

4  
2ej

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**  
División de Estudios Profesionales

**Estructuras Geométricas en Superficies  
con Singularidades**

**TESIS**  
que para obtener el título de  
**MATEMATICO**  
presenta:

**JAIME ROBERTO BAZUA RUEDA**

Director de tesis: Dr. Robert Michael Porter Kamlin

México D.F., julio de 1993

**TESIS CON  
FALLA DE ORDEN**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Introducción

En sus notas *The Geometry and Topology of Three-Manifolds* [Th], W. P. Thurston ha mostrado la importancia que tiene la geometría en el estudio de las superficies con singularidades. Desde hace mucho tiempo se sabe de la relación entre la topología y la geometría en una superficie (Euler, Gauss, Riemann, Poincaré, etc.). En [Th], Thurston define un  $n$ -orbifold como un espacio modelado localmente en  $\mathbb{R}^n$  módulo la acción de un grupo finito; es decir, cada punto  $x$  de un orbifold  $\mathcal{O}$  posee una orbicarta (análoga a la carta coordenada de una variedad) de la forma  $(U, \mathbb{F}, (\tilde{U}, \Gamma))$  donde  $\mathbb{F}: \tilde{U} \rightarrow U$  es un homeomorfismo con  $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto,  $\Gamma$  un grupo finito actuando en  $\tilde{U}$  y  $U \subseteq \mathcal{O}$  una vecindad de  $x$ .

Como un objetivo de este trabajo es dar una clasificación geométrica de las orbificies compactas (orbifolds conexos y compactos de dimensión 2) será de nuestro interés el tratar con reducciones geométricas donde  $\mathbb{F}$  sea una isometría y  $\Gamma$  un grupo finito de isometrías de  $\tilde{U}$ , para lo cual definimos el concepto de espacio geométrico y desarrollamos tres geometrías bidimensionales con curvatura  $K$  constante igual a 0, 1 y -1. La euclídea ( $K=0$ ), la elíptica ( $K=1$ ) y la hiperbólica ( $K=-1$ ) con la finalidad de encontrar los grupos de isometrías cuyos estabilizadores locales sean finitos y así conocer los modelos geométricos locales de las orbificies. Con este propósito describimos el concepto de estructura geométrica en una variedad y el concepto de levantamiento de la estructura geométrica vía proyecciones cubrientes, para extenderlo al concepto de estructura geométrica en una orbificie compacta y el levantamiento de dicha estructura vía una cubriente ramificada de la orbificie.

Thurston nos muestra en [Th] una gran cantidad de resultados dejando de

explayarse en numerosos detalles en las demostraciones de los mismos. El presente trabajo intenta llenar algunos detalles en las primeras veintión páginas del capítulo 13 de las notas de Thurston [Th]. Se han elaborado los dos primeros capítulos para presentar los resultados básicos de topología y geometría (sin demostración) que hemos de utilizar y daremos una referencia donde se encuentren demostrados éstos. No obstante, se incluyen las demostraciones ilustrativas y útiles para el presente trabajo de algunas proposiciones en casos que aclaran la discusión.

|  |    |
|--|----|
| Introducción   | 1  |
| Capítulo I: Topología  | 1  |
| I.A: Identificaciones, espacios cocientes y espacios de adjunción. | 1  |
| I.B: Homotopía   | 5  |
| I.C: Clasificación de Superficies                                  | 8  |
| I.D: Acciones de Grupos  | 13 |
| I.E: Cubrientes  | 17 |
| Capítulo II: Geometría   | 26 |
| II.A: Variedades y Estructuras Geométricas                         | 26 |
| II.B: Espacios Geométricos   | 32 |
| Capítulo III. Orbifolds  | 48 |
| Bibliografía   | 65 |

I.A: Identificaciones, espacios cocientes y espacios de adjunción.

Al ser nuestro objeto de estudio los orbifolds, los cuales localmente son espacios cocientes, el interés en esta sección es el de definir espacio cociente, mostrar algunas formas de construirlo así como señalar algunas propiedades del mismo. Como la intención es presentar ejemplos usados posteriormente, la mayoría de las proposiciones en esta sección sólo serán enunciadas y daremos referencias donde se pueda ver la demostración de las mismas.

Sea  $\mathcal{F} = \{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$  una familia indexada de espacios topológicos. Sea  $X'_\alpha = \{\alpha\} \times X_\alpha$ . Nótese que si  $\alpha \neq \beta$ , entonces  $X'_\alpha$  y  $X'_\beta$  son ajenos aún cuando  $X_\alpha = X_\beta$ . Si  $X_\alpha = X_\beta$  entonces diremos que  $X'_\alpha$  y  $X'_\beta$  son dos copias ajenas de  $X_\alpha$ . La unión ajena de la familia  $\mathcal{F}$  es el espacio topológico  $\bigsqcup_{\alpha \in A} X'_\alpha$ , al cual denotaremos  $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ , con la siguiente topología: un subconjunto  $U \subset \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  es abierto si y sólo si  $U \cap X_\alpha$  es abierto para toda  $\alpha \in A$ .

Ejemplo 1: Para cualquier espacio topológico  $X$ , el espacio producto  $X \times \mathbb{Z}$ , donde  $\mathbb{Z}$  es discreto, es homeomorfo a  $\bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} X$ .

Una función continua e inyectiva  $f: X \rightarrow Y$  es un encaje si  $f: X \rightarrow f(X) \subset Y$  es un homeomorfismo.

Ejemplo 2: Para cualquier espacio topológico  $X$ , la diagonal  $d: X \rightarrow X^n$  definida como  $d(x) = (x, \dots, x)$  es un encaje donde  $X^n$  es el producto topológico.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función desde un espacio topológico  $X$  sobre un conjunto  $Y$ . La función  $f$  induce una topología en  $Y$  de la siguiente manera:

un subconjunto  $V \subseteq Y$  es abierto si y sólo si  $f^{-1}(V) \subseteq X$  es abierto. Esta topología recibe el nombre de topología identificación inducida en  $Y$  por  $f$ . Si el conjunto  $Y$  es topologizado de esta manera diremos que  $f$  es una identificación y  $Y$  un espacio de identificación de  $X$ .

- Ejemplo 3:** a) Las proyecciones  $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$  son identificaciones.  
 b) Sea  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  y sea  $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  la función exponencial compleja  $e(t) = e^{it}$  (aquí identificamos a  $\mathbb{R}^2$  con los complejos)  
 c). Entonces, la función  $e$  es una identificación.

Sea  $X$  un espacio topológico. Una descomposición de  $X$  es una familia  $F$  de subconjuntos no vacíos de  $X$  tal que todo elemento  $x \in X$  pertenece a uno y sólo un elemento de  $F$ . La función

$$p: X \rightarrow F,$$

que asigna a cada  $x \in X$  el único miembro  $P(x)$  de  $F$  que lo contiene, es llamada proyección natural de  $X$  en  $F$ . Si el conjunto  $F$  es topologizado con la topología identificación inducida por la proyección natural  $p$ , diremos que  $F$  es un espacio de descomposición de  $X$ . Por otra parte, si en  $X$  definimos una relación de equivalencia  $\sim$ , entonces los elementos de  $X$  son divididos en subconjuntos ajenos no vacíos llamados clases de equivalencia. Si  $Q$  es el conjunto de clases de equivalencia, entonces  $Q$  es una descomposición de  $X$  y si le damos a  $Q$  la topología identificación inducida por la proyección natural  $p: X \rightarrow Q$ , entonces diremos que  $Q$  es el espacio cociente de  $X$  bajo la relación de equivalencia  $\sim$  y lo denotaremos

$$Q := X/\sim.$$

Inversamente, si  $Q$  es una descomposición de  $X$ , entonces podemos definir

una relación de equivalencia en  $X$  de la siguiente manera: para todo par de elementos  $a, b \in X$ , definase  $a \sim b$  si y sólo si existe  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $a \in q$  y  $b \in q$ . De lo anterior vemos que toda descomposición de  $X$  es un espacio cociente sobre una relación de equivalencia.

Los siguientes ejemplos serán útiles en el estudio de las superficies y orbificies (Capítulos I, II y III).

- Ejemplo 1: a) Definamos en  $\mathbb{R}$  la siguiente relación de equivalencia: para  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \sim y$  si y sólo si  $x - y = 2\pi n$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $\mathbb{R}/\sim$  es un espacio cociente (ver también el ejemplo 5).
- b) Sea  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  y definamos  $\sim$  en  $S^2$  de la siguiente manera: para  $p, q \in S^2$ ,  $p \sim q$  si y sólo si  $p = -q$ . El espacio cociente  $S^2/\sim$  es llamado plano proyectivo y lo denotamos por  $\mathbb{P}^2$ .
- c) Sea  $I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . El espacio cociente que se obtiene de  $I^2$  identificando  $(0, t)$  con  $(1, t)$  para toda  $t \in I = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\}$  es llamado la banda de Moebius. Nótese que su frontera es homeomorfa a  $S^1$ .
- d) El espacio cociente que se obtiene de  $I^2$  identificando  $(0, t)$  con  $(1, t)$  y  $(t, 0)$  con  $(t, 1)$  para toda  $t \in I$  es llamado el Toro el cual es homeomorfo al producto topológico  $S^1 \times S^1$ .
- e) El espacio cociente que se obtiene de  $I^2$  identificando  $(0, t)$  con  $(1, 1-t)$  y  $(t, 0)$  con  $(t, 1)$  para toda  $t \in I$  es llamado la botella de Klein.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una identificación. Definamos una relación  $\sim$  en  $X$  de la siguiente manera: para  $a, b \in X$ ,  $a \sim b$  si y sólo si  $f(a) = f(b)$ . Claramente  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $X$  por lo que esta define al espacio cociente  $Q = X/\sim$ .



Los elementos de  $Q$  son las imágenes inversas  $f^{-1}(y)$  de  $y \in Y$ . La regla  $y \mapsto f^{-1}(y)$  define una biyección  $h: Y \rightarrow Q$ .

Proposición - [H4]: Si  $h$  está definida como en el párrafo anterior entonces  $h$  es un homeomorfismo

Ejemplo 3: Sea  $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $e(t) = e^{it}$  (ejemplo 3-b) y sea  $\mathbb{R}/\nu$  como en el ejemplo 4-a. Entonces,  $S^1$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}/\nu$ .

Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos ajenos, sea  $A \subseteq X$  un subconjunto cerrado y sea  $f: A \rightarrow Y$  una función continua. Sea  $W := X \cup Y$  y definamos en  $W$  la relación  $\sim$  de la siguiente manera: para  $a, b \in W$ , escribimos  $a \sim b$  si y sólo si sucede uno de los siguientes casos: 1)  $a = b$ , 2)  $f(a) = b$ , 3)  $a = f(b)$  o 4)  $f(a) = f(b)$ . Entonces,  $\sim$  es una relación de equivalencia y la proyección natural  $p: W \rightarrow W/\sim$  es una identificación. Al espacio  $Z = W/\sim$  lo llamaremos espacio de adjunción de  $X$  y  $Y$  y lo denotamos por  $X \cup_f Y$ .

Proposición 2 [H4]: Siguiendo las definiciones del párrafo anterior,

- a) La restricción  $p|_Y: Y \rightarrow Z$  es un encaje;
- b) La restricción  $p|_{X-A}: X-A \rightarrow Z$  es un encaje;
- c)  $p(X) \cap p(X-A) = \emptyset$  y  $p(X) \cup p(X-A) = Z$  ■

Ejemplo 6: a) Sean  $X$  y  $Y$  dos copias ajenas de  $D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  y sea  $f: \partial X \rightarrow \partial Y$  un homeomorfismo. Entonces  $X \cup_f Y$  es homeomorfo a  $S^2$ .

b) Sean  $M$  la banda de Moebius (Ej. 4-c) y sea  $D^2$  el disco unitario. Sea  $f: \partial M \rightarrow \partial D^2$  un homeomorfismo. Entonces  $M \cup_f D^2$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}P^2$  (Ej. 4-b).

c) Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos bandas de Moebius ajenas y sea  $h: \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$  un homeomorfismo. Entonces  $M_1 \cup_f M_2$  es homeomorfo a la botella de Klein (Ej. 4-d).

### I.B: Homotopía.

El objetivo de esta sección es definir el grupo fundamental de un espacio topológico así como presentar algunas propiedades de dicho grupo que nos serán útiles para saber de la existencia de proyecciones cubrientes en la sección I-E.

Una trayectoria  $\gamma$  en un espacio topológico  $X$  es una función continua  $\gamma: I \rightarrow X$ . Al punto  $\gamma(0)$  lo llamaremos punto inicial de  $\gamma$  y a  $\gamma(1)$  lo llamaremos punto final de  $\gamma$ . Un espacio topológico  $X$  es conexo por trayectorias si para cada par de puntos  $x_0, x_1 \in X$  existe una trayectoria  $\gamma$  en  $X$  tal que  $\gamma(0) = x_0$  y  $\gamma(1) = x_1$ .

Proposición 3 [ko]: Todo subconjunto no vacío abierto y conexo de  $\mathbb{R}^n$  es conexo por trayectorias ■

Ejemplo 7: Sean  $A$  y  $B$  los interiores de dos círculos tangentes cuyo punto de tangencia sea el único punto en común de ambos. Entonces,  $A$  y  $B$  son conexos por trayectorias pero  $A \cup B$  no lo es.

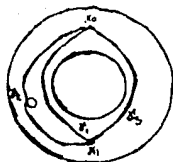
Dos funciones continuas  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  son homotópicas si existe una función continua  $F: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f_0(x)$  y  $F(x, 1) = f_1(x)$  para toda  $x \in X$ . A la función  $F$  la llamaremos homotopía entre  $f_0$  y  $f_1$ . Si las funciones  $f_0$  y  $f_1$  son homotópicas lo denotaremos como  $f_0 \simeq f_1$ . Para cada  $t \in I$ , la función  $f_t: X \rightarrow Y$  definida como  $f_t(x) = F(x, t)$  es una función continua. Ahora bien, si  $A \subset X$  es un subconjunto, decimos que dos funciones  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  son homotópicas relativas a  $A$  y lo denotamos como  $f_0 \simeq_A f_1$ , si existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(a, t)$  no depende de  $t$  para cualquier  $a \in A$ ; es decir,  $F(a, t) = f_0(a)$  para toda  $a \in A$  y toda  $t \in I$ .

Proposición 4 [ko]: La relación  $\simeq_A$  es una relación de equivalencia ■

Ejemplo 8: Sea  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$  y sea  $A = \{x_0, x_1\} \subset X$ , sean  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

tres trayectorias en  $X$  tales que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_3(0) = x_0$  y  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = \gamma_3(1) = x_1$ .

El siguiente dibujo nos muestra que  $\gamma_1 \simeq_A \gamma_2$  y  $\gamma_1 \not\simeq_A \gamma_3$ ; no demostraremos este hecho.



### Grupo Fundamental.

El grupo fundamental es un objeto algebraico que se le asocia a un espacio topológico, y que refleja algunas de sus propiedades importantes.

Decimos que dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$  son del mismo tipo de homotopía si existen funciones continuas  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f \simeq 1_X$  y  $f \circ g \simeq 1_Y$ . Dos trayectorias  $\alpha, \beta$  en  $X$  son equivalentes si  $\alpha \simeq_A \beta$  donde  $A = \{\alpha(0), \alpha(1)\}$  y lo denotamos por  $\alpha \sim \beta$ . Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos trayectorias en  $X$  con  $\alpha(0) = \beta(0)$ , definimos al producto  $\alpha * \beta$  como la trayectoria

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Una trayectoria  $\gamma$  en  $X$  es cerrada si  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . A las trayectorias cerradas las llamaremos lazos y a  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$  lo llamaremos punto base de  $\gamma$ . A las distintas clases de lazos en  $X$  con punto base  $x_0 \in X$  lo llamaremos grupo fundamental de  $X$  con punto base  $x_0$  denotándolo como  $\pi_1(X, x_0)$ , donde el producto está definido por

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta],$$

donde  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ . En general, si escogemos dos puntos base distintos  $x, y \in X$ , los grupos fundamentales  $\pi_1(X, x)$  y  $\pi_1(X, y)$  no tienen relación alguna. Sin embargo, si existe una trayectoria en  $X$  de  $x$  a  $y$ , la siguiente proposición nos

dice cómo se relacionan.

Proposición 5 [ko]: Sean  $X$  un espacio topológico,  $x, y$  dos puntos en  $X$  y  $\gamma$  una trayectoria en  $X$  con  $\gamma(0)=x$  y  $\gamma(1)=y$ . Entonces  $\pi_1(X, x)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, y)$  ■

Veamos ahora qué hace una función continua con el grupo fundamental.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Es obvio que si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos trayectorias en  $X$ , entonces  $f \circ \alpha$  y  $f \circ \beta$  son dos trayectorias en  $Y$ ; si  $\alpha$  es un lazo en  $X$  entonces  $f \circ \alpha$  es un lazo en  $Y$  basado en  $f(x)$  donde  $x$  es el punto base de  $\alpha$  y si  $\alpha \sim \beta$  entonces  $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$ . Lo anterior nos dice que si  $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$  entonces  $[f \circ \alpha] \in \pi_1(Y, f(x))$ . Si definimos a  $f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$  como

$$f_* [\alpha] = [f \circ \alpha],$$

entonces, tenemos lo siguiente:

- Proposición 6 [ko]: a)  $f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$  es un morfismo de grupos;
- b) Si  $f$  es un homeomorfismo entonces  $f_*$  es un isomorfismo;
  - c) Si  $X$  y  $Y$  son conexos por trayectorias y del mismo tipo de homotopía, entonces  $\pi_1(X, x)$  y  $\pi_1(Y, y)$  son isomorfos ■

Decimos que un espacio topológico  $X$  es contractible si es homotópicamente equivalente a un espacio que consta de un solo punto, y diremos que un espacio topológico  $X$  es simplemente conexo si es conexo por trayectorias y  $\pi_1(X, x) = 0$  para alguna  $x \in X$ .

Ejemplo 9: Los espacios  $S^2$  y  $D^2$  son simplemente conexos. Es fácil ver que  $D^2$  es contractible y se puede demostrar [Spa] que  $S^2$  no lo es.

La siguiente proposición nos dice qué relación hay entre los grupos fundamentales de dos espacios conexos por trayectorias y el grupo fundamental del producto topológico.

lógico de ambos espacios.

Proposición 7 [K0]: Sean  $X, Y$  dos espacios conexos por trayectorias. Entonces,  $\Pi_1(X \times Y, (x, y))$  es isomorfo a  $\Pi_1(X, x) \times \Pi_1(Y, y)$  ■

Decimos que un espacio  $X$  es localmente conexo por trayectorias si para toda  $x \in X$  existe una vecindad  $V$  de  $x$  conexa por trayectorias y diremos que un espacio  $X$  es localmente simplemente conexo si para toda  $x \in X$  existe una base de vecindades de  $x$  de vecindades simplemente conexas.

Para concluir esta sección de homotopía consideremos a la esfera  $S^2$ . Sea  $U \subset S^2$  el abierto que se obtiene al remover una pequeña vecindad cerrada simplemente conexa de  $(0, 0, 1) \in S^2$  (es decir, quitamosle a  $S^2$  el casquete polar norte) y sea  $V \subset S^2$  el abierto que se obtiene de  $S^2$  al removerle el casquete polar sur. Entonces  $U$  y  $V$  son simplemente conexas,  $U \cap V$  es conexo por trayectorias y  $U \cup V = S^2$  que es simplemente conexo. Esto es un ejemplo de la siguiente proposición.

Proposición 8 [K0]: Sea  $X$  un espacio y sean  $U, V$  dos subespacios abiertos simplemente conexas tales que  $U \cap V$  es conexo por trayectorias y  $U \cup V = X$ . Entonces  $X$  es simplemente conexo ■

I.C: Clasificación de Superficies.

Variedades y Superficies:

Una n-variedad es un espacio topológico  $M$  de Hausdorff donde todo  $x \in M$  posee una vecindad abierta  $U$  homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Una n-variedad con frontera es un espacio topológico  $N$  de Hausdorff en donde todo  $x \in N$  posee una vecindad  $U$  homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  o a  $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ . Los puntos de  $N$  que posean una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}_+^n$  y no a  $\mathbb{R}^n$  conforman lo que denominan

mos frontera de  $N$  y la denotamos por  $\partial N$ . Si  $\partial N = \emptyset$  entonces  $N$  es una  $n$ -variedad. Una superficie  $S$  es una  $2$ -variedad conexa y una superficie con frontera es una  $2$ -variedad conexa y con frontera. Una curva de Jordan en  $S$  es un compacto  $\gamma \subset S$  homeomorfo a  $S^1$ .

