



**Universidad Nacional
Autónoma de México**

FACULTAD DE INGENIERIA

**INTERACCION SUELO - VIGA FLOTANTE, SOMETIDA
A MUROS DE CORTANTE.**

**TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A**

JESUS ARELLANO LEYVA

Director: M.I. AGUSTIN DEMENEGHI COLINA

MEXICO, D.F.

1993

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	Páginas
I. Introducción	1
II. Antecedentes	6
III. Interacción Suelo-Viga Flotante	19
1. Teoría de la Interacción Suelo-Viga Flotante	19
2. Análisis estructural	22
2.1 Barra con apoyos continuos	27
2.2 Barra con un apoyo continuo y otro articulado ..	34
2.3 Barra en Cantiliver	40
2.4 Desplazamiento vertical en la cimentación, a a mitad del entre-eje	44
3. Matriz de rigideces de toda la estructura	45

	Página
4. Análisis de asentamientos del terreno de cimentación	47
5. Compatibilidad de deformaciones	53
IV. Ejemplo de Aplicación	55
V. Aplicaciones	94
1. Cálculo de una cimentación semiflexible	101
2. Cimentación tipo cajón rígido	103
VI. Conclusiones	110
Bibliografía	114

I. INTRODUCCION

Antiguamente el procedimiento para construir una cimentación estaba basado en experiencias transmitidas de persona a persona, es decir, era un conocimiento totalmente empírico; al aumentar la demanda de constructores y presentarse fallas debidas a consideraciones erróneas y falta de procedimientos técnicos surgen teorías y métodos fundamentados y actualizados día a día.

La cimentación de estructuras sobre suelos de mediana a alta compresibilidad plantea el problema de determinar los hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal), tanto en la subestructura como en la superestructura. En la interfase de la estructura de cimentación y el suelo se originan desplazamientos debidos a las cargas que transmite a la cimentación dando lugar a desplazamientos totales y diferenciales. Los desplazamientos diferenciales de la estructura deberán ser iguales a los originados en la superficie de apoyo de la cimentación. Así , pues, la estructura de la cimentación junto con las cargas que obran sobre ella y las reacciones que se provocan en el suelo se sujetara a una determinada configuración igual a la que el suelo adoptara debido a las reacciones que este aporta a la estructura de cimentación para su equilibrio. La configuración de esfuerzos y deformaciones en la superficie del contacto dependera de la rigidez de la estructura de la cimentación, de la deformabilidad del subsuelo y de la

distribución de cargas que se apliquen sobre la estructura de cimentación.

La interacción entre la estructura de cimentación y el suelo consistirá en encontrar un sistema de reacciones que aplicadas simultáneamente a la estructura de cimentación y a la masa del suelo produzcan la misma configuración de desplazamientos diferenciales entre los dos elementos. Para lograr lo anterior, será necesario basarse por un lado en las leyes físicas que rigen el comportamiento de la masa del suelo y por el otro en los procedimientos nominales de cálculo estructural en la determinación de fuerzas y deformaciones tomando en cuenta las propiedades mecánicas del material del cual será construida la estructura de cimentación.

Es obvio que la masa del subsuelo donde se apoya la estructura de cimentación no se puede simplificar suponiéndola constituida de elementos aislados. Si se quiere obtener una buena precisión en los cálculos será necesario tratar a la masa del suelo como un medio continuo en donde la acción en un punto (i) de la masa ejerce su influencia en otro punto (j) de ella.

Es así, que para el cálculo de esfuerzos en la masa del suelo hacemos uso de la "Teoría de Elasticidad". En 1885 Boussinesq resuelve la condición de esfuerzos inducidos en cualquier vertical trazada en una masa de suelo, sometida a una sola carga actuante vertical concentrada en una superficie horizontal; generalizando la fórmula de Boussinesq para el cálculo de esfuerzos en una esquina de la planta de un rectángulo sometido a una carga uniformemente repartida, tenemos que:

$$T = \left(\frac{q}{2} \right) \left[\frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} - \frac{xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \text{ATN} \frac{xy}{z(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right]$$

La rigidez de la estructura de cimentación y la contribución que a esta le puede aportar la superestructura es importante, lo cual implica tener que

conocer de antemano la geometría y propiedades de los elementos que la forman. La incertidumbre que existe cuando las estructuras de cimentación se constituyen de concreto armado se manifiesta en la variación de su módulo de deformación con el tiempo.

Se puede agregar que para la elección correcta y cálculo racional de una cimentación es también necesario considerar las condiciones y fuerzas ambientales, por tanto, es importante conocer la estratigrafía del lugar y en particular de la zona en cuestión, las condiciones hidráulicas que rigen en el momento y los cambios probables que pudieran suscitarse en el futuro. Conociendo la estratigrafía y las características de los sedimentos que la constituyen en varios lugares se podrá conocer la variación probable de las propiedades mecánicas de los mismos en el área de la cimentación. El ingeniero de cimentación se ve en la necesidad de hacer hipótesis que le permitan el cálculo de la interacción suelo-estructura con las herramientas de que se dispone, como la expuesta en este trabajo.

En esta tesis se presenta un procedimiento para llevar a cabo el análisis de un caso particular de la interacción suelo-estructura; interacción suelo-viga flotante con muros de cortante, utilizando el método de rigideces del análisis estructural el cual ofrece la ventaja de que no se requieren iteraciones para su resolución y de que el número de operaciones numéricas necesarias es relativamente bajo.

El nombre de viga flotante proviene de considerar la siguiente hipótesis: un edificio estructurado con muros de concreto puede ser simulado como una viga con características de carga y rigidez similares a las de este y que reposa libremente sobre el suelo, de tal forma que cualquier punto que se localice en la superficie de la cimentación sirve como apoyo para sostener la viga; los muros de cortante soportan las fuerzas laterales actuantes transmitiendo a la viga flotante los momentos que generan.

El problema en sí radica en determinar los hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos que son producto de los hundimientos de la cimentación.

En el Capítulo II se comentan antecedentes de estudios realizados sobre la interacción suelo-estructura. El procedimiento del Dr. Leonardo Zeevaert (1973), tiene el inconveniente de que no se conoce a Priori el módulo de reacción del suelo por lo que se requiere el uso de iteraciones.

Los Ingenieros Sánchez Martínez y Enriquez plantean un análisis de cimentaciones someras teniendo en cuenta la interacción suelo-estructura; se trata de un método no iterativo que consiste en realizar el análisis conjunto suelo-estructura con un sistema estructural único que se resuelve utilizando el método general de la rigidez.

En el Capítulo III se presenta la descripción teórica de todo el análisis estructural del método interacción suelo-viga flotante desarrollado por el M. en I. Agustín Deméneghi (1979). Se obtienen las ecuaciones para diferentes tipos de apoyos; apoyos continuos, un apoyo continuo y otro articulado, una barra en cantiliver, los momentos de empotramiento para cada tipo de apoyo, los desplazamientos verticales en la cimentación a la mitad del entre-eje, con lo que se obtiene la matriz de rigideces de toda la estructura.

Se desarrolla la ecuación para calcular los desplazamientos verticales en función de las reacciones del terreno, además se presenta la parte que corresponde a la compatibilidad de desplazamientos aplicando los puntos previamente considerados en este mismo capítulo.

En el capítulo IV se desarrolla paso a paso un ejemplo de aplicación; un edificio de cuatro niveles con muros de concreto sometido a la acción de fuerzas laterales que son soportadas por los mismo muros, transmitiendo a la viga flotante los momentos que generan.

Se aplica lo estudiado en los capítulos anteriores planteando al final el método del M. en I. Agustín Deméneghi en una serie de puntos para facilitar su seguimiento al momento de su aplicación.

En el Capítulo V se muestran casos de aplicación del método a problemas reales comentando los diferentes resultados de ellos obtenidos resaltando su importancia, así como la confiabilidad de los mismos.

Finalmente, el Capítulo VI corresponde a las conclusiones derivadas de la aplicación de este procedimiento al ejemplo expuesto y a los casos presentados además de la importancia y ventajas de su utilización en la práctica.

II. ANTECEDENTES

Al realizar el análisis de una edificación se considera generalmente el de la superestructura de manera aislada, al igual que se trata el del terreno de cimentación, sin tomar en cuenta la interacción real que existe entre ellos, es decir, el comportamiento en conjunto de las edificaciones.

Es realmente conveniente la consideración de este comportamiento; problema relativamente complejo, ya que por un lado se debe de tomar en cuenta la rigidez de la estructura y por otro la rigidez del propio suelo, más aún en cimentaciones de edificios sobre suelos de mediana a alta compresibilidad (como lo es el caso de la Ciudad de México), pues las deformaciones que sufra el terreno de cimentación afectan de manera importante los asentamientos diferenciales de la estructura y el diagrama de reacción de suelo.

Para poder llevar a cabo este análisis es necesario en la práctica utilizar un procedimiento de interacción Suelo-Estructura estática, el cual se considera que se realiza cuando en el análisis estructural se toma en cuenta la rigidez del terreno.

El análisis de interacción permite determinar hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos (M.V.N.) tanto en la subestructura como en la superestructura, ocasionados por los hundimientos de la cimentación.

Este problema ha sido motivo de numerosos estudios por parte de investigadores de donde se han desarrollado diversos métodos aplicables a casos de la interacción, métodos como los dos que se explican a continuación de manera general, propuestos, el primero por el Dr. Leonardo Zeevaert y el segundo por los Ingenieros José Luis Sánchez Martínez y Pablo Enriquez y Meza.

El Dr. Leonardo Zeevaert en este método parte de una planta de cimentación a la que idealiza en un sistema de vigas cortas en un sentido y vigas longitudinales en el otro. Las vigas cortas tienen una rigidez mayor con relación a la compresibilidad del suelo que las vigas longitudinales. Es necesario que sean las vigas cortas las que tomen las reacciones y las cargas de las columnas, para lo cual se considera a las vigas longitudinales como un sistema estáticamente determinado, es decir, se trabaja con áreas tributarias. Si con esta hipótesis se cumplen los asentamientos diferenciales, las vigas longitudinales no requieren de ninguna rigidez especial excepto la necesaria para transmitir el contacto de presión entre la losa de cimentación y reacción de las vigas.

Sin embargo, las vigas longitudinales pueden ser diseñadas con la rigidez necesaria para reducir los asentamientos diferenciales a valores permisibles o menores. En dado caso, las vigas longitudinales además de transmitir reacciones son usadas para distribuir cargas desbalanceadas en las vigas cortas, estas cargas se requieren para obtener continuidad en las reacciones del terreno. Por tanto, las vigas longitudinales pueden ser llamadas vigas para balancear cargas.

Además se debe dividir la superficie cargada en bandas con área A_n en la dirección en la cual se encuentran las vigas cortas. A continuación se determina el asentamiento medio δ'_{an} de cada banda del área A_n :

$$\delta'_{an} = \frac{\sum \delta_n a_n}{A_n}$$

Donde los valores δ'_{an} se consideran la primera aproximación para el desplazamiento vertical promedio de cada banda, correspondiente a la primera suposición de una reacción del terreno q'_{an}

Ya una vez que son conocidos los valores δ'_{an} , es posible calcular para cada una de las bandas la primera aproximación del módulo de reacción mediante la expresión:

$$K'_s = \frac{q'_{an} A_n}{\delta'_{an}}$$

Donde:

- K'_s = módulo de reacción
- q'_{an} = reacción del terreno
- A_n = área
- δ'_{an} = asentamiento medio

Ahora, para el cálculo de los desplazamientos verticales se emplean los valores K'_s y los de las columnas cargadas, considerándose la rigidez de la estructura de cimentación en la dirección longitudinal, como si fuera una viga o una cimentación elástica; de esta manera se introduce en el cálculo la rigidez de la viga dada por EI.

Como resultado de esta primera aproximación se obtienen los cortantes y los momentos flexionantes verticales promedio (δ^*_{an}), a partir de los cuales se pueden obtener los valores correspondientes corregidos de la reacción del terreno:

$$q^*_{an} = \frac{\delta^*_{an} K'_s}{A_n}$$

Donde:

- q^*_{an} = valores corregidos de la reacción del terreno
- δ^*_{an} = desplazamientos verticales promedio

Se recomienda llevar a cabo este paso en el cálculo por métodos numéricos o mediante el establecimiento de la matriz correspondiente para así obtener las reacciones desconocidas de cada banda.

Después de obtenido el mejoramiento del promedio de las reacciones del terreno unitarias (q'_{an}) de cada una de las bandas tributarias, se realiza un segundo análisis de asentamientos. Los parámetros de compresibilidad deben ser corregidos para el mejoramiento de los niveles de esfuerzo inducidos en el subsuelo.

Este cálculo de asentamientos realizado dará un mejoramiento de los desplazamientos verticales promedio del subsuelo bajo las bandas transversales a los que se denominan δ'''_{an} , a partir de los que se calculará el módulo de cimentación para las bandas tributarias mediante el empleo de la siguiente expresión:

$$K'_s = \frac{q'_{an} A_n}{\delta'''_{an}}$$

Donde:

K'_s = módulo de cimentación para las bandas tributarias

δ'''_{an} = desplazamientos verticales promedio del subsuelo, bajo las bandas transversales

Como se describió previamente, empleando el valor de K'_s mejorado se realiza un segundo ciclo de cálculos para obtener cortantes, momentos flexionantes y reacciones del subsuelo.

Por último, este mismo procedimiento se debe repetir hasta que el cambio en fuerzas cortantes y momentos flexionantes se considere despreciable para fines prácticos.

Como se puede apreciar, el procedimiento propuesto por Zeevaert presenta el inconveniente de la necesidad de hacer iteraciones tanto

para el análisis estructural como para el cálculo de hundimientos lo que representa un gran número de operaciones.

El método que a continuación se describe es aplicable al análisis de cimentaciones someras tomando en consideración la interacción suelo-estructura basado en el método de los rigideces de análisis estructural. Es un método no interactivo consistente en realizar el análisis del conjunto suelo-estructura como un sistema estructural único.

En principio se debe establecer una matriz de rigideces de la estructura a partir de la de sus miembros, enseguida se plantea la matriz de rigideces del suelo, idealizado como una serie de soportes independientes.

A partir de ambas matrices de rigideces se obtiene, sumándolas, la matriz total de rigideces del sistema, que utilizándola, permite poder calcular los valores de los desplazamientos desconocidos (se consideran así a los desplazamientos verticales y a los giros de los puntos de la estructura previamente elegidos) y también permite calcular los elementos mecánicos en la viga de cimentación y las reacciones en el suelo.

Las expresiones generales que se emplean son:

$$D = S_T^{-1} A$$

Donde:

- D = vector de desplazamientos desconocidos.
- A = vector de acciones
- S_T^{-1} = inversa de la matriz de rigideces del sistema

Además:

$$S_T = S_E + S_s$$

Donde:

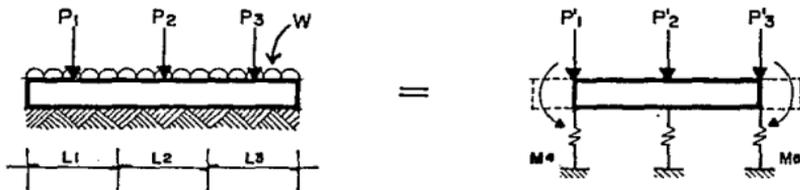
$S_E = S_1 + S_2 + S_3 + \dots S_i =$ matriz de rigideces de la estructura en función de las de sus i miembros.

$S_s =$ matriz de rigideces del suelo

$F_s = S_s D =$ vector de fuerzas sobre cada uno de los resortes que idealizan al suelo.

Se consideran como desplazamientos desconocidos a los desplazamientos verticales y a los giros de los puntos de la estructura que se elijan.

Ilustrando el método con una viga simple:



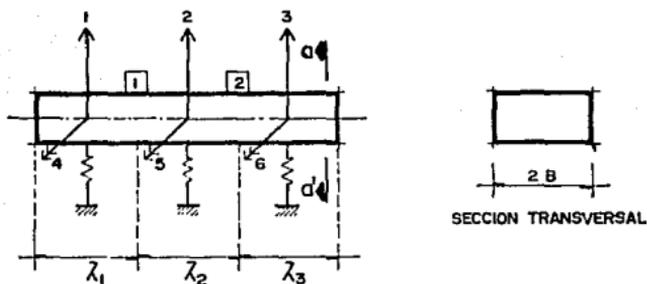
$$P'_1 = P_1 + WL_1$$

$$M = \frac{W}{2} \left(\frac{L_1}{2} \right)^2$$

$$P'_1 = P_1 + \omega L_1$$

$$M_4 = \omega/2 (L_1/2)^2$$

Para el caso, los desplazamientos desconocidos son 3 movimientos verticales y 3 giros.



La matriz de rigidez de la estructura se obtiene superponiendo la de cada uno de sus miembros, para este ejemplo queda de 6×6 y de la siguiente manera:

$$S1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12EI_1/L_1^3 & -12EI_1/L_1^3 & 0 & 6EI_1/L_1^2 & 6EI_1/L_1^2 & 0 \\ -12EI_1/L_1^3 & 12EI_1/L_1^3 & 0 & -6EI_1/L_1^2 & -6EI_1/L_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6EI_1/L_1^2 & -6EI_1/L_1^2 & 0 & 4EI_1/L_1 & 2EI_1/L_1 & 0 \\ 6EI_1/L_1^2 & -6EI_1/L_1^2 & 0 & 2EI_1/L_1 & 4EI_1/L_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$S_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_2/L_2^3 & -12EI_2/L_2^3 & 0 & 6EI_2/L_2^2 & 6EI_2/L_2^2 \\ 0 & -12EI_2/L_2^3 & 12EI_2/L_2^3 & 0 & -6EI_2/L_2^2 & 6EI_2/L_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6EI_2/L_2^2 & -6EI_2/L_2^2 & 0 & 4EI_2/L_2^2 & 2EI_2/L_2 \\ 0 & 6EI_2/L_2^2 & -6EI_2/L_2^2 & 0 & 2EI_2/L_2 & 4EI_2/L_2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

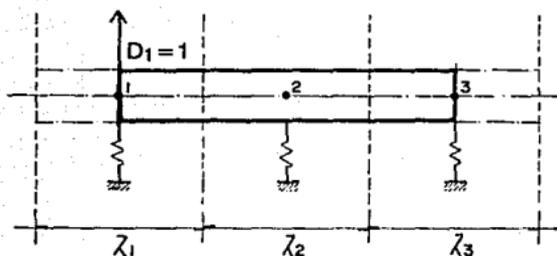
S_{ij} = Valor de la acción correspondiente al desplazamiento desconocido j producida por la aplicación de un desplazamiento i con valor unitario.

Por tanto la matriz de rigideces de la estructura se obtiene como:

$$S_E = \sum_{i=1}^n S_i$$

Una vez obtenida se debe establecer la matriz de rigideces del suelo dando desplazamientos verticales con valor unitario a cada uno de los resortes que lo idealizan y calculando las fuerzas que por este efecto aparecen en todos ellos pues se deben considerar ligados de alguna forma por pertenecer a un medio continuo.

Es decir, al dar el desplazamiento $D_1 = 1$, aparecen fuerzas no sólo en el resorte 1 sino también en todos los demás:



Lo mismo sucede al aplicar sucesivamente desplazamientos unitarios correspondientes a D_2 y a D_3 .

La matriz de rigideces del suelo lo constituyen el conjunto de todas las fuerzas obtenidas.

$$S_s = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{31} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} S_{12} \\ S_{22} \\ S_{32} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

S_{ij} = Fuerza que aparece en j al aplicar un desplazamiento vertical unitario i .

Sin embargo, el cálculo de estas fuerzas y por tanto el de la matriz de rigideces del suelo no puede obtenerse de manera directa pero se puede llegar a ella en forma indirecta considerando que la matriz de rigideces es la inversa de las flexibilidades.

La matriz de flexibilidades del suelo se puede calcular de acuerdo a Zeevaert determinando los hundimientos del terreno provocados por la aplicación de esfuerzos unitarios e indica que el conjunto de desplazamientos producidos por esfuerzos unitarios aplicados sobre áreas preestablecidas en la superficie del terreno constituye la matriz $|A_{ij}|$

$$|A_{ij}| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}$$

δ_{ij} = Hundimientos de j al actuar un esfuerzo $q = 1$ en un área con centro en i

$$q = 1 = P/a$$

donde:

a = área en que se aplica el esfuerzo unitario

La matriz de flexibilidades se obtiene aplicando cargas unitarias $P = 1$, ésto es, esfuerzos $q_i = 1/a_i$

donde:

a_i = área con centro en i en la que se aplica la carga unitaria

Los desplazamientos producidos por las cargas unitarias se obtienen dividiendo los de $|A_{ij}|$ entre el área correspondiente, así:

$$F_s = \begin{vmatrix} \delta_{11}/a_1 & \delta_{12}/a_2 & \delta_{13}/a_3 \\ \delta_{21}/a_1 & \delta_{22}/a_2 & \delta_{23}/a_3 \\ \delta_{31}/a_1 & \delta_{32}/a_2 & \delta_{33}/a_3 \end{vmatrix}$$

La matriz de flexibilidades del suelo se puede calcular de acuerdo a Zeevaert determinando los hundimientos del terreno provocados por la aplicación de esfuerzos unitarios e indica que el conjunto de desplazamientos producidos por esfuerzos unitarios aplicados sobre áreas preestablecidas en la superficie del terreno constituye la matriz $|A_j|$

$$|A_j| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}$$

$\delta_j =$ Hundimientos de j al actuar un esfuerzo $q = 1$ en un área con centro en i

$$q = 1 = P/q$$

donde:

$a =$ área en que se aplica el esfuerzo unitario

La matriz de flexibilidades se obtiene aplicando cargas unitarias $P = 1$, ésto es, esfuerzos $q_i = 1/a_i$

donde:

$a_i =$ área con centro en i en la que se aplica la carga unitaria

Los desplazamientos producidos por las cargas unitarias se obtienen dividiendo los de $|A_j|$ entre el área correspondiente, así:

$$F_s = \begin{vmatrix} \delta_{11}/a_1 & \delta_{12}/a_2 & \delta_{13}/a_3 \\ \delta_{21}/a_1 & \delta_{22}/a_2 & \delta_{23}/a_3 \\ \delta_{31}/a_1 & \delta_{32}/a_2 & \delta_{33}/a_3 \end{vmatrix}$$

que es la matriz de flexibilidad del suelo y su inversa será la requerida; la matriz de rigideces del suelo $[S_s]$, entonces:

$$S_s = F_s^{-1}$$

y la matriz total de rigideces del sistema:

$$S_T = S_E + S_s$$

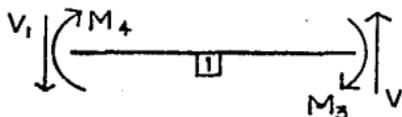
Así, de la expresión general:

$$A = S_T D; \quad S_T^{-1} A = D$$

donde:

A = Vector de acciones (Fuerzas Verticales y Momentos Actuales)

Los elementos mecánicos en los miembros se obtienen a partir de sus matrices de rigidez.



$$A_1 = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = S_1 D$$

donde: S_1 = matriz de rigideces del miembro 1

D = vector de desplazamientos

Y las fuerzas en el suelo se obtienen utilizando la matriz de rigideces del suelo.

