



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

25

28

**Inestabilidades como
generadoras de
estructura en el
Medio Interestelar**

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

P r e s e n t a:

Adriana Gazol Patiño

México, D. F.

1993

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

I. Introducción.....	1
II. Inestabilidad Gravitacional.....	7
Análisis de Estabilidad.....	7
Desarrollos Posteriores.....	11
III. Inestabilidad Térmica.....	19
Análisis de Estabilidad.....	19
Desarrollos Posteriores.....	30
IV. Inestabilidad Magnética.....	34
Análisis de Estabilidad.....	34
Desarrollos Posteriores.....	47
Rayos C6smicos.....	47
Rotaci6n Diferencial.....	49
Simulaciones Num6ricas.....	49
Puntos D6biles de la Inestabilidad de Parker.....	50
V. An6lisis de Estabilidad en un Medio no Homog6neo.....	51
Antecedentes.....	51
Turbulencia.....	53
Definiciones.....	53
Cascadas Turbulentas y Formas del Espectro.....	55
Estabilidad Gravitacional de un Medio no Homog6neo en Reposo.....	57
Estabilidad Gravitacional de un Medio no Homog6neo, Turbulento.....	59
VI. Conclusiones.....	68
Referencias.....	72

AGRADECIMIENTOS

A quienes con tanto cariño y paciencia me han enseñado a aprender y me han transmitido el placer por hacerlo, así como a todos los que me han hecho creer en mí.

Familia, Remy, Amigos y Profesores. Muchas Gracias.

Capítulo I

Introducción

La formación de estructura en el medio interestelar de nuestra galaxia es un problema fundamental en nuestra comprensión de la evolución galáctica que continúa abierto (Elmegreen 1993). El medio interestelar se encuentra en un estado altamente complejo y dista mucho de ser uniforme o estacionario. Existen suficientes evidencias observacionales, sobre todo en longitudes de onda milimétricas, como para poder considerar al medio interestelar como un medio turbulento (Scalo 19..). Desde el punto de vista más global, es generalmente aceptado (ver e.g. Cox 1990, Friberg et al. 1990) que en el medio interestelar coexisten tres fases en equilibrio de presión: gas neutro frío y denso, gas neutro o ionizado tibio y diluído, y gas ionizado caliente y muy diluído.

La zona de menor densidad y mayor temperatura ($\sim 2 \times 10^6$ K) es la llamada *corona galáctica*, que se encuentra alejada del plano central de la galaxia ($|z| \gtrsim 1500$ pc). En esta región se piensa que el material galáctico y los rayos cósmicos fluyen hacia el exterior, mientras que el material extragaláctico entra. No se tiene un conocimiento muy completo de esta zona, aunque el hecho

de su débil emisión en rayos X constituye una importante restricción para los modelos que la describen (Cox 1990).

Más cerca del plano central de la galaxia ($100 \text{ pc} \lesssim |z| \lesssim 1500 \text{ pc}$) se encuentra un disco grueso, denominado *capa extranubes*. La capa extranubes además, está permeada por rayos cósmicos y un campo magnético muy intenso. Entre la corona galáctica y la capa extranubes se ha propuesto la existencia de una zona de transición, en la que se cree que el flujo de energía hacia el interior de la galaxia ilumina al gas que se encuentra a mayores densidades. Esta zona está caracterizada por un alto grado de ionización así como las elevadas temperaturas ($T \sim 10^4 \text{ K}$) que se observan, requieren cantidades extraordinarias de energía cuyo origen no está determinado. En la zona extranubes hay una componente de gas neutro y otra de gas ionizado, la primera con una densidad $\bar{n}_{HI} \sim 0.1 \text{ cm}^{-3}$ y una escala de altura de 400 a 500 pc, y la segunda con $\bar{n}_{HII} \sim 0.025 \text{ cm}^{-3}$ y una escala de altura de $\sim 1500 \text{ pc}$. El conocimiento de esta capa tampoco es completo, faltando por conocer entre otras cuestiones, la tasa de supernovas para alturas z grande sobre el plano central, los mecanismos de transporte y escape de rayos cósmicos, la configuración del campo magnético, el grado de mezclado entre las componentes neutra y ionizada, el origen de la energía necesaria para la ionización, la hidrostática asociada a esta zona y el efecto de su presencia en la formación de estructuras tales como “superburbujas”, “chimeneas” y “fuentes” (Cox 1990).

En el plano central galáctico hay un disco delgado ($|z| \lesssim 100 \text{ pc}$) y frío ($T \sim 80 \text{ K}$) poblado por nubes, al cual se le denomina *zona de nubes*. Entre los componentes de esta zona se encuentran nubes de gas atómico (HI), nubes de gas molecular (H_2), envolventes de baja densidad alrededor de nubes, medio internubes, burbujas calientes, rayos cósmicos y un campo magnético intenso cuya componente en la dirección paralela al disco galáctico es muy significativa. Se piensa que la presencia de este campo magnético puede estabilizar la zona de nubes contra los efectos destructivos

Tipo	$R(\text{pc})$	$n(\text{cm}^{-3})$	$M(M_{\odot})$	$\Delta v(\text{km s}^{-1})$	$T(\text{K})$	Núcleos y Estrellas
Difusas	0.3-3	30-500	0.5-100	0.7-1.5	10?	Baja masa
Oscuras	3-10	10^2-3	10^3-4	1-3	10	Baja masa
Gigantes	20-100	10-300	10^5-6	5-15	10-20	Masivas y Baja Masa

Tabla 1.1. Características de las nubes moleculares basadas en la línea $J=0 \rightarrow 1$ de ^{12}CO .

Tomada de Myers (1990).

de las explosiones de supernovas. Así mismo se cree que existe un balance de presión térmica entre todos los componentes, por lo que el medio neutro internubes debe ocupar una fracción grande del volumen total (Cox 1990).

Algunos de los problemas con respecto a la capa entre nubes que continúan sin resolverse incluyen la localización de sitios de aceleración de rayos cósmicos, el mecanismo mediante el cual se mantiene el grado de ionización en el medio entrenubes, ya que se necesita más energía de la que le pueden proporcionar las estrellas el tipo O, y el proceso de calentamiento de las nubes difusas (Cox 1990).

Una componente del disco central de la galaxia de particular interés para este trabajo son las nubes moleculares, es decir, los conjuntos de polvo y gas interestelar con una componente molecular importante y cuya densidad media excede de la de las fases neutra y ionizada. Cuando la densidad columnar de una región crece suficientemente, se empiezan a formar moléculas de hidrógeno, y una

Tipo	$R(\text{pc})$	$n(\text{cm}^{-3})$	$M(M_{\odot})$	$\Delta v(\text{km s}^{-1})$	$T(\text{K})$	Estrellas
Baja Masa	0.05-0.2	10^4-5	0.3-10	0.2-0.4	10	T Tauri
Masivas grande	0.3-0.6	10^4-5	$30-10^4$	1-2	10-30	OB
pequeña	0.01-0.03	10^6-7	0.3-300	1-3	30-1000	OB

Tabla 1.2. Características de los núcleos densos basadas en la línea $(J, K)=(1,1)$ del NH_3 .

Tomada de Myers (1990).

vez que se han formado éstas se pueden empezar a formar otras moléculas. Aunque las moléculas mismas se protegen de la radiación ultravioleta impidiendo el paso de esta a ciertas profundidades, los granos de polvo también las protegen de la desintegración por radiación ultravioleta, por lo que el contenido de gas molecular de una nube depende de la metalicidad de esta (Friberg y Hjalmarsen 1990). Las nubes moleculares se clasifican, a groso modo, en: oscuras, difusas y gigantes; cuyas características se resumen en la tabla 1.1.

A su vez en el interior de las nubes moleculares existen subestructuras con densidades mayores que la de la nube dentro de la que se encuentran. Entre estas estructuras se encuentran los núcleos densos, que a su vez se clasifican en núcleos masivos y núcleos de baja masa. La distribución y cantidad de ellos varía en las distintas nubes. En la tabla 1.2 se resumen algunas de las propiedades de los núcleos densos; nótese que los núcleos densos masivos se clasifican en pequeños y grandes dependiendo de la apertura de antena con la que han sido observados (Myers 1990).

Un aspecto muy importante en la comprensión de la estructura del medio interestelar, es el

conocimiento de los mecanismos que la generan. Un primer paso para entender como se distribuyen las nubes y sus subestructuras densas es conocer los procesos que las forman. Sin embargo, esto no es sencillo debido a que hay varios procesos físicos involucrados: ondas de densidad espiral, dinámica galáctica, explosiones de supernova, fotoionización y disociación, etc; y también debido a la diversidad de estructuras observadas: filamentos, agujeros, túneles, núcleos de baja masa, etc. De cualquier forma, han sido propuestos varios mecanismos como agentes importantes en la formación de nubes densas, entre los que se encuentran: procesos dinámicos, coagulación, fragmentación, expansión alrededor de fuentes estelares e inestabilidades. Los ingredientes básicos en dichos mecanismos son: estrellas como fuentes de energía, autogravedad importante en escalas grandes, disipación de energía cinética en escalas pequeñas, intercambio de momento entre regiones lejanas por medio de propagación de ondas magnéticas y ondas de densidad que comprimen al gas interestelar en frentes de choque.

En la primera parte de este trabajo se revisará, en particular, el papel de algunas inestabilidades en la formación de los diversos tipos de nubes en el medio interestelar. Los análisis de estabilidad en general, se clasifican en términos de los procesos físicos que consideran. Para el caso particular de la formación de estructura en el medio interestelar, las inestabilidades gravitacional, térmica y magnética, con algunas modificaciones a los análisis originales realizados por Jeans (1902), Field (1965) y Parker (1966) respectivamente, se cuentan entre los mecanismos más generalmente aceptados como responsables. A esta revisión se dedicarán los capítulos II, III, y IV del presente trabajo, respectivamente.

La segunda parte de este trabajo presentará, por otra parte, un estudio de un caso particular de la inestabilidad gravitacional en un medio no homogéneo con un campo de velocidades turbulento, ya que, como se verá con detalle más adelante, el análisis tradicional sobre la inestabilidad

gravitacional no explica el colapso de núcleos densos en nubes moleculares gravitacionalmente estables, hecho demostrado observacionalmente por Myers (1986). Ha habido varios intentos por resolver este problema por medio de modificaciones al análisis original. Entre estos intentos, se encuentra el realizado por Bonazzola et al. (1987) en el que consideran las evidencias observacionales sobre la existencia de movimientos turbulentos en el medio interestelar, para incluir en su análisis un campo de velocidades turbulento caracterizado por un espectro de potencia. El resultado que se obtiene en dicho trabajo, como se discutirá más adelante, es un resultado muy interesante capaz de resolver el problema mencionado anteriormente, pero que requiere condiciones poco plausibles para la turbulencia en el medio interestelar. En el análisis que aquí se presenta, se encuentran resultados que relajan las condiciones para la inestabilidad hacia comportamientos más cercanos a los que se observan.

Capítulo II

Inestabilidad Gravitacional

1) Análisis de Estabilidad

La inestabilidad gravitacional fue estudiada por primera vez por Jeans en 1902. El análisis realizado por Jeans consiste en buscar bajo qué condiciones las perturbaciones en la densidad, en un gas inicialmente homogéneo, se amplifican por efecto de su autogravedad. En el trabajo original se considera solamente la presencia de fuerzas de autogravedad y de presión térmica. Para estudiar cada tipo particular de objeto o de proceso se han tenido que incluir nuevos elementos al análisis original y en algunos casos se ha tratado de modificar el análisis con el fin de que sus resultados concuerden con las observaciones. En esta sección se revisará el análisis gravitacional en su versión más simple, es decir en la forma en que lo realizó Jeans.

Se supone un medio infinito, homogéneo y estático. El medio estará descrito por las ecuaciones hidrodinámicas básicas y por la ecuación de Poisson, que describe la autogravedad del medio.

Dichas ecuaciones se escriben a continuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{Ecuación de Continuidad.} \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \rho \nabla \phi + \nabla P = 0 \quad \text{Ecuación de Momento.} \quad (2)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad \text{Ecuación de Poisson.} \quad (3)$$

Donde ϕ es el potencial gravitacional y G la constante de gravitación. Se supone que inicialmente el gas se encuentra en equilibrio, es decir, que la fuerza de atracción gravitacional que tiende a generar un colapso, está balanceada con la fuerza producida por la presión térmica, que actúa en dirección opuesta. Para realizar un análisis de estabilidad el estado inicial de equilibrio debe ser perturbado. Así pues, se escriben las variables del problema en términos de su valor de equilibrio más una perturbación, que es muy pequeña:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad (4a)$$

$$P = P_0 + P_1, \quad (4b)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi_1, \quad (4c)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1, \quad (4d)$$

donde la parte con subíndice 0 indica el valor de la variable cuando el gas se encuentra en equilibrio, y la parte con subíndice 1 el valor de la perturbación a cada variable. Nótese que se ha supuesto que en el estado de equilibrio el gas se encuentra en reposo, de manera que $\vec{v}_0 = 0$. Se quiere conocer la evolución de las perturbaciones en el tiempo, ya que si estas crecen indefinidamente entonces el balance inicial entre fuerza de gravedad y fuerza de presión se romperá, produciendo un colapso o una expansión continuada. Las ecuaciones para la evolución de las perturbaciones se obtienen sustituyendo la forma (4) para las variables en las ecuaciones (1) a (3). Como se supone que las perturbaciones son pequeñas, se pueden despreciar los términos no lineales. Como ejemplo

se muestra a continuación el método anterior en la ecuación de momento (2). Sustituyendo (4) se encuentra

$$(\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\rho_0 + \rho_1) \bar{v}_1 \cdot \nabla \bar{v}_1 + (\rho_0 + \rho_1) \nabla(\phi_0 + \phi_1) + \nabla(P_0 + P_1) = 0.$$

Reteniendo solamente los términos lineales en las perturbaciones y utilizando la ecuación (2) para eliminar los términos que incluyen solamente las variables en equilibrio, se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \phi_1 + \nabla P_1 = 0.$$

Si se hace lo mismo con las dos ecuaciones restantes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales para las perturbaciones:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \bar{v}_1) = 0, \quad (5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \phi_1 + \nabla P_1 = 0, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \phi_1 - 4\pi G \rho_1 = 0. \quad (7)$$

Suponiendo que el gas se comporta adiabáticamente, la ecuación de estado linealizada se escribe como

$$P_1 = c^2 \rho_1, \quad (8)$$

donde c es la velocidad adiabática del sonido en el medio sin perturbar, definida como $c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$.

Para resolver el sistema (5)-(7), se utiliza (8) para reescribir (6) de la siguiente manera:

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \phi_1 + c^2 \nabla \rho_1 = 0. \quad (9)$$

Tomando la divergencia de (9) se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \bar{v}) + \rho_0 \nabla^2 \phi_1 + c^2 \nabla^2 \rho_1 = 0. \quad (10)$$

Finalmente de (5),(7) y (10) se obtiene la siguiente ecuación para ρ_1

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - 4\pi G \rho_0 \rho_1 - c^2 \nabla^2 \rho_1 = 0, \quad (11)$$

que es una ecuación lineal. Por lo tanto, se puede proponer una solución con forma exponencial

$$\rho_1 = A \exp i(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en (11) se obtiene la siguiente relación de dispersión

$$\omega^2 = c^2 \kappa^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (13)$$

Para que la perturbación en la densidad crezca exponencialmente con el tiempo se necesita que ω tenga una parte imaginaria. De la ecuación (13) se puede ver que ω es imaginario si

$$\kappa^2 < \frac{4\pi G \rho_0}{c^2}, \quad (14)$$

es decir,

$$\lambda^2 > \frac{\pi c^2}{G \rho_0}, \quad (15)$$

donde $\lambda = \frac{2\pi}{\kappa}$ es la longitud de onda del modo $\vec{\kappa}$. Esto significa que todas las perturbaciones con longitudes de onda mayores que $\lambda_J = \left(\frac{\pi c^2}{G \rho_0}\right)^{1/2}$ son inestables. La longitud de Jeans, λ_J , da un tamaño mínimo a partir del cual una nube se puede colapsar, ya que sólo en nubes con escalas características mayores que λ_J se podrán producir perturbaciones con longitudes de onda suficientemente grandes. A partir de la longitud de Jeans se define una masa crítica $m_J = \rho_0 \lambda_J^3$, conocida como masa de Jeans:

$$m_J = \frac{\pi c_0^2}{G \rho^{1/3}}.$$

Es importante hacer notar que el en análisis anterior hay una inconsistencia. Se ha supuesto que inicialmente $\vec{v}_0 = 0$, $P_0 = cte$ y $\rho_0 = cte$; en ese caso la ecuación (2) implica que $\nabla \phi_0 = 0$

por lo tanto, de la ecuación (3), se tiene que $\nabla^2 \phi_0 = 0 = 4\pi G \rho_0$. Esto significa que el análisis sólo es consistente si $\rho_0 = 0$; este caso no corresponde a ningún sistema físico. Sin embargo, existen sistemas simples que permiten un análisis de estabilidad gravitacional autoconsistente. Un ejemplo es el de un disco infinito. Se considera que en el estado inicial de equilibrio $\vec{v} = 0$, $\rho_0 = \rho(z)$ y $\phi_0 = \phi(z)$, z es la dirección perpendicular al disco, en x y y la configuración se extiende hasta $\pm\infty$. Se encuentra el siguiente resultado (Bowers, et al 1984)

$$\kappa_c^2 = \frac{2\pi G \rho_0(0)}{c_0^2}. \quad (16)$$

Por lo tanto,

$$\lambda_j^2 = \frac{2\pi c_0^2}{G \rho_0(0)}. \quad (17)$$

Los resultados (16) y (17) difieren de los valores críticos para el caso de un medio uniforme (condiciones (14) y (15)) sólo por un factor de 2. Por lo tanto, a pesar de ser inconsistente, el cálculo original arroja resultados que no se encuentran muy alejados de los obtenidos con un cálculo autoconsistente.

2) Desarrollos Posteriores.

El trabajo original de Jeans ha sido utilizado como base para numerosos trabajos posteriores en los que se consideran procesos físicos adicionales. Algunos de estos trabajos, así como sus resultados, se mencionarán y se discutirán brevemente a continuación.

