UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIAS DE RED PARA LA GRAVITACION TOPOLOGICA

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

p r e s e n t a

JOSE ANTONIO ZAPATA RAMIREZ

México, D. F. 1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Contenido

Capítulo 1

Introducción

Muchos de los esfuerzos dirigidos a conseguir una teoría para la gravitación cuántica se encuentran dentro de programas que comienzan atacando problemas menos complicados.Un ejemplo es el siguiente. Las ecuaciones de Einstein aplicadas a un universo tridimensional imponen que la curvatura se anule donde no haya materia (más exactamente donde $T = 0$). Esto significa que el universo no tiene grados de libertad locales y que por lo tanto puede ser descrito por una teoría discreta. La cuantización de teorías discretas no tiene muchas de las complicaciones que tiene cuantizar una teoría de campos, además las teorías discretas se prestan para hacer cálculos numéricos.

El director de esta tesis, Henri Waelbroeck, formuló una teoría de red covariante que describe la gravitación en 2+1 dimensiones, la teoría tiene la gran ventaja de que las simetrías de norma se conocen y tienen expresiones sencillas. El llamado cálculo de Regge es una teoría de red para la gravitación, que tiene la misma forma en cualquier dimensión (a diferencia de la teoría covariante) y que por lo tanto puede extenderse a otras dimensiones inmediatamente. El defecto que tiene el cálculo de Regge en su formulación usual es que no se conocen las simetrías de norma. Para el caso tridimensional este obstáculo fue superado usando como apoyo la teoría de Waelbroeck en el artículo *Translation symmetry in 2+1 Regge calculus*, Henri Waelbroeck y José A. Zapata, que ya está aceptado para ser publicado en *Class. Quantum. Grav.*.

Aprovechamos el segundo capítulo de esta tesis para presentar la dinámica hamiltoniana con restricciones desde una perspectiva geométrica, un preámbulo de dinámica con restricciones es necesario pues es la herramienta fundamental que usamos en nuestro trabajo; en el tercer capítulo presentamos la traducción del artículo mencionado, que incluye una revisión de la teoría de Waelbroeck, construye una versión aumentada del cálculo de Regge 2+1-dimensional, y en las conclusiones analiza las perspectivas para trabajos futuros.

Capítulo 2

Dinámica con Restricciones

La dinámica con restricciones es capaz de describir gran variedad de fenómenos físicos; he ahí la razón de su relevancia. Además posee toda la belleza de la dinámica clásica. La extiende usándola en espacios donde los grados de libertad físicos y los de norma conviven. El acercamiento que usaremos será el hamiltoniano por ser particularmente útil al lidiar con restriciones y simetrías. Gracias a la riqueza de la estuctura hamiltoniana es posible diferenciar los distintos tipos de grados de libertad y estudiar lo físicamente relevante; todo con increíble elegancia y claridad.

2.1 Dinámica hamiltoniana

Comenzamos con un breve repaso de dinámica hamiltoniana para no toparnos abruptamente con la problemática particular de la dinámica con restricciones, que tiene lugar cuando intentamos describir un sistema usando un conjunto de variables demasiado grande, por lo que surge la necesidad de imponer restricciones entre las variables.

Describiremos la evolución de un sistema con cierto espacio fase físico $\boldsymbol{\Omega}$. A cada estado del sistema le corresponde un solo punto en $\boldsymbol{\Omega}$ y la evolución del sistema queda determinada una vez que se conoce la condición inicial del sistema, es decir, un punto de partida en $\boldsymbol{\Omega}$. El espacio $\boldsymbol{\Omega}$ es una variedad [1] de dimensión par, en mecánica es el espacio cotangente del espacio de configuración, en donde está definida una 2-forma ω^2 cerrada y

[1] Conceptos como los de variedad y forma diferenciales pueden consultarse en el libro de mecánica de Arnold [1], en el Gravitation, Misner et.al. [3], o en el Vol.I de los libros de Spivak [2].

no degenerada que dota a $\mathbf{\Omega}$ de lo que se llama una estructura simpléctica.

Como ω^2 es no degenerada tiene inversa $\mathbf{I}$ también no degenerada, que brinda un isomorfismo entre las 1-formas ($\mathbf{p}$) y vectores ($\mathbf{Ip}$). Funcionan como la métrica $\mathbf{g}$ y su inversa para subir y bajar índices, sólo que en este caso usamos distintos nombres para los vectores y las 1-formas a fin de evitar confusiones.

$$I^{ij}\omega^2_{jk} = \delta^i{}_k \tag{2.1}$$

$$(\mathbf{Ip})^i = I^{ij}p_j \tag{2.2}$$

Así las funciones pueden inducir campos vectoriales, la función $F : \mathbf{\Omega} \to \mathbf{R}$ induce el campo vectorial $\mathbf{IdF}$ en $\mathbf{T\Omega}$. Al inducir campos vectoriales las funciones inducen también flujos en $\mathbf{\Omega}$; esta estructura es la que facilita la descripción de la evolución del sistema.

La evolución queda determinada por una función H llamada hamiltoniano o energía, el sistema evoluciona como lo marca el flujo integral de $\mathbf{IdH}$. En este momento es indispensable hacer la siguiente aclaración. Ligar la evolución al flujo de $\mathbf{IdH}$ equivale a postular que el tiempo, o parámetro de evolución, y el hamiltoniano estan íntimamente relacionados. Si tratamos con un sistema en el que el tiempo y su variable canónicamente conjugada[2] están mezcladas con las demás variables, como en cualquier teoría relativista, se vuelve indispensable el uso de la dinámica con restricciones, pues el hamiltoniano debe cumplir una restricción que lo acopla con la variable canónicamente conjugada al tiempo que se elige. Esta condición, como veremos más adelante, resulta ser la generadora de la "parametrización del tiempo" y de la evolución del sistema.

Para saber cómo evolucionan características específicas del sistema conviene definir la operación corchete de Poisson entre cualesquiera dos funciones $F, G: \mathbf{\Omega} \to \mathbf{R}$

$$[F, G] := I^{ij}dG_i dF_j \quad . \tag{2.3}$$

El resultado que muestra la utilidad de la definición es que el valor que toma una función $F : \mathbf{\Omega} \to \mathbf{R}$ evoluciona como lo indica $[F, H]$. Como prueba es suficiente el siguiente desarrollo

$$[F, H] := I^{ij}dH_i dF_j = (\mathbf{IdH})^j dF_j = \dot{F} \tag{2.4}$$

[2] La variable canónicamente conjugada a la variable de configuración $q_0 = t$ es la variable p_t que cumple $\omega^2(\frac{\partial}{\partial p_t}, \frac{\partial}{\partial q^a}) = \delta^t{}_a$, donde $q^a = t, q^1, q^2, \ldots$

En particular, F permanece constante durante la evolución del sistema si y sólo si $[F, H] = 0$.

A fin de introducir los conceptos fundamentales de la dinámica con restricciones conviene mencionar el siguiente resultado de la dinámica hamiltoniana. La forma simpléctica ω^2 puede usarse para medir superficies sumergidas en $\mathbf{\Omega}$ (para eso sirven las 2-formas, para medir áreas) y el hecho interesante es que la medida que brinda ω^2 es preservada por el flujo inducido por **IdF** para cualquier función F. Lo anterior significa que si c es una superficie en $\mathbf{\Omega}$ y $\mathbf{g}^t_F(c)$ es la imagen de c después de que el flujo inducido por **IdF** la movió durante un lapso t (t elemento de una vecindad, lo suficientemente pequeña, del cero), entonces

$$\int_c \omega^2 = \int_{\mathbf{g}^t_F(c)} \omega^2 \quad , \tag{2.5}$$

esto parece decir que ω^2 tiene algo de fundamental. La demostración de este resultado y una exposición insuperable de la mecánica clásica pueden encontrarse en el libro de Arnold [1].