Ejemplo 10: a)  $\mathbb{R}^n$  es una  $n$ -variedad y todo subconjunto abierto no vacío de  $\mathbb{R}^n$  también lo es.

b)  $\overline{\mathbb{R}}_+^n$  es una  $n$ -variedad con frontera y  $\mathbb{R}_+^n$  es una  $n$ -variedad.

c)  $S^n := \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$  es una  $n$ -variedad compacta.

d)  $S^2$  es una superficie compacta.

e) El plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  (ej. 4-b), el Toro (ej. 4-d) y la botella de Klein (ej. 4-e) son superficies compactas.

f) El disco  $D^2$ , la banda de Moebius (ej. 4-c) y el cilindro  $S^1 \times I$  son superficies compactas con frontera.

g)  $\mathbb{R}^2$  es una superficie no compacta.

La siguiente proposición nos dice cómo es la frontera de una superficie.

Proposición 9 [AI]: a) Toda curva de Jordan  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  separa a  $\mathbb{R}^2$  en dos abiertos ajenos cuya frontera común es  $\gamma$ .

b) Si  $S$  es una superficie con frontera y  $S$  es compacta entonces  $\partial S$  es la unión ajena de un número finito de curvas de Jordan.

c) Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies con frontera y  $S_1$  es homeomorfa a  $S_2$ , entonces  $\partial S_1$  es homeomorfa a  $\partial S_2$ . ■

Ejemplo 11: a) La banda de Moebius (ej. 4-c) y el cilindro  $S^1 \times I$  no son homeomorfos ya que la frontera de la banda de Moebius es homeomorfa a  $S^1$  y la frontera del cilindro es homeomorfa a dos copias ajenas de  $S^1$ .

b) El disco unitario  $D^2$  y la banda de Moebius (ej. 4-c) no son homeomorfas, aunque  $\partial D^2$  y  $\partial M$  sí lo son, ya que cualquier curva de Jordan en el interior de  $D^2$  separa a  $D^2$  en dos subespacios ajenos cuya frontera común es dicha curva de Jordan lo cual no sucede en la banda de Moebius.

### Triangulaciones.

Sean  $v_0, v_1$  y  $v_2$  tres puntos en  $\mathbb{R}^2$  no colineales. Entonces,  $v_0, v_1$  y  $v_2$  son los vértices de un triángulo  $\Delta$  en  $\mathbb{R}^2$  cuyas aristas son los segmentos  $\overline{v_0v_1}, \overline{v_1v_2}$  y  $\overline{v_2v_0}$ . Un triángulo en una superficie  $S$  es un encaje  $\tau: \Delta \rightarrow S$ , donde  $\tau(v_i)$  se llamarán vértices de  $\tau(\Delta)$  y  $\tau(\overline{v_i v_j})$  ( $i \neq j$ ) se llamarán aristas de  $\tau(\Delta)$ . Como ejemplo, un homeomorfismo de la superficie de un tetraedro en  $S^2$  divide a  $S^2$  en cuatro triángulos unidos a lo largo de sus aristas de forma tal que cada vértice es común a tres triángulos, cada arista es común a dos triángulos y los interiores de los triángulos son ajenos. Esto nos dice que podemos modelar a  $S^2$  pegando triángulos convenientemente y de hecho podemos hacer esto con cualquier superficie compacta con o sin frontera.

Sea  $S$  una superficie compacta con o sin frontera, sea  $\{\Delta_i\}$  una familia finita de triángulos en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $\tau_i: \Delta_i \rightarrow S$  un encaje de  $\Delta_i$  en  $S$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ . Una triangulación  $T$  de  $S$  es una familia finita de encajes  $\{\tau_i: \Delta_i \rightarrow S \mid i \in \mathbb{N}\}$  tal que

a)  $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tau_i(\Delta_i)$ ,

b) si  $i \neq j$  entonces  $\tau_i(\Delta_i) \cap \tau_j(\Delta_j)$  es igual al vacío, o a un vértice o a una arista,

c) Cada arista es común a lo más a dos triángulos en  $S$  y

d) Cada vértice es común a al menos dos triángulos en  $S$ .

Proposición 10 [A1]: Toda superficie compacta, con o sin frontera, es triangulable ■

Sea  $T$  una triangulación de la superficie compacta  $S$ . Definimos la característica de Euler de  $T$  como

$$\chi(T) := \sum_{i=0}^3 (-1)^i a_i,$$

donde  $a_0$  es el número de vértices de  $T$ ,  $a_1$  es el número de aristas de  $T$  y  $a_2$  es el número de caras o triángulos de  $T$ .

Ejemplo 12: Consideremos la superficie  $S$  de un tetraedro. Sean  $\tau_i: \Delta_i \rightarrow S$  ( $i \leq 4$ ) los encajes naturales de los triángulos  $\Delta_i$  en cada cara de  $S$  y sea  $T = \{\tau_i: \Delta_i \rightarrow S \mid i \leq 4\}$  una triangulación de  $S$ . Entonces,  $\chi(T) = 4 - 6 + 4 = 2$ .

Proposición 11 [A1]: Si  $T_1$  y  $T_2$  son dos triangulaciones de la misma superficie compacta  $S$ , entonces  $\chi(T_1) = \chi(T_2)$  ■

La proposición anterior nos permite definir la característica de Euler de una superficie compacta  $S$  como  $\chi(S) = \chi(T)$  donde  $T$  es cualquier triangulación de  $S$ .

Proposición 12 [A1]: a) Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies compactas con frontera tales que  $S_1 \cap S_2 \in \partial S_1 \cap \partial S_2$  y  $S_1 \cap S_2$  es la unión finita de curvas de Jordan ajenas. Entonces,  $\chi(S_1 \cup S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2)$ .  
b) Si  $S$  es una superficie compacta, entonces  $\chi(S) \leq 2$  ■

La siguiente proposición nos dice cómo es la esfera  $S^2$ .

Proposición 13 [A1]: Sea  $S$  una superficie compacta sin frontera. Son equivalentes las siguientes afirmaciones: a) Toda curva de Jordan separa a  $S$ ; b)  $\chi(S) = 2$ ; c)  $S$  es homeomorfa a  $S^2$  ■



Decimos que una superficie es orientable si no posee un subespacio homeomorfo a la banda de Moebius (ej. 4-c); si lo posee diremos que la superficie es no orientable.

Ejemplo 13: a) La esfera  $S^2$  y el Toro (ej. 4-d) son superficies compactas orientables.

b) El disco  $D^2$  y el cilindro  $S^1 \times I$  son superficies compactas, orientables y con frontera.

c) El plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  (ej. 4-b) y la botella de Klein (ej. 4-e) son superficies compactas no orientables.

### Cortar y Pegar.

El objetivo de esta sección es el presentar una forma de construir las distintas superficies compactas a partir de pegar superficies compactas con frontera ya que las orbificies (2-orbifolds compactos) siempre viven en superficies de este tipo.

Consideremos a la esfera  $S^2$  y a la banda de Moebius  $M$ . Tracemos en  $S^2$  una curva de Jordán  $\delta$  la cual separa a  $S^2$  en dos componentes  $C_1$  y  $C_2$  cuya frontera común es  $\delta$ . Sea  $f: \delta \rightarrow \partial M$  un homeomorfismo y sea  $C = C_1 \cup \delta$ . Nótese que  $C$  es homeomorfo a  $D^2$ . Pegar una banda de Moebius a  $S^2$  es el remover  $C_2$  de  $S^2$  ( $S^2 - C_2 = C$ ) e identificar  $\delta$  y  $\partial M$  via  $f$ , siendo el espacio resultante homeomorfo a  $C \sqcup M$  (compárese con ej. 6-b). Como otro ejemplo, sean  $\delta_1$  y  $\delta_2$  dos curvas de Jordán ajenas en  $S^2$ . Sea  $a_1$  un punto en  $\delta_1$  que recorre  $\delta_1$  en el sentido de las manecillas del reloj visto desde el exterior de la esfera, y sea  $a_2$  un punto en  $\delta_2$  que recorre a  $\delta_2$  en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Sean  $C_1$  y  $C_2$  las dos componentes de  $S^2$  homeomorfas a  $D^2$  y sea  $C$  la componente homeomorfa a  $S^1 \times I$  generadas por  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Sea  $f: \delta_1 \rightarrow \delta_2$  un homeomorfismo que respeta las orientaciones de  $\delta_1$  y  $\delta_2$  y sea  $\sim$  la relación  $a \sim f(a)$ .

Consideremos el espacio cociente  $(C \cup M_1 \cup M_2) / \sim = R$ . Decimos que  $R$  es el espacio resultante de pegar una asa a  $S^2$  y notemos que  $R$  es homeomorfo al Toro (ej. 9-d). Si  $f$  es un homeomorfismo de  $M_1$  en  $M_2$  que no respeta las orientaciones de  $M_1$  y  $M_2$ , entonces decimos que  $R$  es el espacio resultante de pegar una botella de Klein (ej. 9-e) a  $S^2$ . Nótese que  $R$  es homeomorfo a la botella de Klein, y es equivalente a pegar a  $S^2$  dos bandas de Moebius.

La siguiente proposición nos dice como son las superficies compactas sin frontera.

**Proposición 14 [A1]:** Toda superficie compacta sin frontera es homeomorfa a  $S^2$  o a  $S^2$  con un número finito de asas pegadas o a  $S^2$  con un número finito de bandas de Moebius pegadas ■

Notemos lo siguiente: la característica de Euler de  $S^2$  es igual a 2. Si a  $S^2$  le removemos un subespacio  $E$  homeomorfo a  $D^2$  entonces  $\chi(S^2 - E) = \chi(D^2) = 1$ . La característica de Euler de la banda de Moebius y del cilindro son iguales a cero. Entonces, por la proposición 12, la característica de Euler de una esfera con  $n$  asas pegadas es igual a  $2 - 2n$ , y la característica de Euler con  $m$  bandas de Moebius pegadas es igual a  $2 - m$ .

**Proposición 15 [A1]:** Dos superficies compactas  $S_1$  y  $S_2$  son homeomorfas si y sólo si son ambas orientables o ambas no orientables y si además  $\chi(S_1) = \chi(S_2)$  ■

### ID: Acciones de Grupos.

El objetivo principal de este trabajo es dar una clasificación de las orbifoldes geométricamente por lo cual nos interesa la geometría. Un concepto básico de la geometría es el de isometría y el conjunto de isometrías forma un grupo que actúa se

bre el espacio geométrico. Como preliminar a ese estudio, en esta sección inves-  
tigamos el concepto general de acción de grupo en conjuntos y en espacios topol-  
ógicos.

Sean  $X$  un conjunto y  $G$  un grupo. Decimos que  $G$  actúa en  $X$  si estamos  
considerando una función  $(, ) : G \times X \rightarrow X$  expresada como  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  tal que

- a)  $1 \cdot x = x$  para toda  $x \in X$ , donde  $1$  es el elemento neutro de  $G$ ;
- b)  $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$  para toda  $x \in X$  y para toda  $g, h \in G$ .

Si el grupo  $G$  actúa en un conjunto  $X$  decimos que  $X$  es un  $G$ -conjunto.  
Estrictamente hablando, la definición de acción que hemos dado corresponde a  
la definición de acción por la izquierda. Existe también la noción de acción por  
la derecha donde  $(, ) : X \times G \rightarrow X$  se define como  $(x, g) \mapsto x \cdot g$ . Sin embargo, por  
acción siempre entenderemos acción por la izquierda. La siguiente proposición  
nos dice lo que hacen los elementos de  $G$  en un  $G$ -conjunto.

Proposición 16 [K6]: Sea  $X$  un  $G$ -conjunto. Para toda  $g \in G$ , la función  $\lambda_g : X \rightarrow X$  de-  
finida como  $\lambda_g(x) = g \cdot x$  (multiplicación por la izquierda) es biyec-  
tiva ■

Sea  $X$  un  $G$ -conjunto. Decimos que  $G$  actúa efectivamente en  $X$  o que la  
acción de  $G$  en  $X$  es efectiva si para todo par  $g, h \in G$ ,  $\lambda_g = \lambda_h$  implica  $g = h$ . En  
este escrito sólo consideraremos acciones efectivas; en otras palabras, considera-  
remos únicamente grupos de biyecciones de  $X$ . Sea  $x \in X$ . El subgrupo  $E_x :=$   
 $\{g \in G \mid g \cdot x = x\}$  de  $G$  es llamado el estabilizador de  $x$ . Al subconjunto  $G \cdot x :=$   
 $\{g \cdot x \mid g \in G\}$  de  $X$  le llamaremos órbita de  $x$ . Es fácil ver que  $G$  induce una  
descomposición de  $X$  cuyos elementos son las órbitas  $G \cdot x$ , por lo cual a un  
 $G$ -conjunto le podemos asociar el conjunto cociente  $G \backslash X := \{G \cdot x \mid x \in X\}$ .

Sean  $X$  y  $Y$  dos  $G$ -conjuntos. Decimos que una función  $f: X \rightarrow Y$  es  $G$ -equivariante si  $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$  para toda  $x \in X$  y toda  $g \in G$ .

Proposición 17 [Ko]: Sean  $X$  un  $G$ -conjunto,  $H$  un subgrupo de  $G$ ,  $x \in X$ . Entonces:

- Para  $h \in H$ ,  $g \in G$ , la función  $\Lambda(h, g) := hg$  es una acción de  $H$  en  $G$  y  $H \backslash G := \{Hg \mid g \in G\}$  es el conjunto de clases laterales. En particular, si  $H = E_x$  entonces  $E_x$  actúa en  $G$  y  $E_x \backslash G = \{E_x g \mid g \in G\}$ .
- Si  $G_x$  es la órbita de  $x$ , entonces la función  $\omega: G_x \rightarrow E_x \backslash G$  definida como  $\omega(g \cdot x) = E_x g$  es una biyección  $G$ -equivariante.
- Si  $y \in G_x$ , entonces  $E_x$  y  $E_y$  son subgrupos conjugados de  $G$ .

Sea  $X$  un espacio topológico y  $G$  un grupo. Decimos que  $X$  es un  $G$ -espacio si  $G$  actúa en  $X$  y si la multiplicación por la izquierda  $\lambda_g: X \rightarrow X$  es continua. Como  $\lambda_g$  y  $\lambda_{g^{-1}}$  son biyecciones continuas (prop. 16) y  $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = \lambda_{gg^{-1}} = \lambda_1$ , entonces  $\lambda_g$  es un automorfismo de  $X$  (osea, un homeomorfismo de  $X$  en sí mismo). La regla  $g \mapsto \lambda_g$  define un morfismo de grupos entre  $G$  y el grupo de automorfismos de  $X$ . Si el morfismo es inyectivo, entonces la acción de  $G$  es efectiva; y podemos identificar a  $G$  con un subgrupo del grupo de automorfismos de  $X$ .

Sea  $X$  un  $G$ -espacio. Decimos que  $G$  actúa propia y discontinua en  $X$ , si para toda  $x \in X$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  tal que  $g \cdot U \cap U = \emptyset$  salvo para un número finito de  $g$ 's  $\in G$ . Si  $E_x = \{1\}$  para toda  $x \in X$ , decimos que  $G$  actúa libremente en  $X$ , o que la acción de  $G$  en  $X$  es libre (de puntos fijos). Decimos que  $G$  actúa transitivamente en  $X$  si  $G_x = X$  para alguna  $x \in X$ .

La siguiente proposición nos muestra el comportamiento local de una acción propia y discontinua. Incluimos su demostración por consistencia, además de la utilidad que tendrá posteriormente.

Proposición 18: Sea  $X$  un  $G$ -espacio de Hausdorff, donde  $G$  actúa propiamente dis-  
continuo. Sea  $x \in X$  un punto cualquiera y sea  $E_x$  su estabilizador.  
Entonces, el orden de  $E_x$  es finito y existe una vecindad abierta  
 $U$  de  $x$  invariante bajo  $E_x$  tal que  $g \cdot U \cap U = \emptyset$  si  $g \in G - E_x$ .

Demostración: Por hipótesis existe una vecindad abierta  $\tilde{U}$  de  $x$  tal que  
 $g \cdot \tilde{U} \cap \tilde{U} = \emptyset$  salvo para  $\{g_1, \dots, g_n\} = A \subset G$ . Si  $g \in E_x$  entonces  
 $g \cdot \tilde{U} \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ , por lo que  $E_x \subset A$ . Por lo tanto, el orden de  $E_x$  es  
finito. Supongamos que existe  $g \in A$  tal que  $g \notin E_x$ . Entonces,  
como  $X$  es de Hausdorff, existen vecindades abiertas  $\tilde{V}, \tilde{V}'$  de  
 $x, g \cdot x$  respectivamente tales que  $\tilde{V} \cap \tilde{V}' = \emptyset$ . Sean  $V' = \tilde{V}' \cap g \cdot \tilde{V}$  y  
 $V = g^{-1} \cdot V'$ . Entonces  $V' \cap V = \emptyset$ . Por lo tanto, podemos suponer que  
 $A = E_x$ . Sea  $U = \bigcap_{g \in E_x} g \cdot \tilde{U}$ . Claramente  $U \cap g \cdot U = U$  si  $g \in E_x$  y  
 $U \cap h \cdot U = \emptyset$  si  $h \in G - E_x$ . Más aún, si  $g, h \in G$  son tales que  $g \cdot x \neq$   
 $h \cdot x$ , entonces  $g \cdot U \cap h \cdot U = \emptyset$  como se quería demostrar ■

Proposición 19 [Ka]: Sea  $X$  un  $G$ -espacio y sea  $H$  un subgrupo normal de  $G$ . Entonces:

- La proyección natural  $P: X \rightarrow G \backslash X$  es una función abierta;
- $H \backslash X$  es un  $(H/G)$ -espacio y  $(H/G) \backslash (H \backslash X)$  es homeomorfo a  $G \backslash X$  ■

Ejemplo 14: a) Sean  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $a \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  y  $G$  el grupo que consta de todas las trasla-  
ciones  $T_a^n(x) = x + na$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $G$  actúa en  $\mathbb{R}^2$  libre y propia-  
mente discontinuo y  $G \backslash \mathbb{R}^2$  es homeomorfo a un cilindro abierto  $S^1 \times \mathbb{R}$ .  
Notese que  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

b) Sean  $X = S^1$  y  $G$  el grupo generado por la reflexión  $r(x, y, z) = (x, y, -z)$ .  
Entonces  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ ,  $E_p = G$  si  $P = (x, y, 0)$ ,  $E_q = \{1\}$  si  $q = (x, y, z \neq 0)$   
y  $G \backslash S^1$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^1$  (compárese con ej. 6-a).

- c) Sean  $X = S^2$  y  $H$  el grupo generado por la función antípoda  $a(p) = -p$ .  
Entonces,  $H$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ ,  $E_p = \{1\}$  para toda  $p \in S^2$  y  $H \backslash S^2$  es homeomorfo a  $\mathbb{P}^2$ . Nótese que  $G$  (ej. 14-b) y  $H$  son isomorfos pero  $G \backslash S^2$  y  $H \backslash S^2$  no son homeomorfos.
- d) Sea  $X = \mathbb{R}^2$  y sea  $G$  el grupo generado por las traslaciones  $T_a(p) = p + a$  y  $T_b(p) = p + b$  donde  $a, b \in \mathbb{R}^2$  son no nulos y linealmente independientes. Entonces,  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y  $G \backslash \mathbb{R}^2$  es homeomorfo al Toro. Si  $H$  es el subgrupo de  $G$  generado por  $T_a$ , entonces  $H$  es un subgrupo normal de  $G$  isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Si  $Y = H \backslash S^2$ , entonces  $Y$  es homeomorfo a un cilindro abierto. El grupo  $H \backslash G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  y  $(H \backslash G) \backslash (H \backslash \mathbb{R}^2)$  es homeomorfo a  $\mathbb{Z} \backslash Y$  y  $\mathbb{Z} \backslash Y$  es homeomorfo a  $G \backslash \mathbb{R}^2$ .

### I.E: Cubrientes.

Algunas características de las cubrientes son el ser homeomorfismos locales e identificaciones, lo cual nos da información acerca de la topología de su espacio base. Las cubrientes de un espacio dado están relacionadas con los subgrupos de su grupo fundamental y como frecuentemente el espacio cubriente es más sencillo que el espacio base, esto nos permite resolver algunos problemas del espacio base al levantarlos al espacio cubriente. En el capítulo III daremos una noción más restrictiva de cubriente, la de cubriente de orbitóids. Esta abarca la noción de "cubriente ramificada".

Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos y sea  $p: X \rightarrow Y$  una función continua y sobre. Decimos que el abierto  $V \subseteq Y$  está biés cubierto por  $p$  si  $p^{-1}(V)$  es la unión ajena de abiertos  $\{U_i | i \in I\}$  donde cada  $U_i$  es homeomorfo a  $V$  bajo  $p$ . Decimos que  $p: X \rightarrow Y$  es una cubriente si para toda  $y \in Y$  existe una vecin-

dad abierta  $V$  de  $Y$  bien cubierta por  $\mathcal{P}$ . Si  $P: X \rightarrow Y$  es una cubierta de  $Y$  decimos que  $X$  es el espacio cubriente y  $Y$  el espacio base de  $P$ .

Proposición 20 [Ka]: a) Toda cubierta es un homeomorfismo local y todo homeomorfismo local es una función abierta.

b) Si  $P: X \rightarrow Y$  es cubierta entonces  $P$  es una identificación.

Ejemplo 15: a) La función  $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $e(t) = e^{it} = (\cos t, \sin t)$  es cubierta.

b) La proyección natural  $P: S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  es cubierta.

c) Todo homeomorfismo es cubierta.

La siguiente proposición nos muestra una relación entre las acciones de grupos y las cubiertas.

Proposición 21 [Ka]: Si  $X$  es un  $G$ -espacio de Hausdorff donde  $G$  actúa libre y propiamente discontinua, entonces, la proyección natural  $P: X \rightarrow G \backslash X$  es una cubierta. En particular esto se tiene cuando  $G$  es un grupo finito actuando libremente.

Ejemplo 16: a) La acción de  $\mathbb{Z}_n$  ( $n \geq 2$ ) en  $S^1$  mediante rotaciones es una acción libre y propiamente discontinua. La proyección natural  $P: S^1 \rightarrow \mathbb{Z}_n \backslash S^1$  es una cubierta. Nótese que  $S^1$  y  $\mathbb{Z}_n \backslash S^1$  son homeomorfos.

b) La acción de  $\mathbb{Z}_n$  ( $n \geq 2$ ) en  $D^2 - \{0\}$  mediante rotaciones alrededor de  $\{0\}$  es una acción libre y propiamente discontinua. La proyección natural  $P: D^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_n \backslash (D^2 - \{0\})$  es una cubierta. Nótese que  $D^2 - \{0\}$  y  $\mathbb{Z}_n \backslash (D^2 - \{0\})$  son homeomorfos así como  $D^2$  y  $\mathbb{Z}_n \backslash D^2$  también lo son aunque la proyección natural no sea homeomorfismo.

Una transformación cubriente  $h$  de una cubriente  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un automorfismo del espacio cubriente  $\tilde{X}$  tal que  $p \circ h = p$ . Si  $\tilde{X}$  es conexo y localmente conexo por trayectorias, entonces el grupo de transformaciones cubrientes de  $p$  actúa en  $\tilde{X}$  libre y propiamente discontinuo. Si  $h$  es una transformación cubriente de  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  y  $\tilde{X}$  es conexo por trayectorias, entonces  $h$  es la identidad en  $\tilde{X}$  si  $h(x) = x$  para alguna  $x \in \tilde{X}$ .

Sean  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  una cubriente y  $f: Y \rightarrow X$  una función continua. Un levantamiento de  $f$  es una función continua  $\hat{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $p \circ \hat{f} = f$ . La siguiente proposición nos muestra la unicidad del levantamiento.

Proposición 22 [Ka]: Si  $Y$  es conexo y si  $\hat{f}, \hat{g}$  son dos levantamientos de  $f$  con  $\hat{f}(y) = \hat{g}(y)$  para alguna  $y \in Y$ , entonces  $\hat{f} = \hat{g}$ .

La proposición 22 tiene una gran cantidad de resultados inmediatos. La proposición 23 nos dice cuando una vecindad conexa por trayectorias en el espacio base va a ser bien cubierta.

Proposición 23 [Pa]: Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  una cubriente, sea  $x \in X$  y sea  $V \subseteq X$  una vecindad abierta simplemente conexa de  $x$ . Entonces  $V$  está bien cubierta por  $p$ .

Teniendo en mente la proposición 22, si  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es una cubriente con  $\tilde{X}$  simplemente conexo, entonces el grupo  $\pi_1(X, p(x))$  y la fibra  $p^{-1}(p(x))$  tienen la misma cardinalidad. Si  $\tilde{X}$  es conexo por trayectorias, entonces el cardinal  $\# \{p^{-1}(x)\}$  es el mismo para toda  $x \in \tilde{X}$  y si este cardinal es  $n$ , diremos que  $p$  es una cubriente de orden  $n$ . En particular, si  $S$  es una superficie compacta y si  $p: S \rightarrow S_1$  es una cubriente de orden finito  $n$ , entonces para cual-



quier triangulación  $T_i$  de  $S_i$ ,  $P^{-1}(T_i) = T$  es una triangulación de  $S$ . Si  $x_0, d_i$  y  $d$  son el número de vértices, aristas y caras respectivamente de  $T_i$ , entonces  $nd_0$ ,  $nd_1$  y  $nd_2$  son el número de vértices, aristas y caras respectivamente de la triangulación  $T$  de  $S$ . Resumiendo tenemos la siguiente proposición.

Proposición 24: Si  $P: S \rightarrow S_i$  es una cubierta de orden finito  $n$  de la superficie compacta  $S_i$ ; entonces  $S$  es una superficie compacta y  $\chi(S) = n\chi(S_i)$ .

Teniendo en mente las definiciones del párrafo anterior a la proposición 6 y la proposición 6 misma, el morfismo  $P_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, P(\tilde{x}))$  inducido por la cubierta  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  resulta ser un monomorfismo; y si  $X$  es simplemente conexo, entonces  $P$  es un homeomorfismo. Por otro lado, si sólo pedimos que  $\tilde{X}$  sea conexo por trayectorias y si  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in P^{-1}(x)$  entonces  $P_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  y  $P_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$  son subgrupos conjugados en  $\pi_1(X, x)$  y la colección  $\{P_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \mid \tilde{x} \in P^{-1}(x)\}$  es una clase conjugada en  $\pi_1(X, x)$ . Así tenemos que  $P$  es un homeomorfismo si y solamente si  $P_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \pi_1(X, P(\tilde{x}))$  y si  $\tilde{X}$  es conexo por trayectorias.

Proposición 25 [K]: Sea  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  una cubierta, sea  $x_0 \in X$  y sea  $C = P^{-1}(x_0)$ .

Entonces, el grupo  $\pi_1(X, x_0)$  actúa transitivamente en  $C$ , el estabilizador de  $\tilde{x}_j \in C$  en  $\pi_1(X, x_0)$  es  $P_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_j)$  y existe una biyección  $\pi_1(X, x_0)$ -equivariante entre  $C$  y las clases laterales de  $P_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_j)$  en  $\pi_1(X, x_0)$ .

Decimos que dos cubiertas  $P_1: X_1 \rightarrow X$  y  $P_2: X_2 \rightarrow X$  son equivalentes si existe un homeomorfismo  $h: X_1 \rightarrow X_2$  tal que  $P_2 \circ h = P_1$ . Así tenemos que dos cubiertas  $P_1$  y  $P_2$  son equivalentes si  $P_{1*}\pi_1(X_1, x_1) = P_{2*}\pi_1(X_2, x_2)$  con  $P_1(x_1) = P_2(x_2)$ .

(1)

Resumiendo, tenemos lo siguiente.

- Proposición 26 [K3]: a) Dos cubrientes  $P_1$  y  $P_2$  de  $X$  son equivalentes si y sólo si  $P_1 * \pi_1(X, x_1)$  y  $P_2 * \pi_1(X, x_1)$  son subgrupos conjugados en  $\pi_1(X, x_1)$  con  $P_1(x_1) = P_2(x_2) = x$ .
- b) Si  $\tilde{X}$  es conexo y localmente conexo por trayectorias, entonces  $X$  es homeomorfo a  $G/\tilde{X}$ , donde  $G$  es el grupo de transformaciones cubrientes de  $P: \tilde{X} \rightarrow X$ , si  $G/\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(X, x)$ . ■

La siguiente proposición nos muestra la existencia de cubrientes de un espacio  $X$  en términos de subgrupos del grupo fundamental  $\pi_1(X, x)$ .

Proposición 27 [K3]: Sea  $X$  conexo, localmente conexo por trayectorias y localmente simplemente conexo. Si  $G$  es un subgrupo de  $\pi_1(X, x_0)$ , entonces existe una cubriente  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  tal que  $P_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = G$ , la cual será única salvo equivalencia. Si no pedimos que  $X$  sea localmente simplemente conexo, entonces, para cada subgrupo  $G$  de  $\pi_1(X, x_0)$  existirá una cubriente  $P'$  tal que  $P'_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = G$  si y solamente si cada  $x \in X$  posee una vecindad  $U$  tal que cualquier lazo en  $U$  basado en  $x$  es equivalente a algún elemento de  $G$ . ■

Sea  $X$  un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias y sea  $x_0 \in X$  un punto base de  $X$ . Decimos que una cubriente  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  es universal si  $\tilde{X}$  es conexo y si para toda cubriente  $P': \tilde{X}' \rightarrow X$  con  $\tilde{X}'$  conexo, existe una cubriente  $q: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  tal que  $q \circ P' = P$ .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{P} & X \\ q \downarrow & \nearrow P' & \\ \tilde{X}' & & \end{array}$$

Por la definición de cubriente universal, dos cubrientes universales de un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias son equivalentes. Por las proposiciones 26-a y 27, la cubriente universal de un espacio conexo y localmente simplemente conexo corresponde a la clase conjugada del subgrupo trivial.

### Producto fibrado de cubrientes.

La proposición 27 nos da la existencia de ciertas cubrientes en términos de subgrupos de  $\pi_1(X, x_0)$ . Aquí daremos una manera de construir cubrientes en términos de dos cubrientes dadas. Esto dará una demostración de la existencia de la cubriente universal, misma que adaptaremos más adelante para la cuestión de la existencia de la cubriente universal de orbifolds.

Definimos el producto fibrado de dos funciones continuas  $f_1: X_1 \rightarrow X$  y  $f_2: X_2 \rightarrow X$  como el espacio topológico

$$X_1 \times_X X_2 := \{ (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid f_1(x_1) = f_2(x_2) \},$$

al cual le damos la topología que hereda del producto  $X_1 \times X_2$ . La siguiente proposición nos muestra el motivo por el cual introducimos este concepto.

Proposición 28: Sea  $X$  un espacio conexo y sean  $p_1: X_1 \rightarrow X$  y  $p_2: X_2 \rightarrow X$  dos cubrientes con  $X_1$  y  $X_2$  conexos. Entonces existe una cubriente  $p_3: X_3 \rightarrow X$  con  $X_3$  conexo tal que existen cubrientes  $p'_1: X_3 \rightarrow X_1$  y  $p'_2: X_3 \rightarrow X_2$  tales que  $p_i \circ p'_i = p_3$  ( $i=1,2$ ). De hecho se puede tomar  $X_3$  igual a cualquier componente de  $X_1 \times_X X_2$ .

Demostración:

Sea  $\bar{X}_3 = X_1 \times_X X_2$ . Definimos  $p_3: \bar{X}_3 \rightarrow X$  como  $p_3(x_1, x_2) = p_1(x_1) = p_2(x_2)$ . Veamos que  $p_3$  es una cubriente. Sea  $a \in X$  y sea  $U \subset X$  una vecindad abierta de  $a$  bien cubierta por  $p_1$  y  $p_2$ . Entonces  $p_i^{-1}(U)$  es la unión

ajena de abiertos de  $X_i$  ( $i=1,2$ ). El producto  $P_1^{-1}(U) \times P_2^{-1}(U)$  es la unión ajena de abiertos de  $X_1 \times X_2$ , cada uno de los cuales tiene intersección no vacía con  $\bar{X}_3$ . Sea  $\tilde{U} \subset X_1 \times X_2$  uno de estos abiertos y sea  $\tilde{U}' := \tilde{U} \cap \bar{X}_3$ .  $\tilde{U}'$  es de la forma  $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2$  donde cada  $\tilde{U}_i$  es homeomorfo a  $U$  bajo  $P_i$ . Si  $U$  es un abierto básico de  $X$  entonces  $\tilde{U}$  es abierto básico de  $X_1 \times X_2$ . Sean  $f_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$  las proyecciones canónicas. Entonces  $f_i(\tilde{U}) = \tilde{U}_i$ . Sea  $f_i' := f_i|_{\tilde{X}_3}$  y sea  $b \in U$ . Entonces existe un único  $b_i \in \tilde{U}_i$  tal que  $P_i(b_i) = b$  y  $(b_1, b_2) \in \tilde{U}' \subset \tilde{X}_3$  es el único elemento de  $\tilde{U}'$  tal que  $P_i \circ f_i'(b_1, b_2) = b$ . La función  $f_i'$  es continua por lo que  $f_i': \tilde{X}_3 \rightarrow X_i$  es una cubriente. Entonces,  $P_3 = P_i \circ f_i': \tilde{X}_3 \rightarrow X$  es una cubriente. En general,  $\tilde{X}_3$  no es conexo, pero si restringimos  $P_3$  a cualquier componente  $X_3$  de  $\tilde{X}_3$ ,  $P_3: X_3 \rightarrow X$  seguirá siendo cubriente. Podemos parametrizar las componentes de  $\tilde{X}_3$  de la siguiente manera. Sean  $x_0 \in X$ ,  $x_1 \in X_1$  y  $x_2 \in X_2$  tales que  $P_i(x_i) = x_0$  ( $i=1,2$ ). Sean  $\tilde{x}_i \in P_i^{-1}(x_0)$  cualquiera. Entonces existen lazos  $\tilde{\gamma}_i$  en  $X$  basados en  $x_0$  y tales que el levantamiento  $\tilde{\gamma}_i$  de  $\tilde{\gamma}_i$  en  $X_i$  tiene a  $\tilde{\gamma}_i(0) = \tilde{x}_i$  y  $\tilde{\gamma}_i(1) = x_i$ . Estos levantamientos determinan clases laterales  $[\tilde{\gamma}_i] P_i * \Pi_1(X_i, x_i)$  en  $\Pi_1(X, x_0)$ . Estas dos clases laterales determinan una clase lateral doble  $P_1 * \Pi_1(X_1, \tilde{x}_1) [\tilde{\gamma}_1] P_2 * \Pi_1(X_2, x_2)$  en  $\Pi_1(X, x_0)$ . Como toda clase lateral doble de  $P_1 * \Pi_1(X_1, \tilde{x}_1)$  y  $P_2 * \Pi_1(X_2, x_2)$  en  $\Pi_1(X, x_0)$  es de esta forma, a cada clase lateral doble le asignamos la componente de  $\tilde{X}_3$  que contiene a  $(\tilde{\gamma}_1(1), \tilde{\gamma}_2(1)) \in \tilde{X}_3$ . ■

Proposición 29: En el contexto de la proposición 27, el grupo fundamental de cada componente de  $\tilde{X}_0$  es isomorfo a  $\pi_1 \Pi_1(X_i, x_i) \cap \pi_1 \Pi_1(X_j, x_j)$ .

Daremos ahora una descripción de la cubierta universal como límite inverso [Spa] de la colección de todas las cubiertas de un espacio dado [Me].

Sea  $X = X_0$  un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias y sea  $x_0 \in X_0$  un punto base de  $X_0$ . Sea  $\{((X_i, x_i^*), p_i)\}_{i \in A}$  el conjunto de todas las cubiertas de  $X_0$  con  $X_i$  conexo y con  $p_i(x_i^*) = x_0$ . Definamos un orden parcial en  $A$  de la siguiente manera: sean  $i, j \in A$ ;  $i \leq j$  si existe una cubierta  $p_{ij}: X_j \rightarrow X_i$  con  $p_{ij}(x_j^*) = x_i^*$  y  $p_i \circ p_{ij} = p_j$ . Esta cubierta es única (prop. 22). Nótese que

$$\begin{aligned} p_{ii} &= 1d_{X_i}, \\ p_{ij} \circ p_{jk} &= p_{ik} \quad \text{y} \\ p_i &= p_{ii}. \end{aligned}$$

Por la existencia del producto fibrado (prop. 28) tenemos que para todo par  $i, j \in A$ , existe  $k \in A$  con  $i \leq k$  y  $j \leq k$ ; es decir,  $A$  es un conjunto dirigido [Spa]. Su pongamos que  $X_0$  es localmente simplemente conexo, lo cual es suficiente considerarlo en este trabajo ya que los orbifolds son así. Mostraremos que con esta suposición,  $X_0$  tiene una cubierta universal  $\tilde{X}$  donde  $\tilde{X}$  es un elemento máximo del conjunto  $\{((X_i, x_i^*), p_i)\}_{i \in A}$  respecto al orden parcial de  $A$ .

$$\text{Sea } \tilde{X} := \left\{ \exists: A \rightarrow \coprod_{i \in A} X_i \mid (1) \exists(i) \in X_i \text{ y } (2) \text{ si } i \leq j \text{ entonces } p_{ij}(\exists(j)) = \exists(i) \right\}.$$

( $\tilde{X}$  es el límite inverso de  $\{((X_i, x_i^*), p_i)\}_{i \in A}$ ; ver [Spa], [Me]). Sea  $\tilde{x}_0: A \rightarrow \coprod_{i \in A} X_i$ , tal que  $\tilde{x}_0(i) = x_i^*$  para toda  $i \in A$ . Está claro que  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ , y éste servirá de punto base de  $\tilde{X} \neq \emptyset$ . Sea  $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow X_0$  la función definida por

$$\tilde{p}: \exists \longmapsto p_i(\exists(i)).$$

Entonces  $\hat{P}(\hat{x}_0) = x_0$  y  $\hat{P}$  es sobre.

Proposición 30:  $\hat{P}$  es una cubriente universal.

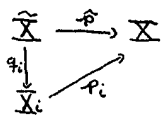
Demostración: Sea  $x \in X$  y sea  $V \subseteq X$  una vecindad de  $x$  simplemente conexa.

Sea  $y \in V$  y sea  $\mathcal{G} \in \hat{P}^{-1}(y)$ . Entonces,  $\mathcal{G}(i) = y_i$  para toda  $i \in A$ . Como la vecindad  $V$  está bien cubierta por  $P_i$  para toda  $i \in A$  (prop. 23), sea  $V_i \subseteq \hat{X}_i$  la componente de  $P_i^{-1}(V)$  que contiene a  $y_i$ . Sea

$$\hat{V} = \{z \in \hat{X} \mid z(i) \in V_i \text{ para toda } i \in A\}.$$

Entonces, estas  $\hat{V}$ , cuando  $V$  varía sobre la base de abiertos en  $X$ , definen una topología de  $\hat{X}$ . Como  $V$  es simplemente conexa, entonces  $P_i|_{V_i}$  es un homeomorfismo sobre  $V$ . Luego, si  $\hat{V}_0$  es una componente de  $\hat{P}^{-1}(V)$ , entonces  $\hat{P}|_{\hat{V}_0}$  es un homeomorfismo sobre  $V$  por lo que  $V$  está bien cubierta por  $\hat{P}$  y  $\hat{P}: \hat{X} \rightarrow X$  es una cubriente como se tenía que demostrar. Veamos

que  $\hat{P}$  es una cubriente universal de  $X$ . Para cualquier cubriente  $(\hat{X}_i, P_i)$ , definamos  $q_i: \hat{X} \rightarrow \hat{X}_i$  como  $q_i(z) = z(i)$ . Entonces,  $q_i|_{\hat{V}_0}: \hat{V}_0 \rightarrow V_i$  es un homeomorfismo por lo que  $q_i: \hat{X} \rightarrow \hat{X}_i$  es una cubriente y  $P_i \circ q_i = \hat{P}$ . La conclusión es que  $\hat{P}$  es la cubriente universal de  $X$ .



## Capítulo II: Geometría.

II.A: Variedades y estructuras geométricas.

Recordemos que una  $n$ -variedad o variedad de dimensión  $n$  es un espacio topológico  $M$  separable y Hausdorff que localmente es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Es decir, para todo  $x \in M$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  y un homeomorfismo  $\varphi: V \rightarrow U$  donde  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  es un abierto. Al par  $(V, \varphi)$  lo llamaremos carta local en  $x$ . A un conjunto  $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  de cartas locales lo llamaremos atlas en  $M$  si  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$  donde  $U_\alpha := \varphi_\alpha(V_\alpha)$ .