En 1953 Chandrasekhar y Fermi incluyeron en el análisis de estabilidad para una nube esférica la presencia de campos magnéticos, encontrando que el criterio para la existencia de inestabilidad gravitacional en un medio infinito y homogéneo no se modifica, por lo que aún en presencia de campos magnéticos se sigue cumpliendo el criterio (14). Más adelante se incluyeron también rotación (Chandrasekhar 1954, Bel y Schatzman 1953), rotación con campos magnéticos (Chandrasekhar

1954, Sharma y Singh 1988) y geometrías bidimensionales (Ledoux 1951, Simon 1965). En todos estos trabajos se encuentra básicamente el mismo resultado, un tamaño mínimo a partir del cual existe inestabilidad y, cuya masa típica es mayor que la masa típica de las nubes moleculares gigantes. La escala característica de la inestabilidad gravitacional para un medio infinito uniforme y politrópico con $\rho \sim 1 \text{ cm}^{-3}$, $c \sim 7 \text{ kms}^{-1}$, típicas del medio interestelar tibio (...), resulta ser $\frac{c}{(G\rho)^{1/2}} \sim 500 \text{ pc}$ y $M_J \sim 10^7 M_\odot$, lo cual es mucho mayor que la masa de una nube molecular gigante ($10^5 M_\odot$), por lo que aparentemente la inestabilidad gravitacional por sí misma es incapaz de explicar la formación de nubes moleculares a partir del medio interestelar frío. Se requiere incluir procesos que permitan el enfriamiento del medio.

También se han incluido geometrías planas y rotación (Safronov 1960, Toomre 1964). Toomre estudia la estabilidad gravitacional de un sistema estelar arbitrario muy plano. Se considera que inicialmente el sistema rota manteniendo aproximadamente un equilibrio entre autogravedad y fuerza centrífuga. En este sistema aparecen los siguientes mecanismos de estabilización: a) las fuerzas originadas por la rotación del sistema; b) la presión que resulta de los movimientos aleatorios de los elementos individuales de masa y, c) el hecho de que una altura considerable del disco puede reducir la aceleración producida por la fuerza de gravedad. El último efecto no es considerado, ya que se estudia un disco muy delgado. Se encuentra que un disco casi plano es estable ante la tendencia a formar condensaciones a lo largo de su propio plano, siempre que la velocidad cuadrática media de sus componentes sea suficientemente grande en la dirección paralela al plano. Toomre calcula que en la vecindad solar la dispersión de velocidades radiales cuadrática media mínima para que no haya inestabilidad es de entre 20 y 35 kms^{-1} . Toomre (1964), también encuentra un criterio de estabilidad para un disco que es apartado del estado de equilibrio por medio de perturbaciones con simetría axial. El criterio de Toomre es:

$$Q \equiv \frac{kc}{\pi\sigma G} < 1,$$

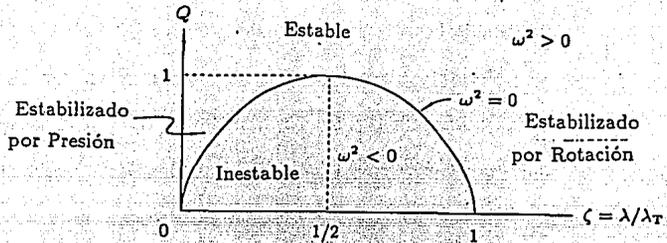


Figura 2.1. Escalas Estables e Inestables Según el Criterio de Toomre. $\lambda_T \equiv \frac{4\pi^2 G\sigma}{k^2}$.

tomada de Shu 1992.

donde k es la llamada frecuencia epicíclica, c la velocidad del sonido y σ la densidad columnar de masa en el disco. La frecuencia epicíclica es una manifestación del carácter restaurador de las fuerzas originadas por la rotación y una consecuencia de la conservación del momento angular y esta definida como

$$k^2 \equiv \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^2 \Omega)^2$$

, donde r es el radio y Ω la velocidad angular. En el análisis de estabilidad se encuentra que los agentes estabilizadores presión y rotación diferencial actúan en escalas pequeñas y grandes, respectivamente; por lo tanto, la combinación de estos agentes dada por el producto kc va a tener influencia sobre todas las escalas.

En la figura 2,1 se muestra una gráfica de Q contra longitud de onda λ . Cuando $Q <$

La longitud de onda de las perturbaciones es demasiado pequeña como para que éstas sean estabilizadas por rotación y demasiado grande como para ser estabilizadas por la presión. Por lo tanto hay inestabilidad. En un disco plano en presencia de rotación y con campo magnético, las escalas inestables resultan ser $\lambda \sim 1 - 4$ kpc con $M \sim 10^7 M_{\odot}$ y el colapso ocurre en la dirección principal del campo. El tiempo de colapso para estas escalas es $t \sim 10^8$ años. Esta inestabilidad es independiente de las tasas de rotación y deslizamiento (Elmegreen 1987). Este resultado es análogo al encontrado por Chandrasekhar (1964) y Lynden Bell (1966). Otros trabajos orientados en esta dirección fueron realizados por Goldreich y Lynden Bell (1965), quienes consideran un disco plano con deslizamiento y estudian la estabilidad entre fuerzas de Coriolis y autogravedad, encontrando que la formación de nubes requiere de perturbaciones que no tengan simetría axial para que así el gas pueda fluir en dirección acimutal.

Más recientemente, Jog y Salomon (1984) han estudiado la estabilidad de un sistema similar al de Goldreich y Lynden Bell (1965), pero considerando que el disco está formado por gas y estrellas. Se obtuvo que en este sistema una inestabilidad tipo brazos espirales puede hacer crecer localmente la densidad del gas por un factor de ~ 3.5 . Después de este incremento en la densidad el gas puede llegar a ser suficientemente inestable como para colapsarse en complejos de nubes. Como el gas tiene una dispersión de velocidades menor que las estrellas y es más compresible, la presencia del gas frío con autogravedad hace que el fluido de estrellas sea menos estable de lo que sería si estuviera solo. Balbus y Cowie (1985) estudian la estabilidad dinámica de un disco de gas politrópico en un potencial espiral fijo. Consideran la presencia de un choque en el flujo, así como los efectos de la altura finita del disco. Las consecuencias de la presencia del choque son varias: por un lado el choque hace que la densidad aumente después de éste. Dicho aumento puede ser suficientemente grande como para causar crecimientos significativos de perturbaciones. Balbus y Cowie (1985) demuestran que el proceso mencionado anteriormente afecta principalmente la

evolución de perturbaciones con longitudes de onda grandes. Por otro lado, la reexpansión del flujo debida a la distorsión de las líneas de flujo causada por el choque, tiende a dificultar el crecimiento de las perturbaciones en la densidad. Este proceso afecta a perturbaciones con cualquier longitud de onda. Se encuentra un parámetro que caracteriza la competencia entre presión y rotación por una parte, y autogravedad por la otra de manera similar al parámetro de Toomre pero considerando el efecto de que la frecuencia epicyclica k se incrementa cuando el fluido se comprime debido al choque:

$$Q_{SP} \equiv \frac{kc}{\pi G(\sigma_m \sigma_0)^{1/2}},$$

donde σ_0 y σ_m son los valores inicial y a compresión máxima de la densidad columnar, respectivamente. La condición $Q_{SP} < 1$ es necesaria, aunque no suficiente, para que haya un crecimiento considerable de perturbaciones en la densidad. Sin embargo, estos trabajos, así como el de Toomre (1964) mencionado anteriormente, tienen la limitación de que son aplicables sólo a inestabilidades unidimensionales en el disco galáctico, es decir, a anillos concéntricos o a estructuras colapsadas a lo largo de los brazos espirales. La formación de nubes requiere de por lo menos dos dimensiones en el disco galáctico, lo cual introduce efectos de deslizamiento. El parámetro Q puede ser utilizado en análisis bidimensionales aunque, sin embargo, deja de proporcionar un criterio absoluto, ya que pueden existir inestabilidades causadas por deslizamiento aunque el fluido sea radialmente estable (Elmegreen 1990).

Como mencionamos anteriormente, el problema fundamental de la inestabilidad gravitacional para explicar la formación de nubes moleculares, es que las masas características que se deducen para las regiones inestables son mucho mayores que las masas típicas observadas de las nubes moleculares, por lo que se requiere de procesos secundarios. De hecho, durante mucho tiempo, la inestabilidad gravitacional no se consideró como un mecanismo de formación de nubes, sino como un mecanismo para la formación de complejos de éstas. La inestabilidad gravitacional explica el origen

de complejos de nubes gigantes con masas comparables a la masa clásica de Jeans ($10^7 M_{\odot}$) en el disco galáctico (Elmegreen 1987). Cuando se encontraron nubes con masas comparables a su masa de Jeans (es decir, con dimensiones características mayores) en discos de otras galaxias, la inestabilidad gravitacional comenzó a ser tomada en cuenta como mecanismo para la formación de nubes. Algunas de las sugerencias en este sentido han sido hechas por Boulesteix et. al. (1974), Elmegreen (1979), Cowie (1981), Viallefond, Gross y Allen (1982), Elmegreen y Elmegreen (1983), Jog y Salomon (1984), Baibus y Cowie (1985) y Tomisaka (1985). También se ha propuesto (Elmegreen y Elmegreen 1983) que la formación estelar puede ocurrir en regiones con masas características de $10^7 M_{\odot}$ y escalas de entre 1 y 2 kpc, y que el hecho de que $10^5 M_{\odot}$ aparezca como la escala común de las nubes moleculares es un efecto de selección observacional (Stark y Blitz 1978), debido a que aparentemente $10^5 M_{\odot}$ es el tamaño mínimo para formar una estrella de tipo O y como el número de nubes moleculares por unidad de volumen es una función que decrece rápidamente con la masa de las nubes (Stark 1979; Solomon, Sanders y Scoville 1979; Liszt, Xiang y Burton 1981), entonces $10^5 M_{\odot}$ es la masa más común para una nube cercana a una asociación OB.

Otra posible explicación fue propuesta por Cowie (1981), quien sugiere que las colisiones entre nubes, en los brazos con densidad espiral, enfrían el fluido. De esta forma la dispersión de velocidades decrece provocando que la masa de Jeans decrezca hasta valores cercanos a los observados. Este enfoque ha sido ampliado por Tomisaka (1985), Elmegreen (1989a y 1989b). En el trabajo de Tomisaka se estudia la respuesta del conjunto de nubes al potencial gravitacional galáctico. Se toma como base el modelo de coagulación, en el que las nubes pequeñas colisionan y crecen formando nubes cada vez más grandes, estudiándose las inestabilidades gravitacional y térmica de este sistema. Tomisaka toma en cuenta los siguientes procesos: formación de nubes moleculares gigantes por medio de colisiones inelásticas, destrucción de nubes moleculares gigantes por medio de eventos activos como formación estelar, explosiones de supernova y vientos estelares

y la pérdida de velocidad debida a colisiones disipativas. Se llega a la conclusión de que algunas de las grandes condensaciones de nubes se pueden formar en la región de los brazos, por medio de la inestabilidad gravitacional. Elmegreen (1989a), utiliza la ecuación de la energía dependiente del tiempo para deducir una relación de dispersión para la inestabilidad gravitacional en un medio que se enfría debido a las colisiones entre nubes. Se encuentra que la inestabilidad gravitacional se extiende hasta escalas con longitudes características mucho menores que en el análisis convencional de Jeans. Se sugiere que la inestabilidad gravitacional puede formar nubes con entre 10^2 y $10^7 M_{\odot}$, aunque la dispersión de velocidades sea grande. Cuando se incluyen además deslizamiento, rotación y un campo magnético acimutal (Elmegreen 1989b), se encuentra que el medio es inestable en todas las escalas de longitud característica menor que la trayectoria libre media de colisiones entre nubes. En este caso el colapso ocurre con tasas de crecimiento parecidas a las de la inestabilidad gravitacional convencional, para masas entre 10^3 y $10^7 M_{\odot}$.

La inestabilidad de Jeans tampoco resulta satisfactoria para explicar la formación de subestructuras en el interior de las nubes moleculares, es decir, regiones con temperaturas de alrededor de 10 K y densidades mayores que 10^2 cm^{-3} . En este caso la inestabilidad de Jeans predice que todas las nubes moleculares con masa $M \gtrsim 100 M_{\odot}$, radio $R \gtrsim 1 \text{ pc}$, y temperatura cinética $T \lesssim 30 \text{ K}$ son gravitacionalmente inestables. Sin embargo las observaciones muestran que son los núcleos densos con poca masa ($M \gtrsim 3 M_{\odot}$) en donde se forman las estrellas, mientras que no hay evidencia de colapso para las nubes dentro de las que se encuentran (Myers 1987). En un intento de resolver este problema, Bonazzola et. al.(1987) han incluido dentro del análisis el carácter turbulento del campo de velocidades en el medio interestelar. Se encuentra un nuevo criterio de inestabilidad, el cual revierte el criterio de Jeans para espectros de potencia del campo de velocidades suficientemente inclinados.

Es importante mencionar que la inestabilidad de Jeans se aplica en muchos otros campos de la astrofísica. Por ejemplo, en estudios de cosmología se analiza el caso de un medio en expansión (Kolb y Turner 1990). Se encuentra que dicha expansión frena el crecimiento exponencial de la inestabilidad, haciendo que su crecimiento esté gobernado por una ley de potencia. También se encuentra que el crecimiento de perturbaciones lineales se inhibe en un Universo dominado por radiación o por curvatura. Esto se debe a que el crecimiento de las perturbaciones está descrito por una ley de potencia y en las épocas de dominio de la radiación y curvatura la tasa de expansión es mayor de lo que sería si estuviera presente solamente materia, por lo que se frena el crecimiento de las perturbaciones.

Capítulo III

Inestabilidad Térmica

1) Análisis de Estabilidad.

La inestabilidad térmica fue estudiada por Field en 1965. Este tipo de inestabilidad ya había sido propuesta anteriormente por Parker en 1953, para entender las prominencias solares, y por Zanstra en 1955. En esta sección describiremos el análisis de estabilidad lineal realizado por Field en 1965.

Se supone un medio infinito, uniforme y estático, con densidad inicial ρ_0 y temperatura T_0 . Las ecuaciones hidrodinámicas que describen este medio son:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{Ecuación de Continuidad.} \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla P = 0 \quad \text{Ecuación de Momento.} \quad (2)$$

$$P - \frac{R}{\mu} \rho T = 0 \quad \text{Ecuación de Estado.} \quad (3)$$

$$\frac{P}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \ln(P\rho^{-\gamma}) - \rho\ell - \nabla \cdot (K\nabla T) = 0 \quad \text{Ecuación de Balance Térmico.} \quad (4)$$

La ecuación (3) es la ecuación de estado de un gas ideal; R es la constante de los gases y μ el peso molecular. En la ecuación (4) ℓ es la función generalizada de pérdida de calor y expresa el balance entre la tasa de pérdidas radiativas Λ y la tasa de calentamiento Γ : $\ell = \Lambda + \Gamma$. En equilibrio, $\ell(\rho_0, T_0) = 0$. K es la conductividad térmica. La ecuación (4) se deduce fácilmente utilizando que para un gas ideal se satisfacen las siguientes relaciones (Callen 1985)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{NR}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \ln(P\rho^{-\gamma})$$

y

$$\rho T ds = C_V dt.$$

Para realizar un análisis de estabilidad hay que estudiar la evolución de pequeñas perturbaciones sobre un estado inicial de equilibrio. Se supone que las perturbaciones son suficientemente pequeñas, como para poder conservar únicamente los términos lineales en ellas. Como las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales son funciones con forma exponencial, entonces se propone que las variables que son solución del sistema (1)-(4) perturbado son de la forma: $A = A_0 + A_1 \exp(\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r})$, donde A_0 es el valor de la variable A en el estado de equilibrio y $A_1 \exp(\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r})$ es la perturbación de A . Escribiendo una solución de esta forma para cada una de las variables del problema

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \exp(\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (5a)$$

$$T = T_0 + T_1 \exp(\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (5b)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \exp(\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (5c)$$

$$P = P_0 + P_1 \exp(\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (5d)$$

$$\ell = \ell_1 \exp(\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}); \quad (5e)$$

se pueden sustituir en las ecuaciones (1) a (4), y así obtener un sistema de ecuaciones algebraico. Como ejemplo se muestra la sustitución para la ecuación de balance térmico. Dicha ecuación se puede escribir también como:

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\gamma P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \left(\frac{1}{\gamma-1} \right) + \rho \ell = \nabla \cdot (K \nabla T).$$

Introduciendo las variables perturbadas se obtiene:

$$\left[\frac{\omega}{\gamma-1} P_1 - \frac{\omega \gamma}{\gamma-1} \rho_1 \left(\frac{P_0 + P_1 \exp(\omega t - i \vec{\kappa} \cdot \vec{r})}{\rho_0 + \rho_1 \exp(\omega t - i \vec{\kappa} \cdot \vec{r})} \right) \right. \\ \left. + \rho_0 \left(\left(\frac{\partial \ell}{\partial \rho} \right)_T \rho_1 + \left(\frac{\partial \ell}{\partial T} \right)_\rho T_1 \right) - \nabla \cdot (i K \vec{\kappa}) \right] \exp(\omega t - i \vec{\kappa} \cdot \vec{r}) = 0,$$

donde se usó $\Delta \ell = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \rho} \right)_T \Delta \rho + \left(\frac{\partial \ell}{\partial T} \right)_\rho \Delta T$, $\ell_1 \equiv \Delta \ell$, $\rho_1 \equiv \Delta \rho$, $T_1 \equiv \Delta T$. Simplificando y reteniendo únicamente los términos lineales para las perturbaciones se obtiene:

$$\frac{\omega}{\gamma-1} P_1 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \omega \rho_1 \left(\frac{P_0}{\rho_0} \right) + \rho_0 \left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial \rho} \right)_T \rho_1 + \left(\frac{\partial \ell}{\partial T} \right)_\rho T_1 \right] + K \kappa^2 T_1 = 0.$$