2.2 Dinámica con restricciones

El salto que pasa a la dinámica con restricciones es una de las grandes aportaciones de Dirac y consiste en formularse el problema de describir un sistema dado usando un conjunto de variables demasiado grande. Comenzamos con un espacio fase no físico[3] $\mathbf{\Gamma}$ de dimensión $2N$, una forma simpléctica μ^2 en $\mathbf{\Gamma}$ y la información de que los estados del sistema están descritos por los puntos de $\mathbf{\Gamma_r}$ que es la subvariedad (de dimensión $2N - r$) de $\mathbf{\Gamma}$ definida por las restricciones $R_a = 0, \quad a = 1 \ldots r$. Como el sistema de restricciones que define a $\mathbf{\Gamma_r}$ no es único, podemos[4] pedir que las restricciones se dividan en dos grupos, las de *primera clase* $G_a = 0, \quad a = 1 \ldots m$, que son tales que las $\mathbf{dG_a}$ son linealmente independientes y cumplen

[3] En las referencias usuales de dinámica con restricciones: Dirac [4], Hanson et al [5], Ashtekar [6], Apendice B, a $\mathbf{\Gamma}$ se le llama simplemente espacio fase y a $\mathbf{\Omega}$ espacio fase reducido.

[4] Garantizar la división de las restricciones en primera y segunda clases no es trivial; primero hay que extender de manera adecuada el resultado puntual, que como veremos es sencillo, a todos los puntos de una vecindad y después garantizar la integrabilidad de una foliación [7]. En el pie de página marcado antes de la fórmula primordial de este capítulo, la de los corchetes de Dirac (2.11), explicamos cómo se pueden garantizar el resultado puntual, que es lo único necesario para llegar a esa fórmula.

$$[G_a, R_b] \approx 0 \qquad \text{para toda restricción } R_b = 0, \tag{2.6}$$

donde el simbolo de igualdad débil, $\approx$, implica igualdad dentro de la subvariedad de restricción $\mathbf{\Gamma_r}$. Y las de *segunda clase* $S_a = 0, \quad a = 1 \ldots 2s$, $(\mathbf{r} = m + 2s)$ que son tales que la matriz

$$\mathbf{M_D}_{ab} = [S_a, S_b] = I^{ij} dS_{b_i} dS_{a_j} \qquad \text{es no degenerada.} \tag{2.7}$$

Las restricciones de segunda clase restringen en direcciones conjugadas y por lo tanto los flujos que generan unas violan a las demás. Por el contrario las de primera clase generan flujos que respetan a todas las restricciones. Esta división entre las restricciones nos será de gran utilidad. Para aprovecharla definimos $\mathbf{\Gamma_s}$ subvariedad de $\mathbf{\Gamma}$ imponiendo únicamente las restricciones de segunda clase $S_a = 0$, entonces la matriz de los corchetes de Poisson se descompone de manera única como una suma

$$\mathbf{I} = \mathbf{I_{tan}} + \mathbf{I_s} \qquad \text{donde} \tag{2.8}$$

$$(\mathbf{I_{tan}}\mu^2)|_{\mathbf{T\Gamma_s}} = \mathbf{E}|_{\mathbf{T\Gamma_s}} \qquad \text{(identidad en } \mathbf{T\Gamma_s}\text{) e} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{I_{tan} dS_a} = 0 \qquad \text{para toda restricción de segunda clase } S_a = 0. \tag{2.10}$$

Si consideramos la dinámica inducida por $\mathbf{I_{tan}}$ habremos resuelto tres problemas fundamentales. Primero, no habrá dinámica en las direcciones $\mathbf{IdS_a}$, que no tienen origen físico. Segundo, las restricciones de segunda clase $S_a = 0$ se convertirán en identidades. Y tercero, la dinámica será compatible con la forma simpléctica inducida por μ^2 dentro de $\mathbf{\Gamma_s}$.

Ahora daremos la formula para calcular los corchetes de Dirac, que son los que corresponden a $\mathbf{I_{tan}}$ y después probaremos que cumplen con las propiedades (2.9) y (2.10). La fórmula es[5]

---

[5] Mencionamos anteriormente que garantizar la división de las restricciones en primera y segunda clases no es trivial. Pero lo que realmente usamos en la definición de $[\ ,\ ]_{DB}(p)$ es la descomposición N_p, que es el subespacio de $T^*\Gamma|_p$ normal a $T\Gamma_r|_p$, en las formas $dG_a(p)$ y $dS_a(p)$ que cumplen las condiciones (3.6) y (2.7); y garantizar esa descomposición es muy sencillo, basta con escribir a $\omega^2(p)$ en una base simplectica adecuada, lo que se logra facilmente con un proceso análogo al de Schmidt aplicado a $\omega^2(p)$ (ver Arnold [1] p.220).

$$[F,G]_{DB} := [F,G] - [F,S_a]\mathbf{M_D^{-1}}^{ab}[S_b,G]. \tag{2.11}$$

$$\text{Si } \mathbf{v_p} \in \mathbf{T_p\Gamma_s} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{v_p}(S_a) = 0 \quad \text{para toda } S_a, \tag{2.12}$$

como $\mathbf{I}$ es no degenerada existe una función $F : \mathbf{\Gamma} \to \mathbf{R}$ tal que

$$\mathbf{v_p} = (\mathbf{IdF})_\mathbf{p} \qquad \text{y por lo tanto} \tag{2.13}$$

$$[F,S_a](p) = 0 \quad \text{(evaluado en } p\text{) para toda } S_a. \tag{2.14}$$

Es claro que la 1-forma que asigna μ^2 al vector $\mathbf{v_p}$ es

$$\mu^2(\mathbf{v_p}, \quad) = \mu^2(\mathbf{IdF_p}, \quad) = \mathbf{dF_p} \qquad , \tag{2.15}$$

pero la definición de los corchetes de Dirac (2.11) y la propiedad (2.14) implican que

$$\mathbf{I_{tan}dF_p} = \mathbf{IdF_p} = \mathbf{v_p} \qquad , \tag{2.16}$$

lo cual demuestra que la definición de los corchetes de Dirac cumple con la condición (2.9). La condición (2.10) es consecuencia directa de la definición.