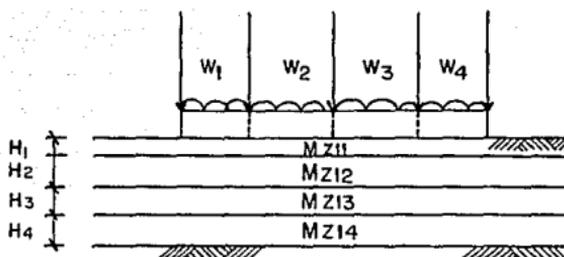
$$\begin{vmatrix} S_s & 0 & D_y \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = S_s D_y$$

Una aplicación práctica de este método es la solución de estructuras de retículas de cimentación, constituida por traveses en dos sentidos perpendiculares.

Cabe mencionar que llevar a cabo la utilización de estos métodos requiere del auxilio de programas en computadora, sobre todo para una aplicación práctica y ahorro en tiempo debido al gran número de cálculos que cada uno de ellos requiere.

Hasta aquí se han explicado de manera general dos procedimientos para realizar análisis de interacción suelo-estructura. Existen sin embargo varios más para alcanzar este propósito dependiendo de las características de la estructura y del terreno de cimentación. Ejemplos de ellos son: (a) Marco estructural con losa de apoyo o zapata corrida, (b) Marco estructural cimentado sobre zapatas donde se considera que las zapatas pueden sufrir asentamientos y giros, (c) Viga flotante.

Como se puede observar la viga flotante es un caso particular de la interacción suelo-estructura consistente en una viga que tiene una cierta rigidez estructural sometida a un dado sistema de cargas y que se apoya libremente sobre el terreno de cimentación.



Bajo ciertas condiciones conviene llevar a cabo un análisis de interacción suelo-estructura considerando a ésta como una viga flotante, por ejemplo, para edificios de altura pequeña comparada con su longitud, para zapatas corridas que soportan muros de carga y para cajones de cimentación cuando se ignora la rigidez de la superestructura.

Las ventajas que se tienen cuando se hace un análisis de interacción suelo-viga flotante consisten entre otras en que el número de datos que se manejan y el número de operaciones que se realizan son pequeñas comparadas con los que se requieren cuando se emplean otros métodos de interacción. En los capítulos siguientes se profundizará en el método.

III. INTERACCION SUELO-VIGA FLOTANTE

1. Teoría de la Interacción Suelo-Viga Flotante.

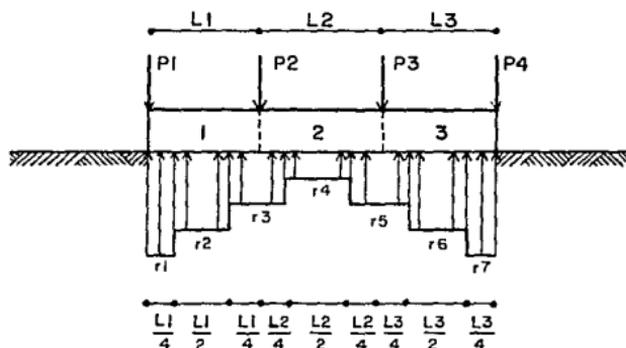
Como se ha comentado, bajo ciertas condiciones de geometría y tipos de cimentación es conveniente llevar a cabo un análisis de interacción suelo-estructura considerando a ésta en el caso particular de viga flotante como en una viga que tiene cierta rigidez estructural sometida a un determinado sistema de cargas y que se apoya libremente sobre el terreno de cimentación.

Así, el análisis de la interacción Suelo-Viga flotante se puede llevar a cabo utilizando un procedimiento general de interacción cuya descripción general se hace a continuación. (Deméneghi 1979).

En principio, consideramos una estructura reticular apoyada sobre un suelo de mediana a alta compresibilidad (como la que se muestra en la Figura III. a), cuya cimentación pueda ser resuelta a base de zapatas corridas o mediante una losa con contr trabes de concreto armado. Se requiere determinar los hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos en la cimentación y en la superestructura.

Como el diagrama de reacción del terreno no es conocido, lo que conviene hacer es sustituir la carga repartida del suelo sobre la cimentación (presión de contacto) por cargas repartidas bajo las

columnas y bajo los puntos medios de las contratraves, tal y como se muestra en la misma Figura III.a.



Para realizar el análisis de la estructura y el suelo usaremos el método de las rigideces para el análisis de la estructura, pues de éste obtendremos la matriz de rigideces y se conocerá el vector de cargas, pero se desconoce el vector de desplazamientos, (considerando así a los desplazamientos angulares θ_i de cada uno de los nudos de la estructura y a los desplazamientos lineales δ_i). Aunque el vector de cargas tampoco se conoce completo pues las reacciones del terreno R_i son también incógnitas, al realizar el análisis de hundimientos del terreno podremos obtener los desplazamientos del suelo δ_i en función de las reacciones R_i , manejando éstas como incógnitas.

Estas ecuaciones, resultantes del análisis de asentamiento se pueden integrar en la matriz de rigideces y nos llevan a un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son únicamente los giros en los nudos θ_i y las reacciones del terreno R_i .

Conocidos los desplazamientos angulares y los desplazamientos verticales es posible obtener a partir de ellos, los momentos flexionantes, las fuerzas cortantes y las fuerzas normales en toda la estructura.

Un aspecto interesante de este procedimiento es el que se evitan las iteraciones, al no emplear el concepto de módulo de reacción del suelo K 's, como sucede en el método propuesto por el Dr. Leonardo Zeeveart (tratado de manera general con anterioridad)

En resumen, el procedimiento general de interacción suelo-estructura se requiere atacar en las siguientes 3 etapas:

- a) Efectuar un análisis estructural considerando las reacciones del terreno de cimentación como cargas actuantes sobre la estructura. Cabe aclarar que estas reacciones se manejan en esta etapa como incógnitas.
- b) Calcular los asentamientos de la superficie del terreno de cimentación considerando como cargas las reacciones de éste con signo contrario de acuerdo con la tercera Ley de Newton. En esta etapa también se manejan las reacciones del terreno como incógnitas.
- c) Establecer la compatibilidad de reacciones y desplazamientos entre estructura y suelo de cimentación. Cabe mencionar que en la mayoría de los casos existe un contacto continuo entre estructura y terreno de cimentación, por lo que cuando ésto suceda se puede establecer que las reacciones y los desplazamientos en el contacto estructura-suelo son iguales para ambos sistemas, esta condición permite combinar los análisis realizados en los pasos (a) y (b) anteriores, lo que conduce a la solución de la interacción suelo-estructura.

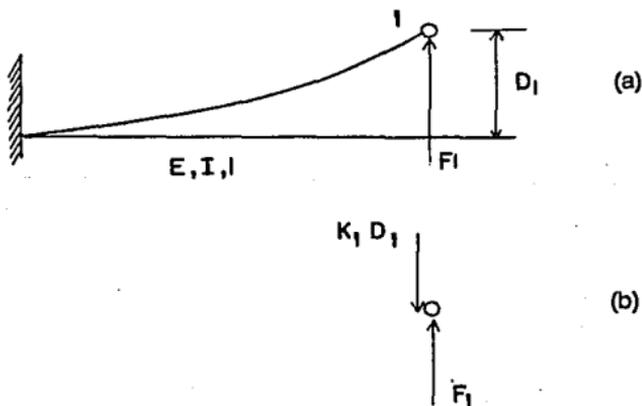
La aplicación del procedimiento permite determinar los diagramas de reacción y de asentamientos del terreno de cimentación. Durante el desarrollo de este trabajo se tratará la forma de llevar a cabo la realización de los pasos considerados para una viga flotante sometida a cargas verticales y a muros de cortante, apoyada sobre un suelo de mediana a alta compresibilidad.

2. Análisis estructural

Para realizar el análisis conjunto de la estructura y el suelo se emplea el método de rigideces cuya matriz es posible obtener por varios caminos dentro de la Ingeniería estructural. Para una comprensión más directa se tratará la teoría de manera general.

La matriz de rigideces es un ordenamiento de los coeficientes de influencia de rigidez que se usan para determinar los desplazamientos, y se puede plantear como la superposición de las rigideces de los elementos o miembros.

Las ideas básicas del método de las rigideces se pueden demostrar considerando el análisis de la viga en voladizo, como se ilustra en la siguiente figura:



Se desea determinar el desplazamiento en el extremo D_1 bajo la acción de la fuerza F_1 . Primero se establece una relación fuerza-desplazamiento unitario en el extremo de una viga prismática en voladizo que es $3EI/l^3$.

Esta fuerza se define como "coeficiente de influencia de rigidez" para la viga K_1 , ya que representa la resistencia de la viga a un desplazamiento unitario. El término K que se usa aquí difiere del factor de rigidez de la distribución de momentos.

Ahora considerese el equilibrio del nudo 1 D.C.L. de la figura (b), la fuerza hacia abajo en el nudo causada por la resistencia a la flexión de la viga es $K_1 D_1$, y la fuerza hacia arriba es F_1 . El equilibrio resulta:

$$(K_1)(D_1) = F_1$$

$$(3EI/l^3)(D_1) = F_1$$

$$D_1 = F_1 l^3 / 3EI$$

Se ha usado un coeficiente de influencia de rigidez K_1 , que expresa la influencia de un desplazamiento para la fuerza F_1 . El método de las rigideces es simplemente una extensión lógica de esta idea a las estructuras con muchos grados de libertad.

La ecuación básica de rigideces expresa el equilibrio de cada uno de los nodos en función de los coeficientes de influencia de la rigidez nodal y de los desplazamientos nodales desconocidos.

$$K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + \dots + K_{1n}D_n = F_1$$

$$K_{21}D_1 + \dots + K_{2n}D_n = F_2$$

$$K_{n1}D_1 + \dots + K_{nn}D_n = F_n$$

o en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} & D_1 & F_1 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} & D_2 & F_2 \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & & & K_{nn} & D_n & F_n \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

En notación matricial abreviada se puede escribir la ecuación como:

$$[K] [D] = [F] \quad (3.2)$$

donde a $[K]$ se le llama matriz de rigideces de la estructura y a $[D]$ y $[F]$, vectores de desplazamiento y de carga, respectivamente.

En la ecuación (3.1) K_{ij} es la fuerza nodal correspondiente al grado de libertad i causado por la aplicación de un desplazamiento unitario correspondiente al grado de libertad j . D_1, D_2, \dots, D_n son los desplazamientos nodales desconocidos y F_1, F_2, \dots, F_n las cargas nodales aplicadas correspondientes al grado de libertad $1, 2, \dots, n$. La formación de la matriz $[K]$ es un paso importante del proceso de análisis.

Retomando el análisis estructural, consideremos a la viga flotante sometida a un sistema de cargas como se muestra en la Figura III.b, y a muros de cortante empleados para tomar fuerzas laterales debidas a sismo, unidos a la cimentación, generando momentos en ella.

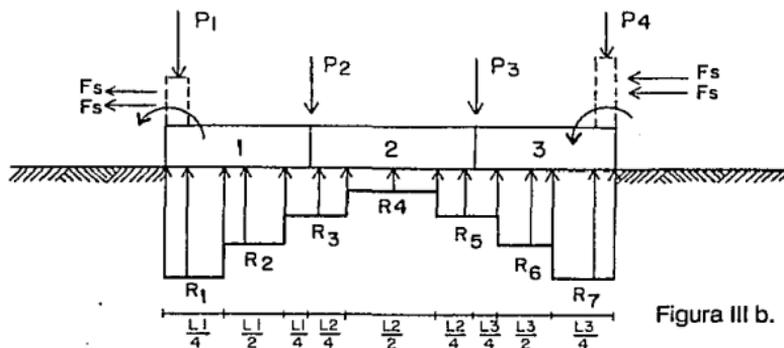


Figura III b.

Se ha colocado una reacción R bajo cada columna y otra bajo la mitad de cada entre-eje, resultando tres reacciones bajo cada barra de la cimentación, la finalidad de esto es únicamente para sencillez de cálculo si se desea, se puede considerar cada barra de la cimentación como dos o más barras y así un mayor número de reacciones R_i , para fines de análisis.

Con el empleo del método de las rigideces para el análisis estructural se obtienen la matriz de rigideces y se conoce el vector de cargas, pero se desconoce el vector de desplazamientos. El análisis por este método se logra superponiendo los resultados del análisis de una estructura equivalente correspondiente a varias condiciones de carga de manera tal que satisfaga las condiciones de equilibrio estático y de compatibilidad de deformación requerida por la estructura original.

Para obtener esta estructura equivalente se deben restringir de manera artificial los nudos de la estructura que se pueden desplazar libremente, así esta estructura equivalente se denominara estructura restringida, a la cual se le aplicara el sistema de cargas original desarrollándose reacciones que no existen en la estructura original.

La solución se obtiene superponiendo el resultado del análisis de estructura restringida sometida al sistema de cargas originales y una combinación lineal de la estructura restringida sometida a la aplicación individual de las componentes del desplazamiento de los nudos en tal forma que se eliminen las restricciones artificiales de los nudos.

Es a partir de esto de donde podemos definir el sistema de ecuaciones planteado en la ecuación (3.2) donde $[K]$ es, en este caso, la matriz de rigidez que representa las acciones restringidas de la estructura equivalente asociadas con las componentes desconocidas y no restringidas del desplazamiento de los nudos de la estructura original producidos por la aplicación independiente de una unidad de cada una de las componentes mencionadas del desplazamiento de los nudos y $\{d\}$ es el vector de componentes no restringidas del desplazamiento de la estructura.

En el sistema de ecuaciones planteado (3.2) existen dos tipos de incógnitas; los desplazamientos (que pueden ser angulares θ_i y lineales δ_i) y las reacciones del terreno R_i (estas últimas pueden aparecer en V_i^e o en M_i^e).

En forma matricial:

$$\{F\} = [K] \{d\} \quad (3.2)$$

expresadas las incógnitas:

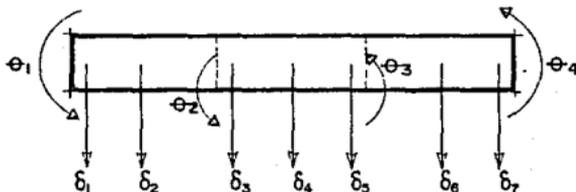
$$\begin{Bmatrix} -V_i^e \\ -M_i \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Dentro del análisis estructural se pueden presentar 3 casos de interés desde el punto de vista práctico:

- Barra con apoyos continuos
- Barra con un apoyo continuo y otro articulado
- Barra en cantiliver.

En la viga flotante que se está analizando se han incluido desplazamientos lineales a la mitad de los entre-ejes de la cimentación (δ_2 , δ_4 y δ_6), (Ver figura III.c). En estas condiciones faltará determinar las ecuaciones para relacionar estos desplazamientos con el resto de los desplazamientos de la viga flotante y con el sistema de cargas general, dichas ecuaciones auxiliares se pueden hallar mediante los teoremas de la viga conjugada.

III.c.



Para la obtención de todas las ecuaciones que relacionan los desplazamientos lineales δ_i y los giros θ_i con las cargas W_i y R_i , se deberá emplear la ecuación matricial (3.3) de equilibrio de momentos en nudos y de cortantes en ejes de barras y las ecuaciones auxiliares de desplazamientos a la mitad de los entre-ejes, mismas que más adelante se desarrollan.

2.1. Barra con apoyos continuos

En principio es importante señalar que los giros se consideran positivos si van en sentido antihorario y los desplazamientos son positivos si son hacia abajo.

El sentido de los momentos flexionantes de barra sobre nudo es positivo si va en sentido horario y el sentido de las fuerzas cortantes de barra sobre nudo es positivo si el cortante va hacia arriba.

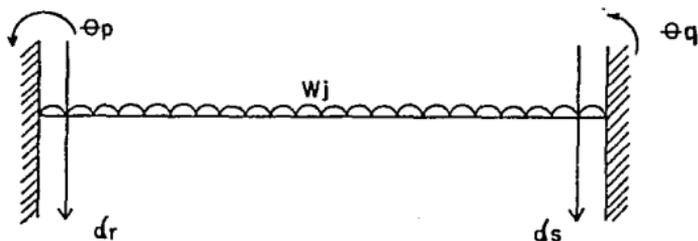
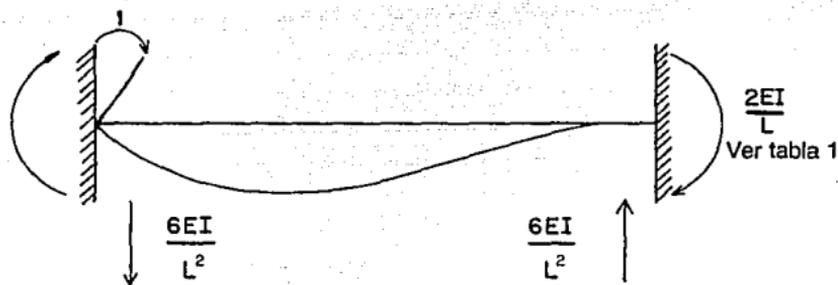


Figura III.d. Barra con apoyos continuos



$$\mathbf{K|j= \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L} & -\frac{6EI}{L} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{6EI}{L} & \frac{6EI}{L} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

donde E = módulo de elasticidad del material que esta hecha la barra j

L = longitud de la barra

I = momento de inercia de la barra j

θ_p = desplazamiento angular el nudo p

θ_q = desplazamiento angular en el nudo q

δ_r = desplazamiento lineal en el nudo r

δ_s = desplazamiento lineal en el nudo s

Los momentos y cortantes de un empotramiento de barra sobre nudo, para diversas condiciones de carga son:

- Para una carga uniformemente repartida W_j : (Figura III.d)

$$M_p^{\theta} = \frac{W_j L_j^2}{12} \quad \text{análogamente} \quad M_q^{\theta} = -\frac{W_j L_j^2}{12} \quad (3.5)$$

$$V_r^{\theta} = \frac{W_j L_j}{2} \quad \text{análogamente} \quad V_s^{\theta} = -\frac{W_j L_j}{2} \quad (3.6)$$

- Para cargas repartidas en la cimentación. Apoyos continuos

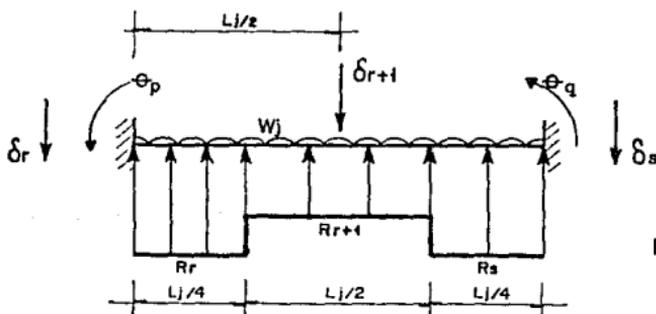


Figura III.d.1

$$M_p^{\circ} = \frac{-67}{3072} L^2 jR_r - \frac{11}{192} L^2 jR_{r+1} - \frac{13}{3072} L^2 jR_s \quad (3.7)$$

$$M_q^{\circ} = \frac{13}{3072} L^2 jR_r + \frac{11}{192} L^2 jR_{r+1} + \frac{67}{3072} L^2 jR_s \quad (3.8)$$

$$V_r^{\circ} = \frac{121}{512} L jR_r + \frac{1}{4} L jR_{r+1} - \frac{7}{512} L jR_s \quad (3.9)$$

$$V_s^{\circ} = \frac{7}{512} L jR_r + \frac{1}{4} L jR_{r+1} + \frac{121}{512} L jR_s \quad (3.10)$$

La deducción de estas ecuaciones se presenta a continuación:

Deducción de los cortantes de empotramiento:

Para el lado izquierdo (p)

- Parte izquierda de la barra

$$M_p = - \frac{WL}{12} x (3x^2 - 8x + 6)$$

$$x = a/L ; a = L/4 \Rightarrow x = L/4/L = L/4L = 1/4$$

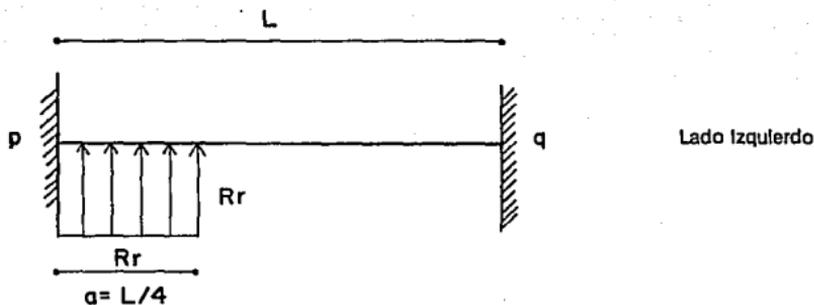
Sustituyendo:

$$\begin{aligned} M_p &= -WL/12 (1/4) [3 (1/4)^2 - 8 (1/4) + 6] = -WL/48 [3/16 - 2 + 6] \\ &= -\frac{3(WL)}{768} + \frac{2(WL)}{48} - \frac{6(WL)}{48} = \frac{-3WL + 32WL - 96WL}{768} = \frac{67WL}{768} \end{aligned}$$

$$M_p = \frac{-67WL}{768} \quad \text{y como} \quad W = (R_r) (L/4) ; W = \frac{R_r L}{4}$$

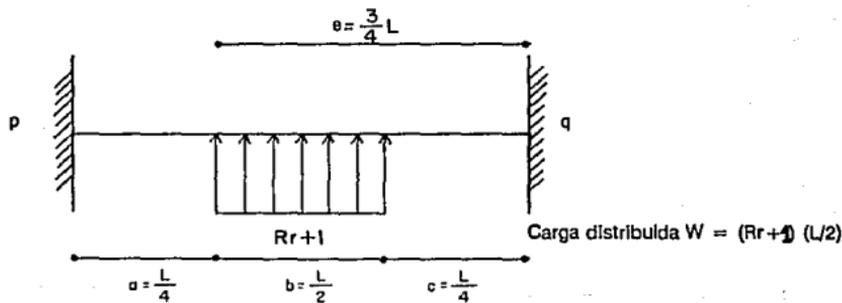
Sustituyendo

$$M_p = - \frac{67 R_r L^2}{3072}$$



parte central de la barra

$$M_p = -W/12L^2b [E^3(4L-3e) - c^3(4L-3c)]$$



Sustituyendo:

$$M_p = \frac{W}{12L^2(L/2)} [((3/4)L)^3 (4L - 3(3/4)L) - (L/4)^3 (4L - 3(L/4))]$$

$$M_p = - \frac{W}{6L^3} [(27/64)L^3 (4L - 9/4)L - L^3/64 (4L - (3/4)L)]$$

$$= - \frac{W}{6L^3} [(189L^4/256) - (13L^4/256)]$$

$$= - \frac{W}{6L^3} [176L^4/256]$$

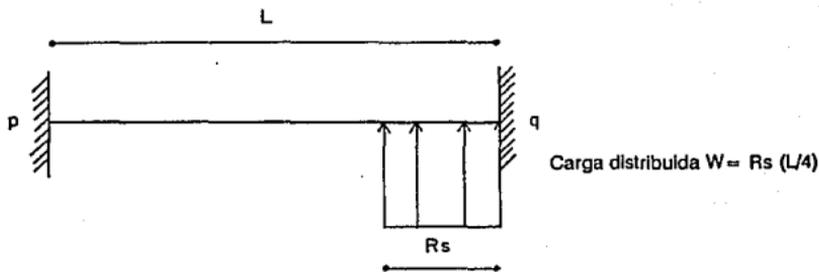
Como $W = \frac{(R_{r+1})L}{2}$

$$\Rightarrow M_p = - \frac{R_{r+1}L}{12L^3} (176L^4/256) = - \frac{176 R_{r+1} L^5}{3072L^3}$$

$$= - \frac{11R_{r+1}L^2}{192}$$

- parte derecha de la barra

$$M_p = - \frac{WL}{12} x^2 (4 - 3x)$$



Sustituyendo:

$$M_p = - \frac{R_s L (L/4) (1/4)^2 [4 - 3 (1/4)]}{12}$$

$$M_p = - \frac{R_s L^2}{768} \frac{[13]}{4} = - \frac{13 R_s L^2}{3072}$$

$$M_p = - \frac{13}{3072} L^2 R_s$$

La sumatoria de los momentos obtenidos nos da como resultado la ecuación (3.7) y análogamente se obtiene la ecuación (3.8) (Momento de empotramiento total del lado derecho), con signo contrario.

