

31
2e)

**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS**

**Bifurcaciones
de Campos Meromorfos
sobre la Esfera de Riemann**

T E S I S

Que para obtener el título de:

Matemático

Presenta:

Carlos Valero Valdés

México, D.F.

Agosto de 1993

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Indice

Introducción	iii
Capítulo 1 - Preliminares	1
1.1 Superficies de Riemann	1
1.2 Campos Meromorfos en superficies	5
Capítulo 2 - Dinámica de campos meromorfos	12
2.1 Dinámica de puntos singulares	13
2.2 Dinámica de órbitas cerradas	23
2.3 Aspectos Geométricos	27
Capítulo 3 - Bifurcación de campos meromorfos sobre la esfera de Riemann	34
3.1 Aspectos Generales	36
3.2 Bifurcaciones de $\{e^{i\theta}s \theta \in S^1\}$	
Bibliografía	64

Introducción

Es bien conocido que la integración explícita de ecuaciones diferenciales es en general imposible, por lo que se tiene que recurrir a métodos cualitativos para avanzar en su estudio. En estos términos, dos ecuaciones diferenciales se consideran iguales si sus retratos fase son topológicamente equivalentes. Intuitivamente, esto último quiere decir que se puede deformar continuamente un retrato fase sobre el otro.

Si lo que se tiene es una familia de ecuaciones diferenciales que depende de un parámetro (o de varios parámetros en general), para cada valor fijo del parámetro se obtiene un retrato fase. Si un valor de este parámetro es tal que al perturbarlo ligeramente el retrato fase no cambia (topológicamente), se dice que la familia es *estructuralmente estable* en este valor. Al contrario, si en cualquier vecindad de este valor se pueden encontrar valores del parámetro para los cuales el retrato fase difiere del retrato fase en este valor, entonces se está en presencia de un *valor de bifurcación*.

La importancia de los valores en donde una familia de ecuaciones diferenciales es estructuralmente estable reside en el hecho de que para conocer el retrato fase para un valor fijo del parámetro, basta con estudiar el retrato para un valor lo suficientemente cercano a éste. En el caso de los valores de bifurcación, la inestabilidad del retrato fase hace imposible conocerlo si no se conoce exactamente el valor deseado. Las implicaciones de esto son claras en el caso de que la familia modele un fenómeno físico que depende de parámetros externos (en general es imposible conocer tales parámetros con total precisión).

El propósito de este trabajo es estudiar las bifurcaciones de familias de campos meromorfos rotados. La contribución consiste en utilizar técnicas de métricas planas, utilizadas en el estudio de diferenciales cuadráticas, para el análisis de los sistemas dinámicos inducidos por campos meromorfos sobre

una superficie de Riemann compacta y en particular, sobre la esfera.

Un campo meromorfo s en una superficie de Riemann X es un campo que localmente se puede escribir como una función meromorfa. El tipo de ecuaciones diferenciales que se estudiarán son de la forma:

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = s(\alpha(t)), \quad (1)$$

donde s es un campo meromorfo.

Dado un campo meromorfo s en una superficie de Riemann existe una métrica Riemanniana plana $\langle, \rangle^s$ $X - \text{Sing}(s) = X - \{\text{Singularidades de } s\}$ (esto es, un producto interior en cada plano tangente a la superficie que varía diferenciablemente y que hace a ésta localmente plana) tal que las soluciones de la ecuación (1) son geodésicas de esta métrica.

Ahora bien, dado un campo meromorfo, se puede rotar cada vector $s(x)$ un ángulo fijo θ , obteniendo un nuevo campo meromorfo al que denotaremos como $e^{i\theta}s$ (está última operación está bien definida en vista de que s está definido sobre una superficie de Riemann la cual tiene una estructura compleja que permite hablar en forma natural de el ángulo entre dos vectores tangentes). De esta forma, para cada campo meromorfo s obtenemos una familia de campos $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ parametrizada por el círculo. De hecho, esta familia corresponde al flujo geodésico de la métrica plana mencionada anteriormente.

En el capítulo 3 se estudian las bifurcaciones de la familia $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ en el caso en que s es un campo meromorfo en la esfera de Riemann. Las características topológicas de la esfera (en particular el teorema de la curva de Jordan) reducen considerablemente este estudio en comparación con el caso de campos meromorfos en superficies de Riemann compactas con género mayor que cero. En el caso de la esfera se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3.2.1: Considerese la familia de campos $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$, donde

s es un campo meromorfo en S^2 , parametrizada por $S^1 := [0, 2\pi)$. El conjunto de valores de bifurcación de esta familia es un conjunto con a lo más un número finito de puntos de acumulación.

El plan de la demostración de este teorema es como sigue:

Se inicia haciendo una distinción entre los *cilindros* generados por los ceros de un campo meromorfo (esto es, subconjuntos de $X - \text{Sing}(s)$ isométricos a $S^1_r \times (0, \infty)$ con la métrica plana usual, donde $S^1_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = r^2\}$) en $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ y los *anillos* generados por órbitas cerradas de s pero que no corresponden a ningún cero de s (esto es, subconjuntos de $X - \text{Sing}(s)$ de la forma $S^1_r \times (a, b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$). Se demuestra que $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ solo puede tener un número finito de *anillos* y posteriormente se demuestra que la familia $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ se bifurca en y solo en los ángulos $\theta \in S^1$ tales que $e^{i\theta}s$ tiene conexión entre polos (esto es, existen órbitas de $e^{i\theta}s$ que conectan a un par de polos de este campo). Las conexiones entre polos que están en la frontera de un *anillo* son las que generan los puntos de acumulación en el conjunto de bifurcaciones de la familia $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$. Todas las demás conexiones entre polos generan bifurcaciones aisladas en este conjunto. Del hecho de que $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ tiene un número finito de *anillos*, se concluye que el conjunto de valores de bifurcación de $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ es un conjunto con a lo más un número finito de puntos de acumulación.

En particular, si un campo meromorfo es tal que $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ no contiene anillos (como ejemplo de ésto tenemos a los campos polinomiales, esto es, campos de la forma $s(z) = (a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n) \frac{\partial}{\partial x}$) en su métrica asociada, entonces las bifurcaciones que se obtienen al rotarlo son finitas.

Esta tesis es el resultado del trabajo que realizamos conjuntamente mi asesor (Jesús Muciño Raymundo) y yo, lo mismo que el artículo "Bifurcations of Meromorphic Vector Fields on the Riemann Sphere" que se encuentra en las Publicaciones Preliminares del Instituto de Matemáticas (UNAM) con el número 300. Aprovecho este espacio para agradecer el apoyo y estímulo que recibí de él durante el tiempo que trabajamos juntos. También deseo agradecer a Federico Sánchez Bringas, José Antonio Gómez Ortega, Héctor

**Sánchez Morgado y Manuel Jesús Falconi Magaña, por haber aceptado
revisar este trabajo y por sus valiosos comentarios.**

Capítulo 1

La finalidad de este capítulo es establecer las definiciones y conceptos básicos para el trabajo posterior. En la sección 1.1 se definen las superficies de Riemann, que son las superficies en las cuales se encuentran los objetos que se estudiarán: *los campos meromorfos*. Estos últimos se definen en la sección 1.2.

1.1 SUPERFICIES DE RIEMANN

Definición: Sea X un espacio topológico de Hausdorff con base numerable. Se dice que X es una n -variedad topológica si todo punto de X tiene una vecindad abierta homeomorfa a $\mathbf{R}^n$.

Sea X una 2-variedad topológica. Una *carta* en X es un homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ de un abierto U de X en un abierto $\varphi(U)$ de $\mathbf{R}^2$. Dos cartas φ_1, φ_2 en X son *holomorfamente compatibles* si la función

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

es un biholomorfismo (esto es, una función holomorfa con inversa holomorfa). Obsérvese que en este caso se está identificando a $\mathbf{R}^2$ con el plano complejo $\mathbf{C}$, de la forma usual.

Un *atlas complejo* en X es una familia $F = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) | i \in I\}$ de

cartas holomorfolmente compatibles tal que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. Los elementos de F se llaman *cartas complejas* en X . Se dice que un atlas complejo F es *maximal* si toda carta compleja que sea holomorfolmente compatible con las cartas de F esta en F .

Una *estructura compleja* en X es un atlas maximal en X .

De hecho, dado un atlas complejo F en X , éste se puede extender a un atlas maximal único F^* definido como $F^* = \{\varphi | \varphi \text{ es holomorfolmente compatible con todas las cartas en } F\}$. De esto último se sigue que para determinar una estructura compleja en X basta con dar un atlas complejo en este espacio.

Definición: Una *superficie de Riemann* es un par (X, F) donde X es una 2-variedad topológica conexa y F es una estructura compleja en X .

Ejemplos:

(a) *El plano complejo:* Considérese el plano complejo $\mathbf{C}$. Como espacio topológico $\mathbf{C}$ es igual a $\mathbf{R}^2$ y la estructura compleja en él está dada por el atlas cuya única carta es la identidad.

(b) *Dominios:* Sea X una superficie de Riemann y $A \subset M$. Se dice que A es un dominio si es un conjunto abierto y conexo en X . Si F es la estructura compleja en X , entonces la estructura compleja en A esta dada por las cartas $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ en F tales que $U \subset A$.

(c) *La esfera de Riemann:* Considérese el conjunto $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ con la topología que se obtiene de $\mathbf{C}$ compactificando por un punto (el punto al infinito). Con esta topología este espacio es homeomorfo a la esfera; entonces, por comodidad, se escribirá $\mathbf{C} \cup \{\infty\} = \mathbf{S}^2$. Se proveerá a este espacio de las siguientes cartas:

$$\varphi_1 : (S^2 - \{\infty\}) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \varphi_1(z) = z$$

$$\varphi_2 : (S^2 - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \neq \infty \\ 0 & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

El cambio de coordenadas está dado por

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (\mathbb{C} - \{0\}) \longrightarrow (\mathbb{C} - \{0\}) \text{ tal que } \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z},$$

que claramente es un biholomorfismo.

De ahora en adelante se entenderá que $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$ es la superficie anterior.

Haciendo la analogía con variedades diferenciables, una estructura compleja en una superficie permite hablar de funciones holomorfas en ella, o mas generalmente de funciones holomorfas entre superficies.

Definición: Sean X y Y superficies de Riemann. Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es *holomorfa* si para cada par de cartas $\varphi : U_1 \longrightarrow \varphi(U_1)$ en X y $\psi : U_2 \longrightarrow \psi(U_2)$ en Y tales que $f(U_1) \subset U_2$, la función

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_1) \longrightarrow \psi(U_2)$$

es holomorfa en $\mathbb{C}$.

Una función $f : X \longrightarrow Y$ es un *biholomorfismo* si es holomorfa, biyectiva y su inversa es holomorfa. Dos superficies de Riemann X y Y son *holomorfa-mente equivalentes* si existe un biholomorfismo de X en Y .

En general, cualquier concepto que sea invariante bajo biholomorfismos entre abiertos de $\mathbb{C}$ se puede extender a superficies de Riemann, pues los cambios de coordenadas son biholomorfismos entre abiertos de $\mathbb{C}$.

Ejemplo:

Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ con la estructura compleja que hereda como dominio de $\mathbb{R}^2$. Los espacios $\mathbb{C}$ y D son homeomorfos pero no son holomorfaamente equivalentes dado que cualquier función holomorfa de $\mathbb{C}$ en D es constante, pues D es un conjunto acotado y el teorema de Louville dice que una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y acotada, es constante.

Definición: Sea X una superficie de Riemann. Una *función meromorfa* en X es una función holomorfa de X en S^2 .

Si $f : M \rightarrow S^2$ es meromorfa, los puntos $x \in X$ tales que $f(x) = \infty$ se llaman *polos* de f .

Una *función racional* $R(z)$ es una función que se puede expresar como el cociente de dos polinomios complejos. Esto es:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios complejos los cuales, para evitar confusión, se supondrán primos relativos.

Dada una función racional $R(z)$ se extenderá a una función de S^2 en S^2 definiendo $R(c) = \infty$ para todo cero c de $Q(z)$, y

$$R(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{si } \text{grado}(P) > \text{grado}(Q) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} & \text{si } \text{grado}(P) = \text{grado}(Q) \\ 0 & \text{si } \text{grado}(P) < \text{grado}(Q). \end{cases}$$

La siguiente proposición clasifica a las funciones meromorfas en S^2 .

Proposición 1.1.1: Una función en S^2 es meromorfa si y solo si es racional.

Demostración:

Es claro que una función racional es meromorfa en S^2 . Se demostrará entonces que una función meromorfa f en la esfera es racional.

Basta con probar que f es racional o que la función $\frac{1}{f}$ es racional, por lo que se puede suponer que f no tiene un polo en ∞ , o lo que es lo mismo, que esta acotada en el infinito. Se sabe que f tiene un número finito de polos (pues S^2 es un espacio compacto). En cada polo de f se desarrolla en serie de Laurent y se recolectan las partes con potencias negativas para construir una función racional $R(z)$ con las propiedades siguientes:

(1) $R(z)$ tiende a 0 cuando z tiende a infinito.

(2) $f(z) - R(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$.

Del teorema de Louville se concluye que $f(z) - R(z)$ es constante y por lo tanto $f(z)$ es racional. ■

1.2 CAMPOS MEROMORFOS EN SUPERFICIES

Así como para hablar de campos C^r en variedades diferenciables se necesita del concepto de haz tangente (el cual hereda una estructura diferenciable de la estructura de la variedad), para hablar de campos meromorfos en una superficie de Riemann se necesita proveer al haz tangente de ésta de una estructura holomorfa.