Proposición 31: a) Sea  $M$  una  $n$ -variedad, sea  $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  un atlas en  $M$  y sean  $\alpha, \beta \in A$  tales que  $U_\alpha \cap U_\beta := W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ . Definamos  $W_{\beta\alpha} := \varphi_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \subseteq V_\beta$ . Entonces

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : W_{\beta\alpha} \rightarrow W_{\alpha\beta}$$

es un homeomorfismo al cual llamaremos cambio de coordenadas.

b) Sean  $\alpha, \beta, \gamma \in A$  tales que  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma = W \neq \emptyset$ . Entonces

$$\varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\gamma\alpha}$$

en  $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ . A esta propiedad la llamaremos condición de cociclos.

Podemos recuperar un atlas de sus cambios de coordenadas de la siguiente manera. Sea  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una colección de abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , sea  $B \subseteq A^2$  un subconjunto simétrico y reflexivo, sean  $\{\varphi_{\beta\alpha}\}_{(\alpha, \beta) \in B}$  una familia de funciones y  $\{W_{\beta\alpha}\}_{(\alpha, \beta) \in B}$  una familia de abiertos de  $\mathbb{R}^n$  donde  $W_{\beta\alpha} \subseteq V_\alpha$  y  $\varphi_{\beta\alpha} : W_{\beta\alpha} \rightarrow W_{\alpha\beta}$  es un homeomorfismo. Supongamos que

$$\varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha}$$

cundo  $(\delta, \rho), (\rho, \kappa) \in B$ . Definamos una relación de equivalencia en la unión ajena  $\coprod_{\alpha \in A} V_\alpha := X$  de la siguiente manera: sea  $\sim$  la mínima relación de equivalencia en  $X$  tal que para  $x_\alpha \in V_\alpha$  y  $x_\beta \in V_\beta$ ,  $x_\alpha \sim x_\beta$  si  $x_\beta \in W_{\alpha\beta}$  y  $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$ . Sea  $\tilde{M} := X/\sim$  con la topología cociente inducida por la proyección natural  $\tilde{p}: X \rightarrow \tilde{M}$ . Sea  $\tilde{U}_\alpha := \tilde{p}(V_\alpha)$  y sea  $\tilde{\varphi}_\alpha := \tilde{p}|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha$ . Entonces se tiene lo siguiente.

**Proposición 32:** El conjunto  $\{(V_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  es un atlas en  $\tilde{M}$  con cambios de coordenadas  $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} := \tilde{\varphi}_\alpha^{-1} \circ \tilde{\varphi}_\beta$ .

**Demostración:** Sea  $x \in \tilde{M}$ . Entonces existe  $\tilde{x} \in X$  tal que  $\tilde{p}(\tilde{x}) = x$ . Sea  $\alpha \in A$  tal que  $\tilde{x} \in V_\alpha$  y sea  $\tilde{U}_\alpha = \tilde{\varphi}_\alpha(V_\alpha)$ . Entonces  $x \in \tilde{U}_\alpha$  y  $\tilde{\varphi}_\alpha: V_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha$  es un homeomorfismo. Sea  $\beta \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ . Entonces existe  $\beta \in A$  tal que  $\beta \in V_\beta$ . Como  $\tilde{x}, \beta \in \mathcal{P}^{-1}(x)$  entonces  $(\alpha, \beta) \in B$  y existen  $W_{\alpha\beta}$  y  $W_{\beta\alpha}$  tales que  $\beta \in W_{\alpha\beta} \subset V_\beta$ ,  $\tilde{x} \in W_{\beta\alpha} \subset V_\alpha$  y  $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \tilde{\varphi}_\alpha^{-1} \circ \tilde{\varphi}_\beta: W_{\alpha\beta} \rightarrow W_{\beta\alpha}$  es un homeomorfismo. Por lo tanto,  $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}$  es un cambio de coordenadas del atlas  $\{(V_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha) \}_{\alpha \in A}$  en  $\tilde{M}$ . ■

Notemos que el espacio  $\tilde{M}$  construido así no tiene que ser de Hausdorff. Sin embargo, si los datos  $\{(V_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$  y  $\{\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}\}$  provienen de un atlas en una variedad  $M$ , entonces  $\tilde{M}$  es homeomorfo a  $M$  (prop. 1) y luego es de Hausdorff.

Un espacio geométrico es un par  $(G, X)$  donde  $G$  es un grupo topológico (o sea,  $G$  es un espacio topológico y un grupo donde el producto  $\mathcal{G}: G \rightarrow G$ ,  $\mathcal{G}(h) = gh$  es continuo para toda  $g \in G$  y la función  $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}^{-1}$  es continua),  $X$  es un  $G$ -espacio donde la acción de  $G$  en  $X$  cumple la siguiente condición: si  $g_1, g_2 \in G$ ,  $V \subseteq X$  es un abierto no vacío y si  $g_1 v = g_2 v$  entonces  $g_1 = g_2$ .

Sean  $M$  una  $n$ -variedad,  $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  un atlas en  $M$  y  $(G, X)$  un espacio



geométrico. Decimos que  $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$  es un atlas  $(G, \mathbb{X})$  si  $V_\alpha \in \mathbb{X}$  es un abierto para toda  $\alpha \in A$  y  $\varphi_{\alpha\beta}: W_{\alpha\beta} \rightarrow W_{\beta\alpha}$  es la restricción a  $W_{\alpha\beta}$  de algún  $g \in G$  donde  $W_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(V_\alpha) \cap \varphi_\beta(V_\beta))$ . Una estructura  $(G, \mathbb{X})$  en  $M$  es un atlas  $(G, \mathbb{X})$  máximo en  $M$ . Si  $M$  tiene asociada una estructura  $(G, \mathbb{X})$  decimos que  $M$  es una variedad  $(G, \mathbb{X})$ .

Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos variedades  $(G, \mathbb{X})$ . Una función  $f: M_1 \rightarrow M_2$  es una función  $(G, \mathbb{X})$  si para toda carta local  $h_i: V_i \rightarrow U_i$  de  $M_1$  y para toda carta local  $k_j: V_j \rightarrow U_j$  de  $M_2$  tales que  $U_i \cap f^{-1}(U_j) \neq \emptyset$ , la composición  $k_j \circ f \circ h_i$  se extiende a un automorfismo  $g \in G$  de  $\mathbb{X}$ . Dos variedades  $(G, \mathbb{X})$   $M_1$  y  $M_2$  son equivariantes si existe una función  $(G, \mathbb{X})$   $f: M_1 \rightarrow M_2$  que sea invertible.

Sea  $G_0$  un subgrupo de  $G$ . Entonces, el par  $(G_0, \mathbb{X})$  también es un espacio geométrico y cualquier estructura  $(G_0, \mathbb{X})$  en  $M$  se extiende de manera única a una estructura  $(G, \mathbb{X})$  en  $M$ . Cuando una estructura  $(G, \mathbb{X})$  proviene de una estructura  $(G_0, \mathbb{X})$  en el sentido anterior decimos que la estructura  $(G, \mathbb{X})$  se restringe a una estructura  $(G_0, \mathbb{X})$  o que la estructura  $(G, \mathbb{X})$  es una estructura  $(G_0, \mathbb{X})$ .

Sea  $\rho: \tilde{M} \rightarrow M$  una cubierta. Si  $M$  es una variedad  $(G, \mathbb{X})$ , entonces  $\tilde{M}$  se convierte en una variedad  $(G, \mathbb{X})$  con coordenadas  $\varphi_\alpha \circ \rho$ . De esta manera,  $\rho$  es una función  $(G, \mathbb{X})$  y la estructura  $(G, \mathbb{X})$  en  $M$  se levanta a una estructura  $(G, \mathbb{X})$  en  $\tilde{M}$ .

Una superficie geométrica es una superficie  $S$  cuyo atlas es un atlas  $(G, \mathbb{X})$ . Si el par  $(G, \mathbb{X})$  es  $(\text{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \dots, (0, \omega), S^2)$  o  $(\text{Isom}(\mathbb{H}^2, \mathbb{H}^2), \dots, (0, \omega), S^2)$  diremos que la estructura  $(G, \mathbb{X})$  es una estructura euclidiana, elíptica o hiperbólica.

respectivamente. Estas son las únicas estructuras que consideraremos y las geometrías bidimensionales euclidiana, elíptica e hiperbólica están desarrolladas en la siguiente sección.

Ejemplo 17: a) A la superficie  $\mathbb{P}^2$  (ej. 9-b, 6-b, 19-c) le podemos dar una estructura elíptica de la siguiente manera: Sea  $\alpha: S^2 \rightarrow S^2$ ,  $\alpha(x) = -x$ . Entonces  $\mathbb{P}^2 = \langle \alpha \rangle \backslash S^2$ . La estructura en  $\mathbb{P}^2$  es tal que cuando se levanta a  $S^2$  vía la proyección natural, se obtiene la geometría elíptica en  $S^2$ .

b) Sean  $a, b \in \mathbb{R}^2$  dos vectores no nulos y linealmente independientes. Sea  $G$  el subgrupo de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  generado por las traslaciones  $T_a$  y  $T_b$ . Entonces  $G \backslash \mathbb{R}^2$  es un Toro (ej. 9-d, 19-d) y este posee una estructura euclidiana. La geometría en  $\mathbb{R}^2$  que se levanta del Toro es la euclidiana.

c) Sea  $H$  el subgrupo de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  generado por la traslación  $T_a$  y el resbalón  $R(\lambda, b/2)$ . Entonces  $H \backslash \mathbb{R}^2$  es una botella de Klein (ej. 10-c) y  $H \backslash \mathbb{R}^2$  posee una estructura euclidiana. Notemos lo siguiente: el grupo  $G$  del ejemplo anterior es un subgrupo de índice dos del grupo  $H$  y la proyección natural  $p: G \backslash \mathbb{R}^2 \rightarrow H \backslash \mathbb{R}^2$  es una cubierta de orden dos.

### Teorema de Gauss-Bonnet.

Existe una forma de relacionar la topología y la geometría de una superficie compacta en términos de la curvatura Gaussiana que veremos a continuación.

Sea  $M$  una superficie geométrica, sea  $P \in M$  y sea  $\epsilon > 0$  un número real pequeño. Sea  $C_\epsilon$  el lugar geométrico de los puntos en  $M$  cuya distancia

geodésica (ver sección II-B) a  $P$  es  $c$  (es decir,  $C_c$  es la circunferencia en  $M$  de radio  $E$  y centro  $P$ ) y sea  $L(C_c)$  la longitud de  $C_c$ . En la sección II-B se da la forma explícita de calcular  $L(C_c)$  en cada geometría. Definimos la curvatura Gaussiana de  $M$  en  $P$ , y la denotamos por  $K(P)$ , como

$$K(P) = \lim_{c \rightarrow 0} \left( \frac{3}{\pi E^3} \right) (2\pi E - L(C_c)), [D_9].$$

Cabe notar que  $L(C_c)$  es invariante bajo isometrías; es decir, si  $T: M \rightarrow M$  es una isometría de  $M$  en sí mismo, entonces  $L(T(C_c)) = L(C_c)$ . Por esto, la curvatura Gaussiana también es invariante bajo isometrías,

$$K(T(P)) = K(P).$$

En las geometrías que estamos considerando, la curvatura Gaussiana  $K$  es constante; sin embargo, la fórmula que la define es válida aún en espacios con curvatura variable.

El siguiente resultado relaciona la curvatura Gaussiana con los ángulos internos de un polígono; su demostración hace uso del teorema de Stokes [Spi], [Co].

Proposición 33 [D<sub>10</sub>]: Si  $\Delta$  es un triángulo geodésico orientable en una superficie geométrica  $S$ , entonces

$$\iint_{\Delta} K dA = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - \pi,$$

donde  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  son los ángulos internos de  $\Delta$  ■

Decimos que una triangulación  $T$  de la superficie geométrica y compacta  $S$  es una triangulación geométrica si cada arista de  $T$  es un arco geodésico en  $S$ .

Sea  $T$  una triangulación geométrica de la superficie geométrica compacta  $S$ . Entonces,  $S$  está cubierta por un número finito de triángulos geodésicos  $T(\Delta_i)$ . Sean  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  los ángulos internos de  $T(\Delta_i)$ . Definimos el defecto

de  $T(\Delta_i)$  como

$$\delta_i = \pi - (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i).$$

Sean  $e_0, e_1$  y  $e_2$  respectivamente el número (finito) de vértices, aristas y caras de la triangulación  $T$ . Ahora, en cada vértice  $v$ , la suma de los ángulos que tienen a  $v$  como vértice es  $2\pi$ , por lo que

$$2\pi e_0 = \sum_{i=1}^{e_2} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = \sum_{i=1}^{e_2} (\pi - \delta_i) = \pi e_2 - \sum_{i=1}^{e_2} \delta_i.$$

Además,  $3e_2 = 2e_1$  para cualquier triangulación, por lo que

$$\begin{aligned} \chi(S) &= e_0 - e_1 + e_2 \\ &= \left( \frac{e_2}{2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{e_2} \delta_i \right) + \left( \frac{3}{2} \right) e_2 + e_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{e_2} \delta_i. \end{aligned}$$

La discusión anterior nos lleva a la siguiente proposición.

Proposición 34: Teorema de Gauss-Bonnet. Si  $S$  es una superficie geométrica orientable compacta y  $T$  es una triangulación geométrica de  $S$ , entonces

$$\iint_S K dA = \sum_{i=1}^{e_2} \iint_{T(\Delta_i)} K dA = 2\pi \chi(S),$$

donde  $e_2$  es el número de caras  $T(\Delta_i)$  de  $T$  ■

Un corolario del teorema de Gauss-Bonnet es la siguiente proposición.

Proposición 35: Si  $S$  es una superficie compacta con estructura geométrica, ésta estructura es hiperbólica, euclidiana o elíptica según  $\chi(S) < 0$ ,  $\chi(S) = 0$  o  $\chi(S) > 0$  respectivamente ■

Uno de los objetivos de este trabajo es el de llegar a un resultado análogo para orbifolds (prop. 52).

## II.B: Espacios Geométricos.

En esta sección veremos tres geometrías bidimensionales: la euclidiana, la elíptica y la hiperbólica con el fin de determinar los grupos de isometrías que actúan propiamente discontinuos en su espacio geométrico.

Considerese las dos superficies sin frontera simplemente conexas,  $S^2$  y  $\mathbb{R}^2$ . En  $S^2$  existe una geometría inducida por la geometría euclidiana de  $\mathbb{R}^3$ . En  $\mathbb{R}^2$  existen dos geometrías, la euclidiana (o parabólica) y la hiperbólica. Estas tres geometrías tienen en particular que el grupo de isometrías actúa transitivamente en su espacio geométrico y poseen métricas con curvatura constante igual a 1 en el caso elíptico, igual a cero en el caso euclidiano e igual a -1 en el caso hiperbólico. Veamos las detalladamente a continuación.

### Geometría euclidiana.

Consideremos al espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  y definamos en él un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

donde  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ . Denotamos por  $\mathbb{E}^2$  al espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  donde la distancia entre dos puntos  $x, y \in \mathbb{E}^2$  está dada por

$$d(x, y) = (\langle x - y, x - y \rangle)^{1/2},$$

y diremos que  $\mathbb{E}^2$  es el plano euclidiano. Si  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^2$  es una curva (diferenciable) definimos la longitud de  $\gamma$  como

$$L(\gamma) = \int_a^b ds = \int_a^b \left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt,$$

donde  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  y  $ds^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2$ . El área de una región  $R$  en  $\mathbb{E}^2$  está dada por

$$A(R) = \iint_R dx dy.$$

Una función  $f: X \rightarrow Y$  es una isometría si  $X$  y  $Y$  son espacios métricos y para todo par  $x, y \in X$ ,  $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$ . Denotaremos por  $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  al grupo de isometrías de  $\mathbb{E}^2$  en si mismo.

Sean  $a, b, c \in \mathbb{E}^2$  tres puntos no colineales. Entonces,  $a, b, c$  son los vértices de un triángulo  $\Delta$  en  $\mathbb{E}^2$ . Si  $a, b$  y  $c$  están ordenados de manera tal que si nos paramos en  $a$  y recorremos la frontera de  $\Delta$  en el sentido de las manecillas del reloj, primero pasamos por  $b$  y luego por  $c$ , diremos que el triángulo  $\Delta$  está orientado positivamente y lo denotamos por  $\Delta(a, b, c), \Delta(b, c, a)$  o  $\Delta(c, a, b)$ . En caso contrario, diremos que  $\Delta$  está orientado negativamente y lo denotamos por  $\Delta(a, c, b)$ . Decimos que una isometría  $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  preserva la orientación si  $\Delta(a, b, c) = \Delta(g(a), g(b), g(c))$  o  $\Delta(a, c, b) = \Delta(g(a), g(c), g(b))$  y en caso contrario diremos que  $g$  invierte la orientación. El hecho de que una isometría preserve o no la orientación es independiente de la elección hecha de los puntos no colineales  $a, b$  y  $c$ .

Sea  $l$  una recta en  $\mathbb{E}^2$ . La reflexión en la recta  $l$  es la función  $R_l: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  definida como  $R_l(x) = y - z$  donde  $x = y + z$  con  $y \in l$  y  $z \perp (l - y)$ . Nótese que  $R_l$  deja fijos a todos los puntos de  $l$ , intercambiando ambos lados de  $l$  y si  $m$  es una recta en  $\mathbb{E}^2$  perpendicular a  $l$ , entonces  $R_l(m) = m$ .

- Proposición 36 [R1]: a) Sea  $l$  una recta en  $\mathbb{E}^2$ . Entonces,  $R_l \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  invierte la orientación y  $(R_l)^2 = Id$  donde  $Id$  denota a la identidad en  $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ .
- b) Toda  $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  está determinada por su restricción a los tres vértices de cualquier triángulo no degenerado.
- c) Toda  $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  es el producto de a lo mas tres reflexiones.

d) Toda  $g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  está determinada por su restricción a dos puntos distintos y el hecho de preservar o no la orientación.

Para clasificar las isometrías de  $\mathbb{R}^2$  notemos primero que, por la proposición 36-C,  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  está generado por reflexiones, por lo que será suficiente, para determinar los distintos tipos de isometrías de  $\mathbb{R}^2$ , el analizar cómo son los productos de dos y tres reflexiones. Si  $g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  es el producto de dos reflexiones, entonces  $g$  preserva la orientación; y si  $g$  es el producto de tres reflexiones, entonces  $g$  invierte la orientación.

Definición de isometrías a través de reflexiones en rectas.

Sean  $l, m$  dos rectas en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $l = m$ , entonces  $R_l R_m = (R_l)^2 = \text{Id}$ . Si  $l \neq m$ , entonces  $l \parallel m$  o  $l \cap m = b \in \mathbb{R}^2$ . Si  $l \parallel m$ , entonces  $R_m R_l(x) = x + a$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  donde  $a \in \mathbb{R}^2$ ,  $a \perp l$  y  $\|a\| = 2d(l, m)$ . En este caso diremos que  $R_m R_l$  es la traslación

$$T_a(x) = x + a.$$

Notemos que  $R_l R_m = T_a = (T_a)^{-1}$  y  $T_a$  no tiene puntos fijos. Si  $l \cap m = b$ , entonces  $R_m R_l$  es una rotación de un ángulo  $\alpha$  alrededor de  $b$  y la denotamos por  $R(b, \alpha)$  donde  $\alpha$  es el ángulo de intersección de  $l$  a  $m$ . Notemos que  $R_l R_m = R(b, -\alpha) = R^{-1}(b, \alpha)$  y  $R(b, \alpha)$  deja fijo sólo a  $b \in \mathbb{R}^2$ .