Deducción de los cortantes de empotramiento:

- para el lado izquierdo

hacemos ΣM en q:

$$\Sigma M_q = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{67}{3072} R_r L^2 + \frac{11}{192} R_{r+1} L^2 + \frac{13}{3072} R_s L^2 - \frac{13}{3072} R_r L^2 - \frac{11}{192} R_{r+1} L^2$$

$$- \frac{67}{3072} R_s L^2 + R_r \frac{L}{4} \frac{(7L)}{8} + R_{r+1} \frac{(L)}{2} \frac{(L)}{2} + R_s \frac{(L)}{4} \frac{(L)}{8} + V_r^0 L$$

Simplificando:

$$\frac{726}{3072} R_r L^2 + \frac{R_{r+1} L^2}{4} + \frac{42}{3072} R_s L^2 = V_r^0 L$$

Finalmente:

$$V_r^0 L = \frac{121}{512} R_r L + \frac{R_{r+1} L}{4} + \frac{7}{512} R_s L \quad (3.9)$$

Análogamente se obtiene la ecuación (3.10) (Cortante de empotramiento para el lado derecho (V_q^e), con signo contrario

2.2 Barra con un apoyo continuo y otro articulado.

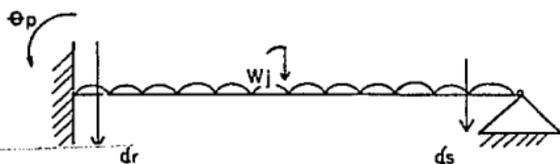


Figura III.e



Ver tabla 1

La matriz de rigideces de una barra bajo estas condiciones es:

$$[K]_j = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^3} \\ \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \delta_r \\ \delta_s \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Los momentos y cortantes de empotramiento, de barra sobre nudo, para diversas condiciones de carga están dadas por:

– Para una carga repartida W_j (Figura III.e):

$$M_p^e = \frac{W_j L_j^2}{8} \quad (3.12)$$

$$V_r^e = -\frac{5W_j L_j}{8}; \quad V_s^e = -\frac{3W_j L_j}{8} \quad (3.13)$$

– Para cargas repartidas en la cimentación. Barra con un apoyo continuo y otro articulado (Figura III.f)

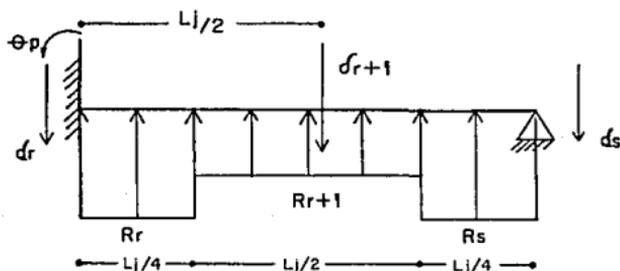


Figura III.f

$$M_p^e = -\frac{49}{2048} L_j^2 R_r - \frac{11}{128} L_j^2 R_{r+1} - \frac{31}{2048} L_j^2 R_s \quad (3.14)$$

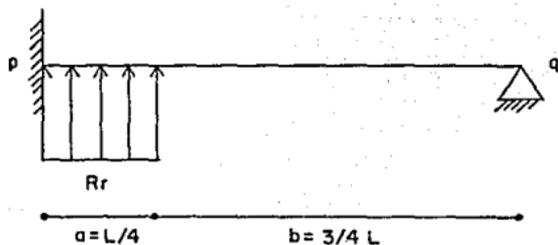
$$V_r^e = \frac{399}{2048} L_j R_r + \frac{21}{128} L_j R_{r+1} + \frac{33}{2040} L_j R_s \quad (3.15)$$

$$V_s^e = \frac{113}{2048} L_j R_r + \frac{43}{128} L_j R_{r+1} + \frac{479}{2048} L_j R_s \quad (3.16)$$

La deducción de las ecuaciones se hace a continuación:

Para el lado izquierdo
- parte izquierda de la barra

$$M_p = -\frac{W a (2-x)^2}{8}$$



donde $x = a/L = 1/4$

$a = L/4$

y la carga $W = Rr(L/4)$

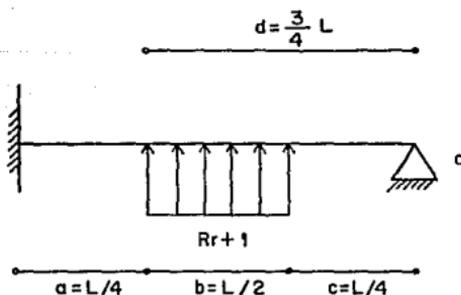
Sustituyendo:

$$M_p = -R_r L \frac{(L)}{4} \frac{(2-1)^2}{4} = -\frac{R_r L^2 (49)}{128 \cdot 16} = -\frac{49 R_r L^2}{2048}$$

$$\Rightarrow M_p = \frac{49 R_r L^2}{2048}$$

- para la parte central de la barra

$$M_p = - \frac{W}{8L^2b} (d^2 - c^2) (2L^2 - c^2 - d^2)$$



$$\text{Carga } W = \frac{Rr + 1L}{2}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} M_p &= - \frac{W}{8L^2b} [(3/4L)^2 - (1/4L)^2] [2L^2 - (L/4)^2 - (3/4L)^2] \\ &= - \frac{W}{8L^2b} (9/16 L^2 - 1/16 L^2) (2L^2 - L^2/16 - 9/16 L^2) \\ &= - \frac{W}{8L^2b} (8/16 L^2) (22/16 L^2) \\ &= - \frac{W}{8L^2(L/2)} \left(\frac{176 L^4}{256} \right) = - \frac{352 WL^4}{2048 L^3} \\ &= - \frac{352 (Rr+1) (L/2) L^4}{2048 L^3} = - \frac{352 Rr+1 L^5}{4096 L^3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Simplificado } M_p = - \frac{352 R_{r+1} L^2}{4096}$$

$$\text{Finalmente } M_p = - \frac{11 R_{r+1} L^2}{128}$$

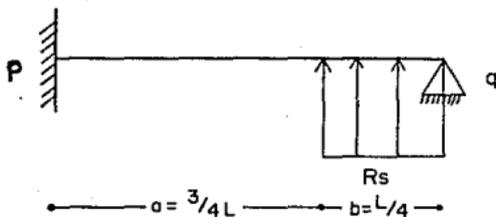
- parte derecha de la barra:

$$M_p = - \frac{Wb}{8} (2 - x^2)$$

donde:

$$x = \frac{b}{L} = \frac{1}{4}$$

$$\text{La carga } W = \frac{R_S L}{4}$$



Sustituyendo:

$$M_p = - \frac{R_S L (L)}{4 \cdot 4} (2 - (1/4)^2) = - \frac{R_S L^2}{128} (2 - \frac{1}{16})$$

$$M_p = - \frac{31 R_S L^2}{2048}$$

La sumatoria de los resultados obtenidos nos lleva a la ecuación (3.14)

Deducción de los cortantes de empotramiento:

— para el lado izquierdo de la barra.

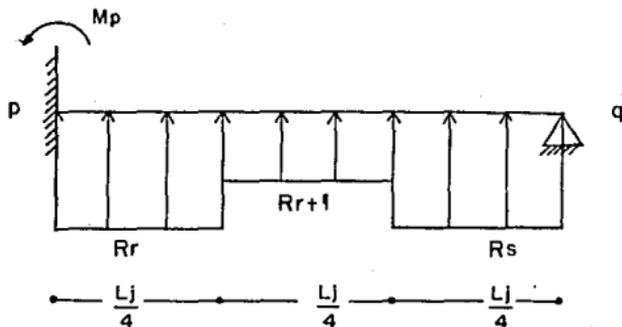
Haciendo sumatoria de Momentos en q:

$$\sum M_q = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{49}{2048} R_r L_j^2 - \frac{11}{128} R_r L_j^2 - \frac{31}{2048} R_s L_j^2$$

$$+ R_r \frac{(L_j)(7L_j)}{4 \cdot 8} + R_{r+1} \frac{(L_j)(L_j)}{2 \cdot 2} + R_s \frac{(L_j)(L_j)}{4 \cdot 8} + V_p^e L = 0$$

despejando V_p^e

$$V_p^e = \frac{399}{2048} R_r L_j + \frac{21}{128} R_{r+1} L_j + \frac{33}{2048} R_s L_j \quad (3.15)$$



– para el lado derecho de la barra

Haciendo sumatoria de Momentos en p

$$\sum M_p = 0$$

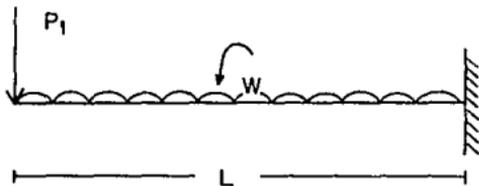
$$\begin{aligned} \therefore 0 = & \frac{49}{2048} R_r L^2_j + \frac{11}{128} R_{r+1} L^2_j + \frac{31}{2048} R_s L^2_j \\ & + R_s \left(\frac{L}{4}\right) \left(\frac{7L}{8}\right) + R_{r+1} \left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{L}{2}\right) + R_r (L/4) (L/8) + V_q^e L = 0 \end{aligned}$$

despejando V_q^e

$$V_q^e = \frac{113}{2048} R_r L_j + \frac{43}{128} R_{r+1} L_j + \frac{479}{2048} R_s L_j \quad (3.16)$$

2.3 Barra en Cantiliver

Se requiere determinar el desplazamiento δ de la viga, al aplicársele una carga P_1 . (Figura III.g).



Por el teorema de la viga conjugada:

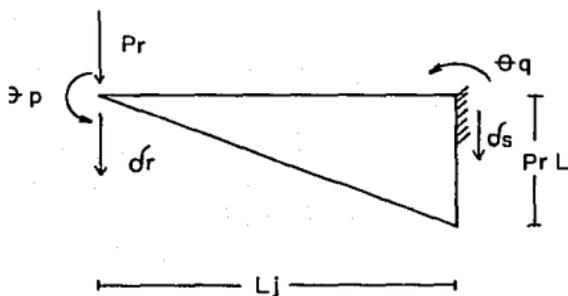
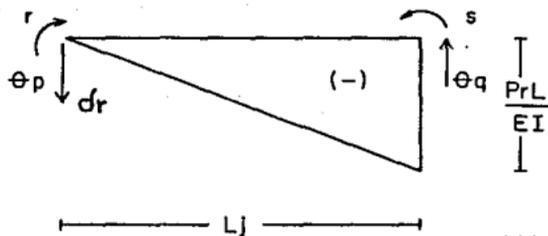


Diagrama de la viga



Viga Conjugada

Haciendo sumatoria de Momentos en p, de la Viga Conjugada

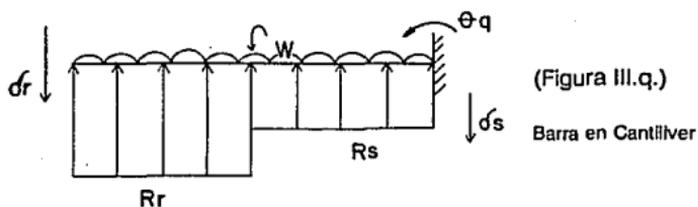
$$\sum M_p = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \delta_r - \delta_s - \theta_q L - 0.5 \frac{PrL^2}{EI} \left(\frac{2L}{3} \right)$$

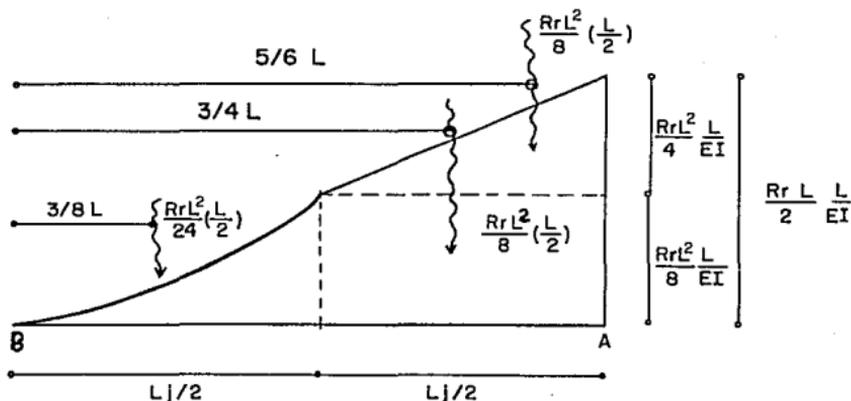
$$\therefore \delta_r - \delta_s - \theta_q L - \frac{1}{3} \frac{PrL^3}{EI} = 0$$

Se multiplica la ecuación por $\frac{4EI}{L^2}$, resultando:

$$\frac{4EI}{L^2} \delta_r - \frac{4EI}{L^2} \delta_s - \frac{4EI}{L} \theta_q - \frac{4}{3} P_r L = 0 \quad (3.17)$$



— para el lado izquierdo



$$\begin{aligned}
 M_B &= \frac{R_r L^3}{48} (3/8 L) + \frac{R_r L^3}{16} (3/4 L) + \frac{R_r L^3}{16} (5/6 L) \\
 &= -\frac{R_r L^4}{16} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \right) \equiv \frac{R_r L^4}{16} \frac{(41)}{24} \frac{1}{EI}
 \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{4EI}{L^2}$

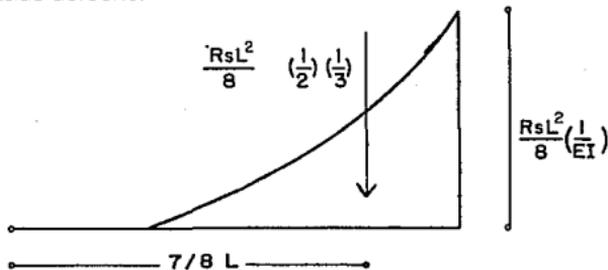
$$\Rightarrow M_B = -\frac{R_r L^4}{16} \frac{(41)}{24} \frac{1}{EI} \frac{4EI}{L^2} = \frac{41}{96} R_r L^2$$

$$\therefore M_B = -\frac{41}{96} R_r L^2$$

Análogamente se obtiene para W_r

$$M_B = \frac{41}{96} W_r L^2$$

– para el lado derecho:



$$M_B = -\frac{R_s L^2}{48} \left(\frac{7}{8} L \right) = \frac{7 R_s L^4}{384} \frac{1}{EI}$$

Multiplicando por $\frac{4EI}{L^2}$

$$M_B = - \frac{28 R_s L^2}{384} ; \text{ Simplificando } = - \frac{7 R_s L^2}{96}$$

$$\therefore M_B = - \frac{7}{96} R_s L^2$$

análogamente se obtendría W_s

$$M_B = \frac{7}{96} R_s L^2$$

Así, haciendo la sumatoria de las ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{4EI}{L} \theta_q - \frac{4EI}{L^2} \delta_r + \frac{4EI}{L^2} \delta_s + \frac{4}{3} P_r L - \frac{41}{96} R_r L^2 - \frac{7}{96} R_s L^2 \\ + \frac{41}{96} W_r L^2 + \frac{7}{96} W_s L^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

2.4 Desplazamiento vertical en la cimentación, a la mitad del entre-eje

Debido a que en el análisis se incluyeron desplazamientos lineales a la mitad de los entre-ejes en la cimentación (δ_2 , δ_3 y δ_6), se deben ahora determinar las ecuaciones para relacionar estos desplazamientos con el resto de los desplazamientos de la estructura y con el sistema de cargas en general.

La obtención de este desplazamiento δ_{r+1} (Figura III. d.1) para una barra con apoyos continuos empleando los teoremas de la viga conjugada conduce a la expresión:

$$\frac{EI}{L} \theta_p - \frac{EI}{L} \theta_q - \frac{8EI}{L^2} \delta_r + \frac{16EI}{L^2} \delta_{r+1} - \frac{8EI}{L^2} \delta_s + \frac{1}{256} L^2 R_r$$

$$+ \frac{13}{384} L^2 R_{r+1} + \frac{1}{256} L^2 R_s = \frac{W_j L^2}{24} \quad (3.19)$$

De la misma forma, para una barra en la cimentación, con un apoyo continuo a la izquierda y otro apoyo articulado a la derecha (Figura III.f) se emplea la siguiente expresión:

$$-\frac{3EI}{L} \theta_p + \frac{11EI}{L^2} \delta_r - \frac{16EI}{L} \delta_{r+1} + \frac{5EI}{L^2} \delta_s - \frac{37}{6144} R_r L^2$$

$$-\frac{3}{48} R_{r+1} L^2 - \frac{91}{6144} R_s L^2 = -\frac{W_j L^2}{12}$$

Por tanto:

$$\frac{3EI}{L} \theta_p - \frac{11EI}{L^2} \delta_r + \frac{16EI}{L^2} \delta_{r+1} - \frac{5EI}{L^2} \delta_s + \frac{37}{6144} L^2 R_r + \frac{L^2}{16} R_{r+1}$$

$$+ \frac{91}{6144} L^2 R_s = \frac{W_j L^2}{12} \quad (3.20)$$

3. Matriz de rigideces de toda la estructura

La matriz de rigidez de una estructura representa las diversas componentes de las reacciones de los nudos que se requieren para mantener el equilibrio de una estructura restringida al imponerle individualmente desplazamientos unitarios en la dirección de las componentes del desplazamiento de los nudos.

En la matriz de rigideces de la estructura cada columna corresponde al análisis de la estructura restringida sometida a la aplicación de una unidad de una componente específica del desplazamiento de los nudos.

Cada renglón de la matriz de rigideces representa el valor que una acción restringida específica adquiere como consecuencia de la imposición individual de una carga unitaria de cada una de las componentes del desplazamiento de los nudos de la estructura determinada cinemáticamente o restringida.

Cuando se somete a la estructura restringida a una componente unitaria de desplazamiento de un nudo, las acciones que se desarrollan en los extremos de cada elemento para conservar el equilibrio corresponden a los coeficientes de rigidez del elemento asociado con el tipo particular de desplazamiento del extremo.

Así, la matriz de rigideces de toda la estructura es la suma de las matrices de cada una de las barras.

Es por eso que empleando el método de rigideces, primero se restringe la estructura de desplazamientos tanto angulares como lineales lo que provoca momentos flexionantes y fuerzas cortantes de empotramiento, posteriormente se permiten los giros y desplazamientos de los nudos que ocasionan momentos y cortantes adicionales.

La suma de los momentos de empotramiento y los momentos debido a los giros en los nudos debe ser cero en cada uno de los nudos para que cada uno de éstos esté en equilibrio, además, la suma de cortantes de empotramiento y de cortantes debidos a desplazamientos lineales de los nudos deben ser nula en cada uno de los ejes de barras (columnas y trabes), para que cada uno de los ejes de barras este en equilibrio. Tomando en consideración las condiciones anteriores y utilizando las ecuaciones 3.19 ó 3.20, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 K_{11}\delta_1 + K_{12}\delta_2 + \dots + K_{1j}\theta_j + K_{1k}\theta_k + \dots + A_{11}r_1 + A_{12}r_2 + \dots \\
 &= B_{11}W_1 + B_{12}W_2 + \dots \\
 K_{12}\delta_1 + K_{22}\delta_2 + \dots + K_{2j}\theta_j + K_{2k}\theta_k + \dots + A_{21}r_1 + A_{22}r_2 + \dots \\
 &= B_{21}W_1 + B_{22}W_2 + \dots \\
 K_{1j}\delta_1 + K_{2j}\delta_2 + \dots + K_{jj}\theta_j + K_{jk}\theta_k + \dots + A_{ij}r_1 + A_{i2}r_2 \dots \\
 &= B_{ij}W_1 + B_{i2}W_2 + \dots \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Donde:

K_{ij} = coeficiente de la matriz de rigidez de toda la estructura

A_{ij} = coeficiente que corresponde a la reacción de la cimentación R_i

B_{ij} = coeficiente que corresponde a la carga de la estructura W_j

Además se presentan 3 incógnitas en el sistema de ecuaciones anterior.

δ_i = desplazamientos lineales

θ_i = desplazamientos angulares

R_i = reacciones de la cimentación

Una vez en esta etapa se deben de obtener los desplazamientos del suelo δ_i en función de las reacciones del terreno R_i , esto se logra mediante un análisis de hundimientos del terreno.

En forma matricial:

$$K\delta + P_c + P_e = 0$$

Donde:

K = matriz de rigideces

δ = Vector de desplazamientos

P_c = Vector de cargas concentradas

P_e = Vector de cargas de empotramiento

4. Análisis de asentamientos del terreno de cimentación

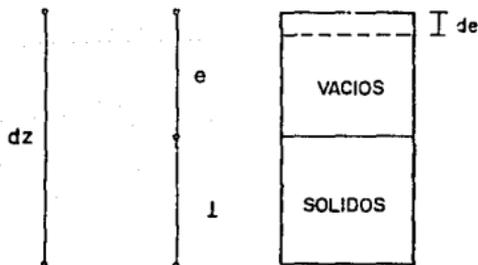
Frecuentemente ocurre que durante el proceso de consolidación (entendiendo así al proceso de disminución de volumen que tiene lugar en un lapso, provocado por un aumento de las cargas sobre el suelo), la

posición relativa de las partículas sólidas sobre un mismo plano horizontal permanece esencialmente la misma, así, el movimiento de las partículas del suelo puede ocurrir sólo en dirección vertical; esta es la consolidación unidireccional o unidimensional.

