.3 El plano.

Vamos a continuar nuestro estudio de los lugares geométricos con el PLANO. Aún cuando llamamos PLANO cartesiano al plano afín asociado a nuestro espacio vectorial de dimensión dos, la noción de "plano" como lugar geométrico no tiene sentido en un espacio vectorial de dimensión dos; por lo que únicamente lo estudiaremos en un espacio vectorial de dimensión tres (espacio cartesiano).

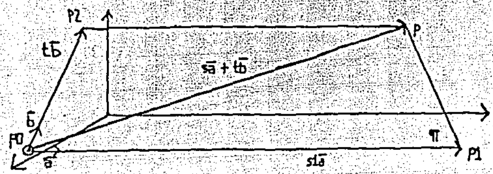


3.3.1 Representaciones del plano.

Definición.- Un PLANO es el lugar geométrico de todos los puntos en el espacio cartesiano que se describen a través de un punto fijo P0 y un par de vectores no paralelos $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

$$\Pi = \{P \mid \overline{P0P} = s\bar{a} + t\bar{b} \quad s,t \text{ escalares}\}$$

Es decir, un plano es el conjunto de todos los puntos P tales que el vector $\overline{P0P}$ es una combinación lineal de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.



Cuando s=t=0, $\overline{P0P}=0$ y P0=P; esto es, P0 es un punto del plano. Si t=0, de la ecuación del plano se tiene que, $\Pi=\{P \mid \overline{P0P}=s\bar{a} \quad s \text{ escalar}\}$, que es la ecuación de una recta que pasa por P0 y tiene como vector de dirección a $\bar{a}$. Similarmente si s=0, obtenemos una recta que pasa por P0 y tiene como vector de dirección a $\bar{b}$. Ambas rectas están contenidas en el plano.

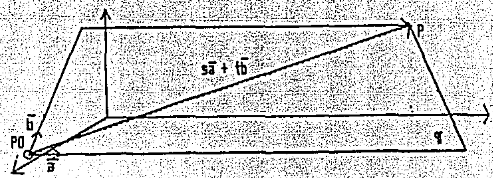
Obtengamos ahora la representación paramétrica del plano. Sea $P0=(x0,y0,z0)$, $\bar{a}=a1I+a2J+a3K$ y $\bar{b}=b1I+b2J+b3K$, $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no paralelos. Entonces, un punto P se encuentra en el plano Π si y sólo si existen s,t escalares tales que $\overline{P0P} = s\bar{a} + t\bar{b}$. Esta condición es equivalente a,

$$\Pi=\{P \mid P = P0+s\bar{a}+t\bar{b} \quad s,t \text{ escalares}\}$$

$\Pi=\{P \mid (x,y,z) = (x0,y0,z0)+s(a1,a2,a3)+t(b1,b2,b3) \quad s,t \text{ escalares}\}$

$\Pi=\{x=x0+sa1+tb1,\ y=y0+sa2+tb2,\ z=z0+sa3+tb3 \quad s,t \text{ escalares}\}$

A esta representación del plano se le conoce como LAS ECUACIONES PARAMETRICAS DEL PLANO.

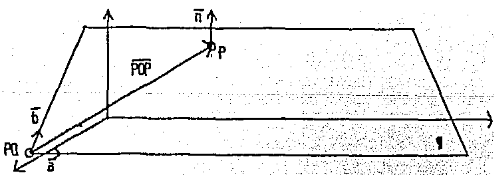


Veamos como representar al plano por una ecuación en términos de x,y,z. Como $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son vectores no paralelos, el vector $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$ es no nulo y perpendicular a $\bar{a}$ y $\bar{b}$. De esta forma, para cada punto $P=(x,y,z)$ en Π,

$$\overline{P0P}\bullet\bar{n} = (s\bar{a}+t\bar{b})\bullet\bar{n} = s\bar{a}\bullet\bar{n} + t\bar{b}\bullet\bar{n} = 0$$

esto es, $\overline{P0P}$ es perpendicular a $\bar{n}$.

Por otro lado, si P es un punto tal que $\overline{P0P}$ sea perpendicular a $\bar{n}$, entonces $\overline{P0P} = s\bar{a} + t\bar{b}$ para algunos s y t escalares, y P es un punto de Π. De esta forma, el plano Π es el conjunto de todos los puntos $P=(x,y,z)$ tales que $\overline{P0P}\bullet\bar{n}=0$, donde $\bar{n}$ se denomina el VECTOR NORMAL al plano Π.



Sea $\bar{n} = AI+BJ+CK$, la ecuación del plano Π es,

$$\Pi : A(x-x0) + B(y-y0) + C(z-z0) = 0$$

que la podemos reescribir como,

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

donde $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. Esta representación del plano se conoce como la ECUACION GENERAL DEL PLANO (porque es una ecuación general lineal en tres variables).

Ejemplo 1:

Dados, $P_0=(4,1,2)$, $\bar{a}=2I-3J+K$ y $\bar{b}=2J-4K$. Obtener las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano Π, determinado por ellos.

$\Pi=\{P \mid P = P_0+s\bar{a}+t\bar{b} \quad s,t \text{ escalares}\}$

$\Pi=\{P \mid (x,y,z) = (4,1,-2)+s(2,-1,1)+t(0,2,-4) \quad s,t \text{ escalares}\}$

$\Pi=\{x=4+2s,\ y=1-3s+2t,\ z=-2+s-4t \quad s,t \text{ escalares}\}$

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} I & J & K \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 10I + 8J + 4K$$

$\Pi : 10(x-4) + 8(y-1) + 4(z+2) = 0$

$\Pi : 5x + 4y + 2z - 20 = 0$ Ecuación General

Ejemplo 2:

Escriba la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1=(2,-1,4)$, $P_2=(-3,0,2)$ y $P_3=(1,-4,6)$.

Sean $\bar{a} = \overline{P_1P_2} = -5I +J -2K$ y $\bar{b} = \overline{P_1P_3} = -I -3J +2K$,

entonces $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = -4I + 12J + 16K$,

utilizando el punto P_1 obtenemos :

$-4(x-2) +12(y+1) +16(z-4) = 0$

$\Pi : x -3y +z -4 = 0$

En este ejemplo se muestra que cualesquiera tres puntos que no esten contenidos en una misma recta, determinan un único plano.

Ejercicios 3.8

1) Encuentre las ecuaciones paramétricas y rectangular del plano determinado por $P_0=(2,-1,3)$, $\bar{a}=2I+J+K$ y $\bar{b}=-I+2J+3K$.

2) Escriba la ecuación del plano que pasa por los puntos:

a) $P_1=(2,-1,3)$ $P_2=(1,0,4)$ $P_3=(-1,4,3)$

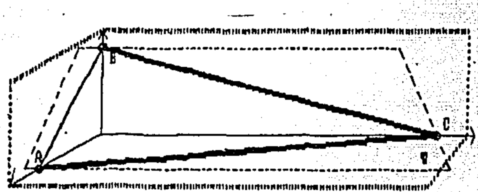
b) $P_1=(1,2,-3)$ $P_2=(-1,4,6)$ $P_3=(0,3,3/2)$

Sea Π: $Ax+By+Cz+D = 0$ un plano que intersecta a los ejes coordenados X,Y,Z en los puntos $A=(a,0,0)$, $B=(0,b,0)$ y $C=(0,0,c)$ respectivamente.

El plano Π que pasa por el punto A, tiene la siguiente ecuación : $aA + D = 0$, de donde $a = -D/A$

El plano Π que pasa por el punto B, tiene la siguiente ecuación : $bB + D = 0$, de donde $b = -D/B$

El plano Π que pasa por el punto C, tiene la siguiente ecuación : $cC + D = 0$, de donde $c = -D/C$



De la ecuación del plano Π: $Ax+By+Cz+D = 0$ obtenemos,

$$Ax + By + Cz = -D$$

$$Ax/-D + By/-D + Cz/-D = 1$$

$$x/(-D/A) + y/(-D/B) + z/(-D/C) = 1$$

que es lo mismo que,

$$x/a + y/b + z/c = 1$$

A esta representación se le conoce como ECUACION SIMETRICA DEL PLANO.

Ejemplo 1:

Determinar la ecuación del plano que corta a los ejes coordenados en los puntos $A=(2,0,0)$, $B=(0,-3,0)$ y $C=(0,0,-1)$.

Utilizando la ecuación simétrica del plano,

$$x/2 + y/(-3) + z/(-1) = 1$$

$$\Pi: 3x-2y-6z-6=0$$

Ejemplo 2:

Determinar las coordenadas de los puntos en los que el plano $4x-2y+z-8=0$ corta a los ejes coordenados.

Tenemos que reescribir la ecuación del plano en su forma simétrica,

$$4x - 2y + z = 8$$

$$4x/8 - 2y/8 + z/8 = 1$$

$$x/2 + y/-4 + z/8 = 1$$

luego, sean A,B,C los puntos de intersección del plano dado con los ejes coordenados x,y,z respectivamente, se tiene:

$$A=(2,0,0) \qquad B=(0,-4,0) \qquad C=(0,0,8)$$

Ejercicios 3.9

1) Encontrar la ecuación del plano que satisface las siguientes condiciones,

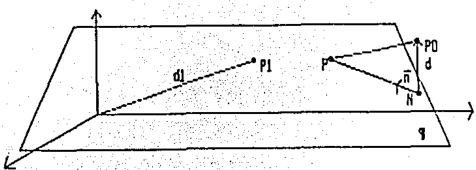
a) Pasa por los puntos $(-1,-1,-1)$, $(3,2,-2)$ y $(2,0,0)$

b) Intercepta a los ejes coordenados en los puntos $(-3,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,6)$

2) Calcular los puntos de intersección del plano $3x-6y+8z-24=0$ con los ejes coordenados.

3.3.1.1 Distancia de un punto a un plano.

Sea Π: $Ax+By+Cz+D = 0$ un plano y $P0=(x0,y0,z0)$ un punto cualquiera, tracemos una perpendicular a Π desde P0, sea N el pie de esa perpendicular. La DISTANCIA DE P0 A Π está dada por $d = |\overline{NP0}|$.



Consideremos un punto cualquiera $P=(x,y,z)$ del plano Π, entonces tenemos:

$$|\overline{PPO}| = |[xO-x, yO-y, zO-z]|$$

Sea $\bar{n}$ el vector unitario en la dirección de $|\overline{NP}|$,

$$\bar{n} = \frac{[A,\ B,\ C]}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Entonces d es la proyección de $\overline{PPO}$ sobre $\bar{n}$, como $\bar{n}$ es un vector unitario tenemos:

$$d = |\overline{PPo}\bullet\bar{n}| = \frac{[A(xo-x)+B(yo-y)+C(zo-z)]}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

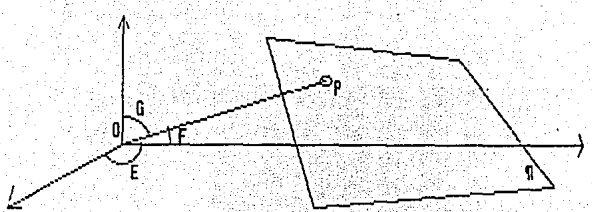
$$d = \frac{|Axo+Byo+Czo-(Ax+By+Cz)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Axo+Byo+Czo+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

por lo anterior, la distancia del origen a un punto del plano está dada por:

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Si suponemos que Π no pasa por el origen, esto es $D\neq0$. Podemos calcular los cosenos directores de la recta $\overline{OP}$, de la siguiente forma:

$$\cos E = \frac{A(-D/|D|)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \cos F = \frac{B(-D/|D|)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \cos G = \frac{C(-D/|D|)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



Luego, escribimos la ecuación del plano Π como:

$$: \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

y en términos de los cosenos directores de $\overline{OP}$ tenemos,

$$\Pi : (-D/|D|)\cos E\ x + (-D/|D|)\cos F\ y + (-D/|D|)\cos G\ z + (d/|D|)D = 0$$

esto es,

$$\Pi : x \cos E + y \cos F + z \cos G + (-D/|D|)(D/|D|)d = 0$$

como $(-D/|D|)(D/|D|) = -D^2/D^2 = -1$, tenemos:

$$\Pi : x \cos E + y \cos F + z \cos G - d = 0$$

A esta ecuación se le conoce como LA ECUACION NORMAL DEL PLANO. Donde cosE, cosF, cosG son los cosenos directores del vector normal al plano, cuyO punto inicial es el origen O y cuyo punto final es un punto en Π, y d es la distancia del origen al plano Π.

Ejemplo:

Dado el plano $\Pi: 2x+y-z-4=0$, encontrar la distancia del punto $P(3,-1,2)$ a Π, escribir la ecuación normal del plano y encontrar la distancia del origen a Π.

Según la fórmula que encontramos para la distancia de un punto cualquiera a un plano,

$$d = \frac{|Axo+Byo+Czo+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|2(3)+1(-1)+(-1)(2)+(-4)|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Para obtener la ecuación normal del plano a partir de la ecuación general, tenemos que dividir entre $-\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ si $D>0$, y entre $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ si $D<0$. Si $D=0$, entonces tenemos ambas posibilidades.

Como en nuestro ejemplo $D=-4<0$, entonces tenemos que dividir entre $\sqrt{6}$. De esta forma la ecuación normal del plano es:

$$\Pi: \frac{2x}{\sqrt{6}} + \frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{z}{\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}} = 0$$

y la distancia del origen al plano es:

$$d = 4 / \sqrt{6}$$

Finalmente, los cosenos directores son:

$\cos E = 2/\sqrt{6}$ $\qquad$ $\cos F = 1/\sqrt{6}$ $\qquad$ $\cos G = -1/\sqrt{6}$

Recalquemos que $\cos E=2\cos F=-2\cos G$, es decir, cada uno es combinación lineal de los otros.

Ejercicios 3.10

1) Reescribir la ecuación del plano en su forma normal y encontrar la distnaicia al origen.

a) $6x-3y+5z-30=0$

b) $-3x+2y-z=0$

2) Calcular la distancia del plano al punto dado.

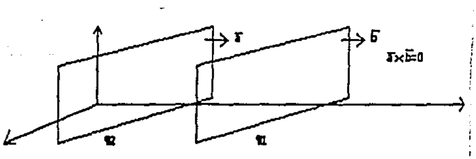
a) $2x-y+2z+4=0$, $P=(1,-2,5)$

b) $3x-2y+z-4=0$, $P=(1,1,1)$.

3.3.2 Intersección de dos planos.

Discutiremos ahora el problema de intersección de dos planos. Diremos que existe intersección entre dos planos siempre que sean no paralelos.

Definición.- Se dice que DOS PLANOS son PARALELOS si sus vectores normales son paralelos; esto es, si el producto cruz de sus vectores normales es cero.



Sin embargo, notemos que los dos planos $x+y+z=1$ y $2x+2y+2z=2$ son en realidad el mismo plano, ya que uno es combinación lineal del otro, en este caso diremos que son iguales pero, no diremos que son paralelos.

Ejemplo 1:

Determinar si los planos $\Pi1: -4x+6y+2z=8$ y $\Pi2: 2x+3y-z=3$ son paralelos o no.

El vector normal a cada plano es:

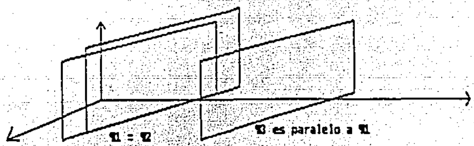
$$\overline{n1}: -4I+6J+2K \quad y \quad \overline{n2}: 2I+3J-K,$$

entonces:

$$n1 \times n2 = (+6-6)I+(4-4)J+(-12-(-12))K=0$$

Por lo tanto, $\Pi1$ es paralelo a $\Pi2$.