Si se hace lo mismo en cada una de las ecuaciones hidrodinámicas, entonces se obtiene el siguiente sistema algebraico para las perturbaciones:

$$\omega \rho_1 + i \rho_0 \vec{\kappa} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (6)$$

$$i \vec{\kappa} P_1 + \omega \rho_0 \vec{v}_1 = 0 \quad (7)$$

$$\frac{P_1}{\gamma-1} - \rho_1 \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \omega \left(\frac{P_0}{\rho_0} \right) - \rho_0 \left(\frac{\partial \ell}{\partial \rho} \right)_T \right] + T_1 \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \ell}{\partial T} \right)_\rho + K \kappa^2 \right] = 0 \quad (8)$$

$$\frac{P_1}{P_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{T_1}{T_0} = 0 \quad (9).$$

El sistema anterior tiene la forma:

$$X_1 a_{11} + X_2 a_{12} + \dots + X_n a_{1n} = 0$$

$$X_1 a_{21} + X_2 a_{22} + \dots + X_n a_{2n} = 0$$

$$X_1 a_{n1} + X_2 a_{n2} + \dots + X_n a_{nn} = 0$$

donde X_i son las incógnitas y a_{ij} los coeficientes, por lo que se puede escribir también como:

$$X_1 \bar{A}_1 + X_2 \bar{A}_2 + \dots + X_n \bar{A}_n = 0.$$

Para que existan soluciones X_1, X_2, \dots, X_n distintas de cero, se necesita que los vectores \bar{A}_i sean linealmente dependientes; es decir que: $\det(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 0$. En nuestro caso esto significa que el determinante de la matriz de coeficientes de las ecuaciones (1) a (9) sea cero. Dicha matriz de coeficientes es:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \omega & i\bar{\kappa}\rho_0 & 0 \\ \frac{\omega}{\gamma-1} & -\frac{\omega\gamma\rho_0}{\rho_0(\gamma-1)} + \rho_0\ell_\rho & 0 & \ell_0\ell_T + K\kappa^2 \\ i\bar{\kappa} & 0 & \omega\rho_0 & 0 \\ \frac{1}{P_0} & -\frac{1}{\rho_0} & 0 & -\frac{1}{T_0} \end{pmatrix},$$

donde $\ell_T \equiv (\partial\ell/\partial T)_\rho$ y $\ell_\rho \equiv (\partial\ell/\partial\rho)_T$. Calculando el determinante de Λ , e igualándolo a cero, se obtiene la ecuación característica que, en el problema de inestabilidad térmica, constituye la relación de dispersión. Dicha relación se escribe a continuación:

$$\begin{aligned} \omega^3 \left(\frac{\rho_0}{(\gamma-1)T_0} \right) + \omega^2 \left(\frac{\rho_0^2}{P_0} \left(\frac{\partial\ell}{\partial T} \right)_\rho + \frac{\rho_0}{P_0} K\kappa^2 \right) + \omega \left(\frac{P_0\gamma\kappa^2}{T_0(\gamma-1)} \right) \\ + \kappa^2 \left(\rho_0\ell_T + K\kappa^2 - \frac{\rho_0^2}{T_0} \left(\frac{\partial\ell}{\partial\rho} \right)_T \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

En la ecuación anterior se observa que, en el caso no conductivo ($K=0$), $\omega=0$ es solución si

$$\rho_0 \left(\frac{\partial\ell}{\partial T} \right)_\rho - \frac{\rho_0^2}{T_0} \left(\frac{\partial\ell}{\partial\rho} \right)_T = 0, \quad (11)$$

Esta es una condición de estabilidad marginal, es decir, una condición para que las perturbaciones no crezcan ni se amortigüen; ya que en este caso las perturbaciones no cambian temporalmente, sólo

espacialmente. Es conveniente simplificar la ecuación (10) de la siguiente manera. Primeramente se introducen los números de onda:

$$\kappa_\rho = \frac{\mu\rho_0(\gamma-1)}{RcT_0} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \rho} \right)_T \quad \kappa_T = \frac{\mu(\gamma-1)}{Rc} \left(\frac{\partial \ell}{\partial T} \right)_\rho \quad \kappa_K = \frac{Rc\rho_0}{\mu(\gamma-1)K} \quad (12)$$

donde $c = \left(\frac{\gamma P_0}{\rho_0} \right)^{1/2}$, es la velocidad adiabática del sonido. En términos de κ_ρ , κ_T y κ_K la ecuación (10) es

$$\omega^3 + \omega^2 c \left(\kappa_T + \frac{\kappa_\rho^2}{\kappa_K} \right) + \omega c^2 \kappa^2 + \frac{c^3 \kappa^2}{\gamma} \left(\kappa_T - \kappa_\rho + \frac{\kappa_\rho^2}{\kappa_K} \right) = 0. \quad (13)$$

Para simplificar aún más la relación de dispersión se definen las variables adimensionales

$$y = \frac{\omega}{\kappa c} \quad \sigma_\rho = \frac{\kappa_\rho}{\kappa} \quad \sigma_T = \frac{\kappa_T}{\kappa} \quad \sigma_K = \frac{\kappa}{\kappa_K} \quad \sigma'_T = \sigma_T + \sigma_K. \quad (14)$$

Finalmente la ecuación (10) queda:

$$y^3 + y^2 \sigma'_T + y + \frac{1}{\gamma} (\sigma'_T - \sigma_\rho) = 0, \quad (15)$$

que es más manejable que la expresión original. Para analizar las posibles soluciones de la relación de dispersión (15), se deben mencionar algunas propiedades de los polinomios de tercer grado. El discriminante de una ecuación de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ está dado por:

$$D = \left(\frac{b^3}{27a^3} - \frac{bc}{6a^2} + \frac{d}{a} \right)^2 + \left(\frac{3ac - b^2}{9a^2} \right)^3. \quad (16)$$

Llamamos

$$A = \left(\frac{b^3}{27a^3} - \frac{bc}{6a^2} + \frac{d}{a} \right) \quad \text{y} \quad B = \left(\frac{3ac - b^2}{9a^2} \right).$$

El discriminante determina el tipo de raíces de la siguiente manera:

(i) Si $D > 0$, entonces, hay una solución real y dos complejas conjugadas.

(ii) Si $D < 0$, entonces, hay tres raíces reales distintas entre sí.

(iii) Si $D = 0$, entonces, si $A = B = 0$, hay tres raíces reales nulas; si $A = -B$, hay tres raíces reales, dos son iguales.

Otra propiedad de las ecuaciones cúbicas que se utilizará más adelante, es la siguiente: si y_1 , y_2 , y_3 son las raíces del polinomio, entonces se cumple que

$$y_1 + y_2 + y_3 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad y_1 y_2 y_3 = -\frac{d}{a}. \quad (17)$$

Para encontrar criterios de inestabilidad, se debe conocer en qué casos la parte real de ω es positiva, ya que en esos casos las ecuaciones (5) divergen exponencialmente, es decir, las perturbaciones crecen exponencialmente con el tiempo y por lo tanto hay inestabilidad. Por conveniencia, se llamará raíz positiva a todas las raíces cuya parte real sea positiva, independientemente de la realidad de la raíz.

Utilizando la ecuación (16) se calcula el discriminante de (15)

$$D = \left(\frac{\sigma_T^3}{27} - \frac{\sigma_T}{6} + \frac{1}{7}(\sigma_T - \sigma_\rho) \right)^2 + \left(\frac{3 - \sigma_T^2}{9} \right)^3. \quad (18)$$

A continuación se analizará qué sucede para cada una de los posibles valores de D .

(i) SI $D > 0$, habrá dos raíces complejas y una real. Las primeras son complejas conjugadas y corresponden al llamado modo "acústico"; así llamado tanto por poseer una componente ondulatoria que implica la presencia de ondas de presión, como porque se presenta en condiciones adiabáticas, en analogía con las ondas sonoras. Adelante se explicará esto con más detalle. La raíz real corresponde al llamado modo de "condensación" que, como su nombre lo indica, está asociado a un proceso de expansión o contracción siempre monótonico en el tiempo (sin componente ondulatoria), debido únicamente a cambios en el volumen específico de una región del gas; tales cambios ocurren de manera isobárica (ver más adelante). Nótese que ambos tipos de modos (acústico o de

condensación) pueden ser tanto estables como inestables, dependiendo del signo de la parte real de la solución. De las propiedades (17), se observa que, $y_1 y_2 y_3 = y_1 |y_2|^2 = \frac{1}{\gamma} \sigma_\rho - \sigma'_T$ donde y_1 es la raíz real. Por lo tanto y_1 llevará el signo de $\sigma_\rho - \sigma'_T$. Para que el modo de condensación sea inestable y_1 debe ser positivo, es decir

$$\sigma_\rho - \sigma'_T > 0, \quad (19)$$

o

$$\sigma_T - \sigma_\rho < -\sigma_K. \quad (20)$$

Según la desigualdad anterior, la conductividad térmica K reduce la inestabilidad, ya que la condición anterior se puede escribir en términos de las variables originales como:

$$\left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_\rho - \frac{\rho_0}{T_0} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \rho}\right)_T > \frac{\kappa^2 K}{\rho_0}; \quad (21)$$

y K siempre es positiva. Es decir, existe un intervalo, de posibles valores para ℓ , $0 < \ell_T - \ell_\rho \frac{\rho_0}{T_0} < \frac{\kappa^2 K}{\rho_0}$, que se estabiliza por efecto de la conducción térmica. (La igualdad $\left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_\rho - \frac{\rho_0}{T_0} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \rho}\right)_T$ sigue de una aplicación de la regla de la cadena.) La condición (21) implica un régimen isobárico, por lo que la raíz real, correspondiente al modo de condensación, satisface la llamada "condición isobárica" de inestabilidad.

Por otro lado, se tiene que la parte real de las soluciones complejas y_2 y y_3 , llevará el signo de $\sigma'_T(1 - \gamma^{-1}) - \sigma_\rho \gamma^{-1}$, por lo que en este caso existe inestabilidad siempre que se cumpla

$$\sigma'_T < \frac{1}{\gamma} (\sigma'_T - \sigma_\rho), \quad (22)$$

es decir,

$$\sigma_T + \frac{1}{\gamma - 1} \sigma_\rho < -\sigma_K, \quad (23)$$

y en las variables originales:

$$\left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_s = \left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_\rho + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho_0}{T_0} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \rho}\right)_T < -\frac{K}{\rho_0}. \quad (24)$$

De nuevo, la igualdad en la relación anterior es consecuencia de aplicar la regla de la cadena, y muestra que las soluciones complejas satisfacen un criterio de inestabilidad isentrópico. Puesto que las raíces complejas representan soluciones oscilatorias, a este par de raíces se le llama modo acústico. (Las ondas de sonido son ondas adiabáticas, por lo tanto son de naturaleza isentrópica ya que $dQ = Tds$.) Fícamente, este modo de la inestabilidad opera como sigue. Si la desigualdad (24) se satisface, las oscilaciones en la onda de sonido están sujetas a un calentamiento dentro de la fase de compresión, el cual tiende a aumentar la amplitud de la onda. Por otro lado, el modo de condensación, que satisface un criterio isobárico, opera de la siguiente manera: una fluctuación positiva en la temperatura causa un decremento en ℓ , por lo que la tasa de calentamiento se vuelve mayor que la tasa de enfriamiento, y la temperatura tiende a continuar aumentando. Como P permanece constante, la densidad tiende a disminuir, dando lugar a una expansión continuada. Por el contrario, una fluctuación negativa en la temperatura tendrá un efecto opuesto, originando una contracción continuada.

Una forma gráfica de representar el criterio isobárico es la dada por Shu 1992. Como se mencionó anteriormente, en estado de equilibrio $\ell(T_0, \rho_0) = 0$. La curva $\ell = 0$ se determina utilizando física atómica. En la figura 3.1 se muestra dicha curva (trazo sólido) para el caso de un gas estático, uniforme y homogéneo en equilibrio térmico. La recta punteada corresponde al lugar geométrico de $P = cte$.

Supongamos que el gas se encuentra a la temperatura y densidad descritas por el punto F . En este punto, una disminución isobárica en la temperatura (sobre la recta $P=cte$) lleva al gas a un estado en el que ($\ell < 0$) (viceversa a $\ell > 0$), por lo que entonces el gas tiende a calentarse y reexpandirse (viceversa, a enfriarse y contraerse) y así regresar al estado inicial F . Algo análogo sucede si el gas se encuentra inicialmente en el punto H . Sin embargo, si el medio está descrito por el punto G y

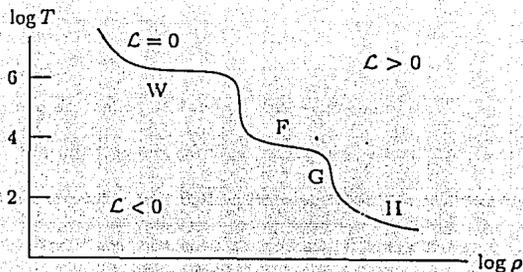


Figura 3.1. Función de Enfriamiento. Tomada de Shu, 1992.

una perturbación lo lleva a estados con menores temperaturas y mayores densidades, sobre la recta $P = cte$, se llega a una región donde $\ell > 0$. Manteniendo la misma presión, el gas tiende a volverse cada vez más frío y denso, hasta llegar al punto H . Por el contrario, si la perturbación lleva al gas a estados donde $\ell < 0$, entonces el gas tenderá a continuar expandiéndose y calentándose hasta llegar a F . El punto G es un punto inestable ya que un gas que se encuentra en dicho estado, puede separarse en dos fases distintas. La particularidad del punto G con respecto a los puntos F y H es precisamente que en G

$$\left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_P < 0, \quad (27)$$

es decir, el criterio isobárico.

Finalmente, si escribimos en su forma dimensional los criterios (20) y (23), se encontrarán los números de onda críticos

$$\kappa_{c1} = \left(\frac{\rho_0}{K} \left(\frac{\rho_0 \ell_p}{T_0} - \ell_T\right)\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \kappa_{c2} = \left(-\frac{\rho_0}{K} \left(\ell_T + \frac{\rho_0}{T_0(\gamma-1)} \ell_p\right)\right)^{1/2}$$

respectivamente. Números de onda mayores se estabilizan por la presencia de la conductividad térmica. Las escalas pequeñas son estabilizadas por efecto de la conducción y entre más grande sea esta última, mayor será también la escala a partir de la cual comience la estabilización.

(ii) Si $D < 0$, la ecuación (16) tendrá tres raíces reales. A pesar de tener tres soluciones reales distintas, la forma en que se agrupan según su comportamiento es similar a la del caso (i). Dos de ellas proceden del par conjugado en $D > 0$, por lo que continúan comportándose como un par, cambiando de signo simultáneamente al variar los coeficientes de la ecuación, tal como se verá más adelante. Debido a este comportamiento es natural continuar llamando a estas raíces "modos acústicos", a pesar de que en este caso dichos modos no son oscilatorios. La tercera raíz, correspondientemente, se continúa llamando "modo de condensación". Como

$$y_1 y_2 y_3 = \frac{1}{\gamma} (\sigma_\rho - \sigma_T') \quad \text{y} \quad y_1 + y_2 + y_3 = -\sigma_T',$$

tenemos las siguientes posibilidades:

- a) $(\sigma_\rho - \sigma_T') > 0$ y $\sigma_T' > 0$. Se tienen dos raíces negativas y una positiva.
- b) $(\sigma_\rho - \sigma_T') < 0$ y $\sigma_T' > 0$. Las tres raíces son negativas.
- c) $(\sigma_\rho - \sigma_T') < 0$ y $\sigma_T' < 0$. Hay dos raíces positivas y una negativa.
- d) $(\sigma_\rho - \sigma_T') > 0$ y $\sigma_T' < 0$. Las tres raíces son positivas.

Notando que en el caso $D < 0$ se satisface $\sigma_\rho \sigma_T' > 0$ (ver figura 3.2), es posible demostrar que estos criterios se pueden expresar en términos de los criterios isentrópico e isobárico descritos en el caso $D > 0$. Así

- a) \Rightarrow No se satisface el criterio isentrópico y se satisface el criterio isobárico.

b) \Rightarrow No se satisface ningún criterio.

c) \Rightarrow Se satisface el criterio isentrópico y no se satisface el criterio isobárico.

d) \Rightarrow Se satisfacen ambos criterios.

En resumen, se ha encontrado que independientemente del signo del discriminante, el signo de las raíces está determinado por

$$\left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_P < -\frac{K \kappa^2}{\rho_0} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_s < -\frac{K}{\rho_0}$$

Si ambas se cumplen habrá tres raíces positivas. La primera condición determina el signo la raíz asociada al modo de condensación, mientras que la segunda determina el signo de las raíces correspondientes al modo acústico.

En el caso $D < 0$ se observa también que siempre que $\sigma_T^2 < 0$, habrá alguna solución positiva, por lo tanto habrá inestabilidad. La desigualdad anterior se puede escribir también como:

$$\left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_\rho + \frac{\kappa^2 K}{\rho_0} < 0, \quad (25)$$

por lo que se conoce como el "criterio isocórico". Este criterio se satisface siempre que se cumpla el criterio isentrópico, aunque no al contrario, por lo que el criterio isocórico es menos general, y no será considerado en lo sucesivo. Físicamente, el criterio isocórico se puede entender de manera análoga al criterio isobárico explicado anteriormente, con la diferencia de que, dado que en este caso la densidad se mantiene constante, las expansiones o contracciones están relacionadas con cambios en la presión exclusivamente.

En la figura 3.2 se resumen los resultados obtenidos, para el caso particular en que $\gamma = 5/3$. La curva de en forma de "picos" representa la condición $D = 0$. Las regiones sombreadas son las

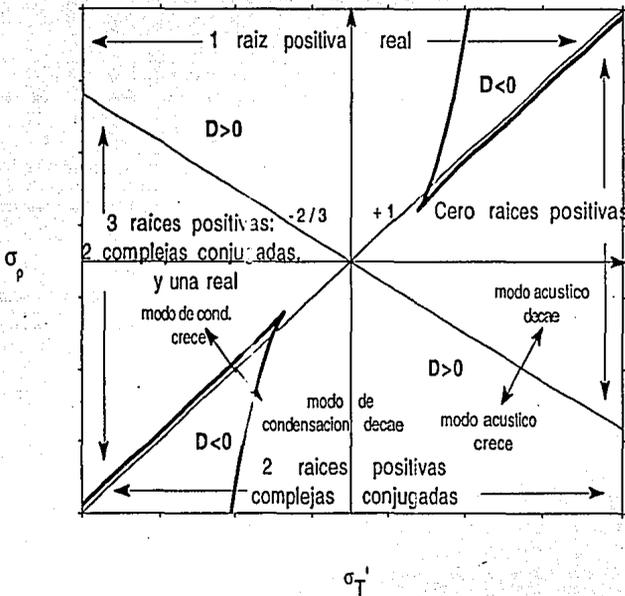


Figura 3.2. Dominios de Estabilidad.