Por tanto, en la consolidación unidimensional el volumen de la masa de suelo disminuye pero los desplazamientos horizontales de las partículas sólidas son nulos.

Las características de la consolidación de los estratos de arcilla (como es nuestro caso), pueden investigarse cuantitativamente con aproximación razonable realizando la prueba de consolidación unidimensional sobre especímenes representativos del suelo extraídos en forma tan inalterada como sea posible. Se puede así calcular la magnitud y velocidad de los asentamientos probables debidos a las cargas aplicadas.

Partiendo del siguiente esquema de un elemento de suelo sujeto a consolidación unidimensional.



Si:

$$Y_s = 1 \Rightarrow Y_m = 1 + e$$

Se tiene la relación entre el cambio de la relación de vacíos y el cambio de volumen de la muestra de suelo sujeto a prueba:

$$\Delta\delta V = \frac{\delta e}{1+e} \delta z \quad (3.22)$$

Puesto que el área del elemento es unitaria, el cambio de volumen del elemento resulta medido por el cambio de altura.

Se define ahora el coeficiente de compresibilidad, α_v , como la relación

$$\alpha_v = \frac{\delta e}{\delta p} \quad (3.23)$$

Este coeficiente representa, en módulo, la pendiente de la curva de compresibilidad en escala natural en el punto de que se trate. El valor α_v depende de la presión actuante sobre el suelo y no es una constante del mismo. Físicamente mide la razón de variación de la relación de vacíos con la presión.

De la ecuación 3.23 se deduce:

$$\delta e = \alpha_v \delta p$$

y sustituyendo en 3.22 se tiene:

$$\Delta\delta V = \frac{\alpha_v}{1+e} \delta p \delta z \quad (3.24)$$

al término $\frac{\alpha_v}{1+e}$ se le conoce como "módulo de variación volumétrica"

$$m_z \text{ de donde:} \quad \Delta\delta V = m_z \cdot \delta p \delta z \quad (3.25)$$

$$\text{siendo } m_z = \frac{\alpha_v}{1+e} = \frac{\delta e}{(1+e)\delta p} \quad (3.26)$$

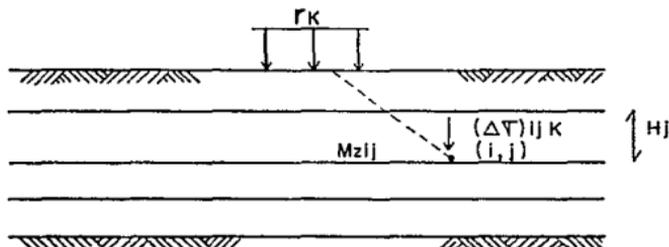
De otra manera:

$$m_{zlj} = \frac{\epsilon_z}{(\Delta\tau)_{ijk}} ; \epsilon_z = \frac{\delta_{ijk}}{H_j}$$

Sustituyendo:

$$m_{zlj} = \frac{\delta_{ijk}}{H_j (\Delta\tau)_{ijk}}$$

Así, el asentamiento del estrato j bajo el tramo i, es decir el asentamiento del cuadro ij, debido a una carga R_k (colocada en k), vale: (Figura III. h)



$$\begin{aligned} \delta_{(i,j)k} &= m_{zlj} \cdot H_j (\Delta\tau)_{ijk} \\ \text{igual a } \Delta H &= m_z \Delta\sigma H \end{aligned} \quad (3.27)$$

Donde:

δ_{ijk} = Asentamiento del cuadro ij , debido a una carga ubicada en K (R_k).

m_{zlj} = Módulo de variación volumétrica, igual a m_v para el caso esp específico de arcillas.

H_j = Espesor del estrato j

$(\Delta\tau)_{ijk}$ = Incremento del esfuerzo normal vertical en el cuadro ij ocasionado por una presión R_k/b_k en el contacto entre el suelo y cimentación.

b_k = Ancho de la cimentación, correspondiente a la reacción R_k .

Determinemos a continuación los desplazamientos verticales δ_i en función de las cargas R_i sobre el terreno, para la estratigrafía y propiedades del subsuelo de la Figura III.i.

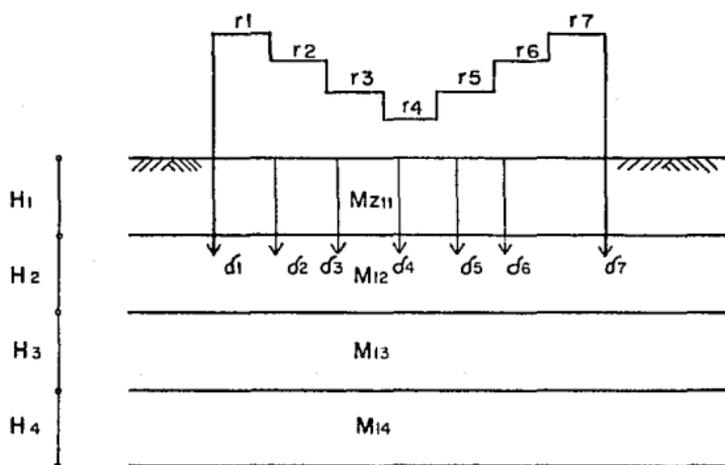


Figura III.i Cargas sobre el terreno de cimentación.

Con referencia a la Figura III.h, el incremento de presión se puede obtener considerando que:

$$(\Delta\tau)_{ijk} = 1_{ijk} \frac{R_k}{b_k} \quad (3.28)$$

siendo 1_{ijk} = Valor de influencia en el cuadro ij , debido a una presión unitaria colocada en k .

El valor de 1_{ijk} se puede determinar calculando el esfuerzo normal vertical producido por una presión unitaria en k , sobre el cuadro ij (Zeevaert 1973).

El asentamiento en el cuadro ij debido a todas las cargas R_k y a la carga q (Figura III.h) valdrá:

$$\delta_{ij} = m_{zij}H_j(q_j + \sum_{k=1}^m 1_{ijk} \frac{R_k}{b_k}) \quad (3.29)$$

en la cual m = número total de reacciones aplicadas en la superficie.

q_j = esfuerzo normal vertical debido a la presión q aplicada en la periferia de la estructura (Figura III.h.)

El asentamiento bajo el punto i será:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^p \delta_{ij} \quad (3.30)$$

Donde p = número de estratos en el subsuelo

Entonces:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^p m_{zij}H_j q_j + \sum_{j=1}^p m_{zij}H_j \left(\sum_{k=1}^m 1_{ijk} \frac{R_k}{b_k} \right) \quad (3.31)$$

En esta ecuación los desplazamientos verticales del suelo quedan en función de las reacciones R_i .

Cabe aclarar que los valores del módulo de deformación del suelo m_{zj} dependen del esfuerzo de confinamiento el cual no se conoce a priori. Por tal motivo los m_{zj} deben determinarse para un nivel de esfuerzos lo más cercano posible a la realidad (Zeevaert 1973), dependiendo este del nivel de la experiencia del Ingeniero que realiza el análisis. Si posteriormente se ve que el nivel de presiones considerado en el primer análisis está muy alejado de la magnitud de los esfuerzos obtenidos después de resuelto el problema, es probable que se tenga que volver a calcular los hundimientos del suelo con los valores corregidos del módulo al tomar un nuevo nivel de esfuerzos.

Hecha esta aclaración, en la ecuación (3.31), los desplazamientos verticales δ_i quedan en función de las cargas sobre el terreno R_i .

5. Compatibilidad de deformaciones

Una vez realizados los análisis de la estructura y de hundimientos del terreno de cimentación, se establece la condición de compatibilidad de deformaciones entre ellos, de la siguiente manera:

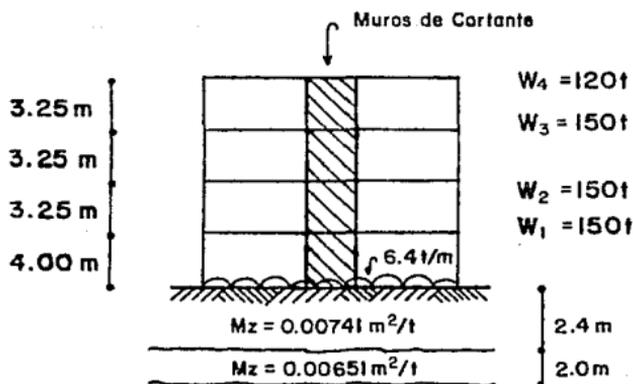
Los desplazamientos del suelo que están en función de las reacciones del terreno R_i , determinados por la ecuación (3.31) se sustituyen en el sistema de ecuaciones del análisis estructural (3.21), desapareciendo así como incógnitas los desplazamientos y quedando únicamente como incógnitas los desplazamientos angulares en los nudos (θ_i) y los desplazamientos lineales (reacciones del terreno R_i).

Queda por consiguiente un número de ecuaciones igual al número de incógnitas, con lo que se puede resolver el sistema.

Una vez conocidas las reacciones del terreno (R_i), se pueden determinar también los desplazamientos verticales del terreno, por medio de la ecuación (3.31).

IV. EJEMPLO DE APLICACION

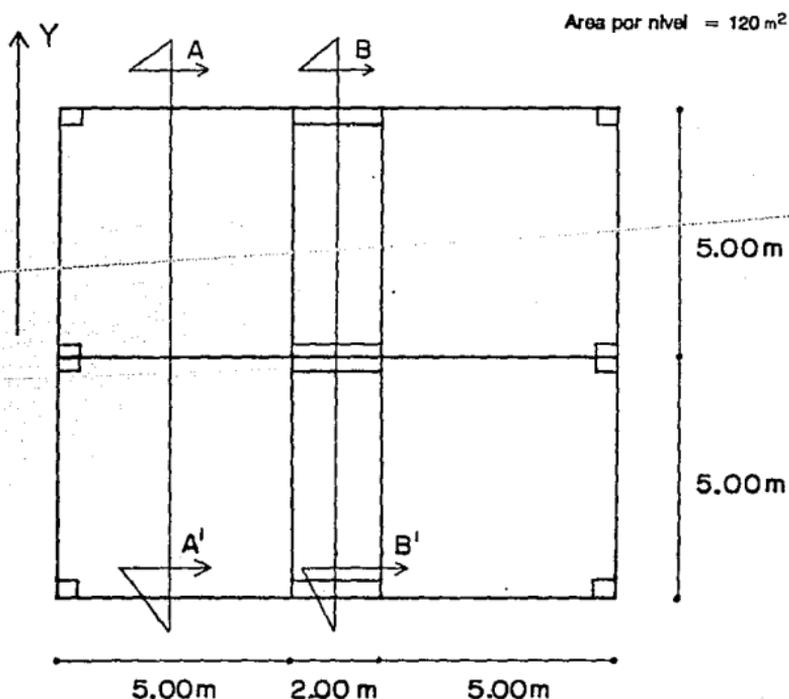
Con el objeto de ilustrar el procedimiento descrito en el Capítulo III se desarrolla en el presente inciso un ejemplo de aplicación paso a paso, consistente en determinar los diagramas de reacción y hundimientos del terreno para la estructura, estratigrafía y propiedades indicadas en la figura siguiente.



(Figura IV.1)

Se ha considerado a una estructura de concreto armado con cuatro niveles de 13.75 m de altura, clasificada dentro del tipo A y ubicada en la zona I de la Ciudad de México. Rigidizada por muros de concreto con capacidad para resistir en un alto porcentaje las fuerzas laterales que sobre ella actúen. Está soportada por una losa de cimentación de 20cm. espesor y apoyada en contratrabes desplantadas a 70 cm. de profundidad.

Planta de la estructura



(Figura IV.2)

Secciones de elementos estructurales:

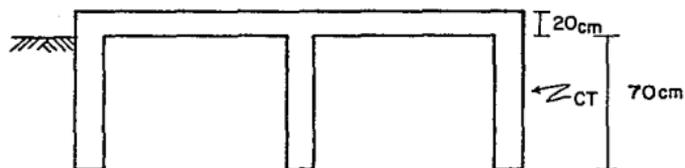
columnas 30 x 30 cms.

trabes 30 x 60 cms.

muros de concreto 30 x 200 cms.

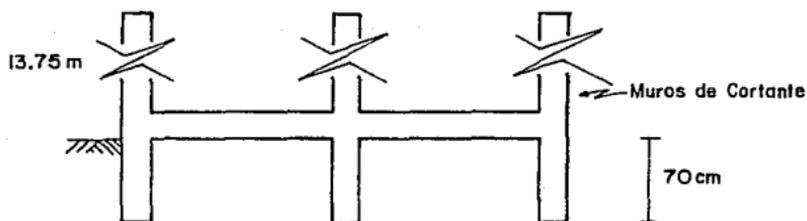
resistencia del concreto $f'c = 250 \text{ Kg/cm}^2$

CORTE A-A'



(Figura IV.2.1)

CORTE B-B'



(Figura IV.2.2)

Se puede deducir que la inercia de la Estructura será mucho mayor en el marco central, donde se ubican los muros de cortante en relación a los marcos de los extremos.

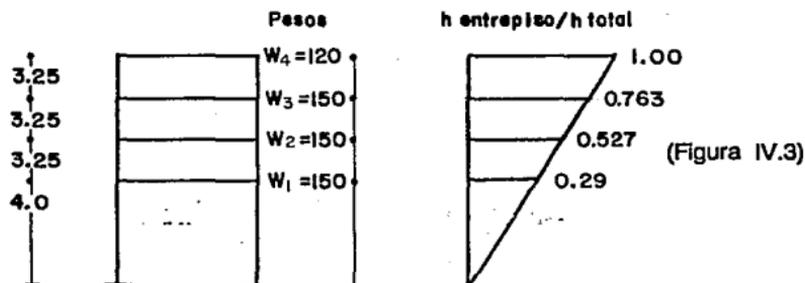
- Análisis Estático

Con referencia a la sección 2.1 de las NTC para diseño por sismo se analizará la estructura mediante el método estático (sección 8 de las mismas normas).

Para calcular las fuerzas cortantes a los diferentes niveles de la estructura, se supondrá un conjunto de fuerzas horizontales actuando sobre cada uno de los puntos donde se supongan concentradas las masas. Cada una de estas fuerzas se tomará igual al peso de la masa que corresponde multiplicado por un coeficiente proporcional a h , siendo h la altura de la masa en cuestión sobre el desplante. El coeficiente se tomará de tal manera que la relación V_0/W_0 sea igual a c/Q , siendo V_0 la fuerza cortante basal, W_0 el peso de la construcción que ya fue calculado, Q el factor de comportamiento que de acuerdo a la sección 5 de las normas es igual a 4, para este caso y c el coeficiente sísmico igual a 0.16 que establece el artículo 206 del Reglamento de Construcción, además de los valores de T_a y T_b (períodos característicos de los espectros de diseño) y de r (exponente en las expresiones para el cálculo de las ordenadas de los espectros de diseño).

Zcna	T_a	T_b	r	Tabla IV.1a
I	0.2	0.6	0.5	

$$V_0 = W_0 C \quad (4.1)$$



El cortante basal ($V's$), resultado de aplicar el análisis estático, debe ser igual al que se obtenga de acuerdo a lo anterior, en caso de existir diferencia se tendrá que ajustar mediante un factor de corrección (α) igual al cociente de ambas fuerzas cortantes basales, aplicable a la fuerza cortante de cada uno de los niveles.

$$\alpha = V_0/V's \quad (4.2)$$

$$V_s = \alpha V's \quad (4.3)$$

donde $V_s = V's$ ajustados

Ahora podrán adoptarse fuerzas cortantes menores que las calculadas según lo anterior, siempre que se tome en cuenta el valor aproximado del período fundamental de vibración de la estructura (T) igual a:

$$T = 6.3 (\sum W_i X_i^2 / g \sum P_i X_i)^{0.5} \quad (4.4)$$

donde $W_i =$ peso de la masa i

$X_i =$ desplazamiento de la masa i

$P_i =$ fuerza horizontal actuante sobre la masa i

Con fines de diseño, las fuerzas sísmicas para análisis estático obtenidas se podrán reducir dividiéndolas entre el factor reductivo Q' que se calcula como sigue:

$$Q' = Q \text{ si se desconoce } T \text{ o si éste es mayor o igual que } T_a \quad (4.5)$$

$$Q' = 1 + (T/T_a) (Q - 1), \text{ si } T \text{ es menor que } T_a \quad (4.6)$$

Con base en la teoría expuesta, procedemos a realizar el caso de nuestra estructura

Tabla IV.b.1

W(ton)	a	F's	V's	V's	F's
120	1.00	120	120	45.95	45.95
150	0.76	114.54	234.54	89.80	43.86
150	0.93	79.09	313.63	120.09	30.28
150	0.29	43.63	357.27	136.80	16.71
$\Sigma = 570$					

F's, se obtiene a partir de la ecuación: $F = m/a = (wa)/g$,

verificando el cortante basal (V_0) según (4.1):

$$V_0 = 570 (0.16 \times 1.5) = 136.80 \text{ ton}$$

1.5 = Factor de carga como lo indica el R.C.D.F. en su artículo 194 para las estructuras del grupo A para el primer grupo de combinación de cargas. Como $V_0 \neq V's$, entonces aplicamos (4.2) y (4.3) \therefore

$\alpha = 0.38$ y así obtenemos todos los Vs ajustados

Para llevar a cabo la reducción de fuerzas, Q es igual a 4, de acuerdo a la sección 5 de las NTC para diseño por sismo pues contamos con muros que contribuyen a la rigidez de la estructura soportando más del 80% del total de las fuerzas actuantes, y para calcular Q' , recurrimos a la expresión (4.5) que se ajusta a nuestro ejemplo; entonces $Q' = Q = 4$.

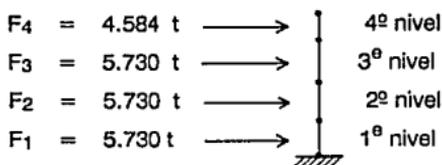
Con esta información continuamos con nuestro análisis llegando a la obtención de fuerzas sísmicas para toda estructura en el sentido X (Fs), y particularmente para cada marco en el mismo sentido (Fs/3)

Tabla IV.1.c

V_0/Q	F_s/Q	K	Δx	x red.(βx_i)	x real	$W_i x_i^2$	$P_i x_i$	F_s	$F_s/3$
								[ton]	[ton]
11.487	11.480	208	0.055	0.420	1.680	21.810	4.826	13.752	4.584
22.452	10.965	250	0.089	0.365	1.459	19.973	4.001	17.191	5.730
30.023	7.570	240	0.125	0.275	1.100	11.351	2.082	17.191	5.730
34.200	4.177	228	0.150	0.150	0.600	3.375	0.626	17.191	5.730
Σ						55.880	11.535		

La rigidez (k) de cada nivel, en el sentido de análisis, es igual a la sumatoria de las rigideces de cada marco en ese sentido; datos previamente obtenidos.

Representando esquemáticamente las fuerzas sísmicas actuantes en cada marco de la estructura en el sentido x :



(Figura IV.4)

Cabe mencionar que para llegar a esta solución se contó con el apoyo de una calculadora programable; Programa: "Análisis Estático".

Ahora que se conocen las fuerzas laterales a la que está sometida la estructura, es posible obtener las reacciones provocadas por las mismas, en sus apoyos. Para lo cual nos auxiliamos del programa para análisis de marcos planos "Analest".

Dadas las características de la estructura, al aplicar el programa se harán las siguientes observaciones: no se considerará al marco formado por el muro de concreto como tal, sino como una columna muy ancha y por tanto con una inercia considerablemente grande, es decir, tanto el momento que genere en la cimentación como las cargas que por ella bajen se repartirán, una vez terminado el análisis, al 50% para cada columna que son las dos que realmente existen.

Con base en lo anterior, se numeran y clasifican los elementos estructurales y los nudos para alimentar así al programa "Analest", (Figura IV.5), trabajando con un módulo de elasticidad del concreto

$E_c = 14\,000 \sqrt{f_c} \text{ Kg/cm}^2$, de acuerdo al inciso (d) de la sección 1.4.1, de las NTC para diseño y Construcción de estructuras de concreto.

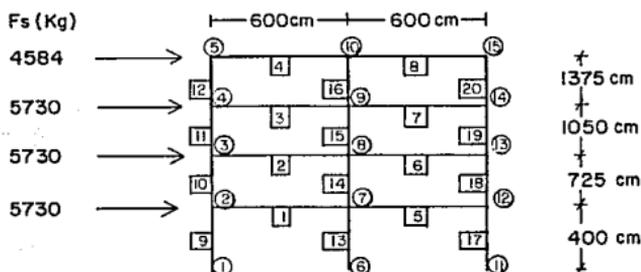


Figura IV.5

Se considerará cada marco de la estructura en el sentido de análisis X, sujeto a la acción de las fuerzas laterales calculadas y que cada marco está formado por veinte miembros estructurales (entre columnas, traveses y muros de concreto), y quince nudos. La hoja de resultados del programa "Analest" se anexa como información importante. (Anexo 1).

Las cargas verticales que las columnas transmiten hacia la viga de cimentación son un factor importante, que para nuestro ejemplo es fácil conocer pues contamos con el peso total (W_i) de cada nivel y el área del mismo; entonces con el área tributaria de cada columna se determina la totalidad de la carga que cada columna transmite en cada marco hacia la cimentación.