Cabe recalcar que en el caso de intersección de dos planos paralelos, sólo puede suceder que coincidan (es decir, que sean el mismo plano) o que no se intersecten.



Ejemplo 2:

Determinar si los siguientes pares de planos son paralelos, iguales o distintos.

a) $\Pi1: 2x-3y+6=0 \qquad \Pi2: 4x-6y+3z-5=0$

b) $\Pi1: 3x-4y+8z-5=0 \quad \Pi2: 3/2x-2y+4z-6=0$

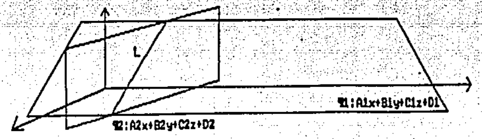
c) $\Pi1: x-2y+4z-6=0 \qquad \Pi2: -3x+6y-12z+18=0$

a) Como $C1=0$ y $C2=3$, $\Pi1$ no es paralelo a $\Pi2$, son distintos.

b) $A1/A2=3/(3/2)=2=B1/B2=C1/C2$ sin embargo $D1/D2=5/6$, por lo que $\Pi1$ y$\Pi2$ son paralelos.

c) $A1/A2=1/-3=B1/B2=C1/C2=D1/D2$, por lo que $\Pi1$ y $\Pi2$ son iguales.

En caso de que los dos planos sean no paralelos, entonces su intersección será una recta. Sean $\Pi 1: A1x+B1y+C1z+D1$ y $\Pi 2: A2x+B2y+C2z+D2$ dos planos no paralelos, veamos que su intersección es una recta.



Vamos a expresar a x y a y en términos de z, de esta forma obtendremos la ecuación de una recta donde z será nuestro parámetro. Despejamos x de la ecuación de $\Pi 1$,

$$x = (-B1/A1)y+(-C1/A1)z+(-D1/A1)$$

sustituimos este valor de x en la ecuación de $\Pi 2$ y despejamos y,

$$\Pi 2: A2[(-B1/A1)y+(-C1/A1)z+(-D1/A1)]+B2y+C2z+D2$$

$$\Pi 2: (-A2B1/A1+B2)y+(-A2C1/A1+C2)z+(-A2D1/A1+D2)$$

$$y = [(-A2C1/A1+C2)/(-A2B1/A1+B2)]z+(-A2D1/A1+D2)/(-A2B1/A1+B2)$$

ahora tenemos a y expresada en función de z, sustituimos este valor de y en el despeje de x y obtendremos a x expresada en función de z, es decir: $x = C3z+D3 \qquad y = C4z+D4 \qquad z = z$

el conjunto de todos los puntos que cumplen estas tres ecuaciones tienen la cualidad de estar en ambos planos, por lo que pertenencen a la intersección de los dos planos y como ya sabemos, estas ecuaciones nos representan una recta.

Ejemplo 1:

Encontrar los puntos de intersección de los dos planos $4x+3y+z=0$ y $x+y-z=15$.

Primero es conveniente asegurarse de que son planos no paralelos (dejamos esto como ejercicio). Vamos a expresar x y y en términos de z, de esta forma obtendremos las ecuaciones parámetricas de la recta, que es la intersección de los dos planos, donde z será nuestro parámetro.

1) $4x+3y+z=0$ 2) $x=-y+z+15$ 1) $y=5z+60$

2) $x+y-z=15$ 1) $-4y+4z+60+3y+z=0$ 2) $x=-5z-60+z+15=-4z-45$

por lo tanto, los dos planos se intersectan a lo largo de la recta L cuyas ecuaciones paramétricas son:

$x=-4t-45$ $y=5t+60$ $z=t$

En este ejemplo podemos hacer notar que el vector de dirección de L es $\bar{a}=-4I+5J+K$ y un punto por el que pasa es $P0=(-45,60,0)$. Otra forma de encontrar la recta L que es la intersección de dos planos, es encontrando el vector de dirección de L como:

$$\bar{a} = \overline{n1}\times\overline{n2} = \begin{vmatrix} I & J & K \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4I+5J+K$$

donde $\overline{n1}$ y $\overline{n2}$ son los vectores normales de los dos planos, y tomando P0 como cualquier punto en la intersección de $\Pi1$ y $\Pi2$.

Ejemplo 2:

Encontrar la intersección de los planos, $\Pi2: 2x+3y-z=7$ y $\Pi1: \{P \mid P=(1,1,1)+r(2,-1,3)+s(-1,0,2) \quad r,s \text{ reales}\}$.

Nuevamente primero hay que verificar si son o no planos paralelos (ejercicio), una vez que sabemos que son no paralelos tomamos un punto en $\Pi1$, $P=(1+2r-s,1-r,1+3r+2s)$ y comprobamos que se encuentra en $\Pi2$ de la siguiente manera,

el punto P se encuentra en el plano $\Pi2$ si sucede que:

$P\bullet\bar{n}=(1+2r-s,1-r,1+3r+2s)\bullet(2,3,-1)=7$

donde $\bar{n}$ es la normal al plano $\Pi2$, resolvemos y obtenemos,

$4-2r-4s=7$, de donde $r=-2s-3/2$

sustituimos este valor en la representación de P,

$P=(1,1,1)-3/2(2,-1,3)-2s(2,-1,3)+s(-1,0,2)$

$=(-2,5/2,-7/2)+s(-5,2,-4)$

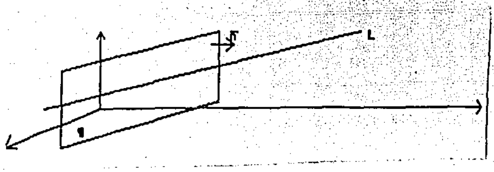
luego entonces, la intersección de $\Pi1$ y $\Pi2$ es la recta:

$L=\{P \mid P=(-2,5/2,-7/2)+s(-5,2,-4) \quad s \text{ real}\}$

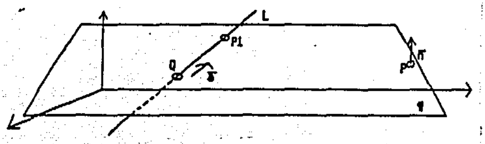
3.3.3 Intersección de una recta y un plano.

A continuación analizaremos cuando decimos que existe intersección entre una recta y un plano.

Definición.- Decimos que una RECTA L es PARALELA a un PLANO Π, si L es ortogonal a una normal en Π y no está contenida en Π.



Sean $L=\{P1+t\bar{a},\ t \text{ un real}\}$ una recta y $\Pi: Ax+By+Cz-D=0$ un plano cualesquiera. Si L es paralela a Π, por definición no existe intersección alguna entre ambos; si L no es paralela a Π entonces se intersectan en un sólo punto Q. Para demostrarlo escribimos la ecuación de Π como $\Pi=\{P \mid P\bullet\bar{n}=-D\}$ donde $P=(x,y,z)$ es un punto de Π y $\bar{n}=[A\ B\ C]$ es una normal a Π.



Ahora bien, un punto de L se encuentra en Π si sucede que $(P1+t\bar{a})\bullet\bar{n}=D$; como L no es paralela a Π, entonces $\bar{a}$ y $\bar{n}$ no son ortogonales, por lo que $\bar{a}\bullet\bar{n}$ es distinto de cero. En este caso, podemos despejar a t de nuestra ecuación,

$$(P1+t\bar{a})\bullet\bar{n} = -D$$

$$(\bar{a}\bullet\bar{n})t = -D-(P1\bullet\bar{n})$$

$$t = [-D-(P1\bullet\bar{n})]/\bar{a}\bullet\bar{n}$$

y el punto de intersección de L y Π es,

$$Q = P1+\{[-D-(P1\bullet\bar{n})]/\bar{a}\bullet\bar{n}\}\bar{a}$$

Ejemplo 1:

Encontrar la intersección de la recta $L=\{(1,1,1)+t(2,-1,3)\}$ y el plano Π: $2x+3y-z=7$.

Dejamos como ejercicio verificar que L y Π son NO paralelos. Tomemos un punto $P=(1,1,1)+t(2,-1,3)$ en L, sabemos que también se encuentra en Π si cumple,

$$P\bullet\bar{n} = (1+2t,1-t,1+3t)\bullet(2,3,-1)=7$$

resolviendo el producto punto encontramos el valor de t,

$$P\bullet\bar{n} = 4-2t=7, \text{ de donde } t = -3/2$$

por lo que el punto de intersección de L y Π es,

$$P = (-2,5/2,-7/2)$$

Ejercicios 3.11

1) Determinar si los siguientes pares de planos son paralelos, iguales o no paralelos. Si son no paralelos encontrar su intersección.

a) $\Pi1$: $x-3y+4z-2=0$ y $\Pi2$: $2x-y+1=0$

b) $\Pi1$: $x+y+z=0$ y $\Pi2$: $2x-3y+4z=5$

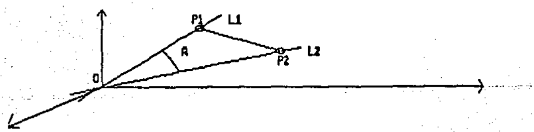
2) En los siguientes ejercicios determinar si la recta L es paralela a Π, no paralela a Π o está contenida en el plano Π. En caso de ser no paralela al plano Π, encontrar la intersección entre ambos.

a) $L=\{(2,1,4)+t(1,1,1)\}$ y $\Pi=\{(2,0,4)+u(1,7,3)+v(-3,8,0)\}$

b) $L=\{(1,-1,4)+t(2,-1,3)\}$ y $\Pi=\{(6,u,v-u)\}$

3.3.4 Angulo entre dos rectas.

Vamos a determinar el ángulo A, formado por dos rectas cualesquiera en el espacio cartesiano. Sin pérdida de generalidad, sean L1 y L2 dos rectas que pasan por el origen y, $P1=(a1,b1,c1)$ y $P2=(a2,b2,c2)$ dos puntos cualesquiera, distintos del origen en L1 y L2 respectivamente.



La Ley de los Cosenos, en el triángulo OP1P2, nos da:

$$\cos A = \frac{|\overline{OP1}|^2 + |\overline{OP2}|^2 + |\overline{P1P2}|^2}{2|\overline{OP1}|\,|\overline{OP2}|}$$

calculando las distancias entres los puntos y simplificando, obtenemos:

$$\cos A = \frac{a1a2 + b1b2 + c1c2}{\sqrt{a1^2+b1^2+c1^2}\sqrt{a2^2+b2^2+c2^2}} = \frac{\overline{OP1} \bullet \overline{OP2}}{|\overline{OP1}|\,|\overline{OP2}|}$$

Por lo tanto, el ángulo entre dos rectas está dado por el ángulo entre dos vectores directores de ellas.

Ejemplo:

Calcular el ángulo entre las rectas L1:$(x-1)/2=(y-3)/2=(z-1)/1$ y L2:$(x+1)/2=y/3=(z+2)/6$.

Utilizando la igualdad que obtuvimos, tenemos que:

$$\cos A = \frac{(2)(2)+(2)(3)+(1)(6)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{16}{21}$$

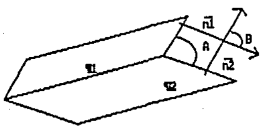
Por lo tanto, el ángulo entre L1 y L2 es $A = 40^\circ\ 36'$.

3.3.5 Angulo entre dos planos.

Sean $\Pi1$ y $\Pi2$ dos planos con normales $\overline{n1}=a1I+b1J+c1K$ y $\overline{n2}=a2I+b2J+c2K$ respectivamente. El ANGULO A ENTRE $\Pi1$ y $\Pi2$ se define en términos del ángulo B entre $\overline{n1}$ y $\overline{n2}$, de la siguiente forma:

$$\cos A = |\cos B| = \frac{|\overline{n1} \bullet \overline{n2}|}{|\overline{n1}|\,|\overline{n2}|} = \frac{|a1a2+b1b2+c1c2|}{\sqrt{a1^2+b1^2+c1^2}\sqrt{a2^2+b2^2+c2^2}}$$

donde $0 <= B <= 90^\circ$



Ejemplo 1:

Encontrar el ángulo A formado por los planos $\Pi 1: 3x+y-z+3=0$ y $\Pi 2: x-y+4z-9=0$.

Un vector normal a $\Pi 1$ es $\overline{n1}=3I+J-K$ y uno normal a $\Pi 2$ es $\overline{n2}=I-J+4K$, sea B el ángulo entre ellos.

Utilizando la fórmula que obtuvimos anteriormente:

$$\cos A = |\cos B| = \frac{|\overline{n1}\bullet\overline{n2}|}{|\overline{n1}|\,|\overline{n2}|} = \frac{|3-1-4|}{\sqrt{9+1+1}\,\sqrt{1+1+16}} = \frac{2}{\sqrt{198}}$$

Por lo tanto $A = 81^\circ 82'$.

Ejemplo 2:

Encontrar la ecuación del plano Π que pasa por los puntos: $P1=(2,-1,3)$, $P2=(-1,-2,1)$, y es perpendicular al plano $\Pi 1: x-3y+4z-2=0$.

Sea $\bar{n}$ una normal a Π, $\overline{n1}=I-3J+4K$ es una normal a $\Pi 1$. Como P1 y P2 están en Π, $\overline{P1P2}=-3I-J-2K$ es perpendicular a $\bar{n}$. Por otro lado $\bar{n}$ es perpendicular a $\overline{n1}$, $\bar{n}$ es paralelo $\overline{n1}\times\overline{P1P2}$ y $\overline{n1}\times\overline{P1P2}$ es normal a Π:

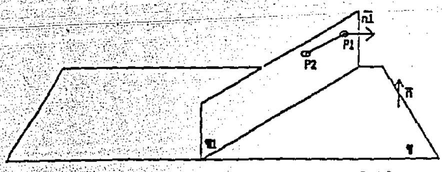
$$\overline{n1}\times\overline{P1P2} = \begin{vmatrix} I & J & K \\ 1 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 10I-10J-10K$$

Entonces, un vector normal a Π es $\bar{n}=I-J-K$. Utilizamos P1 para escribir la ecuación de Π.

$\Pi: (1)(x-2)+(-1)(y+1)+(-1)(z-3)=0$

$\Pi: x-y-z=0$

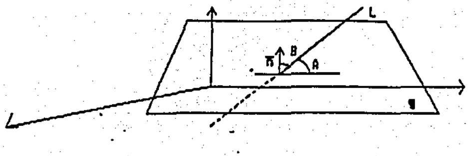
Queda como ejercicio verificar que efectivamente Π es el plano buscado.



3.3.6 Angulo entre una recta y un plano.

Sean $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ un plano cualquiera y $L: (x-p)/a=(y-q)/b=(z-r)/c$ una recta cualquiera que no es paralela a Π.

EL ANGULO A ENTRE Π Y L es el ángulo formado por la recta L con su proyección sobre el plano Π. El ángulo B es el complemento del ángulo A formado por L y el vector normal al plano Π.



Calculamos el ángulo B mediante los parámetros directores del vector normal al plano, que son [A B C], y de L [a b c], tenemos que:

$$\cos B = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

como el ángulo $B = \Pi/2 - A$, entonces:

$$\text{sen } A = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Ejemplo:

Hallar el ángulo A que forman la recta y el plano dados, $L: (x+2)/3=y/-1=(z-4)/2$ y $\Pi: 2x+3y-z+11=0$.