Se llama raíz positiva a toda aquella que tiene una parte real positiva

zonas del plano $\sigma_T'\sigma_p$ en las que $D < 0$. También se muestra el número de raíces positivas que hay en cada región del plano. La recta con pendiente positiva es el límite del criterio isobárico y la de pendiente negativa el límite del criterio isentrópico.

2) Desarrollos Posteriores.

Ha habido diversas modificaciones a los criterios originales de inestabilidad térmica considerando otros ingredientes del medio interestelar. Una de las modificaciones, realizada por el mismo Field (1965), se obtiene cuando se toma en cuenta la presencia de un campo magnético uniforme. En este caso los efectos son considerables ya que, en primer lugar, aparecen dos modos oscilatorios adicionales provenientes de dos polarizaciones de las ondas de Alfvén. Además, si el campo magnético es normal a la dirección de propagación de las perturbaciones, la inestabilidad se inhibe debido a que la presión térmica tiene que ser grande para poder balancear a la presión magnética. Otro efecto de la presencia de un campo magnético es la reducción de la conductividad térmica a través del campo, ya que los electrones no pueden cruzar las líneas de campo magnético en dirección perpendicular, sino que se mantienen describiendo órbitas alrededor de ellas. La inestabilidad térmica en presencia de campos magnéticos ha sido aplicada, sobre todo, a fenómenos solares por Field(1965), C. Chiuderi y G. Van Hoven (1979), S. R. Habbal (1979) y R. Rosner (1979), entre otros. En algunos casos se consideran campos magnéticos no uniformes.

Otro de los refinamientos introducidos por Field (1965) consiste en hacer un análisis de estabilidad térmica en un sistema con simetría axial en rotación. En el caso de movimientos puramente acimutales, la inestabilidad no se afecta, ya que en esta dirección el gas puede moverse sin cambiar su momento angular. Sin embargo, los movimientos radiales sí son afectados, sobre todo en escalas grandes, por lo que las escalas grandes tienden a ser más estables. En el mismo trabajo Field también hace un análisis de estabilidad considerando los efectos de una estratificación en la densidad. Se encuentra que una atmósfera estratificada tiene un comportamiento distinto al de una atmósfera homogénea. Según Field, en el caso homogéneo las perturbaciones con tasas de crecimiento positivas necesariamente tienen grandes longitudes características, ya que las fluc-

tuaciones de temperatura asociadas a las fluctuaciones de la densidad pequeña escala desaparecen por efecto de la conducción térmica. En cambio, en el caso del medio estratificado las variaciones en la temperatura no son necesarias, debido a que las ecuaciones de continuidad y de equilibrio hidrostático implican que la presión de un elemento de volumen es constante. Por lo tanto, en este caso, se pueden presentar perturbaciones de densidad con tasas de crecimiento positivas aún en escalas pequeñas, ya que no están asociadas a fluctuaciones de temperatura que serían borradas por conducción.

Una última modificación introducida por Field consiste en incluir los efectos de una expansión. Esta inclusión es importante para el estudio de nebulosas planetarias, vientos estelares y formación de galaxias. Field encuentra que el enfriamiento producido por la expansión provoca que el gas sea más inestable que el gas que inicialmente está en equilibrio térmico.

La inestabilidad térmica ha tenido diversas aplicaciones en trabajos sobre medio interestelar. Al estudiar este tipo de inestabilidades en gas interestelar calentado por rayos cósmicos (D. W. Goldsmith et. al. 1969. D. W. Goldsmith 1970) se llegó a un modelo de dos fases para el medio interestelar en el que dichas fases se encuentran en equilibrio de presión. En el segundo trabajo de Goldsmith se hacen, además de un análisis analítico linealizado, cálculos numéricos que describen el régimen no lineal. Se encuentra un tiempo típico de crecimiento de las perturbaciones de 10^7 años. En un trabajo posterior, Flannery y Press (1979) consideran tanto el calentamiento como la ionización producidas por los rayos cósmicos, así como el enfriamiento producido por excitación colisional de electrones. Se encuentra inestabilidad del modo de condensación para $T > 90 K$ y la posibilidad de la existencia de nubes estables en el modo de condensación, pero acústicamente inestables si $30 K < T < 90 K$. Las escalas características asociadas a los modos acústicos más inestables son las siguientes: tiempo de crecimiento $\sim 5 \times 10^6 / \xi$ años, longitud de

onda $\sim 1/\xi$ pc, masa $\sim 0.5\xi^2 M_{\odot}$; donde $\xi \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ es la tasa de ionización.

En un análisis no lineal para la inestabilidad térmica (Mc Millan 1980) se llega también a un estado estacionario en el que coexisten un estado frío y otro caliente, en equilibrio de presión. Además, se encuentran dos comportamientos distintos que dependen de la temperatura inicial del medio: i) Si $30 \text{ K} < T < 70 \text{ K}$, la inestabilidad llega a un estado estadísticamente estacionario, es decir, un estado que en promedio se encuentra en equilibrio. ii) Si $T > 80 \text{ K}$, entonces el crecimiento de la inestabilidad es ordinario.

Otra de las aplicaciones de la inestabilidad térmica al medio interestelar fue hecha por J. Schwarz y colaboradores (1972). Se estudió la formación de nubes en un medio interestelar que se enfría ("flujos en enfriamiento"). Se encontró que, en el caso unidimensional, si el tamaño característico de la perturbación, λ_c , satisface $\lambda_c < cT_c$ con c la velocidad del sonido y T_c el tiempo de enfriamiento radiativo, entonces los procesos de condensación pueden dar lugar a nubes interestelares con densidad aproximadamente 100 veces mayor que el resto del medio. Dentro del estudio de inestabilidad térmica en flujos en enfriamiento se ha propuesto (Gilden 1984) que tal inestabilidad es fuente de estructura a pequeña escala, en nubes moleculares. La inestabilidad térmica en flujos en enfriamiento también ha sido utilizada en el estudio de halos galácticos y cúmulos de galaxias. Malagoli et. al. (1987) estudian la inestabilidad térmica en dichos flujos para el caso de acreción hacia un objeto central generadora de radiación; encuentra que el gas está sujeto a sobreestabilidad, más que a inestabilidad monotonía. Nulsen (1986) encuentra resultados que sugieren que el enfriamiento requerido para que pueda haber inestabilidad se puede dar en todos los cúmulos y grupos de galaxias que emiten rayos X y que los flujos de enfriamiento están presentes sólo en aquellos en los que el gas se enfría enfocado hacia una galaxia central bien definida. En formación estelar, Fabian et. al. (1980) muestra que en un entorno con altas presiones y libre de

polvo, flujos de enfriamiento con masas menores que la masa de Jeans, favorecen la formación de estrellas de baja masa.

También se han hecho trabajos en los que se relaciona a la inestabilidad térmica con la inestabilidad convectiva. Se ha demostrado (Defouw 1970) que una atmósfera térmicamente inestable es convectivamente inestable, independientemente del gradiente de temperatura.

Capítulo IV

Inestabilidad Magnética

1) Análisis de Estabilidad.

En 1966 Parker estudió un tipo de inestabilidad, la inestabilidad que existe en un medio interestelar compuesto por gas térmico, campo magnético y partículas de rayos cósmicos y confinado a una capa delgada por una fuerza de gravedad vertical. Este análisis aproximó al campo magnético galáctico considerándolo como uniforme en planos paralelos al disco galáctico y variando solamente con la altura respecto al centro de la galaxia. En esta sección se revisará el análisis de estabilidad lineal sin tomar en cuenta los rayos cósmicos; después se mencionarán brevemente sus efectos sobre la estabilidad del medio.

Como se explicará más adelante, es válido suponer que el campo magnético se encuentra "congelado" en el gas térmico por lo que a la presión térmica es necesario añadir también la presión magnética $B^2/8\pi$. Por simplicidad, se supondrá que el cociente entre presión térmica y

presión magnética es constante:

$$\frac{B^2}{8\pi P} = \alpha. \quad (1)$$

Además se supone que el medio se encuentra a una temperatura uniforme, con la presión y densidad en estado de equilibrio satisfaciendo:

$$P = \rho c^2 \quad \text{donde} \quad c^2 = \frac{kT}{m}. \quad (2)$$

Aquí, c es la velocidad isotérmica del sonido, T la temperatura y m la masa media por partícula. De esta forma la ecuación de equilibrio hidrostático, incluyendo la presión magnética queda de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dz} (1 + \alpha) P = -\frac{\rho g}{c^2}, \quad (3)$$

lo cual implica que inicialmente

$$\frac{P(z)}{P_0} = \exp(-z/\Lambda) \quad \text{donde} \quad \Lambda = (1 + \alpha)/g. \quad (4)$$

Por las relaciones (1) y (2) podemos escribir también: $P(z)/P_0 = \rho(z)/\rho_0 = B^2(z)/B_0^2 = \exp(-z/\Lambda)$.

Por otro lado se tienen que las ecuaciones magnetohidrodinámicas que describen al gas son:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{Ecuación de Continuidad.} \quad (5)$$

$$P = c^2 \rho_0^{1-\gamma} \rho^\gamma \quad \text{Ecuación de Estado.} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{Ecuación de Inducción Magnética} \quad (7)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \rho \vec{g} \quad \text{Ecuación de Movimiento,} \quad (8)$$

en donde se ha supuesto que la ecuación de estado es una ecuación barotrópica de la forma $P \propto \rho^\gamma$, que cumple con la condición de equilibrio $P = c^2 \rho$, mencionada anteriormente.

En la ecuación de inducción magnética está hecha la aproximación de "flux freezing" o "congelamiento del flujo magnético, ya que se ha despreciado el término $-\nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B})$ de la ecuación de inducción completa, considerando que la resistividad η es muy pequeña y que las dimensiones interestelares son muy grandes, por lo tanto $\eta \ll vL$, y domina el término $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$. El congelamiento de flujo magnético se puede entender físicamente de la ecuación (7). Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación de vorticidad para flujos barotrópicos incompresibles $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = 0$, donde $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ es la vorticidad. Por el teorema de Kelvin sabemos que el flujo de vorticidad en estas condiciones se conserva, es decir que $\int_A \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA = cte$. De aquí se desprende que el flujo magnético Φ a través de un área A , definido como:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA,$$

también se conserva, es decir $d\Phi/dt = 0$. Entonces el número de líneas de campo que cruzan una superficie de fluido dada es constante, por lo que se dice que el campo se encuentra "congelado" en el fluido.

Regresando al análisis de estabilidad, considérese que el estado inicial de equilibrio es perturbado ligeramente:

$$\rho \longrightarrow \rho(z) + \rho_1$$

$$P \longrightarrow P + P_1$$

$$\vec{B} \longrightarrow (b_x, B(z) + b_y, b_z) = \vec{B}(z) + \vec{b}$$

$$\vec{v} \longrightarrow (v_x, v_y, v_z) = \vec{v}_1$$

donde ρ_1 , P_1 , \vec{b} y \vec{v} son muy pequeños, por lo que en las ecuaciones que describan al medio perturbado se pueden retener únicamente los términos lineales. De esta manera, cambiando las variables originales por las variables perturbadas en las ecuaciones originales y conservando sólo

los términos lineales en las perturbaciones se obtiene el conjunto de ecuaciones que describirán al medio perturbado.

Como ejemplo se muestran los cálculos para algunas ecuaciones. Sustituyendo las variables perturbadas en la ecuación de continuidad se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho(z) + \rho_1) + \bar{v} \cdot \nabla(\rho(z) + \rho_1) + (\rho(z) + \rho_1) \nabla \cdot \bar{v} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 + \bar{v} \cdot \nabla(\rho(z)) + \bar{v} \cdot \nabla \rho_1 + \rho(z) \nabla \cdot \bar{v}_1 + \rho_1 \nabla \cdot \bar{v}_1 &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 + v_z \left(-\frac{\rho(z)}{\Lambda} \right) + \rho(z) \nabla \cdot \bar{v}_1 &= 0, \end{aligned}$$

en donde se ha eliminado la ecuación de continuidad para las variables sin perturbar. Por lo tanto, queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_1 = -\rho(\nabla \cdot \bar{v}_1 - \frac{v_z}{\Lambda}). \quad (9)$$

Si se hace lo mismo para cada una de las demás ecuaciones se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_1 = c^2 \gamma \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 - (\gamma - 1) c^2 \rho(z) \frac{v_z}{\Lambda} \quad (10)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = B(z) \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (11)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = -B(z) \frac{\partial v_x}{\partial x} - B(z) \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_z}{2\Lambda} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = B(z) \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (13)$$

$$\rho(z) \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{B}{4\pi} \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} + \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \quad (14)$$

$$\rho(z) \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{B(z) b_z}{8\pi\Lambda} \quad (15)$$

$$\rho(z) \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{B(z)}{4\pi} \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} + \frac{b_y}{2\Lambda} \right) - g \dot{\rho}_1 \quad (16)$$

Las ecuaciones (9) a (16) describen la evolución de las perturbaciones. Se proponen soluciones de forma exponencial para cada una de ellas, ya que son todas ecuaciones lineales. Las soluciones

propuestas son:

$$\rho_i = \rho_0 D \exp \left\{ t/\tau + i\kappa_x x + i\kappa_y y + i\kappa_z z + (s-2)z/2\Lambda \right\}. \quad (17a)$$

$$v_i = u C_i \exp \left\{ t/\tau + i\kappa_x x + i\kappa_y y + i\kappa_z z + sz/2\Lambda \right\}. \quad (17b)$$

$$b_i = B_0 A_i \exp \left\{ t/\tau + i\kappa_x x + i\kappa_y y + i\kappa_z z + (s-1)z/2\Lambda \right\}. \quad (17c)$$

Con κ_x , κ_y , κ_z y s reales. En particular, el parámetro s se elige de tal forma que imponga una frontera fija en $z = 0$. La frontera fija es necesaria para evitar que las soluciones diverjan en $z = -\infty$ como se puede ver que sucede en la ecuación (4).

Para continuar con el análisis de estabilidad, se debe encontrar bajo qué condiciones las perturbaciones crecen de manera exponencial, es decir, bajo qué condiciones τ es real y positiva. Con el fin de obtener un sistema de ecuaciones algebraico en lugar de diferencial parcial, se sustituye las soluciones (17) en el sistema (9)-(16). Para las ecuaciones de inducción magnética (11)-(13) simplemente se sustituyen ρ_i y b_i , y se utiliza el hecho de que $B(z)/B_0 = \exp(-z/2\Lambda)$. Para la primera componente se encuentra:

$$\frac{A_1 \Lambda}{u \tau} = \Lambda C_1 i \kappa_y.$$

Si se definen los números de onda y las frecuencias normalizados a las escalas del problema como:

$q_1 \equiv \Lambda \kappa_x$, $q_2 \equiv \Lambda \kappa_y$, $iQ \equiv \Lambda i \kappa_z + \frac{1}{2}(s-1)$ y $\Omega \equiv \frac{\Lambda}{u \tau}$, la ecuación anterior queda:

$$\Omega A_1 = i q_2 C_1. \quad (18)$$

Siguiendo el mismo procedimiento en las ecuaciones para las dos componentes restantes se obtienen

$$\Omega A_2 = -i q_1 C_1 - i Q C_3 \quad (19)$$

$$\Omega A_3 = i q_2 C_3 \quad (20)$$

Para reescribir las ecuaciones de movimiento (14)–(16) se utilizan también las ecuaciones de inducción magnética (11)–(13) y la ecuación de estado (10). Además se hacen las siguientes definiciones:

$$\Omega_{12}^2 \equiv \Omega^2 + 2\alpha(q_1^2 + q_2^2)$$

$$\Omega_{23}^2 \equiv \Omega^2 + 2\alpha q_1^2 - 2\alpha iQ(iQ - \frac{1}{2}) - (\gamma - 1)(iQ - \frac{1}{2})$$

La manera de reescribir la ecuación para la i -ésima componente ϵ_i : se deriva dicha ecuación con respecto al tiempo, se deriva la ecuación de estado con respecto a la i -ésima componente y se utilizan las ecuaciones de inducción magnética para escribir ésta última en términos de las componentes de la velocidad. Se obtiene una expresión para $\frac{\partial^2 P_i}{\partial x_i \partial t}$, misma que debe ser sustituida en la ecuación obtenida del primer paso. Siguiendo este procedimiento para las ecuaciones para cada una de las componentes se obtiene el siguiente sistema:

$$\Omega_{12}^2 C_1 - i q_1 (\gamma - 1 + 2\alpha i Q) C_3 = -i q_1 \gamma \Omega D. \quad (21)$$

$$\Omega^2 C^2 + i q_2 (1 + \alpha - \gamma) C_3 = -i q_2 \gamma \Omega D. \quad (22)$$

$$-2i q_1 \alpha (iQ - \frac{1}{2}) + \Omega_{23}^2 C_3 = -[\gamma (iQ - \frac{1}{2}) + 1 + \alpha] \Omega D. \quad (23)$$

El sistema anterior se puede resolver para C_1 , C_2 y C_3 . Una manera posible de hacer esto es utilizando el método de determinantes. Después de algo de álgebra se encuentra:

$$C_1 = -D \left(\frac{i q_1 \Omega}{R} \right) \left[\gamma \Omega_{23}^2 + (\gamma (iQ - \frac{1}{2}) + 1 + \alpha) (2\alpha i Q + \gamma - 1) \right], \quad (24a)$$

$$C_2 = -D \left(\frac{i q_2}{\Omega R} \right) \left[\gamma \Omega_{12}^2 \Omega_{23}^2 - \Omega_{12}^2 (1 + \gamma - \alpha) (\gamma (iQ + \frac{1}{2}) + 1 + \alpha) - 4\alpha^2 \gamma q_1^2 (Q^2 + \frac{1}{4}) \right], \quad (24b)$$

$$C_3 = -D \left(\frac{\Omega}{R} \right) \left[\Omega_{12}^2 (\gamma (iQ - \frac{1}{2}) + 1 + \alpha) - 2\alpha \gamma q_1^2 (iQ - \frac{1}{2}) \right], \quad (24c)$$

con

$$R = \Omega_{12}^2 \Omega_{23}^2 + 2\alpha q_1^2 (iQ - \frac{1}{2}) (2\alpha i Q + \gamma - 1).$$

Para encontrar la relación de dispersión se substituyen las expresiones completas para las componentes de la velocidad, incluyendo los resultados anteriores, en la ecuación de continuidad. Como el álgebra para simplificar la relación de dispersión es muy larga y tediosa, se pondrá solamente el resultado final:

$$\Omega^4 + \Omega^2(\alpha + \gamma)(q_2^2 + Q^2 + \frac{1}{4}) + q_2^2 \left[2\alpha\gamma(q_2^2 + Q^2 + \frac{1}{4}) - (1 + \alpha)(1 + \alpha - \gamma) \right] + \frac{q_2^2}{\Omega_{12}^2} \left[\gamma\Omega^4 + \Omega^2(2\alpha\gamma q_2^2 - 2\alpha(2\alpha + \gamma)Q^2 + \gamma - 1 + \frac{1}{2}\alpha\gamma) - 4\alpha^2\gamma q_2^2(Q^2 + \frac{1}{4}) \right] = 0. \quad (25)$$

Nótese que se ha considerado que $s = 1$. De esta forma se obtiene una ecuación de dispersión par en κ_z . Las razones por las que esto es necesario se relacionan con las condiciones de frontera, sin embargo, dichas razones no son claras.