Se comenzará con algunas definiciones:

Definición: Sean E y X espacios topológicos y $p : E \longrightarrow X$ una función continua tal que para toda $x \in X$ $p^{-1}(x) = E_x$ tiene la estructura de un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión uno. Se dice que la terna (E, X, p) es un *haz de línea sobre X* si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta U tal que existe un homeomorfismo h de $E_U = p^{-1}(U)$ sobre $U \times \mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:

(i) h preserva fibras, esto es, si $q_U : U \times \mathbb{C} \longrightarrow U$ se define como $q_U(x, z) = x$ entonces:

$$q_U \circ h|_{E_U} = p|_{E_U}.$$

(ii) Para todo $x \in U$ la función $h|_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$ -espacios lineales (donde $\{x\} \times \mathbb{C}$ se identifica con $\mathbb{C}$ de la manera obvia).

La función $h : E_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}$ se llama *trivialización local*. Si $U = \{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de X y $h_i : E_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}$ son trivializaciones locales, se dice que la familia $H = \{h_i\}_{i \in I}$ es un *atlas para E* .

Sea (E, X, p) un haz de línea y $H = \{h_i : E_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}\}_{i \in I}$ un atlas para E . Considérense las siguientes funciones:

$$\varphi_{ij} = h_i \circ h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}.$$

De las propiedades (i), (ii) se sigue que φ_{ij} preserva fibras y que es un isomorfismo sobre cada una de éstas, de lo cual concluimos que existen funciones $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ tales que:

$$\varphi_{ij}(x, z) = (x, g_{ij}(x)z).$$

Las funciones g_{ij} se llaman *funciones de transición*.

Como h_i y h_j son continuas, entonces φ_{ij} es continua y por lo tanto g_{ij} también lo es. Sin embargo, en el caso en que X es una superficie de Riemann, para poder hablar de campos meromorfos en X se necesita que las funciones g_{ij} tengan una propiedad adicional.

Definición: Sea X una superficie de Riemann, (E, X, p) un haz de línea sobre X y H un atlas para E . Se dice que H es un atlas holomorfo si las funciones de transición asociadas a éste son holomorfas. Un haz de línea provisto de un atlas holomorfo se llama *haz de línea holomorfo*.

Sea $s : X \longrightarrow E$ una función que satisface $p \circ s = I_X$. Utilizando una trivialización local h se puede escribir:

$$h(s(x)) = (x, s_h(x)).$$

Definición: Sea (E, X, p) un haz de línea holomorfo. Se dice que s es una *sección meromorfa* en X si las funciones locales $s_h : U \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (donde U es un abierto de S^2) son meromorfas para toda $h \in H$, donde H es un atlas holomorfo.

Hay una ambigüedad en esta definición que se debe aclarar. Las funciones s_h con $h \in H$ tales como se han definido van de U en $\mathbb{C}$ (no en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) por lo que estrictamente hablando una sección meromorfa no va de X en E pero si cumple con que $p \circ s = I_X$ salvo en los polos de las funciones s_h .

Por comodidad se seguirá escribiendo $s : X \longrightarrow E$ cuando s es una sección meromorfa, entendiendo que las funciones s_h pueden tener polos.

Si $x \in U_j$ (donde j no es necesariamente igual a i) se puede considerar $h_j \circ s|_{U_j}(x) = (x, s_{h_j}(x))$. La relación entre s_{h_i} y s_{h_j} en $U_i \cap U_j$ esta dada por la siguiente fórmula:

$$s_{h_i}(x) = g_{ij}(x)s_{h_j}(x). \quad (1)$$

De (1) se sigue que s_{h_i} es meromorfa en $U_i \cap U_j$ si y solo si s_{h_j} lo es, pues la funciones g_{ij} no se anulan y son holomorfas en $U_i \cap U_j$. Por lo tanto, la definición de sección holomorfa queda bien establecida.

Se dice que s tiene un polo de orden n en x si alguna función s_{h_i} con x en su dominio tiene un polo de orden n en este punto. De nuevo, la relación

(1) elimina cualquier ambigüedad en esta definición.

La relación (1) refleja el hecho de que en un haz de línea holomorfo se puede definir el ángulo entre dos elementos de E no nulos y con el mismo punto base. Esto se hace de la siguiente manera:

Sean $x \in X$ y v_1, v_2 vectores no nulos en E_x . Dada $h_i \in H$ tal que $x \in U_i$ se tiene que:

$$h_i(v_1) = (x, w_1^i) \text{ y } h_i(v_2) = (x, w_2^i),$$

donde $w_1, w_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$

Se define el ángulo entre v_1 y v_2 como el ángulo dirigido en contra de las manecillas del reloj entre w_1^i y w_2^i . Obsérvese que el hecho de que las funciones de transición sean holomorfas provee a los haces de línea holomorfos de una orientación canónica.

Si se hubiera considerado h_j en lugar de h_i entonces, se habrían obtenido los vectores w_1^j y w_2^j , pero el ángulo entre estos dos vectores es el mismo que el ángulo entre w_1^i y w_2^i , pues

$$w_1^i = g_{ij}(x)w_1^j, w_2^i = g_{ij}(x)w_2^j.$$

Estos comentarios permiten definir el operador $R_\theta : E \rightarrow E$ como el operador que manda a un vector $v \in E_x$ al vector $R_\theta(v)$ en E_x que forma un ángulo θ en el sentido contrario de las manecillas del reloj con v .

Se puede definir ya el haz tangente a una superficie de Riemann X , el cual resultará ser un haz de línea holomorfo.

Sea X una superficie de Riemann, $x \in X$ y

$$V_x = \{(\varphi, v) | \varphi \text{ es una carta compleja en } x \text{ y } v \in \mathbb{C}\}.$$

Considérese la siguiente relación de equivalencia en V_x :

$$(\varphi_1, v_1) \sim_x (\varphi_2, v_2) \text{ si } \frac{d}{dz}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(x))v_1 = v_2.$$

A la clase de equivalencia de un elemento $(\varphi, v) \in V_x$ se le denota por $[\varphi, v]_x$ y se llama *vector tangente* a X en x .

Definición: El *espacio tangente* a X en x es el conjunto de vectores tangentes a X en x y se le denota por $T_x X$ y el *haz tangente* TX a X es la unión de todos estos espacios, esto es:

$$T_x X = \{[\varphi, v]_x \mid z \in \mathbb{C}\} \text{ y}$$

$$TX = \bigcup_{x \in X} T_x X.$$

Se define $p : TX \longrightarrow X$ como la *función de proyección* que manda a los vectores en $T_x X$ a x .

Proposición 1.2.1: Sea X una superficie de Riemann. La terna (TX, X, p) es un haz de línea holomorfo.

Demostración: Los subconjuntos $T_x X = p^{-1}(x)$ tienen la estructura de un espacio vectorial complejo de dimensión 1 bajo las siguientes operaciones:

$$[(\varphi, v_1)] + [(\varphi, v_2)] = [(\varphi, v_1 + v_2)]$$

$$a[(\varphi, v)] = [(\varphi, av)], \text{ donde } a \in \mathbb{C}.$$

Es fácil ver que esta operación no depende del sistema de coordenadas utilizado.

Para construir las trivializaciones locales considérese una atlas complejo $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi(U_i)\}_{i \in I}$ en X . Se definen las trivializaciones

$$h_{\varphi_i} : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}$$

de la siguiente manera:

$$h_{\varphi_i}([\varphi_i, v])_x = (x, v).$$

Para $x \in U_i \cap U_j$, se tiene:

$$\begin{aligned}
h_{\varphi_i} \circ h_{\varphi_j}^{-1}(x, v) &= h_{\varphi_i}([\varphi_j, v]_x) \\
&= h_{\varphi_i}([\varphi_i, \frac{d}{dz}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_i(x))v]_x) \\
&= (x, \frac{d}{dz}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_i(x))v).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las funciones de transición están dadas por:

$$g_{ij}(z) = \frac{d}{dz}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_i(z)).$$

Estas funciones son holomorfas, pues $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es un biholomorfismo.

Como g_{ij} es en particular continua entonces $h_{\varphi_i} \circ h_{\varphi_j}^{-1}$ también lo es, lo cual permite definir la topología en TX como la topología que hace homeomorfismos a las funciones h_{φ_i} para toda $i \in I$. Con esta topología es fácil verificar que p es continua. ■

Definición: Sea X una superficie de Riemann. Un *campo meromorfo* en X es una sección meromorfa en TX .

Para simplificar la notación, de ahora en adelante cuando se tenga una carta $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ se escribirá $\frac{\partial}{\partial x}|_x = [\varphi, 1]_x$. De hecho se escribirá $\frac{\partial}{\partial x} = [\varphi, 1]_x$, sobreentendiéndose que se está en el punto base adecuado. De esta forma, dado un campo meromorfo s su expresión local en $\varphi(U)$ es

$$s_{\varphi}(z) \frac{\partial}{\partial x},$$

donde $s_{\varphi} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa.

Se termina esta sección haciendo una clasificación de los campos meromorfos en S^2 .

Considérese a S^2 con las cartas complejas φ_1, φ_2 definidas en la sección 1.1., ejemplo (c). Si $s : S^2 \rightarrow TS^2$ es un campo meromorfo, entonces la expresión de s en la carta φ_1 es

$$s(z) = R(z) \frac{\partial}{\partial x},$$

donde $R(z)$ es meromorfa en $\mathbb{C}$.

La expresión de s en la carta φ_2 es:

$$s(z) = -z^2 R\left(\frac{1}{z}\right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Esta última función tiene que ser meromorfa en 0, lo cual equivale a que R extienda a una función meromorfa en ∞ , por lo que R tiene que ser una función racional. De esta fórmula también se sigue que R pensado como campo vectorial tiene una singularidad en ∞ de orden dos más que el orden de R en ∞ pensado como función. Así, un campo con un solo cero simple en $\mathbb{C}$ tiene un cero simple en ∞ , uno con tres ceros simples en $\mathbb{C}$ tiene un polo de orden uno en ∞ , etc.

Esta clasificación de campos meromorfos en S^2 se hizo mediante el uso de una estructura compleja fija, sin embargo, el teorema de uniformización dice que esta estructura es única hasta biholomorfismo, por lo que no se pierde generalidad.

Esta última observación no es cierta en el caso de otras superficies. Por ejemplo, el disco unitario y el plano complejo son homeomorfos como espacios topológicos, pero como se hizo ver en la sección anterior estos poseen estructuras complejas que no los hacen biholomorfos.

De ahora en adelante cuando se hable de campos meromorfos en una superficie se supondrá que se ha fijado una estructura compleja en ella.

Capítulo 2

Habiendo definido los campos meromorfos, el siguiente objetivo es intentar entender la dinámica inducida por éstos en una superficie de Riemann compacta. Esto es, estudiar las soluciones reales de

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = s(\alpha(t)), \quad (1)$$

donde $s : X \longrightarrow TX$ es un campo meromorfo, X es una superficie de Riemann compacta (suposición que se hará de ahora en adelante) y $\alpha : (a, b) \subset \mathbf{R} \longrightarrow X$ es una curva C^∞ en X .

En este capítulo se da un primer paso hacia el entendimiento de este problema analizando la dinámica local inducida por s en X . Esto último se divide en dos partes:

- (a) Analizar la ecuación (1) en una vecindad de un punto singular de s , esto es, un polo o un cero de éste campo (sección 2.1).
- (b) Analizar la ecuación (1) en una vecindad de una órbita cerrada (sección 2.2).

Se termina el capítulo en la sección 2.3 haciendo ver que el problema de describir las foliaciones inducidas por la familia de campos $\{e^{i\theta}s|\theta \in S^1\}$ en $X^0 = X - \{\text{singularidades de } s\}$ equivale a estudiar el flujo geodésico en el espacio $(X^0, \langle, \rangle^s)$, donde $\langle, \rangle^s$ es una métrica riemanniana plana adecuada.

2.1 DINAMICA LOCAL EN PUNTOS SINGULARES

Definición: Sea s un campo meromorfo en X . Se dice que un punto $x \in X$ es un *punto singular* de s si x es un cero o un polo de s .

Como las singularidades de un campo meromorfo están aisladas cuando s esté definido sobre una superficie de Riemann compacta, tal campo tendrá necesariamente un número finito de singularidades.

Interesa entender la ecuación diferencial real asociada a s :

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = s(\alpha(t)) \quad (1)$$

en una vecindad de un punto $x_0 \in X$. Para ésto considérese una carta $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ en x_0 con $\varphi(x_0) = 0$. La expresión local de s en esta carta tiene la forma

$$s_\varphi(z) \frac{\partial}{\partial z},$$

por lo que (1) se convierte localmente en:

$$\frac{dz}{dt}(t) = s_\varphi(z(t)) \frac{\partial}{\partial z} \quad (2).$$

Obsérvese que $0 \in \mathbb{C}$ es un punto singular de s_φ del mismo tipo que s tiene en x_0 .

Proposición 2.1.1: Sea $x_0 \in X$ y $s : X \rightarrow TX$ un campo meromorfo. Existe una carta compleja $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ con $\Phi(x_0) = 0$ tal que:

$$s_\Phi(z) = \begin{cases} z^{-n} & \text{si } x_0 \text{ es un polo de orden } n \\ 1 & \text{si } x_0 \text{ es un punto regular} \\ a(x_0)z & \text{si } x_0 \text{ es un cero simple, } a \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Demostración:

Caso I. $0 \in \mathbb{C}$ es un polo de orden n con $n \geq 1$, o es un punto regular de s_φ . Entonces s_φ se puede escribir en una vecindad de 0 como:

$$s_\varphi(z) = z^{-n}g(z),$$

donde g es analítica en esta vecindad y $g(0) \neq 0$. El caso en que $0 \in \mathbb{C}$ es punto regular de s_φ corresponde a $n = 0$.