Planta General

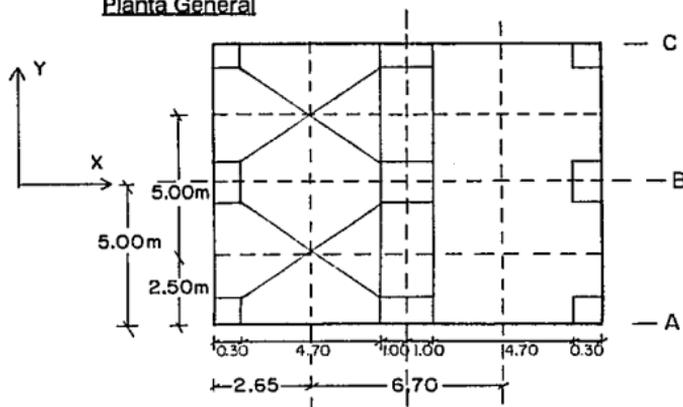


Figura IV.6

Nivel	Peso del nivel (W _i) [Ton.]	Area del nivel [M ²]	Peso/M ² [T/M ²]	Marco	Area tributaria del muro de concreto [M ²]	Area tributaria de las columnas de los extremos [M ²]	Carga que transmite el muro [Ton.]	Carga que transmiten las columnas [Ton.]
Azotea	120	120	1.0	Central eje B	6.70 x 5.00 = 33.50	5.00 x 2.65 = 13.25	33.50	13.25
Azotea	120	120	1.0	laterales ejes A y C	6.70 x 2.50 = 16.75	2.50 x 2.65 = 6.624	16.75	6.625
3, 2 y 1	150	120	1.25	Central eje B	33.50	13.25	41.875	16.5625
3, 2 y 1	150	120	1.25	laterales ejes A y C	16.75	6.625	20.9375	8.28125
P.B.	--	--	--	Central eje B	--	--	Peso propio = 7.20	Peso propio = 1.08
P.B.	--	--	--	laterales ejes A y C	--	--	Peso propio = 7.20	Peso propio = 1.08

Tabla IV.2

Haciendo la sumatoria de las cargas verticales:

— Marco^(B)

Tabla IV.3

Nivel	Columna	Muro	Columna
Azotea	13.25	33.50	13.25
Niveles 3, 2 y 1	(16.5625)(3)	(41.875)(3)	(16.5625)(3)
P.B. (Popo Columnas y Muro)	1.08	7.20	1.08
$\Sigma =$	<u>64.0175</u>	<u>166.325</u>	<u>64.0175</u>

— Marcos^{(A) y (C)}

Nivel	Columna	Muro	Columna
Azotea	6.625	16.796	6.625
Niveles 3, 2 y 1	(8.28125)(3)	(29.9375)(3)	(8.28125)(3)
P.B. (Popo Columnas y Muro)	1.08	7.20	1.08
$\Sigma =$	<u>32.54875</u>	<u>86.7625</u>	<u>32.54875</u>

En resumen: Carga transmitida por Columnas y Muro

	Columna	Muro	Columna
Marco ^(B)	64.0175	166.325	64.0175
Marcos ^{(A) y (B)}	(2)(32.54875)	(2)(86.7625)	(2)(32.54879)
$\Sigma =$	<u>129.115 t</u>	<u>339.85 t</u>	<u>129.115t</u>

Los momentos actuantes obtenidos como resultado de ejecutar el programa Analest son para cada uno de los marcos. En la viga flotante se deben considerar actuantes los de los 3 marcos, es decir, el triple de el valor calculado por ser similares (Tabla IV.4). De igual consideración será el caso de las cargas verticales totales (Tabla IV.3) que se ubican en la viga flotante.

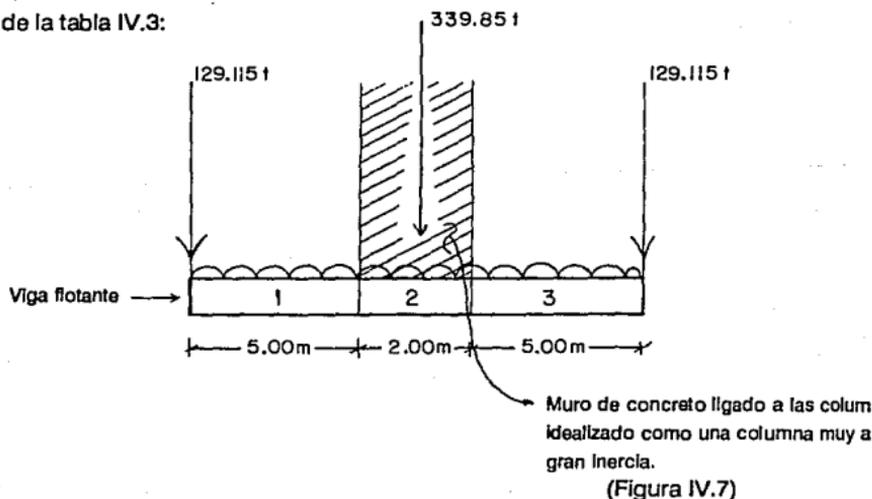
Así: Momento actuante calculado:

Nudo	Por Marco	Para la Viga
1	0.902 t.m.	2.706 t.m.
2	115.034 t.m.	345.102 t.m.
3	0.857 t.m.	02.571t.m.

(Tabla IV.4)

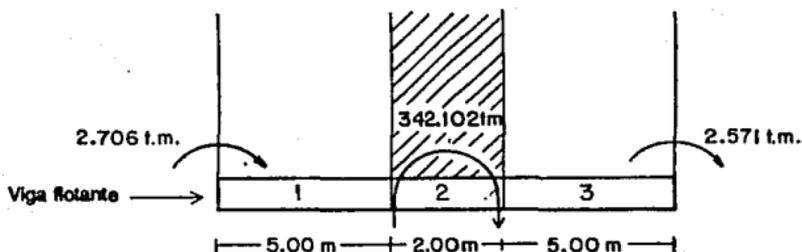
a) Cargas Verticales

de la tabla IV.3:



b) Momentos Actuantes

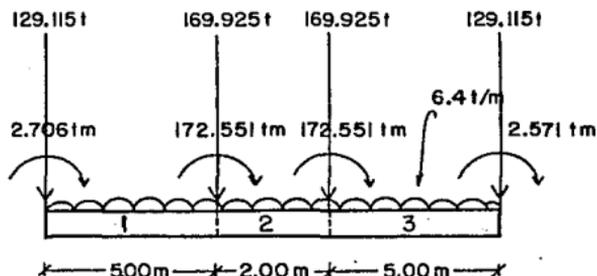
De la Tabla IV.4)



(Figura IV.8)

Hay que recordar que para llevar a cabo el análisis, estructural, se idealizó al muro de concreto que liga a las dos columnas centrales, como una columna muy ancha de gran inercia; por lo que ahora, tanto el momento como la carga vertical obtenida, se distribuirá al 50% para cada una de las columnas realmente existentes. (Figura IV.9)

De esta manera:



(Figura IV.9)

Se aprecia que los Momentos al centro son muy grandes en relación a los de los extremos, esto se atribuye a la inercia tan grande que los muros de cortante tienen, mismos que en este caso poseen la capacidad de soportar el 98% de las fuerzas laterales mismas que provocan que los momentos actuantes sean tan elevados.

Para nuestro ejemplo se pretende hacer el modelo de una viga equivalente, teniendo ésta las mismas características de carga y rigidez que las de la estructura. La viga equivalente reposa libremente sobre el suelo de tal forma que cualquier punto que se localice en la superficie de la cimentación sirve como apoyo para sostener la viga. Su rigidez estará dada por el parámetro EI/L , que se obtendrá de la manera siguiente:

El módulo de elasticidad "E" se tomará igual al del material de que esté construido el edificio. El momento de inercia "I" se obtendrá como la suma de todos los momentos de inercia de las áreas de los elementos estructurales con respecto al eje centroidal del edificio.

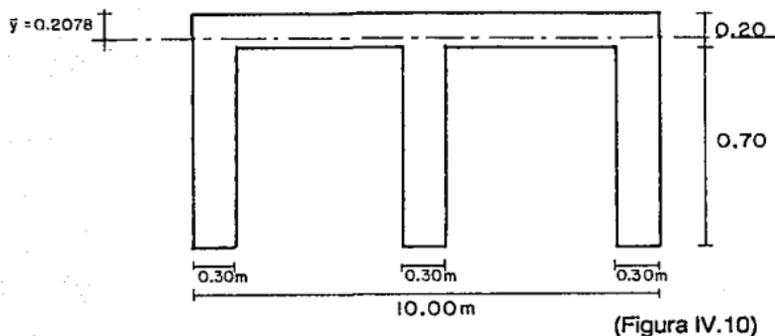
Así, para calcular el momento de inercia con respecto al eje centroidal aplicaremos el teorema de los Ejes Paralelos, cuya expresión es la siguiente:

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + \dots + A_n y_n}{A_1 + \dots + A_n} \quad \text{Con respecto a uno de los extremos de la figura.} \quad (4.7)$$

$$I = I_0 + Ad^2 \quad (4.8)$$

Entonces:

- Para la Inercia de los extremos de la viga, donde no existe muro de Cortante (Figura IV.10)



Aplicando (4.7)

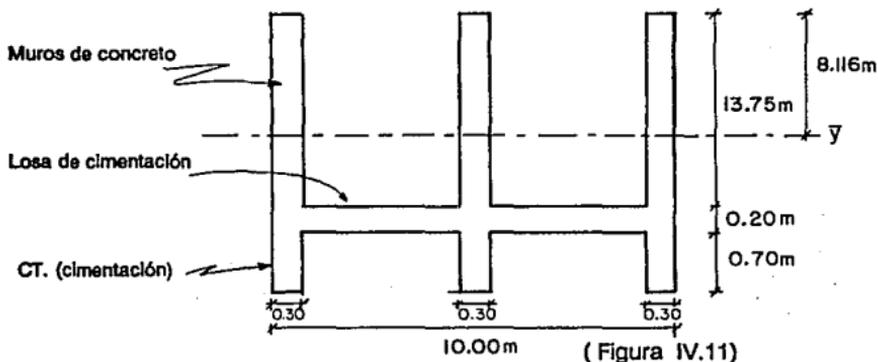
$$\bar{y} = \frac{10 \times 0.20 \times 0.10 + 0.90 \times 0.70 \times 0.55}{10 \times 0.20 + 0.9 \times 0.7} = 0.2078 \text{ m}$$

Calculando I con (4.8)

$$I = \frac{1000 \times 20^3}{12} + (1000 \times 20)(10.78)^2 + 90 \times 70^3 + \frac{(90 \times 70)(34.220)^2}{12} = 12'940,687.59 \text{ cm}^4$$

$$I_e = 12'12940,687.59 \text{ cm}^4$$

- Para la inercia de la parte central de la viga, donde existe muro de Cortante (Figura IV.11)



Aplicando (4.7)

$$\bar{y} = \frac{0.90 \times 13.75 \times 6.875 + 10 \times 0.20 \times 13.85 + 0.90 \times 0.70 \times 14.30}{0.9 \times 13.75 + 10 \times 0.20 + 0.90 \times 0.70} = 8.116 \text{ m.}$$

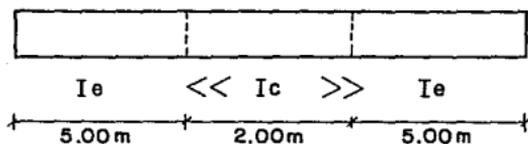
$$y = 8.116 \text{ m}$$

Calculando I con (4.8)

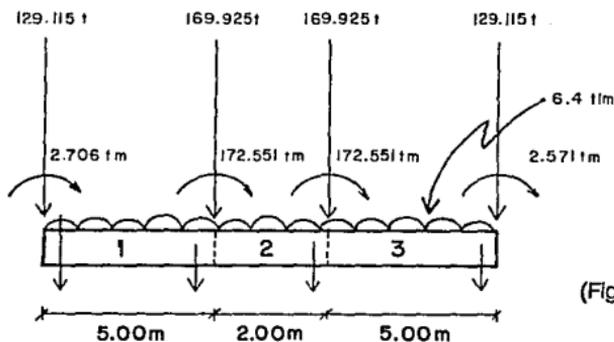
$$I = \frac{90 \times 1375^3}{12} + (90 \times 1375 \times 124.1^2) + \frac{(1000 \times 20^3)}{12} + (1000 \times 20 \times 573.4^2) + \frac{90 \times 70^3}{12} + (90 \times 70 \times 619.4^2) = 2.848543677 \times 10^{10} \text{ cm}^4$$

$$I_c = 2.848543677 \times 10^{10} \text{ cm}^4$$

Tal como se había previsto, nuestra Viga, 2 valores diferentes de Inercia siendo mucho mayor la de la parte central de la viga donde se desplantan los muros de Cortante, que la parte de los extremos, donde no existen.

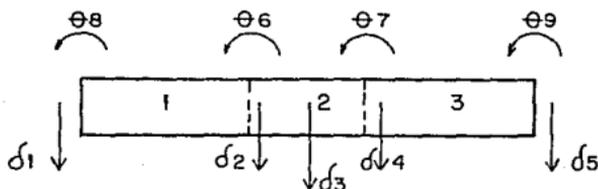


Para realizar el análisis de la viga, ésta se divide en 3 barras



(Figura IV.12)

Numerando las barras y los grados de libertad:

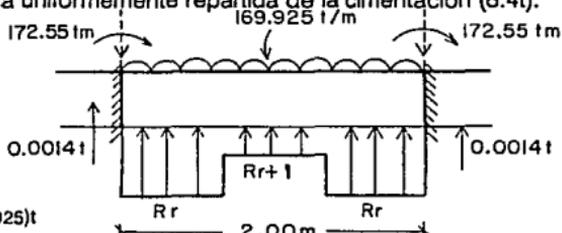


(Figura IV.13)

A continuación determinamos la matriz de rigideces de cada barra:

– Matriz de rigideces de la barra 2 (con apoyos continuos).

Para facilidad de análisis, la carga vertical que baja por el muro hasta la cimentación, (339.85 t.m.) la convertimos en distribuida sobre esta barra y la sumamos a la uniformemente repartida de la cimentación (6.4t).



$$\Rightarrow W = (6.4 + 169.925)t \\ = 176.325 \text{ t/m}$$

(Figura IV.14)

$$L = 2.00 \text{ m}$$

$$EI; E = 14,000 \sqrt{F^2 C} = 14,000 \sqrt{250} = 221,360 \text{ Kg/cm}^2$$

$$I = 2.848543677 \times 10^{10} \text{ cm}^4$$

$$EI = 6.305536283 \times 10^{15} \text{ Kg/cm}^2$$

$$EI = 63.05 \times 10^7 \text{ t.m.}$$

La matriz de rigideces de la barra es (Ver 3.4):

$$[K]_{ij} = \begin{pmatrix} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s \\ \begin{pmatrix} 12.61E^8 & 6.305E^8 & -9.4575E^8 & 9.4575E^8 \\ 6.305E^8 & 12.61E^8 & -9.4575E^8 & 9.4575E^8 \\ -9.4575E^8 & -9.4575E^8 & 9.4575E^8 & -9.4575E^8 \\ 9.4575E^8 & 9.4575E^8 & -9.4575E^8 & 9.4575E^8 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \theta_6 \\ \theta_7 \\ \delta_2 \\ \delta_4 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Para los Momentos y Cortantes de empotramiento de las cargas uniformemente repartidas en la viga, aplicamos (3.5 y 3.6).

$$M_p^0(6) = \frac{(176.325)4}{12} = 58.775 \text{ t.m.} \quad M_q^0(7) = 58.775 \text{ t.m.}$$

$$V_p^0(2) = -176.325 \text{ t} \quad ; \quad V_q^0(4) = 176.325 \text{ t}$$

Para las cargas uniformemente repartidas de la cimentación, empleamos las ecuaciones; (3.7, 3.8, 3.9 y 3.10)

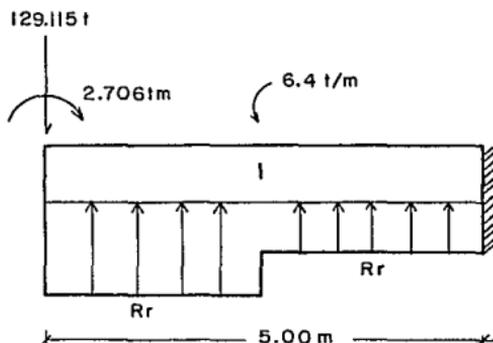
$$\begin{aligned} M_p^0(6) &= \frac{-67}{3072} (4) R_2 - \frac{11}{192} (4) R_3 - \frac{13}{3072} (4) R_4 \\ &= -0.0872 R_2 - 0.229 R_3 - 0.0169 R_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_p^0(7) &= \frac{13}{3072} (4) R_2 + \frac{11}{192} (4) R_3 + \frac{67}{3072} (4) R_4 \\ &= 0.0169 R_2 + 0.229 R_3 + 0.0872 R_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_p^0(2) &= \frac{121}{512} (2) R_2 + 0.25 (2) R_3 + \frac{7}{512} (2) R_4 \\ &= 0.4726 R_2 + 0.5 R_3 + 0.02734 R_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_q^0(4) &= \frac{7}{512} (2) R_2 + 0.25 (2) R_3 + \frac{121}{512} (2) R_4 \\ &= 0.0273 R_2 + 0.5 R_3 + 0.4726 R_4 \end{aligned}$$

- Para la barra 1 (Cantiliver)



(Figura IV.15)

$$L = 5.00 \text{ m.}$$

$$E = 14\,000 \sqrt{250} = 221360 \text{ Kg/cm}^2$$

$$I = 12'940,687.59 \text{ cm}^4$$

$$EI = 2.864550605 \text{ E}^{16} \text{ Kg/cm}^2$$

$$EI = 28.64 \text{ E}^8 \text{ t.m.}$$

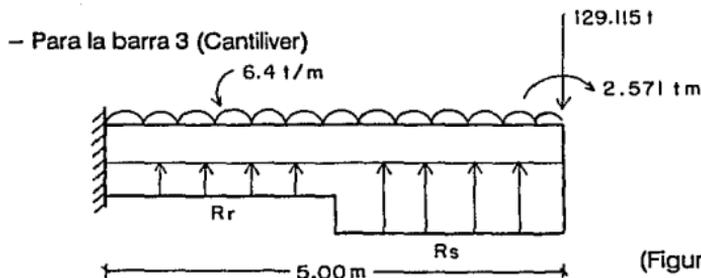
Aplicando la ecuación (3.18)

$$\frac{4EI}{L} \theta_q - \frac{4EI}{L^2} \delta_r + \frac{4EI}{L^2} \delta_s + \frac{4}{3} P_r L - \frac{41}{96} R_r L^2 - \frac{7}{96} R_s L^2 + \frac{41}{96} W_r L^2 + \frac{7}{96} W_s L^2 = 0$$

$$\frac{4(28.64E^8)}{5} \theta_6 - \frac{4(28.64E^8)}{25} \delta_1 + \frac{4(28.64E^8)}{25} \delta_2 + \frac{4}{3} (129.115)(5) - \frac{41}{96} (25R_1) - \frac{7}{96} (25R_2) + \frac{41}{96} (6.4)(25) + \frac{7}{96} (6.4)(25) = 0$$

$$22.91 \times 10^8 \theta_6 - 45.82 E^7 \delta_1 + 45.82 E^7 \delta_2 + 860.767 - 10.67 R_1 - 1.823 R_2 + 68.334 + 11.667 = 0$$

$$22.91 \times 10^8 \theta_6 - 45.82 E^7 \delta_1 + 45.82 E^7 \delta_2 - 10.67 R_1 - 1.823 R_2 = 940.77 \text{ (f)}$$



(Figura IV.16)

$$L = 5.00 \text{ m}$$

$$EI = 28.64 \times 10^8 \text{ t.m.}$$

Aplicando la ecuación para la barra 3

$$\frac{-4EI}{L} \theta_q + \frac{4EI}{L^2} \delta_r - \frac{4(EI)}{L^2} \delta_s - \frac{7}{96} L^2 R_r - \frac{41}{96} L^2 R_s + \frac{7}{96} L^2 W_r + \frac{4}{3} L P_r + \frac{41}{96} L^2 W_s = 0$$

$$22.91E^8 \theta_7 + 45.82E^7 \delta_4 - 45.82E^7 \delta_5 - 1.823 R_4 - 10.67 R_5 + 11.67 + 860.767 + 68.34 = 0$$

$$-22.91 E^8 \theta_7 + 45.82 E^7 \delta_4 - 45.82 E^7 \delta_5 - 1.823 R_4 - 10.67 R_5 = -940.77 \quad (g)$$

Con los resultados anteriores se puede formar la matriz de rigideces de la estructura.

Las barras 1 y 3 contribuyen con momentos y cortantes para lograr el equilibrio en los nudos de la estructura, el valor de estas cantidades está dada por las siguientes ecuaciones:

Barra 1 (Figura IV.15)

$$M_q^e = -\frac{Wl^2}{2} - PL + \frac{3L^2}{8} R_1 + \frac{L^2}{8} R_2 - 2M_s \quad (4.9)$$

$$V_r^e = -Wl - P + \frac{L}{2} R_1 + \frac{L}{2} R_2 \quad (4.10)$$

Barra 3 (Figura IV.16)

$$M_p^e = \frac{Wl^2}{2} + PL - \frac{L^2}{8} R_{nr-1} - \frac{3}{8} L^2 R_{nr} + 2M_s \quad (4.11)$$

$$V_s^e = -Wl - P + \frac{L}{2} R_{nr-1} + \frac{L}{2} R_{nr} \quad (4.12)$$

Calculándolos:

$$\begin{aligned} M_q^{\circ(6)} &= - \frac{(6.4)(25)}{2} - (129.115)(5) + \frac{3}{8} (25) R_1 + \frac{25}{8} R_2 - 2 (2.706) \\ &= - 80 - 645.575 + 9.375 R_1 + 3.125 R_2 - 5.412 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_s^{\circ(2)} &= - (6.4)(5) - 129.115 + \frac{5}{2} R_1 + \frac{5}{2} R_2 \\ &= - 32 - 129.115 + 2.5 R_1 + 2.5 R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_p^{\circ(7)} &= \frac{(6.4)(25)}{2} + (129.115) (5) - \frac{25}{8} R_4 - \frac{3}{8} (25) R_5 + 2 (2.571) \\ &= 80 + 645.575 - 3.125 R_4 - 9.375 R_5 + 5.142 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_s^{\circ(4)} &= - (6.4)(5) - 129.115 + \frac{5}{2} R_4 + \frac{5}{2} R_5 \\ &= - 32 - 129.115 + 2.5 R_4 + 2.5 R_5 \end{aligned}$$

Sumemos tanto los momentos de empotramiento de la estructura como los de la cimentación .

$$\begin{aligned} M_p^{\circ(6)} &= 58.775 - 0.0872 R_1 - 0.229 R_3 - 0.0169 R_4 - 5.142 - 80 - \\ & \quad 645.575 + 9.375 R_1 + 3.125 R_2 \\ &= - 672.212 + 9.375 R_1 + 3.0378 R_2 - 0.229 R_3 - 0.0169 R_4 \quad a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_q^{\circ(7)} &= - 58.775 + 0.0169 R_2 + 0.229 R_3 + 0.0872 R_4 + 5.142 + \\ & \quad 80 + 45.575 - 3.125 R_4 - 9.375 R_5 \\ &= 671.942 + 0.0169 R_2 + 0.229 R_3 - 3.0378 R_4 - 9.375 R_5 \quad b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_r^{\circ(2)} &= 176.325 + 0.4726 R_2 + 0.5 R_3 + 0.02734 R_4 - 32 - \\ & \quad 129.115 + 2.5 R_1 + 2.5 R_2 \\ &= - 337.44 + 2.5 R_1 + 2.972 R_2 + 0.5 R_3 + 0.02734 R_4 \quad c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_r^{\circ(4)} &= - 176.325 + 0.0273 R_2 + 0.5 R_3 + 0.04726 R_4 - 32 - 129.115 + \\ & \quad 2.5 R_4 + 2.5 R_5 \\ &= - 337.44 + 0.0273 R_2 + 0.5 R_3 + 2.9726 R_4 + 2.5 R_5 \quad d \end{aligned}$$

$$[K] \begin{Bmatrix} d \\ \Theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V^a \\ M^a \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V^c \\ M^c \end{Bmatrix} = 0$$