La ecuación de dispersión (25) es demasiado complicada como para ser resuelta en general, por lo que se analizarán sólo a algunos casos límite de interés físico. Las perturbaciones pequeñas consideradas previamente pueden tener varios efectos sobre el medio y en consecuencia sobre las líneas de campo magnético "congeladas" en el gas. Uno de estos efectos es el "overturning" transversal convectivo que consiste en un reacomodo de las líneas de campo a partir de movimientos únicamente en direcciones transversales al campo, las cuales son, en este problema las direcciones x y z . En las ecuaciones (24) se observa que los movimientos en estas direcciones ocurren simultáneamente cuando $q_1 = \Lambda\kappa_x \neq 0$. El efecto de reacomodo transversal convectivo se ilustra en la figura 4.1

Cuando $q_2 = \Lambda\kappa_y \neq 0$, el efecto de las perturbaciones es distinto. Se generan ondulaciones transversales a lo largo de la dirección paralela a las líneas de campo. Como el campo se encuentra "congelado" en el gas entonces las líneas de campo se ondulan. Este efecto se ilustra en la figura

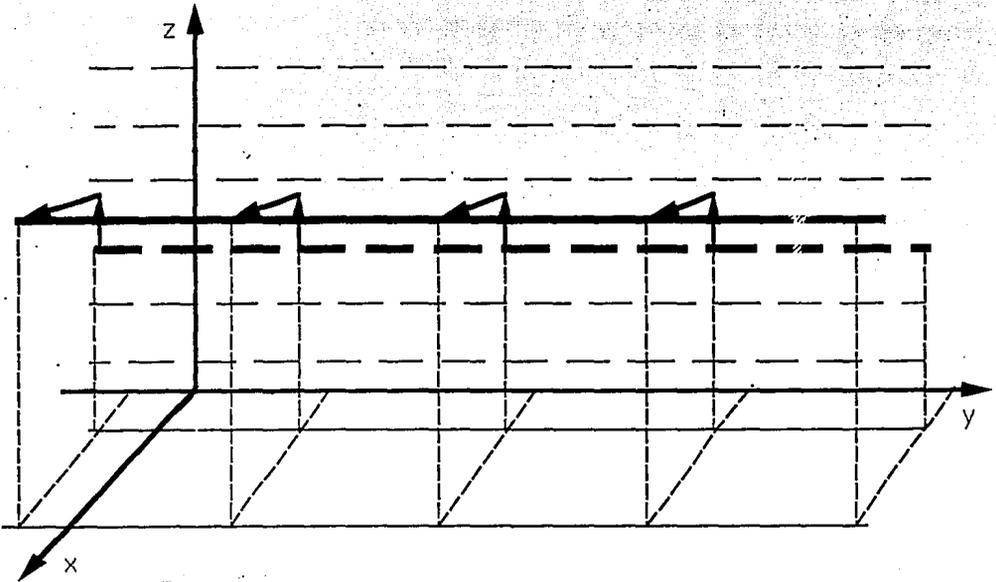


Figura 4.1. Reacomodo Transversal Convectivo.

Aunque estos dos efectos no son excluyentes, por claridad se analizarán de forma separada:

(i) Como primer caso se tratará el modo de reacomodo transversal convectivo. Como se mencionó anteriormente, este modo no deforma las líneas de campo magnético, sino que solamente las reacomoda. Con el objeto de separar explícitamente los diferentes modos de inestabilidad, se considerará el caso $\kappa_y = 0$, en el que el reacomodo transversal es el único efecto presente. En las ecuaciones (17) a (20) y (24) se puede ver que en este caso la velocidad y la perturbación al campo magnético tienen la forma $\vec{v} = (v_x, 0, v_z)$ y $\vec{b} = (0, b_y, 0)$. Las configuraciones anteriores dan lugar

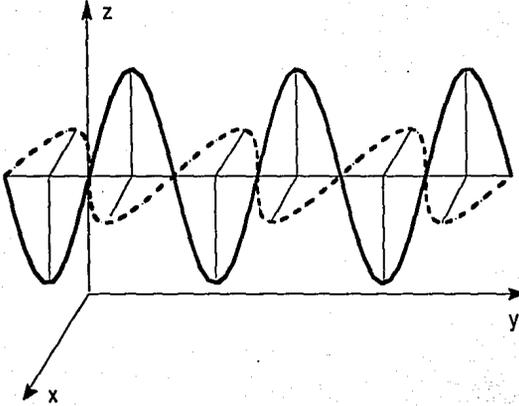


Figura 4.2. Ondulamiento de las Líneas de Campo Magnético.

al efecto ilustrado en la figura 4.1. La relación de dispersión queda como

$$\Omega^4 + \Omega^2(\alpha + \gamma)\left(Q^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{q_1^2}{\Omega_{12}^2}\right)\left[\gamma\Omega^4 + \Omega^2(-2\alpha(2\alpha + \gamma)Q^2 + \gamma - 1 + \frac{1}{2}\alpha\gamma)\right] = 0, \quad (26)$$

si $q_2 = 0$. Se necesita que la relación de dispersión tenga una raíz positiva para tener inestabilidad, porque sólo así las perturbaciones (17) crecerán exponencialmente en el tiempo. La ecuación anterior tiene una raíz real y positiva sólo si

$$\gamma < 1 - \alpha. \quad (27)$$

En este caso el campo magnético tiene un efecto estabilizador, ya que en el criterio de inestabilidad

puramente convectiva, que se escribe más adelante, se observa que para $\gamma < 1$ hay inestabilidad siempre. En la ecuación (27) se puede ver que existe un intervalo de valores $1 < \gamma < 1 - \alpha$ que son estabilizados por la presencia del campo.

(ii) Ahora se verá el caso en el que el efecto anterior está totalmente ausente, es decir $\kappa_\infty = 0$.

En este caso la relación de dispersión se puede escribir de la siguiente manera

$$\Omega^4 + \Omega^2(2\alpha + \gamma)(Q^2 + \frac{1}{4} + q_2^2) - q_2^2 \left((1 + \gamma)(1 + \alpha + \gamma) - 2\gamma\alpha(q_2^2 + Q^2 + \frac{1}{4}) \right) = 0. \quad (28)$$

Para una ecuación de la forma $X^2 + EX + F = 0$, sus raíces X_1 y X_2 cumplen las propiedades

$$X_1 + X_2 = -E \quad \text{y} \quad X_1 X_2 = F$$

En la ecuación (28) se tiene $E > 0$, por lo que $X_1 + X_2 < 0$. Entonces, alguna de las dos raíces debe ser negativa y para que la otra sea positiva se requiere que $F < 0$, lo cual implica que

$$\left[(1 + \alpha)(1 + \alpha - \gamma) - 2\alpha\gamma(q_2^2 + Q^2 + \frac{1}{4}) \right] > 0,$$

es decir,

$$\frac{(1 + \alpha)(1 + \alpha - \gamma)}{2\alpha\gamma} - \frac{1}{4} > q_2^2 + Q^2 > 0. \quad (29)$$

Para que este intervalo sea distinto de cero es necesario que el término de la izquierda en la ecuación anterior sea mayor que cero. Esto tiene como consecuencia

$$\gamma < \frac{(1 + \alpha)^2}{(1 + \frac{3}{2}\alpha)} \quad (30)$$

Siguiendo dentro del régimen $q_1 = 0$, es de interés particular el caso en el que solamente se consideran los efectos del campo magnético; esto es, se eliminan todas las fuerzas convectivas.

Para hacer esto podemos considerar $\gamma = 1$, debido a que según el criterio para la inestabilidad convectiva, ésta ocurre cuando

$$\left| \frac{dT}{dz} \right| > \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \left| \frac{dP}{dz} \right|.$$

De acuerdo con la ecuación anterior siempre hay inestabilidad cuando $\gamma < 1$. También puede haber inestabilidad si $\gamma > 1$ ya que la condición anterior es fundamentalmente una condición sobre los gradientes de presión y temperatura. En el problema que se discute la temperatura del medio es uniforme por lo que el lado izquierdo de la desigualdad es cero. La posibilidad más sencilla para que la desigualdad no se cumpla y no haya inestabilidad convectiva es que $\gamma = 1$. La estabilidad en $\gamma = 1$ es un caso de estabilidad marginal debido a que cualquier cambio de la temperatura T con z hará que la condición de inestabilidad se satisfaga. Imponiendo la condición anterior para γ en la ecuación (28), se encuentra

$$\Omega^4 + \Omega^2(2\alpha + 1)(Q^2 + q_2^2 + \frac{1}{4}) - q_2^2[\alpha(\alpha + 1) - 2\alpha(Q^2 + q_2^2 + \frac{1}{4})] = 0. \quad (31)$$

De las propiedades de las ecuaciones de segundo grado, se ve que se necesita

$$\left[\alpha(\alpha + 1) - 2\alpha(Q^2 + q_2^2 + \frac{1}{4}) \right] > 0 \quad (32)$$

para que haya inestabilidad. En la desigualdad anterior se puede observar que Q^2 tiene un efecto estabilizador, ya que tiende a hacer que el valor del lado izquierdo de esta sea más pequeño. Por lo tanto los modos más inestables se dan cuando $Q^2 = 0$. Por otro lado de la relación (32) se deduce que existe inestabilidad si

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} > Q^2 + q_2^2 > 0 \quad (33)$$

y los modos más inestables son

$$0 < q_2^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha. \quad (34)$$

La ecuación (31) no es ya tan complicada como la forma general de la ecuación de dispersión, por lo que es posible resolverla explícitamente para Ω^2 . Haciéndolo se encuentra la siguiente

relación de dispersión

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \left[\left[(1+2\alpha)^2 \left(q_2^2 + \frac{1}{4} \right)^2 + 4\alpha q_2^2 (1+\alpha - 2(q_2^2 + \frac{1}{4})) \right]^{\frac{1}{2}} - (1+2\alpha) \left(q_2^2 + \frac{1}{4} \right) \right]. \quad (35)$$

(iii) Como tercer caso veremos qué sucede si $q_1 \rightarrow \infty$, es decir, para perturbaciones con alta frecuencia espacial. Este análisis también se hará en ausencia de fuerzas convectivas, es decir con $\gamma = 1$. De la ecuación (25) y utilizando el hecho de que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left(\frac{q_1^2}{\Omega_{12}^2} \right) = \frac{1}{2\alpha}$$

se encuentra que la relación de dispersión en este régimen es

$$\Omega^4 (1+2\alpha) + \Omega^2 4\alpha (1+\alpha) \left(q_2^2 + \frac{1}{4} \right) + 2q_2^2 \alpha (2q_2^2 \alpha - (1+\alpha)\alpha) = 0 \quad (36)$$

que es independiente de Q . Esto significa que no depende del número de onda en la dirección vertical, por lo que se puede decir que un número de onda suficientemente grande en la dirección x inhibe el efecto estabilizador del número de onda en z .

Nuevamente se utilizan las propiedades de las ecuaciones de segundo grado para encontrar en qué condiciones existe alguna raíz positiva, o lo que es lo mismo, bajo qué condiciones hay inestabilidad. Esto sucede siempre que se cumpla la siguiente condición:

$$2q_2^2 < (1+\alpha). \quad (37)$$

Si se resuelve la ecuación (35) para Ω^2 , se encuentra para la relación de dispersión:

$$\Omega^2 = \left(\frac{\alpha}{2\alpha+1} \right) \left[\left(4(1+\alpha)^2 \left(q_2^2 + \frac{1}{4} \right)^2 + 2(1+2\alpha)(1+\alpha - 2q_2^2)q_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 2(1+\alpha) \left(q_2^2 + \frac{1}{4} \right) \right]. \quad (38)$$

En la tabla 1 se resumen los resultados obtenidos anteriormente, así como algunos otros que se derivan de ellos. Para los casos (*) y (**) de la tabla, que son inestabilidades puramente magnéticas,

Condiciones	Perturbaciones	Criterios de Inestabilidad	γ	Procesos
$q_2 = 0$ $q_1 \neq 0$	$\bar{b} = (0, b_y, 0)$ $\bar{v} = (v_x, 0, v_z)$	$\gamma < 1 - \alpha$	Cualquiera	R.T.C.
$q_1 = 0$ $q_2 \neq 0$	$\bar{b} = (0, b_y, b_z)$ $\bar{v} = (0, v_y, v_z)$	$0 < q_2^2 + Q^2 < \frac{(1+\alpha)(1+\alpha-\gamma)}{2\gamma\alpha} - \frac{1}{4}$	$\gamma \neq 1$	F.C.
$q_1 = 0$ $q_2 \neq 0$	$\bar{b} = (0, b_y, b_z)$ $\bar{v} = (0, v_y, v_z)$	$0 < q_2^2 + Q^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha$	$\gamma = 1$	
$q_1 = 0$ $q_2 \neq 0$ $q_3 = 0$	$\bar{b} = (0, 0, b_z)$ $\bar{v} = (0, v_y, v_z)$	$q_2^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha$	$\gamma = 1$	★
$q_1 = \infty$ $q_2 \neq 0$...	$2\alpha\gamma q_2^2 < (1+\alpha)(1+\alpha-\gamma)$	Cualquiera	
$q_1 = \infty$ $q_2 \neq 0$...	$q_2^2 < \frac{1}{2}(1+\alpha)$	$\gamma = 1$	★★

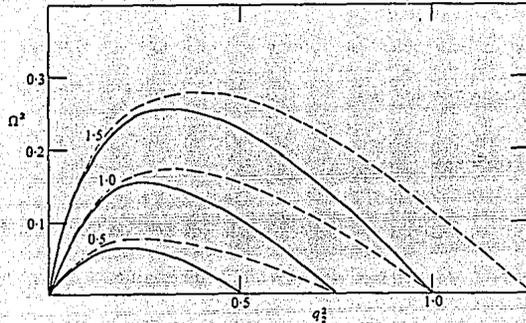


Figura 4.3. Gráfica de Tasas de Crecimiento de la Inestabilidad puramente Magnética.

tomada de Parker 1979

se puede hacer una gráfica del cuadrado de la tasa de crecimiento Ω^2 contra el cuadrado del número de onda en la dirección y , q_2^2 . Se obtiene el resultado que se muestra en la figura 4.3.

En la gráfica anterior se puede ver que en el caso (***) la inestabilidad se extiende para valores mayores de q_2^2 que en el otro caso. Además, en ambos casos, para los valores de α considerados, la tasa de crecimiento máxima se da en $q_2 \approx 0.5$. La mayor inestabilidad ocurre con $q_1 \gg 1$, que es el caso en el que la inestabilidad es independiente del número de onda en la dirección z , dado por $iQ^2 = i\Lambda_{K3} = iq_3$.

En resumen, se ha hecho un análisis de estabilidad para el caso en que el campo magnético se

Inestabilidad Magnética

encuentra sumergido en un gas térmico y sus escalas de altura coinciden. La inestabilidad aparece como consecuencia de la flotabilidad del campo magnético $B^2/8\pi$, ya que como se observa en los casos analizados previamente y, en particular en los que no aparece ningún efecto convectivo, las líneas de campo se deforman. El ondulamiento de las líneas de campo hace que, por efectos de la gravedad, el gas "resbale" a lo largo de ellas hacia las zonas bajas. Este proceso continúa debido a que las zonas altas tendrán menos gas sobre ellas por lo que tenderán a subir más; mientras que las zonas bajas, con cada vez más material acumulado sobre sí, se hundirán cada vez más.

2) Desarrollos Posteriores

A partir del trabajo original de Parker, numerosos análisis han incluido diferentes efectos a fin de hacer al análisis de estabilidad magnética más directamente aplicable a las condiciones del medio interestelar. Por ejemplo, se ha encontrado que la esencia de la inestabilidad magnética no cambia aunque se consideren efectos como la presencia de rayos cósmicos (Parker 198.), la rotación diferencial de la galaxia (Shu 1974), la variación de la aceleración gravitacional con la altura (Parker 1966); capas de campo magnético horizontal cuya dirección relativa varía en ángulos rectos (Parker 1967), rotación continua de la dirección del campo magnético con la altura (Lerche y Parker 1968); deformación del campo en la dirección acimutal alrededor de un cuerpo cilíndrico con simetría rotacional (Parker 1966); resistividad y viscosidad (Parker 1967). Algunos de estos efectos se discuten brevemente a continuación.

a) Rayos Cósmicos.