Es claro que para demostrar la existencia de la carta Φ con las propiedades deseadas, basta con encontrar un biholomorfismo local h con la siguiente propiedad:

$$\frac{dh}{dz}(z)z^{-n}g(z) = (h(z))^{-n}$$

o en forma equivalente:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{(h(z))^{n+1}}{n+1}\right) = z^n \frac{1}{g(z)}. \quad (3)$$

Como $g(0) \neq 0$, entonces $z^n \frac{1}{g(z)}$ es analítica en un vecindad $B_\epsilon(0)$ de 0, de lo cual se sigue que existe una función analítica $r : B_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$\frac{dr}{dz}(z) = z^n \frac{1}{g(z)}.$$

De esta ecuación se concluye que r tiene un cero de orden $n+1$ en 0, lo cual implica que existe $r_0 : B_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $r_0(0) \neq 0$ y

$$r(z) = \frac{1}{n+1}z^{n+1}r_0(z).$$

Utilizando ésto e ignorando constantes, se tiene que (3) toma la siguiente forma:

$$(h(z))^{n+1} = z^{n+1}r_0(z).$$

Ahora, como $r_0(0) \neq 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $r_0(B_{\epsilon_0}(0))$ está contenido en una rama bien definida de $z^{\frac{1}{n+1}}$.

Entonces, para $z \in B_{\epsilon_0}(0)$ se puede definir:

$$h(z) = z(r_0(z))^{\frac{1}{n+1}}$$

que por construcción satisface (3).

Solo falta verificar que h es un biholomorfismo local, pero ésto es un cálculo sencillo:

$$\frac{dh}{dz}(z) = \frac{z}{n+1}(r_0(z))^{\frac{1}{n+1}-1} \frac{dr_0}{dz}(z) + (r_0(z))^{\frac{1}{n+1}}$$

y entonces

$$\frac{dh}{dz}(0) = (r_0(0))^{\frac{1}{n+1}} \neq 0.$$

Observe que $h(0) = 0$.

Caso II. $0 \in \mathbb{C}$ es un cero simple de s_φ .

En este caso se puede escribir a s_φ en una vecindad de 0 como:

$$s_\varphi(z) = azg(z),$$

donde $g(0) = 1$ y $a = \frac{ds_\varphi}{dz}(0)$.

En este caso buscamos un biholomorfismo local h tal que:

$$\frac{dh}{dz}(z)azg(z) = ah(z).$$

Si se restringe z a $\mathbb{C} - l$, donde $l = \{r \in \mathbb{R} | r \geq 0\}$, entonces esto último se escribe como:

$$\frac{d}{dz}(\ln(h(z))) = \frac{1}{zg(z)}. \quad (4)$$

Como $\frac{1}{g(z)}$ es analítica en $B_\epsilon(0)$, para alguna $\epsilon > 0$ se puede desarrollar esta función en serie de potencias en la bola $B_\epsilon(0)$, esto es:

$$\frac{1}{g(z)} = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

por lo tanto

$$\frac{1}{zg(z)} = \frac{1}{z} + a_1 + a_2 z + \dots$$

Si se hace

$$r(z) = \ln(z) + \psi(z)$$

donde

$$\psi(z) = a_1 z + \frac{1}{2} a_2 z^2 + \dots$$

entonces

$$\frac{dr}{dz}(z) = \frac{1}{zg(z)} \text{ para } z \in \mathbb{C} - 1.$$

Utilizando r la ecuación (4) se convierte en:

$$\ln(h(z)) = \ln z + \psi(z).$$

Entonces se puede definir $h(z) = ze^{\psi(z)}$ que por lo anterior satisface (4) y además, no se es necesario restringirse a $\mathbb{C} - 1$ (los logaritmos que aparecían inicialmente se han cancelado al final del proceso).

Por último, hay que verificar que $\frac{dh}{dz}(0) \neq 0$

$$\frac{dh}{dz}(z) = z \frac{d\psi(z)}{dz} e^{\psi(z)} + e^{\psi(z)}$$

entonces

$$\frac{dh}{dz}(0) = e^{\psi(0)} = e^0 = 1.$$

Obsérvese que $h(0) = 0$.

Si $\psi : V \longrightarrow \psi(V)$ es otra carta en x_0 tal que $\psi(x_0) = 0$, es fácil verificar que:

$$\frac{ds_\psi}{dz}(0) = \frac{ds_\varphi}{dz}(0).$$

Entonces, cuando x_0 es un cero simple de s , el número $\frac{ds_\varphi}{dz}(0)$ es el mismo independientemente de en que sistema coordenado se calcule, y de ahora en adelante se denotará por $s'(x_0)$. Es claro que el complejo a de la proposición anterior es igual a $s'(x_0)$.

Se ha omitido el estudio de ceros múltiples, sin embargo éste es un caso degenerado de cuando varios ceros simples se colapsan para formar un único cero múltiple (más adelante mostraremos como es ésto). Lo mismo se puede decir en cuanto a los polos múltiples.

De ahora en adelante, cuando hablemos de campos meromorfos se supondrá que éstos poseen ceros simples, o escrito de otra forma, si s es un campo meromorfo en X y x es un cero de s , entonces $s'(x) \neq 0$. Se denotará al conjunto de singularidades del campo s como $\text{Sing}(s)$.

La proposición anterior reduce el estudio de las dinámicas locales de campos meromorfos al estudio local (alrededor del $0 \in \mathbb{C}$) de las siguientes ecuaciones:

(i) $\frac{dz}{dt}(t) = z^{-n}(t)$ con $n \geq 1$

(ii) $\frac{dz}{dt}(t) = 1$

(iii) $\frac{dz}{dt}(t) = az(t)$

La ecuación (i) se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z^{n+1}(t)}{n+1}\right) = 1.$$

Entonces

$$z^{n+1}(t) = \lambda t + k,$$

donde $\lambda = n+1$ y $k \in \mathbb{C}$.

Utilizando una rama específica de $z^{\frac{1}{n+1}}$ se puede despejar $z(t)$ obteniendo:

$$z(t) = (\lambda t + k)^{\frac{1}{n+1}}.$$

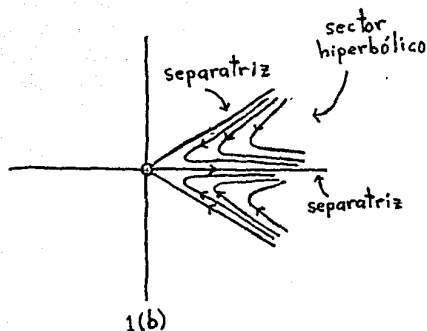
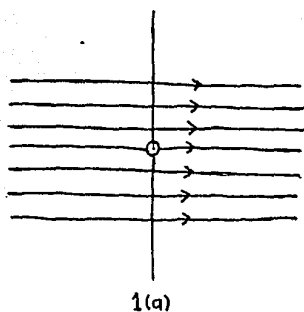


Figura 1

La figura 1(b) se obtiene aplicando la rama de $z^{\frac{1}{n+1}}$, tal que $-\frac{\pi}{n+1} \leq \arg(z^{\frac{1}{n+1}}) < \frac{\pi}{n+1}$, a las rectas $\lambda t + k$, figura 1(a).

Al sector mostrado en la figura 1(b) se le llama sector hiperbólico y a las órbitas que lo delimitan se les llama separatrices.

Para obtener las soluciones completas alrededor del $0 \in \mathbb{C}$ de la ecuación (i) simplemente utilizamos las ramas restantes de $z^{\frac{1}{n+1}}$. Los dibujos para $n = 1, 2$ se muestran en la figura 2.

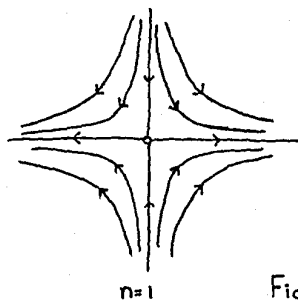
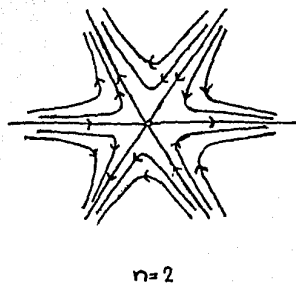


Figura 2



En general, se tiene que la dinámica alrededor de $0 \in \mathbb{C}$ de $\frac{dz}{dt}(t) = z^{-n}(t)$ consta de $2(n+1)$ sectores hiperbólicos.

Las soluciones de la ecuación (ii) se muestran en la figura 3.

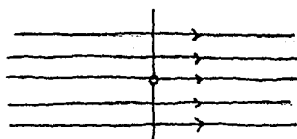


Figura 3

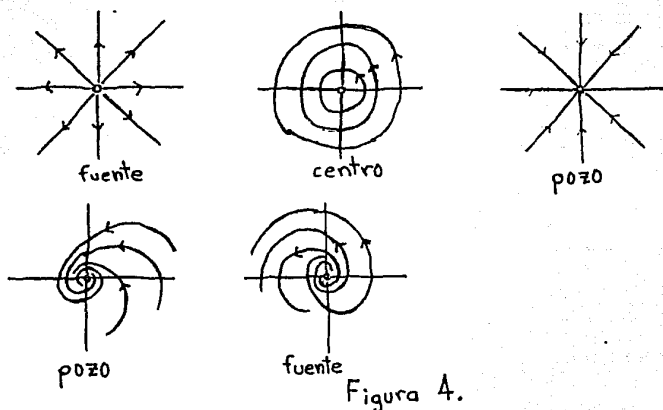
En este caso, el corolario de la proposición 2.1.2 dice que alrededor de un punto regular de un campo meromorfo existe una carta compleja en la cual este campo es el campo constante paralelo al eje x en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ (compárese ésto con el resultado para puntos regulares de campos C^k).

La ecuación (iii) es lineal y tiene soluciones

$$z(t) = ke^{at}$$

donde $k \in \mathbb{C}$.

Los dibujos correspondientes a $\text{Im}(a) > 0$ se muestran en la figura 4.



El caso en que $\text{Im}(a) < 0$ es similar a éstos, pero con las orientaciones cambiadas.

Entonces, para ceros simples se presentan tres tipos de dinámicas: *pozos*, *fuentes* y *centros*.

Obsérvese en particular, que en el caso en que $s'(x_0)$ es imaginario puro, la dinámica alrededor de x_0 es localmente biholomorfa al caso correspondiente mostrado en la figura 4. Esto contrasta con el caso general de campos C^k , en los cuales no se puede obtener información segura de como son los campos en vecindades de ceros no hiperbólicos (véase Teorema de Hartman-Grobman, [Pa]).

Recuérdese que un cero q_0 de un campo C^k ($k \geq 1$) $g : M \longrightarrow TM$ en una n -variedad diferenciable es hiperbólico si cuando se expresa a g en una carta local $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ alrededor del cero, esto es:

$$g(q) = g_\psi(q) \frac{\partial}{\partial x},$$

entonces la diferencial de g_ψ en $\psi(q_0)$ tiene valores propios con parte real distinta de cero.

Se termina aplicando el siguiente teorema a campos meromorfos en una superficie de Riemann compacta.

Teorema 2.1.3: Sea g un campo C^1 en una 2-variedad compacta y conexa M con un número finito de singularidades (esto es, ceros del campo). La suma de los índices de las singularidades de g es igual a la característica de Euler $\chi(M)$ de M .

Para la demostración y la definición de los términos empleados en este teorema vease [Ar].

Es fácil ver que este teorema se puede aplicar a campos meromorfos en una superficie de Riemann compacta.

En este caso el índice de un polo de orden n en $-n$ pues cada sector hiperbólico contribuye con $\frac{-n}{2(n+1)}$ al índice total (veanse los dibujos), los ceros simples tienen índice 1 pues son pozos, centros y fuentes. De hecho es sencillo demostrar que los ceros de orden n tienen índice n .

De estos comentarios se obtiene la siguiente proposición:

Proposición 2.1.4: Sea s un campo meromorfo en una superficie de Riemann compacta X , $c_1, \dots, c_k$ los ceros de s y $p_1, \dots, p_l$ sus polos. Entonces:

$$\sum_{i=1}^k o(c_i) - \sum_{i=1}^l o(p_i) = \chi(X)$$

donde $o(c_i)$ es el orden de c_i y $o(p_i)$ es el orden de p_i .

Esta proposición dice en particular que las únicas superficies de Riemann compactas que admiten *campos holomorfos* (esto es, sin polos) son la esfera y el toro.

Como el haz tangente al toro admite una trivialización global, entonces los campos coinciden con las funciones. Pero una función holomorfa en el toro es necesariamente constante. De todo ésto se obtiene que los campos holomorfos en el toro son los campos constantes.

En el caso de la esfera de Riemann, que tiene característica de Euler igual a 2, los campos holomorfos tienen o dos ceros simples o un cero de orden dos. De esto se sigue que los campos holomorfos en esta superficie se escriben como:

$$f(z) = (a_0 + a_1z + a_2z^2) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Se ve entonces que estudiar campos holomorfos es muy restrictivo, lo cual nos motiva a admitir la presencia de polos.