Utilizamos la igualdad anterior y obtenemos

$$\text{sen } A = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|6-3-2|}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{14}$$

finalmente, el ángulo A es $4^\circ 9'$.

Ejercicios 3.12

1) Determinar si los siguientes pares de planos son paralelos, perpendiculares o ninguno de los dos casos. Si sucede que son no

paralelos y no perpendiculares, determinar el ángulo entre ellos.

a) $\Pi 1: 3x-2y+z-4=0$ y $\Pi 2: x-4y-11z-2=0$

b) $\Pi 1: x+y+z-2=0$ y $\Pi 2: 2x-y+2z+3=0$

c) $\Pi 1: 2y-z=4$ y $\Pi 2: x+2z=3$

2) Encontrar la ecuación del plano que satisface las siguientes condiciones,

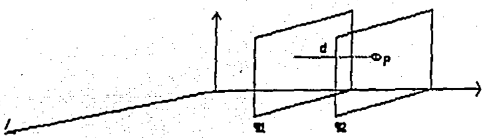
a) que pasa por el punto $P1=(4,0,-2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2,1,4)$ y $(0,2,-3)$

b) que pasa por los puntos $P1=(2,1,3)$, $P2=(4,1,-1)$ y es perpendicular al plano $x-2y+3z=1$.

3) Hallar el ángulo que forman la recta $L: (x-2)/6=(3y+1)/-6=(1-z)/3$ y el plano $\Pi: 2x-3y+6z+3=0$

3.3.7 Distancia entre dos planos.

Podremos hablar de la distancia entre dos planos sólo cuando estos sean paralelos. Tomemos $\Pi 1: Ax+By+Cz+D1=0$ y $\Pi 2: Ax+By+Cz+D2=0$ planos paralelos y calculemos la distancia entre ellos, como la distancia de un punto cualquiera de $\Pi 2$ a $\Pi 1$.



Sea $P=(x2,y2,z2)$ un punto en $\Pi 2$, utilizamos la fórmula de distancia de un punto a un plano,

$$d = \frac{Ax2+By2+Cz2+D1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

pero $Ax2+By2+Cz2=-D2$, por lo tanto la distancia entre $\Pi 1$ y $\Pi 2$ es,

$$d = \frac{|D1-D2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

utilizamos el valor absoluto porque las distancias no son negativas.

Ejemplo:

Hallar la distancia entre los planos paralelos

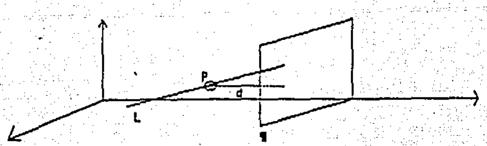
$\Pi1: 8x-4y+z+9=0$ y $\Pi2: 8x-4y+z-36=0$

Utilizando la fórmula anterior,

$$d = \frac{|9-(-36)|}{\sqrt{8^2+(-4)^2+1^2}} = \frac{|-25|}{\sqrt{64+16+1}} = \frac{25}{9}$$

3.3.8 Distancia entre un plano y una recta.

De igual manera podemos hablar de la distancia entre un plano y una recta, solamente sí la recta es paralela al plano. Es decir, la recta es ortogonal a una normal del plano. Decimos que la distancia entre la recta y el plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.



Ejemplo:

Hallar la distancia entre la recta $L: (x+1)/3=(y-2)/-3=(z+3)/-2$ y el plano $\Pi: x-3y+6z+7=0$.

Primero demostremos que L es paralela a Π. El vector director de la recta es [3 -3 -2] y una normal a Π es [1 -3 6], luego,

$$[3\ -3\ -2]\circ[1\ -3\ 6]=(3)(1)+(-3)(-3)+(-2)(6)=3+9-12=0$$

por lo tanto, L es paralela a Π.

Ahora tomemos un punto cualquiera en L: $P=(2,-1,-5)$ y calculemos la distancia de P a Π,

$$d = \frac{|Axo+Byo+Czo+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1(2)-3(-1)+6(-5)+7|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2+(6)^2}} = \frac{18}{\sqrt{46}}$$

de esta forma, d es la distancia de L a Π.

Ejercicios 3.13

1) Hallar la distancia entre los planos paralelos siguientes,

a) $\Pi1: 4x-4y+7z-18=0$ y $\Pi2: 4x-4y+7z+27=0$

b) $\Pi1: 6x+3y-2z+14=0$ y $\Pi2: 6x+3y-2z-35=0$

2) Determinar si la recta y el plano siguientes son paralelos, si lo son encontrar la distancia entre ellos,

a) $L: x=y+2=z-3$ y $\Pi: 3x-2y+8z-5=0$

b) $L: x=(y+10/3)/(-2/3)=z-1$ y $\Pi: 2x-3y-4z+6=0$

3.3.9 Familias de planos.

Definición.- Llamamos FAMILIA DE PLANOS a un conjunto de planos que comparten alguna característica.

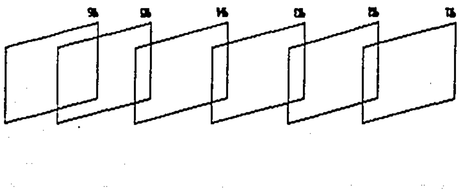
Ciertas familias de planos se pueden caracterizar por una ecuación lineal en x,y,z, con algunos coeficientes no especificados. Ilustremos esto con unos ejemplos.

Ejemplo 1:

La familia de planos paralelos al plano $\Pi1: 2x-3y+z-4=0$, tiene como ecuación $2x-3y+z+D=0$, D es llamado un parámetro de la familia de planos. El plano miembro de ésta familia que pasa por el punto $(-2,1,3)$ se obtiene sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación de la familia de planos y resolviendo para D. Entonces tenemos,

$$2(-2))-3(1)+(3)+D=0, \text{ por lo que } D = 4$$

La ecuación del plano buscado es $2x-3y+z+4=0$.



Ejemplo 2:

Dados los planos $\Pi 1: x-2y+3z-4=0$ y $\Pi 2: 2x+y-3z-1=0$. Encontrar la ecuación del plano que contiene a la intersección de $\Pi 1$ y $\Pi 2$ y pasa por el punto $(5,0,0)$.

Resolveremos este ejemplo basándonos en lo que hicimos para familias de rectas.

La ecuación de la familia de planos que contiene al plano buscado es:

$$h(x-2y+3z-4)+k(2x+y-3z-1)=0.$$

Sustituimos en ésta ecuación las coordenadas $(5,0,0)$,

$$h+9K=0$$

$$h=-9k \qquad h \text{ y } k \text{ distintos de cero.}$$

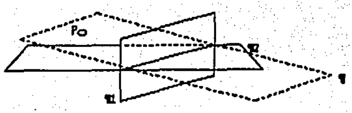
Ahora sustituimos el valor de h en la ecuación de la familia,

$$-9k(x-2y+3z-4)+k(2x+y-3z-1)=0$$

dividimos por k (que es distinto de cero) y simplificamos, para obtener,

$$7x-19y+30z-35=0$$

que es la ecuación del plano buscado.



Ejercicios 3.14

1.- a) Encontrar la ecuación de la familia de planos que pasa por los puntos $(5,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,0)$.

b) Encontrar al miembro de ésta familia perpendicular al plano $3x-2y+z=4$.

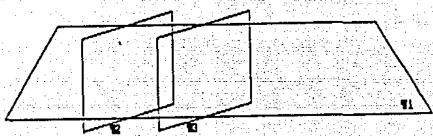
2.- a) Encontrar la ecuación de la familia de planos que contiene a la intersección de los planos $2x+2y-z-4=0$ y $x-3y+z-2=0$.

b) Encontrar al miembro de la familia que pasa por el punto $(0,0,3)$.

3.3.10 Intersección de tres planos.

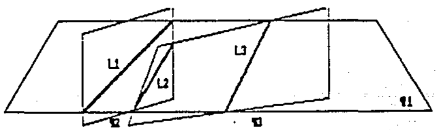
En particular, tomaremos al plano como un lugar geométrico del que cabe averiguar cuando decimos que existe intersección entre tres de ellos; y si se da el caso, veremos cuales lugares geométricos son las posibles intersecciones.

Para facilitar nuestro análisis tomaremos a los planos por parejas y analizaremos la intersección de cada pareja de planos. A partir de esto, podemos decir que, si sucede que por lo menos dos planos son paralelos o son el mismo plano (en cuyo caso se cortan en una recta),entonces no existe intersección de esa pareja y por consiguiente, no existe intersección alguna entre los tres planos.

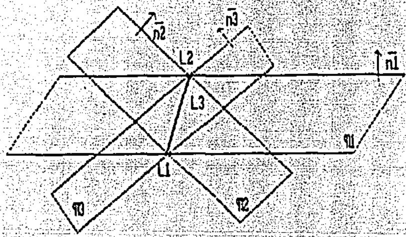


Supongamos que para cada pareja de planos estos son no paralelos, es decir se intersectan. Como lo vimos anteriormente si dos planos son no paralelos, entonces su intersección es una recta; como suponemos que nuestras parejas de planos se intersectan, entonces nuestro problema se reduce a analizar los casos de intersección entre rectas.

Sean L1, L2 y L3 las rectas que son la intersección de Π1 y Π2, de Π2 y Π3 y de Π3 y Π1 respectivamente. Recordemos que si dos rectas son paralelas y se intersectan entonces las dos rectas son iguales, si son no paralelas y se intersectan lo hacen en un sólo punto.

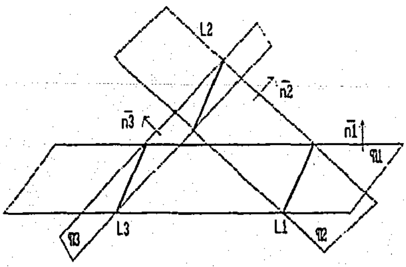


Caso 1.- L1 es paralela a L2 y se intersectan. Entonces L1=L2 porque suponemos que se intersectan; pero, como L2 y L3 también se intersectan debe suceder que L2=L3. Es decir, las tres rectas son la misma, la intersección de los tres planos es una recta.



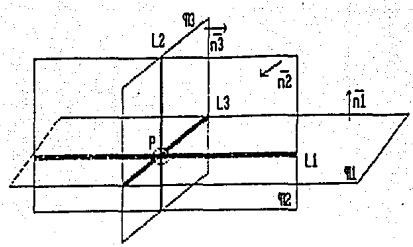
Notemos que en este caso los vectores normales de los tres planos son linealmente dependientes, es decir, podemos expresar a cada uno como combinación lineal de los otros dos.

Caso 2.- L1 es paralela a L2 y no se intersectan. Entonces debe suceder que L2 es paralela a L3 y tampoco se intersectan; si L3 y L2 se intersectaran, L3=L2 y tendríamos el caso anterior. En este caso las tres rectas son paralelas pero ajenas. Es decir la intersección de los tres planos es vacía.



Notemos que aquí, los tres vectores normales también son linealmente dependientes.

Caso 3.- L1 no es paralela a L2 y se intersectan. Sabemos que L1 y L2 deben intersectarse en un sólo punto y, como L2 y L3 también se intersectan, debe suceder que se intersecten en el mismo punto que se intersectan L1 y L2. Es decir, la intersección de los tres planos es un punto.



Notemos que este es el único caso en que los tres vectores normales no tienen relación de dependencia alguna; es decir, son linealmente independientes.

Geométricamente dibujamos los planos de forma que nos ayuden a ejemplificar lo que se quiere; pero, no siempre es sencillo visualizarlos a partir de la representación analítica. Dadas las ecuaciones de tres planos cualesquiera, ¡cómo sabemos si se intersectan o no? Analizando la dependencia o independencia de los vectores normales a cada uno de ellos.

Sean $\Pi1: A1x+B1y+C1z+D1$, $\Pi2: A2x+B2y+C2z+D2$ y $\Pi3: A3x+B3y+C3z+D3$ tres planos cualesquiera; sabemos que un vector normal a cada uno ésta dado por los coeficientes de x, y, z. Recordemos que dados tres vectores podemos determinar si son linealmente independientes o dependientes, mediante el triple producto escalar, esto es:

$$Ds = \begin{vmatrix} A1 & B1 & C1 \\ A2 & B2 & C2 \\ A3 & B3 & C3 \end{vmatrix}$$

Si Ds es diferente de cero, entonces los tres vectores normales son linealmente independientes y, se da el caso 3: la intersección de los tres planos es un sólo punto.

Si Ds es igual a cero, entonces los tres vectores normales son linealmente dependientes y, se deben analizar los casos 1 y 2: la intersección de los tres planos es una recta ó la intersección es vacia.

Ejemplo:

Decidir si los siguientes grupos de tres planos se intersectan y si es así, encontrar los puntos de intersección:

a) $\Pi1: 2x-y+2z=9$, $\Pi2: x+3y-5z=-3$ y $\Pi3=x-12y-7z=2$

b) $\Pi1: x-3y+z=4$, $\Pi2: 2x+y-3z=-1$ y $\Pi3=3x-2y-2z=3$

c) $\Pi1: x+y+z=0$, $\Pi2: 2x-3y+4z=5$ y $\Pi3=8x+23y+2z=27$

a) Analizemos el triple producto escalar de los vectores normales a cada uno de los planos,

$$Ds = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & -12 & -7 \end{vmatrix} = 2(-81)-(-1)(-2)+2(-15) = -97$$

Como Ds es diferente de cero, entonces los tres vectores normales son linealmente independientes y, se da el caso 3: la intersección de los tres planos es un sólo punto. Dejamos como ejercicio resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas; obtenemos que el punto de intersección es $P0=(319/97,-45/97,95/97)$.

b) Analizemos el triple producto escalar de los vectores normales a cada uno de los planos,

$$Ds = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 1(-8)-(-3)(5)+1(-7) = 0$$

Como Ds es igual a cero, entonces los tres vectores normales son linealmente dependientes y, se deben analizar los casos 1 y 2: la intersección de los tres planos es una recta ó la intersección es vacia. Primero encontremos la recta L1 que es la intersección de $\Pi1$ y $\Pi2$, luego veamos si L1 está contenida en $\Pi3$.

Parametrizando L1 con respecto a z (lo dejamos como ejercicio), obtenemos que:

L1 : $x=1/7+8/7t$ $y=-9/7+5/7t$ $z=t$

L1 estará contenida en $\Pi3$ si para cualquier punto P de L1, P es un punto de $\Pi3$. Si $t=0$, $P=(1/7,-9/7,0)$ es un punto de L1, veamos si cumple la ecuación de $\Pi 3$,

$3x-2y-2z=3 \qquad 3(1/7)-2(-9/7)-2(0)=3 \qquad 3/7+18/7=3$

Por lo tanto la intersección de los tres planos es la recta:

$L1 : x=1/7+8/7t \qquad y=-9/7+5/7t \qquad z=t$

c) Analizemos el triple producto escalar de los vectores normales a cada uno de los planos,

$$Ds = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 8 & 23 & 2 \end{vmatrix} = 1(-98)-1(-28)+1(70) = 0$$

Como Ds es igual a cero, entonces los tres vectores normales son linealmente dependientes y, se deben analizar los casos 1 y 2: la intersección de los tres planos es una recta ó la intersección es vacía. Primero encontremos la recta L1 que es la intersección de $\Pi 1$ y $\Pi 2$, luego veamos si L1 está contenida en $\Pi 3$.