El campo magnético de la galaxia se ve afectado por la presencia de rayos cósmicos, ya que el campo magnético los acopla al gas. Un análisis de estabilidad considerando a los rayos cósmicos, suponiendo que su movimiento se encuentra totalmente desacoplado del movimiento del gas, que

los rayos cósmicos no son afectados por el campo gravitacional galáctico, que la presión ejercida por los rayos cósmicos es isotrópica (Parker 1979), y que los efectos inerciales del gas relativista son despreciables, ha sido realizado por Mouschovias (1991). Para un campo magnético paralelo al plano galáctico se obtiene una ecuación de equilibrio hidrostático similar a la obtenida anteriormente sin tomar en cuenta los rayos cósmicos, excepto por un término adicional de presión $P_{RC} = \beta P$.

Un tratamiento totalmente análogo al realizado anteriormente arroja el siguiente resultado: para el caso $\kappa_x = 0$ hay inestabilidad siempre que se cumpla la siguiente relación

$$(1 + \alpha + \beta - \gamma)(1 + \alpha + \beta) > 2\alpha\gamma(q_2^2 + Q^2 + \frac{1}{4}). \quad (39)$$

De la relación anterior se puede decir que los rayos cósmicos tienen un efecto desestabilizador, ya que la presencia de β en el lado izquierdo de la relación (39) desestabiliza cierto intervalo de valores de α que de otra forma darían lugar a un régimen estable. Por otro lado se encuentra una tasa de crecimiento que decrece con β . En el límite de α muy pequeña, es decir, cociente de presión magnética a presión térmica muy pequeño, existe inestabilidad a todas las escalas.

Algunos trabajos subsecuentes se han abocado al cálculo de los tiempos de crecimiento de la inestabilidad en presencia de rayos cósmicos. Parker (1966) ha encontrado un tiempo de crecimiento de la inestabilidad comparable al tiempo de caída libre del gas ($\sim 10^7$ años). En otro trabajo Mouschovias (1991), haciendo un análisis bidimensional, obtiene un tiempo mínimo de crecimiento:

$$t_{min} = 2.2 \times 10^7 \left(\frac{T}{600 \text{ K}} \right)^{1/2} \left(\frac{3 \times 10^9 \text{ cms}^{-2}}{g} \right) \text{ años,}$$

el cual resulta suficientemente pequeño como para ser importante para la formación de nubes atrás del choque de la onda de densidad espiral. Basándose en este resultado concluye que la inestabilidad de Parker es más adecuada para la formación de condensaciones a gran escala o complejos de nubes

que para la formación de nubes interestelares individuales, tal como había sido propuesto ya en un trabajo anterior (Mouschovias, Shu y Woodward 1974)

b) *Rotación Diferencial*

En el caso de la rotación diferencial (Shu 1974) se encuentra que una rotación uniforme no detiene la inestabilidad, debido a que el gas siempre puede resbalar suficientemente despacio como para que no se sienta la presencia de la rotación. La rotación se acopla a las perturbaciones solamente por medio de la fuerza de Coriolis. Sin embargo, este efecto, así como el deslizamiento, sí afectan las tasas de crecimiento. La rotación suprime las ondas grandes en la dirección horizontal. La tasa de crecimiento se reduce en presencia de rotación y es máxima cuando la rotación es cero.

Un elemento desestabilizador adicional se encuentra al considerar líneas de campo curvadas con un radio de curvatura R , con $R \leq H$, H es la escala de altura (Asséo et. al. 1978,1980). Esto es debido a que el efecto de la curvatura complementa al de la gravedad. Además resulta que la presión de los rayos cósmicos en las regiones levantadas puede exceder considerablemente la presión del gas; lo cual disminuye el tiempo de crecimiento de la inestabilidad.

c) *Simulaciones Numéricas*

Simulaciones bidimensionales en ausencia de rayos cósmicos (Mouschovias 1974) muestran que la inestabilidad de Parker evoluciona a estados finales de equilibrio, tanto para el gas como para el campo magnético. Dichos estados de equilibrio son estables frente a perturbaciones bidimensionales. En un trabajo posterior (Mouschovias 1975), se hacen conjeturas en el sentido de que si se consideraran rayos cósmicos, se obtendrían básicamente los mismos resultados. Sin embargo, en tal trabajo no se toma en cuenta la posible presencia de fuentes de emisión de rayos cósmicos.

d) *Puntos Débiles de la Inestabilidad de Parker*

Según Elmegreen (1990), la inestabilidad de Parker tiene algunas dificultades para explicar la formación de nubes en el medio interestelar. Dichas dificultades se mencionan a continuación.

Se espera que tubos de flujo adyacentes se muevan y se deformen separadamente, lo cual sugiere que el primer resultado de la inestabilidad sea una estructura caótica o turbulenta, no la formación de complejos de nubes gigantes y bien definidos, (Parker 1967, Asseo et. al. 1978, Lachieze-Ray et. al. 1980, Cesarsky 1980).

Por efecto del campo magnético los rayos cósmicos tendrán problemas para poderse mover rápidamente a lo largo del gas, por lo que en realidad, la tasa de crecimiento debe ser menor que lo calculado, (Kuznetsov y Puskin 1983, Nelson 1985). Otro factor que reduce la tasa de crecimiento lo constituyen las nubes ya existentes sobre las líneas de campo, así como las irregularidades de éste, (Zweibel y Kulsrad 1975).

Otra dificultad de la inestabilidad de Parker en la explicación de nubes aparece debido a que tal inestabilidad opera en equilibrio de presión. Este problema desaparece cuando se toma en cuenta la autogravedad. Sin embargo en tal caso la cantidad de autogravedad requerida para obtener la compresión que hay en las nubes moleculares es tan grande que el papel de la curvatura de las líneas de campo magnético resulta secundario en comparación con el papel de la autogravedad.

Capítulo V

Análisis de Estabilidad en un Medio no Homogéneo

En esta sección se realizará un análisis de estabilidad gravitacional lineal en un medio no homogéneo y en presencia de un campo de velocidad turbulento caracterizado por un espectro de potencia. Este análisis se encuentra motivado por dos hechos importantes: por un lado, la imposibilidad de la inestabilidad clásica de Jeans, analizada anteriormente, para explicar la formación de nubes moleculares pequeñas, por otro lado las evidencias observacionales sobre el carácter turbulento del campo de velocidades en nubes moleculares y sobre el campo de densidades en dichas nubes. Este análisis es una extensión natural del trabajo realizado por Bonazzola et al. (1987) en el que se estudia la estabilidad gravitacional de un medio con densidad uniforme considerando la existencia de un campo de velocidad turbulento. A continuación se resumirán algunos antecedentes importantes para la fundamentación de este cálculo.

1) Antecedentes

Los movimientos internos de las nubes moleculares son muy complejos y el conocimiento

sobre ellos continúa siendo incompleto. Al estudiar las líneas de emisión de ^{12}CO y ^{13}CO , se han encontrado evidencias de que las nubes moleculares contienen núcleos densos en su interior los cuales se pueden colapsar sin evidencias de un colapso global de la nube dentro de la que están localizadas (Myers 1987). Además se encuentra que las líneas mencionadas anteriormente presentan ensanchamientos que corresponden a movimientos supersónicos en todas las nubes moleculares, los cuales se consideran turbulentos. Las propiedades de los movimientos turbulentos en nubes moleculares fueron cuantificadas por primera vez por Larson en 1981 y extendidas posteriormente por varios autores entre los que se encuentran Leung, Kutner y Mead (1982), Myers (1983), Dame et al. (1986) Falgarone y Pérault (1987), Solomon et al. (1987), Scoville et al. (1987) y Myers y Goodman (1988). Se ha encontrado que en un gran número de nubes moleculares y núcleos, con tamaños $0.1 \text{ pc} < R < 100 \text{ pc}$, la dispersión de velocidades Δv y la densidad de partículas n están relacionadas con el tamaño característico de las nubes de la siguiente manera: $\Delta v \propto R^{1/2}$ y $n \propto R^{-1}$, respectivamente, donde Δv es ancho a potencia media de las líneas. Por lo tanto, estas estructuras se encuentran aproximadamente en un estado de equilibrio virial entre la energía potencial gravitacional y la energía cinética (Myers 1988). Aunque las relaciones anteriores se conocen como Leyes de Larson, Larson no las formuló de esta manera. Los resultados obtenidos por Larson apuntaban hacia un exponente de $1/3$ en la primera relación, es decir, un comportamiento turbulento del tipo del de Kolmogoroff que como se verá en la próxima sección, corresponde al caso de turbulencia isotrópica y homogénea en un flujo incompresible con cascada de energía. Estudios posteriores, mencionados anteriormente, han llegado a la conclusión de que el exponente en la relación entre dispersión de velocidades y longitud característica es más cercano a $1/2$. La relación entre las leyes de escala mencionadas anteriormente y el equilibrio virial se puede ver directamente si se recuerda la condición de equilibrio virial $\frac{GM}{R} \sim \Delta v^2$.

De lo anterior resulta claro que para estudiar la estabilidad de nubes moleculares es necesario

considerar tanto el campo de velocidades turbulento, como el hecho de que su densidad y su tamaño característico no son independientes, sino que obedecen una ley de escalas. Dada la necesidad de conocer algunas de las definiciones básicas de la teoría de turbulencia, en la siguiente sección se hará un breve resumen al respecto.

2) Turbulencia

2.1) Definiciones.

Cuando en un fluido las fuerzas inerciales son mucho mayores que las fuerzas viscosas, causando que sus movimientos sean fluctuantes y desordenados, se dice que el flujo es turbulento (e.g. Hinze 1975, Lesieur 1990). Aunque no existe una definición única de turbulencia, sí existen requerimientos mínimos para clasificar a un flujo como turbulento. En un flujo turbulento hay una gran cantidad de escalas excitadas, es decir, existen regiones del fluido que se mueven de manera coherente ("eddies"), con escalas características desde muy grandes hasta muy pequeñas. Además, todas las escalas se encuentran conectadas, es decir, la energía se puede transferir entre eddies de diversos tamaños. En general los flujos de la naturaleza son casi siempre turbulentos.

Es de notar que, aunque el estudio de la turbulencia se basa en ecuaciones totalmente deterministas (las ecuaciones hidrodinámicas) de manera que, en principio, cualquier detalle del movimiento turbulento se puede determinar si las condiciones iniciales están completamente definidas, en la práctica resulta muy complicado predecir el comportamiento detallado de un flujo turbulento, tanto por la imposibilidad de definir exactamente las condiciones iniciales, como por limitaciones de cálculo. Numéricamente, los errores de cálculo crecen exponencialmente, aunque, como no existe una solución analítica en el caso general, salvo para casos muy particulares, es imperativa la utilización de cálculos numéricos.

Debido a la naturaleza caótica de los movimientos turbulentos, resulta práctico describir un flujo turbulento en términos de cantidades promedio. La descripción estadística de la turbulencia se basa en la consideración de que las variables físicas se pueden dividir en una parte promedio y otra parte fluctuante. Por lo tanto, en cada punto la velocidad se puede escribir como $\vec{U} + \vec{u}$, donde $\langle u \rangle = 0$. La intensidad de la turbulencia se define como $\langle u^2 \rangle$, y la energía cinética por unidad de volumen asociada a la turbulencia es $T = \frac{1}{2} \rho \langle u^2 \rangle$. Estadísticamente se define el grado de correlación de las variables del fluido ya que movimientos en puntos cercanos pueden estar correlacionados en diferentes grados. En particular, la correlación espacial entre dos fluctuaciones de velocidad se define como:

$$R_{ij} = \langle u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle, \quad (1)$$

que en general es una cantidad tensorial. Si las fluctuaciones de velocidad son independientes entre sí, entonces su correlación es cero; el tensor de correlación R_{ij} es una medida de la probabilidad de que las fluctuaciones de velocidad evaluadas en los puntos \vec{x} y $\vec{x} + \vec{r}$ tengan el mismo valor. Si la turbulencia es homogénea, entonces el tensor de correlación es sólo función del vector de separación \vec{r} . El tensor de espectro de la turbulencia se define como la transformada de Fourier del tensor de correlación

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) R_{ij}(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (2)$$

por lo que

$$R_{ij} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \Phi_{ij}(\vec{k}) d\vec{k}. \quad (3)$$

De las definiciones anteriores, se tiene que

$$R_{ii} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \Phi_{ii}(\vec{k}) d\vec{k}, \quad (4)$$

de donde

$$R_{ii}(0) = \langle u_i u_i \rangle = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ii}(\vec{k}) d\vec{k} \equiv 3\mu^2, \quad (5)$$

donde μ es la velocidad cuadrática media, definida como $\mu^2 \equiv \frac{1}{3} \langle u_i u_i \rangle$.

En general $\Phi_{ii}(\vec{\kappa})$ depende de la dirección del vector número de onda; esta dependencia hace a $\Phi_{ii}(\vec{\kappa})$ difícil de manipular. Para eliminar la información direccional adicional se integra el espectro anterior sobre cascarones esféricos alrededor del origen del espacio de números de onda. De esta forma se obtiene un espectro que es función de la magnitud del número de onda y cuyo valor representa la energía cinética total en ese número de onda. Así pues

$$\varepsilon(\kappa) \equiv \oint \Phi_{ii}(\vec{\kappa}) d\sigma, \quad (6)$$

donde $d\sigma$ es el elemento de área sobre el cascarón. Integrando $\varepsilon(\kappa)$ sobre todos los posibles valores de la magnitud de κ se obtiene la energía cinética total por unidad de masa asociada con los movimientos turbulentos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \varepsilon(\kappa) d\kappa &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\oint \Phi_{ii}(\vec{\kappa}) d\sigma \right] d\kappa \\ &= \frac{1}{2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ii}(\vec{\kappa}) d\kappa = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle = \frac{3}{2} \mu^2 = \frac{1}{2} R_{ii}(0). \end{aligned} \quad (7)$$

2.2) Cascadas Turbulentas y formas del espectro.

El caso particular de la turbulencia homogénea e isotrópica en un medio incompresible es uno de los más estudiados, debido a que las suposiciones anteriores simplifican notablemente la formulación de correlaciones espaciales, ya que estas últimas dejan de depender de la orientación y localización del vector separación \vec{r} . En este tipo de turbulencia el movimiento decae únicamente por disipación viscosa, la cual se encuentra asociada con números de onda grandes, es decir, escalas pequeñas. En los flujos incompresibles tradicionalmente estudiados, como en el seminal trabajo de Kolmogoroff (1941), se supone que la energía que restituye las pérdidas viscosas es inyectada principalmente en las escalas más grandes. A partir de estas escalas se generan estructuras coherentes

con tamaños característicos cada vez menores. El proceso continúa hasta que la escala de longitud es suficientemente pequeña como para que la disipación viscosa sea importante. Esta secuencia es conocida como *cascada de energía*. La disipación está determinada por la tasa de inyección de energía a la cascada a través de las escalas grandes y es independiente de la dinámica de las escalas pequeñas (ver, e.g., Lesieur 1990), por lo que es independiente de la magnitud de la viscosidad. La energía de los números de onda suficientemente grandes es independiente del proceso de producción de energía, por lo que su espectro de potencia depende sólo del número de onda, de la tasa de disipación y de la viscosidad. Si la cascada de energía se extiende sobre un intervalo de números de onda suficientemente grande, entonces puede haber un intervalo de escalas, llamado *subrango inercial*, en el que todavía no es notable la acción de la viscosidad, pero cuya dinámica no depende del mecanismo detallado de inyección de energía. En ese caso, por medio de un análisis dimensional Kolmogoroff (1941) encontró que

$$\varepsilon(\kappa) = A \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad (8)$$

donde A es una constante numérica y ε es la tasa de disipación. El resultado anterior es conocido como la *ley de $-5/3$* de Kolmogoroff, y es un resultado bastante aceptado con amplio respaldo experimental, aunque en las escalas más pequeñas del rango inercial se presentan ligeras desviaciones debido a la no uniformidad de la disipación. Existe una analogía del espectro de Kolmogoroff para flujos en dos dimensiones, $\varepsilon(\kappa) \sim \kappa^{-3}$ (Kraichnan 1967), que corresponde a la transferencia de entrofia (definida como la vorticidad cuadrática media por $\Omega \equiv \int |\nabla \times \bar{u}|^2 dV$) hacia escalas pequeñas.

Para estudiar la turbulencia en el caso de un flujo compresible es conveniente separar el campo de velocidad en dos partes; por un lado la parte incompresible o rotacional y, por el otro, la parte compresible, cada una con su correspondiente espectro de energía. Para la parte compresible se han propuesto teóricamente dos espectros del tipo del de Kolmogoroff con distintas leyes de

potencia para dos regímenes diferentes. Zakharov y Sagdeev (1970) propusieron que $\varepsilon \sim \kappa^{-2/3}$ cuando no hay choques, mientras que Saffman (1971) propuso $\varepsilon \sim \kappa^{-2}$ en presencia de choques, independientemente de la dimensionalidad del sistema. Passot et al. (1988) han hecho simulaciones numéricas en dos dimensiones en las que se obtiene un exponente cercano a -2 para la parte compresible del espectro, en presencia de choques. Para el caso bidimensional, puesto que el espectro de la parte compresible tiene una pendiente menor (-2) que la parte incompresible (-3), se espera que el espectro total sea dominado por la primera, por lo que resulta plausible considerar que, en este caso, tenga un exponente de -2 . Sin embargo, para el caso tridimensional el espectro de la parte incompresible tiene una pendiente menor ($-5/3$) que el de la parte compresible, por lo que es posible que el espectro resultante esté dominado por la parte incompresible, presentando una pendiente de $-5/3$. Por otro lado, resultados numéricos recientes de Shebalin (1993) sugieren dominación de la parte compresible aún en tres dimensiones, aunque estas simulaciones poseen una muy baja resolución (64^3), por lo que no muestran un subrango inercial bien desarrollado. Así pues, a falta de evidencia conclusiva, en la sección 4) consideraremos ambas posibilidades para el espectro.

3) Estabilidad gravitacional de un medio no homogéneo en reposo.