Para terminar de dar las bases de la dinámica hamiltoniana con restricciones sólo nos falta esclarecer cuáles son las implicaciones dinámicas de la presencia de restricciones de primera clase $G_a = 0$. Los campos vectoriales $\mathbf{IdG_a} = \mathbf{I_{tan}dG_a}$, que como lo dice (3.6) son tangentes a $\mathbf{\Gamma_r}$, no tienen origen físico y son los responsables de movimientos en $\mathbf{\Gamma_r}$ que no corresponden a cambios en el estado del sistema. Estas libertades de movimiento sin significado físico son las llamadas libertades de norma. Existen dos maneras de observar la dinámica físicamente relevante. La primera es fijar la norma[6] , lo que significa prohibir las libertades de norma, imponiendo nuevas condiciones $H_a = 0, \quad a = 1\ldots m$ tales que junto con las restricciones $G_a = 0, \quad a = 1\ldots m$ se puedan tratar como un conjunto de restricciones de segunda clase y después encontrando los correspondientes corchetes de Dirac. La otra manera, que es más elegante aunque tal vez menos funcional, es recordar que lo importante es el espacio fase físico $\mathbf{\Omega}$, que tiene por puntos a las subvariedades integrales del campo de hiperplanos en $\mathbf{T\Gamma_r}$ generado

[6]Este procedimiento siempre es aplicable localmente, pero no siempre globalmente.

por los campos vectoriales $\mathbf{IdG_a}$. La existencia de dichas subvariedades integrales es consecuencia de la condición (3.6), satisfecha por las restricciones de primera clase[7] ; y el que el espacio de hojas $\boldsymbol{\Omega}$ sea una variedad es una suposición que hacemos, para la que sobran justificaciones físicas. Como los flujos generados por los $\mathbf{IdG_a}$ preservan la forma simpléctica μ^2 (ver (3.5)) al recuperar $\boldsymbol{\Omega}$ de $\boldsymbol{\Gamma_r}$ también conseguimos la forma simpléctica "natural" ω^2 para $\boldsymbol{\Omega}$, que es la inducida por μ^2. Definimos la medida que asigna ω^2 a la supreficie $c \subset \boldsymbol{\Omega}$ como

$$\int_c \omega^2 := \int_{c'} \mu^2 \qquad , \tag{2.17}$$

donde $c' \subset \boldsymbol{\Gamma_r}$ es cualquier elemento de la clase de equivalencia que define a c; la definición es independiente del c' que se escoja precisamente gracias a la propiedad (3.5). En virtud de las propiedades (2.9) y (2.10) que cumplen los corchetes de Dirac sabemos que aunque trabajemos en $\boldsymbol{\Gamma}$ los corchetes de Dirac inducen la misma dinámica entre los estados físicos que la resultante de trabajar en $\boldsymbol{\Omega}$ con la forma simpléctica ω^2.

2.3 Selección de un tiempo

Ahora que hemos concluido la exposición de las ideas básicas de la dinámica hamiltoniana con restricciones, con el ánimo de fijar ideas y de aprender algo útil, presentamos el tratamiento que consigue una teoría con libertad de reparametrización del tiempo.

Comenzemos con un sistema dinámico (0), caracterizado por un espacio fase Ω_0(de dim. $2n$), una forma simpléctica ω_0^2 y un hamiltoniano H_0, el método de construccion de coordenadas simplécticas (ver Arnold [1] p. 229) nos garantiza que, en una vecindad Σ_0 de Ω_0, podemos dar la siguiente descomposición[8] , en la que usamos un sistema dinámico (1) caracterizado por un espacio fase Σ_1(de dim. $2n-2$), una forma simpléctica ω_1^2 y un hamiltoniano H_1, y $\mathbf{R}^2$ con la estructura canónica usual de $\mathbf{R}^2$ (al que damos coordenadas p_t, t). La descomposición comienza dando un mapeo canónico [9]

[7] Los conceptos necesarios para entender dicha implicación estan desarrollados en el libro de Arnold [1] pp 208-217.

[8] Muchas veces no comenzamos con un sistema (0) que deba descomponerse, sino que contamos con un sistema (1) al que agrandamos para que adquiera la propiedad de reparametrización del tiempo.

[9] Un mapeo canónico C es el que respeta la estructura simpléctica, lo que significa que

$$C : \Sigma_0 \to \Sigma_1 \times \mathbf{R}^2 \tag{2.18}$$

y continúa formulando una relación que expresa la compatibilidad de los hamiltonianos H_0 y H_1. El hamiltoniano H_0 debe determinar la velocidad t' de parametrización del tiempo t (con respecto a un parámetro τ, que no es una variable del espacio fase Ω_0)

$$[H_0, t] := t' = [p_t, t]t' \quad . \tag{2.19}$$

También la evolución de todas las funciones $F_0 = F_1 \circ C$, definidas en Σ_0 gracias al mapeo canónico C y funciones base F_1 de Σ_1, debe quedar dictada por H_0

$$[H_0, F_0] := F_0' = \dot{F}_0 t' = [H_1, F_1]t' \quad . \tag{2.20}$$

A partir de estos datos ((2.19) y (2.20)), no es difícil observar que el hamiltoniano

$$H_0 = t'(H_1 + p_t) \tag{2.21}$$

cumple los requerimientos. Como la forma simpléctica ω_0^2 es no singular el flujo que genera el hamiltoniano H_0 lo determina totalmente salvo por una constante aditiva[10] . H_0 indica la velocidad de parametrización del tiempo t que en principio es totalmente arbitraria y nos gustaría tenerla como libertad de norma, lo que significa poder cambiarla a nuestro antojo sin que las cantidades físicamente relevantes cambien por ello. En particular, para que H_0 no se vea afectada cuando reparametricemos el tiempo es necesario que

$$p_t = -H_1 \quad . \tag{2.22}$$

La forma en que la variable p_t se presenta en la forma simpléctica ω_0^2 y el teorema de conservación de la energía aplicado al sistema (1) nos dicen que la restricción (2.22) es de primera clase con cualquier sistema de restricciones de la forma $R_0 = R_1 \circ C$, y que por lo tanto puede dejarse como una libertad de norma, aunque es realmente espacial, pues es la responsable de compaginar la parametrización del tiempo y la evolución del sistema. Como

---

para cualquier superficie s de Σ_0 la medida que asigna ω_0^2 a la superficie s es la misma que asigna ω_1^2 a la superficie $C(s)$ de Σ_1

[10] Este argumento es válido en el espacio fase físico. En el espacio fase no físico el hamiltoniano sólo queda determinado débilmente.

cualquier otra libertad de norma puede ser anulada fijando la norma. La dirección conjugada a p_t es t y en consecuencia se puede fijar la norma con una condición de la forma

$$t = f(p_t, p, q, \tau) \quad , \tag{2.23}$$

Donde $[f, H_1] = 0$, es decir, donde f es una constante de movimiento para el sistema (1), dicho de otra manera, la norma queda fija escogiendo un tiempo.

Bibliografía

[1] V. I. Arnold: **Mathematical Methods of Classical Mechanics** , Springer Verlag, (1978).

[2] M. Spivak: **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry**, Publish or Perish Inc., (1970).

[3] C. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler: **Gravitation**, W. H. Freeman and Co., (1973).

[4] P. A. M. Dirac: **Lectures on Quantum Mechanics**, Belfer Graduate School of Science, (1964).

[5] A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim: **Constrained Hamiltonian Systems**, Accademia Nazionale dei Lincei, (1976).

[6] A. Ashtekar: **Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity**, World Scientific, (1991).

[7] G. Marmo, E. J. Saletan, A. Simoni, B. Vitale: **Dynamical Systems: a Differential Geometric Approach to Symmetry and Reduction**, Wiley, (1985).

Capítulo 3

SIMETRIA DE TRASLACION EN EL CALCULO DE REGGE 2+1-DIMENSIONAL

Henri WAELBROECK y José Antonio ZAPATA

Resumen

Construimos una teoría para el cálculo de Regge 2+1-dimensional que goza de simetría de traslación (incluida la evolución temporal). Mostramos que el álgebra de las restricciones que generan traslaciones es cerrada, aunque las constantes de estructura son no locales en la red. Resolvemos el caso de los espacios-tiempo con un toro como superficie de Cauchy y damos la expresión explícita de la simetría de traslación en ese caso.