2.2 DINAMICA LOCAL DE ORBITAS CERRADAS

Recuérdese que $R_\theta : TX \longrightarrow TX$ es el operador que manda a un vector v en $T_x X$ al vector rotado un ángulo θ en $T_x X$. La expresión local de R_θ es:

$$R_\theta(v \frac{\partial}{\partial x}) = e^{i\theta} v \frac{\partial}{\partial x}$$

Si $s : X \longrightarrow TX$ es un campo meromorfo se define $e^{i\theta}s = R_\theta s$, que resulta ser un campo meromorfo con las mismas singularidades que s .

Si $x \in X$ se define $s_t(x)$ como la traslación del punto x mediante la solución α de $\frac{d\alpha}{dt}(t) = s(\alpha(t))$ con $\alpha(0) = x$ por un tiempo t , esto es, $s_t(x) = \alpha(t)$.

La siguiente proposición da información suficiente para entender la dinámica inducida por un campo meromorfo en una vecindad de una órbita cerrada.

Proposición 2.2.1: Sea s un campo meromorfo en X y $\alpha : [a, b] \longrightarrow X - \text{Sing}(s)$ tal que $\alpha'(t) = s(\alpha(t))$. Existe $\epsilon > 0$ tal que el campo normal $(is)_u(x)$, donde $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, está definida para $x \in \alpha([a, b])$ y $|u| < \epsilon$, y además, si se define

$$\beta_u(t) = (is)_u(\alpha(t))$$

entonces

$$\frac{d\beta_u}{dt}(t) = s(\beta_u(t)).$$

Demostración:

Sea $\{\Phi_i : U_i \longrightarrow (-\epsilon_i, \epsilon_i) \times (-\epsilon_i, \epsilon_i)\}_{i=1}^k$ una familia de cartas complejas tales que:

(i) $\{U_1, \dots, U_k\}$ es una cubierta de $\alpha([a, b])$.

(ii) $s_{\Phi_i}(z) = 1$ para toda $z \in (-\epsilon_i, \epsilon_i) \times (-\epsilon_i, \epsilon_i)$.

(iii) $\Phi_i(U_i \cap \alpha([a, b])) \subset (-\epsilon_i, \epsilon_i) \times \{0\}$.

La expresión del campo is en la carta Φ_i esta dada por:

$$is_{\Phi_i}(z) = i$$

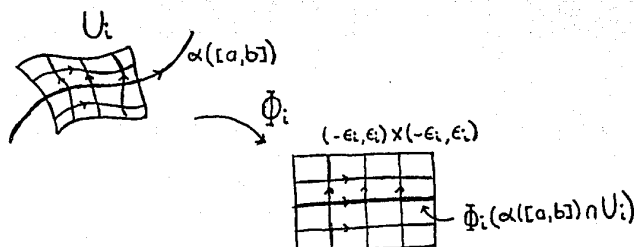


Figura 5

Se tiene que el segmento de la solución de $\frac{d\alpha}{dt}(t) = s(\alpha(t))$ que está contenida en U_i , corresponde (mediante Φ_i) a un segmento de la solución de

$$\frac{dz}{dt}(t) = 1 \text{ tal que } z(0) \in (-\epsilon_i, \epsilon_i) \times \{0\}.$$

La función $(is)_u$ corresponde localmente a las traslaciones

$$(is_{\Phi_i})_u(p, q) = (p, q + u),$$

de donde se sigue que:

(i) $(is)_u(x)$ está definida para $x \in \alpha([a, b])$ y $|u| < \epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$.

(ii) $\beta_u(t)$ satisface $\frac{d\beta_u}{dt}(t) = s(\beta_u(t))$.

Nota: La proposición anterior se sigue cumpliendo si en lugar de tomar $(is)_u$ se considera $(e^{i\theta}s)_u$ para cualquier $\theta \in [0, 2\pi)$ (claro que los casos en que $\theta = 0, \pi$ no son interesantes).

En particular, si $\alpha : [a, b] \longrightarrow X$ es una órbita cerrada con periodo T , entonces la proposición dice que existe $\epsilon > 0$ tal que las curvas

$$\beta_u(t) = (is)_u(\alpha(t))$$

satisfacen $\frac{d\beta_u}{dt}(t) = s(\beta_u(t))$, figura 6.

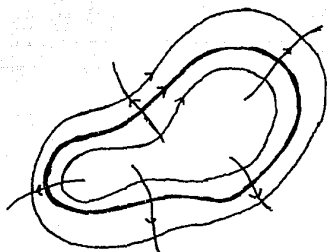


Figura 6

Es claro que estas curvas son cerradas y con el mismo periodo T que α .

Se ha obtenido el siguiente resultado:

Proposición 2.2.2: Sea Γ una órbita cerrada de s con periodo T . Existe una vecindad V de Γ tal que todas las órbitas de s que intersecan a V están contenidas en V , son cerradas y tienen el mismo periodo que Γ . ■

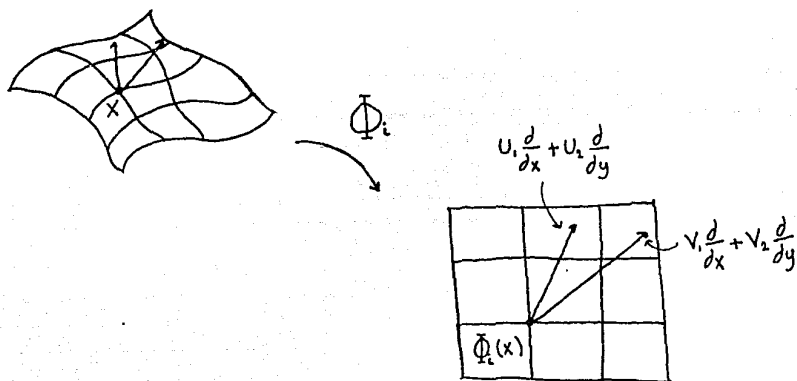


Figura 7

2.3 ASPECTOS GEOMETRICOS

La siguiente proposición muestra que las soluciones de $\frac{d\alpha}{dt}(t) = s(\alpha(t))$ donde s es un campo meromorfo, corresponden a geodésicas en $X - \text{Sing}(s)$ con una métrica de Riemann adecuada.

Proposición 2.3.1: Sea s un campo meromorfo en una superficie de Riemann X . Existe una métrica riemanniana plana $\langle, \rangle^s$ en $X - \text{Sing}(s)$ tal que las soluciones de $\frac{d\alpha}{dt}(t) = s(\alpha(t))$ son geodésicas en $(X - \text{Sing}(s), \langle, \rangle^s)$.

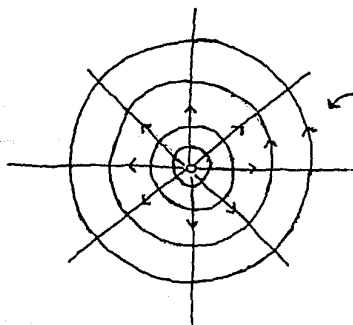
Demostración:

Sea $\{\Phi_i : U_i \rightarrow \Phi(U_i)\}$ un atlas complejo en $X - \text{Sing}(s)$ tal que:

$$s_{\Phi_i}(z) = 1, \quad (1)$$

entonces las representaciones de is en estas cartas son

$$is_{\Phi_i}(z) = i. \quad (2)$$



Todas las órbitas
cerradas tienen la
misma longitud.

Figura 8

Se define la métrica $\langle, \rangle^{U_i}$ en U_i como:

$$\langle (u_1 \frac{\partial}{\partial x} + u_2 \frac{\partial}{\partial y}), (v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y}) \rangle^{U_i} = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

que es la métrica plana usual en $\Phi_i(U_i)$ como subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

Para poder unir estas métricas locales en una métrica global en $X - \text{Sing}(s)$ se necesita probar que estas son compatibles, esto es, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces el cambio de coordenadas es una isometría plana. De hecho, este cambio de coordenadas es una translación en el plano, pues por la forma en que se construyeron las cartas se tiene que $\frac{d}{dz}(\Phi_j \circ \Phi_i^{-1})(z) = 1$. Se define la métrica global $\langle, \rangle^s$ en $X - \text{Sing}(s)$ como la unión de las métricas locales $\langle, \rangle^{U_i}$.

La métrica $\langle, \rangle^s$ se ha construido de tal forma que las cartas Φ_i son isometrías de U_i en el espacio $\Phi(U_i)$ con la métrica usual que hereda como subconjunto del plano. De aquí se sigue que $\langle, \rangle^s$ es una métrica plana, y como las soluciones de $\frac{dz}{dt}(t) = 1$ son geodésicas en $\Phi(U_i)$, entonces las soluciones de $\frac{d\alpha}{dt}(t) = s(\alpha(t))$ son geodésicas en el espacio $X - \text{Sing}(s)$ con la métrica dada.

Dada una de las cartas Φ_i mencionadas en el teorema se tiene en general que $e^{i\theta}s$ se escribe en esta carta como:

$$f_{\Phi}(z) = e^{i\theta}$$

por lo que no solo la soluciones de $\frac{d\alpha}{dt}(t) = s(\alpha(t))$ son geodésicas en $(X - \text{Sing}(s), \langle, \rangle^s)$, sino también la soluciones de $\frac{d\alpha}{dt}(t) = e^{i\theta}s(\alpha(t))$ para cualquier $\theta \in [0, 2\pi)$.

La métrica inducida por $e^{i\theta}s$ en $X - \text{Sing}(s)$ es isométrica a la que induce s , de hecho:

$$I : (X - \text{Sing}(s), \langle, \rangle^s) \longrightarrow (X - \text{Sing}(s), \langle, \rangle^{e^{i\theta}s}),$$

donde $I(x) = x$, es una isometría.

Entonces, la métrica $\langle, \rangle^s$ no está asociada exclusivamente al campo s sino a toda la familia $\{e^{i\theta}s | \theta \in [0, 2\pi)\}$ (obsérvese que en esta métrica los vectores $e^{i\theta}s(x)$ tiene norma 1 para toda $x \in X$ y $\theta \in [0, 2\pi)$). En resumen:

Estudiar las órbitas inducidas por la familia de campos meromorfos $\{e^{i\theta}s | \theta \in [0, 2\pi)\}$ en $X - \text{Sing}(s)$ se reduce a estudiar el flujo geodésico en $(S^2 - \text{Sing}(s), \langle, \rangle^s)$.

Obsérvese que si $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ es solución de $\frac{d\alpha}{dt}(t) = e^{i\theta}s(\alpha(t))$ ($\theta \in [0, 2\pi)$), la longitud de $\alpha([a, b])$ en términos de $\langle, \rangle^s$ es el tiempo $b - a$ en que α recorre a este conjunto, pues el vector $\frac{d\alpha}{dt}(t)$ es unitario.

Los resultados locales obtenidos anteriormente se interpretan en términos de $\langle, \rangle^s$ de la siguiente manera:

Caso I: $x_0 \in X$ es un cero simple de s .

Existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $(e^{i\theta}s)'(x_0)$ es un real positivo. Tenemos entonces que:

$$(e^{i\theta}s)'(x_0) = |s'(x_0)|$$

Por lo tanto existe una carta $\Phi : U \rightarrow B_\epsilon(0)$ en x_0 tal que las expresiones locales de $e^{i\theta}s$ y $ie^{i\theta}s$ son

$$s_\Phi(z) = |s'(x_0)|$$

$$is_\Phi(z) = i|s'(x_0)|$$

respectivamente.

Las soluciones de $\frac{dz}{dt}(t) = f_\Phi(z)$ y $\frac{dz}{dt}(t) = if_\Phi(z)$ forman una red de geodésicas alrededor de $0 \in \mathbb{C}$, ver figura 1. Cada una de las órbitas cerradas de $\frac{dz}{dt}(t) = ie^{i\theta}s(\alpha(t))$ tiene longitud constante $\frac{2\pi}{|s'(x_0)|}$ y las soluciones de $\frac{dz}{dt}(t) = e^{i\theta}s(\alpha(t))$ tienen longitud infinita (el tiempo tiende a infinito) al acercarse a $0 \in \mathbb{C}$, figura 8.

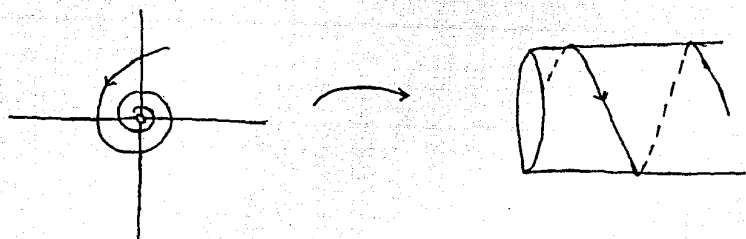


Figura 9

De esto último se sigue que $(U, \langle, \rangle^s)$ es isométrico al cilindro $(S_r^1 \times (0, \infty), \langle, \rangle^P)$ donde $S_r^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = r\}$, $r = \frac{1}{|s'(x_0)|}$ y $\langle, \rangle^P$ es la métrica de Riemann plana que $S_r^1 \times (0, \infty)$ hereda como subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Obsérvese la correspondencia entre las soluciones de $\frac{d\alpha}{dt}(t) = e^{i\theta} s(\alpha(t))$, $\theta \in S^1$, y las geodésicas en el cilindro $S_r^1 \times (0, \infty)$, figura 9.

Caso II: $x_0 \in X$ es un polo de orden n de s .

Sea H uno de los $2(n+1)$ sectores hiperbólicos correspondientes a esta singularidad. Utilizando s y is formamos una retícula en H como la que se muestra en la figura 10.