La recta L1 tiene las siguientes ecuaciones parámetricas (lo dejamos como ejercicio),

$L1 : x=-6+7t \qquad y=1-2t \qquad z=5-5t$

L1 estará contenida en $\Pi 3$ sí para cualquier punto P de L1, P es un punto de $\Pi 3$. Si $t=0$, $P=(-6,1,5)$ es un punto de L1, veamos si cumple la ecuación de $\Pi 3$,

$8x+23y+2z=27 \qquad 8(-6)+23(1)+2(5)=27 \qquad -48+23+10=-15$

L1 no está contenida en $\Pi 3$, por lo tanto debe suceder que la intersección de los tres planos sea vacía. Dejamos como ejercicio comprobar que efectivamente sucede así.

Ejercicios 3.15

Decidir si los siguientes grupos de tres planos se intersectan y si es así, encontrar los puntos de intersección:

a) $\Pi 1: 2x-3y+z-9=0$, $\Pi 2: x+4y-3z+10=0$ y $\Pi 3=x+5y+9=0$

b) $\Pi 1: x+7y+4z-5=0$, $\Pi 2: 4x-10y+6z+4=0$ y $\Pi 3=-6x+15y-9z=3=0$

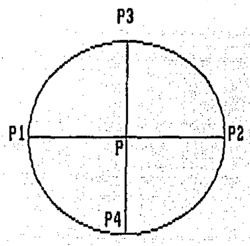
c) $\Pi 1: x-2y+4z=-4$, $\Pi 2: 2x+3y-5z=13$ y $\Pi 3=7x+2z=14$

4.1 Simetrías.

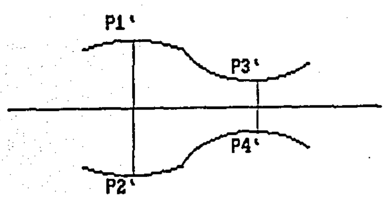
Introduciremos los conceptos de simetría respecto a un punto y simetría respecto a una recta, para identificar a los lugares geométricos que estudiaremos ahora, por sus simetrías.

Definición.- Se dice que dos puntos P1 y P2 son SIMETRICOS RESPECTO A UN PUNTO P, sí P es el punto medio del segmento que une P1 y P2. Y se dice que son SIMETRICOS RESPECTO A UNA RECTA L, sí la distancia de P1 a la recta es la misma que de P2 a L, y el punto medio del segmento de recta perpendicular a L, que une P1 y P2, está en L.

Un conjunto de puntos son simétricos respecto a un punto, sí para cada punto del conjunto existe otro, dentro del mismo conjunto, que cumpla con la definición anterior; el ejemplo más claro de este conjunto de puntos es la circunferencia.



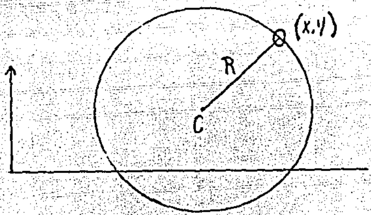
Un conjunto de puntos son simétricos respecto a una recta, sí para cada par de puntos unidos por un mismo segmento de recta perpendicular a la recta dada, el punto medio de dicho segmento es un punto en la recta; un ejemplo de este tipo de conjunto de puntos es la siguiente curva.



En este momento diremos que a las cónicas se les puede dividir en dos grupos: las CENTRADAS y las NO CENTRADAS. Las cónicas centradas guardan simetría respecto a un punto, llamado centro de simetría; las cónicas no centradas no guardan simetría respecto a un punto. Hablaremos de esto con más detalle, cuando analizemos a cada cónica por separado.

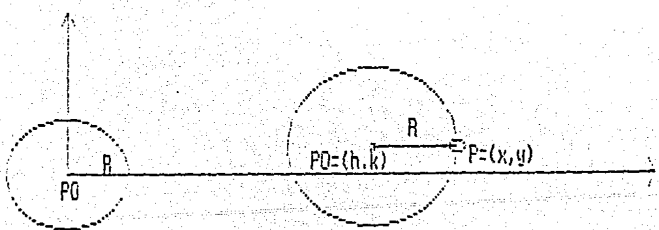
4.2 La circunferencia.

Definición.- Una CIRCUNFERENCIA es el conjunto de todos los puntos (x,y) que equidistan una distancia $R>0$, llamada radio de la circunferencia, de un punto fijo, llamado centro de la circunferencia.



Sean el punto $Po=(h,k)$ y una constante $R>0$, el centro y el radio de una circunferencia respectivamente. Según nuestra definición, un punto $P=(x,y)$ se encuentra en la circunferencia solamente si la distancia de P a Po es R. La representación analítica de una circunferencia es entonces:

$$C=\{P \mid |P-Po|=R\}$$



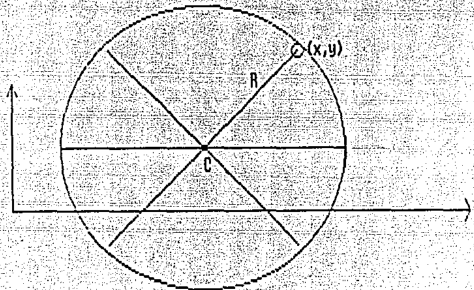
Sabemos que $|P-Po| = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = R$, entonces la ecuación de la circunferencia con centro en (h,k) y radio R es,

$$C : (x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$

Para el caso particular en que el centro de la circunferencia es el origen, la ecuación queda,

$$C : x^2+y^2=R^2$$

Como ya mencionamos, la circunferencia es simétrica respecto a su centro; sin embargo, cabe notar que también es simétrica respecto a cualquier recta que pase por su centro.



Ejemplo:

La circunferencia con centro en $(-2,3)$ y radio 5, es el conjunto de puntos que satisface la ecuación:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=25$$

Al igual que para nuestros otros lugares geométricos, necesitamos tener una ecuación general para la circunferencia. Desarrollemos los cuadrados de la ecuación que obtuvimos a partir de la definición,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$

$$x^2+y^2-2hx-2yk+h^2+k^2-R^2=0$$

esta ecuación la escribimos en la forma,

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

donde: $D=-2h$, $E=-2k$ y $F=h^2+k^2-R^2$. A ésta ecuación se le conoce como ECUACION GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA.

Sin embargo, NO toda ecuación de la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ representa una circunferencia. Para comprobarlo basta con reordenar los términos y completar los cuadrados correspondientes,

$$(x^2+Dx)+(y^2+Ey)=-F$$

$$(x^2+Dx+D^2/4)+(y^2+Ey+E^2/4)=D^2/4+E^2/4-F$$

podemos escribir esto como,

$$(x+D/2)^2+(y+E/2)^2=(D^2+E^2-4F)/4$$

Ahora bien, tenemos que analizar cuando tiene o no solución esta ecuación:

1) Sabemos que una suma de cuadrados NO puede ser una cantidad negativa, entonces si (D^2+E^2-4F) es un número negativo, la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ NO representa circunferencia alguna.

2) También sabemos que si (D^2+E^2-4F) es cero, entonces los cuadrados son cero también, y el único punto que satisface esta ecuación es $(-D/2,-E/2)$; entonces si (D^2+E^2-4F) es cero, la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ representa un único punto.

3) Finalmente si la expresión (D^2+E^2-4F) es un número positivo, la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ representa una circunferencia con centro en $(-D/2,-E/2)$ y radio $R=\sqrt{D^2+E^2-4F}\,/\,2$.

Ejemplo:

Decida si las siguientes ecuaciones representan una circunferencia,

a) $x^2+y^2+4x-6y-12=0$

b) $36x^2+36y^2+48x-108y+97=0$

a) Completando los cuadrados y reescribiendo la ecuación tenemos,

$$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=12+4+9$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=25$$

como 25 es un número positivo, esto nos representa una circunferencia con centro en (2,-3) y radio R=5.

b) Dividimos primero por 36, para eliminar los coeficientes de x^2 y y^2,

$$(x^2+4x/3)+(y^2-3y)=-97/36$$

completando los cuadrados y reescribiendo la ecuación tenemos,

$$(x^2+4x/3+4/9)+(y^2-3y+9/4)=-97/36+4/9+9/4$$

$$(x+2/3)^2+(y-3/2)^2=0$$

esto nos representa un único punto $(-2/3,3/2)$.

Observemos que en la ecuación de la circunferencia a partir de la definición, existen tres constantes arbitrarias independientes h, k y R:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$

Similarmente, en la ecuación general de la circunferencia tenemos también tres constantes arbitrarias independientes D, E y F:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Dado que una circunferencia puede representarse de cualquiera de las formas anteriores, tenemos que la ecuación de una circunferencia cualquiera puede determinarse a partir de los valores de tres constantes. Esto requiere de tres ecuaciones independientes, que pueden obtenerse a partir de tres condiciones independientes. Por lo tanto, analíticamente, la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes.

Ejemplo:

a) Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos $(-1,1)$, $(3,5)$ y $(5,-3)$.

Supongamos que la ecuación es de la forma,

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

debemos encontrar los valores de D, E y F. Como los tres puntos están sobre la circunferencia, deben satisfacer ésta ecuación, entonces tenemos una ecuación para cada uno de ellos,

$$1+1-D+E+F=0 \qquad -D+E+F=-2$$
$$9+25+3D+5E+F=0 \qquad 3D+5E+F=-34$$
$$25+9+5D-3E+F=0 \qquad 5D-3E+F=-34$$

La solución del sistema queda como ejercicio; obtenemos,

$$D=-32/5 \qquad E=-8/5 \qquad F=-34/5$$

sustituyendo estos valores en la ecuación general,

$$x^2+y^2-32x/5-8y/5-34/5=0$$

tenemos la ecuación de la circunferencia buscada. El centro y el radio se obtienen completando cuadrados y reescribiendo la ecuación general en la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$; dejamos esto como ejercicio y de aqui obtenemos el centro $(16/5, 4/5)$ y el radio $\sqrt{442}/5$.

b) Hallar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos $(6,2)$, $(8,0)$ y cuyo centro está sobre la recta $3x+7y+2=0$.

Supongamos que la ecuación es de la forma,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$

Como el centro (h,k) está sobre la recta $3x+7y+2=0$, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la recta,

$$3h+7k+2=0$$

Por otro lado, los puntos $(6,2)$ y $(8,0)$ están sobre la circunferencia y deben satis facer su ecuación,

$$(6-h)^2+(2-k)^2=R^2$$
$$(8-h)^2+k^2=R^2$$

Nuevamente tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, queda como ejercicio verificar que los valores de las incógnitas son,

$$h=4 \qquad k=-2 \qquad R=2\sqrt{5}$$

De aqui, la ecuación buscada es

$$(x-4)^2+(y+2)^2=20$$

el centro es $(4,-2)$ y el radio es $2\sqrt{5}$.

Por último cabe mencionar que, dados tres puntos con los cuales se quiere determinar la ecuación de una circunferencia, estos NO deben encontrarse en una misma recta.

Ejercicios 4.1

1) Determinar si las siguientes ecuaciones representan una circunferencia, y si es así determinar su centro y radio.

a) $2x^2+2y^2-6x+10y+7=0$

b) $4x^2+4y^2+28x-8y+53=0$

c) $16x^2+16y^2-64x+8y+177=0$

2) Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos,

a) $(0,0)$, $(3,6)$ y $(7,0)$

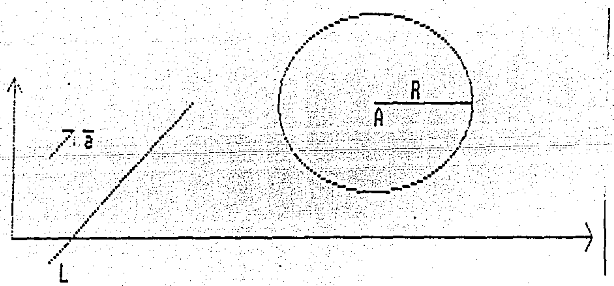
b) $(2,-2)$, $(-1,4)$ y $(4,6)$

c) $(4,-1)$, $(0,-7)$ y $(-2,-3)$

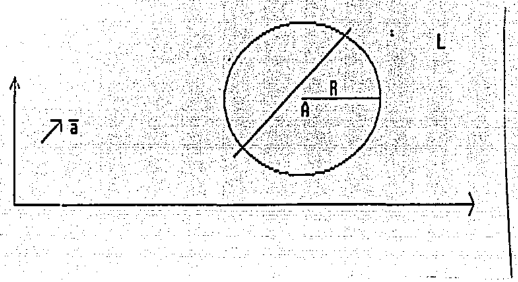
3) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1,-4)$, $(2,-1)$ y cuyo centro está sobre la recta $4x+7y+5=0$.

4.2.1 Recta tangente a la circunferencia.

Analizemos ahora el problema de intersección de dos lugares geométricos: la circunferencia y la recta. Sean C: $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ la circunferencia con centro en $A=(h,k)$, radio $R>0$, y $L:\{P|P=Po+t\bar{a}\}$ la recta con vector de dirección $\bar{a}=(a1,a2)$.



La recta intersecta a la circunferencia si para algún punto $(x1,y1)$ en ella, se cumple $(x1+ta1-h)^2+(y1+ta2-k)^2=R^2$. Resolviendo los cuadrados y agrupando términos semejantes obtenemos una ecuación de la forma: $At^2+Bt+C=0$; las raíces de ésta ecuación pueden ser dos diferentes, dos iguales o puede no tener solución. Si las raíces son diferentes obtenemos dos puntos de intersección, si son iguales obtenemos un único punto de intersección y si no existe solución tampoco existe intersección alguna.



Supongamos ahora que existe un único $P1=(x1,y1)$ en donde se intersectan L y C, demostraremos que L es perpendicular a $R=\overline{AP1}$. Tomamos P1 en L y sustituimos en la ecuación de C,

$$(x1+ta1-h)^2+(y1+ta2-k)^2=R^2$$

resolviendo los cuadrados y agrupando adecuadamente obtenemos una ecuación cuya variable es t,

$$t^2(a1^2+a2^2)+2t(a1x1+a2y1-a1h-a2k)+(x1^2+y1^2-2x1h-2y1k+h^2+k^2-R^2)=0$$

Como suponemos que existe un único punto de intersección, las soluciones para t deben ser iguales, entonces debe suceder que el término lineal sea igual a cero, es decir:

$$2t(a1x1+a2y1-a1h-a2k)=0$$

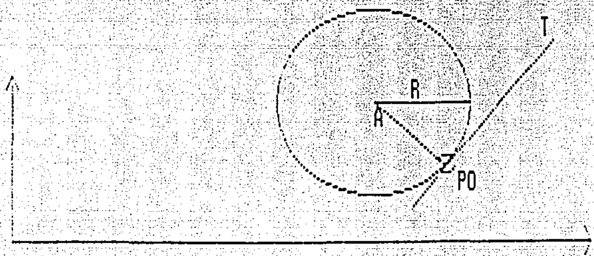
$$(a1x1+a2y1-a1h-a2k)=0$$

$$(a1,a2)\bullet(x1-h,y1-k)=0$$

el vector de dirección de L y el radio R son perpendiculares.