Sean  $l, m, n$  tres rectas distintas de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $l \parallel m \parallel n$ , entonces  $R_n R_m R_l = R_{\tilde{n}}$ , donde  $\tilde{n}$  es una recta paralela a  $l$ . Si  $l \cap m \cap n = b \in \mathbb{R}^2$ , entonces  $R_n R_m R_l = R_{\tilde{n}}$ , donde  $\tilde{n}$  es una recta que contiene a  $b$ . Ahora supongamos, en cambio, que  $l, m, n$  no son todas paralelas ni concurrentes. Asumamos que  $l$  y  $m$  se intersectan en  $b$ . Sea  $r$  la recta por  $b$  perpendicular a  $n$  y sea  $c = r \cap n$ . Existe una

recta  $s$  por  $b$  tal que  $R_s R_m = R_b R_r$  y  $R_s R_m R_n = R_b R_r R_n$ . Sea  $t$  la recta por  $c$  perpendicular a  $s$  y sea  $t'$  la recta por  $c$  perpendicular a  $t$ . Entonces  $R_r R_n = R_{t'} R_t = R(c, \pi)$  por lo que  $R_s R_m R_n = R_b R_{t'} R_t$ . Notemos que  $R_b R_{t'}$  es una traslación a lo largo de  $t$  y  $R_t R_b R_{t'} = R_b R_{t'} R_t$ . Definimos el resbalón

$$R(t, a) = R_t R_b R_{t'}$$

donde  $a \perp s$  y  $\|a\| = z d(s, t')$ . Notemos que  $R(t, a)$  no deja puntos fijos y que  $R^2(t, a) = T_{2a}$  y  $R(t, a) = R_{\bar{a}} T_a$  donde  $\bar{a}$  es una recta paralela a  $a$ .

La clasificación de las isometrías de  $\mathbb{E}^2$  se resume de la siguiente manera.

Proposición 37 [Re]: Si  $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  entonces  $g$  es la identidad, una traslación o una rotación si  $g$  preserva la orientación y es una reflexión o un resbalón si  $g$  invierte la orientación.

Subgrupos de Isom( $\mathbb{E}^2$ ).

Nuestro interés es el conocer los subgrupos  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  que actúan en  $\mathbb{E}^2$  propiamente discontinuos (ver I-D). El subgrupo de  $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  que consta de todas las traslaciones es isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ ,  $a \mapsto T_a$ . Si  $a \in \mathbb{E}^2 - \{0\}$ , entonces el subgrupo generado por  $T_a$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Si  $b \in \mathbb{E}^2 - \{0\}$  y  $a$  y  $b$  son linealmente independientes, entonces el subgrupo generado por  $T_a$  y  $T_b$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Las rotaciones y las reflexiones dejan puntos fijos de  $\mathbb{E}^2$ .

Proposición 38 [W]: Si el subgrupo  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  actúa libre y propiamente discontinuo en  $\mathbb{E}^2$ , entonces  $G$  sólo contiene traslaciones y resbalones (no contiene rotaciones ni reflexiones). Es más,  $G$  está generado por una traslación o un resbalón si  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  o  $G$  está generado por dos traslaciones o por una traslación y un resbalón.



en distintas direcciones si  $G_1$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ■

Si  $G_1 = \langle T_a \rangle$  entonces  $G_1 \backslash \mathbb{E}^2$  es homeomorfo a un cilindro abierto (ej. 14-a).

Si  $G_2 = \langle R(\theta, a) \rangle$  entonces  $G_2 \backslash \mathbb{E}^2$  es homeomorfo a una banda de Moebius abierta

(ej. 4-c). Si  $G_3 = \langle T_a, T_b \rangle$  entonces  $G_3 \backslash \mathbb{E}^2$  es homeomorfo al Toro (ej. 14-d). Si  $G_4 =$

$\langle T_a, R(\theta, b) \rangle$  entonces  $G_4 \backslash \mathbb{E}^2$  es homeomorfo a la botella de Klein (ej. 4-e).

Si  $G$  es un subgrupo de  $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  cuya acción en  $\mathbb{E}^2$  es propiamente discontinua pero no libre, entonces existe  $a \in \mathbb{E}^2$  para el cual su estabilizador  $E_a$  es no trivial y tiene orden finito (prop. 18). Veamos como son los subgrupos finitos de  $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ .

Ya que las traslaciones y los resbalones tienen orden infinito, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 39: Un subgrupo finito  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  consta solamente de rotaciones de orden finito y reflexiones ■

Un buen ejemplo de lo anterior es el grupo de simetrías de un polígono regular. Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  y sea  $P^n$  el polígono regular de  $n$  lados con centro  $o$  y vértices ordenados consecutivamente  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Sea  $l$  la recta que pasa por  $v_i$  y  $o$ . La reflexión  $R_l$  es una simetría de  $P^n$  al igual que  $R(o, \frac{2\pi}{n})$ ; tenemos que  $R^n(o, \frac{2\pi}{n}) = (R_l)^2 = Id$  y  $R_l R(o, \frac{2\pi}{n}) R_l = R(o, -\frac{2\pi}{n}) = R^{-1}(o, \frac{2\pi}{n})$ . Si  $g$  es cualquier simetría de  $P^n$ , entonces  $g(v_i) = v_i$  y  $g(v_c) = v_j$  donde  $j = \pm i$  módulo  $n$ ;  $i$  y  $j$  determinan  $g$ . Entonces  $g = R^i(o, \frac{2\pi}{n})$  con  $j = i + 1$  módulo  $n$  o  $g = R^i(o, \frac{2\pi}{n}) R_l$  con  $j = i - 1$  modulo  $n$ . En otras palabras, el grupo de simetrías de  $P^n$  está dado por

$$D_n = \langle A, B : A^n = B^2 = 1, BAB^{-1} = A^{-1} \rangle$$

en términos de generadores y relaciones donde  $A = R(o, \frac{2\pi}{n})$  y  $B = R_l [v_1 o]$ .

Si  $k$  es una recta que intersecciona a  $l$  en  $o$  con ángulo  $\pi/n$ , entonces  $A = R_k R_l$ , esto nos permite dar otra presentación

$$D_n = \langle B, C : B^n = C^n = (BC)^n = 1 \rangle,$$

donde  $B = R_l$  y  $C = R_k$ . Al grupo  $D_n$  lo llamaremos grupo diédrico de orden  $2n$ . Notemos que  $D_n$  posee un subgrupo cíclico de orden  $n$  generado por  $R(o, \pi/n)$  cuyo índice en  $D_n$  es dos.

Proposición 90E61: Si  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  es un grupo finito, entonces  $G$  es la identidad,  $G$  es generado por una reflexión,  $G$  es un grupo diédrico  $D_n$  de orden  $2n$  o  $G$  es un grupo cíclico de orden  $n$  generado por una rotación  $R(a, \pi/n)$  ■

Veamos ahora algunos ejemplos de subgrupos de  $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  cuya acción en  $\mathbb{E}^2$  sea propiamente discontinua. Obviamente, si  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  es un grupo finito, entonces la acción de  $G$  es propiamente discontinua. Otros ejemplos son los grupos triangulares. Sean  $p, q, r \in \mathbb{N}$  tales que exista un triángulo  $\Delta$  en  $\mathbb{E}^2$  cuyos ángulos internos sean  $\pi/p, \pi/q$  y  $\pi/r$ . Esto implica que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  y las únicas posibilidades para  $p, q, r$  son las triples

$$(3, 3, 3), (2, 3, 6) \text{ y } (2, 4, 4)$$

si suponemos  $p \leq q \leq r$ . El grupo  $\Omega(p, q, r)$  es definido como el subgrupo de  $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  generado por las reflexiones  $R_l, R_m, R_n$  donde  $l, m, n$  son las rectas determinadas por los lados  $\overline{yz}, \overline{zx}$  y  $\overline{xy}$  de  $\Delta$ . Es fácil ver que en los tres casos los trasladados de  $\Delta$  por elementos de  $\Omega(p, q, r)$  cubren a  $\mathbb{E}^2$ , que el estabilizador de  $\Delta$  es trivial. Entonces existe una biyección entre los elementos  $g$  de  $\Omega(p, q, r)$  y los  $g(\Delta)$ . Claramente la acción de  $\Omega(p, q, r)$  en  $\mathbb{E}^2$  es propiamente discontinua. El grupo  $\Omega(p, q, r)$  posee un subgrupo

de índice dos, el grupo  $\Omega'(P, q, r)$  que consiste de todos los elementos de  $\Omega(P, q, r)$  que preservan la orientación. Los productos

$$R_m R_l = R(z, \pi/r),$$

$$R_n R_m = R(x, \pi/p),$$

$$R_l R_n = R(y, \pi/q),$$

generan a  $\Omega'(P, q, r)$ . Como  $R(x, \pi/p) R(y, \pi/q) R(z, \pi/r) = 1d$ , entonces  $\Omega'(P, q, r)$  está generado por cualquier par de  $R(x, \pi/p)$ ,  $R(y, \pi/q)$  o  $R(z, \pi/r)$ .

Otro ejemplo es el grupo rectangular  $G$  generado por las reflexiones en las cuatro rectas que contienen cada una uno de los lados de un rectángulo  $P$  en  $\mathbb{E}^2$ . El grupo  $G$  es isomorfo a  $D_8 \times D_8$  y  $G$  posee dos subgrupos  $H$  y  $K$  de interés para nosotros. El subgrupo  $H$  consiste de todos los elementos de  $G$  que preservan la orientación y  $K$  es el subgrupo generado por dos reflexiones en lados opuestos del rectángulo  $P$ . El subgrupo  $K$  es isomorfo a  $D_8$ .

Proposición 41 [Wol]: Sea  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  un grupo cuya acción en  $\mathbb{E}^2$  es propiamente discontinua y sea  $H$  el subgrupo de  $G$  que consta de todas las traslaciones en  $G$ . Entonces  $H$  es trivial, isomorfo a  $\mathbb{Z}$  o a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Si  $H$  es trivial, entonces  $G$  es finito. Si  $H$  es cíclico obtenemos los siete grupos que modelan una banda infinita. Si  $H$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  entonces obtenemos los diecisiete grupos cristalográficos (un grupo es cristalográfico si su cociente es compacto) ■

Los diecisiete cocientes están dados en la proposición 52-b.

### Geometría elíptica

Recordemos a la esfera  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . La proyección estereográfica de  $S^2 - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{E}^2 = \mathbb{C}$ , cuya regla es

$$(x, y, z) \mapsto \frac{x + iy}{1 - z} = z,$$

y cuyo inverso es

$$z \mapsto \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right),$$

es una parametrización de  $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ . La métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ ,

$$ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$$

induce una métrica en  $S^2$  dada por

$$ds = \frac{2(dx^2 + dy^2)}{1 + |z|^2};$$

las geodésicas (curvas que localmente minimizan la distancia) en  $S^2$  con esta métrica son los círculos máximos en  $S^2$ .

El área de  $S^2$  está dada por

$$A(S) = \iint_{\mathbb{E}^2} \frac{4 \, dx \, dy}{(1 + |z|^2)^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{4r}{1+r^2} \, dr \, d\theta = 4\pi, [Fa].$$

### Isometrías de $S^2$

Toda isometría de  $\mathbb{E}^3$  está determinada por su restricción a cuatro puntos de  $\mathbb{E}^3$  no coplanares. Si  $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$  es tal que  $g(0) = 0$ , entonces  $g$  restringido a  $S^2$  induce una única isometría  $g'$  de  $S^2$  e inversamente, si  $g'$  es un elemento de  $\text{Isom}(S^2)$ , entonces  $g'$  se extiende de manera única a una isometría  $g$  de  $\mathbb{E}^3$  y  $g(0) = 0$ . Así tenemos que  $\text{Isom}(S^2)$  es isomorfo a  $O(3) \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$  donde  $O(3)$  es el grupo de matrices ortogonales  $3 \times 3$ .

Para determinar una isometría de  $S^2$  basta el ver qué hace con cualesquiera tres puntos de  $S^2$  no coplanares con  $0 \in \mathbb{E}^3$ . También es posible

determinar una isometría de  $S^2$  por su restricción a dos puntos no diametralmente opuestos y si preserva o no la orientación.

El grupo  $SO(3)$  es el subgrupo de  $O(3)$  que preserva la orientación, y cualquier elemento  $g$  de  $SO(3)$  tiene determinante 1 y  $SO(3)$  es un subgrupo de índice dos en  $O(3)$ . Si  $g \in SO(3) - \{Id\}$ , entonces  $g$  es una rotación de  $E^3$  alrededor de una recta  $\ell$ . La restricción de  $g$  a  $S^2$  es una rotación de  $S^2$  que deja fijos a los puntos  $x$  y  $-x$  donde  $\{x, -x\} = \ell \cap S^2$ .

Los elementos de  $O(3)$  que invierten la orientación son de dos tipos dependiendo de si tienen a 1 como valor propio. Sea  $g \in O(3)$  un elemento que invierte la orientación. Entonces  $g$  tiene un valor propio igual a -1. Entonces existe una recta  $\ell$  en  $E^3$  que contiene al origen y  $\ell$  es invariante bajo  $g$  pero con el sentido invertido. El plano  $\mathcal{R}$  ortogonal a  $\ell$  por el origen es invariante bajo  $g$  y la restricción de  $g$  a  $\mathcal{R}$  es una rotación. Si la rotación es trivial, entonces  $g$  es una reflexión en  $\mathcal{R}$ . Si la rotación es no trivial, entonces  $g$  sólo deja fijo al origen. Entonces hay dos tipos de isometrías de  $S^2$  que invierten la orientación: las reflexiones que dejan fijo a un círculo máximo y las isometrías que no tienen puntos fijos. Como las geodésicas en  $S^2$  son los círculos máximos, entonces una reflexión en  $E^3$  que deja invariante a  $S^2$  deja fijos a los puntos de una única geodésica de  $S^2$  como en el caso de  $E^2$  lo cual nos permite decir reflexión en una geodésica  $\ell$ .

Como en el caso de  $E^2$ , el grupo de isometrías de  $S^2$  está generado por reflexiones y cualquier  $g \in O(3)$  es el producto de a lo más tres reflexiones. Sean  $\alpha, \beta$  dos reflexiones de  $S^2$  en geodésicas  $\ell_\alpha$  y  $\ell_\beta$  respectivamente. Si  $\ell_\alpha, \ell_\beta$

entonces  $l \cap m = \{x, -x\}$ . Entonces  $\rho_\alpha$  es una rotación alrededor de  $x$  de ángulo  $2\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo de intersección de  $l$  y  $m$ , y  $\rho_\alpha$  deja fijos a  $x$  y a  $-x$ . Entonces cualquier rotación de  $S^2$  es el producto de dos reflexiones.

De lo anterior tenemos que hay subgrupos de  $O(3)$  que son cíclicos y diédricos y si éstos tienen orden finito, son subgrupos finitos de  $O(3)$ . Sin embargo, no son los únicos. Los poliedros regulares en  $\mathbb{R}^3$  son los cinco sólidos platónicos a saber: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Proposición 42 [W3]: a) Si  $G \subset \text{Isom}(S^2)$  actúa en  $S^2$  propiamente discontinuo, entonces  $G$  es finito.

b) Los subgrupos finitos de  $O(3)$  son los cíclicos y diédricos de orden finito, o los grupos de simetría de los sólidos platónicos y sus subgrupos que preservan la orientación, o los grupos  $\Omega(2, 2, n)$  y  $\Omega^*(2, 2, n)$  ( $n \geq 2$ ).

Geometría hiperbólica.

Consideremos a  $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ . Un modelo del plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  es  $\mathbb{R}_+^2$  con la métrica definida por

$$ds^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2).$$

Sean  $P, Q \in \mathbb{H}^2$  y sea  $D = \{\gamma: I \rightarrow \mathbb{H}^2 \mid \gamma(0) = P, \gamma(1) = Q\}$ . Definimos la distancia

$d(P, Q)$  como

$$d(P, Q) = \min_{\gamma \in D} \left\{ L(\gamma) = \int_0^1 ds \right\}.$$

El área de una región  $R$  en  $\mathbb{H}^2$  está dada por

$$A(R) = \iint_R \frac{dx dy}{y^2}$$

Recordemos que una geodésica es una curva que localmente minimiza la distancia. Para determinar todas las geodésicas en  $\mathbb{H}^2$  haremos lo siguiente. En primer lugar, encontraremos algunas geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ ; en segundo lugar, veremos algunas isometrías de  $\mathbb{H}^2$  y, en tercer lugar, sabiendo que una isometría manda geodésicas en geodésicas, encontraremos el resto de las geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ .

1e Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{H}^2$  el segmento de recta (euclidiana) que une a  $P_0 = (x_0, y_0)$  con  $P_1 = (x_1, y_1)$ ; es decir,  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (x_0, y_0 + t(y_1 - y_0))$ . La longitud de  $\gamma$  en  $\mathbb{H}^2$  está

dada por

$$(1) \quad \int_{\gamma} ds = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt = \int_0^1 \frac{1}{y} dy = \log \left| \frac{y_1}{y_0} \right|$$

donde  $y_1 = \gamma(1) = y(1)$  y  $y_0 = \gamma(0) = y(0)$ . Si  $\delta: I \rightarrow \mathbb{H}^2$  es otra trayectoria en  $\mathbb{H}^2$  que une a  $P_0$  con  $P_1$ , entonces la longitud de  $\delta$  está dada por

$$\int_{\delta} ds = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt \geq \int_0^1 \frac{1}{y} dy$$

ya que  $\frac{dx}{dt} \neq 0$  para alguna  $t \in I$ . En otras palabras,  $L(\delta) \geq L(\gamma)$  por lo que  $\gamma$  es un segmento de geodésica de  $\mathbb{H}^2$ . Si  $P_0$  y  $P_1$  son cualesquiera par de puntos de  $\mathbb{H}^2$  que están sobre una misma semirecta (euclidiana) vertical, entonces el segmento de recta (euclidiana) que los une es la única trayectoria que minimiza la distancia entre ellos por lo que cualquier semirecta (euclidiana) vertical en  $\mathbb{H}^2$  es una geodésica de  $\mathbb{H}^2$ . Se puede calcular que éstas líneas verticales tienen longitud infinita en ambos sentidos.

2e Es obvio de (1) que la reflexión euclidiana de  $\mathbb{R}_+^2$  en una línea vertical es una

isometría de  $\mathbb{H}^2$ . Veamos ahora que la inversión  $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  es un semicírculo euclidiano  $C$  cuyo centro  $a$  está en el eje  $x$  es una isometría de  $\mathbb{H}^2$ . Sea  $f(x, y) = (u, v)$ ; entonces, la inversión  $f$  es una isometría de  $\mathbb{H}^2$  si

$$\frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2) = \frac{1}{v^2} (du^2 + dv^2)$$

y este cálculo se simplifica si usamos notación compleja. Sea  $z = x + iy$  y  $w = f(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - a} + a$ . Entonces  $\frac{dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2} = \frac{dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2}$ , por lo cual la inversión

$f$  es una isometría de  $\mathbb{H}^2$ . Nótese que  $f^2 = Id_{\mathbb{H}^2}$ .

3e Veamos que los semicírculos centrados en el eje  $x$  son geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ .

Sabemos que una inversión preserva la magnitud de los ángulos invirtiéndolos el sentido (anticonforme) y manda círculos en  $\mathbb{R}_+^2$  en círculos. Si  $l$  es una línea vertical con  $x = b \neq a$ , entonces  $f(l)$  es el semicírculo  $C'$  con centro en el eje  $x$  que pasa por  $a$  y por el inverso de  $b$ . Como  $l$  es una geodésica, entonces  $f(l) = C'$  también lo es por lo que hemos verificado la afirmación de que cualquier semicírculo con centro en el eje  $x$  es una geodésica de  $\mathbb{H}^2$ .

Veamos ahora que estos semicírculos junto con las líneas verticales, son las únicas geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ .

Sean  $P, Q \in \mathbb{H}^2$  dos puntos no alineados verticalmente. Entonces  $P$  y  $Q$  determinan un único semicírculo centrado en el eje  $x$  que los contiene; este se construye de la siguiente manera. Sea  $s$  el punto medio (euclidiano) del segmento de recta (euclidiana) que une  $P$  a  $Q$ . Sea  $u$  la recta (euclidiana) perpendicular al segmento  $PQ$  por  $s$  y sea  $e$  el punto de intersección de  $u$  con el eje  $x$ . Entonces el semicírculo  $D$  con centro  $e$  que pasa por  $P$  también pasa por  $Q$  y éste es único. Falta verificar que  $D$  es la única geodésica de  $\mathbb{H}^2$  que pasa por  $P$  y  $Q$ . Para ello, sea  $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  una inversión que mande a  $D$  en una línea vertical. Entonces,



el segmento de arco de  $D$  determinado por  $P$  y  $Q$  es mandado en el segmento de recta  $\overline{g(P)g(Q)}$  y este segmento es el único que minimiza la distancia entre  $g(P)$  y  $g(Q)$ . Por lo tanto, el segmento de arco de  $D$  determinado por  $P$  y  $Q$  es la única trayectoria que minimiza la distancia entre  $P$  y  $Q$  y, por lo tanto, los semicírculos centrados en el eje  $x$  junto con las líneas verticales son las únicas geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ . Además, hemos visto que dos puntos distintos de  $\mathbb{H}^2$  determinan una única geodésica de  $\mathbb{H}^2$ .