3.1 Introducción

Un problema importante que se presentaba en las formulaciones hamiltonianas de teorías de red para la gravitación 2+1-dimensional es que las restricciones análogas a las de energía-momento de la teoría continua de la gravitación sólo forman un álgebra cerrada para redes cuyas aristas son infinitesimales [1] [1]. Esto sugiere que la red "rompe" la simetría de traslación. Otra posibilidad es que la discretización introduzca un error, i.e., que la teoría *correcta* debe tener simetría de traslación generada por restricciones de primera clase. En este artículo investigamos esta posibilidad en el contexto del cálculo de Regge 2+1-dimensional [6].

Las teorías para la gravitación tridimensional representan espacios-tiempo exentos de curvatura donde no hay fuentes [7, 8]. En consecuencia, las teorías de red son leyes sobre "tinglados" (redes armadas con segmentos de recta) que están localmente encajados en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski. La homogeneidad del espacio-tiempo de Minkowski debe reflejarse como simetría de traslación en la teoría de red y en una teoría hamiltoniana debe ser generada por restricciones de primera clase. Esta simetría de traslación no se presenta en los modelos hamiltonianos existentes para el cálculo de Regge, en los que el álgebra de las restricciones no es cerrada cuando las aristas no son infinitesimales. Existe una teoría de red covariante para la gravitación en 2+1-dimensiones [9] en la que las restricciones *sí* son de primera clase, pero a diferencia del cálculo de Regge su forma no le permite ser extendida a 3+1 dimensiones directamente [11, 12, 13]. En este artículo reducimos la teoría covariante a variables escalares y obtenemos un cálculo de Regge en 2+1 con simetría de traslación exacta.

3.2 Teoría Covariante en 2+1-Dimensiones

Partimos de la teoría covariante propuesta por uno de nosotros [9], que usa una versión de red de las variables de Ashtekar- Witten [14, 15]. A cada cara de la red le asignamos un sistema de referencia, al que denotamos por un índice latino $(i, j, \ldots)$. Si la cara (i) está rodeada por las caras $(j), (k), (l), \ldots$, la frontera entre la cara (i) y sus vecinas se representa, *dentro del marco de referencia asignado a* (i), por los vectores $\mathbf{E}_{ij}, \mathbf{E}_{ik}, \mathbf{E}_{il}, \ldots$ [Figura 1]. El transporte paralelo entre caras vecinas, de la referencia (j) a la referencia (i), queda definido por la matriz de Lorentz (tridimensional)

[1]Existen algunas propuestas auto-consistentes de teorías de red para la gravitación en 3+1-dimensiones [2]; en términos generales podríamos decir que lo que hacen es restringir el espacio de configuración a un subconjunto de las variedades de Regge. Las teorías propuestas por Friedman y Jack [3] y Tuckey y Williams [4] son particularmente interesantes, no tienen simetría de traslación pero son totalmente consistentes. El problema de las restricciones de segunda clase persiste en los modelos nul-strut [5]; sin embargo, éstos parecen ser computacionalmente superiores y más apropiados para la introducción de espinores.

$\mathbf{M}_{ij}$. Las siguientes identidades se satisfacen (usamos paréntesis alrededor de los *índices de la red* siempre que puedan surgir confusiones):

$$E_{(ij)}{}^{a} = -M_{(ij)}{}^{a}{}_{b}E_{(ji)}{}^{b} \quad , \tag{3.1}$$
$$M_{(ij)}{}^{a}{}_{c}M_{(ji)}{}^{c}{}_{b} = \delta^{a}{}_{b} \quad , \tag{3.2}$$
$$M_{(ij)}{}^{a}{}_{c}M_{(ij)}{}^{bc} = \eta^{ab} \quad . \tag{3.3}$$

La estructura simpléctica queda definida por los paréntesis de Poisson

$$[E_{(ij)}{}^{a}, E_{(ij)}{}^{b}] = \varepsilon^{ab}{}_{d}E_{(ij)}{}^{d} \quad , \tag{3.4}$$
$$[E_{(ij)}{}^{a}, M_{(ij)}{}^{b}{}_{c}] = \varepsilon^{ab}{}_{d}M_{(ij)}{}^{d}{}_{c} \quad , \tag{3.5}$$
$$[E_{(ij)}{}^{a}, M_{(ji)}{}^{b}{}_{c}] = -\varepsilon^{ad}{}_{c}M_{(ji)}{}^{b}{}_{d} \quad , \tag{3.6}$$

que fueron calculados a partir de una acción de Chern-Simons [9] (los paréntesis de Poisson entre las demás parejas de variables son cero).

Se le pide a toda cara (i) que cierre y a la curvatura alrededor de todo vértice (I) que se anule

$$J_{(i)}{}^{a} = E_{(ij)}{}^{a} + E_{(ik)}{}^{a} + \ldots \approx 0 \quad , \tag{3.7}$$
$$W_{(I)}{}^{b}{}_{c} = (\mathbf{M}_{ij}\mathbf{M}_{jk}\ldots\mathbf{M}_{ni})^{b}{}_{c} - \delta^{b}{}_{c} \approx 0 \quad , \tag{3.8}$$

donde el vértice (I) está compartido por las caras $(i), (j), \ldots, (n)$. La restricción $\mathbf{W}_{(I)} \approx 0$ puede ser remplazada por la dual $P_{(I)}{}^{a} = (1/2)\varepsilon^{ab}{}_{c}W_{(I)}{}^{c}{}_{b} \approx 0$. Las restricciones (3.7), (3.8) son de primera clase (ver refs. [16, 17]) y generan transformaciones de Lorentz tridimensionales del marco (i) y traslaciones del vértice (I), respectivamente:

$$[J_{(i)}{}^{a}, E_{(ij)}{}^{b}] = \varepsilon^{ab}{}_{d}E_{(ij)}{}^{d} \quad , \tag{3.9}$$
$$[J_{(i)}{}^{a}, M_{(ij)}{}^{b}{}_{c}] = \varepsilon^{ab}{}_{d}M_{(ij)}{}^{d}{}_{c} \quad , \tag{3.10}$$
$$[\xi^{a}P_{(I)\,a}, E_{(ij)}{}^{b}] \approx \xi^{b} \quad . \tag{3.11}$$

El símbolo de igualdad débil $\approx$ indica que las restricciones fueron utilizadas para simplificar.

Una vez que conocemos las restricciones y las simetrías podemos calcular la dimensión del espacio fase físico. La red tiene N_0 vértices, N_1 aristas y N_2 caras. Hay $6N_1$ variables en el espacio fase $\mathbf{E}_{ij}$ y $\mathbf{M}_{ij}$, y $3(N_0 + N_2)$ restricciones y simetrias, por lo que la dimensión del espacio fase es

$$6N_1 - 2 \times (3N_0 + 3N_2) = -6\chi = 12g - 12 \quad , \tag{3.12}$$

donde χ es la característica de Euler y g el género de la superficie.