Estos momentos y cortantes de empotramiento, debemos sumarlos a la matriz de rigideces y posteriormente ensamblar a las demás ecuaciones:

Se aplican las ecuaciones complementarias (3.19) para calcular el desplazamiento vertical en la cimentación a la mitad del entre eje: para la barra con apoyos continuos (barra 2).

$$\frac{EI\theta_p}{L} - \frac{EI\theta_q}{L} - \frac{8EI}{L^2} \delta_r + \frac{16EI}{L^2} \delta_r + 1 - \frac{8EI}{L^2} \delta_s + \frac{1}{256} L^2 R_r + \frac{13}{384} L^2 R_{r+1} + \frac{1}{256} L^2 R_s = \frac{W_j L^2}{24}$$

$$3.152E^8 \theta_6 - 3.152E^8 \theta_7 - 1.261E^9 \delta_2 + 2.522E^9 \delta_3 - 1.261E^9 \delta_4 + 0.0156R_2 + 0.1354 R_3 + 0.0156 R_4 = 28.32$$

e

Haciendo el ensamble de la matriz con las ecuaciones obtenidas

$$12.61E^8\theta_6 + 6.305E^8\theta_7 + 9.375R_1 + 3.0378R_2 - 0.229R_3 - 0.0169R_4 - 672.212$$

$$= 0 \quad \left. \begin{array}{l} -172.551 \end{array} \right\} (1)$$

$$6.305E^8\theta_6 + 12.61E^8\theta_7 + 0.0169R_2 + 0.229R_3 - 3.0378R_4 - 9.375R_5 + 671.942$$

$$= 0 \quad \left. \begin{array}{l} -172.551 \end{array} \right\} (2)$$

$$-9.457E^8\theta_6 - 9.457E^8\theta_7 + 2.50R_1 + 2.9726R_2 + 0.50R_3 + 0.02734R_4 - 337.44$$

$$= 0 \quad \left. \begin{array}{l} 0 \end{array} \right\} (3)$$

$$9.457E^8\theta_6 + 9.457E^8\theta_7 + 0.0273R_2 + 0.50R_3 + 2.9726R_4 + 2.50R_5 - 337.44$$

$$= 0 \quad \left. \begin{array}{l} 0 \end{array} \right\} (4)$$

$$22.91E^8\theta_6 - 4.4582E^8\delta_1 + 4.582E^8\delta_2 - 10.67R_1 - 1.823R_2 + 940.77$$

$$= 0 \quad \left. \begin{array}{l} 0 \end{array} \right\} (5)$$

$$-22.91E^8\theta_7 + 4.582E^8\delta_4 - 4.582E^8\delta_5 - 1.823R_4 - 10.67R_5 + 940.77$$

$$= 0 \quad \left. \begin{array}{l} 0 \end{array} \right\} (6)$$

$$-3.152E^8\theta_7 + 4.582E^8\theta_7 - 12.61E^8\delta_2 + 25.22E^8\delta_3 - 12.61E^8\delta_4 + 0.0156R_2 + 0.1354R_3 + 0.056R_4 - 28.32$$

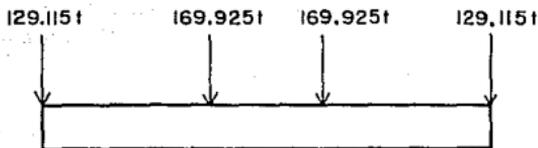
$$= 0 \quad \left. \begin{array}{l} 0 \end{array} \right\} (7)$$

Hemos obtenido más incógnitas que ecuaciones, para reducir el número incógnitas podemos calcular los desplazamientos del suelo en función de las reacciones del suelo, empleando la ecuación (3.31). En principio se requieren determinar los valores de influencia I_{ijk} , que son los esfuerzos normales verticales ocasionados por una presión vertical unitaria aplicada en la superficie del terreno.

$$\delta_i = \sum_{j=1}^P M_{vj} H_j q_{ij} + \sum_{j=1}^P M_{vj} j H_i \left(\sum_{k=1}^m I_{ijk} r_{bk} \right) \quad (3.31)$$

Para calcular los valores de influencia emplearemos la ecuación integrada por el Ing. Julio Dammy:

$$\tau_z = \frac{q}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{1+m^2} + \frac{1}{1+n^2} \right) \left(\frac{mn}{(m^2+n^2+1)^{0.5}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{mn}{(m^2+n^2+1)^{0.5}} \right) \right] \quad (3.32)$$



$$q = \frac{Q.F.C.}{A} ; \frac{598.08 \times 1.1}{12 \times 10} = \frac{657.89}{120} = 5.4824 \text{ t/m}^2$$

1.1 = F.C. RDF, Artículo 194 Fracción II

Entonces:

PARA K = 1

I_{111}

$$X = 2.5$$

$$Y = 5.0$$

$$Z = 1.2$$

$$I_{111} = 1.3162 \text{ t/m}^2$$

$$Z = 3.4$$

$$I_{121} = 0.9195 \text{ t/m}^2$$

$I_{211} \text{ e } I_{221}$

A2 - A1

$$\begin{aligned} \text{A2 ; } x &= 5.5 \\ y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{A1 ; } x &= 2.5 \\ y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\text{para } Z = 1.2 \quad I_{211} = 1.3583 - 1.3162 = 0.0420 \text{ t/m}^2$$

$$\text{para } Z = 3.4 \quad I_{221} = 1.1919 - 0.9195 = 0.2723 \text{ t/m}^2$$

I₃₁₁ e I₃₂₁

$$\begin{aligned} A_2 ; X &= 6.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 ; X &= 5.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

para Z = 1.2
para Z = 3.4

$$\begin{aligned} I_{311} &= 1.3601 - 1.3583 = 0.0018 \\ I_{321} &= 1.2159 - 1.1919 = 0.0239 \end{aligned}$$

I₄₁₁ e I₄₂₁

$$\begin{aligned} A_2 ; X &= 9.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 ; X &= 6.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

para Z₁ = 1.2
para Z = 3.4

$$\begin{aligned} I_{411} &= 1.3619 - 1.3602 = 0.0017 \\ I_{421} &= 1.2432 - 1.2159 = 0.0273 \end{aligned}$$

I₅₁₁ e I₅₂₁

$$\begin{aligned} A_2 ; X &= 12.00 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 ; X &= 9.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

para Z₁ = 1.2
para Z = 3.4

$$\begin{aligned} I_{511} &= 1.3622 - 1.3618 = 0.0003 \\ I_{521} &= 1.2496 - 1.2432 = 0.0064 \end{aligned}$$

El cálculo de los valores de influencia restantes. Se calculan de manera similar:

PARA K = 2

I₁₁₂ e I₁₂₂

$$\begin{aligned} A_2; X &= 4.0 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1; X &= 1.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } Z = 1.2 & \quad I_{112} = 1.3507 - 1.2045 = 0.1461 \\ \text{para } Z = 3.4 & \quad I_{122} = 1.1150 - 0.6529 = 0.4621 \end{aligned}$$

I₂₁₂ e I₂₂₂

$$\begin{aligned} I_{212} &= 1.3162 (2) = 2.6324 \\ I_{222} &= 0.9195 (2) = 1.8390 \end{aligned}$$

I₃₁₂ e I₃₂₂

$$\begin{aligned} A_2; X &= 2.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1; X &= 1.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } Z = 1.2 & \quad I_{312} = 1.3162 - 1.2946 = 0.1116 \\ \text{para } Z = 3.4 & \quad I_{322} = 0.0105 - 0.6529 = 0.2665 \end{aligned}$$

I₄₁₂ e I₄₂₂

$$\begin{aligned} A_2; X &= 5.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1; X &= 2.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } Z = 1.2 & \quad I_{412} = 1.3583 - 1.3162 = 0.0420 \\ \text{para } Z = 3.4 & \quad I_{422} = 1.1919 - 0.9195 = 0.2723 \end{aligned}$$

I512 e I522

$$\begin{aligned} A2; X &= 8.0 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1; X &= 5.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } Z = 1.2 & \quad I_{512} = 1.3613 - 1.3583 = 0.0030 \\ \text{para } Z = 3.4 & \quad I_{522} = 1.2344 - 1.1919 = 0.0425 \end{aligned}$$

PARA K = 3

I113 e I123

$$\begin{aligned} A2; X &= 6.0 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1; X &= 3.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } Z = 1.2 & \quad I_{113} = 1.3594 - 1.3448 = 0.0145 \\ \text{para } Z = 3.4 & \quad I_{123} = 1.2056 - 1.0689 = 0.1366 \end{aligned}$$

I213 e I223

$$\begin{aligned} A2; X &= 3.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1; X &= 0.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } Z = 1.2 & \quad I_{213} = 1.3448 - 0.6531 = 0.6916 \\ \text{para } Z = 3.4 & \quad I_{223} = 1.0689 - 0.2420 = 0.8268 \end{aligned}$$

I313 e I323

$$\begin{aligned} \text{para } Z = 1.2 & \quad I_{313} = I_{212} = 2.6324 \\ \text{para } Z = 3.4 & \quad I_{323} = I_{222} = 1.8390 \end{aligned}$$

I413 e I423

$$\begin{aligned} \text{para } Z = 1.2 & \quad I_{413} = I_{213} = 0.6916 \\ \text{para } Z = 3.4 & \quad I_{423} = I_{223} = 0.8268 \end{aligned}$$

I513 e I523

$$\begin{array}{ll} \text{para } Z = 1.2 & I_{513} = I_{113} = 0.0145 \\ \text{para } Z = 3.4 & I_{523} = I_{123} = 0.1366 \end{array}$$

PARA K = 4

I114 e I124

$$\begin{array}{ll} A_2; X = 8.0 & A_1; X = 5.5 \\ Y = 5.0 & Y = 5.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{para } Z = 1.2 & I_{114} = 1.3613 - 1.3583 = 0.0030 \\ \text{para } Z = 3.4 & I_{124} = 1.2344 - 1.1919 = 0.0425 \end{array}$$

I214 e I224

$$\begin{array}{ll} A_2; X = 5.5 & A_1; X = 2.5 \\ Y = 5.0 & Y = 5.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{para } Z = 1.2 & I_{214} = 1.3583 - 1.3162 = 0.0420 \\ \text{para } Z = 3.4 & I_{224} = 1.1919 - 0.9195 = 0.2723 \end{array}$$

I314 e I324

$$\begin{array}{ll} A_2; X = 2.5 & A_1; X = 1.5 \\ Y = 5.0 & Y = 5.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{para } Z = 1.2 & I_{314} = 1.3162 - 1.2045 = 0.1116 \\ \text{para } Z = 3.4 & I_{324} = 0.9195 - 0.6529 = 0.2665 \end{array}$$

I414 e I424

$$\begin{array}{ll} \text{para } Z = 1.2 & I_{414} = I_{313} = 2.6324 \\ \text{para } Z = 3.4 & I_{424} = I_{323} = 1.8390 \end{array}$$

I514 e I524

$$A_2; \begin{aligned} X &= 4.0 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$A_1; \begin{aligned} X &= 1.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\text{para } Z = 1.2 \quad I_{514} = 1.3507 - 1.2045 = 0.1461$$

$$\text{para } Z = 3.4 \quad I_{524} = 1.1150 - 0.6529 = 0.4621$$

PARA K = 5

I115 e I125

$$A_2; \begin{aligned} X &= 12.0 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$A_1; \begin{aligned} X &= 9.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\text{para } Z = 1.2 \quad I_{115} = 1.3622 - 1.3618 = 0.0003$$

$$\text{para } Z = 3.4 \quad I_{125} = 1.2496 - 1.2432 = 0.0064$$

I215 e I225

$$A_2; \begin{aligned} X &= 9.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$A_1; \begin{aligned} X &= 6.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\text{para } Z = 1.2 \quad I_{215} = 1.3618 - 1.3601 = 0.0017$$

$$\text{para } Z = 3.4 \quad I_{225} = 1.2432 - 1.2159 = 0.0273$$

I315 e I325

$$A_2; \begin{aligned} X &= 6.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$A_1; \begin{aligned} X &= 5.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\text{para } Z = 1.2 \quad I_{315} = 1.3601 - 1.3583 = 0.0018$$

$$\text{para } Z = 3.4 \quad I_{325} = 1.2159 - 1.1919 = 0.0239$$

I₄₁₅ e I₄₂₅

$$A_2: \begin{aligned} X &= 5.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$A_1: \begin{aligned} X &= 2.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } Z = 1.2 & \quad I_{415} = 1.3583 - 1.3162 = 0.0420 \\ \text{para } Z = 3.4 & \quad I_{425} = 1.1919 - 0.9195 = 0.0273 \end{aligned}$$

I₅₁₅ e I₅₂₅

$$\begin{aligned} X &= 2.5 \\ Y &= 5.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } Z = 1.2 & \quad I_{515} = 1.3162 \\ \text{para } Z = 3.4 & \quad I_{525} = 0.9195 \end{aligned}$$

Ya se han obtenido todos los valores de influencia, para una mejor identificación de los mismos, se acomodarán en una tabla para cada K.

K = 1

$$\begin{array}{ccccc} I_{111} (1.3162) & I_{211}(0.0420) & I_{311} (0.0018) & I_{411} (0.0017) & I_{511} (0.0003) \\ I_{121} (0.9195) & I_{221}(0.2723) & I_{321} (0.0239) & I_{421} (0.0273) & I_{521} (0.0064) \end{array}$$

K = 2

$$\begin{array}{ccccc} I_{112} (0.1461) & I_{212} (2.6324) & I_{312} (0.1116) & I_{412} (0.0420) & I_{512} (0.0030) \\ I_{122} (0.4621) & I_{222} (0.8390) & I_{322} (0.2665) & I_{422} (0.2723) & I_{522} (0.0425) \end{array}$$

K = 3

$$\begin{array}{ccccc} I_{113} (0.0145) & I_{213} (0.6916) & I_{313} (2.6324) & I_{413} (0.6916) & I_{513} (0.0145) \\ I_{123} (0.1366) & I_{223} (0.8268) & I_{323} (1.8390) & I_{423} (0.8268) & I_{523} (0.1366) \end{array}$$

$$K = 4$$

$$\begin{array}{ccccc} I_{114} (0.0030) & I_{214} (0.0420) & I_{314} (0.1116) & I_{414} (2.6324) & I_{514} (0.1461) \\ I_{124} (0.0425) & I_{224} (0.2723) & I_{324} (0.2665) & I_{424} (1.8390) & I_{524} (0.4621) \end{array}$$

$$K = 5$$

$$\begin{array}{ccccc} I_{115} (0.0003) & I_{215} (0.0017) & I_{315} (0.0018) & I_{415} (0.0420) & I_{515} (1.3162) \\ I_{125} (0.0064) & I_{225} (0.0273) & I_{324} (0.0239) & I_{425} (0.2723) & I_{525} (0.9195) \end{array}$$

Estos valores de influencia son los que deben sustituirse en la ecuación de desplazamientos (3.31)

$$\delta_i = \sum_{j=1}^P Mv_{ij} H_{j\alpha_j} + \sum_{j=i}^P Mv_{ij} H_j \left(\sum_{k=1}^m I_{ijk} \frac{r_k}{b_k} \right)$$

Sustituyendo:

Para cada uno de los desplazamientos tenemos:

$$\delta_1 = Mv_{11} H_1 \left(I_{111} \frac{r_1}{b_1} + I_{112} \frac{r_2}{b_2} + I_{113} \frac{r_3}{b_3} + I_{114} \frac{r_4}{b_4} + I_{115} \frac{r_5}{b_5} \right) + Mv_{12} H_2 \left(I_{121} \frac{r_1}{b_1} + I_{122} \frac{r_2}{b_2} + I_{123} \frac{r_3}{b_3} + I_{124} \frac{r_4}{b_4} + I_{125} \frac{r_5}{b_5} \right)$$

$$\delta_1 = \frac{0.00741}{12} (2.4) [1.3162r_1 + 0.1461r_2 + 0.0145r_3 + 0.0030r_4 + 0.0003r_5] + \frac{0.00651}{12} (2.0) [0.9195r_1 + 0.4621r_2 + 0.1366r_3 + 0.0425r_4 + 0.0064r_5]$$

$$\delta_1 = 0.002941r_1 + 0.000715r_2 + 0.000168r_3 + 0.000050r_4 + 0.000007r_5 \quad (8)$$

$$\delta_2 = Mv_{21} H_1 \left(I_{211} \frac{r_1}{b_1} + I_{212} \frac{r_2}{b_2} + I_{213} \frac{r_3}{b_3} + I_{214} \frac{r_4}{b_4} + I_{215} \frac{r_5}{b_5} \right) + Mv_{22} H_2 \left(I_{221} \frac{r_1}{b_1} + I_{222} \frac{r_2}{b_2} + I_{223} \frac{r_3}{b_3} + I_{224} \frac{r_4}{b_4} + I_{225} \frac{r_5}{b_5} \right)$$

$$\delta_2 = 0.001482 [0.042r_1 + 2.6324r_2 + 0.6916r_3 + 0.0420r_5 + 0.0017 r_5] + 0.00108 [0.2723r_1 + 1.8390r_2 + 0.8268r_3 + 0.2723r_4 + 0.0273r_5]$$

$$\delta_2 = 0.000356r_1 + 0.005882r_2 + 0.001916r_3 + 0.000356r_4 + 0.000032r_5 \quad (9)$$

$$\delta_3 = M_{v31} H_1 \left(I_{311} \frac{r_1}{b_1} + I_{312} \frac{r_2}{b_2} + I_{313} \frac{r_3}{b_3} + I_{314} \frac{r_4}{b_4} + I_{315} \frac{r_5}{b_5} \right) + M_{v32} H_2 \left(I_{321} \frac{r_1}{b_1} + I_{322} \frac{r_2}{b_2} + I_{323} \frac{r_3}{b_3} + I_{324} \frac{r_4}{b_4} + I_{325} \frac{r_5}{b_5} \right) +$$

$$\delta_3 = 0.001482 [0.0018 r_1 + 0.1116 r_2 + 2.6324 r_3 + 0.1116 r_4 + 0.0018r_5] + 0.00108 [0.0239 r_1 + 0.2665 r_2 + 1.8390 r_3 + 0.2665 r_4 + 0.0239 r_5]$$

$$\delta_3 = 0.000028r_1 + 0.000452r_2 + 0.00588r_3 + 0.000452r_4 + 0.000028r_5 \quad (10)$$

$$\delta_4 = M_{v41} H_1 \left(I_{411} \frac{r_1}{b_1} + I_{412} \frac{r_2}{b_2} + I_{413} \frac{r_3}{b_3} + I_{414} \frac{r_4}{b_4} + I_{415} \frac{r_5}{b_5} \right) + M_{v42} H_2 \left(I_{421} \frac{r_1}{b_1} + I_{422} \frac{r_2}{b_2} + I_{423} \frac{r_3}{b_3} + I_{424} \frac{r_4}{b_4} + I_{425} \frac{r_5}{b_5} \right) +$$

$$\delta_4 = 0.001482 [0.0017r_1 + 0.0420r_2 + 0.6916r_3 + 2.6324r_4 + 0.0420r_5] + 0.00108 [0.0273r_1 + 0.2723r_2 + 0.8268r_3 + 1.8390r_4 + 0.2723r_5]$$

$$\delta_4 = 0.000032r_1 + 0.000356r_2 + 0.001916r_3 + 0.005882r_4 + 0.000356r_5 \quad (11)$$

$$\delta_5 = M_{v51} H_1 \left(I_{511} \frac{r_1}{b_1} + I_{512} \frac{r_2}{b_2} + I_{513} \frac{r_3}{b_3} + I_{514} \frac{r_4}{b_4} + I_{515} \frac{r_5}{b_5} \right) + M_{v52} H_2 \left(I_{521} \frac{r_1}{b_1} + I_{522} \frac{r_2}{b_2} + I_{523} \frac{r_3}{b_3} + I_{524} \frac{r_4}{b_4} + I_{525} \frac{r_5}{b_5} \right) +$$

$$\delta_5 = 0.001482 [0.0003r_1 + 0.003 r_2 + 0.0145 r_3 + 0.1461 r_4 + 1.3162r_5] + 0.00108 [0.0064 r_1 + 0.0425 r_2 + 0.1366 r_3 + 0.4621 r_4 + 0.9195r_5]$$

$$\delta_5 = 0.000007r_1 + 0.00005r_2 + 0.000168r_3 + 0.000715r_4 + 0.002941r_5 \quad (12)$$

Sustituimos los desplazamientos obtenidos en las correspondientes ecuaciones; Sustituimos en la ecuación (5)

$$22.91E996 - 4.582E991 + 4.582E992 - 10.67r_1 - 1.823r_2 + 940.77 = 0$$

$$22.91E996 - 4.582E8(0.002941r_1 + 0.000715r_2 + 0.000168r_3 + 0.00005r_4 + 0.000007r_5) \\ + 4.582E8(0.000356r_1 + 0.005882r_2 + 0.001916r_3 + 0.000356r_4 + 0.000032r_5) \\ - 10.67r_1 - 1.823r_2 + 940.77 = 0$$

$$22.91E996 - 1184457.67r_1 + 2367517.577r_2 + 800933.6r_3 + 140209.2r_4 + 11455r_5 = -940.77 \quad (13)$$

Sustituimos en la ecuación (6)

$$-22.91E997 + 4.582E994 - 4.582E995 - 1.823r_4 - 10.67r_5 + 940.77 = 0$$

$$-22.91E997 + 4.582E8(0.000032r_1 + 0.000356r_2 + 0.001916r_3 + 0.005882r_4 + 0.000356r_5) \\ - 4.582E8(0.000007r_1 + 0.00005r_2 + 0.000168r_3 + 0.000715r_4 + 0.002941r_5) \\ - 1.823r_4 - 10.67r_5 + 940.77 = 0$$

$$-22.91E997 + 11455r_1 + 160828.2r_2 + 800933.6r_3 + 2367517.57r_4 - 1184457.67r_5 = -940.77 \quad (14)$$

Sustituimos en la ecuación (7)

$$3.152E996 - 3.152E997 - 12.61E992 + 25.22E993 - 12.61E994 + 0.0156r_2 + 0.1354r_3 + 0.0156r_4 - 28.32 = 0$$

$$3.152E996 - 3.152E997 - 12.61E8[0.000356r_1 + 0.005882r_2 + 0.001916r_3 + 0.000356r_4 + 0.000032r_5] \\ + 25.22E8[0.000028r_1 + 0.000452r_2 + 0.005882r_3 + 0.000452r_4 + 0.000028r_5] \\ - 12.61E8[0.000032r_1 + 0.000356r_2 + 0.001916r_3 + 0.005882r_4 + 0.000032r_5] \\ + 0.0156r_2 + 0.1354r_3 + 0.0156r_4 - 28.32 = 0$$

$$3.152E996 - 3.152E997 - 418652r_1 - 6726173.98r_2 + 10002252.14r_3 - 6726173.98r_4 - 418652r_5 - 28.32 = 0 \quad (15)$$