Una diferencia entre  $\mathbb{E}^2$  y  $\mathbb{H}^2$  es el hecho de que en  $\mathbb{E}^2$  dada una recta  $l$  y un punto  $P$  fuera de  $l$  sólo pasa una única recta paralela a  $l$  por  $P$ , mientras que en  $\mathbb{H}^2$ , dada una geodésica  $l$  y un punto  $P$  fuera de  $l$  pasan una infinidad de geodésicas por  $P$  que no intersectan a  $l$ .

Dirémos que dos geodésicas  $l$  y  $m$  son paralelas si  $l \cap m = \emptyset$  en  $\mathbb{H}^2$  y si  $l$  y  $m$  son ambas líneas verticales o si se intersectan en el eje  $x$  que no pertenece a  $\mathbb{H}^2$ . Dirémos que las geodésicas  $l$  y  $m$  son ultraparalelas si  $l \cap m = \emptyset$  y si  $l$  y  $m$  no son paralelas. Una propiedad de las ultraparalelas es que dadas dos geodésicas ultraparalelas éstas siempre poseerán una única geodésica perpendicular a ambas mientras que las paralelas nunca tendrán una geodésica perpendicular a ambas [Hen].

Clasificación de isometrías de  $\mathbb{H}^2$ .

Las inversiones en semicírculos centrados en el eje  $x$  y las reflexiones de  $\mathbb{R}^2$  en líneas verticales dejan fijos puntualmente alguna geodésica  $l$  de  $\mathbb{H}^2$ , intercambian lo los lados de  $l$  e invirtiendo la orientación de los triángulos, por lo que las llamaremos reflexiones de  $\mathbb{H}^2$ . Al igual que en  $\mathbb{E}^2$  y  $S^1$ , toda isometría de  $\mathbb{H}^2$  es el producto de a lo más tres reflexiones. El estabilizador

de un punto  $P \in \mathbb{H}^2$  es isomorfo a  $O(2)$  y es generado por todas las reflexiones en geodésicas por  $P$ .

Si  $\alpha$  es una isometría de  $\mathbb{H}^2$  que preserva la orientación, entonces  $\alpha$  es el producto de dos reflexiones en geodésicas  $l$  y  $m$ . Si  $P = l \cap m \in \mathbb{H}^2$ , entonces diremos que  $\alpha$  es una rotación alrededor de  $P$  del doble del ángulo en que se intersectan  $l$  y  $m$ . Si  $l$  y  $m$  son paralelas, entonces diremos que  $\alpha$  es parabólica y  $\alpha$  no tiene puntos fijos. Si  $l$  y  $m$  son ultraparalelas, entonces  $\alpha$  no deja fijo ningún punto de  $\mathbb{H}^2$  pero deja invariante a la perpendicular  $k$  común a  $l$  y  $m$  trasladando los puntos de  $k$  a una distancia igual a  $2d$  donde  $d$  es la distancia entre  $l$  y  $m$ . A esta isometría la llamaremos hiperbólica.

Si  $\alpha$  es una isometría que invierte la orientación, entonces  $\alpha$  deja invariante a una geodésica  $l \subset \mathbb{H}^2$ . Veámoslo. Si  $\alpha$  es una reflexión, entonces tiene la geodésica deseada. Supongamos que  $\alpha$  no es una reflexión, entonces existe  $P \in \mathbb{H}^2$  tal que  $P \neq \alpha(P)$ . Sea  $q$  el punto medio del segmento geodésico determinado por  $P$  y  $\alpha(P)$  y  $r$  el punto medio del segmento geodésico determinado por  $\alpha(P)$  y  $\alpha^2(P)$ . Es fácil ver, por medio de triángulos congruentes, que la geodésica determinada por  $q$  y  $r$  es invariante bajo  $\alpha$ . Si componemos  $\alpha$  con una reflexión  $s$  en  $l$  obtenemos una isometría  $\beta = s\alpha$  que preserva la orientación y deja a  $l$  invariante, por lo que  $\beta$  es la identidad o es hiperbólica. Entonces  $\alpha$  es una reflexión en  $l$  o lo que llamaremos resbalón a lo largo de  $l$ . Resumiendo lo anterior tenemos la siguiente proposición.

Proposición 43: Si  $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  entonces  $g$  es la identidad, una rotación, una parabólica o una hiperbólica si  $g$  preserva la orientación y una refle

xión o un resbalón si  $\beta$  invierte la orientación ■

Ahora veamos como son los subgrupos finitos de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ . Es obvio que las parabólicas, las hiperbólicas y los resbalones son isometrías de orden infinito. Entonces, al igual que  $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ , un grupo finito de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  sólo puede contener rotaciones de orden finito y reflexiones, aparte de la identidad.

Proposición 44: Si  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  es un grupo finito, entonces  $G$  es cíclico de orden  $n$  o diédrico de orden  $2n$  ■

Veamos ahora algunos subgrupos de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  que actúan en  $\mathbb{H}^2$  propiamente discontinuos. Como en el caso de  $\mathbb{E}^2$ , los grupos de reflexiones en los lados de un triángulo geodésico son buenos ejemplos. Sean  $p, q, r \in \mathbb{N}$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ . Entonces, se puede mostrar [Th], haciendo uso de la ley de cosenos de la trigonometría hiperbólica

$$\cosh c = \frac{\cosh a \cosh b + \cosh \delta}{\sinh a \sinh b},$$

donde  $a, b, \delta$  son los ángulos internos de un triángulo geodésico y  $c$  es el lado opuesto a  $\delta$ , que existe un triángulo geodésico  $\Delta$  en  $\mathbb{H}^2$  cuyos ángulos internos son  $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}$  y  $\frac{\pi}{r}$ . Definamos  $\Omega(p, q, r)$  como el subgrupo de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  generado por las reflexiones en los tres lados de  $\Delta$ . Entonces, los traslados de  $\Delta$  bajo  $\Omega(p, q, r)$  cubren a  $\mathbb{H}^2$  y el estabilizador de  $\Delta$  es trivial [Mag].

Otros ejemplos son los siguientes. Sea  $Q$  un polígono regular en  $\mathbb{H}^2$  con  $4n$  lados ( $n \geq 2$ ) y cuyos ángulos internos son  $\frac{\pi}{2n}$ . Este polígono existe ya que es la unión de  $4n$  triángulos congruentes isosceles cuyos ángulos internos son  $\frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{4n}$  y  $\frac{\pi}{2n}$ . Numeremos cíclicamente sus  $4n$  aristas con los siguientes símbolos:

$$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}; a_2, b_2, a_2^{-1}, b_2^{-1}; \dots; a_n, b_n, a_n^{-1}, b_n^{-1}.$$

Sea  $T_i$  la única isometría de  $\mathbb{H}^2$  que preserva la orientación y que lleva la arista  $a_i$  en la arista  $a_i'$  pero que invierte la orientación de la arista  $a_i$  con respecto a una orientación fija de la frontera de  $Q$ . Sea  $T_i'$  la única isometría de  $\mathbb{H}^2$  que preserva la orientación y que lleva la arista  $b_i$  en la arista  $b_i'$  pero que invierte la orientación de  $b_i$  con respecto a una orientación fija de la frontera de  $Q$ . Entonces, si  $G$  es el grupo generado por las  $T_i$  y las  $T_i'$ ,  $G$  es un grupo que actúa libre y propiamente discontinuo en  $\mathbb{H}^2$  y  $G(Q) = \mathbb{H}^2 \setminus \mathbb{C}$ .

### Capítulo III. Orbifolds

Este capítulo está basado en las primeras veintinueve páginas del capítulo 13 de las notas de Thurston [Th]. El propósito es formalizar los conceptos que no vienen de tallados en estas páginas, así como el demostrar algunas propiedades para orbifolds similares a las de las variedades, para lo cual utilizaremos los conceptos desarrollados en los dos capítulos anteriores del presente escrito.

#### Definiciones básicas.

Un  $n$ -orbifold  $\mathcal{O}$  es un espacio topológico localmente modelado localmente en  $\mathbb{R}^n$  módulo la acción de un grupo finito. Definamos esto formalmente.

Primero definiremos el concepto aún logo al de "carta coordenada". Un orbimodelo de dimensión  $n$  es un par  $(\tilde{U}, \Gamma)$  donde  $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  es un abierto y  $\Gamma$  es un grupo finito de automorfismos de  $\tilde{U}$ . Diremos que el orbimodelo  $(\tilde{U}, \Gamma)$  es geométrico si  $\tilde{U} \subseteq S^n, \mathbb{E}^n$  o  $\mathbb{H}^n$ , si  $\Gamma \subseteq \text{Isom}(S^n, \mathbb{E}^n \text{ o } \mathbb{H}^n)$  y si  $\tilde{U}$  es  $\Gamma$ -invariante.

Para hablar de cambios de coordenadas es conveniente limitarnos al caso de una carta contenida en otra. Dados dos orbimodelos  $(\tilde{U}_1, \Gamma_1)$  y  $(\tilde{U}_2, \Gamma_2)$ , una reducción de  $(\tilde{U}_1, \Gamma_1)$  a  $(\tilde{U}_2, \Gamma_2)$  es un par  $(\tilde{\Phi}, \mathcal{M})$  donde  $\tilde{\Phi}: \tilde{U}_2 \rightarrow \tilde{U}_1$  es un empaque y  $\mathcal{M}: \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$  es un monomorfismo de grupos tal que para todo  $\gamma \in \Gamma_2$ ,

$$\tilde{\Phi}(\gamma \cdot x) = \mathcal{M}(\gamma) \cdot \tilde{\Phi}(x).$$

Es decir,  $\tilde{\Phi}$  es un empaque equivariante con respecto a  $\mathcal{M}$ . En general una reducción  $(\tilde{\Phi}, \mathcal{M})$ , cuando existe, no es única: si  $\gamma_1 \in \Gamma_1$ , definamos

$$\gamma_1 \cdot (\tilde{\Phi}, \mathcal{M}) := (\gamma_1 \cdot \tilde{\Phi}, \gamma_1^{-1} \mathcal{M}(\Gamma_2) \gamma_1)$$

al cual llamaremos trasladado de la reducción  $(\tilde{\Phi}, \mathcal{M})$  bajo  $\gamma_1$ , lo cual nos permite definir la clase de reducciones de  $(\tilde{\Phi}, \mathcal{M})$  como

$$\Pi_1 \cdot (\tilde{\Phi}, \mathcal{M}) := \{ \gamma_1 \cdot (\tilde{\Phi}, \mathcal{M}) \mid \gamma_1 \in \Gamma_1 \} := [(\tilde{\Phi}, \mathcal{M})].$$

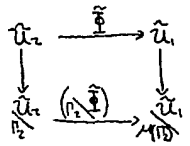
Si además  $\tilde{\Phi}$  es una isometría y  $\mathcal{M}$  es un morfismo entre grupos de isometrías, diremos que  $(\tilde{\Phi}, \mathcal{M})$  es una reducción geométrica. Definamos la función

$$(\Pi_2 \backslash \tilde{\Phi}) : \Pi_2 \backslash \tilde{U}_2 \longrightarrow \mathcal{M}(\Pi_2) \backslash \tilde{U}_1$$

mediante la regla

$$\Pi_2 \cdot x \longmapsto \mathcal{M}(\Pi_2) \cdot \tilde{\Phi}(x).$$

Entonces, para todo  $x \in \Pi_2$ ,  $\Pi_2 \cdot (x \cdot x) \mapsto \mathcal{M}(\Pi_2) \cdot \tilde{\Phi}(x \cdot x) = \mathcal{M}(\Pi_2) \mathcal{M}(x) \cdot \tilde{\Phi}(x) = \mathcal{M}(\Pi_2) \cdot \tilde{\Phi}(x)$ , por lo que  $(\Pi_2 \backslash \tilde{\Phi})$  está bien definida y el diagrama



conmuta.

Sea  $(\tilde{\Phi}, \mathcal{M})$  una reducción de  $(\tilde{U}_1, \Pi_1)$  a  $(\tilde{U}_2, \Pi_2)$ . Definamos la función

$$\tilde{\Phi}^* : \Pi_2 \backslash \tilde{U}_2 \longrightarrow \Pi_1 \backslash \tilde{U}_1$$

mediante la regla

$$\tilde{\Phi}^*(\Pi_2 \cdot x) := \Pi_1 \cdot \tilde{\Phi}(x);$$

es decir,  $\tilde{\Phi}^*$  manda a la órbita  $\Pi_2 \cdot x \in \Pi_2 \backslash \tilde{U}_2$  en la órbita  $\Pi_1 \cdot \tilde{\Phi}(x) \in \Pi_1 \backslash \tilde{U}_1$ .

Establezcamos dos propiedades básicas de reducciones.

Proposición  $\Leftarrow$ : a) Si  $(\tilde{\Phi}', \mathcal{M}') \in [(\tilde{\Phi}, \mathcal{M})]$  entonces  $\tilde{\Phi}'^* = \tilde{\Phi}^*$ .

b) Si  $(\tilde{\Phi}_{11}, \mathcal{M}_{11})$ ,  $(\tilde{\Phi}_{12}, \mathcal{M}_{12})$  son reducciones de los orbimodelos  $(\tilde{U}_2, \Pi_2)$  a  $(\tilde{U}_3, \Pi_3)$  y de  $(\tilde{U}_1, \Pi_1)$  a  $(\tilde{U}_2, \Pi_2)$  respectivamente, entonces  $(\tilde{\Phi}_{11} \circ \tilde{\Phi}_{12}, \mathcal{M}_{11} \circ \mathcal{M}_{12})$  es una reducción de  $(\tilde{U}_1, \Pi_1)$  a  $(\tilde{U}_3, \Pi_3)$ .

Demostración: a) Si  $(\tilde{\Phi}', \mathcal{M}') \in [(\tilde{\Phi}, \mathcal{M})]$  entonces existe  $\delta_1 \in \Pi_1$  tal que  $\delta_1 \cdot (\tilde{\Phi}', \mathcal{M}') = (\delta_1 \cdot \tilde{\Phi}, \delta_1' \mathcal{M}'(\Pi_2) \delta_1) = (\tilde{\Phi}, \mathcal{M})$ . Entonces  $\tilde{\Phi}'^*(\Pi_2 \cdot x) = \Pi_1 \cdot \tilde{\Phi}'(x) = \Pi_1 \cdot (\delta_1 \cdot \tilde{\Phi}'(x)) = \Pi_1 \cdot \tilde{\Phi}'(x) = \tilde{\Phi}^*(\Pi_2 \cdot x)$ .

b) Como  $\tilde{\Phi}_{12}$  y  $\tilde{\Phi}_{11}$  son encajes entonces  $\tilde{\Phi}_{11} \circ \tilde{\Phi}_{12} : \tilde{U}_2 \rightarrow \tilde{U}_1$  es un encaje. Como  $M_2$  y  $M_1$  son monomorfismos entonces  $M_1 \circ M_2 : P_2 \rightarrow P_1$  es un monomorfismo. Si  $M_2 \in P_2$  entonces  $\tilde{\Phi}_{11} \circ \tilde{\Phi}_{12}(M_2 \cdot x) = \tilde{\Phi}_{11}(M_{12}(M_2) \cdot \tilde{\Phi}_{12}(x)) = M_{11} M_{12}(M_2) \cdot \tilde{\Phi}_{11}(\tilde{\Phi}_{12}(x))$ . Por lo tanto,  $\tilde{\Phi}_{11} \circ \tilde{\Phi}_{12}$  es un encaje equivariante con respecto a  $M_{11} \circ M_{12}$  y  $(\tilde{\Phi}_{11} \circ \tilde{\Phi}_{12}, M_{11} \circ M_{12})$  es una reducción de  $(\tilde{U}_1, P_1)$  a  $(\tilde{U}_2, P_2)$  ■

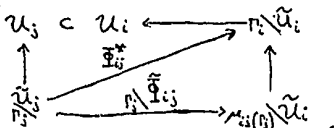
Una orbicarta en un espacio topológico  $X$  es una terna  $(U, \Phi, (\tilde{U}, P))$ , donde  $U \subseteq X$  es un abierto,  $(\tilde{U}, P)$  es un orbimodelo y

$$\Phi : P \backslash \tilde{U} \rightarrow U$$

es un homeomorfismo. Un orbiatlas en un espacio topológico  $X$  es un conjunto de orbicartas  $\{(U_i, \Phi_i, (\tilde{U}_i, P_i))\}$  en  $X$  junto con un conjunto de clases de reducciones  $\{[(\tilde{\Phi}_{ij}, M_{ij})]\}$ , una para cada par  $(i, j)$  tal que  $U_j \subseteq U_i$ , tales que

- 1)  $X = \cup U_i$ ,
- 2) siempre que  $U_j \subseteq U_i$ ,  $\tilde{\Phi}_{ij}^* \circ \Phi_j^{-1} = \Phi_i^{-1} |_{U_j}$  y
- 3) la familia  $\{U_i\}$  es cerrada bajo intersecciones finitas.

La condición (3) nos dice que el orbiatlas es consistente con las reducciones. Las relaciones principales se ilustran en el siguiente diagrama.



La condición de cociclos (prop 31b) para variedades tiene la siguiente analogía para orbifolds.

Proposición : Sean  $U_j \subset U_i$ . Entonces

$$a) \Phi_{ij}^* = \Phi_{ij}^* \circ \Phi_{jk}^* \text{ , y}$$

$$b) [(\tilde{\Phi}_{ij} \circ \tilde{\Phi}_{jk}, \mu_{ij} \circ \mu_{jk})] = [(\tilde{\Phi}_{ik}, \mu_{ik})]$$

Demostración: a) Es inmediato de  $\tilde{\Phi}_{ik}^* = \tilde{\Phi}_{i'}^{-1} \circ \tilde{\Phi}_j \circ \tilde{\Phi}_j^{-1} \circ \tilde{\Phi}_{ik}$ .

$$b) \rho_i \cdot \tilde{\Phi}_{ik}(x) = \tilde{\Phi}_{i'k}^*(\rho_k \cdot x) = \tilde{\Phi}_{i'j}^* \circ \tilde{\Phi}_{jk}^*(\rho_k \cdot x) = \tilde{\Phi}_{i'j}^*(\rho_j \cdot \tilde{\Phi}_{jk}(x)) = \rho_{i'} \cdot (\tilde{\Phi}_{i'j} \circ \tilde{\Phi}_{jk}(x)).$$

Entonces existe  $\rho_{i'} \in \rho_i$  tal que para todo  $x \in \tilde{U}_k$ ,  $\tilde{\Phi}_{i'k}(x) = \rho_{i'} \cdot (\tilde{\Phi}_{i'j} \circ \tilde{\Phi}_{jk}(x))$ .

$$\text{Por lo tanto } [(\tilde{\Phi}_{i'k}, \mu_{i'k})] = [(\tilde{\Phi}_{i'j} \circ \tilde{\Phi}_{jk}, \mu_{i'j} \circ \mu_{jk})]$$

Finalmente llegamos a la definición de nuestro objeto de estudio.

Un orbifold  $\mathcal{O}$  es un orbifold máximo en un espacio topológico de Hausdorff  $X$  y diremos que  $X = |\mathcal{O}|$  es el espacio subyacente del orbifold  $\mathcal{O}$ .

Ejemplo 18: a) Toda variedad cerrada sin frontera  $M$  es un orbifold donde a cada carta coordenada  $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$  se le asocia una orbicarta  $(U_\alpha, \tilde{\Phi}_\alpha, (V_\alpha, \rho_\alpha))$  donde el orbimodelo  $(V_\alpha, \rho_\alpha)$  tiene a  $\rho_\alpha$  como un grupo trivial. Es decir,  $\tilde{\Phi}_\alpha: \{1\} \backslash V_\alpha = V_\alpha \rightarrow U_\alpha$  es un homeomorfismo para toda  $\alpha$  y  $\tilde{\Phi}_\alpha = \varphi_\alpha$ .

b) Una variedad cerrada  $M$  con frontera tiene una estructura de orbifold en donde su frontera se convierte en un "espejo". (comárese con el ejemplo 19-b). Cada punto en la frontera de  $M$  tiene una orbicarta  $(U, \tilde{\Phi}, (\tilde{U}, \mathbb{Z}_2))$  donde  $\mathbb{Z}_2$  actúa mediante una reflexión en un hiperplano.

Cubrientes de orbifolds.