3.3 Hacia el Cálculo de Regge 2+1-Dimensional

Ahora mostramos que para una red de triángulos la teoría covariante puede reducirse a una versión extendida del cálculo de Regge 2+1-dimensional. En una red de triángulos hay tres aristas en cada cara y cada arista es compartida por dos caras, por lo tanto

$$3N_2 = 2N_1 \quad . \tag{3.13}$$

Las variables del cálculo de Regge, i.e., los largos de las aristas $l_{ij} = \sqrt{\mathbf{E}_{ij}^2}$ contienen la suficiente información para construir una inmersión de la superficie en el espacio tridimensional de Minkowski. Las variables de Regge contienen toda la información del "espacio de configuración" de la teoría covariante. Dentro de nuestra notación esto es una consecuencia directa de la ecuación (3.13). Tenemos $3N_1$ variables correspondientes a las aristas menos $3N_2$ libertades indistinguibles para las variables de Regge (la orientación de los marcos de referencia). Es decir $3N_1 - 3N_2 = N_1$ grados de libertad contenidos en los escalares l_{ij}. Las "variables conjugadas" de la teoría covariante, las matrices $\mathbf{M}_{ij}$, contienen información sobre la orientación de los marcos y *además* sobre las holonomías (otros $6g - 6$ grados de libertad). En la teoría covariante la simetría de traslación está generada por combinaciones de las matrices a las que llamamos "variables conjugadas" (los $3N_0$ $P_{(I)}{}^a$). En la teoría escalar tendremos N_1 variables conjugadas, de las cuales $3N_0$ serán restricciones que generen la simetria de traslación, lo que nos deja (usando (3.13)), $N_1 - 3N_0 = 3N_1 - 3N_2 - 3N_0 = -3\chi = 6g - 6$ grados de libertad, como era necesario. Tomamos a las siguientes variables, proyecciones de las restricciones que generan traslación (3.8), como unas de las variables conjugadas del cálculo de Regge:

$$p_{ij} = (E_{(ij)}{}^a P_{(I)\,a})/l_{ij} \quad , \tag{3.14}$$

donde el vector $\mathbf{E}_{ij}$ representa a la arista (ij) y apunta al vértice (I) y $\mathbf{P}_{(I)}$ está expresado en la referencia (i). Para $g > 1$, las N_1 p_{ij}'s son linealmente dependientes. Son combinaciones lineales de los $P_{(I)}{}^a$ y, como ya lo mencionamos, $N_1 - 3N_0 = 6g - 6$. Ahora añadimos las holonomías $\mathbf{M}(\mu)$ con lo que conseguimos un espacio fase de dimensión $2N_1$ y no perdemos información importante de la teoría covariante, por haber contemplado únicamente las restricciones $\mathbf{P}_{(I)}$ en vez de las variables $\mathbf{M}_{ij}$.

$$\mathbf{M}(\mu) = \mathbf{M}_{1i}\mathbf{M}_{ij} \quad \ldots \quad \mathbf{M}_{n1} \quad , \tag{3.15}$$

donde el circuito (μ), que parte de la cara (1), para ir a la cara (i), después a la (j), etc., y finalmente regresar a la cara (1), es el elemento (μ) de una base del grupo de homotopía de la red con punto base en algún punto de la cara (1)[2]

En lo que resta, es importante que existan tres proyecciones independientes de cada $\mathbf{P}_{(I)}$ dentro del conjunto de los p_{ij}'s. Lo anterior es cierto si es posible dar una orientación a las aristas de manera que por lo menos tres aristas apunten a cada vértice. Esto, para la red, representa una cierta exigencia de regularidad, que asumiremos satisfecha[3].

La estructura simpléctica para las variables escalares se calcula fácilmente usando los paréntesis de Poisson de las variables covariantes (3.4)-(3.6).

$$[p_{ij}, l_{ij}] = 1 \quad , \tag{3.16}$$

$$[p_{ij}, l_{rs}] = cos(\theta_{ij,rs}) \quad , \tag{3.17}$$

[2]Las holonomías $\mathbf{M}(\mu)$ no son independientes. Están definidas en términos de las matrices $\mathbf{M}_{ij}$ que satisfacen una condición de planidad (3.8) por vértice; por lo tanto deben satisfacer la siguiente relación $\Pi_i(\ \mathbf{M}(a_i)\mathbf{M}(b_i)\mathbf{M}^{-1}(a_i)\mathbf{M}^{-1}(b_i)\ ) \approx \mathbf{I}$ (los elementos de la base $(\mu = 1, \ldots, 2g)$ pueden nombrarse como $\{(a_i, b_i)\}, i = 1, \ldots, g)$ si la base es canónica, entonces el lazo a_i sólo corta al lazo b_i y lo hace una sola vez). Esta relación explica por qué considerar a las holonomías agrega $6g - 6$ grados de libertad a la teoría.

[3]Por medio de una búsqueda exhaustiva hemos encontrado que casi todas las redes satisfacen la regularidad, las únicas exepciones que encontramos fueron redes que no pueden representarse en el plano por medio de segmentos de recta que no se corten.

donde los segmentos (ij) y (rs) van al vértice (I), y $\theta_{ij,rs}$ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{E_{ij}}$ y $\mathbf{E_{rs}}$ (no hay curvatura alrededor del vértice I de manera que los vectores de distintos marcos pueden ser transportados a la misma referencia sin ambigüedad; si uno los vectores de la ecuación (3.17) tiene la dirección que se aleja del vértice se encuentran los mismos paréntesis pero con el signo cambiado).

$$[l_{ij}, M(\mu)^a{}_b] = E_{(ij)}{}^c \varepsilon_c{}^a{}_d M(\mu)^d{}_b \quad , \tag{3.18}$$

donde el lazo (μ) cruza al segmento (ij) y todos los indices de la fórmula están en el marco (1). El transporte paralelo de la referencia (i) a la referencia(1) la hacemos através de una curva que no corta a ninguno de los lazos (μ). Los paréntesis de Poisson entre las demás parejas de variables de la teoría escalar son cero.

Imponemos las restricciones

$$p_{ij} \approx 0 \quad . \tag{3.19}$$

que constituyen un conjunto de proyecciones (al menos tres por vértice; como mencionamos antes, asumimos que la red nos lo permite) de las restricciones de primera clase $\mathbf{P}_{(I)} \approx 0$ de la teoría covariante que generan la simetría de traslación. Si la arista (ij) apunta al vertice (I), entonces las restricciones (3.19) generan una traslación del vértice (I) en la dirección de $\mathbf{E}_{ij}$. El álgebra de las restricciones $p_{ij} \approx 0$ puede calcularse directamente partiendo de los paréntesis de Poisson con que hemos tratado. Obtenemos

$$\begin{aligned} [p_{ij}, p_{rs}] &= [p_{ij}, E_{(rs)}{}^b/lrs] P_{(J)\ b} + [P_{(I)\ a}, P_{(J)\ b}] E_{(ij)}{}^a E_{(rs)}{}^b/(l_{ij} l_{rs}) \\ &+ [E_{(ij)}{}^a/l_{ij}, P_{(J)\ b}] P_{(I)\ a} E_{(rs)}{}^b/l_{rs} \approx 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.20}$$

El primero y último términos son combinaciones lineales de las restricciones $\mathbf{P}_{(I)} \approx 0$, mientras que el segundo término se anula fuertemente (sin necesidad de usar las restricciones, el paréntesis de Poisson entre dos matrices de transporte paralelo es cero). La simetría de traslación que generan las restricciones $p_{ij} \approx 0$ está dada por las expresiones (3.16) y (3.17).