Definición.- Sea $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ la ecuación de una circunferencia con centro en $A=(h,k)$ y radio $R>0$. Sea $Po=(xo,yo)$ un punto cualquiera en la circunferencia, se cumple $(xo-h)^2+(yo-k)^2=R^2$; la recta T que pasa por Po y es perpendicular a $\overline{APo}$ se denomina la RECTA TANGENTE A LA CIRCUNFERENCIA EN EL PUNTO Po, su ecuación es:

$$T : (xo-h)(x-xo)+(yo-k)(y-yo)=0$$



Como vimos anteriormente dado un punto Po sobre la circunferencia, sólo existe UNA tangente a la circunferencia que pasa por Po. La distancia del centro de la circunferencia a la recta tangente es el radio de la circunferencia; más aún, la pendiente de $\overline{APo}$ y de T son recíprocas y de signo contrario. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 1:

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x+2y-23=0$ en el punto Po=(4,3).

Primero reescribimos la ecuación de la circunferencia,

$$(x-1)^2+(y+1)^2=25$$

de aquí obtenemos que A=(1,-1) y R=5. La pendiente de $\overline{APo}$ es 4/3 (diferencia de ordenadas entre diferencia de abcisas); por lo tanto, la recta tangente tiene como pendiente -3/4 y su ecuación es,

$$T : y-3=(-3/4)(x-4) \qquad T : 3x+4y-24=0$$

Ejemplo 2:

Dados la circunferencia $(x-1)^2+(y+1)^2=25$ y el punto Q=(0,6), encontrar todas las tangentes a la circunferencia que pasen por Q.

La ecuación de la familia de rectas que pasan por Q (excepto la vertical) es $y-6=m(x-0)$ o $mx-y+6-0$. Como el radio de la circunferencia es 5, buscamos aquellos miembros de la familia cuya distancia del centro de la circunferencia (1,-1) sea 5. Entonces,

$$d = \frac{|(m)(1)-(-1)(6)|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$$

$$(m+7)^2=25(m^2+1) \qquad 12m^2-7m-12=0 \qquad (3m-4)(4m+3)=0$$

Las raíces de esta ecuación son $m1=4/3$ y $m2=-3/4$. Las dos rectas tangentes a la circunferencia que pasan por Q son,

$$T1 : y-6=(4/3)(x-0) \qquad T1 : 4x-3y+18=0$$

$$T2 : y-6=(-3/4)(x-0) \qquad T2 : 3x+4y-24=0$$

Ejercicios 4.2

1) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto dado,

a) $(x-1)^2+(y-1)^2=20$, $Po=(3,5)$

b) $x^2+y^2+4x-2y-20=0$, $Po=(-2,-4)$

2) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia (si existen), que pasen por el punto dado,

a) $x^2+y^2=13$, $Po=(13/2,0)$

b) $x^2+y^2+2x-2y-2=0$, $Po=(-2,2)$

4.2.2 Familias de circunferencias.

Definición.- Una FAMILIA DE CIRCUNFERENCIAS es un conjunto de circunferencias que tienen una o más propiedades en común.

Recordemos que una circunferencia se encuentra perfectamente determinada por tres condiciones independientes. Cuando estas condiciones nos llevan a ecuaciones que involucran a los parámetros (h,k,R) o (D,E,F) de manera que uno o más de ellos pueda ser eliminado, el resultado es la ecuación de la familia de circunferencias que satisfacen las condiciones.

Ejemplo 1:

Encontrar la ecuación de la familia de circunferencias cuyos centros se encuentran sobre la recta L: $2x-3y=6$.

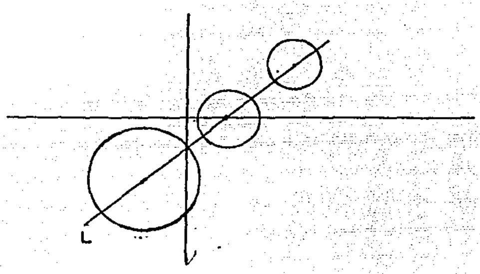
El centro (h,k) de cualquier circunferencia debe satisfacer la ecuación de L, tenemos,

$$2h-3k=6$$

despejamos, sustituimos k en la ecuación general de una circunferencia, y obtenemos la ecuación de la familia de circunferencias buscada.

$$k = (2h-6)/3$$

$$(x-h)^2+(y-(2h-6)/3)^2=R^2$$



Ejemplo 2:

Escribir la ecuación de la familia de circunferencias cuyos centros se encuentran sobre la recta L: $y=x$ y son tangentes a los ejes coordenados x y y. Encontrar al miembro (o miembros) de la familia que pasan por el punto $(4,2)$.

El centro (h,k) debe satisfacer $k=h$. Más aún, como los miembros de la familia son tangentes a los ejes coordenados, debe suceder que $R=|h|=|k|$. De aquí, podemos escribir la ecuación de la familia como,

$$(x-h)^2+(y-h)^2=h^2$$

Para aquellos miembros que pasen po $(4,2)$, debemos tener que,

$$(4-h)^2+(2-h)^2=h^2 \qquad h^2-12h+20=0$$

las raíces son $h1=2$ y $h2=10$. Entonces, son dos los miembros de la familia que pasan por $(4,2)$ y sus ecuaciones son,

$$C1 : (x-2)^2+(y-2)^2=4$$

$$C2 : (x-10)^2+(y-10)^2=100$$

Otro tipo de familia de circunferencias es aquella cuyos miembros pasan por la intersección de dos circunferencias dadas.

Sean $C1: x^2+y^2+D1x+E1y+F1=0$ y $C2: x^2+y^2+D2x+E2y+F2=0$ dos circunferencias cualesquiera, s y t dos números cualesquiera no ambos cero. Consideremos la ecuación,

$$s(x^2+y^2+D1x+E1y+F1)+t(x^2+y^2+D2x+E2y+F2)=0$$

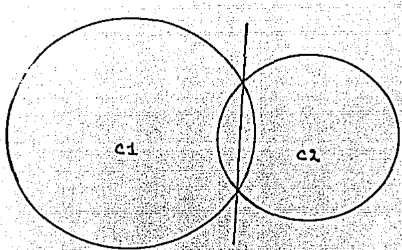
que la podemos reescribir como,

$$(s+t)x^2+(s+t)y^2+(sD1+tD2)x+(sE1+tE2)y+sF1+tF2=0$$

Esta ecuación nos representa los puntos de intersección de C1 y C2, ya que un punto que la satifaga se encuentra en ambas circunferencias. Por otro lado, si (s+t) es un número diferente de cero ésta ecuación nos representa una circunferencia que pasa por los puntos de intersección de C1 y C2; si (s+t) es igual a cero, ambos son distintos de cero, t=-s y la ecuación se reduce a,

$$(D1-D2)x+(E1-E2)y+F1-F2=0$$

que es la ecuación de una recta llamada EJE RADICAL de C1 y C2.



La ecuación de la familia de circunferencias que pasan por la intersección de C1 y C2 es:

$$s(x^2+y^2+D1x+E1y+F1)+t(x^2+y^2+D2x+E2y+F2)=0$$

Ejemplo:

Dadas las circunferencias $C1: x^2+y^2-6x+8y-25=0$ y $C2: x^2+y^2+2x-16y+15=0$.

a) Encontrar la ecuación de la familia de circunferencias que pasa por su intersección.

b) Encontrar al miembro de la familia que pasa por el origen.

c) Encontrar la ecuación del eje radical.

a) La ecuación de la familia de circunferencias es,

$$s(x^2+y^2-6x+8y-25) + t(x^2+y^2+2x-16y+15) = 0$$

con s y t no ambos cero.

b) Sustituimos el punto (0,0) en la ecuación de la familia,

$$s(-25) + t(15) = 0$$

entonces podemos tomar s=3 y t=5 (o cualesquiera otros dos números proporcionales) en la ecuación de la familia y obtenemos al miembro buscado,

$$8x^2+8y^2-8x-56y=0$$

c) Para encontrar la ecuación del eje radical, lo más sencillo es restar las ecuaciones de C1 y C2 obteniendo,

$$x-3y+5=0$$

Ejercicios 4.3

1) Escribir la ecuación de la familia de circunferencias que satisface las condiciones dadas. Encontrar al miembro que se pide.

a) Los centros se encuentran sobre la recta $x+y=5$. El miembro (o miembros) cuyo radio es 3 y es tangente al eje coordenado y.

b) Las circunferencias son tangentes al eje coordenado x y a la recta $y=2x$. El miembro (o miembros) cuyo radio es 4.

c) La familia pasa por los puntos (2,2) y (-1,1). El miembro (o miembros) que pasa por el origen.

2) Encontrar la ecuación de la familia de circunferencias que pasa por la intersección de C1 y C2. Dar la ecuación del miembro que se pide. Dar la ecuación del eje radical de la familia.

a) $C1: 4x^2+4y^2-4x+12y-16=0$ y $C2: x^2+y^2-8x-4y+10=0$

El miembro que pasa por el punto (1,-7).

b) $C1: 2x^2+2y^2+12x-5y=0$ y $C2: 2x^2+2y^2+16x-11y=0$

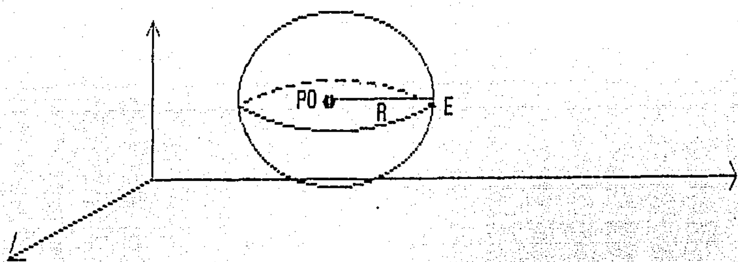
El miembro cuyo centro está sobre el eje coordenado Y.

3) Demostrar que la recta que contiene a los centros de todas las circunferencias de una familia es perpendicular al eje radical de la familia.

4.3 La esfera.

El lugar geométrico en tres dimensiones que es la extensión de una circunferencia, es la esfera. Discutiremos a continuación brevemente, como generalizamos los conceptos de dos a tres dimensiones.

Definición.- Una ESFERA es el conjunto de todos los puntos (x,y,z) que equidistan una distancia $R>0$, llamada radio de la esfera, de un punto fijo, llamado centro de la esfera.



Es decir, la esfera con centro $Po=(xo,yo,zo)$ y radio $R>0$, es el conjunto de puntos tales que,

$$E = \{P=(x,y,z) \mid |\overline{PoP}|=R\}$$

Como $|\overline{PoP}| = \sqrt{(x-xo)^2+(y-yo)^2+(z-zo)^2} = R$, entonces la ecuación de la esfera con centro en (xo,yo,zo) y radio R es,

$$E : (x-xo)^2+(y-yo)^2+(z-zo)^2=R^2$$

Para el caso particular en que el centro de la esfera es el origen, la ecuación queda,

$$E : x^2+y^2+z^2=R^2$$

Nuevamente para facilitar el estudio de este lugar geométrico, debemos representarlo en una ecuación general. Analogamente a lo que hicimos con la circunferencia, desarrollamos los cuadrados de la ecuación anterior agrupando términos semejantes y obteniendo una ecuación de la forma,

$$x^2+y^2+z^2+Cx+Dy+Ez+F=0$$

que es llamada la ECUACION GENERAL DE LA ESFERA.

Ejemplo 1:

Encontrar el radio y el centro de la siguiente ecuación, sí es que representa una esfera.

$$2x^2+2y^2+2z^2-4x+6y+z+15=0$$

Dividimos entre 2 (coeficiente de x^2) y completamos los cuadrados, $x^2+y^2+z^2-2x+3y+z/2+15/2=0$

$$(x-1)^2+(y+3/2)^2+(z+1/4)^2=-67/16$$

Por un razonamiento análogo al que hicimos con la circunferencia, dado que la suma de cuadrados no puede ser un número negativo, esta ecuación no representa esfera alguna.

Como lo vimos con la circunferencia, tenemos que la ecuación de una esfera cualquiera puede determinarse a partir de los valores de cuatro constantes. Esto requiere de cuatro ecuaciones independientes, que pueden obtenerse a partir de cuatro condiciones independientes. Por lo tanto, analíticamente, la ecuación de una esfera se determina completamente por cuatro condiciones independientes.

Ejemplo 2:

Determinar la ecuación, centro y radio de la esfera que pasa por los cuatro puntos (0,0,0), (2,0,0), (0,3,0) y (1,1,1).

Supongamos que la ecuación de la esfera es de la forma,

$$x^2+y^2+z^2+Cx+Dy+Ez+F=0$$

debemos encontrar los valores de C, D, E y F. Como los cuatro puntos están sobre la esfera, deben satisfacer ésta ecuación, entonces tenemos una ecuación para cada uno de ellos,

$$0+0+0+0+0+0+F=0 \qquad F=0$$

$$4+2C=0 \qquad 2C=-4$$

$9+3D=0 \qquad 3D=-9$

$1+1+1+C+D+E+F=0 \qquad C+D+E+F=-3$

La solución del sistema queda como ejercicio; obtenemos,

$C=-2 \qquad D=-3 \qquad E=2 \qquad F=0$

sustituyendo estos valores en la ecuación general,

$$x^2+y^2+z^2-2x-3y+2z=0$$

que es la ecuación de la esfera buscada. El centro y el radio se obtienen completando cuadrados y reescribiendo la ecuación general en la forma $(x-xo)^2+(y-yo)^2+(z-zo)^2=R^2$; dejamos esto como ejercicio.

Ejercicios 4.4

1) Escribir la ecuación de la esfera con centro en Po y radio R, de dos formas distintas,

a) $Po=(5,-2,1)$, $R=6$

b) $Po=(-4,-2,-3)$, $R=5/2$

2) Encontrar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos,

a) $(8,2,2)$, $(-4,3,-3)$, $(-1,2,5)$ y $(4,3,-7)$

b) $(5,4,0)$, $(0,3,-2)$, $(3,2,-2)$ y $(4,0,3)$

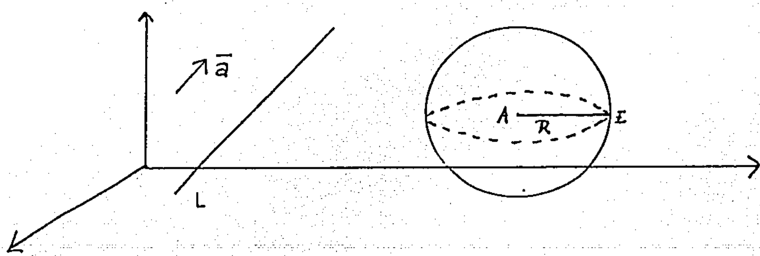
3) Reescribir la ecuación de la esfera, para determinar su centro y su radio,

a) $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+9=0$

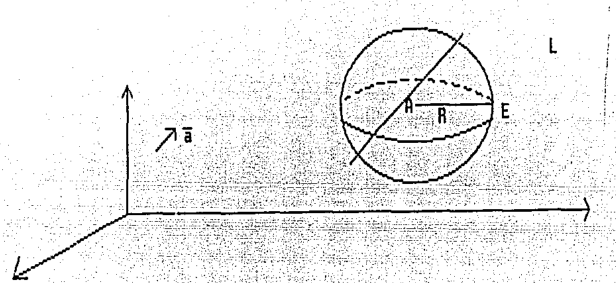
b) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+18=0$

4.3.1 Plano tangente a la esfera.

Analizemos ahora el problema de intersección de la esfera y la recta. Sean $E:(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=R^2$ la esfera con centro en $A=(h,k,l)$, radio $R>0$, y $L:\{P|P=Po+t\bar{a}\}$ la recta con vector de dirección $\bar{a}=(a1,a2,a3)$.