Un orbifold cubriente de un orbifold  $\mathcal{O}$  es un orbifold  $\tilde{\mathcal{O}}$  junto con una proyección  $P: |\tilde{\mathcal{O}}| \rightarrow |\mathcal{O}|$  entre sus espacios subyacentes tal que cada  $x \in |\mathcal{O}|$  posee una orbicarta  $(U, \tilde{\Phi}, (\tilde{U}, \Pi))$  para la cual cada componente  $V_i$  de  $P^{-1}(U)$  posee una orbicarta  $(V_i, \tilde{\Phi}_i, (\tilde{U}, \rho_i))$  donde  $\rho_i$  es un subgrupo de  $\Pi$ .



(14)

$\tilde{\Phi} = P \circ \tilde{\Phi}_i$ . La siguiente proposición nos muestra el comportamiento del concepto de orbicubriente.

Proposición 47: Si  $M$  es una variedad y  $\Gamma$  es un grupo (no necesariamente finito) que actúa propiamente discontinuo (no necesariamente libre) en  $M$ , entonces el cociente  $M/\Gamma$  posee una estructura de orbifold tal que la proyección natural  $P: M \rightarrow M/\Gamma$  es una orbicubriente.

Demostración: Para cualquier  $x \in M/\Gamma$ , escogamos  $\tilde{x} \in M$  tal que  $P(\tilde{x}) = x$ . Sea  $E_{\tilde{x}}$  el estabilizador de  $\tilde{x}$ , el cual dependerá de la  $\tilde{x}$  que tomemos. Existe por hipótesis (prop. 18) una vecindad  $\tilde{U}$  de  $\tilde{x}$  invariante bajo  $E_{\tilde{x}}$  y ajena de los trasladados de  $\tilde{U}$  bajo elementos de  $\Gamma - E_{\tilde{x}}$ . Si  $P(\tilde{U}) = U$ , entonces  $U$  y  $E_{\tilde{x}} \backslash \tilde{U}$  son homeomorfos (prop. 1). Cada vez que  $U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n} \neq \emptyset$ , esto implica que para algún conjunto de trasladados,  $\mathcal{M} \tilde{U}_{\tilde{x}_1} \cap \dots \cap \mathcal{M} \tilde{U}_{\tilde{x}_n} := \tilde{V} \neq \emptyset$ , al cual le asociamos el grupo  $\mathcal{M} E_{\tilde{x}_1} \mathcal{M}^{-1} \cap \dots \cap \mathcal{M} E_{\tilde{x}_n} \mathcal{M}^{-1} := \Gamma'$ , el cual actúa en  $\tilde{V}$ . Una orbicarta en  $M/\Gamma$  es de la forma  $(U, P|_{\tilde{U}}, (\tilde{V}, \Gamma'))$  y una reducción es de la forma  $(\mathcal{M} \tilde{V}, \mathcal{M} \Gamma' \mathcal{M}^{-1})$ .

De hecho, para cualquier  $\Gamma' < \Gamma$ , el cociente  $M/\Gamma'$  es un orbifold cubriente de  $M/\Gamma$ . Notemos que en general el espacio subyacente  $|\mathcal{O}|$  no es un espacio cubriente del espacio subyacente  $|O|$ , que a cada elemento  $x$  de un orbifold  $O$  se le asocia un grupo  $\Gamma_x$  bien definido salvo isomorfismo: en cada orbicarta  $(U, \tilde{\Phi}, (\tilde{U}, \Gamma))$ ,  $\Gamma_x$  es el estabilizador  $E_{\tilde{x}}$  de cualquier  $\tilde{x} \in \tilde{U}$  tal que  $\tilde{\Phi}(P \cdot \tilde{x}) = x$ .

Al conjunto  $\Sigma_0 := \{x \in O \mid \Gamma_x \neq \{1\}\}$  lo llamaremos lugar singular de  $O$  y diremos que  $O$  es una variedad cuando  $\Sigma_0 = \emptyset$ . Decimos que un orbifold es bueno si posee un orbifold cubriente que es una variedad, y diremos

que es malo en el caso contrario.

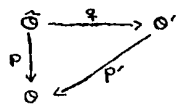
Ejemplo 14: Sea  $|O| = S^2$ , su pongamos que  $Z_0$  consiste de un solo punto elíptico de orden 3 (ver prop. 11), digamos  $x = (0, 0, 1) = \Sigma_0$ . Notemos que  $Z_0$  no es táctando en  $S^2$ . Sean  $U_1$  el hemisferio norte de  $S^2$ ,  $U_2$  el hemisferio sur y  $A$  el ecuador de  $S^2$  que es frontera común de  $U_1$  y  $U_2$ . Si  $P: |O| \rightarrow S^2$  es una orbicubriente no trivial, entonces  $P^{-1}(U_1)$  es tres a uno sobre  $A$  y  $P^{-1}(U_2)$  es uno a uno sobre  $A$  (prop. 23) lo cual contradice la proposición 20. Por lo tanto, este orbifold es malo.

Con un argumento similar podemos ver que un orbifold  $O$  cuyo espacio subyacente sea  $S^2$ , su lugar singular conste de dos puntos elípticos de ordenes  $n_1$  y  $n_2$  respectivamente es malo si  $n_1 \neq n_2$  y bueno si  $n_1 = n_2$ .

Definamos ahora el concepto análogo al de homeomorfismo para orbifolds. Una equivalencia  $h: O_1 \rightarrow O_2$  es una orbicubriente que tiene una orbicubriente inversa  $h^{-1}: O_2 \rightarrow O_1$ ; es decir,  $h^{-1} \circ h$  es la identidad en  $|O_1|$ . Decimos que dos orbifolds  $O_1$  y  $O_2$  son equivalentes si existe una equivalencia  $h: O_1 \rightarrow O_2$ .

Cuando un orbifold  $O$  es bueno, entonces  $O$  es orbicubierta por alguna variedad simplemente conexa  $M$  y  $O$  es equivalente a  $M/\Gamma$  donde  $\Gamma$  es un grupo que actúa propiamente discontinuo en  $M$ . En este caso diremos que  $\Gamma$  es el grupo de transformaciones orbicubrientes de  $M$  sobre  $O$ . La siguiente proposición nos define y muestra la existencia del concepto análogo al de cubriente universal.

Proposición 18: Todo orbifold  $\mathcal{O}$  posee un orbifold cubriente universal en el siguiente sentido. Si  $x \in |\mathcal{O}|_x := |\mathcal{O}| - \Sigma_{\mathcal{O}}$  es un punto base de  $\mathcal{O}$ , entonces el orbifold cubriente universal  $\tilde{\mathcal{O}} \xrightarrow{P} \mathcal{O}$  es un orbifold cubriente con punto base  $\tilde{x} \in P^{-1}(x)$  tal que para cualquier otro orbifold cubriente  $\mathcal{O}' \xrightarrow{P'} \mathcal{O}$  con punto base  $\tilde{x}' \in P'^{-1}(x)$ , existe un levantamiento  $\varphi: \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}'$  de  $P: \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$  que es un orbifold cubriente y  $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ .



Demostración.

Sean  $P_1: |\mathcal{O}|_1 \rightarrow |\mathcal{O}|$  y  $P_2: |\mathcal{O}|_2 \rightarrow |\mathcal{O}|$  dos proyecciones orbicubrientes de  $\mathcal{O}$ . Entonces, para todo  $x \in |\mathcal{O}|$  existe una orbicarta  $\tilde{U}: \tilde{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathcal{U}$  con  $x \in \mathcal{U}$  tal que  $P_1^{-1}(\mathcal{U})$  consiste de componentes  $\mathcal{U}_\alpha$  de la forma  $P_1^{-1}(\mathcal{U})$  y  $P_2^{-1}(\mathcal{U})$  consiste de componentes  $\mathcal{U}_\beta$  de la forma  $P_2^{-1}(\mathcal{U})$ . Fijemos una componente de  $P_1^{-1}(\mathcal{U})$  y una de  $P_2^{-1}(\mathcal{U})$  denotándolas por  $\mathcal{U}_1$  y  $\mathcal{U}_2$  respectivamente y sean  $\tilde{U}_1: \tilde{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathcal{U}_1$  y  $\tilde{U}_2: \tilde{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathcal{U}_2$  orbicartas de  $\mathcal{U}_1$  y  $\mathcal{U}_2$  respectivamente. Para cada par  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{P}$ , definamos  $f_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}: \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow P_1^{-1}(\tilde{\mathcal{U}}) \times P_2^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$  mediante la regla

$$f_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(\mathcal{G}) := (P_1 \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{G}, P_2 \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{G}).$$

Si  $\mathcal{M} \in \mathcal{P}$  entonces es inmediato que  $f_{\mathcal{M}, \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2} = f_{\mathcal{M}, \mathcal{M}_2}$  si y solamente si  $\mathcal{M} \in \mathcal{M}_1^{-1} P_1 \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2^{-1} P_2 \mathcal{M}_2 := P_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}^{-1}$ . Esto nos dice que  $f_{\mathcal{M}, \mathcal{M}_2}$  puede ser factorizada a través de  $P_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}^{-1} \tilde{\mathcal{U}}$ ; de hecho, si definimos

$$h_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}: P_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}^{-1} \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow P_1^{-1}(\tilde{\mathcal{U}}) \times P_2^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$$

mediante la regla

$$h_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(P_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}^{-1} \mathcal{G}) := (P_1 \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{G}, P_2 \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{G}),$$

y si  $P_r: \tilde{U} \rightarrow \Pi_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}} \tilde{U}$  es la proyección natural entonces

$$h_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}} \circ P_r = f_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}}.$$

Ahora,  $f_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}}$  sólo depende de las clases laterales  $\Pi_1 \mathbb{R}^n$  y  $\Pi_2 \mathbb{R}^n$  ya que si  $\mathbb{R}'_1 \in \Pi_1 \mathbb{R}^n$  y si  $\mathbb{R}'_2 \in \Pi_2 \mathbb{R}^n$  entonces existen  $\mathbb{R}_1 \in \Pi_1$  y  $\mathbb{R}_2 \in \Pi_2$  tales que  $\mathbb{R}'_1 = \mathbb{R}_1 \mathbb{R}_1$  y  $\mathbb{R}'_2 = \mathbb{R}_2 \mathbb{R}_2$ , por lo que  $f_{\mathbb{R}'_1, \mathbb{R}'_2} = f_{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2 \mathbb{R}_2} = f_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2}$ .

Para todo  $\mathbb{R} \in \Gamma$ ,  $f_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}(y) = f_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}(\mathbb{R} \cdot y)$  para toda  $y \in \tilde{U}$ ; es decir,  $f_{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2 \mathbb{R}_2}$  y  $f_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2}$  sólo difieren por un  $\mathbb{R} \in \Gamma$  que actúa en  $\tilde{U}$ .

En particular, si  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_2^{-1}$  entonces  $f_{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2 \mathbb{R}_2} = f_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2^{-1}}$ .

Lema: a)  $\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2^{-1} = \mathbb{R}'_1 \mathbb{R}'_2^{-1}$  si y sólo si existe  $\mathbb{R} \in \Gamma$  tal que  $\mathbb{R}'_1 = \mathbb{R}_1 \mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}'_2 = \mathbb{R}_2 \mathbb{R}$ .

b)  $\Pi_1 \mathbb{R} \Pi_2 = \Pi_1 \mathbb{R}' \Pi_2$  si y sólo si  $\mathbb{R}' \in \Pi_1 \mathbb{R} \Pi_2$ .

Denotando  $\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2^{-1} = \mathbb{R}$ , entonces, si  $\Pi_1 \mathbb{R} \Pi_2 = \Pi_1 \mathbb{R}' \Pi_2$  entonces existe  $\mathbb{R}' \in \Gamma$  tal que  $f_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}(y) = f_{\mathbb{R}', \mathbb{R}'}(\mathbb{R} \cdot y) = f_{\mathbb{R}', \mathbb{R}'}(y)$ . Esto nos dice que podemos definir el producto fibrado de  $\Pi_1 \tilde{U}$  y  $\Pi_2 \tilde{U}$  sobre  $\Pi \tilde{U}$  como  $\coprod_{\mathbb{R}} (\Pi_{\mathbb{R}, \mathbb{R}} \tilde{U})$  donde  $\mathbb{R}$  es representante de alguna clase lateral doble de  $\Pi \Gamma / \Pi_2$ .

Veamos como  $\Pi_{\mathbb{R}, \mathbb{R}} \tilde{U}$  orbicubre a  $U_1$  y  $U_2$ .

Sea  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}: \Pi_{\mathbb{R}, \mathbb{R}} \tilde{U} \rightarrow U_1 \times U_2$  definida como

$$\mathcal{G}_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}(\Pi_{\mathbb{R}, \mathbb{R}} \cdot y) = (\mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2) \circ h_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}(\Pi_{\mathbb{R}, \mathbb{R}} \cdot y)$$

y sean  $\mathcal{F}_1: U_1 \times U_2 \rightarrow U_1$  y  $\mathcal{F}_2: U_1 \times U_2 \rightarrow U_2$  las proyecciones naturales. Entonces,  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G}_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}$  y  $\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{G}_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}$  son orbicubiertas de  $U_1$  y  $U_2$  respectivamente.

Para definir el producto fibrado  $\mathcal{O}_1 \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_2$ , consideremos la unión ajena  $\coprod_{U_1, U_1, U_2} (\coprod_{\mathbb{R}} (\Pi_{\mathbb{R}, \mathbb{R}} \tilde{U})) = \mathbb{X}$  y definamos en  $\mathbb{X}$  el siguiente orden parcial  $\mathcal{E}$ :

(1.5)

$(\tilde{U}, \mathbb{P}_{\mathbb{R},1}^{n+1}) \in (\tilde{U}', \mathbb{P}_{\mathbb{R},1}^{n+1})$  si  $U \subset U', U' \subset U_1, U_1 \subset U_2$  y  
 $f_{\mathbb{R},1} \circ \tilde{\Phi} = (\Phi_1^* \times \Phi_1^*) \circ f'_{\mathbb{R},1}$ . Entonces, si  $(\tilde{U}, \mathbb{P}_{\mathbb{R},1}^{n+1}) \in (\tilde{U}', \mathbb{P}_{\mathbb{R},1}^{n+1})$   
 entonces  $\mathbb{P}'(\mathbb{P}_{\mathbb{R},1}^{n+1} \setminus \tilde{U}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R},1}^{n+1} \setminus \tilde{U})$ . Esto define las compo-  
 nentes de  $\mathcal{O}_i \times_0 \mathcal{O}_i$ .

Como en el caso de las variedades (pags. 29-25), una orbicu-  
 briente universal  $\tilde{\mathcal{O}}$  se obtiene tomando el límite inverso  
 sobre un conjunto dirigido  $(\mathcal{O}_i \geq \mathcal{O}_j$  si existe una orbicubriente  
 $\pi_{ij}: \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{O}_j$ ) que representa todas las clases de equiva-  
 lencia de las orbicubrientes de  $\mathcal{O}$ .

## Orbificies

Una orbificie es un  $\mathbb{Z}$ -orbitofold convexo; éste es un concepto análogo al de  
 superficie. La siguiente proposición nos relata la naturaleza del lugar sin-  
 gular de una orbificie.

Proposición 49: El lugar singular  $\Sigma_0$  de una orbificie  $\mathcal{O}$  tiene solamente los  
 siguientes tipos de orbimodelos geométricos:

- 1) Especios:  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}_2)$  donde  $\mathbb{Z}_2$  mediante la reflexión en el eje  
 $y$ ,  $(x, y) \mapsto (-x, y)$ .
- 2) Puntos elípticos de orden  $n$ :  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}_n)$ , donde  $\mathbb{Z}_n$  ( $n \geq 2$ ) es gene-  
 rado por una rotación de orden  $n$ .
- 3) Esquinas de orden  $n$ :  $(\mathbb{R}^2, D_n)$ , donde  $D_n$  es el grupo diedrí-  
 co de orden  $2n$  y presentación  $\langle a, b : a^2 = b^2 = (ab)^n = 1 \rangle$ . Los gene-  
 radores  $a$  y  $b$  corresponden a reflexiones en rectas que se  
 intersectan en un ángulo  $\pi/n$ .

Demostración: Por las proposiciones 40, 42 y 44, estos son los únicos tres tipos de subgrupos finitos de  $O(2)$ .

De la proposición anterior tenemos que el espacio subyacente  $|O|$  de una orbifold  $O$  localmente es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  o a  $\overline{\mathbb{R}^2}$ . Como  $O$  es conexa, entonces  $|O|$  es conexo y es homeomorfo a una superficie la cual tendrá frontera si  $\Sigma_0$  tiene espejos o esquinas. Los puntos elípticos de  $|O|$  siempre serán puntos aislados en el interior de  $|O|$ , por lo que  $|O|_*$  es conexo por trayectorias.

Definamos ahora el concepto para orbifolds análogo al de característica de Euler de una superficie.

Sea  $O$  una orbifold compacta. Como el conjunto de puntos elípticos y de esquinas de  $\Sigma_0$  es finito, podemos triangular a  $|O|$  de manera tal que cada punto elíptico y cada esquina en  $\Sigma_0$  sean vértices de la triangulación  $T$  de  $|O|$ . Entonces, el grupo asociado  $\Pi_x$  a cada elemento del interior de una arista o una cara de  $T$  es constante, por lo que si  $c_j$  recorre todos los elementos de  $T$ , podemos asociarle un único grupo  $\Pi_j$  a  $c_j$ . Definimos el número de Euler de  $O$  como

$$(2) \quad \chi(O) := \sum_{c_j} (-1)^{\dim(c_j)} (1/|\Pi_j|),$$

donde  $c_j$  recorre todos los elementos de la triangulación  $T$  de  $|O|$  y  $|\Pi_j|$  denota al orden del grupo  $\Pi_j$  asociado a  $c_j$ . Notemos que  $\chi(O)$  no siempre es un entero. Esta definición ha sido construida por la siguiente razón. Definamos el orden de una orbifold  $P: \tilde{O} \rightarrow O$  como el cardinal  $\#\{P^{-1}(x)\}$  donde  $x \in |O|_*$ .

Proposición 50: El cardinal  $\#\{P^{-1}(x)\}$  no depende de  $x \in |O|_*$ .

Demostración: Sean  $x_0, x_1 \in |O|_*$  y sea  $\gamma: I \rightarrow |O|_*$  una trayectoria tal que  $\gamma(0) = x_0$  y

$\gamma(1) = x_1$ . Entonces,  $\#\{P^{-1}(x_0)\} = \#\{P^{-1}(x_1)\}$  ya que, de lo contrario, existiría

$t \in I$  tal que  $P^{-1}(P(t)) \in \Sigma_0$  lo cual es imposible.

De la proposición anterior tenemos la siguiente proposición análoga a la proposición 29 para superficies.

Proposición 51: Si  $P: \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$  es una orbicubriente de orden finito  $n$  de la orbificie  $\mathcal{O}$ , entonces

$$\chi(\tilde{\mathcal{O}}) = n \chi(\mathcal{O}).$$

Demostración: Para todo  $x \in |\mathcal{O}|$  existe una vecindad  $V_x$  de  $x$  tal que  $V_x$  es homeomorfa a  $\Gamma_x \tilde{U}$  donde  $\Gamma_x$  es el grupo asociado a  $x$  y para cada  $\tilde{x}_i \in P^{-1}(x)$ , la componente  $\tilde{V}_{\tilde{x}_i}$  de  $P^{-1}(V_x)$  que contiene a  $\tilde{x}_i$  es homeomorfa a  $\Gamma_{\tilde{x}_i} \tilde{U}$  con  $\Gamma_{\tilde{x}_i} \subset \Gamma_x$ . El número de preimágenes de un punto no singular de  $V_x$  en  $\tilde{V}_{\tilde{x}_i}$  es igual al índice de  $\Gamma_{\tilde{x}_i}$  en  $\Gamma_x$  el cual es  $|\Gamma_x|/|\Gamma_{\tilde{x}_i}|$ . Entonces, el número de hojas de  $P$  es igual a

$$\sum_{\tilde{x}_i \in P^{-1}(x)} |\Gamma_x|/|\Gamma_{\tilde{x}_i}| = n.$$

Si  $x \in |\mathcal{O}|_*$ , entonces  $\#\{P^{-1}(x)\} = n$  y a que  $\Gamma_x = \{1\}$ .