El miembro derecho de las ecuaciones (3.17) y (3.20) involucra a las variables de la teoría covariante. Para obtener expresiones en las que sólo las variables escalares estén presentes hay que calcular las variables de la teoría covariante en términos de las variables escalares y una elección particular de marco de referencia para cada cara. Mencionamos antes que el número de grados de libertad de la teoría escalar es suficiente para reconstruir la teoría covariante porque para una red triangular $N_1 = 3N_1 - 3N_2$. El resto del artículo lo dedicamos a mostrar cómo hacer el paso de la teoría covariante a la escalar, primero en el caso general (implícitamente) y después explícitamente para el caso de un espacio-tiempo que tiene a un toro por superficie de Cauchy (damos una triangulación del toro con cuatro caras y dos vértices).

Comenzamos a construir las variables covariantes a partir de las escalares construyendo lo que llamamos un "parche máximo" que puede imaginarse como el resultado de tomar la superficie y cortarla a lo largo de $2g$ lazos que formen una base del grupo de homotopía y desdoblar lo que queda dando una inmersión en el espacio tridimensional de Minkowski. Escogemos una cara como la cara (1) y le añadimos una vecina para agrandar el "parche", continuamos añadiendo caras al parche hasta que todas las caras de la red estén incluidas en el parche. Unicamente pedimos que durante el proceso de crecimiento el parche mantenga la topología de un disco. Al terminar el proceso tenemos el "parche máximo" que buscábamos en el que las caras de la frontera tienen una vecina de la red que dentro del parche no es adyacente a ellas, sino que está en alguna otra parte de la frontera del parche. La red original se recupera identificando las aristas adecuadas de la frontera del parche.

Para dar la inmersión del parche máximo en el espacio tridimensional de Minkowski usamos la referencia (1). La orientación de la cara (i) en la referencia (1) la describimos con la matriz N_i de $SO(2,1)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{ir} &= l_{ir}\mathbf{N}_i\hat{\mathbf{x}} \quad , & (3.21)\\
\mathbf{E}_{is} &= \mathbf{N}_i(-X_i\hat{\mathbf{x}} + Y_i\hat{\mathbf{y}}) \quad , & (3.22)\\
\mathbf{E}_{it} &= \mathbf{N}_i(-(l_{it} - X_i)\hat{\mathbf{x}} - Y_i\hat{\mathbf{y}}) \quad , & (3.23)
\end{aligned}
$$

Los números X_i , Y_i se encuentran después de imponer $E_{is}{}^2 = l_{is}{}^2$ y $E_{it}{}^2 = l_{it}{}^2$

$$
X_i = (l_{ir}{}^2 + l_{is}{}^2 - l_{it}{}^2)/(2l_{ir}) \quad , \tag{3.24}
$$

$$
Y_i = \sqrt{l_{is}{}^2 - X_i^2}. \tag{3.25}
$$

Determinamos las matrices $\mathbf{N}_i$ con las siguientes condiciones de consistencia. Para aristas internas del parche pedimos $\mathbf{E}_{ij} = -\mathbf{E}_{ji}$ (misma dirección pero sentido opuesto), y para las aristas de la frontera requerimos $\mathbf{E}_{jk} = -\mathbf{M}(\mu)\mathbf{E}_{kj}$ (con estas condiciones identificamos las aristas de la frontera del parche; $\mathbf{M}(\mu)$ es la holonomía asociada con un lazo que cruza la frontera del parche en la arista (jk)). Las condiciones de consistencia son $2N_1$ que restringen los $3N_2$ parámetros que definen a las matrices $\mathbf{N}_i$. Por lo tanto, usando la ecuación (3.13), las matrices quedan totalmente determinadas por las condiciones de consistencia, siempre que estas últimas sean independientes. Así que, en principio, somos capaces de calcular las variables covariantes resolviendo el sistema para las matrices $\mathbf{N}_i$, después de haber escogido los marcos de referencia de las caras de manera que $\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{I}$ en las caras internas y $\mathbf{M}_{jk} = \mathbf{M}(\mu)$ para el transporte paralelo através de la frontera del parche. Esta construcción basta para calcular los paréntesis de Poisson y el álgebra de las restricciones en términos de las variables escalares. Es posibe dar otras orientaciones a las referencias de las caras pero se pierde claridad y los cálculos se complican.

3.4 Ejemplo: El Toro

Como ejemplo presentamos el caso en el que el espacio-tiempo tiene a un toro como superficie de Cauchy. Representamos al toro con una red que tiene dos caras y cuatro vértices [Figura 2]. Las variables de la teoría escalar para esta red son: los largos de las aristas, $l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{24}, l_{34}$; las proyecciones de $\mathbf{P}(F)$, p_{12}, p_{13}, p_{24} ; las proyecciones de $\mathbf{P}(I)$, p_{14}, p_{43}, p_{32} y las holonomías $\mathbf{M}(1), \mathbf{M}(2)$. En este ejemplo, en el que hay aristas ($\mathbf{E}_{13}$ y $\mathbf{E}_{14}$) que empiezan y terminan en el mismo vértice (F), los paréntesis de Poisson entre los vectores que representan a dichas aristas y las restricciones que generan traslaciones del vértice en cuestión, no son los que dimos para el caso general, en el que las aristas comienzan y terminan en vértices distintos. Si consideramos un desplazamiento $\mathbf{X}$ del extremo final de $\mathbf{E}_{42}$ [Figura 2], entonces las otras tres imágenes de (F) se desplazan por $\mathbf{M}^{-1}(1)\mathbf{X}$, $\mathbf{M}^{-1}(2)\mathbf{M}^{-1}(1)\mathbf{X}$ y $\mathbf{M}^{-1}(2)\mathbf{X}$ respectivamente(siguiendo el ordenamiento de las imágenes de (F) que darían las manecillas del reloj). Por lo tanto,

$$[P_{(F)\,a}, E_{(13)}{}^{b}] \approx (\mathbf{M}^{-1}(1))^{b}{}_{a} - \delta^{b}{}_{a} \quad , \tag{3.26}$$

$$[P_{(F)\,a}, E_{(42)}{}^{b}] \approx \delta^{b}{}_{a} - (\mathbf{M}^{-1}(2))^{b}{}_{a} \quad . \tag{3.27}$$

En consecuencia,

$$[p_{ij}, l_{13}] = \mathbf{E}_{13} \cdot (\mathbf{M}^{-1}(1) - \mathbf{I})\mathbf{E}_{ij}/(l_{13}l_{ij}) \quad , \tag{3.28}$$

$$[p_{ij}, l_{42}] = \mathbf{E}_{42} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}(2))\mathbf{E}_{ij}/(l_{42}l_{ij}) \quad , \tag{3.29}$$

donde $ij = 13, 12, 24$. Los paréntesis de Poisson que involucran a las proyecciones de $\mathbf{P}(I)$, es decir, p_{14}, p_{43}, p_{32} son los que damos en el caso general (3.17), (3.18).