En esta sección presentaremos un ejemplo sencillo de cómo la presencia de una ley de escalas en la distribución de densidad de las nubes en un medio en reposo puede alterar significativamente el criterio tradicional de Jeans para la inestabilidad gravitacional. En lo que sigue, definiremos como una nube de tamaño L a un máximo local de la densidad cuando ésta se observa con una resolución igual a L . Entonces, más precisamente, pretendemos estudiar la estabilidad gravitacional de una sucesión de nubes que satisfacen una ley de escala, y en donde las más densas y pequeñas posiblemente se encuentran dentro de las mayores y de menor densidad. Supondremos que la

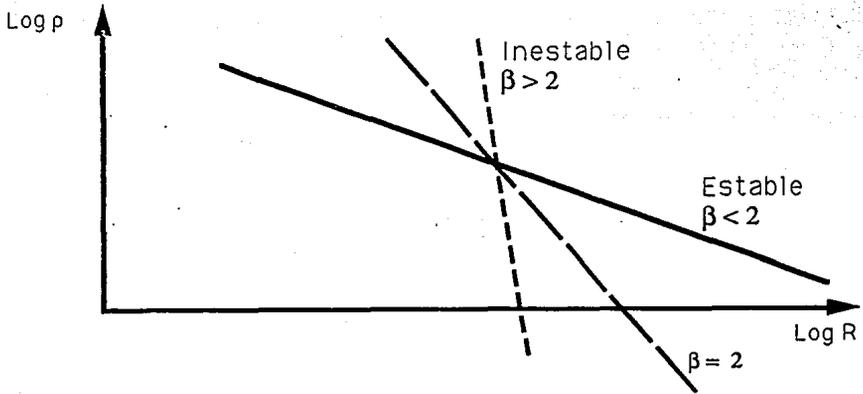


Figura 5.1 Estabilidad gravitacional en un medio no homogéneo.

densidad promedio de las nubes satisface una ley de escala de la forma

$$\rho = BL^{-\beta}, \quad (9)$$

donde B es un factor de proporcionalidad y β es un parámetro libre. Nos interesa entonces encontrar el valor de β tal que cada escala sea su propia longitud de Jeans λ_J , es decir, $L = \lambda_J$, donde $L \sim 1/\kappa$. Del capítulo (II), tenemos que, en general

$$\lambda_J = \left(\frac{\pi c^2}{G\rho_0} \right)^{1/2},$$

donde c es la velocidad isotérmica del sonido. Si c es constante, entonces podemos escribir

$$\lambda_J^2 = \frac{C}{\rho} \quad \text{con} \quad C = \frac{\pi c^2}{G}. \quad (10)$$

De las ecuaciones (9) y (10) tenemos que la ley de escala para la densidad para la cual todas las nubes tienen un tamaño igual a λ_J es

$$\rho(L) \propto L^{-2}, \quad (11)$$

por lo que habrá inestabilidad siempre que $\beta \geq 2$. Este resultado se ilustra en la figura 5.1, y corresponde al caso en que la fuerza de atracción gravitacional aumenta más rápidamente que la presión térmica al disminuir el tamaño de la nube.

Este análisis, a pesar de ser poco realista debido a la suposición de que el medio se encuentra en reposo, ilustra claramente el efecto, sobre la inestabilidad gravitacional, de una ley de escalas para la densidad en la que nubes de menor tamaño están caracterizadas por mayores densidades. En la siguiente sección presentaremos un análisis de inestabilidad lineal para el caso más realista de un medio con una ley de escala para la densidad de las nubes, y un campo de velocidades turbulento.

4) Estabilidad gravitacional de un medio no homogéneo, turbulento.

En varios trabajos se ha considerado el efecto de la presencia de turbulencia en la estabilidad de nubes moleculares. Chandrasekhar (1951) incluyó dentro de su análisis un término de presión turbulenta, pero sin considerar que la energía turbulenta puede variar con la escala, es decir, sin tomar en cuenta el espectro de potencia. Más recientemente, Bonazzola et al. (1987) realizaron un análisis de estabilidad para el Medio Interestelar frío, caracterizando al campo turbulento de velocidades por medio de su espectro e incluyendo a éste dentro de su análisis de estabilidad gravitacional. En esta sección se estudiará la estabilidad gravitacional considerando tanto el espectro de potencia del campo turbulento de velocidades como el hecho de que la densidad de las nubes cumple una ley de escala. Supondremos que la densidad *promedio* de las nubes satisface una ley de escala de la forma (9) y que el campo de velocidades se encuentra caracterizado por un espectro de potencia

$$\varepsilon(\kappa) = A\kappa^{-\alpha}, \quad (12)$$

con $\alpha > 1$, para que la energía turbulenta definida en (7) sea finita.

Seguindo a Chandrasekhar (1951) y a Bonazzola et al.(1987), describimos al medio por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{Ecuación de Continuidad.} \quad (13)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad \text{Ecuación de Poisson.} \quad (14)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\rho \nabla \phi - c^2 \nabla \rho - \nabla P_T(\kappa) \quad \text{Ecuación de Momento,} \quad (15)$$

donde $c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}$ es la velocidad del sonido. Nótese que la ecuación de momento es una ecuación semifenomenológica, ya que se ha añadido el término modelo $\nabla P_T(\kappa)$ para representar el efecto de la turbulencia como una presión efectiva. En realidad, el efecto de la turbulencia está contenido dentro del término no lineal $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$. Sin embargo, puesto que este término se desprecia en un análisis de estabilidad lineal, es necesario introducir un término extra de "presión turbulenta". El uso de este tipo de términos es común; por ejemplo, Lizano y Shu (1989) han escrito una ecuación de estado en donde la presión contiene una contribución turbulenta, y Bonazzola et al.(1987) han presentado una simulación numérica con la que fundamentan la relación

$$\nabla P_T(\kappa) = \frac{1}{3} \mu^2(\kappa) \nabla \rho, \quad (16)$$

donde

$$\mu^2(\kappa) = \int \varepsilon(\kappa) d\kappa, \quad (17)$$

justificando así un tratamiento de la presión turbulenta análogo al de la presión térmica. De manera similar, se supondrá que el potencial gravitacional en cada escala es el potencial gravitacional correspondiente a una densidad cuyo valor es el valor de la densidad promedio en tal escala. Así pues, los efectos de las escalas más pequeñas se considerarán tanto en el término de presión turbulenta como en la suposición de densidad uniforme dentro de la escala estudiada. La ecuación de momento es, por lo tanto, válida sólo para escalas con longitudes características mayores que

$1/\kappa$, ya que no se ha considerado el detalle de la dinámica de las escalas pequeñas sino que sólo se han modelado sus efectos.

En base a las consideraciones anteriores, reescribimos la ecuación (15) como:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\rho \nabla \phi - (c^2 + \frac{1}{3} \mu^2(\kappa)) \nabla \rho, \quad (18)$$

con

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \bar{\rho}(\kappa),$$

donde $\bar{\rho}(\kappa)$ es la densidad promedio de las nubes con tamaño $\sim \frac{1}{\kappa}$. Supondremos que la velocidad promedio del conjunto de nubes es cero de manera que el conjunto de nubes se encuentra en un estado de equilibrio inicial, aunque este estado no corresponde a un estado de reposo y de densidad uniforme, sino a los valores promedio sobre campos azarosos, es decir a los valores dados por una expresión como (5) para cada variable. El estado inicial de equilibrio es ligeramente perturbado. Entonces

$$\rho \rightarrow \bar{\rho} + \rho_1,$$

$$\phi \rightarrow \bar{\phi} + \phi_1,$$

$$\bar{v} \rightarrow \bar{v} + \bar{v}_1,$$

donde los valores con subíndices 1 son las perturbaciones. Nótese que las perturbaciones no corresponden a las fluctuaciones turbulentas, sino a pequeñas perturbaciones sobre un estado de equilibrio imaginario en el que las variables son iguales a los valores promedio del fluido original. Las fluctuaciones turbulentas no pueden ser consideradas pequeñas, ya que tanto la ley de escalas para la densidad como el espectro de energía para la velocidad son leyes de potencia, que implican variaciones de amplitud arbitrariamente grandes para escalas suficientemente distintas entre sí.

Sustituyendo las nuevas variables en las ecuaciones (13), (14) y (18), suponiendo que los valores promedio satisfacen también esas ecuaciones y que las perturbaciones son suficientemente pequeñas

como para poder despreciar los términos no lineales, encontramos las ecuaciones que describen la evolución de las perturbaciones. Como ejemplo mostramos los cálculos para la ecuación de momento (18), en una dimensión. Sustituyendo se obtiene:

$$\bar{\rho} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \bar{p} (v_1 \cdot \nabla) v_1 + \rho_1 (v_1 \cdot \nabla) v_1 = -\bar{\rho} \nabla \bar{\phi} - \bar{p} \nabla \phi_1 - \rho_1 \nabla \bar{\phi} - \rho_1 \nabla \phi_1 - (c^2 + \frac{1}{3} \mu^2) (\nabla \bar{p} + \nabla \rho_1).$$

Si se eliminan los términos no lineales, obtenemos

$$\bar{\rho} \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\bar{\rho} \nabla \bar{\phi} - \bar{p} \nabla \phi_1 - \rho_1 \nabla \bar{\phi} - (c^2 + \frac{1}{3} \mu^2) (\nabla \bar{p} + \nabla \rho_1).$$

Por último, utilizando el hecho de que los valores promedio satisfacen las mismas ecuaciones, encontramos

$$\bar{\rho} \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\bar{\rho} \nabla \phi_1 - (c^2 + \frac{1}{3} \mu^2) \nabla \rho_1. \quad (19)$$

Si se hace lo mismo con las ecuaciones de continuidad y de Poisson, encontramos las siguientes ecuaciones para las perturbaciones:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{\rho} v_1) \quad (20)$$

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (21)$$

Ahora tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales, por lo que proponemos soluciones con forma exponencial

$$P_1 \longrightarrow P_1 \exp i(\kappa x - \omega t),$$

donde P es cualquier variable. Sustituyendo la forma anterior para cada una de las variables en la ecuaciones (19), (20) y (21) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$-i\omega \bar{\rho} v_1 = -i\kappa \bar{\rho} \phi_1 - (c^2 + \frac{1}{3} \mu^2(\kappa)) i\kappa \rho_1 \quad (22)$$

$$-\kappa^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1 \quad (23)$$

$$-i\omega \rho_1 = -i\kappa \bar{\rho} v_1. \quad (24)$$

De (23) y (24),

$$\phi_1 = -\frac{4\pi G\rho_1}{\kappa^2} \quad \text{y} \quad v_1 = \frac{\omega\rho_1}{\bar{\rho}\kappa}.$$

Sustituyendo en (22) encontramos la relación de dispersión

$$\omega^2 = -4\pi G\bar{\rho}(\kappa) + \left(c^2 - \frac{1}{3}\mu^2(\kappa)\right)\kappa^2. \quad (25)$$

Para que las perturbaciones crezcan exponencialmente con el tiempo, es decir, para que haya inestabilidad, se necesita que ω sea imaginario, por lo tanto que $\omega^2 < 0$. La condición anterior se satisface si

$$\left(c^2 - \frac{1}{3}\mu^2(\kappa)\right)\frac{\kappa^2}{\bar{\rho}} < 4\pi G. \quad (26)$$

Para escribir la condición anterior en términos de κ se utilizan las ecuaciones (12) y (17) para calcular μ^2 .

$$\mu^2 = \int_{\kappa}^{\infty} A\kappa'^{-\alpha} d\kappa',$$

integrando y evaluando obtenemos

$$\mu^2(\kappa) = \frac{A\kappa^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \quad (27)$$

Además, como mencionamos anteriormente $\bar{\rho}$ satisface una ley de escala como la de la ecuación (11). Por lo tanto el criterio (26) queda de la siguiente forma

$$c^2\kappa^{2-\beta} + \frac{A}{3(\alpha-1)}\kappa^{3-\alpha-\beta} < 4\pi GB. \quad (28)$$

La condición de estabilidad también se puede escribir en términos de la longitud de onda $\lambda = 2\pi/\kappa$ como

$$(2\pi)^{2-\beta}c^2\lambda^{\beta-2} + \frac{(2\pi)^{3-\alpha-\beta}A}{3(\alpha-1)}\lambda^{\alpha+\beta-3} < 4\pi GB. \quad (29)$$

En base a los valores de los exponentes α y β , distinguiremos los siguientes casos:

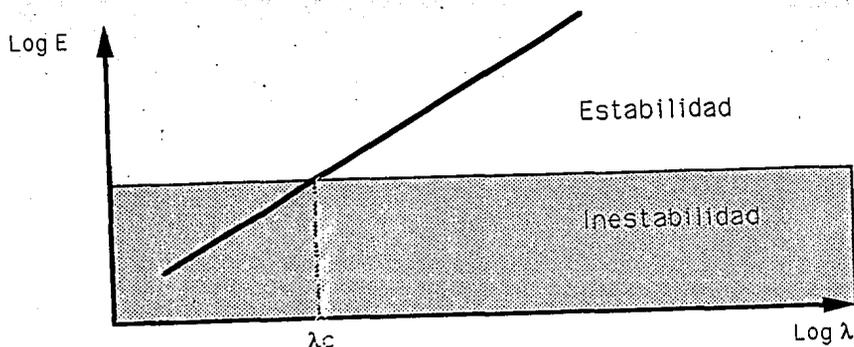


Figura 5.2. Escalas de Estabilidad para $\beta > 2$ y $\alpha > 1$

(i) $\beta > 2$. En este caso $\alpha + \beta > 3$ siempre, ya que $\alpha > 1$. Las desigualdades anteriores se satisfacen para cualesquiera $\alpha > 1$ y $\beta > 2$, y la condición (29) se cumple para toda λ mayor que una cierta λ_c . Por lo tanto, cuando $\beta > 2$, como se observa en la figura 5.2, las escalas pequeñas son inestables independientemente del índice α del espectro de potencia. Este es un resultado interesante, ya que representa una inversión total del criterio de Jeans, en el caso de una ley de escalas para la densidad de las nubes con un índice espectral suficientemente grande. Esto corresponde al caso en que la densidad de las nubes crece aún más rápidamente que lo necesario para que sean inestables según el criterio de Jeans, conforme el tamaño de las nubes disminuye, como se vio en la sección *iii*).

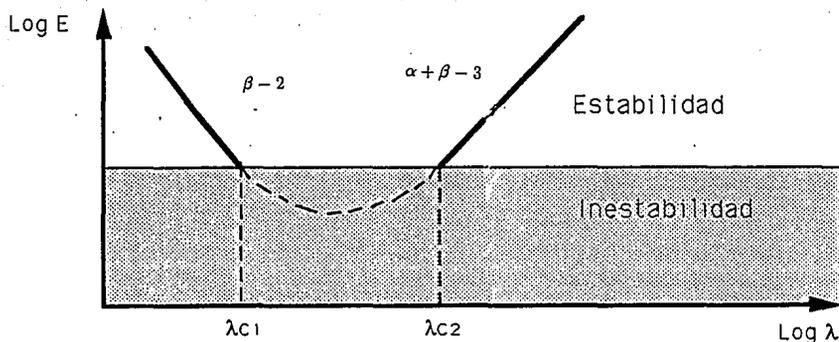


Figura 5.3. Escalas de Estabilidad para $\beta < 2$ y $\alpha < 3 - \beta$.

(ii) Si $\beta < 2$. En este caso existen dos posibilidades para α : a) $\alpha < 3 - \beta$ ó, b) $\alpha > 3 - \beta$. En el caso (a) los exponentes de λ en ambos términos del lado izquierdo de la desigualdad (27) son negativos. El resultado que se obtiene en este caso es similar al de Jeans: una escala máxima a partir de la cual el medio se vuelve inestable. En la figura 5.3 se muestra una gráfica de $\log E$ contra $\log \lambda$, con $E \equiv (2\pi)^{2-\beta} C^2 \lambda^{\beta-2} + \frac{(2\pi)^{3-\alpha-\beta} A}{3(\alpha-1)} R^{\alpha+\beta-3}$, donde se representa este comportamiento.

Por otro lado en la figura 5.4 se presenta la gráfica correspondiente para el caso (b). Como se puede observar, ahora puede existir un intervalo de escalas de tamaño intermedio que son inestables, mientras que tanto las escalas menores como las mayores son estables. En particular, el caso límite en el que $\beta = 1$ y $\alpha = 2$ resulta particularmente interesante. En este caso se encuentra

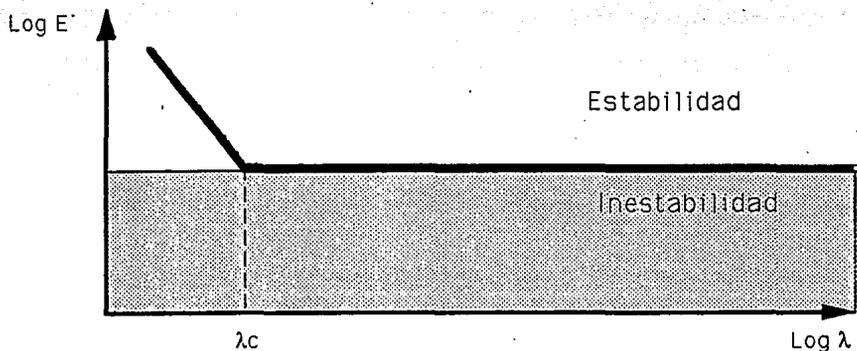


Figura 5.4. Escalas de Estabilidad para $\beta = 1$ y $\alpha = 2$

un comportamiento como el que se muestra en la figura 5.4. Todas las escalas son estables, aunque existe una cierta escala crítica a partir de la cual la estabilidad es marginal. Además, suponiendo que es posible equiparar la velocidad de dispersión obtenida por medio de los anchos de línea Δv y la velocidad cuadrática media, definida más arriba como μ , se recuperan las leyes de Larson (1981), mencionadas anteriormente. En efecto, de la ecuación (27), y utilizando

$$\varepsilon(\kappa) = \frac{dE}{d\kappa} \sim \frac{\mu^2}{\kappa},$$

se obtiene que, si $\alpha = 2$, $\mu \sim \kappa^{-1/2}$. Utilizando la ecuación (9) y suponiendo que $\Delta v \sim \mu$, obtenemos las leyes de escala:

$$\Delta v \sim \kappa^{-1/2} \quad \text{y} \quad \rho \sim \kappa,$$

de acuerdo con las relaciones de Larson. Por lo tanto, aunque este resultado es análogo al obtenido

por Bonazzola et al. (1987), tiene la virtud adicional de que para una densidad que se comporta tal como se observa, es decir, siguiendo una ley de escala con exponente -1 , se obtiene una α crítica típica de un espectro de choques, que es cercana a la observada y justificada teóricamente por medio de simulaciones numéricas bidimensionales por Passot et al. (1988), en el contexto de la turbulencia compresible. En otras palabras, el resultado obtenido en el caso ii. b) se satisface en condiciones más comúnmente encontradas en las nubes moleculares, que el resultado de Bonazzola et al. (1987), que requiere un índice espectral $\beta > 3$.