Se establece el Sistema de Ecuaciones.-
Ecuaciones (1), (2), (3), (4), (13), (14) y (15)

θ_6	θ_7	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	θ_6	
12.61E ⁸	6.305E ⁸	9.375	-3.0378	-0.229	-0.0169	0	θ_6	499.661
6.305E ⁸	12.61E ⁸	0	0.0169	0.229	-3.0378	-9.375	θ_7	-844.493
-9.457E ⁸	-9.457E ⁸	2.5	2.9726	0.500	0.02734	0	R ₁	337.04
9.457E ⁸	9.457E ⁸	0	0.0273	0.500	2.9726	2.5	R ₂	337.04
22.91E ⁸	0	-1184457.67	2367517.577	800933.6	140209.2	11455	R ₃	-940.77
0	-22.91E ⁸	11455	160828.2	800933.6	2367517.57	-1184457.67	R ₄	-940.77
3.152E ⁸	-3.152E ⁸	-418652	-6726173.98	10002252.14	-6726173.98	-418652	R ₅	28.32

Resolviendo el Sistema

$$\theta_6 = -4.420937E^{-7}$$

$$R_3 = 45.678219$$

$$\theta_7 = 3.929489E^{-7}$$

$$R_4 = 34.301888$$

$$R_1 = 80.3189322$$

$$R_5 = 103.242107$$

$$R_2 = 22.199264$$

Sustituimos estos valores directamente en las ecuaciones (8), (9), (10), (11) y (12).

$$\delta_1 = 0.002941r_1 + 0.000715r_2 + 0.000168r_3 + 0.00005r_4 + 0.000007r_5$$

$$\delta_2 = 0.000356r_1 + 0.005882r_2 + 0.001916r_3 + 0.000356r_4 + 0.000032r_5$$

$$\delta_3 = 0.000028r_1 + 0.000452r_2 + 0.00588r_3 + 0.000452r_4 + 0.000028r_5$$

$$\delta_4 = 0.000032r_1 + 0.000356r_2 + 0.001916r_3 + 0.005882r_4 + 0.000356r_5$$

$$\delta_5 = 0.000007r_1 + 0.00005r_2 + 0.000168r_3 + 0.000715r_4 + 0.002941r_5$$

Entonces:

$$\delta_1 = 0.262202 \text{ m} = 26.2202 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = 0.262204 \text{ m} = 26.2204 \text{ cm}$$

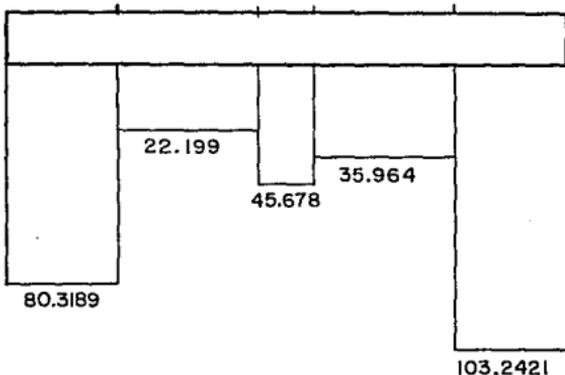
$$\delta_3 = 0.299266 \text{ m} = 29.9266 \text{ cm}$$

$$\delta_4 = 0.336510 \text{ m} = 33.6510 \text{ cm}$$

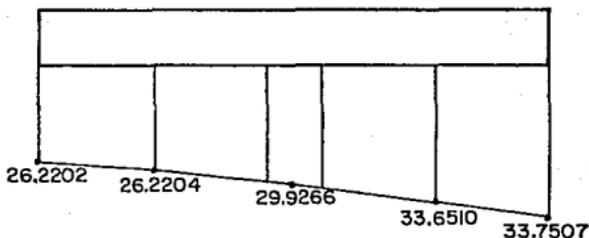
$$\delta_5 = 0.337507 \text{ m} = 33.7507 \text{ cm}$$

Los resultados se muestran esquemáticamente;

a) Reacciones del terreno (t/m)



b) Desplazamientos.- (cm)



Es claramente perceptible el desplazamiento diferencial obtenido, del orden de 7.53 cm, y también el diagrama de reacción del terreno se aparta notablemente de una reacción lineal (sobre todo tal como se esperaba mayor a la derecha de la viga, resultado del trabajo de los muros de cortante), la cual es la que más comúnmente se emplea al diseñar cimentaciones, claro ejemplo de la valiosa aportación del empleo del método de interacción suelo-viga flotante, y en este caso sometido a muros de cortante.

El Método de Interacción Suelo-Viga Flotante, que en este caso se ha desarrollado sometida a muros de cortante incluso, requiere de un ordenamiento en su proceso de análisis y resolución. A manera de síntesis se presentan a continuación los puntos principales a seguir, para facilitar su ejecución.

- Se establece el modelo de una viga con las mismas características de carga y rigidez que la estructura, considerando la influencia de los muros de cortante sobre ésta al absorber las fuerzas laterales.

- La viga se divide de acuerdo a la estructura, en barras individuales, a manera de que se puedan tratar por separado; barras que se idealizan con apoyos continuos (centrales) (Figura IV.J) y en cantiliver (extremos) (Figura IV.K y IV.I), mismas a las que se definen a cada una sus respectivos grados de libertad.
- Para la barra con apoyos continuos (central), se calcula su matriz de rigideces (3.4), así como los momentos y cortantes de empotramiento de las cargas uniformemente repartidas en la viga (3.5 y 3.6) y los debidos a las cargas repartidas de la cimentación (3.7, 3.8, 3.9 y 3.10).
- Para las barras en cantiliver (extremos), se aplica la ecuacion (3.18).
- Las barras en cantiliver (extremos) contribuyen con momentos y cortantes para lograr el equilibrio en los nudos de la estructura, mismos que se calculan empleando las ecuaciones (4.9, 4.10, 4.11 y 4.12).
- Se aplica la ecuación complementaria (3.19) a fin de calcular el desplazamiento vertical en la cimentación a la mitad del entre-eje para la barra con apoyos continuos; Ecuación que se integra al sistema de ecuaciones.
- Se aplica la ecuación:

$$[K] \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_e \\ M_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_c \\ M_c \end{Bmatrix} = 0$$

Donde:

- [K] - Matriz de rigideces
- δ - Vector de desplazamientos lineales y angulares
- θ

V_e - Suma de cortantes y momentos de empotramiento de las de estructura y cimentación.

M_e

V_c - Cortantes y Momentos Concentrados

M_c

- Al hacer el ensamble de la matriz, se obtienen más incógnitas que ecuaciones, debido a que los muros de cortante evitan que los desplazamientos y reacciones, no sean simétricos a lo largo de toda la viga; por lo que se requiere calcular los desplazamientos en función de las reacciones, empleando la ecuación (3.31).
- En principio se requiere determinar los valores de influencia I_{ijk} , que son los esfuerzos normales verticales ocasionados por una presión vertical unitaria aplicada en la superficie del terreno.
- Se calculan los valores de influencia, una manera sencilla es empleando la ecuación integrada por el Ing. Dammy (3.32).
- Estos valores de influencia obtenidos, se sustituyen en la ecuación de desplazamientos (3.31), estos desplazamientos se sustituyen en nuestro Sistema de ecuaciones previamente ensamblado, logrando así un sistema determinado, es decir igualamos el número de incógnitas al de ecuaciones, de fácil resolución.
- Como resultado de este sistema de ecuaciones (R_i) del terreno con las que se determinan ahora los desplazamientos verticales, lo que es la finalidad de la interacción suelo-viga flotante y en nuestro caso sometida a muros de cortante.

V. APLICACIONES

La resolución de un problema de interacción Suelo-Estructura requiere de un análisis estructural y de un análisis de asentamientos del suelo; durante el desarrollo de este trabajo se ha apreciado la gran importancia que tiene el considerar de manera conjunta la rigidez de la estructura y la estratigrafía y propiedades del terreno. Los resultados obtenidos en comparación con el análisis tradicional de tomar en cuenta una reacción uniforme del terreno lleva a presentar diferencias importantes; considerando la rigidez de la viga se obtienen cambios no únicamente en magnitud de los momentos flexionantes, sino incluso en su sentido.

El método de Interacción Suelo-Viga flotante, y en particular sometida a muros de cortante, se puede utilizar para el análisis de estructuras de altura pequeña comparada con su longitud, de zapatas corridas que soportan muros de carga, o bien para casos como el desarrollado en el capítulo IV: Una estructura rigidizada con muros de concreto capaces de soportar las fuerzas laterales que se presenten transmitiendo a la viga flotante los momentos que generan.

Bajo ciertas condiciones, este método también se puede emplear para analizar losas de apoyo y cajones de cimentación.

Es importante señalar que con esta técnica en especial es posible calcular los asentamientos totales y en particular los asentamientos diferenciales que sufre una estructura así como hallar los elementos mecánicos (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal), considerando la influencia que ejercen las rigideces del terreno de cimentación y la viga flotante, siendo por consiguiente de excelente aplicación para realizar un diseño un poco más racional de la estructura en análisis.

Un caso real de aplicación de la interacción Suelo-Viga flotante es el que se presenta a continuación, desarrollado por el M. I. Agustín Demeneghi, correspondiente a unas zapatas corridas que se emplean para tomar fuerzas laterales debidas a sismos a través de muros de cortante que se unen a las zapatas en diferentes tramos.

En la figura (V.1) se muestra la planta de estas zapatas y en la figura (V.2) los resultados de un análisis de interacción suelo-viga flotante para la zapata de concreto reforzado del eje 1. El módulo de elasticidad del concreto utilizado fue de 1,581,000 t/m² y los momentos de inercia en los diferentes tramos se indican en la figura (V.2).

También pueden observarse las cargas que actúan en la zapata, así como la estratigrafía y propiedades del subsuelo. En la misma figura están graficadas los diagramas de reacciones y de hundimientos del terreno, sirviendo el primero de ellos para la determinación de los elementos mecánicos y el diseño estructural de la zapata y el segundo para el conocimiento de los asentamientos totales y diferenciales de la cimentación.

En la figura (V.3) se presenta el análisis de la zapata del eje B2. Se puede apreciar que en el contacto del terreno de cimentación con las zapatas se presentan teóricamente esfuerzos de tensión, es decir, se obtienen reacciones negativas, fenómeno debido a los momentos que transmiten los muros de cortante a la cimentación en cada uno de los extremos de las zapatas.

Otro caso de aplicación, en el que además se puede hacer una comparación de los resultados obtenidos con métodos tradicionales es el ilustrado en la figura (V.4), se trata del ejemplo de una viga flotante con las condiciones geométricas, de carga, estructurales y estratigráficas mostradas. Los resultados del análisis de interacción (figura V.5), en relación con los de una reacción uniforme (figura V.6), difieren en el valor de los momentos flexionantes; considerando la rigidez de la viga se obtiene al centro del claro un momento correspondiente a $+38.72$ tons. a cambio de $+0.79$ que se tiene con una reacción uniforme. La variación es notable al igual que en el momento negativo máximo donde la diferencia es de $+4.3$ t.m a $+14.93$ t.m, es decir, en este caso también se aprecia que aplicar ambos métodos, no lleva a los mismos resultados.

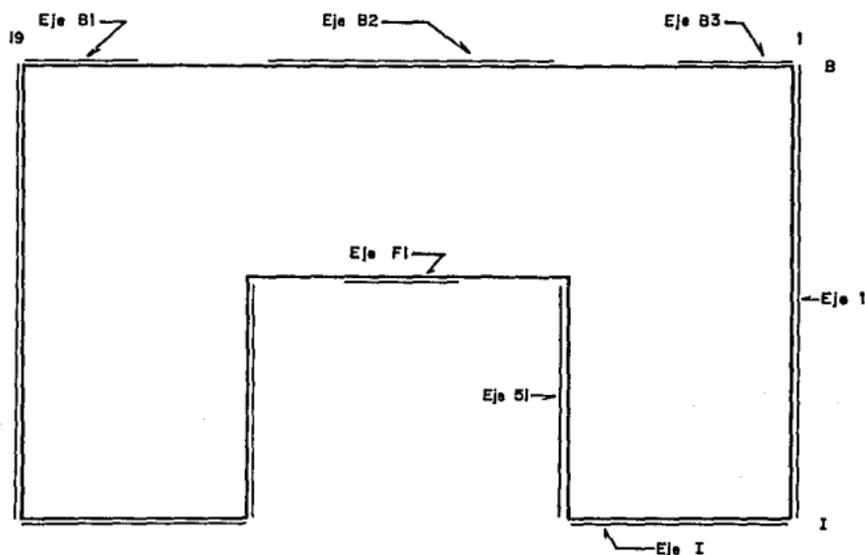


Figura V.1 Croquis de localización de zapatas perimetrales.

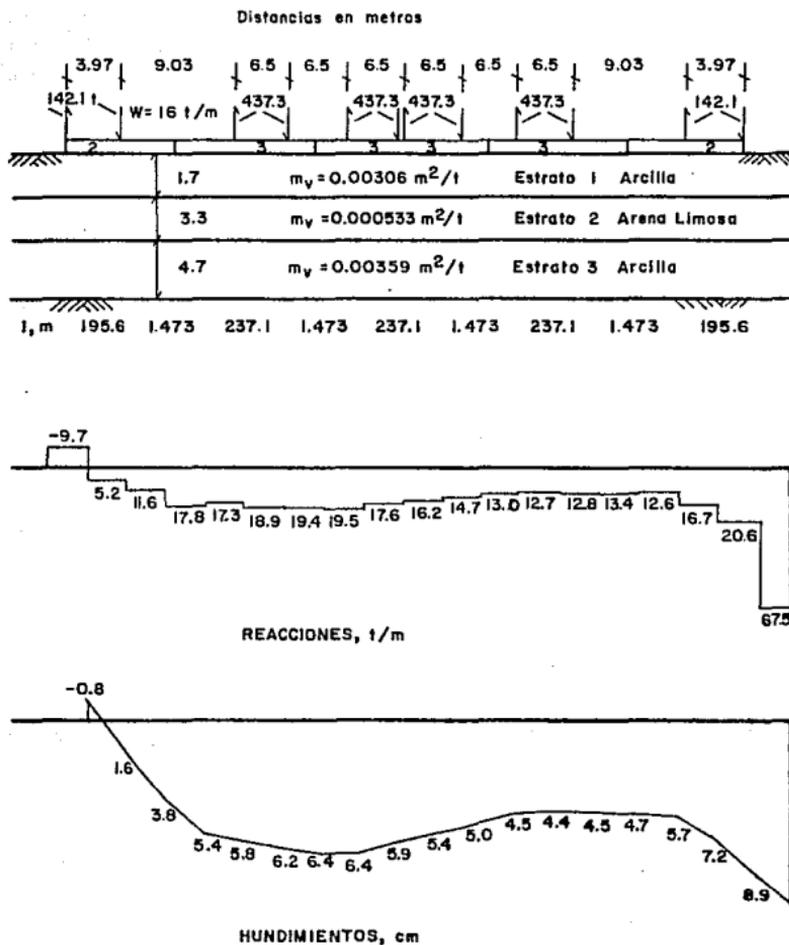
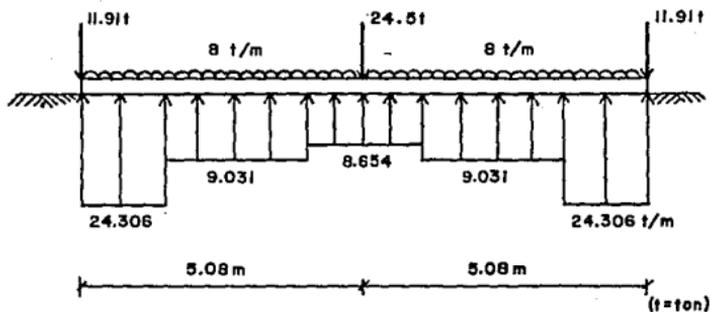
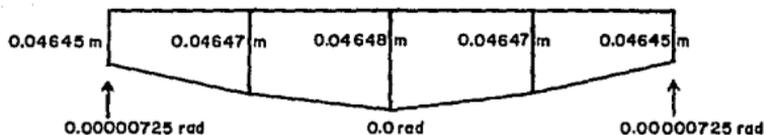


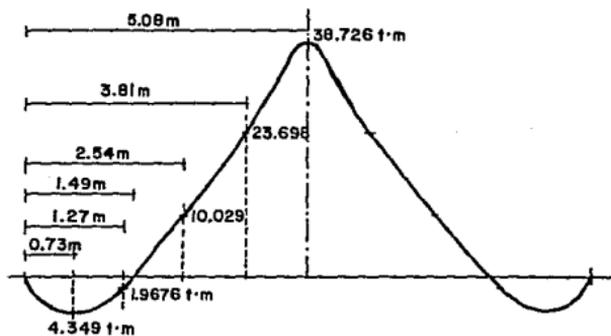
Figura V.2 Resultados del análisis de interacción
suelo-viga flotante, Eje 1



a) REACCIONES DEL SUELO

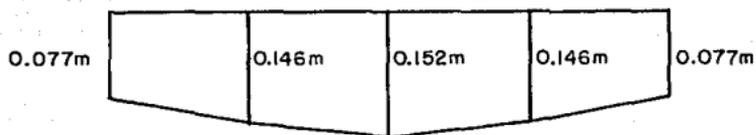


b) HUNDIMIENTOS DEL TERRENO Y GIROS EN LA VIGA



c) DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES

FIG. V.5 RESULTADOS DEL PROBLEMA CONSIDERANDO LA INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA



Hundimientos del suelo

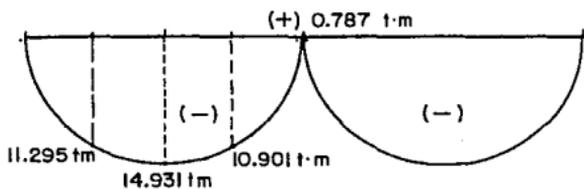
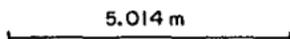
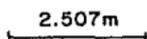
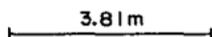
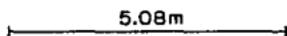


Diagrama de momentos flexionantes

Figura V.6 RESULTADOS DEL PROBLEMA EMPLEANDO METODOS CONVENCIONALES.

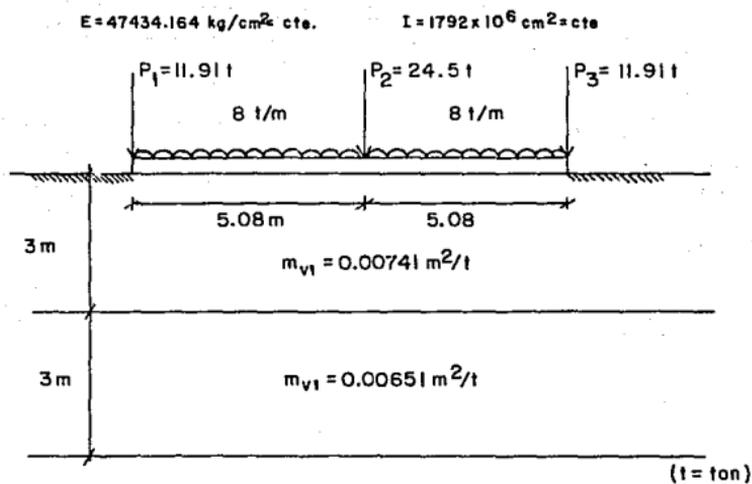


Figura V.4 Viga flotante (Ejemplo)

Las aplicaciones anteriores se pueden llevar a cabo de manera directa sin necesidad de interacciones al emplear el método de rigideces, considerando la interacción Suelo-Viga flotante, que además de facilitar los cálculos nos encamina a realizar un diseño más cercano a lo real y menos conservador lo que se refleja directamente en el costo de nuestra estructura.

El investigador Leonardo Zeevaert expone en su publicación "Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions" (1973), ejemplos de aplicación de la interacción suelo-estructura para diferentes tipos de cimentación, de los cuales se exponen dos a continuación.

1. Cálculo de una cimentación semiflexible

Para el cálculo de este ejemplo de cimentación es necesario obtener las reacciones del suelo y los momentos flexionantes en la dirección longitudinal. En este caso se trata de una estructura de cimentación desplantada a una profundidad de 2.00 m cubriendo un área de $24 \text{ m} \times 14.4 \text{ m} = 345.6 \text{ m}^2$.

Esta formada por una retícula de contratraves que actúa monolíticamente con la losa tapa y la losa de cimentación.

La rigidez en la dirección transversal tiene un valor de $EI = 6 \times 10^6 \text{ t.m}^2$. Las cargas que transmiten las columnas a la cimentación, así como el módulo de deformación volumétrico, se muestran en la figura (V.7).

La cimentación es dividida en pequeñas áreas tributarias (figura V.8) considerando una carga unitaria $q_a = 2000\text{t}/345.6\text{m}^2 = 5.787 \text{ t/m}^2$, la carga en las áreas tributarias $a = 34.56 \text{ m}^2$ será igual a $34.56 \text{ m}^2 \times 5.787 \text{ t/m}^2 = 200 \text{ t}$ en cada una de esas áreas.

Para calcular los valores de influencia I_{ij} debido a una carga unitaria aplicada en la banda del área tributaria \bar{a} , se considera un suelo estratificado con $\alpha=2$, que es el valor intermedio entre Westergaad y Bousinesq, que puede presentar una masa del suelo estratificada con modulus de esfuerzo prácticamente constantes con la profundidad y el empleo de la fórmula

$$I_{x2} = 1/\pi (\alpha_0 + 0.5 \text{ sen } \alpha_0) \text{ sen } \psi_1 - \text{sen } \psi_2$$

Los valores I_{ij} obtenidos, se muestran en la tabla (V.a) al igual que el valor de los factores de compresión α_c . Consecuentemente, los desplazamientos verticales para una carga unitaria $q = + 1$ en la banda (a), se obtienen a partir de la siguiente expresión:

$$[I_{ij}^N]^T \cdot \{ \alpha_c^N \} = \{ \delta_{ij} \}$$

Los valores δ_{ij} son presentados en la tabla (V.b), con los valores δ_{ij} inducidos por todas las áreas tributarias a, 1, 2, ...b, se forma la ecuación matricial de desplazamientos verticales, quedando como se muestra en la tabla (V.c).