Las dos holonomías quedan casi totalmente determinadas por las restricciones. Tienen que satisfacer las restricciones que imponen que la curvatura alrededor del vértice (F) se anule, y tienen que permitir que la condición de cerradura de la frontera se satisfaga.

$$W(F)^{a}{}_{b} = (\mathbf{M}(1)\mathbf{M}(2)\mathbf{M}^{-1}(1)\mathbf{M}^{-1}(2))^{a}{}_{b} - \delta^{a}{}_{b} \approx 0 \quad , \tag{3.30}$$

$$J^{a} = E_{(13)}{}^{a} - (\mathbf{M}^{-1}(2))^{a}{}_{b}E_{(13)}{}^{b} + E_{(42)}{}^{a} - (\mathbf{M}^{-1}(1))^{a}{}_{b}E_{(42)}{}^{b} \approx 0 \quad , \tag{3.31}$$

Veamos como estas restricciones restringen a las holonomías a un conjunto discreto de soluciones. Sabemos que $\mathbf{E}_{13}$, $\mathbf{E}_{42}$ y $\mathbf{M}^{-1}(2)\mathbf{E}_{13}$, $\mathbf{M}^{-1}(1)\mathbf{E}_{42}$ tienen la misma longitud respectivamente; este hecho, junto con la condición de cerradura (3.31), nos indica que los triángulos que mostramos en la [Figura 3] son congruentes. La condición (3.4) sobre la curvatura implica que $\mathbf{M}(1)$ y $\mathbf{M}(2)$ tienen el mismo eje. Ahora, consideremos la proyección de la red en el plano ortogonal al eje de las matrices. En este plano también tenemos dos triángulos congruentes que comparten una arista, cuando la proyección no es singular (cuando ninguna de las imágenes de las aristas se reduce a un punto) vemos que si las holonomías fueran no triviales tendríamos que la frontera de los dos triángulos que describimos no formaría un paralelogramo, lo que es absurdo. De manera que las holonomías son triviales salvo en los siguientes casos singulares.

(1) El eje de las holonomías es paralelo a $\mathbf{E}_{13}$. En este caso las holonomías satisfacen

$$\mathbf{M}(1) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{M}(2)\mathbf{E}_{13} = \mathbf{E}_{13} \quad . \tag{3.32}$$

(2) El eje de las holonomías es paralelo a $\mathbf{E}_{42}$. En este caso

$$\mathbf{M}(2) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{M}(1)\mathbf{E}_{42} = \mathbf{E}_{42} \quad . \tag{3.33}$$

(3) El eje es paralelo a la arista compartida, y

$$\mathbf{M}(1) \quad = \quad \mathbf{M}(2) \quad . \tag{3.34}$$

Resulta que todos los casos se pueden transformar al caso (1) por medio de una transformación del grupo de clases de mapeos, i.e., escogiendo los generadores del grupo de homotopía adecuadamente (los que aquí llamamos $\mu = 1, 2$). Por ello, de ahora en adelante trabajaremos sólo con el caso (1).

Comenzamos a construir la red desde la referencia (1) como en el caso general.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{12} &= l_{12}\mathbf{N}_1\hat{\mathbf{x}} \quad , && (3.35)\\
\mathbf{E}_{13} &= \mathbf{N}_1(-X_1\hat{\mathbf{x}} + Y_1\hat{\mathbf{y}}) \quad , && (3.36)\\
\mathbf{E}_{14} &= \mathbf{N}_1(-(l_{12} - X_1)\hat{\mathbf{x}} - Y_1\hat{\mathbf{y}}) \quad , && (3.37)\\
& && (3.38)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
X_1 &= ({l_{12}}^2 + {l_{13}}^2 - {l_{14}}^2)/(2l_{12}) \quad , && (3.39)\\
Y_1 &= \sqrt{{l_{13}}^2 - X_1^2} \quad . && (3.40)
\end{aligned}$$

A la matriz ortogonal $\mathbf{N}_1$ se le pide únicamente que $\mathbf{E}_{13}$ resulte paralelo al eje de $\mathbf{M}(2)$[4] así que podemos elegir (usamos la notación $P(\mu)_a = (1/2)\varepsilon_{abc}M(\mu)^{bc}$, y $P(\mu) = \sqrt{P^2(\mu)}$) lo siguiente:

[4] La matriz $\mathbf{N}_1$ goza entonces de un grado de libertad, que corresponde a rotaciones globales en torno al eje común de las dos holonomías. Esta es una peculiaridaad de este caso, en el caso general la elección de marcos de referencia y el procedimiento que damos en este artículo fija por completo a las variables de la teoría covariante.

$$(N_1)^0{}_0 = \frac{P(2)^1}{P(2)\sqrt{(P(2)^1)^2 - (P(2)^0)^2}} \quad , \tag{3.41}$$

$$(N_1)^1{}_0 = \frac{P(2)^0}{P(2)\sqrt{(P(2)^1)^2 - (P(2)^0)^2}} \quad , \tag{3.42}$$

$$(N_1)^2{}_0 = 0 \quad , \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}(N_1)^0{}_1 &= \frac{-P(2)^0 X_1}{P(2)\sqrt{(X_1)^2 + (Y_1)^2}} \\ &- \frac{P(2)^0 P(2)^2 Y_1}{(P(2))^2\sqrt{(P(2)^1)^2 - (P(2)^0)^2}\sqrt{(X_1)^2 + (Y_1)^2}} \quad ,\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}(N_1)^1{}_1 &= \frac{-P(2)^1 X_1}{P(2)\sqrt{(X_1)^2 + (Y_1)^2}} \\ &+ \frac{P(2)^1 P(2)^2 Y_1}{(P(2))^2\sqrt{(P(2)^1)^2 - (P(2)^0)^2}\sqrt{(X_1)^2 + (Y_1)^2}} \quad ,\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}(N_1)^2{}_1 &= \frac{-P(2)^2 X_1}{P(2)\sqrt{(X_1)^2 + (Y_1)^2}} \\ &- \frac{(P(2)^1)^2 Y_1}{(P(2))^2\sqrt{(P(2)^1)^2 - (P(2)^0)^2}\sqrt{(X_1)^2 + (Y_1)^2}} \\ &+ \frac{(P(2)^0)^2 Y_1}{(P(2))^2\sqrt{(P(2)^1)^2 - (P(2)^0)^2}\sqrt{(X_1)^2 + (Y_1)^2}} \quad ,\end{aligned} \tag{3.46}$$

Ahora armamos la cara (2) usando la restricción $\mathbf{E}_{21} = -\mathbf{E}_{12}$:

$$\mathbf{E}_{24} = -X_2\hat{\mathbf{x}}_2 + Y_2\hat{\mathbf{y}}_2 \quad , \tag{3.47}$$

$$\mathbf{E}_{23} = (l_{12} + X_2)\hat{\mathbf{x}}_2 - Y_2\hat{\mathbf{y}}_2 \quad , \tag{3.48}$$

$$\tag{3.49}$$

donde

$$X_2 = -({l_{12}}^2 + {l_{24}}^2 - {l_{23}}^2)/(2l_{12}) \quad , \tag{3.50}$$

$$Y_2 = \sqrt{{l_{24}}^2 - X_2^2} \quad . \tag{3.51}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{N}_1\hat{\mathbf{x}} \quad , \tag{3.52}$$

y $\hat{\mathbf{y}}_2$ es una función de un parámetro,

$$\hat{\mathbf{y}}_2 = ch(\alpha)\mathbf{N}_1\hat{\mathbf{y}} + sh(\alpha)\mathbf{N}_1\hat{\mathbf{t}} \quad . \tag{3.53}$$