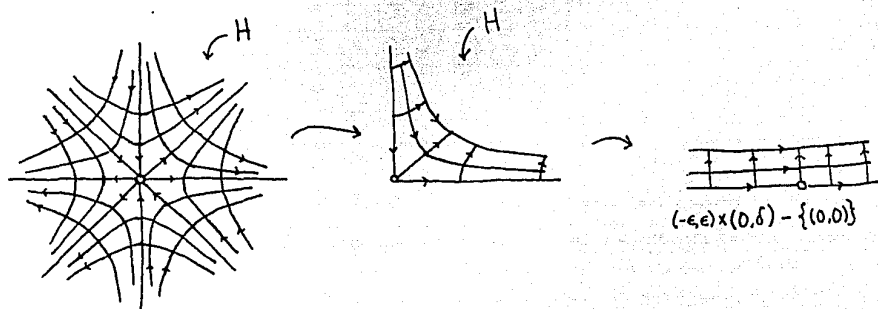


Figura 10

De nuevo, como en el caso anterior, un argumento de longitudes hace ver que $(H - \{x_0\}, <, >^s)$ es isométrico a $((-\epsilon, \epsilon) \times (0, \delta) - (0,0), <, >)$, donde ϵ y δ son números adecuados y $<, >$ es la métrica de Riemann plana en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Caso III: γ es una órbita cerrada de s .

De la proposición 2.2.1 se tiene que todas las órbitas en una vecindad V de γ son cerradas y con el mismo periodo, de donde se obtiene que $(V, <, >^s)$ y $(S_r^1 \times (-\epsilon, \epsilon), <, >^P)$ son isométricos para una r adecuada.

Una última observación:

Para describir todas las posibles regiones isométricas a anillos en el espacio $(X - \text{Sing}(s), <, >^s)$ no basta con detectar las órbitas cerradas de s sino con detectar las órbitas cerradas de toda la familia $\{e^{i\theta}s | \theta \in [0, 2\pi]\}$. En otras palabras, analizar la dinámica de $e^{i\theta}s$ mientras θ varía en $[0, 2\pi]$ revela poco a poco ciertas estructuras geométricas presentes en $(X - \text{Sing}(s), <, >^s)$.

Obsérvese que el campo s es holomorfo y no tiene ceros en $X - \text{Sing}(s)$.

El hecho de que para toda $x_0 \in X - \text{Sing}(s)$ exista una carta Φ en x_0 , en la cual s y is tengan expresiones locales

$$\begin{aligned}s_{\Phi}(z) &= 1 \\ is_{\Phi}(z) &= i\end{aligned}$$

se expresa infinitesimalmente diciendo que $[s, is](x) = 0$ para toda x en una vecindad de x_0 , donde $[,]$ son los corchetes de Lie usuales para campos vectoriales (una demostración de esto se puede encontrar en [Sp] pg. 219).

Por lo tanto, se tiene que $[s, is](x) = 0$ para toda $x \in X - \text{Sing}(s)$.

En vista del trabajo anterior, cabe preguntarse si dado un campo vectorial g en X con un número finito de singularidades, qué propiedad debe tener g para que $[g, ig](x) = 0$ para toda $x \in X - \{\text{singularidades de } g\}$. La respuesta a esto está dada en la siguiente proposición:

Proposición 2.3.2: Sea $g : X \rightarrow TX$ un campo vectorial C^r en una superficie de Riemann X . Entonces $[g, ig](x) = 0$ para toda $x \in A = X - \{\text{singularidades de } g\}$ si y solo si g es un campo holomorfo en A .

Demostración:

Utilizando cartas complejas en A es claro que este problema se reduce a

demostrar ésto para un campo $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ definido en una vecindad V de $0 \in \mathbb{C}$.

Se tiene que $if(x, y) = v(x, y) + \frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$. Utilizando la fórmula dada en [Sp] pg. 212 es fácil ver que:

$$[f, if] = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)(-u, v) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)(v, u)$$

Pero como $(-u, v)$ y (v, u) son campos ortogonales y por lo tanto linealmente independientes (por hipótesis estos campos no se anulan en U), entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann para u y v , por lo que f es un campo holomorfo en A . ■

Capítulo 3

En este capítulo se aplican los resultados anteriores para demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1: Considérese la familia de campos $\{e^{i\theta}s \mid \theta \in S^1\}$, donde s es un campo meromorfo en S^2 , parametrizada por $S^1 := [0, 2\pi)$. El conjunto de valores de bifurcación de esta familia es un conjunto con a lo más un número finito de puntos de acumulación.

De hecho, se da una condición necesaria y suficiente para que las bifurcaciones de esta familia sean finitas.

En la sección (3.1) se demuestra que la función de primer retorno de Poincaré para campos meromorfos resulta ser siempre trivial (esto es, la identidad), reduciendo de esta forma las posibilidades para los ω y α límites de campos meromorfos en la esfera.

Se finaliza en (3.2) demostrando el teorema 3.2.1 mediante el siguiente plan:

Se inicia haciendo una distinción entre los *cilindros* generados por los ceros de un campo meromorfo s en $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ y los *anillos* generados por órbitas cerradas de s pero que no corresponden a ningún cero de s , y se demostrará que $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ solo puede tener un número finito de *anillos* (proposición 3.2.2). Posteriormente se demuestra que la familia

$\{e^{i\theta}s|\theta \in S^1\}$ se bifurca en y solo en los ángulos $\theta \in S^1$ tales que $e^{i\theta}s$ tiene conexión entre polos (esto es, existen órbitas de $e^{i\theta}s$ que conectan a un par de polos de este campo). Las conexiones entre polos que están en la frontera de un *anillo* son las que generan los puntos de acumulación en el conjunto de bifurcaciones de la familia $\{e^{i\theta}s|\theta \in S^1\}$. Todas las demás conexiones entre polos generan bifurcaciones aisladas en este conjunto. De el hecho de que $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ tiene un número finito de *anillos*, se concluye que el conjunto de valores de bifurcación de $\{e^{i\theta}s|\theta \in S^1\}$ es un conjunto con a lo más un número finito de puntos de acumulación.

3.1 ASPECTOS GENERALES

Si $g : M \longrightarrow TM$ es un campo C^r ($r \geq 1$) en una variedad diferenciable compacta M , se sabe que existe el flujo global asociado a g , esto es, una función

$$G : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

con las siguientes propiedades:

- (i) G es C^r .
- (ii) Si $g_t : M \longrightarrow M$ se define como $g_t(q) = G(t, q)$, entonces $g_t \circ g_s = g_{s+t}$.
- (iii) $\frac{\partial G}{\partial t}(t, q) = g(G(t, q))$.

Si $q \in M$, la órbita de q se define como:

$$o(q) = \{g_t(q) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Se presentan los siguientes casos:

- (a) Si $g(q) = 0$, entonces $o(q) = \{q\}$ y se dice que q es un punto de equilibrio de g .
- (b) Si q no es un punto de equilibrio de g y existe $T > 0$ tal que $G(T, q) = q$ y $G(t, q) \neq q$ para $0 < t < T$, se dice que la órbita de q es cerrada.
- (c) Se dice que la órbita de q es regular si no es cerrada y q no es un punto de equilibrio.

Definición: Sea g un campo C^r en M y $q \in M$. Los conjuntos $\omega(q)$ y $\alpha(q)$

(el omega y alfa límite de q) se definen de la siguiente manera:

$$\omega(q) = \{m \in M | \exists \{t_n\} \rightarrow \infty \text{ tal que } g_{t_n}(q) \rightarrow m \text{ cuando } t_n \rightarrow \infty\}.$$

$$\alpha(q) = \{m \in M | \exists \{t_n\} \rightarrow -\infty \text{ tal que } g_{t_n}(q) \rightarrow m \text{ cuando } t_n \rightarrow -\infty\}.$$

Si $\Gamma = o(q_0)$ para alguna $q_0 \in M$, entonces $\omega(q) = \omega(q_0)$ ($\alpha(q) = \alpha(q_0)$) para toda $q \in \Gamma$, por lo que el ω -límite (α -límite) de q_0 esta asociado a toda su órbita y no solo a él mismo, por lo que se escribirá $\omega(\Gamma) = \omega(q_0)$ ($\alpha(\Gamma) = \alpha(q_0)$).

Se desea aplicar la teoría de sistemas dinámicos C^∞ a campos meromorfos. La única dificultad que se presenta es la existencia de polos. La siguiente proposición resuelve este problema.

Proposición 2.2.1: Sea $s : X \rightarrow TX$ un campo meromorfo. Existe una función C^∞ , $\lambda : X \rightarrow R$ tal que:

(i) $\lambda(x) \geq 0$ para $x \in X$.

(ii) $\lambda(x) = 0$ si y solo si x es un polo de s .

(iii) $\lambda s : X \rightarrow TX$ definido como:

$$\lambda s(x) = \begin{cases} \lambda(x)s(x), & \text{si } x \text{ no es polo de } s; \\ 0, & \text{si } x \text{ es polo de } s. \end{cases}$$

es un campo C^∞ en X .

Demostración:

Sean $x_1, \dots, x_k$ los polos de s de orden $n_1, \dots, n_k$ respectivamente y $\{\Phi_i : U_i \rightarrow \Phi_i(U_i)\}_{i=1}^k$ cartas complejas tales que:

$$\begin{aligned} \Phi_i(x_i) &= 0, s_{\Phi_i}(z) = z^{-n_i} \\ y U_i \cap U_j &= \emptyset \text{ si } i \neq j \end{aligned}$$

Sea V_i un conjunto abierto en X tal que $x_i \in V_i$ y $\bar{V}_i \subset U_i$. Se define el conjunto U_0 como:

$$U_0 = M - (\bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_k).$$

Por construcción se tiene que la familia

$$F = \{U_0, \dots, U_k\}$$

es una cubierta abierta de X .

Sea $\{\mu_i : X \rightarrow [0,1]\}_{i=1}^k$ una partición de la unidad asociada a la cubierta F . Se define a λ como:

$$\lambda(x) = \mu_0(x) + \sum_{i=1}^k |\Phi_i(x)|^{2n_i} \mu_i(x).$$

Recuérdese que:

$$(a) \sum_{i=0}^k \mu_i(x) = 1 \text{ para toda } x \in X$$

$$(b) \text{supp}(\mu_i) \subset U_i \text{ (supp}(\mu_i) = \overline{\{x \in X | \mu_i(x) \neq 0\}}).$$

De (a) y del hecho de que $|\Phi_i(x)| > 0$ si $x \neq x_i$ se sigue que $\lambda(x) > 0$ si $x \neq x_i$.

Es claro que λs es C^∞ en $M - \{x_1, \dots, x_k\}$. Solo falta verificar que λs es C^∞ en $\{x_1, \dots, x_k\}$. Para ver esto último se utiliza (b), de donde se obtiene:

$$\lambda s_{\Phi_i}(z) = |z|^{2n_i} z^{-n_i} = \bar{z}^{n_i},$$

que es claramente una función C^∞ . ■

De ahora en adelante se denotará al campo λs por s_R (esto es, el campo s regularizado).

Los campos s y s_R definen las mismas foliaciones sobre $X - \text{Sing}(s)$ y de hecho la foliación definida por s_R tiene una orientación compatible con la de s en $X - \text{Sing}(s)$, pues λ es positiva en este conjunto.

En cuanto a las singularidades, los ceros simples de s permanecen como ceros simples en s_R , y los polos de s se convierten en ceros de s_R (de hecho los polos simples se convierten en sillas hiperbólicas).

En el caso en que $\omega(x) = x_0$, donde x_0 es un cero en s_R correspondiente a un polo de s , la órbita de x llega a x_0 en un tiempo infinito y lo que sucede en el campo s es que la órbita de x llega a este punto en un tiempo finito.

Entonces, cuando X es una superficie de Riemann compacta, lo único que impide la existencia del flujo global de un campo meromorfo son las separatrices de sus polos, las cuales se presentan en un número finito. Utilizando s_t se puede definir la órbita de un punto en X de un campo meromorfo entendiendo que ésta tal vez solo se pueda extender un tiempo finito.

El siguiente teorema da información global acerca de la dinámica inducida por un campo C^r ($r \geq 1$) en la esfera.

Teorema 3.1.2: (Poincaré-Bendixon) Sea $g : S^2 \rightarrow TS^2$ un campo C^r ($r \geq 1$) en la esfera con un número finito de singularidades. Dado un punto $p \in S^2$ ocurre una de la siguientes posibilidades:

- (i) $\omega(p)$ es un punto de equilibrio.
- (ii) $\omega(p)$ es una órbita cerrada.
- (iii) $\omega(p)$ está constituido por ceros $p_1, \dots, p_k$ y órbitas regulares tales que si $\gamma \subset \omega(p)$ es una órbita regular entonces $\alpha(\gamma) = p_i$ y $\omega(\gamma) = p_j$.

Para la demostración de este teorema vease [Pa] pgs. 18-20.

Nota- El teorema anterior se aplica de igual forma a α -límites.

La proposición 3.1.1 permite aplicar el teorema de Poincaré-Bendixon a campos meromorfos en la esfera.

Teorema 3.1.3: Sea s un campo meromorfo en S^2 . Si $x \in X$ se presentan los siguientes casos para el campo s_R :

- (i) $\omega(x)$ es un cero de s_R .
- (ii) $\omega(x)$ es una órbita cerrada y en este caso $\omega(x) = \omega(x)$.