La recta intersecta a la esfera si para algún punto $(x1,y1,z1)$ en ella, se cumple $(x1+ta1-h)^2+(y1+ta2-k)^2+(z1+ta3-l)^2=R^2$. Resolviendo los cuadrados y agrupando términos semejantes obtenemos una ecuación de la forma: $At^2+Bt+C=0$; las raices de ésta ecuación pueden ser dos diferentes, dos iguales o puede no tener solución. Si las raices son diferentes obtenemos dos puntos de intersección, si son iguales obtenemos un único punto de intersección y si no existe solución tampoco existe intersección alguna.



Supongamos ahora que existe un único $P1=(x1,y1,z1)$ en donde se intersectan L y E. Tomamos P1 en L y sustituimos en la ecuación de E,

$$(x1+ta1-h)^2+(y1+ta2-k)^2+(z1+ta3-l)^2=R^2$$

resolviendo los cuadrados y agrupando adecuadamente obtenemos una ecuación cuya variable es t,

$$t^2(a1^2+a2^2+a2^2)+2t(a1x1+a2y1+a3z1-a1h-a2k-a3l)$$
$$+(x1^2+y1^2+z1^2-2x1h-2y1k-2z1l+h^2+k^2+l^2-R^2)=0$$

Como suponemos que existe un único punto de intersección, las soluciones para t deben ser iguales, entonces debe suceder que el término lineal sea igual a cero, es decir:

$$2t(a1x1+a2y1+a3z1-a1h-a2k-a3l)=0$$
$$(a1x1+a2y1+a3z1-a1h-a2k-a3l))=0$$
$$(x1-h)a1+(y1-k)a2+(z1-l)a3=0$$

Esto significa que para cualesquiera valores de $(a1,a2,a3)$ que satisfagan la última ecuación, tendremos una recta tangente a la esfera

E. Dicho de otra forma, cualquier recta que pase por el punto $(x1,y1,z1)$ perpendicular a L y cuyo vector director sea:

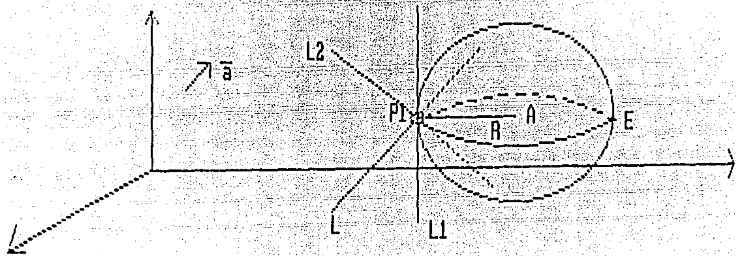
$$(x1-h,y1-k,z1-l)$$

es una recta tangente a la esfera E.

Demostraremos analíticamente que el conjunto de rectas tangentes a la esfera, en un punto dado, forman un plano (llamado PLANO TANGENTE a la esfera). Sea (x,y,z) un punto en cualquiera de estas rectas, entonces $(x-x1,y-y1,z-z1)$ es un vector director de la recta y de aquí,

$$(x1-h)(x-x1)+(y1-k)(y-y1)+(z1-l)(z-z1)=0$$

es la ecuación de un plano.



Finalmente demostraremos que L es perpendicular a $R=\overline{AP1}$. De forma análoga al razonamiento que hicimos con la circunferencia llegamos a que el término lineal es cero, y de allí obtenemos que,

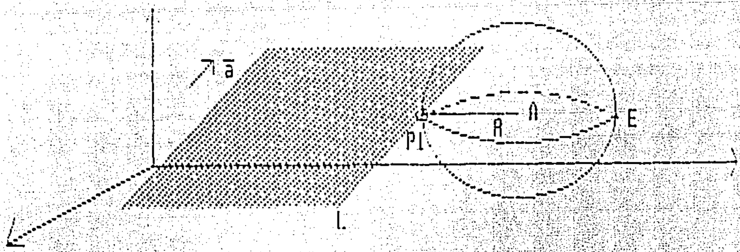
$$(a1,a2,a3)\bullet(x1-h,y1-k,z1-l)=0$$

el vector de dirección de L y el radio R son perpendiculares.

Definición.- Sea $E:(x-xo)^2+(y-yo)^2+(z-zo)^2=R^2$ una esfera con centro en $Po=(xo,yo,zo)$ y radio $R>0$. Decimos que un PLANO es TANGENTE A LA ESFERA EN UN PUNTO $P1=(x1,y1,z1)$, solamente sí P es un punto tanto de la esfera como del plano y, el vector $\overline{PoP}$ es perpendicular al plano.

La ecuación del plano tangente es:

$$\Pi : (x1-xo)(x-x1)+(y1-yo)(y-y1)+(z1-zo)(z-z1)=0$$



Se sigue de la definición que la distancia del centro P0 de la esfera al plano, es R.

Ejemplo 1:

Encontrar la ecuación de la esfera con centro en Po=(2,1,-1) y tangente al plano $\Pi: x-2y+z+7=0$.

El radio de la esfera es la distancia de Po a Π, esto es,

$$R = \left| \frac{(1)(2)-(2)(1)+(1)(-1)+7}{\sqrt{6}} \right| = \sqrt{6}$$

La ecuación de la esfera es,

$$E : (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$$

Ejemplo 2:

Determinar la ecuación del plano tangente a la esfera

$$E : (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=5$$

en el punto P1=(4,1,-6).

Sabemos que la ecuación del plano tangente es de la forma,

$$\Pi: (x1-xo)(x-x1)+(y1-yo)(y-y1)+(z1-zo)(z-z1)=0$$

sustituimos los valores correspondientes y obtenemos,

$$\Pi: (4-(-2))(x-4)+(1-3)(y-1)+(-6-(-1))(z-(-6))=0$$

$$\Pi: 6x-2y-5z+8=0$$

Ejercicios 4.5

1) Determine si el plano $x+2y-2z+9=0$, es tangente a la circunferencia $x^2+y^2+z^2=9$.

2) Escribir la ecuación del plano tangente a la esfera

$$E : (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=5$$

en el punto $P1=(2,-4,3)$.

3) Demostrar que el plano tangente de una esfera es perpendicular a su radio.

4.3.2 Familias de esferas.

Sean $Es1: x^2+y^2+z^2+C1x+D1y+E1z+F1=0$ y $Es2: x^2+y^2+y^2+C2x+D2y+E2z+F2=0$ dos esferas cualesquiera, s y t dos escalares cualesquiera no ambos cero. Consideremos la ecuación,

$$s(x^2+y^2+z^2+C1x+D1y+E1z+F1)+t(x^2+y^2+z^2+C2x+D2y+E2z+F2)=0$$

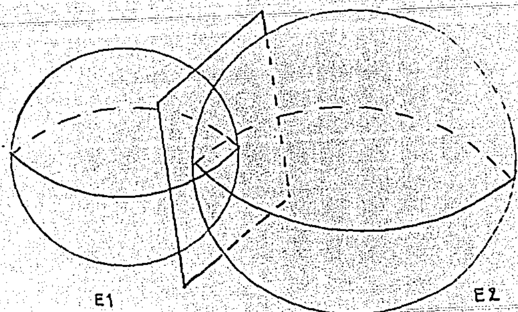
que la podemos reescribir como,

$$(s+t)x^2+(s+t)y^2+(s+t)z^2+(sC1+tC2)x+(sD1+tD2)y+(sE1+tE2)x+sF1+tF2=0$$

Esta ecuación nos representa los puntos de intersección de Es1 y Es2, ya que un punto que la satifaga se encuentra en ambas esferas. Por otro lado, si $(s+t)$ es un número diferente de cero ésta ecuación nos representa una esfera que pasa por los puntos de intersección de Es1 y Es2; si $(s+t)$ es igual a cero, ambos son distintos de cero, es decir $t=-s$ y la ecuación se reduce a,

$$(C1-C2)x+(D1-D2)y+(E1-E2)z+F1-F2=0$$

que es la ecuación de un plano llamada PLANO RADICAL de Es1 y Es2.



Entonces, podemos obtener la ecuación de la familia de esferas que pasan por la intersección de Es1 y Es2, con la ecuación:

$$s(x^2+y^2+z^2+C1x+D1y+E1z+F1)+t(x^2+y^2+z^2+C2x+D2y+E2z+F2)=0$$

donde s y t son escalares, no ambos cero al mismo tiempo.

Ejemplo:

Dadas las esferas,

$$Es1: x^2+y^2+z^2-4x-8y+6z+10=0$$
$$Es2: x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+10=0$$

a) Obtener la ecuación de la familia de esferas que pasa por su intersección.

b) Obtener la ecuación del plano radical.

a) La ecuación de la familia de esferas que pasan por la intersección de Es1 y Es2 es:

$$s(x^2+y^2+z^2-4x-8y+6z+10)+t(x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+10)=0$$

b) La ecuación del plano radical es:

$$(-4+4)x+(-8+2)y+(6+6)z+10-10=0$$
$$-6y+12z=0$$

Ejercicios 4.6

1) Encuentre la ecuación del plano radical de las esferas,

$$Es1: x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+10=0$$
$$Es2: (x+4)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$$

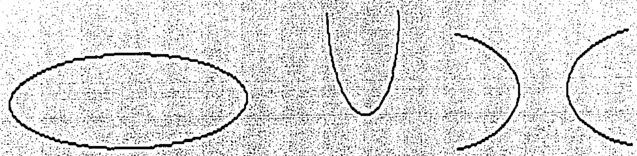
2) Determine la ecuación de la esfera que pasa por la intersección de las esferas,

$$Es1: x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$$
$$Es2: x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+10=0$$

y por el punto (21,4,0).

4.4 Las cónicas.

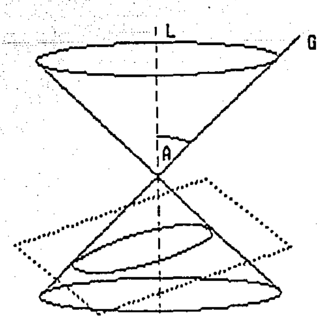
Las cónicas son una familia de curvas planas que tienen aplicación en problemas de geometría, física e ingeniería. El nombre de cónicas deriva del hecho de que cada una de ellas es la intersección de un plano, con cierta inclinación, y un cono circular. Existen tres tipos de cónicas: la ELIPSE, la PARABOLA y la HIPERBOLA.



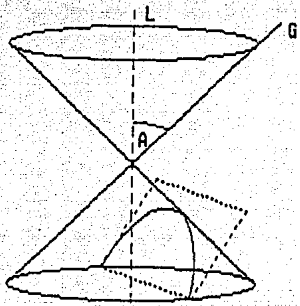
Definición.- Una CONICA es una curva plana.

Obtenemos una cónica cuando cortamos al cono circular con un plano que tenga una inclinación entre 0 y 90 grados.

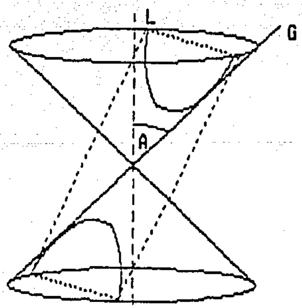
Sea L el eje de simetría del cono, G la generatriz del cono y A el ángulo entre L y G. En el caso en que el plano tenga una inclinación entre 0 grados y A, obtenemos una ELIPSE; si el plano es perpendicular a L obtenemos una circunferencia y si, en particular, también coincide con el vértice del cono obtenemos un punto; tanto el punto como la circunferencia son los casos degenerados de la elipse.



Obtenemos la PARABOLA cuando cortamos al cono con un plano paralelo a una generatriz del cono. Cuando la inclinación del plano coincide con el ángulo A, obtenemos un caso degenerado de una parábola que es una recta.



Obtenemos la HIPERBOLA cuando el plano es inclinado de tal forma que cortamos ambas hojas del cono; es decir, la inclinación del plano está entre A y 90 grados. En el caso en que el plano coincide con L, obtenemos el caso degenerado de una hipérbola que es un par de rectas que se cortan en el vértice del cono.



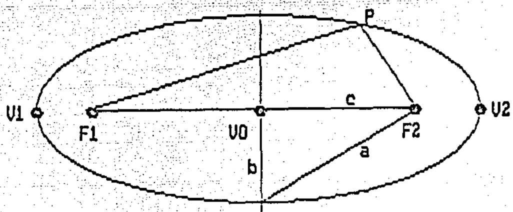
4.4.1 La elipse.

Definición.- Una ELIPSE es el conjunto de todos los puntos con la propiedad de que la suma de las distancias de todos los puntos del conjunto a dos puntos fijos dados es una constante.

Los puntos fijos F1 y F2 se llaman FOCOS. Las intersecciones V1 y V2 de la elipse con la recta que pasa por los focos, se llaman VERTICES y el punto medio VO=1/2(F1+F2) de la recta que une F1 y F2 se llama el CENTRO de la elipse. Las constantes a, b y c se llaman PARAMETROS de la elipse. Podemos describir esta cónica como un conjunto de puntos de la siguiente manera:

$$E=\{P \mid \ |P-F1|+|P-F2|=2a,\ a>0,\ F1\neq F2,\ |\overline{F1F2}|=2c<2a\}$$

Observemos que los parámetros a, b y c cumplen el teorema de Pitágoras: $a^2=b^2+c^2$; además, la elipse es simétrica con respecto a recta que pasa por F1 y F2, a su perpendicular que pasa por VO y a al mismo VO.

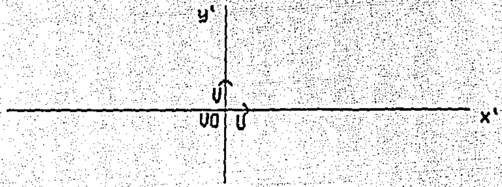


Se acostumbra trabajar con las cónicas en un sistema coordenado particular, que se denomina SISTEMA OPTIMO DE LA CONICA; ya que en este sistema es más sencillo definirlas y estudiarlas.

Recordemos que una cónica es una curva plana; es decir, se encuentra definida en un plano, recordemos también que un plano lo podemos definir a través de un punto fijo cualquiera, en el plano, y de un par de direcciones (vectores cualesquiera) en el mismo, siempre que sean linealmente independientes.

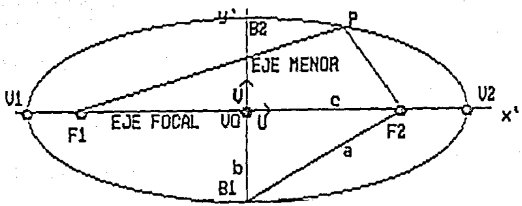
De ésta forma vamos a definir el sistema óptimo de la cónica en base a su centro VO y a dos vectores U y V que cumplan con ser una base ortonormal derecha.

$$\{P \mid P=VO+x'U+y'V,\ x',y' \text{ reales}\}$$



Como U ésta en la dirección principal de la cónica podemos definir $\overline{F1F2}=F2-F1$ y $U=\overline{F1F2}/|\overline{F1F2}|$ (es decir, lo normalizamos), con esto obtenemos F1 y F2 a partir de: $F1=VO-cU$, $F2=VO+cU$. A esta dirección se le conoce como EJE MAYOR o EJE FOCAL, y a la dirección perpendicular a ella que pasa por VO se le llama EJE MENOR. Como ambos ejes son rectas tenemos: $\{P \mid P=VO+x'U,\ x' \text{ real}\}$ y $\{P \mid P=VO+y'V,\ y' \text{ real}\}$.