Es importante hacer notar, sin embargo, que la validez de la equiparación entre Δv y μ no es clara, ya que la primera es una cantidad que se obtiene de manera integrada en espacio real sobre un cilindro cuyo largo depende de la profundidad óptica del medio, mientras que la segunda, definida en (5), es resultado de una integración esférica en espacio de Fourier (ver por ejemplo Kleiner y Dickman, (1985)).

Otro caso de interés es el de un espectro tipo Kolmogoroff, es decir, en el que $\alpha = 5/3$, que puede ser importante en el caso de flujos tridimensionales si la parte rotacional del espectro domina sobre la parte compresible, como se discutió en la sección ii.2). En este caso la desigualdad (27) toma la siguiente forma:

$$(2\pi)^{2-\beta} C^2 \lambda^{\beta-2} + \frac{(2\pi)^{\frac{4}{3}-\beta} A}{2} \lambda^{\beta-\frac{4}{3}} < 4\pi GB.$$

Por lo tanto se obtiene una β crítica de $4/3$, que implica las siguientes leyes de escala, todavía bajo la suposición de que $\Delta v \sim \mu$:

$$\Delta v \sim \kappa^{-1/3} \quad \text{y} \quad \rho \sim \kappa^{1/3}.$$

Se observa que en este caso la ley de escalas para la densidad requerida para estabilizar todas las escalas es un poco más estricta que en el caso $\Delta v \sim \kappa^{1/2}$.

Capítulo VI

Conclusiones

En el presente trabajo se presentaron esencialmente dos aspectos del papel de las inestabilidades como generadoras de estructura en el medio interestelar. En la primera parte, que incluye los capítulos II, III, y IV se realizó una revisión de algunas de las inestabilidades que se consideran más importantes para la formación de estructura en el medio interestelar, a saber, la gravitacional, la térmica y la magnética. En la segunda parte se realizó un análisis de estabilidad gravitacional para un medio en el que la distribución de densidades satisface una ley de escalas y, existe un campo de velocidades turbulento.

Del trabajo de revisión sobresalen los siguientes puntos. La inestabilidad gravitacional en su versión más simple, es resultado de una falta de balance entre la fuerza producida por la presión térmica y la fuerza producida por la autogravedad del medio. El resultado clásico de la inestabilidad gravitacional, obtenido por Jeans en 1902, es una escala de tamaño crítica mínima λ_J , dada por la expresión (15) de capítulo II, a partir de la cual todas las escalas mayores se vuelven inestables.

A partir de la longitud de Jeans se puede definir también una masa crítica m_J . El valor típico de esta masa para el medio interestelar frío es de $\sim 10^7 M_\odot$, por lo que esta inestabilidad puede explicar la formación de los llamados complejos gigantes de nubes. La inestabilidad gravitacional ha sido objeto de numerosas modificaciones en las que se han incluido procesos físicos tales como rotación diferencial, deslizamiento, campos magnéticos, movimientos turbulentos, etc., así como diversas geometrías; con base en las evidencias observacionales sobre el medio interestelar. Sin embargo, sólo con la consideración de la presencia de movimientos turbulentos de la forma en que lo han hecho Bonazzola y col. (1987), se han podido obtener resultados que expliquen el colapso de núcleos en el interior nubes globalmente estables.

En el capítulo III se estudió la inestabilidad térmica. La inestabilidad térmica se asocia con la naturaleza de los cambios en la función generalizada de calor ℓ a presión o a entropía constante. En el análisis original de Field (1965), se encuentran dos modos de crecimiento para las perturbaciones: el modo de condensación y el modo acústico. El primero es el resultado de cambios isobáricos de ℓ con la temperatura y siempre está asociado con un proceso de expansión o contracción continuada. El modo acústico puede tener componentes ondulatorias, mismas que se relacionan con las ondas sonoras debido a que se presentan en condiciones aproximadamente adiabáticas (isentrópicas). Los criterios para la inestabilidad térmica están dados por las desigualdades (21) y (24) del capítulo III. La presencia de conductividad térmica tiende a reducir la inestabilidad, estabilizando escalas pequeñas. Mientras mayor sea el valor de la conductividad térmica, mayor será la escala a partir de la cual comience la estabilización.

La tercera inestabilidad estudiada fue la inestabilidad magnética, es decir, la estabilidad de un medio compuesto por gas térmico y campos magnéticos, cuyas escalas de altura coinciden, confinados a una capa delgada por una fuerza de gravedad vertical. La inestabilidad magnética

surge como consecuencia de la flotabilidad del campo magnético, $\frac{B^2}{8\pi}$, la cual produce deformaciones en las líneas de campo, aún sin intervención de fuerzas convectivas. El ondulamiento de las líneas de campo en dirección vertical hace que el gas resbale hacia las partes bajas por efecto de la gravedad. Las deformaciones continúan creciendo porque cada vez se acumula más material en las zonas bajas, mientras el peso sobre las partes altas disminuye. En presencia de rayos cósmicos se produce básicamente el mismo fenómeno, aunque éstos tienen un efecto desestabilizador, volviendo al medio inestable para un intervalo de valores de la intensidad del campo magnético en el que de otra manera el medio sería estable. Los criterios de inestabilidad magnética fueron resumidos en la tabla 4.1. La inestabilidad magnética es apropiada para explicar la formación de condensaciones a gran escala o de complejos de nubes ($M \sim 10^5 M_{\odot}$), no para explicar la formación de nubes individuales.

En el capítulo V, se presentan dos cálculos sencillos por medio de los cuales se estudia la estabilidad gravitacional de un medio nohomogéneo, cuyo campo de densidades se caracteriza por una ley de escalas, ya que observacionalmente se ha demostrado que la densidad del medio interestelar se comporta de esa forma (ver e.g. Myers 1990). En el primer caso se supone que el medio se encuentra inicialmente en reposo y se busca el caso límite en el que cada escala es su propia longitud crítica λ_J . Se obtiene como resultado la necesidad de que la ley de escalas tenga un exponente $\beta > 2$, el cual resulta mayor al observado $\beta = 1$. En el segundo cálculo se considera, además, la presencia de un campo de velocidades turbulento caracterizado por un espectro de energía descrito por una ley de potencias. En este caso se obtiene una condición de inestabilidad (condición (29), cap. V) que depende tanto de la inclinación de la ley de escalas para la densidad, como de la inclinación del espectro de energía. Los tres resultados más importantes que se encuentran para ciertas combinaciones de los valores de los exponentes, son: una inversión total del criterio de Jeans independientemente del espectro de energía, (condición (11), cap. V),

la posibilidad de inestabilidad únicamente en un rango de escalas intermedias, con lo cual se puede explicar el colapso de escalas pequeñas en el interior de escalas grandes gravitacionalmente estables y, la recuperación de las leyes de Larson para el caso en que los exponentes de las leyes de potencias para la densidad y el espectro de energía tienen los valores observados. El segundo de los resultados mencionados anteriormente es similar al obtenido por Bonazzola et al. (1987). Sin embargo, las condiciones en las que aparece son más cercanas a las condiciones observadas en el medio interestelar, ya que se requiere que el exponente del espectro de energía sea $\alpha > 3 - \beta$, donde β es el exponente asociado a la ley de escalas para la densidad. Si $\beta = 1$, tal como se observa (Myers 1990), entonces el exponente crítico para el espectro de potencia será $\alpha = 2$, siendo este valor el aceptado observacionalmente (Myers 1990).

Referencias

- Asséo, E., Cesarsky, C. J., Lachieze-Ray, M., y Pellat, R., 1978, *Ap. J.*, **225**, L21.
 Asséo, E., Cesarsky, C. J., Lachieze-Ray, M., y Pellat, R., 1980, *Ap. J.*, **237**, 725.
 Balbus, S. A., 1988, *Ap. J.*, **328**, 395.
 Balbus, S. A., y Cowie, L. L., *Ap. J.*, **276**, 114.
 Bel, N., y Shartzman, E., 1958, *Rev Mod. Phys.*, **30**, 1015.
 Bonazzola, S., Falgarone, E., Heyvaert, J., Peraut, M., Puget, J. L., 1987, *Astr. Ap.*, **172**, 293.
 Boulesteix, J., Courtes, G., Lava, A., Monnet, G., y Petir, H., 1974, *Astr. Ap.*, **37**, 33.
 Bowers, F., y Deeming, T., 1984, *Astrophysics II. Interstellar Matter and Galaxies*, (Jones and Bartlett Publishers, inc.).
 Callen, H. B., 1985, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, (John Wiley & Sons).
 Cesarsky, C. J., 1980, *An. Rev. Astr. Ap.*, **18**, 289.
 Cowie, L.L., 1981, *Ap. J.*, **245**, 66.
 Chandrasekhar, S., 1951, *Proc. Roy. Soc. London, A.*, **210**, 26.
 Chandrasekhar, S., 1954, *Ap. J.*, **119**, 17.
 Chandrasekhar, S., 1964.....
 Chandrasekhar, S., y Fermi, E., 1953, *Ap. J.*, **118**, 116.
 Chiudery, C., y Van Hoven, G., 1979, *Ap. J.*, **232**, L69.
 Cox, D. P., 1990, en *Fragmentation of Molecular Clouds and Star Formation*, IAU symp 147, eds. Falgarone, E., Boulanger, F., y Duvert, G., (Kluwer Academic Publishers).
 Cox, D. P., 19.., en *Structure and Dynamics of Interstellar Medium*, IAU, coll. 120.
 Dame, T., Elmegreen, B., Cohen, R., y Thaddeus, P., 1986, *Ap. J.*, **305**, 892.
 Defow, R. J., 1970, *Ap. J.*, **160**, 659.
 Deissler, R. J., 1984, *Rev. Mod. Phys.*, **56**, 223.
 Elmegreen, B. G., 1979, *Ap. J.*, **231**, 372.
 Elmegreen, B. G., 1987, *Ap. J.*, **312**, 626.
 Elmegreen, B. G., 1989a, *Ap. J.*, **338**, 178.
 Elmegreen, B. G., 1989b, *Ap. J.*, **347**, 561.
 Elmegreen, B. G., 1993, en *Protostars and Planets III*, eds Levy, E. H., y Matthews, M. S., (Arizona Press, Tucson).
 Elmegreen, B. G., 1990, en *The Evolution of the Interstellar Medium*, ed Blitz, L., (Astronomical Society of the Pacific Publishers).
 Elmegreen, B. G., y Elmegreen, B. G., 1983, *M. N. R. A. S.*, **203**, 31.
 Elmegreen, B. G., y Elmegreen, B. G., 1987, *Ap. J.*, **311**, 554.
 Fabian, A. C., Nulsen, P. E. J., y Cenizares, C. R., 1980, *M. N. R. A. S.*, **201**, 933.
 Falgarone, E., Y Pérault, M., 1987, en *Physical Processes in Interstellar Clouds*, eds. Morfill, G. E., y Scholer, M., (Dordrecht: Reidel).
 Field, G. H., 1965, *Ap. J.*, **142**, 531.
 Flanery, B. P., y Press, W. H., 1979, *Ap. J.*, **231**, 688.
 Friberg, P., y Hjalmarsen, A., 1990, en *Molecular Astrophysics*, ed. Hartquist, T. W., (Cambridge

University Press).

- Gilden, D. L., 1984, *Ap. J.*, **283**, 679.
- Goldreich, P., y Lynden Bell, D., 1965, *M. N. R. A. S.*, **130**, 97.
- Goldsmith, D. W., 1970, *Ap. J.*, **161**, 41.
- Goldsmith, D. W., Habing, H. J., y Field, G. H., 1969, *Ap. J.*, **158**, 173.
- Habbal, S. R., y Rosner, R., 1979, *Ap. J.*, **233**,
- Hinze, 1975.....
- Jeans, J. H., 1902, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A199**, 1.
- Jog, C. J., y Salomon, P. M., 1984, *Ap. J.*, **276**, 114.
- Kleiner, S. C., y Dickman, R. L., 1985, *Ap. J.*, **295**, 466.
- Kolb, E. W., y Turner, M. S., 1990, *The early Universe*, Adison Wesley.
- Kolmogoroff, A., 1941, *Comp. Rend. Acad. Sci. URSS*, **30**, 301. Traducción al inglés en *Turbulence*, eds. Friedlander, S., y Topper, L., (New York: Interscience).
- Kraichnan, 1967, *Phys. Fluids.*, **10**, 1417.
- Kuznetsov, V. D., y Puskin, V. S., 1983, *Ap. Sp. Sci.*, **94**, 5.
- Lachize-Ray, M., Asséo, E., Cesarsky, C. J., y Pellat, R., 1980, *Ap. J.*, **238**, 175.
- Larson, R. B., 1981, *M. N. R. A. S.*, **194**, 809.
- Ledoux, P., 1951, *Ann. d'Ap.*, **14**, 438.
- Lerche, I., y Parker, E. N., 1968, *Ap. J.*, **154**, 515.
- Lesieur, 1990, *Turbulence in Fluids. Stochastic and numerical modelling*, (Kluwer Academic Publishers).
- Leung, C., Kutner, M., y Mead, K., 1982, *Ap. J.*, **262**, 583.
- Liszt, H. S., Xiang, S. A., y Burton, L. L., 1981, *Ap. J.*, **309**, 496.
- Lizano, E. S., y Shu, F. H., 1989, *Ap. J.*, **342**, 834.
- Lynden Bell, D., 1966, *Observatory*, **86**, 57.
- Mc Millan, B. P., Flanery, B. P., y Press, W. H., 1980, *Ap. J.*, **240**, 488.
- Mouschovias, T. C., 1974, *Ap. J.*, **192**, 37.
- Mouschovias, T. C., 1975, *Astr. Ap.*, **40**, 191.
- Mouschovias, T. C., 1991 en *The physics of star formation and early stellar evolution*, eds. Lada, C. J., y Kylafis, N. D. (Kluwer Academic Publishers).
- Mouschovias, T. C., Shu, F. H., y Woodward, P., 1974, *Astr. Ap.*, **33**, 73.
- Myers, P. C., 1983, *Ap. J.*, **270**, 105.
- Myers, P. C., 1990, en *Molecular Astrophysics*, ed. Hartquist, T. W., (Cambridge University Press).
- Myers, P. C., Fuller, G. A., Mathieu, R. D., Beichman, C. A., Benson, P. J., Schild, R. E., y Emerson, J. P., 1987, *Ap. J.*, **319**, 340.
- Myers, P. C., y Goodman, A. A., 1988, *Ap. J.*, **329**, 392.
- Nelson, A. H., 1985, *M. N. R. A. S.*, **215**, 161.
- Nulsen, P. E. J., 1986, *M. N. R. A. S.*, **221**, 377.
- Parker, E. N., 1953, *Ap. J.*, **158**, 123.
- Parker, E. N., 1966, *Ap. J.*, **145**, 811.
- Parker, E. N., 1967, *Ap. J.*, **117**, 431.
- Parker, E. N., 1979, *Cosmical Magnetic Fields: Their origin and their Activity*. (Clarendon Press, Oxford).
- Passot, T., Pouquet, A., y Woodward, P., 1988, *Astr. Ap.*, **197**, 228.
- Saffman, P. J., 1971, *Stud. Appl. Math.*, **50**, 377.
- Safronov, V. S., 1960, *Ann. d'Ap.*, **27**, 979.
- Scalo, J. M., 19., en *Interstellar Processes*, eds Hollenbach, D. J., y Thronson, H. A.
- Schwartz, J., Mc Cray, R., y Stein, R. F., 1972, *Ap. J.*, **175**, 673.

- Scoville, N. Z., Yun, M. S., Clemens, D. P., Sanders, D. B., y Waller, W. H., 1987, *Ap. J.*, **275**, 201.
- Sharma, R. C., y Singhe, B., 1988, *Ap. Sp. Sci.*, **143**, 233.
- Shebalin, 1993, pre-tiro.
- Shu, F. H., 1974, *Astr. Ap.*, **33**, 55.
- Shu, F. H., 1992, *The physics of Astrophysics, II Gas Dynamics*, (University Science Books).
- Simon, R., 1965, *Ann. d'Ap.*, **28**, 40.
- Solomon, P. M., Rivolo, A. R., Barrett, J., y Yahil, A., 1987, *Ap. J.*, **319**, 892.
- Solomon, P. M., Sanders, D. B., y Scoville, N. Z., 1979, IAU symposium No. 84, *Large Scale Characteristics of the Galaxy*, ed. Buton, W. B., (Dordrecht: Reidel).
- Stark, R., 1979, PhD. Dissertation, Princeton University.
- Stark, A. A., y Blitz, L., 1978, *Ap. J.*, **225**, L15.
- Tomisaka, K., 1987, *Pub. Astron. Soc. Japan.*, **39**, 109.
- Toomre, A., 1964, *Ap. J.*, **139**, 1217.
- Viallefond, F., Gross, W. M., y Allen, R. J., 1982, *Astr. Ap.*, **115**, 373.
- Zakharov, V. E., y Sagdeev, R. Z., 1970, *Sov. Phys. Dokl.*, **15**, 439.
- Zanstra, H., 1955, *Gas Dynamics of Cosmic Clouds*, eds. Burgers, J. M., y van de Hulst, H. C., (Amsterdam: North Holland Publishing Co.).
- Zanstra, H., 1955, *Vistas in Astronomy I*, ed. Beer, A., (New York: Pergamon Press).
- Zweibel, E. G., y Kulsrud, R. M., 1975, *Ap. J.*, **201**, 63.