Demostración:

Se puede aplicar el teorema 3.1.2 a s_R , pues este campo es C^∞ en S^2 .

Entonces, para demostrar el teorema basta con eliminar los casos (ii) y (iii) del teorema 3.1.2 en el caso en que la órbita de x es regular.

Dada una órbita cerrada Γ de s_R , existe una vecindad V de Γ tal que cualquier órbita de s_R que intersecte a V es cerrada. Esto último se obtiene a partir de la proposición 2.2.2 y de el hecho de que s y s_R definen las mismas foliaciones en $X - \text{Sing}(s)$.

Lo anterior impide que alguna órbita regular de s_R tenga como ω -límite a Γ , con lo cual se ha eliminado el caso (ii) del teorema cuando la órbita de x es regular.

Ahora, supóngase que x tiene como ω -límite una gráfica G (esto es, el caso (iii) de la proposición 2.2.2). Los ceros de s_R en G tienen que corresponder a polos de s , pues en caso contrario G contendría un pozo x_0 , lo cual implicaría que $G = \{x_0\}$. Pero G es una gráfica, por lo cual tiene que contener órbitas

regulares.

Sean P y S el conjunto de polos y de órbitas regulares (respectivamente) que forman a G . Del teorema 3.1.2 se sigue que si $\Gamma_0 \in S$ entonces $x_0 = \alpha(\Gamma_0)$ y $x_1 = \omega(\Gamma_0)$ están en P , por lo que Γ_0 es separatriz de ambos puntos.

La órbita $o(x)$ se acerca a Γ_0 ya sea por el lado en el cual apunta el campo normal *is* sobre Γ_0 o sobre el lado opuesto.

Supóngase (sin pérdida de generalidad) que se acerca por el lado en el cual apunta *is*.

Como $o(x)$ se aproxima a x_1 por este lado, entonces la separatriz Γ_1 en x_1 que es adyacente a Γ_0 en el sentido contrario de las manecillas del reloj, también está en S .

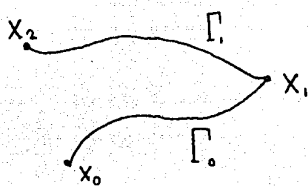


Figura 11

Entonces $\alpha(\Gamma_1) = x_1$ y se define $x_2 = \omega(\Gamma_1) \in P$.

Se puede continuar este proceso construyendo Γ_i a partir de Γ_{i-1} en la misma forma que se construyó Γ_1 a partir de Γ_0 , y definiendo $x_{i+1} = \omega(\Gamma_i)$ (por construcción $x_i = \alpha(\Gamma_i)$).

Como S es un conjunto finito, debe de existir $n \geq 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{n+1} &\in \{\Gamma_0, \dots, \Gamma_n\} \\ \Gamma_i &\neq \Gamma_j \text{ si } i \neq j, 0 \leq i, j \leq n, \end{aligned} \tag{1}$$

y es sencillo darse cuenta que $\Gamma_{n+1} = \Gamma_0$.

Las siguientes figuras muestran algunas de las posibilidades para G .

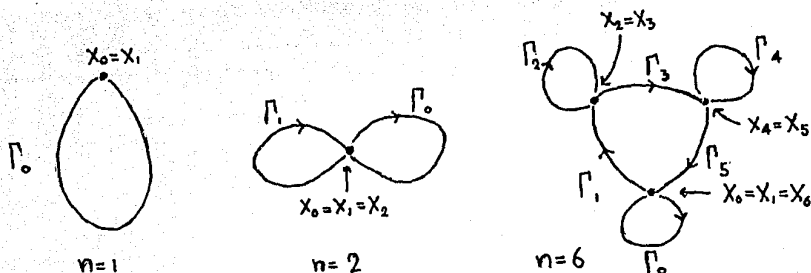


Figura 12

Obsérvese que los puntos $x_0, \dots, x_n$ no son necesariamente distintos y que $x_n = x_0$ (pues $\Gamma_{n+1} = \Gamma_0$).

Utilizando los modelos locales que se tienen para los polos y el hecho de que $[s, is](x) = 0$ para $X - \text{Sing}(s)$, es sencillo darse cuenta que por el lado de G en el cual se supone se enredaría la órbita de x se tiene una familia de órbitas cerradas pues la distancia (en la métrica Riemanniana) de una órbita a la gráfica permanece constante, lo cual impide que x tenga como ω -límite (α -límite) a G , figura 13.

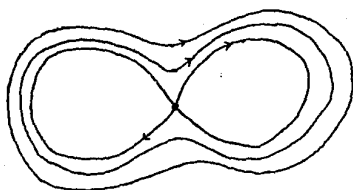


Figura 13

Corolario: Sea s un campo meromorfo en S^2 y $x \in S^2$. Se presentan los siguientes casos:

- (i) $\omega(x)$ es un cero de s .
- (ii) La órbita de $x \in S^2$ llega a un polo de s en un tiempo finito.
- (iii) $o(x)$ es una órbita cerrada.

Se termina esta sección con algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Campos holomorfos en la esfera

Como se hizo ver al final de la sección 2.1, los campos holomorfos en S^2 están dados por:

$$s(z) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) \frac{\partial}{\partial x} = a_2 (z - r_1)(z - r_2) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Estos campos tienen como únicas singularidades a los ceros r_1, r_2 .

Cuando $r_1 \neq r_2$ el espacio $(S^2 - \{r_1, r_2\}, <, >^s)$ es isométrico al cilindro $S^1_r \times (-\infty, \infty)$, donde $r = \frac{1}{|s'(r_1)|}$. Las geodésicas en este espacio son espirales y círculos,

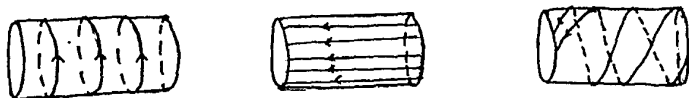


Figura 14

de lo cual se sigue que la dinámica inducida por s en S^2 es alguna de las que se muestran en la figura 15.

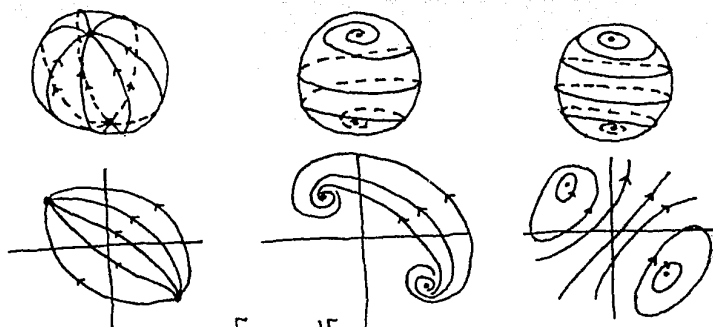


Figura 15

Cuando $r_1 = r_2$ se obtiene un caso degenerado de lo anterior y el dibujo correspondiente se muestra en la figura 16.

Se colapsan los
ceros en un cero doble

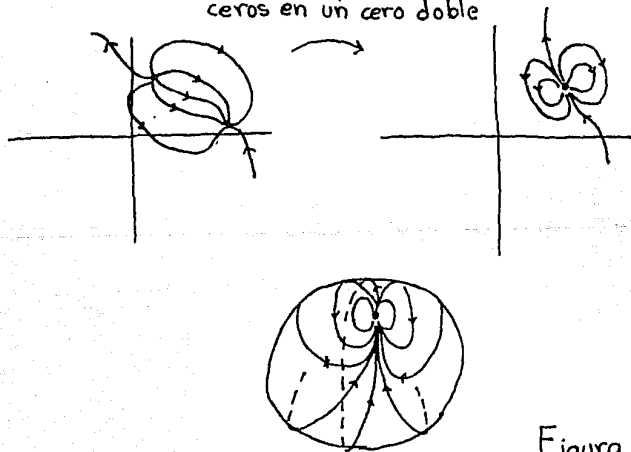


Figura 16

Ejemplo 2: Si $s(z) = (az^3 + bz^2 + cz + d) \frac{\partial}{\partial z} = a(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3) \frac{\partial}{\partial z}$, entonces $\infty \in S^2$ es un polo de orden 1 de s . Utilizando el corolario de la proposición 3.1.3 es sencillo ver que la dinámica inducida por s en S^2 tiene que corresponder a alguna de las que se muestran en la figura 17 o su dual (esto es, se invierten la orientaciones de las flechas mostradas).

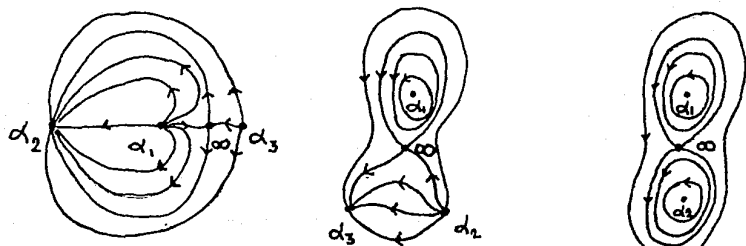
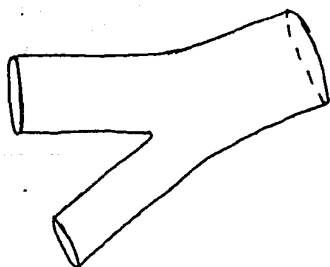
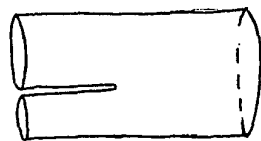


Figura 17

Los espacios $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ asociados a estas dinámicas se muestran en la figura 18.



(a) ó (b)



(c)

Figura 18

3.2 BIFURCACIONES DE $\{e^{i\theta}s|\theta \in S^1\}$

Se dice que dos campos meromorfos s_1, s_2 en una superficie de Riemann son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow X$ que envía las órbitas de s_1 en órbitas de s_2 preservando la orientación de éstas y tal que los ceros y polos de s_1 se corresponden con los de s_2 mediante h .

Si s es un campo meromorfo en una superficie de Riemann X y $\{e^{i\theta}s|\theta \in S^1\}$ es la familia de campos rotados asociada a s , se dice que $\{e^{i\theta}s|\theta \in S^1\}$ es *estructuralmente estable* en θ_0 si existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\theta \in (\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon)$, escribiendo $S^1 = \mathbb{R}(\text{mod } 2\pi)$, el campo $e^{i\theta}s$ es topológicamente equivalente a $e^{i\theta_0}s$.

Definición: Sea s un campo meromorfo en X . Un punto $\theta_0 \in S^1$ donde $\{e^{i\theta}s|\theta \in S^1\}$ no es estructuralmente estable se llama *valor de bifurcación* de la familia $\{e^{i\theta}s|\theta \in S^1\}$.

Como se mencionó al principio del capítulo, se desea demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1: Si s es un campo meromorfo en S^2 , el conjunto de valores de bifurcación de la familia $\{e^{i\theta}s|\theta \in S^1\}$ de campos rotados es un conjunto con a lo más un número finito de puntos de acumulación.

Se demostrará este teorema mediante la serie de proposiciones que siguen a este parrafo.

Si Γ es una órbita cerrada de algún elemento $e^{i\theta_0}s$ en $\{e^{i\theta}s|\theta \in S^1\}$ entonces, como se vió anteriormente, se puede trasladar esta órbita mediante $(ie^{i\theta_0}s)_u$ creando de esta forma un anillo de órbitas cerradas.

Se tienen dos casos:

(i) Existen por lo menos dos puntos x_0, x_1 (no necesariamente distintos) en Γ tales que $(ie^{i\theta_0}s)_{t_0}(x_0) = p_0$ y $(ie^{i\theta_0}s)_{t_1}(x_1) = p_1$, donde $t_0 > 0$, $t_1 < 0$ y p_1, p_2 son polos de $e^{i\theta_0}s$.

(ii) No se presenta el caso (i).

El caso (i) dice que solo se puede trasladar a Γ mediante $(ie^{i\theta}s)_u$ un tiempo finito ya sea tanto hacia adelante como hacia atrás, pues los polos nos impiden seguir trasladando sin tocar las singularidades.

En este caso, se tiene que la región que genera Γ en $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ es isométrica a un cilindro plano de la forma $S_r^1 \times (0, L)$ tal que en ambos extremos hay polos de $e^{i\theta_0}s$, figura 19.

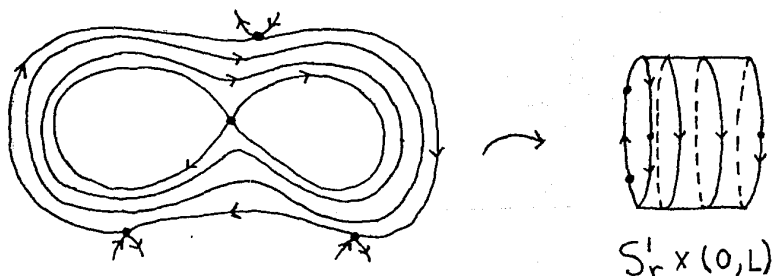


Figura 19

En el caso (ii), existe un lado de Γ tal que todas las órbitas de $ie^{i\theta_0}s$ que salen de Γ (ya sea variando el tiempo hacia adelante o hacia atrás) hacia este lado no se topan con ningún polo, por lo que según el corolario de la proposición 3.1.2 estas órbitas tienen que terminar en ceros de s .

De hecho, todas las órbitas tienen que ir a un mismo cero x_0 de s , pues si fueran a dos ceros distintos es fácil ver que alguna de estas órbitas tendría que ir a un polo, contradiciendo la hipótesis. En este caso se obtiene una región isométrica a $S^1_r \times (0, \infty)$ asociada al cero x_0 , figura 20.