Para los vértices tenemos $V1=VO-aU$, $V2=VO+aU$; y para las intersecciones del eje menor con la elipse $B1=VO-bV$, $B2=VO+bV$.



Sabemos que un punto $P=(x',y')$ ésta en la elipse si cumple $|P-F1|+|P-F2|=2a$; en términos del sistema óptimo tenemos,

$$|P-F1|=|VO+x'U+y'V-(VO-cU)|=|(x'+c)U+y'V|$$
$$=\sqrt{((x'+c)U+y'V)\bullet((x'+c)U+y'V)}$$
$$=\sqrt{(x'+c)^2+y'^2}$$

porque trabajamos en una base ortonormal derecha. De forma análoga desarrollamos $|P-F2|$, entonces tenemos,

$$|P-F1|+|P-F2|=\sqrt{(x'+c)^2+y'^2}+\sqrt{(x'-c)^2+y'^2}=2a$$

Podemos simplificar esta expresión eliminado las raíces, completando los cuadrados correspondientes y tomando en cuenta que $a^2=b^2+c^2$. Se deja este desarrollo como ejercicio, para llegar a una expresión de la forma: $b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2$; ésta ecuación carateriza la relación que guardan x' y y'. Reacomodando los términos tenemos la ecuación,

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

que se conoce como ECUACION CANONICA DE LA ELIPSE. Recordemos que ésta caraterización de la elipse es en el sistema óptimo, si (x',y') cumplen ésta ecuación entonces están en la elipse.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación en el sistema óptimo y todos los elementos de la elipse con vértices en $V1=(-1,-3)$, $V2=(5,5)$ y un foco en $F2=(22/5,21/5)$. Grafique.

Los elementos de la elipse son: V0, V1, V2, F1, F2, B1, B2, a, b, c, U y V. Para V0, c, U y F1 tenemos,

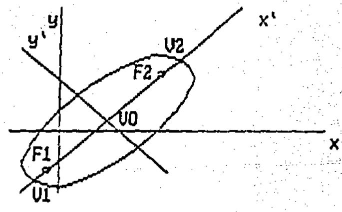
$$V0=1/2(V1+V2)=(2,1)$$
$$cU=F2-V0=(22/5-2,21/5-1)=(12/5,16/5)=4(3/5,4/5)$$
$$F1=V0-cU=(2-12/5,1-16/5)=(-2/5,-11/5)$$
$$V0=(2,1),\ c=4\ y\ U=(3/5,4/5)$$

Por el teorema de Pitágoras obtenemos $a=5$ y $b=3$; como V es perpendicular a U y unitario, $V=(-4/5,3/5)$. Para B1 y B2 tenemos:

$$B1=V0-bV=(2-(-12/5),1-9/5)=(22/5,-4/5)$$
$$B2=V0+bV=(2+(-12/5),1+9/5)=(-2/5,14/5)$$

La ecuación en el sistema óptimo es:

$$\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{9}=1$$



4.4.2 La hipérbola.

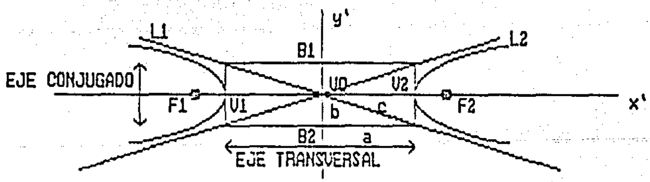
Definición.- Una HIPERBOLA es el conjunto de todos los puntos con la propiedad de que la diferencia de las distancias de los puntos del conjunto a dos puntos fijos dados es una constante.

Al igual que para la elipse, los puntos fijos F1 y F2 se llaman FOCOS. Las intersecciones V1 y V2 se llaman VERTICES y el punto medio VO se llama el CENTRO de la hipérbola. Las constantes a, b y c se llaman PARAMETROS de la hipérbola. Podemos describir esta cónica como un conjunto de puntos de la siguiente manera:

$$H=\{P|\ |P-F1|-|P-F2|=2a,\ 0<a<c\}$$

Nuevamente los parámetros a, b y c cumplen el teorema de Pitágoras: $c^2=a^2+b^2$.

Como U ésta en la dirección principal de la cónica podemos definir F1=VO-cU, F2=VO+cU. Para los vértices tenemos V1=VO-aU, V2=VO+aU, al segmento $\overline{V1V2}$ de longitud 2a se le llama EJE TRANSVERSAL; y al segmento $\overline{B1B2}$ de longitud 2b se le llama EJE CONJUGADO, donde B1=VO-bV y B2=VO+bV. Las asintotas de la hipérbola son L1={P|P=VO+t(a,b) t escalar} y L2={P|P=VO+t(a,b) t escalar}. La hipérbola es simétrica con respecto a la recta que contiene al eje transversal, a la que contiene al eje conjugado y a VO.



Con un desarrollo similar al que hicimos con la elipse, podemos obtener la ecuación canónica de la hipérbola como,

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Recordemos que ésta caraterización de la hipérbola es en el sistema óptimo, si (x',y') cumplen ésta ecuación entonces están en la hipérbola.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación en el sistema óptimo y todos los elementos de la hipérbola con focos en F1=(0,5), F2=(0,-5) y un vértice en V1=(0,3). Grafique.

Los elementos de la hipérbola son: VO,V1,V2,F1,F2,B1,B2,a,b,c,.. L1,L2,U y V. Luego entonces,

$$VO=1/2(F1+F2)=(0,0)$$

$$aU=VO-V1=(0-0,0-3)=(0,-3)=3(0,1)$$

$$V2=VO+aU=(0+0,0+(-3))=(0,-3)$$

$$VO=(0,0),\ a=3 \text{ y } U=(0,-1)$$

Por el teorema de Pitágoras obtenemos c=5 y b=4; como V es perpendicular a U y unitario, V=(1,0). Para L1, L2, B1 y B2 tenemos:

$$L1=\{P|P=VO+t(a,b)\}=\{P|P=(0,0)+t(3,4)\quad t \text{ escalar}\}$$

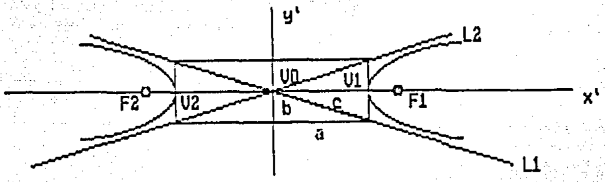
$$L2=\{P|P=VO+t(a,-b)\}=\{P|P=(0,0+t(3,-4)\quad t \text{ escalar}\}$$

$$B1=VO-bV=(0-3,0-0)=(-3,0)$$

$$B2=VO+bV=(0+3,0+0)=(3,0)$$

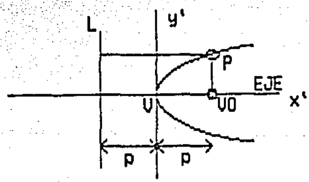
La ecuación en el sistema óptimo es:

$$\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{16}=1$$



4.4.2 La parábola.

Definición.- Una PARABOLA es el conjunto de todos los puntos que equidistan de una recta fija y de un punto fijo que no se encuentra en la recta.



La recta fija L se llama DIRECTRIZ de la parábola y el punto fijo VO se llama FOCO. La recta que pasa por VO y es ortogonal a L se conoce como el EJE de la parábola. El punto V donde la parábola intersecta al eje se llama el VERTICE. La constante p es un PARAMETRO de la parábola. Podemos describir esta cónica como un conjunto de puntos de la siguiente manera:

$$Pa=\{P \mid |P-F|=d(P,L)\}$$

donde $d(P,L)$ es la distancia de P a L. Observemos que ésta cónica es simétrica respecto al eje únicamente.

Un desarrollo similar al que hicimos anteriormente, nos lleva a obtener la ecuación canónica de la parábola como: $y'^2=4px'$. Recordemos que ésta caraterización de la parábola es en el sistema óptimo, si (x',y') cumplen ésta ecuación entonces están en la parábola.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación en el sistema óptimo y todos los elementos de la parábola con directriz $x=-2$ y vértice en $(5,1)$. Grafique.

Los elementos de la parábola son: VO, F, p, L, U y V. La distancia entre VO y L nos da el valor de p=3; entonces,

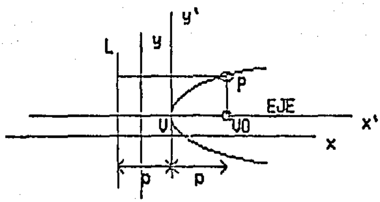
$$\text{como } p=3 \text{ entonces } F=(8,1)$$

$$pU=F-VO=(8-5,1-1)=(3,0)=3(1,0)$$

$$\text{de aquí } V=(0,-1)$$

La ecuación en el sistema óptimo es:

$$y'^2 = 12x'$$



4.4.3 Sistemas de referencia.

Recordemos que las cónicas centradas son la elipse y la hipérbola, VO es su centro de simetría y U,V sus direcciones principales. La parábola es una cónica no centrada, VO es su vértice y U es su dirección principal.

Decimos que la elipse y la hipérbola son cónicas simétricas respecto a un punto (es decir, tienen un centro de simetría), porque en su representación en el sistema óptimo podemos escribir $x'=-x'$, $y'=-y'$, y no afectamos su ecuación,

$$\frac{(-x')^2}{a^2}+\frac{(-y')^2}{b^2}=1 \qquad\qquad \frac{(-x')^2}{a^2}-\frac{(-y')^2}{b^2}=1$$

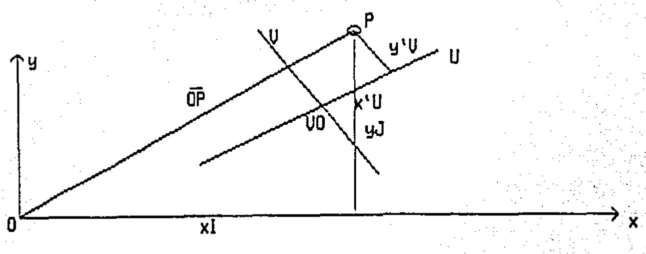
esto refleja la simetría de ambas cónicas. En el caso de la parábola, decimos que es no simétrica porque al escribir $x'=-x'$, $y'=-y'$,

$$(-y')^2=4p(-x') \qquad\qquad y'^2=-4px'$$

modificamos la ecuación.

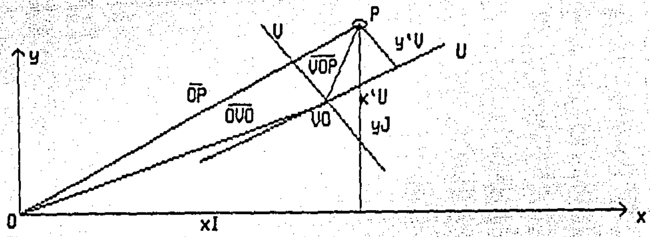
Hemos dicho que es más sencillo representar a la cónica en el sistema óptimo, sin embargo, debemos aprender a representarla en el sistema coordenado canónico que conocemos para poder trabajar más adelante con una ecuación general que nos represente cualquier tipo de cónica.

Recordemos que un punto P en el sistema óptimo de la cónica está representado por: $P=VO+x'U+y'V$, con x', y' reales. Y este mismo punto P los podemos representar en el sistema coordenado canónico que conocemos, tenemos: $P=O+xI+yJ$, con x, y reales.



Ahora, fijémonos en la relación que guardan los dos sistemas de referencia.

$$\overline{VOP} = x'U+y'V$$
$$\overline{OP} = \overline{OVO}+\overline{VOP} = \overline{OVO}+x'U+y'V$$
$$\overline{OP} = xI+yJ = \overline{OVO}+x'U+y'V$$

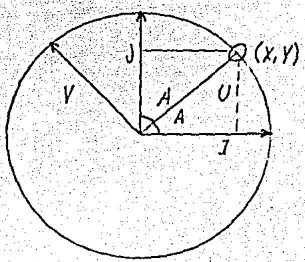


Podemos representar al vector $\overline{OVO}$ en términos de la base {I,J}, asignandole coordenadas constantes.

$$\overline{OP} = xI+yJ = hI+kJ+x'U+y'V, \text{ h y k constantes}$$

Lo que debemos encontrar ahora, es una expresión para la base {U,V} en términos de la base {I,J}; es decir, debemos encontrar la relación entre (x,y) y (x',y'). Como los vectores de las dos bases son unitarios, dibujemos una circunferencia unitaria que los contenga. Sea (x,y) un punto de la circunferencia, sabemos que $x^2+y^2=1$ y además (x,y)=(cosA,senA). De los triángulos rectángulo que se dibujan, obtenemos que,

$$U = \cos AI+\cos A'J = \cos AI+\operatorname{sen}AJ$$
$$V = -\operatorname{sen}AI+\cos AJ$$



Sustituimos estos valores en la expresión que obtuvimos para el vector $\overline{OP}$,

$$\overline{OP} = xI+yJ = hI+kJ+x'U+y'V$$

$$\overline{OP} = xI+yJ = hI+kJ+x'(\cos AI+\operatorname{sen}AJ)+y'(-\operatorname{sen}AI+\cos AJ)$$

$$\overline{OP} = xI+yJ = (h+x'\cos A-y'\operatorname{sen}A)I + (k+x'\operatorname{sen}A+y'\cos A)J$$

Por lo que la relación entre (x,y) y (x',y') está dada por las ecuaciones,

$$x = h+x'\cos A-y'\operatorname{sen}A \qquad y = k+x'\operatorname{sen}A+y'\cos A$$

En particular, si $U=(1,0)$ y $V = (0,1)$ entonces U es paralelo a I y V es paralelo a J. Sea $P=(x,y)$ y $VO=(h,k)$ obtenemos que,

para la elipse:

$P-VO=(x-h,y-k)=x'(1,0)+y'(0,1)=(x',y')$

y la ecuación sería,

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \qquad \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

para la hipérbola:

$P-VO=(x-h,y-k)=x'(1,0)+y'(0,1)=(x',y')$

y la ecuación sería,

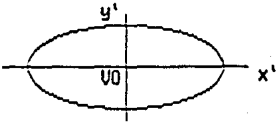
$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1 \qquad \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

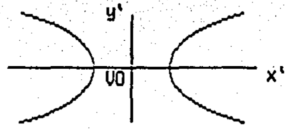
para la parábola:

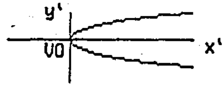
$P-VO=(x-h,y-k)=x'(1,0)+y'(0,1)=(x',y')$

y la ecuación sería,

$$y'^2=4px' \qquad (y-k)^2=4p(x-h)$$







Por otro lado, si $U=(0,1)$ y $V=(1,0)$ entonces U es paralelo a J y V es paralelo a I. Sea $P=(x,y)$ y $VO=(h,k)$ obtenemos que,

para la elipse:

$P-VO=(x-h,y-k)=x'(0,1)+y'(1,0)=(y',x')$

y la ecuación sería,

$$\frac{y'^2}{a^2}+\frac{x'^2}{b^2}=1 \qquad\qquad \frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

para la hipérbola:

$P-VO=(x-h,y-k)=x'(0,1)+y'(1,0)=(y',x')$

y la ecuación sería,

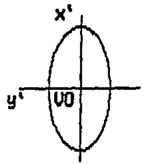
$$\frac{y'^2}{a^2}-\frac{x'^2}{b^2}=1 \qquad\qquad \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

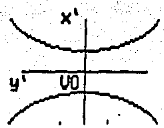
para la parábola:

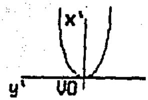
$P-VO=(x-h,y-k)=x'(0,1)+y'(1,0)=(y',x')$

y la ecuación sería,

$$x'^2=4py' \qquad\qquad (x-h)^2=4p(y-k)$$







Lo único que estamos haciendo es representar al mismo conjunto de puntos, en dos distintas representaciones de un mismo plano.