Debido a la simetría del problema, la ecuación matricial de desplazamientos verticales se reduce a la matriz (V.d). Como todas las reacciones son iguales; $X_a = X_c = 5.787 \text{ t/m}^2 \times 34.56 \text{ m}^2 = 200 \text{ t}$, entonces los asentamientos bajo el centro de cada una de las áreas tributarias son:

$$\begin{aligned} \delta_a &= \delta_b = 12.0 \times 10^{-2} \text{ m.} \\ \delta_1 &= \delta_8 = 14.7 \times 10^{-2} \text{ m.} \\ \delta_2 &= \delta_7 = 15.8 \times 10^{-2} \text{ m.} \\ \delta_3 &= \delta_6 = 16.4 \times 10^{-2} \text{ m.} \\ \delta_4 &= \delta_5 = 16.6 \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\delta_{av} = 15.10 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

Estos asentamientos tendrán lugar sólo si la cimentación es 100% flexible y todas las reacciones son iguales. Ahora, considerando a la estructura de cimentación con una rigidez $EI = 6.0 \times 10^6 \text{ t.m}^2$ en dirección longitudinal dada por la sección tipo cajón de cimentación y tomándola como una viga en la dirección longitudinal, se obtienen los resultados indicados en la figura V.9 y la tabla V.f.

Se aprecia en las figuras que las reacciones obtenidas varían desde 8.6 t/m^2 hasta 5.00 t/m^2 , en igual condición se encuentran los desplazamientos que varían de 14.89 cm a 14.50 cm lo que lleva a un desplazamiento diferencial del orden de 0.39 cm .

Para el caso de los momentos flexionantes, se han graficado los obtenidos con el empleo de la interacción Suelo-Viga flotante. La comparación de estos resultados nos ilustra las notables diferencias que pueden existir en hundimientos diferenciales, reacciones del terreno y elementos mecánicos entre considerar una reacción uniforme del terreno o tomar en cuenta la interacción Suelo-Estructura.

2. Cimentación tipo cajón rígido

Se requiere determinar las reacciones del terreno en una cimentación compensada tipo cajón para un edificio alto.

Los desplazamientos diferenciales de una estructura de cimentación pueden considerarse despreciables en comparación con los desplazamientos totales. El área de cimentación del edificio es $20 \text{ m} \times 20 \text{ m} = 400 \text{ m}^2$, su peso es de 4000 t incluyendo la estructura de cimentación; por tanto el promedio de carga al suelo es de 10 t/m^2 . El promedio de los módulos de deformación volumétrica (M_z) para cierto tiempo después de la construcción y para los estratos considerados se presenta en la tabla (V.e), al igual que los valores de influencia de los esfuerzos.

Con la información anterior, los desplazamientos verticales inducidos para cada una de las áreas tributarias cargadas con $q = + 1$ pueden ser calculadas mediante la siguiente expresión:

$$\{ \delta_{ij} \} = [I\mu]^T \times \{ \alpha i^N \} \quad (5.1)$$

Con los valores δ_{ij} obtenidos con (5.1), se forma la ecuación matricial de desplazamientos verticales dada en la tabla (V.a):

$$[\delta_{ij}]^T \cdot \{ q \} = \{ \delta_i \}$$

Por simetría obtenemos:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & & 3 \\ \begin{pmatrix} 2.744 & 1.799 & 1.230 \\ 1.799 & 3.041 & 2.350 \\ 1.236 & 2.350 & 4.145 \end{pmatrix} & \times 10^{-3} \cdot & \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Considerando $q = \text{constante} = 10t/m^2$, se obtienen los asentamientos al centro de las áreas tributarias, cuando la estructura es considerada 100% flexible:

$$\delta_1 = 5.799 \text{ cm}, \quad \delta_2 = 7.190 \text{ cm}, \quad \delta_3 = 7.731 \text{ cm}$$

de donde se obtiene el asentamiento promedio $\delta_a = 6.90 \text{ cm}$

Utilizando este valor en $\{ \delta_i \}$ de la ecuación matricial de desplazamientos verticales, se resuelven los q_i desconocidos y se tiene que:

$$q_1' = 17.501 t/m^2, \quad q_2' = 6.239 t/m^2, \quad q_3' = 7.891 t/m^2$$

Estos valores producen una reacción total de $W_e = \alpha \cdot \sum q_i' = 4217.028 \text{ t}$, el peso total del edificio es $W_e = 4000 \text{ t}$, por consiguiente concluimos que el δ_a empleado para calcular los q_i' no era el valor exacto y se tienen que corregir en la proporción $4000/4217.028 = 0.949$ para obtener los

valores promedio de las reacciones en las áreas tributarias de las bandas consideradas:

$$q_1 = 16.6 \text{ t/m}^2, q_2 = 5.918 \text{ t/m}^2, q_3 = 7.485 \text{ t/m}^2$$

y el asentamiento uniforme es $\delta_a = 6.645 \text{ cm}$.

El conocer con mayor exactitud el valor de estos datos nos proporciona una base para realizar un diseño más racional, apegado a las necesidades de un comportamiento más cercano a la realidad y menos conservador pues en la aplicación de este método se utilizan no únicamente las características de la estructura sino que además se complementa con las del subsuelo en que se desplanta la cimentación.

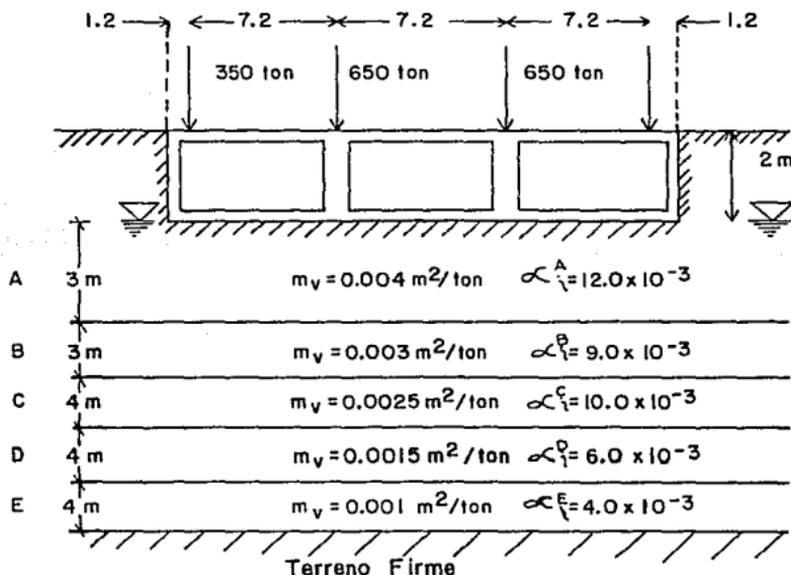


Figura V.7 Corte transversal de la cimentación

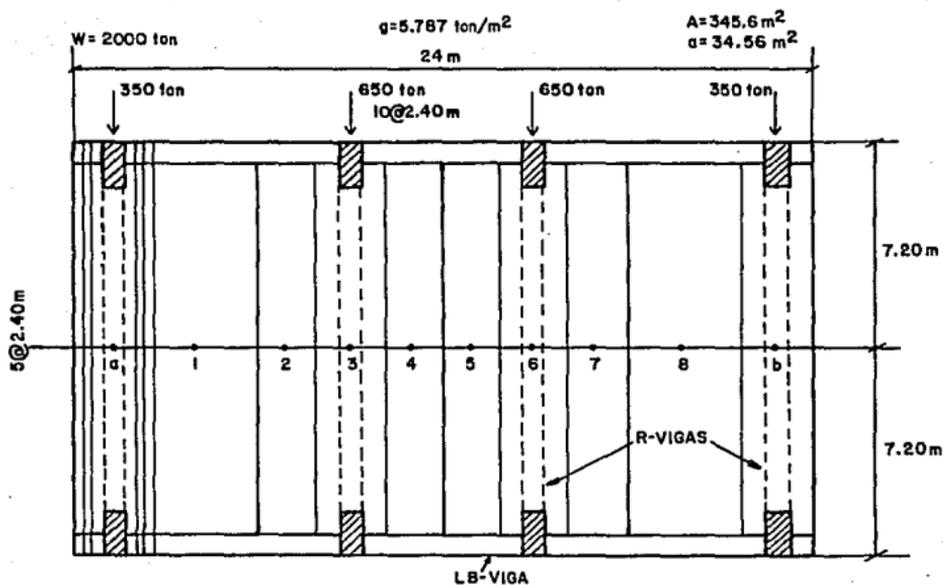


FIG. V.8 PLANTA DE LA CIMENTACION

X=2, E=7.20m

	x	+ 1	2.4	4.8	7.20	9.60	12.00	14.40	16.80	19.20	21.60	
ESTRATO PROFUNDIDAD		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\times 10^3$ m ³ /ton
												α_c
A	1.5	0.622	0.146	0.021	0.006	0.002	0.001	0	0	0	0	12.0
B	4.5	0.240	0.167	0.074	0.031	0.014	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	9.0
C	8.0	0.116	0.101	0.069	0.042	0.024	0.014	0.009	0.005	0.004	0.002	10.0
D	12.0	0.062	0.058	0.047	0.035	0.025	0.017	0.012	0.008	0.006	0.004	6.0
E	16.0	0.038	0.036	0.032	0.027	0.021	0.016	0.012	0.009	0.007	0.005	4.0

TABLA (V. a)

$$\begin{array}{c}
 [I_{ij}]^T x \\
 \left| \begin{array}{c} 12.0 \\ 9.0 \\ 10.0 \\ 6.0 \\ 4.0 \end{array} \right| = \begin{array}{c} \delta_{ji} \\ \left| \begin{array}{c} 11.308 \\ 4.757 \\ 2.018 \\ 1.089 \\ 0.624 \\ 0.381 \\ 0.246 \\ 0.152 \\ 0.113 \\ \text{---} \end{array} \right| \times \frac{1}{\sigma} = \begin{array}{c} \delta_{ji} \\ \left| \begin{array}{c} 32.720 \\ 13.764 \\ 5.839 \\ 3.151 \\ 1.806 \\ 1.102 \\ 0.712 \\ 0.440 \\ 0.327 \\ \text{---} \end{array} \right| \\ \text{---} \end{array}
 \end{array}$$

$\begin{array}{cccc}
 \text{m}^3/\text{ton} & \text{m}^3/\text{ton} & 1/\text{m}^2 & \text{m}/\text{ton} \\
 10^{-3} & 10^{-3} & & \times 10^3
 \end{array}$

TABLA (V. b)

	a	1	2	3	4	5	6	7	8	b
a	32.720	13.764	5.839	3.151	1.806	1.102	0.712	0.440	0.327	-
1	13.764	32.720	13.764	5.839	3.151	1.806	1.102	0.712	0.440	0.327
2	5.839	13.764	32.720	13.764	5.839	3.151	1.806	1.102	0.712	0.440
3	3.151	5.839	13.764	32.720	13.764	5.839	3.151	1.806	1.102	0.712
4	1.806	3.151	5.839	13.764	32.720	13.764	5.839	3.151	1.806	1.102
5	1.102	1.806	3.151	5.839	13.764	32.720	13.764	5.839	3.151	1.806
6	0.712	1.102	1.806	3.151	5.839	13.764	32.720	13.764	5.839	3.151
7	0.440	0.712	1.102	1.806	3.151	5.839	13.764	32.720	13.764	5.839
8	0.327	0.440	0.712	1.102	1.806	3.151	5.839	13.764	32.720	13.764
b	-	0.327	0.440	0.712	1.102	1.806	3.151	5.839	13.764	32.720

$|X_i| = |\delta_i|$

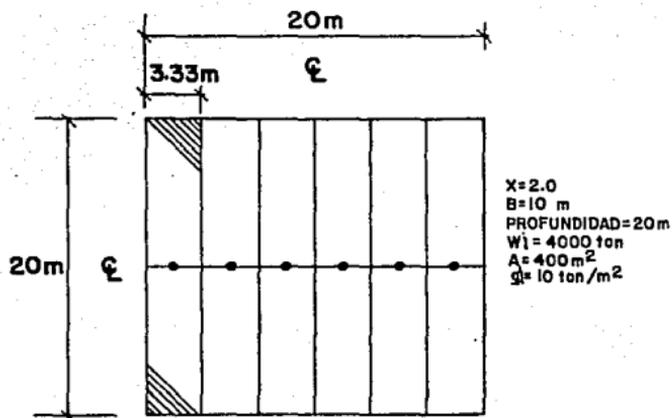
$\times 10^{-5}$

TABLA (V.c)

32.720	14.091	6.279	3.863	2.908	X_a	S_a
14.091	33.160	14.476	14.476	4.957	X_1	S_1
6.279	14.476	33.822	15.570	8.990	X_2	S_2
3.863	6.941	15.570	35.871	19.603	X_3	S_3
2.908	4.957	8.990	19.603	46.484	X_4	S_4

 $\times 10^{-5}$

TABLA (V.d)



		$g_l = +1$									
PNT	X	0	3.33	6.67	10.0	13.33	16.67				
PNT	z_i	d_i	1	2	3	4	5	6	M_{xi}	α_i^N	g_{ji}
1	0.5	1.0	0.958	0.018	0.001				3.00	1.50	2.597
2	2.0	2.0	0.638	0.141	0.020	0.005	0.002	0.001	3.54	7.08	1.543
3	3.90	1.80	0.385	0.189	0.052	0.017	0.007	0.003	6.54	11.64	0.802
4	6.10	2.6	0.246	0.169	0.073	0.030	0.014	0.007	10.00	26.00	0.434
5	9.00	3.2	0.155	0.126	0.076	0.040	0.021	0.011	9.54	30.53	0.353
6	11.80	2.4	0.106	0.094	0.060	0.041	0.025	0.015	7.50	18.00	0.147
7	14.80	3.6	0.075	0.069	0.054	0.038	0.026	0.017	6.30	22.68	
8	18.30	3.4	0.053	0.050	0.042	0.033	0.024	0.017	4.50	15.30	
	m	m	ton/m ²						$\frac{\text{m}^2}{\text{ton}}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{ton}}$	m
									10^{-4}	10^4	10^3

CIMENTACION RIGIDA

TABLA (V.e)

VI. CONCLUSIONES

Es conveniente aplicar un procedimiento de interacción Suelo-Estructura Estático cuando se cimentan edificios sobre suelos de mediana o alta compresibilidad (como es el caso de la Ciudad de México), ya que por un lado se debe de tomar en cuenta la rigidez de la estructura y por otro la rigidez del propio suelo, debido a que las deformaciones que sufre el terreno de cimentación afectan de manera significativa los asentamientos diferenciales de la estructura y el diagrama de reacción del suelo. A la solución del problema se puede llegar analizando la estructura y los asentamientos del suelo independientes, llevando después una combinación de ambos, tal como se describe en los capítulos 3 y 4. Este análisis de interacción permite determinar hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos que provocan (Momentos flexionantes, Fuerza Cortante y Fuerza Normal), tanto en la subestructura como en la superestructura.

Dependiendo de las características de la estructura y del terreno de cimentación se aplica alguno de los procedimientos existentes para este efecto. Son ejemplo de ellos: marco estructural cimentado sobre zapatas, donde se considera que éstas pueden sufrir asentamientos y giros, marco estructural con losa de apoyo o zapata corrida o bien viga flotante con muros de cortante (tema desarrollado en este trabajo).

El método de la viga flotante se puede aplicar para el análisis de estructuras de altura pequeña comparada con su longitud y como un caso particular soportando muros capaces de resistir la acción de fuerzas laterales y que provocan momentos que son transmitidos directamente a la viga flotante. Para el caso de losas de apoyo y cajones de cimentación se puede emplear bajo determinadas condiciones.

El método de viga flotante ofrece la ventaja de requerir poca cantidad de datos y operaciones numéricas en relación con otras técnicas de interacción; ayuda a obtener las reacciones que se generan en un medio compresible y las deformaciones verticales, que en éste se presentan al ser sometidos a sollicitaciones de cargas estáticas verticales y fuerzas laterales soportadas por muros de cortante, a través de una viga elástica lineal y de rigidez variable la cual reposa libremente sobre el suelo, del que no se emplea su módulo de reacción, obteniendo así la solución del problema de manera directa al no recurrir a iteraciones y mediante el uso del método de las rigideces del análisis estructural.

En este trabajo se desarrolló un caso ilustrativo paso a paso de interacción Suelo-Viga flotante con muros de cortante; una estructura de cuatro niveles con muros de cortante sometido a la acción de fuerzas laterales transmitirá los momentos directamente al suelo a través de la viga flotante; el método lleva a calcular los asentamientos totales y en especial los diferenciales que sufrió la estructura, siendo posible graficarlos al igual que las reacciones del terreno que como era de esperarse, variaron tanto por los momentos transmitidos como por haber tomado en cuenta todas las cargas actuando sobre el suelo y de considerar también la rigidez de la estructura, y la estratigrafía y propiedades del suelo; datos que indiscutiblemente nos proporcionan bases para realizar un diseño más racional de nuestra estructura en comparación con los que no utilizan las características del subsuelo en que se desplanta una cimentación, suponiendo una reacción uniforme.

Con esta técnica se manejan además características importantes de los materiales de la estructura y del suelo, tales como el módulo de la elasticidad y coeficiente de variación volumétrica (m_z), respectivamente;

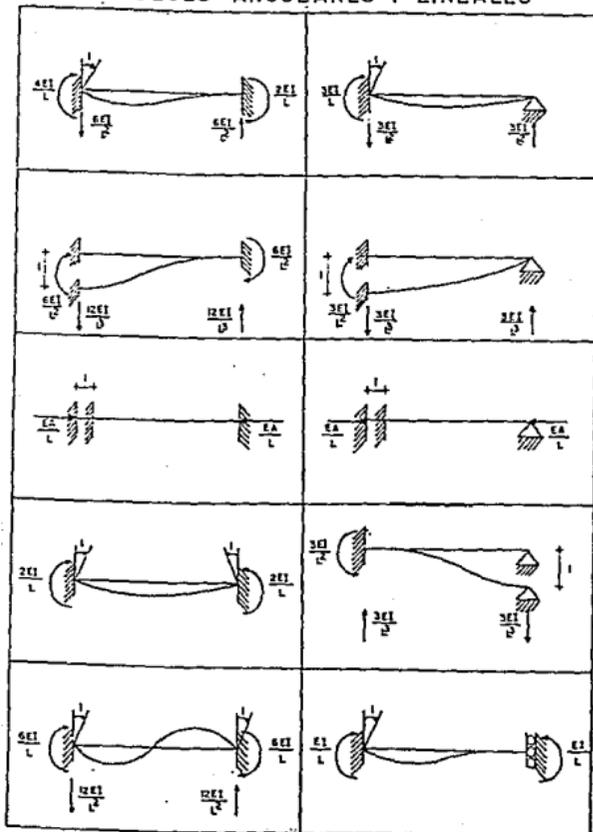
su valor y aplicación en casos reales influirá directamente en los resultados que se obtengan, de allí su participación fundamental al momento del análisis y las consideraciones que para ellos se tenga debido a su variación con el tiempo.

Como se ha mencionado la resolución de un problema de interacción Suelo-Estructura requiere de un análisis estructural y de un análisis de asentamientos del suelo; durante el desarrollo de este trabajo se ha reiterado la gran importancia que tiene el tomar en cuenta de manera conjunta la rigidez de la estructura y la estratigrafía y propiedades del terreno; los resultados obtenidos en comparación con el análisis tradicional de considerar una reacción uniforme del terreno lleva a presentar diferencias considerables, bajo estas circunstancias se obtienen cambios no únicamente en magnitud de los momentos flexionantes, sino incluso en su sentido. Para ofrecer una visión más específica, en el Capítulo V se presentaron casos concretos reales resueltos por ambos caminos con la finalidad de comparar los resultados. En el primero de ellos se presentan esfuerzos de tensión, es decir reacciones negativas, (Figura V.3) fenómenos debido a los momentos que transmiten los muros de cortante a la cimentación en cada uno de los extremos de las zapatas. En otro ejemplo, en una viga flotante considerando su rigidez, se tiene una discrepancia en el momento negativo máximo significativa del orden del 29% (Figura V.4 a V.6)

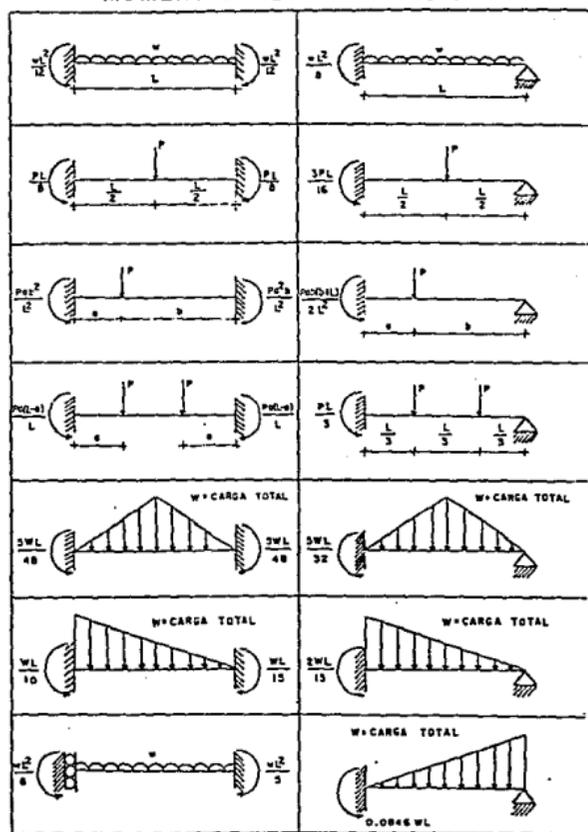
En general se observa que existen diferencias importantes en los diagramas de reacciones y hundimientos del terreno, y por consiguiente en los elementos mecánicos y en los asentamientos totales y diferenciales, consecuencia de considerar la interacción Suelo-Estructura, es decir, la rigidez de la estructura y la estratigrafía y propiedades del terreno de manera conjunta, siendo entonces de excelente aplicación para realizar un diseño más real, menos conservador y por lo tanto más racional de la estructura en análisis.

Este procedimiento presenta la alternativa de programarse en computadora y ha demostrado la confiabilidad de sus resultados, ofreciendo sin duda una práctica herramienta de apoyo para el análisis y diseño de estructuras que lleva a cabo el Ingeniero Civil.

RIGIDEZES ANGULARES Y LINEALES



MOMENTOS - DE EMPOTRAMIENTO



BIBLIOGRAFIA

- Reglamento de Construcción del Departamento del Distrito Federal. Noviembre 1987
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones y para Diseño por Sismo. Gaceta Oficial del DDF. Septiembre 1987
- XV Reunión Nacional de Mecánica de Suelos. Innovaciones en Geotecnia. San Luis Potosí, S.L.P. Interacción Suelo-Viga Flotante, pág. 19 a 33 Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, A.C.
- Temas de cimentaciones. M. en I. Agustín Deméneghi Colina. Mayo 1990
- Apuntes de la materia de Cimentaciones. M. en I. Agustín Deméneghi. UNAM, Facultad de Ingeniería. Semestre 90-II
- Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions. Leonardo Zeevaert. Van Nostrand Reinhold. New York 1983
- Mecánica de suelos. Juárez Badillo y Rico, Tomo I, Capítulo 10. Editorial Limusa, 1976