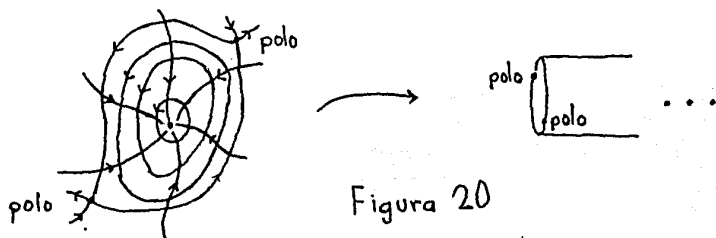


Figura 20

Si se quiere seguir trasladando a Γ hacia el otro lado, inevitablemente se encontrarán polos, salvo en el caso en que el espacio $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ sea un cilindro de la forma $S^1_r \times (-\infty, \infty)$, pero esto último corresponde al caso de un campo meromorfo en S^2 cuyas únicas singularidades son ceros (esto es, a un campo holomorfo), y este caso ya ha sido completamente comprendido.

De ahora en adelante, para evitar el caso particular de campos holomorfos en S^2 , siempre que se hable de un campo meromorfo s en S^2 , supondremos que este tiene polos. Es fácil ver que para campos holomorfos en la esfera el teorema 3.2.1 es verdadero.

Se ha visto que aparecen dos tipos de regiones isométricas a cilindros en $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$:

(i) Cilindros de la forma $S^1_r \times (0, L)$ con polos en ambos extremos, figura

19.

(ii) Cilindros de la forma $S_r^1 \times (0, \infty)$ con polos en un extremo solamente, figura 20.

A partir de este momento habrá mas rigor en la terminología y a las regiones del tipo (i) se les llamará *anillos* para distinguirlas de las del tipo (ii) a las cuales se les llamará *cilindros*.

Para hacer una distinción más, al conjunto de órbitas cerradas que genera un anillo en $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ para un campo fijo $e^{i\theta_0}s \in \{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ se le llamará *anillo de órbitas cerradas* de $e^{i\theta_0}s$, y al conjunto que genera un cilindro: *cilindro de órbitas cerradas* del campo fijo correspondiente.

Un anillo en $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ es una estructura fija asociada a toda la familia $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$, mientras que un anillo de órbitas cerradas es una manifestación de la existencia del anillo en $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ sobre un elemento fijo $e^{i\theta_0}s \in \{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$. Para detectar la existencia de un anillo en $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ basta con encontrar un campo $e^{i\theta_0}s \in \{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ que tenga un anillo de órbitas cerradas. Todas estas observaciones se repiten para el caso de cilindros.

Finalmente, es importante hacer notar que tanto los anillos como los cilindros de órbitas cerradas inducen conexiones entre los polos que están en sus fronteras, esto es, existen órbitas de $e^{i\theta_0}s$ que unen un polo en un extremo del anillo de órbitas cerradas (cilindro de órbitas cerradas) con algún otro polo en el mismo extremo.

Es claro que $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ tiene un número finito de cilindros pues s tiene un número finito de ceros. La siguiente proposición proporciona un resultado análogo para anillos.

Proposición 3.2.2: Sea s un campo meromorfo en S^2 . El espacio $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ tiene un número finito de anillos.

Demostración: Antes que nada, hay que hacer notar que dado un ángulo fijo $\theta_0 \in S^1$ la foliación que induce el campo $e^{i\theta_0}s$ en S^2 tiene a lo más un número finito de anillos de órbitas cerradas, pues estos anillos de órbitas cerradas no se pueden traslapar y el campo $e^{i\theta_0}s$ tiene únicamente un número finito de polos (recuérdese la observación hecha anteriormente de que un anillo de órbitas cerradas siempre contiene polos en su frontera). Sin embargo, de aquí no se sigue que $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ tenga un número finito de anillos, pues podrían aparecer anillos de órbitas cerradas en $e^{i\theta}s$ para ángulos $\theta \in S^1$ distintos de θ_0 , lo cual induciría la existencia de un nuevo anillo en $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$. Hecha esta aclaración, se inicia la demostración de la proposición.

Si $\theta_1, \theta_2 \in S^1$ son tales que $e^{i\theta_1}s$ y $e^{i\theta_2}s$ tienen anillos de órbitas cerradas A_1 y A_2 , entonces $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. En el caso en que $\theta_1 = \theta_2$ esta afirmación se sigue del hecho de que dos órbitas distintas de un campo no se pueden intersectar. Cuando $\theta_1 \neq \theta_2$ la afirmación se sigue del hecho que para $x \in \Gamma$, donde Γ es cualquier órbita cerrada de A_1 , el vector $e^{i\theta_2}s(x)$ apunta hacia uno de los dos lados en que Γ divide a S^2 (teorema de la curva de Jordan), por lo que si una órbita Γ_2 de A_2 intersectara a una órbita cerrada Γ_1 de A_1 entonces Γ_1 no podría ser cerrada contradiciendo la hipótesis de que A_2 consta de órbitas cerradas.

Entonces, el conjunto $\{\theta \in S^1 | e^{i\theta}s \text{ tiene un anillo de órbitas cerradas}\}$ es finito. Debido a la anterior afirmación y debido a que los anillos de órbitas cerradas tienen que tener polos de s en la frontera, los cuales solo se presentan en un número finito.

De los comentarios anteriores, es claro que esta última afirmación concluye la prueba de la proposición. ■

Ejemplo: Sean $z_1, z_2, z_3 \in \{z \in C | \text{Im}(z) > 0\}$ tres puntos distintos. Considérese el campo:

$$s(z) = \frac{(z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2)}{(z - z_3)(z - \bar{z}_3)} \frac{\partial}{\partial z}$$

El infinito en S^2 es un punto regular de este campo, pues la suma de los índices de $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3$ y $\bar{z}_3$ es igual a 2, que es la característica de Euler de la esfera.

De la forma de s se sigue que $s(x) \in R - \{0\}$ para toda $x \in R$, por lo que $R \cup \{\infty\} \subset S^2$ es una órbita cerrada de s .

La manera en que están distribuidos los ceros de s con respecto a $R \cup \{\infty\}$ hace imposible que $R \cup \{\infty\}$ sea parte de un cilindro de órbitas cerradas, por lo que tiene que ser parte de un anillo de órbitas cerradas.

Las derivadas de s en sus ceros tienen que tener parte real distinta de cero, pues (como el lector puede verificar fácilmente) las separatrices de los polos que no forman parte de la frontera del anillo generado por $R \cup \{\infty\}$ tienen como ω -límite (α -límite) a estos ceros.

La dinámica que induce s en S^2 y el espacio $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ se muestran en la figura 21.

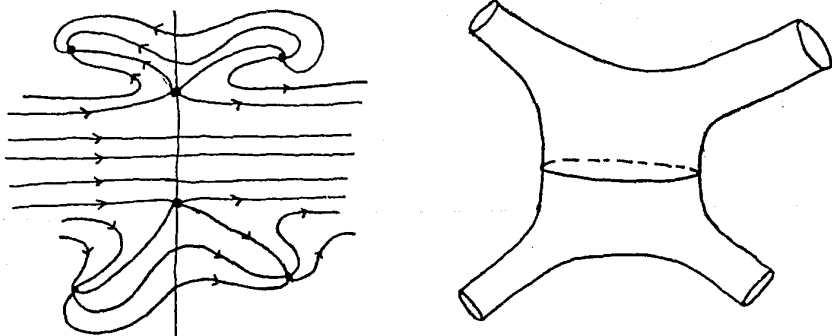


Figura 21

Definición: Se dice que un campo meromorfo s en X tiene *conexión entre polos* si s tiene por lo menos una órbita que conecte a un par de sus polos.

La siguiente proposición da una condición suficiente para que un punto $\theta_0 \in S^1$ sea un punto en el cual la familia $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ es estructuralmente estable.

Proposición 3.2.3: La familia de campos $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ es estructuralmente estable en $\theta_0 \in S^1$ si el campo $e^{i\theta_0}s$ no tiene conexión entre polos.

Demostración:

Utilizando la hipótesis de que no hay conexión entre polos en $e^{i\theta_0}s$ y el corolario de la proposición 3.1.3 tenemos que todas las órbitas que salen de los polos (ya sea hacia adelante o hacia atrás) tienen como ω -límite (α -límite) algún cero de $e^{i\theta_0}s$.

Es claro también que si x_0 es un cero de $e^{i\theta_0}s$ entonces $(e^{i\theta_0}s)'(x_0)$ es un complejo con parte real distinta de cero, pues en caso contrario este cero generaría un cilindro de órbitas cerradas el cual induciría una conexión de polos en su frontera (observese que se está siguiendo la convención establecida anteriormente de que s no es un campo holomorfo).

Sea x_0 un cero de $e^{i\theta_0}s$ y b una alguna separatriz que conecte a x_0 con un polo.

Si se traslada a b mediante $(ie^{i\theta_0}s)_u$ con $|u| < \delta$ para una δ adecuada, se obtiene una banda B de ancho 2δ (con b_i como línea central) que se enreda alrededor del cilindro generado por x_0 , figura 21.

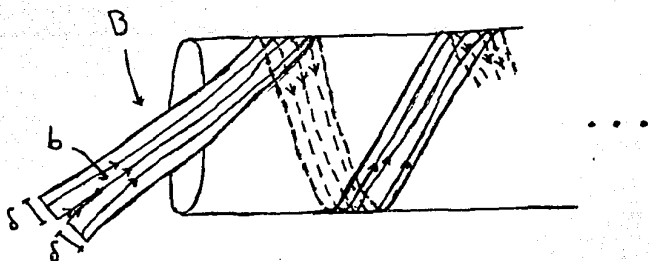


Figura 22

Existe una longitud L (un tiempo en términos de $(e^{i\theta_0}s)_t$) a partir del cual se puede asegurar que la banda B está contenida en el anillo generado por x_0 , figura 23.

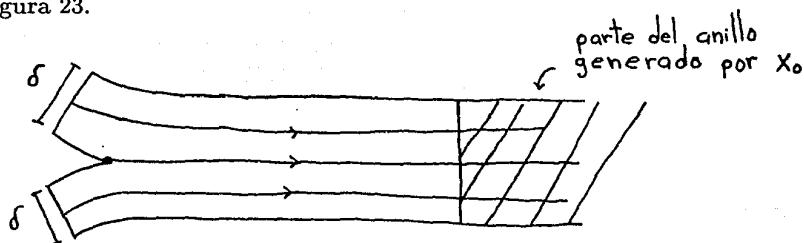


Figura 23

Entonces, si se rota el campo $e^{i\theta_0}s$ un ángulo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ tal que $|\tan \theta| < \frac{\delta}{L}$ se tiene que la separatriz en $e^{i(\theta_0+\theta)s}$ correspondiente a b sigue estando dentro del cilindro asociado a x_0 .

Este argumento se puede aplicar a cada separatriz de $e^{i\theta_0}s$, de donde se sigue que existe $\epsilon > 0$ tal que si $|\theta| < \epsilon$ entonces $e^{i(\theta_0+\theta)s}$ es indistinguible de $e^{i\theta_0}s$ en cuanto a la conexión de los polos con los ceros.

Obsérvese que para esta $\epsilon > 0$ el orden en que llegan las separatrices de los polos a los ceros también se preserva.

Todo ésto es suficiente para asegurar la equivalencia topológica entre $e^{i(\theta_0+\theta)s}$ ($|\theta| < \epsilon$) y $e^{i\theta_0}s$ como se demostrará a continuación:

Sea x_1 un cero de $e^{i\theta_0}s$ (el cual podemos suponer que es una fuente sin pérdida de generalidad), b_1 una separatriz que va de un polo p_1 en x_1 , c_1 la separatriz que es adyacente a b_1 en el sentido contrario a las manecillas del reloj y x_2 el cero al cual llega esta separatriz.

Se pueden trasladar las órbitas b_1 y c_1 por medio de $(ie^{i\theta_0}s)_u$ hasta llegar a un tope dado por un polo p_2 . En este tope se genera una conexión entre x_1, p_2 y x_2 mediante órbitas regulares b_2 y c_2 (en ese orden). Hay que hacer notar que p_1 y p_2 pueden ser iguales, figura 24.

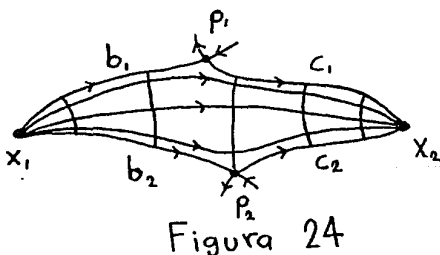


Figura 24

En cualquiera de los casos, quitando a los puntos p_1 y p_2 , se tiene que la región que se acaba de construir es isométrica a una banda de la forma $B = [0, L] \times (-\infty, \infty) - \{(L, q_1), (0, q_2)\}$ donde los puntos $(L, q_1), (0, q_2)$ corresponden a los polos p_1 y p_2 .