Ejemplo:

Encuentre la ecuación de la elipse con vértices en $(-1,-3)$, $(5,5)$, y un foco en $(22/5,21/5)$.

Debemos encontrar los valores de los parámetros a, b, VO y el vector U en términos de la base {I,J}. Sabemos que,

$VO=1/2(V1+V2)=1/2(4,2)=(2,1)$

$cU=F2-V0=(22/5-2,21/5-1)=(12/5,16/5)=4(3/5,4/5)$

$a=|V2-V0|=|(5-2,5-1)|=\sqrt{9+16}=5$

$b^2=a^2-c^2,\ b=\sqrt{25-16}=3$

entonces, $a=5$, $b=3$, $c=4$ y $U=(3/5,4/5)$ en términos de $\{I,J\}$;

La ecuación en el sistema óptimo es:

$$\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{9}=1$$

y para la ecuación en el sistema canónico, escribimos (x',y') en términos de (x,y),

$(x,y)=V0+x'U+y'V$

$(x,y)=(2,1)+x'(3/2,4/5)+y'(-4/5,3/5)$

$x=2+3x'/5-4y'/5 \qquad y=1+4x'/5+3y'/5$

resolvemos este sistema para (x',y') y obtenemos,

$x'=1/5(3x+4y+10) \qquad y'=1/5(-4x+3y+5)$

La ecuación en el sistema canónico es:

$$\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{9}=\frac{(3x+4y+10)^2}{625}+\frac{(-4x+3y+5)^2}{225}=1$$

Ejercicios 4.7

1.- Encuentre las ecuaciones de las siguientes cónicas en los dos sistemas de referencia que se han estudiado. Dé los valores de los focos, vértices y demás elementos de la cónica correspondiente.

a) La elipse con vértices en (1,4), (9,4) y eje menor 4.

b) La hipérbola con vértices en (-4,0) y (4,0) y eje conjugado igual a 6.

c) La parábola con directriz y=5 y foco en (7,-2).

4.4.6 Ecuación general de las cónicas.

Como en el caso de nuestros otros lugares geométricos, las cónicas también pueden representarse por medio de una ecuación general, en este caso de segundo grado.

En el ejemplo anterior llegamos a una ecuación en el sistema canónico, es decir en términos de (x,y),

$$\frac{(3x+4y+10)^2}{625}+\frac{(-4x+3y+5)^2}{225}=1$$

que podemos desarrollar y escribir de la siguiente manera,

$$481x^2-384xy+369y^2-1540x+30y-4100=0$$

en general, las cónicas se representan de la siguiente forma:

$$\frac{x'^2}{a^2}\pm\frac{y'^2}{b^2}=1$$

$$y'^2=4px'$$

en sus sistemas óptimos.

Para obtener sus ecuaciones en el sistema canónico, sustituimos:

$$x'=(x-h)\cos A+(y-k)\operatorname{sen} A$$

$$y'=(x-h)\operatorname{sen} A+(y-k)\cos A$$

en las ecuaciones anteriores:

$$\frac{((x-h)\cos A+(y-k)\operatorname{sen} A)^2}{a^2}\pm\frac{((x-h)\operatorname{sen} A+(y-k)\cos A)^2}{b^2}=1$$

$$((x-h)\operatorname{sen} A+(y-k)\cos A)^2+4p((x-h)\cos A+(y-k)\operatorname{sen} A)$$

llegando a:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Una ecuación de la forma $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, donde A, B, C son no todos cero al mismo tiempo, representa una cónica o un caso degenerado de ésta.

Finalmente es conveniente mencionar que existen otras formas de deducir y representar a las cónicas (esferas de Dandelin, excentricidad).

CONCLUSIONES

La mayoría de los dibujos que se presentan en ésta tesis, son idea de la autora de la misma; inicialmente imaginé una forma de hacerlos y finalmente tuvé que adecuarlos para que fueran didácticos, al visualizarlos en la pantalla de la computadora. Para esto, los voy dibujando conforme escribo lo que quiero ejemplificar; es decir, los dibujo por partes en la pantalla. Lamentablemente, en el trabajo escrito esto no es posible y los dibujos que se ilustran en él, no son tan didácticos como los que se generan en la pantalla de la computadora.

La versión final de éste trabajo no es todo lo que en un principio se dió como propuesta; por ejemplo, el problema de intersección de dos esferas no se trata con la atención que debiera, porque no fué posible contextuarlo de la misma manera que lo hice para otros temas. Así mismo, se había planteado la posibilidad de abarcar también, el temario de la materia de Geometría Analítica II; sin embargo, por la minuciosidad del trabajo y el hecho de que los dibujos requieren de mayor precisión, no se realizó.

Aún cuando los programas no han sido utilizados en un curso formal de Geometría Analítica, he recibido diversas opiniones acerca de éste trabajo, por parte de profesores y alumnos de la Facultad de Ciencias; unas han sido favorables y otras, sin ser pesimistas, sí son más ambiciosas respecto de lo que hubiera podido realizar, sí hubiera aprovechado toda la amplia gama de facilidades que nos brinda el campo de la computación. Quiero mencionar que el trabajo es esencialmente una propuesta para un curso de Geometría Analítica y, el uso de la computadora es únicamente un apoyo.

Finalmente, espero que éste trabajo sirva también para motivar a los alumnos a aplicar la computación como una herramienta; en particular, como apoyo a los diversos cursos de la Facultad de Ciencias que así lo requieran.

I.T.M.

Respuestas a los ejercicios numericos.

Capitulo I.

Ejercicios 1.1

1.- 0.4451.

2.- 0.2130

3.- 126°

4.- $14^\circ 19' 26''$

Ejercicios 1.2

a) $\cos 15^\circ = (1+\sqrt{3})/2\sqrt{2}$

$\operatorname{sen} 15^\circ = (1-\sqrt{3})/2\sqrt{2}$

b) $\cos 15^\circ = (1+\sqrt{3})/2\sqrt{2}$

$\operatorname{sen} 15^\circ = (1-\sqrt{3})/2\sqrt{2}$

Ejercicios 1.3

1.- $C=60^\circ 10'$, $b=139$, $c=133$

2.- $B=66^\circ 10'$, $a=339$, $c=218$

3.- $A=46^\circ 30'$, $C=21^\circ 10'$, $c=15.7$

4.- $B=85^\circ 30'$, $C=59^\circ 10'$, $b=552$

$B'=23^\circ 50'$, $C'=120^\circ 50'$, $b'=224$

5.- $A=39^\circ 20'$, $B=46^\circ 50'$, $C=93^\circ 50'$

Ejercicios 1.4

1.- a) $\cos 210^\circ=-\sqrt{3}/2$ $\quad$ $\operatorname{sen} 210^\circ=-1/2$

$\tan 210^\circ=1/\sqrt{3}$ $\quad$ $\cot 210^\circ=\sqrt{3}$

$\csc 210^\circ=-2$ $\quad$ $\sec 210^\circ=-2/\sqrt{3}$

b) $\cos 105^\circ=(1-\sqrt{3})/2\sqrt{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen} 105^\circ=(1+\sqrt{3})/2\sqrt{2}$

$\tan 105^\circ=(-1+\sqrt{3})/(1-\sqrt{3})$ $\quad$ $\cot 105^\circ=(1+\sqrt{3})/(1-\sqrt{3})$

$\csc 105^\circ=2\sqrt{2}/(1+\sqrt{3})$ $\quad$ $\sec 105^\circ=-2\sqrt{2}/(1-\sqrt{3})$

c) $\cos 330^\circ=\sqrt{3}/2$ $\quad$ $\operatorname{sen} 330^\circ=-1/2$

$\tan 330^\circ=1/\sqrt{3}$ $\quad$ $\cot 330^\circ=\sqrt{3}$

$\csc 330^\circ=-2$ $\quad$ $\sec 330^\circ=2/\sqrt{3}$

2.- $A=52^\circ 20'$, $C=87^\circ$, $c=78.9$

$A'=127^\circ 40'$, $C'=11^\circ 40'$, $c'=16$

3.- Tan: Π, Cot: Π, Csc: 2Π, Sec: 2Π

Capitulo II.

Ejercicios 2.1

1.- a) $2\sqrt{6}$

b) 1

Ejercicios 2.2

1.- 25

2.- 2/3

Capitulo III.

Ejercicios 3.1

1.- $r^2=2a^2\cos 2A$

2.- $r=1+\cos A$

Ejercicios 3.2

1.- a) $(x-2)/-1=(y+1)=(z-3)/2$

$x=2-t \quad y=-1+t \quad z=3+2t$

b) $(x-5)/-1=(y+1)/3=(z-2)/2$

$x=5-t \quad y=-1+3t \quad z=2+2t$

2.- $x/3=(y+1)/3=(z-2)/2$

Ejercicios 3.3

1.- a) $x=-3+2t \quad y=5-t, \ m=-1/2$

b) $x=2+t \quad y=-3+t, \ m=1$

2.- a) $y-5=-6(x+3)$

b) $y+1=2(x+1)$

3.- a) $x+2y-6=0, \ -x/6-y/3=1$

b) $6x+y+13=0, \ -6x/13-y/13=1$

4.- $\sqrt{3}x+y+4=0$

5.- $2r \operatorname{sen} D + 3 = 0$

Ejercicios 3.4

1.- a) No se intersectan.

b) $P=(8,6,-2)$

Ejercicios 3.5

1.- a) $P=(0,-3)$

b) $P=(-2,4)$

Ejercicios 3.6

1.- a) F: $\{L \mid L=s(3x-8y+12)+t(2x+3y-7)=0 \quad s,t \text{ escalares}\}$

b) $4x-19y+31=0$

2.- a) F: $\{L \mid L=s(2x+3y-7)t(5x-2y-8)=0 \quad s,t \text{ escalares}\}$

b) $x-2y=0$

Ejercicios 3.7

1.- a) $d=3$

b) $d=9$

c) $d=4$

d) $33\sqrt{41}/\sqrt{41}$

2.- a) $d=17\sqrt{3}/5$

b) $d=\sqrt{6}/6$

3.- b) $d=9$

Ejercicios 3.8

1.- $x=2+2s-t \quad y=-1+s+2t \quad z=3+s+3t$

$x-7y+5z-24=0$

2.- a) $5x+3y+2z-13=0$

b) Los puntos no representan algún plano, están en una misma recta.

Ejercicios 3.9

1.- a) $4x-7y-5z-8=0$

b) $2x-6y-z+6=0$

2.- $(8,0,0)$, $(0,-4,0)$, $(0,0,3)$

Ejercicios 3.10

1.- a) $6x/\sqrt{70}-3y/\sqrt{70}+5z/\sqrt{70}-30/\sqrt{70}=0$, $d=30/\sqrt{70}$

b) $3x/\sqrt{14}+2y/\sqrt{14}-z/\sqrt{14}=0$, $d=0$

2.- a) $d=6$

b) $d=2/\sqrt{14}$

Ejercicios 3.11.

1.- a) $x=4t \quad y=1+8t \quad z=5/4+5t$

b) $x=-6+7t \quad y=1-2t \quad z=5=5t$

2.- a) $(-51/4,-55/4,-43/4)$

b) $(2,-9/2,11/2)$

Ejercicios 3.12

1.- a) Son paralelos.

b) 54°

c) $26^\circ 56'$

2.- a) $2x+3y-7z-22=0$

b) $4x+5y+2z-19=0$

3.- a) $4^\circ 9'$

b) 49°

Ejercicios 3.13

1.- a) $d=5$

b) $d=1$

2.- a) No son paralelos.

b) $d=12/\sqrt{29}$

Ejercicios 3.14

1.- a) $x/5+y/2+z/c=1$

b) $x/5+y/2+2z/5=1$

2.- a) $h(2x+2y-z-4)+k(x-3y+z-2)=0$

b) $9x-19y+6z-18=0$

Ejercicios 3.15

1.- a) $P=(1,-2,1)$

b) La intersección es vacía.

c) $x=2-2t \quad y=3+13t \quad z=7t$

Capítulo IV.

Ejercicios 4.1

1.- a) $C=(3/2,-5/2)$, $R=\sqrt{5}$

b) El punto $(-7/2,1)$

c) No representa algún lugar geométrico.

2.- a) $x^2+y^2-7x-4y=0$, $C=(7/2,2)$, $R=\sqrt{62}/2$

b) $6x^2+6y^2-32x-25y=34=0$, $C=(8/3,25/12)$, $R=\sqrt{2465}/12$

c) $7x^2+7y^2-22x+52y+21=0$, $C=(11/7,-26/7)$, $R=5\sqrt{26}/7$

3.- $(x+3)^2+(y-1)^2=29$

Ejercicios 4.2

1.- a) $x+2y-13=0$

b) $y+4=0$

2.- a) $2x-3y-13=0$, $2x+3y-13=0$

b) No existe solución.

Ejercicios 4.3

1.- a) $(x-h)^2+(y-(5-h))^2=r^2$

$(x-3)^2+(y-2)^2=9$

$(x+3)^2+(y-8)^2=9$

b) $(x-((k+\sqrt{5}|k|)/2)^2+(y-k)^2=k^2$

$(x-(2+2\sqrt{5}))^2+(y-4)^2=16$

$(x-(2-2\sqrt{5}))^2+(y-4)^2=16$

$(x-(2\sqrt{5}-2))^2+(y+4)^2=16$

$(x-(2\sqrt{5}+2))^2+(y+4)^2=16$

c) $(x-h)^2+(y-3(1-h))^2=r^2$

$(x-1/2)^2+(y-3/2)^2=5/2$

2.- a) $(s+t)x^2+(s+t)y^2-(s+8t)x+(3s-4t)y-4s+10t=0$

$x^2+y^2+2x+6y-10=0$

$x+y-2=0$

b) $(2s+2t)x^2+(2s+2t)y^2+(12s+16t)x-(5s+11t)y=0$

$2x^2+2y^2+13y=0$

$2x-3y=0$

Ejercicios 4.4

1.- a) $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=36$

$x^2+y^2+z^2-10x+4y-2z-6=0$

b) $(x+4)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=0$

$x^2+y^2+z^2+8x+4y+6z+29=0$

2.- a) $x^2+y^2+z^2-4x+2z=44$

b) $x^2+y^2+z^2-4x-17=0$

3.- a) $C=(1,-3,1)$, $R=\sqrt{2}$

b) No es una esfera.

Ejercicios 4.5

1.- No son tangentes.

2.- $y-2z-2=0$

Ejercicios 4.6

1.- $5x-3y+5z+1=0$

2.- $x^2+y^2+z^2-19x-32y-21z+70=0$

Ejercicios 4.6

(Se menciona únicamente, la ecuación en el sistema coordenado canónico)

1.- a) $(x-5)^2+4(y-4)^2=16$

b) $9x^2-16y^2=144$

c) $(x-7)^2=-14(y-3/2)$