Si  $x \in \Sigma_0$ , entonces  $\Gamma_x \neq \{1\}$ . Si  $|\Gamma_x|/|\Gamma_{\tilde{x}_i}| = l_i$  y  $\#\{P^{-1}(x)\} = m$ , entonces  $\sum_{i=1}^m l_i = n$ . Ahora, tenemos que  $|\Gamma_x| = l_i |\Gamma_{\tilde{x}_i}|$ . Entonces  $\frac{l_i}{|\Gamma_x|} = \frac{1}{|\Gamma_{\tilde{x}_i}|}$ , entonces  $\sum_{i=1}^m \frac{1}{|\Gamma_{\tilde{x}_i}|} = \sum_{i=1}^m \frac{l_i}{|\Gamma_x|} = \frac{1}{|\Gamma_x|} \sum_{i=1}^m l_i = \frac{n}{|\Gamma_x|}$ . Por lo tanto,

$$\chi(\tilde{\mathcal{O}}) = n \chi(\mathcal{O}).$$

Los siguientes ejemplos ilustran la relación entre los datos topológicos y las estructuras geométricas en una orbificie.

Ejemplos 20: a) Sea  $\mathcal{O}$  tal que  $|\mathcal{O}| = D^2$  y  $\Sigma_0 = S^1 \cdot \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  con solamente tres esquinas  $x_1, x_2$  y  $x_3$  de ordenes  $n_1, n_2$  y  $n_3$  respectivamente. Entonces,

$$\chi(\mathcal{O}) = 1 - 3/2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{n_i} = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^3 \frac{1}{n_i} \right) - 1 \right).$$

Si  $n_1 = 2, n_2 = 3$  y  $n_3 = 5$ , entonces

$$\chi(\mathcal{O}) = \frac{1}{60}. \text{ Existe un triángulo } \Delta \text{ en } S^2 \text{ cuyos ángulos}$$

internos son  $\pi/2$ ,  $\pi/3$  y  $\pi/3$  y el grupo  $\Omega(2,3,5)$  es isomorfo al grupo de simetría del dodecaedro cuyo orden es  $120 = \frac{1}{20!}$ . Entonces,  $\mathcal{O}$  es equivalente a  $\Omega(2,3,5) \backslash S^2$  y la proyección  $S^2 \rightarrow \mathcal{O}$  es una orbicubriente de orden 120.

b) Sea  $\mathcal{O}$  tal que  $|\mathcal{O}| = D^2$  y  $\Sigma_{\mathcal{O}} = S^1 \times D^2$  con solamente tres esquinas  $x_1, x_2$  y  $x_3$  de ordenes 2, 3 y 6 respectivamente. Entonces  $\chi(\mathcal{O}) = 0$  y, por la proposición 51,  $\mathcal{O}$  no puede ser cubierta por  $S^2$ . Sin embargo, existe un triángulo  $\Delta$  en  $\mathbb{E}^2$  cuyos ángulos internos son  $\pi/2$ ,  $\pi/3$  y  $\pi/6$  y  $\mathcal{O}$  es equivalente a  $\Omega(2,3,6) \backslash \mathbb{E}^2$ . Esta orbicubriente  $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathcal{O}$  es de orden infinito.

c) Si  $n_1, n_2$  y  $n_3$  son 2, 3 y 7 respectivamente, entonces  $\chi(\mathcal{O}) = -\frac{1}{84}$  y  $\mathcal{O}$  no puede ser orbicubierta por  $S^2$  o  $\mathbb{E}^2$ . Sin embargo, existe un triángulo  $\Delta$  en  $\mathbb{H}^2$  cuyos ángulos internos son  $\pi/2$ ,  $\pi/3$  y  $\pi/7$  y  $\mathcal{O}$  es equivalente a  $\Omega(2,3,7) \backslash \mathbb{H}^2$ .

De (2) se desprende que la fórmula general del número de Euler de una orbificie compacta  $\mathcal{O}$  con  $k$  esquinas de orden  $n_1, \dots, n_k$  y  $l$  puntos elípticos de orden  $m_1, \dots, m_l$  está dada por

$$(3) \quad \chi(\mathcal{O}) = \chi(|\mathcal{O}|) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) - \sum_{j=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_j}\right).$$

Notemos que  $\chi(\mathcal{O}) \leq \chi(|\mathcal{O}|)$ .

Clasificaremos a las orbificies compactas desde un punto de vista geométrico análogo a la proposición 35.



(20)

Proposición 52: Clasificación de Orbificies compactas.

- a) Una orbificie compacta  $\mathcal{O}$  es mala o posee una estructura elíptica si  $\chi(\mathcal{O}) > 0$ .
- b) Una orbificie compacta  $\mathcal{O}$  posee una estructura euclidiana si  $\chi(\mathcal{O}) = 0$ .
- c) Una orbificie compacta  $\mathcal{O}$  posee una estructura hiperbólica si  $\chi(\mathcal{O}) < 0$ . Este inciso no lo demostraremos nosotros; pero en [Th] se puede encontrar una demostración del mismo.

Demostración: a) Número de Euler positivo.

Supongamos  $\chi(\mathcal{O}) > 0$ . Por (3),  $\chi(|\mathcal{O}|) > 0$ . Como  $|\mathcal{O}|$  es una superficie compacta posiblemente con frontera, entonces  $|\mathcal{O}|$  es homeomorfa a  $S^2$ ,  $\mathbb{P}^2$  o  $D^2$  ya que son las únicas superficies compactas con característica de Euler positiva (prop. 13, 14, 15).

Supongamos  $|\mathcal{O}| = S^2$ . Como  $S^2$  no tiene frontera, entonces  $\Sigma_0$  sólo posee puntos elípticos (prop. 99) y estos no pueden ser más de tres por (3). Si  $\Sigma_0$  consta de un solo punto, entonces  $\mathcal{O}$  es mala (ej. 19).

Si  $\Sigma_0$  consta de dos puntos  $\{s, t\}$  cuyos grupos asociados son  $\mathbb{Z}_n$  y  $\mathbb{Z}_m$  respectivamente con  $n, m \geq 2$ , entonces hay dos casos; i) Si  $n \neq m$  entonces  $\mathcal{O}$  es mala (ej. 19). ii) Si  $n = m$ , entonces  $\mathcal{O}$  es equivalente a  $\mathbb{Z}_n \backslash S^1$  donde  $\mathbb{Z}_n$  está generado por una rotación de orden  $n$  alrededor de  $s$  y  $t = -s$ .

Si  $\Sigma_0$  consta de tres puntos  $s, t, u$ , entonces los grupos

asociados  $\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n$  y  $\mathbb{Z}_{\bar{n}}$  respectivamente con  $m, n, \bar{n} \geq 2$  tienen ordenes  $m, n, \bar{n}$  tales que  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\bar{n}} > 1$  por (3). Entonces, existe un triángulo  $\Delta$  en  $S^2$  tal que  $\mathcal{O}$  es equivalente al cociente  $\Omega^2(m, n, \bar{n}) / S^3$ .

| $\chi(\mathcal{O}) > 0$                    | Plano                       | Elíptica   |
|--|-----------------------------|--|
| $ \mathcal{O}  = S^2$                      | (n)                         | ( )  |
| $\Sigma_0$ sólo con tiene puntos elípticos | $(n_1, n_2), n_1 \bar{n}_2$ | $(n, n)$<br>$(z, z, n)$<br>$(z, 3, 3)$<br>$(z, 3, 4)$<br>$(z, 3, 5)$ |

Supongamos  $|\mathcal{O}| = \mathbb{R}P^2$ . Entonces, por (3),  $\Sigma_0$  consta de un solo punto elíptico de orden  $n \geq 2$  y  $\mathcal{O}$  es orbicubierta por  $S^3$  con dos puntos elípticos del mismo orden  $n$ .

| $\chi(\mathcal{O}) > 0$         | Elíptica |
|---------------------------------|----------|
| $ \mathcal{O}  = \mathbb{R}P^2$ | (n)      |
| $\Sigma_0 = \{x\}$              |          |

Supongamos  $|\mathcal{O}| = D^2$ . Entonces,  $\partial D^2 = S^1 \subset \Sigma_0$ . Si  $\Sigma_0 \neq \partial D^2$ , entonces, por (3) hay dos casos: i)  $\Sigma_0$  sólo posee un punto elíptico de orden  $n \geq 2$  y no posee esquinas. Entonces  $\mathcal{O}$  es orbicubierta por  $S^3$  con dos puntos elípticos del mismo orden  $n$ .

ii)  $\Sigma_0$  contiene un punto elíptico y una esquina. Entonces, por (3), el punto elíptico tiene orden  $z$  y la esquina tiene orden  $n \geq 2$ . Entonces  $\mathcal{O}$  es orbicubierta por  $S^3$  con tres puntos elípticos de ordenes  $z, z, n$ .

Si  $\Sigma_0 = \partial D^2$  entonces, por (3),  $\Sigma_0$  tiene a lo más tres esquinas. Si no posee  $\Sigma_0$  esquinas, entonces  $\mathcal{O}$  es orbicubierta por  $S^3$  (es. 14-b). Si  $\Sigma_0$  contiene una esquina de

orden  $n \geq 2$ , entonces  $\Theta$  es orbicubierta por  $S^2$  con un punto elíptico de orden  $n$  y  $\Theta$  es mala. Si  $\Sigma_\Theta$  sólo contiene dos esquinas de orden  $m, n \geq 2$ , entonces  $\Theta$  es orbicubierta por  $S^2$  con dos puntos elípticos de orden  $m, n$  y será mala si  $m \neq n$ . Si  $\Sigma_\Theta$  contiene tres esquinas de orden  $m, n, \tilde{n} \geq 2$  entonces, por (3),  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\tilde{n}} > 1$  por lo que existe un triángulo  $\Delta$  en  $S^2$  tal que  $\Omega(m, n, \tilde{n}) / S^2$  es equivalente a  $\Theta$ .

| $\chi(\Theta) > 0$  | Mala                         | Elíptica      |
|---------------------|------------------------------|---------------|
| $ \Theta  = D^2$    | $(; n)$                      | $()$          |
| (ptes elíp; esquín) | $(; n_1, n_2), n_1 \neq n_2$ | $(n)$         |
|                     |                              | $(2; n)$      |
|                     |                              | $(3; 2)$      |
|                     |                              | $(; n, n)$    |
|                     |                              | $(; 2, 2, n)$ |
|                     |                              | $(; 2, 3, 3)$ |
|                     |                              | $(; 2, 3, 4)$ |
|                     |                              | $(; 2, 3, 5)$ |

### b) Número de Euler cero.

Supongamos  $\chi(\Theta) = 0$ . Por (3),  $\chi(|\Theta|) \geq 0$ . Entonces,  $|\Theta|$  es  $S^2$ ,  $\mathbb{P}^2$ , el Toro, la botella de Klein, el cilindro o la banda de Moebius. Si  $|\Theta|$  es el Toro, la botella de Klein, el cilindro o la banda de Moebius, entonces  $\chi(|\Theta|) = 0$  y por (3),  $\Sigma_\Theta = \emptyset$ .

Supongamos  $|\Theta| = S^2$ . Entonces, como en (a),  $\Sigma_\Theta$  sólo contiene puntos elípticos y, por (3), sólo pueden ser tres o cuatro. Si son tres puntos elípticos de ordenes  $m, n, \tilde{n}$  entonces, por (3),  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\tilde{n}} = 1$ . Entonces, existe un triángulo  $\Delta$  en  $\mathbb{E}^2$  cuyos ángulos internos son  $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$  y  $\frac{\pi}{\tilde{n}}$  y  $\Theta$  es equivalente a  $\Omega(m, n, \tilde{n}) / S^2$ . Si  $\Sigma_\Theta$  posee cuatro puntos elípti-

cos, estos, por ( ), tienen todos orden dos y  $\mathcal{O}$  es equivalente al cociente  $H/\mathbb{E}^2$  donde  $H$  es el subgrupo que preserva la orientación del grupo  $G$  generado por las reflexiones en los cuatro lados de un rectángulo en  $\mathbb{E}^2$ .

| $\chi(\mathcal{O})=0$                    | Euclidiano  |
|--|---|
| $ \mathcal{O}  = T_0 \text{ o } 0$       | $\Sigma_0 = \emptyset$                                      |
| $ \mathcal{O}  = b, \text{ de Heuribus}$ | $\Sigma_0 = \emptyset$                                      |
| $ \mathcal{O}  = b, \text{ de Klein}$    | $\Sigma_0 = \emptyset$                                      |
| $ \mathcal{O}  = \text{cilindro}$        | $\Sigma_0 = \emptyset$                                      |
| $ \mathcal{O}  = S^2$                    | $(2, 3, 6)$<br>$(2, 4, 4)$<br>$(3, 3, 5)$<br>$(2, 2, 2, 2)$ |

Supongamos  $|\mathcal{O}| = D^2$ . Entonces  $\partial D^2 \subset \Sigma_0$ . Si  $\Sigma_0 = \partial D^2$ , entonces  $\Sigma_0$  tiene, por (3), sólo tres o cuatro esquinas. Si son tres, entonces sus órdenes  $m, n, \bar{n}$  son tales que  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\bar{n}} = 1$ . Entonces existe un triángulo  $\Delta$  en  $\mathbb{E}^2$  cuyos ángulos internos son  $\pi/m, \pi/n$  y  $\pi/\bar{n}$  y  $\mathcal{O}$  es equivalente a  $\mathbb{R}(m, n, \bar{n})/\mathbb{E}^2$ . Si son cuatro, entonces sus órdenes son todos dos y  $\mathcal{O}$  es equivalente a  $G/\mathbb{E}^2$  donde  $G$  es el grupo generado por las reflexiones en los cuatro lados de un rectángulo en  $\mathbb{E}^2$ .

Si  $\Sigma_0 \neq \partial D^2$  entonces, por (2),  $\Sigma_0$  contiene uno o dos puntos elípticos. Si  $\Sigma_0$  sólo contiene un punto elíptico  $s$ , entonces hay tres casos: (i) Si  $\beta_s = \mathbb{Z}_2$  entonces  $\Sigma_0$  contiene dos esquinas de orden 2 y  $\mathcal{O}$  es orbicubierta por  $S^2$  con cuatro puntos elípticos de orden 2.

(ii) Si  $\beta_s = \mathbb{Z}_3$ , entonces  $\Sigma_0$  posee una esquina de orden tres y  $\mathcal{O}$  es orbicubierta por  $S^2$  con tres puntos elípticos.

cos de orden tres.

iii) Si  $\beta_3 = \mathbb{Z}_9$  entonces  $\Sigma_0$  contiene una esquina de orden dos y  $\mathcal{O}$  es orbicubierta por  $S^2$  con tres puntos elípticos de ordenes 4, 4, 2.

Si  $\Sigma_0$  contiene dos puntos elípticos  $s, t$  entonces  $\beta_3 = \mathbb{Z}_2$  y  $\Sigma_0$  no contiene esquinas, por lo que  $\mathcal{O}$  es orbicubierta por  $S^2$  con cuatro puntos elípticos de orden dos.

Supongamos  $|\mathcal{O}| = \mathbb{P}^2$ . Entonces  $\Sigma_0$  contiene solamente dos puntos elípticos  $s, t$  con  $\beta_3 = \beta_2 = \mathbb{Z}_2$  y  $\mathcal{O}$  es orbicubierta por  $S^2$  con cuatro puntos elípticos de orden dos.

| $\chi(\mathcal{O}) = 0$        | Euclidiana       |
|--------------------------------|------------------|
| $ \mathcal{O}  = \mathbb{D}^2$ | ( ; 2, 3, 6 )    |
|                                | ( ; 2, 4, 4 )    |
|                                | ( ; 3, 3, 3 )    |
|                                | ( ; 2, 2, 2, 2 ) |
|                                | ( 2 ; 2, 2 )     |
|                                | ( 3 ; 3 )        |
|                                | ( 4 ; 2 )        |
|                                | ( 2, 2 ; )       |
| $ \mathcal{O}  = \mathbb{P}^2$ | ( 2, 2 )         |

## Bibliografía.

(65)

- [Al] P. Aleksandrov, "Combinatorial Topology", Graylock Press. 1956.
- [Ar] M. Armstrong, "Basic Topology", McGraw Hill. 1979.
- [Co] R. Courant, F. John, "Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático", Limusa. 1979.
- [Do] M. Do Carmo, "Differential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice Hall. 1976.
- [Fa] H. Farkas, I. Kra, "Riemann Surfaces", Springer Verlag. 1980.
- [Fo] L. Ford, "Automorphic Functions", McGraw Hill. 1929.
- [Ha] H. Hall, "Teoría de los Grupos", Trillas. 1979.
- [He] H. Herrlich, G. Strecker, "Category Theory, an introduction", Allyn and Bacon.
- [Ho] K. Hoffman, R. Kunze, "Algebra Lineal", Prentice Hall. 1981.
- [Hu] S. Hu, "Elements of General Topology", Holden-Day. 1969.
- [Ko] C. Kosniowski, "A First Course in Algebraic Topology", Cambridge University Press. 1980.
- [Mag] W. Magnus, "Noneuclidean Tessellations and Their Groups", Academic Press. 1979.
- [Me] H. Meschkowsky, "Noneuclidean Geometry", Academic Press. 1969.
- [Ol] J. Olivares, "Sobre el Teorema de Uniformización", Fac. de Ciencias, UNAM. 1986.
- [O'Neill] B. O'Neill, "Elementary Differential Geometry", Academic Press. 1966.
- [Re] E. Rees, "Notes on Geometry", Springer Verlag. 1983.
- [Ry] P. Ryan, "Euclidean and Non-Euclidean Geometry, An analytical approach", Cambridge University Press.
- [Sc.] P. Scott, "The Geometry of 3-Manifolds", London Mathematical Society. 1983.
- [Sh] L. Shively, "Introducción a la Geometría Moderna", Cecsá. 1980.
- [Sp] E. Spanier, "Algebraic Topology", McGraw Hill. 1966.
- [SpL] M. Spivak, "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry", Publish or Perish. 1979.
- [Th] W. Thurston, "The Geometry and Topology of Three-Manifolds", Princeton Univ. Press.
- [Ve] A. Venjovsky, "Introducción a la Geometría y Variedades Hiperbólicas", I. P. N. 1982.
- [Wo] J. Wolf, "Spaces of Constant Curvature", McGraw Hill. 1967.

- [Al] P. Aleksandrov, "Combinatorial Topology", Graylock Press. 1956.
- [Ar] M. Armstrong, "Basic Topology", McGraw Hill. 1979.
- [Co] R. Courant, F. John, "Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático", Limusa. 1979.
- [Do] M. Do Carmo, "Differential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice Hall. 1976.
- [Fa] H. Farkas, I. Kra, "Riemann Surfaces", Springer Verlag. 1980.
- [Fo] L. Ford, "Automorphic Functions", McGraw Hill. 1929.
- [Ha] M. Hall, "Teoría de los Grupos", Trillas. 1979.
- [He] H. Herrlich, G. Strecker, "Category Theory, an introduction", Allyn and Bacon.
- [Ho] K. Hoffman, R. Kunze, "Algebra Lineal", Prentice Hall. 1981.
- [Hu] S. Hu, "Elements of General Topology", Holden-Day. 1969.
- [Ko] C. Kosniowski, "A First Course in Algebraic Topology", Cambridge University Press. 1980.
- [Mag] W. Magnus, "Noneuclidean Tesselations and Their Groups", Academic Press. 1979.
- [Ma] Y. Matsumoto, J. Montesinos-Amilibia, "A Proof of Thurston's Uniformization Theorem of Geometric Orbifolds", versión preliminar.
- [Me] H. Meschkowsky, "Noneuclidean Geometry", Academic Press. 1969.
- [Mo] J. Montesinos-Amilibia, "Classical Tesselations and Three Manifolds", Springer Verlag. 1987.
- [Ol] J. Olivares, "Sobre el Teorema de Uniformización", Fac. de Ciencias, UNAM. 1986.
- [On] B. O'Neill, "Elementary Differential Geometry", Academic Press. 1966.
- [Re] E. Rees, "Notes on Geometry", Springer Verlag. 1983.
- [Ry] P. Ryan, "Euclidean and Non-Euclidean Geometry, An analytical approach", Cambridge University Press.
- [Sc] P. Scott, "The Geometry of 3-Manifolds", London Mathematical Society. 1983.
- [Sh] L. Shively, "Introducción a la Geometría Moderna", Ccesa. 1980.
- [Spa] E. Spanier, "Algebraic Topology", McGraw Hill. 1966.
- [Spi] M. Spivak, "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry", Publish or Perish. 1979.
- [Th] W. Thurston, "The Geometry and Topology of Three-Manifolds", versión preliminar.
- [Ve] A. Verjovsky, "Introducción a la Geometría y Variedades Hiperbólicas", I.P.N. 1982.
- [Wo] J. Wolf, "Spaces of Constant Curvature", McGraw Hill. 1967.