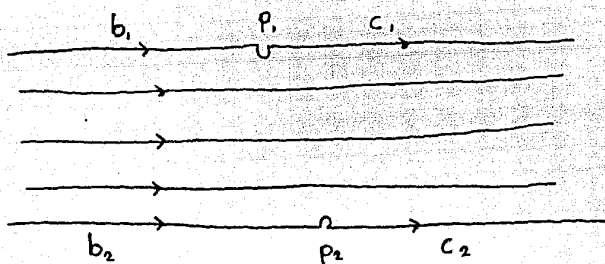


Figura 25

Las órbitas de $e^{i\theta_0}s$ en el interior de esta región corresponden a las rectas $\{r\} \times (-\infty, \infty)$ con $r \in (0, L)$. Las semirectas $\{L\} \times (-\infty, q_1)$, $\{L\} \times (q_1, \infty)$, $\{0\} \times (-\infty, q_2)$ y $\{0\} \times (q_2, \infty)$ corresponden a las separatrices b_1, c_1, b_2 y c_2 respectivamente.

Como todas la separatrices de todos los polos van a ceros, al aplicar este proceso globalmente se obtiene a $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ como espacio de identificación que se construye al identificar a lo largo de sus fronteras un número finito de bandas del tipo que se menciona arriba. En este espacio la foliación correspondiente a $e^{i\theta_0}s$ se construye mediante las rectas horizontales de estas bandas.

Es claro que la forma de pegar estas bandas depende únicamente de la estructura topológica de las conexiones de los polos de $e^{i\theta_0}s$ con sus ceros. Pero se ha visto que existe $\epsilon > 0$ tal que estas conexiones son indistinguibles (topológicamente) de las de $e^{i(\theta_0+\theta)}s$ con $|\theta| < \epsilon$. De este hecho y de la construcción anterior se sigue que $e^{i\theta_0}s$ y $e^{i(\theta_0+\theta)}s$ son topológicamente equivalentes. ■

Las siguientes dos proposiciones hacen ver que la proposición 3.2.3 no solo da condiciones suficientes para la estabilidad estructural de un punto $\theta \in S^1$ sino también condiciones necesarias, además de que hace ver la naturaleza de las bifurcaciones de la familia $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$.

Proposición 3.2.4: Sea s un campo meromorfo en S^2 y $\theta_0 \in S^1$ tal que $e^{i\theta_0}s$ tiene conexión entre sillas y no tiene anillos de órbitas cerradas, entonces $\theta_0 \in S^1$ es un valor de bifurcación aislado de la familia $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$.

Demostración:

Sea $p \in S^2$ un polo de s , b una separatriz de $\dot{p}$ y H_1, H_2 los sectores hiperbólicos en p que son separados por b , ordenados en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Como por hipótesis $e^{i\theta_0}s$ no tiene anillos de órbitas cerradas, se presentan los siguientes casos:

- (i) H_1 forma parte de un cilindro de órbitas cerradas generado por un cero $x_0 \in C$.
- (ii) No se cumple (i).

El caso (i) se muestra en la figura 26.

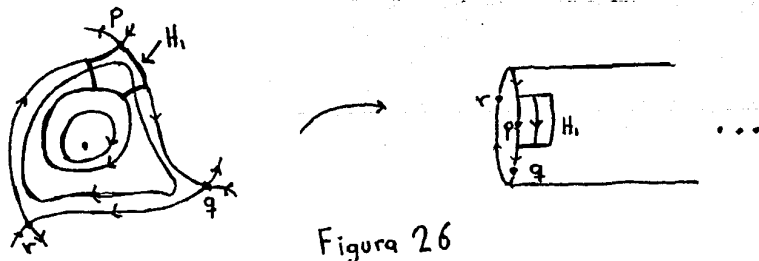


Figura 26

En este caso resulta evidente que existe $\epsilon > 0$ tal que al rotar el campo $e^{i\theta}s$ un ángulo $\theta \in (-\epsilon, \epsilon)$ la separatriz b ya no se conecta con el polo q

mostrado en la figura 26. Lo que sucede es que tal separatriz se conecta con x_0 , esto es, se ha roto la conexión entre los polos p y q , figura 27.

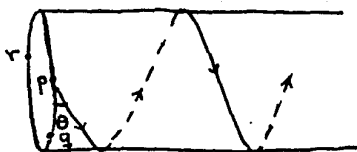


Figura 27

En el caso (ii), si se sigue a las conexiones de p con otros polos del mismo lado que H_1 (si es que estas conexiones existen), entonces mediante estas conexiones no se puede regresar a p pues una conexión de esta forma generaría o bien un cilindro de órbitas cerradas o un anillo de órbitas cerradas, pero por las hipótesis esto no ocurre. Por lo tanto, tales conexiones tienen que acabar en un cero x_1 de $e^{i\theta_0}s$, figura 28(a). El dibujo correspondiente a esta situación en $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ se muestra en la figura 28(b).

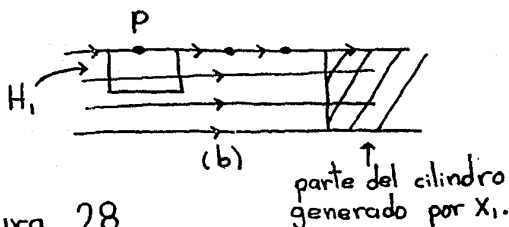
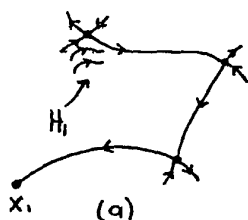


Figura 28

De nuevo, resulta que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que si rotamos $e^{i\theta_0}s$ un ángulo $\theta \in (-\epsilon, \epsilon)$ las separatriz b se dirige hacia el cero x_1 rompiéndose de esta forma la conexión entre polos, figura 29.

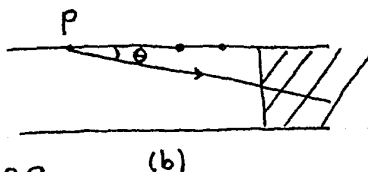
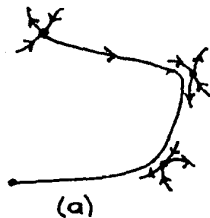


Figura 29

Como se ha visto, el caso en que la separatriz b no se conecta con un polo y va directamente a un cero, esta conexión se preserva para ángulos cercanos a θ_0 . Para encontrar $\epsilon_2 > 0$ tal que los casos anteriores se cumplan para $(\theta_0 - \epsilon_2, \theta_0]$ simplemente aplíquense los razonamientos anteriores a H_2 .

De todo esto se concluye que existe $\epsilon > 0$ tal que si $\theta \in (\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon) - \{\theta_0\}$ entonces $e^{i\theta}s$ no tiene conexión entre polos, y utilizando la proposición 3.2.3 se concluye que θ_0 es un valor de bifurcación aislado de $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$. ■

Proposición 3.2.5: Sea $\theta_0 \in S^1$ tal que $e^{i\theta_0}s$ tiene por lo menos un anillo de órbitas cerradas. Si B es el conjunto de valores de bifurcación de $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$, entonces θ_0 es un punto de acumulación de B .

Demostración:

Sea A un anillo de órbitas cerradas de $e^{i\theta_0}s$ y p un polo de este campo en la frontera de A , figura 30.

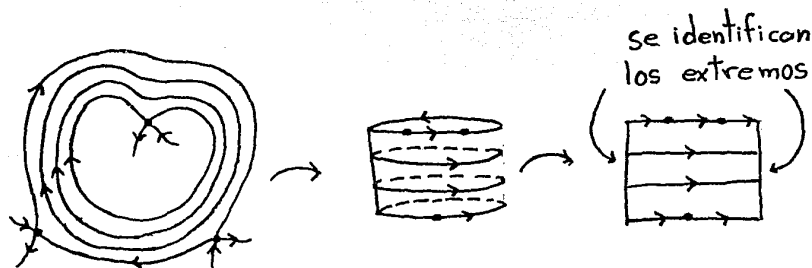


Figura 30

Piénsese al anillo $(A, <, >^s)$ como una banda plana de la forma $[0, L] \times (0, a)$ (esto es, L es el largo de la banda y a su ancho) identificando los extremos $\{0\} \times (0, a), \{L\} \times (0, a)$ mediante $(0, x) \rightarrow (L, x)$ para toda $x \in (0, a)$.

Sea $(x_p, 0) \in [0, L] \times (0, a)$ el punto correspondiente al polo p en esta banda, y si $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + \frac{\pi}{2})$ entonces denótese por b_θ a la separatriz que sale de p en el campo $e^{i\theta}s$ de tal forma que b_{θ_0} es la separatriz que sale de p en el campo $e^{i\theta_0}s$, figura 31.

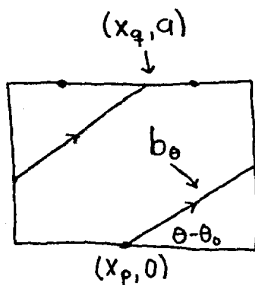


Figura 31

En $[0, L] \times (0, a) \pmod{(0, x) \sim (L, x)}$ la órbita correspondiente a b_θ es una recta que sale de $(x_p, 0)$ formando un ángulo $\theta - \theta_0$ con $[0, L] \times \{0\}$. Esta recta sale de este cilindro por el punto $x_p + a \cot(\theta - \theta_0) \pmod{L}$.

De la proposición 3.2.2 se sabe que existe $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$ tal que si $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + \epsilon)$ entonces $e^{i\theta}s$ no tiene anillos de órbitas cerradas.

Conforme θ tiende a θ_0 por arriba, la función $a \cot(\theta - \theta_0)$ tiende a infinito, de lo que se concluye que si

$$I_x = \{\theta \in (\theta_0, \theta_0 + \epsilon) \mid b_\theta \text{ sale de la banda por el punto } (x, a)\},$$

entonces I_x es un conjunto infinito que tiene a $\theta_0 \in \mathbb{R}$ como único punto de acumulación.

Sea (x_q, a) un punto en $[0, L] \times (0, a) \pmod{(0, x) \sim (L, x)}$ que corresponde a un polo de $e^{i\theta_0}s$ (un punto tal tiene que existir para que sea posible la existencia de $\mathcal{A}$).

Obsérvese que:

$$I_{x_q} \subset C_{pq} = \{\theta \in (\theta_0, \theta_0 + \epsilon) | b_\theta \text{ conecta a } p \text{ con } q\}.$$

En este caso se está considerando la órbita completa b_θ en S^2 . Si $\theta \in I_{x_q}$ entonces b_θ conecta a p con q , pero como para este ángulo $e^{i\theta}s$ no tiene anillos de órbitas cerradas, entonces de la proposición anterior se tiene que existe una vecindad V de θ en S^1 en la cual $b_{\theta'}$ no conecta a p con q si $\theta' \in V - \{\theta\}$.

De todo esto se sigue que C_{pq} es un conjunto de puntos aislados que tiene a θ_0 como único punto de acumulación. Con esto termina la demostración. ■

Demostración del teorema 3.2.1:

No queda gran cosa por demostrar, el trabajo necesario se ha distribuido en las proposiciones anteriores.

La proposición 3.2.3 dice que si se han de encontrar bifurcaciones de $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ habrá que buscarlas en

$$B = \{\theta \in S^1 | e^{i\theta}s \text{ tiene conexión entre polos}\}.$$

Este conjunto se puede dividir en dos conjuntos disjuntos B_1 y B_2 definidos por:

- (i) $\theta \in B_1$ si y solo si $\theta \in B$ y $e^{i\theta}s$ no tiene anillos de órbitas cerradas.
- (ii) $\theta \in B_2$ si y solo si $\theta \in B$ y $e^{i\theta}s$ tiene anillos de órbitas cerradas.

Dado $\theta \in B_1$ la proposición 3.2.4 dice que θ es un valor de bifurcación

aislado, y si $\theta \in B_2$ la proposición 3.2.5 dice que θ es un valor de bifurcación que es punto de acumulación de B .

De la proposición 3.2.2 se concluye que B_2 es un conjunto finito, por lo que el conjunto de valores de bifurcación $B = B_1 \cup B_2$ de $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ es un conjunto con a lo más un número finito de puntos de acumulación y de hecho estos puntos son tales que el campo en este ángulo tiene por lo menos un anillo de órbitas cerradas. ■

Obsérvese que si $\theta \in S^1$ es un punto de acumulación del conjunto de bifurcaciones B , entonces su antípoda $\theta + \pi$ también lo es. Esto último resulta del hecho trivial de que si $e^{i\theta}s$ tiene un anillo de órbitas cerradas entonces $-e^{i\theta}s = e^{i(\theta+\pi)}s$ también lo tiene.

Corolario 1: Si s es un campo meromorfo en S^2 tal que $(S^2 - \text{Sing}(s), <, >^s)$ no tiene anillos, entonces el conjunto de valores de bifurcación de $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ es finito.

Demostración:

El conjunto B_2 de la demostración anterior es un conjunto vacío, por lo que el conjunto de valores de bifurcación es un conjunto cerrado de puntos aislados en el compacto S^1 , por lo que tal conjunto tiene que ser finito. ■

Corolario 2: Si s es un campo polinomial en S^2 , esto es, $s(z) = (a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n) \frac{\partial}{\partial x}$, el conjunto de valores de bifurcación de $\{e^{i\theta}s | \theta \in S^1\}$ es un conjunto finito.

Demostración:

El campo s tiene a lo más un polo en ∞ , pero un campo con un solo polo no puede tener anillos de órbitas cerradas. ■

Bibliografia:

[Ar] Arnold V.I. - Ordinary Differential Equations, Cambridge, MIT Press, 1973.

[Fo] Forster, Otto - Lectures on Riemann Surfaces, New York, Springer Verlag, 1981.

[Pa] Palis, Jacob and W. de Melo - Geometric Theory of Dynamical Systems, New York, Springer Verlag, 1982.

[Sp] Spivak, Michael - A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol I, Boston, Publish or Perish, 1970.