Las caras (3) y (4) quedan determinadas por las caras (1) y (2) y las condiciones de compatibilidad, salvo por la arista $\mathbf{E}_{34}$. La condición de cerradura de la cara (4) ayuda a determinar el parámetro α:

$$E_{(43)}{}^a \approx -E_{(41)}{}^a - E_{(42)}{}^a = E_{(14)}{}^a + (M^{-1}(1))^a{}_b E_{(24)}{}^b \quad , \tag{3.54}$$

como $\mathbf{M}(1) = \mathbf{I}$ tenemos que

$$l_{(34)}^2 = (-Y_2\hat{\mathbf{y}}_2 + X_2\hat{\mathbf{x}}_2 - Y_1\mathbf{N}_1\hat{\mathbf{y}} + (l_{(12)} - X_1)\hat{\mathbf{x}}_2)^2 \quad , \tag{3.55}$$

y entonces

$$ch(\alpha) = (l_{(34)}^2 - Y_1{}^2 - Y_2{}^2 - (l_{(12)} - X_1 - X_2)^2)(2Y_1Y_2) \quad . \tag{3.56}$$

Una vez que hemos calculado los parámetros X_1, X_2, Y_1, Y_2 y α como funciones de las variables de Regge l_{ij}, podemos expresar a las variables $\mathbf{E}_{ij}$ de la teoría covariante en función de las variables escalares.

$$\mathbf{E}_{13} = \mathbf{N}_1(-X_1\hat{\mathbf{x}} + Y_1\hat{\mathbf{y}}) \quad , \tag{3.57}$$
$$\mathbf{E}_{42} = X_2\mathbf{N}_1\hat{\mathbf{x}} + Y_2\hat{\mathbf{y}}) \quad , \tag{3.58}$$
$$\mathbf{E}_{12} = l_{12}\mathbf{N}_1\hat{\mathbf{x}} \quad , \tag{3.59}$$
$$\mathbf{E}_{14} = -\mathbf{E}_{12} - \mathbf{E}_{13} \quad , \tag{3.60}$$
$$\mathbf{E}_{43} = -\mathbf{E}_{42} + \mathbf{E}_{14} \quad , \tag{3.61}$$
$$\mathbf{E}_{32} = \mathbf{E}_{13} + \mathbf{E}_{43} \quad , \tag{3.62}$$

donde X_1, X_2, Y_1, Y_2 y α están determinados por las ecuaciones (3.39), (3.40), (3.53), (3.56) y las componentes independientes de la matriz $\mathbf{N}_1$ son las que se indican en (3.41)- (3.46).

Ahora podemos analizar la simetría de traslación en este ejemplo. El generador de traslaciones $\mathbf{X}$ del vértice (F) es

$$G = Y_1 p_{13} + Y_2 p_{12} + Y_3 p_{24} \quad , \tag{3.63}$$

donde los coeficientes Y_a satisfacen

$$\mathbf{X} = Y_1 \mathbf{E}_{13}/l_{13} + Y_2 \mathbf{E}_{12}/l_{12} + Y_3 \mathbf{E}_{24}/l_{24} \quad , \tag{3.64}$$

mientras que el de traslaciones $\mathbf{X}$ del vértice (I) es

$$G' = Z_1 p_{14} + Z_2 p_{43} + Z_3 p_{32} \quad , \tag{3.65}$$

donde

$$\mathbf{X} = Z_1 \mathbf{E}_{14}/l_{14} + Z_2 \mathbf{E}_{43}/l_{43} + Z_3 \mathbf{E}_{32}/l_{32} \quad . \tag{3.66}$$

Con los generadores de traslación G y G' y los paréntesis de Poisson entre las variables de la teoría escalar podemos calcular los efectos de una traslación en las variables de Regge (l_{ij}). Para $ij = 12, 14, 32, 34$ tenemos

$$\delta_X l_{ij} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{E}_{ij}/l_{ij} \tag{3.67}$$

donde $\mathbf{E}_{ij}$ termina en el vértice trasladado por $\mathbf{X}$. Para las aristas 13 y 42,

$$\delta_X l_{13} = \mathbf{E}_{13} \cdot (\mathbf{M}^{-1}(1) - \mathbf{I})\mathbf{X}/l_{13} \quad , \tag{3.68}$$

$$\delta_X l_{42} = \mathbf{E}_{42} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}(2))\mathbf{X}/l_{42} \quad . \tag{3.69}$$

En las expresiones (3.67), (3.68), (3.69) podemos escribir a los vectores $\mathbf{E}_{ij}$ en términos de las variables escalares para que las expresiones de la simetría de traslación queden totalmente contenidas en el contexto de la teoría escalar.

3.5 Conclusión

Recapitulando, hemos mostrado cómo conectar la teoría de red covariante, en la que se conoce y entiende la simetría de traslación, con el cálculo de Regge en 2+1-dimensiones, en donde no se contaba con una teoría que brindara las expresiones exactas de la simetría de traslación. Para lograrlo fue necesario extender el conjunto de variables del espacio fase del cálculo de Regge (p_{ij}, lij) con las holonomías $\mathbf{M}(\mu)$, además introdujimos el álgebra adecuada para las variables escalares, que resultó mezclar a las variables correspondientes a aristas que coinciden en un vértice ($[l_{ij}, p_{rs}] \neq 0$ si (ij) y (rs) coinciden en un vértice). La expresión de la simetría de traslación en la teoría escalar es bastante complicada cuando se mira detalladamente porque es no local en la red; la no localidad, además de complicar las expresiones tiene por resultado (como lo señaló Bander [19]) que no se puedan hacer los cálculos correspondientes a la traslación de un vértice si no se conoce *toda* la red.

Aunque en el caso general la simetría de traslación sólo puede escribirse implícitamente, el punto esencial es que existe y es exacta, en contraste con los modelos anteriores para el cálculo de Regge en 2+1-dimensiones en los que las restricciones son de segunda clase cuando las aristas no son infinitesimales.

La motivación principal para hacer gravitación en 2+1-dimensiones es la posibilidad de usarla como un modelo útil para futuras investigaciones que traten con la gravitación real. El problema de las restricciones de segunda clase se presenta también en el cálculo de Regge 3+1 dimensional, en donde nuestra teoría no se generaliza directamente, pues usa la simplificación que resulta de considerar el caso 2+1-dimensional donde los espacios-tiempo no se curvan; es más, en 3+1 dimensiones la simple traslación de un vértice no debe ser una simetría. Sin embargo, es posible que exista una simetría más general que involucre transformaciones simultáneas en los largos de varias aristas y en las matrices de transporte paralelo también. Este trabajo muestra que el simple hecho de que los modelos existentes para el cálculo de Regge en 3+1 tengan restricciones de segunda clase no debe interpretarse como un resultado definitivo. Lo contrastante de la simplicidad de la expresión de la simetría de traslación en la teoría covariante y su complejidad en la teoría escalar indican que el camino para entender dicha simetría en una red 3+1-dimensional comienza con la construcción de una teoría covariante. Ahora estamos trabajando en esa dirección [12, 13].

Agradecimientos

Uno de nosotros (HW) les agradece a J. Soda y A. Hosoya por los comentarios tan útiles que le hicieron, y al Instituto Yukawa del Instituto de

Tecnología de Tokio por su hospitalidad durante las semanas que siguieron al sexto encuentro Marcel Grossman. Le agradecemos a Luis Nasser por su ayuda en la edición de este artículo. La *Association Générale pour la Coopération et le Dévelopment* de Bélgica y la D.G.A.P.A.(UNAM) (proy. IN-100691) ayudaron en el financiamiento de este trabajo.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Bibliografía

[1] Sorkin R 1975 *Phys. Rev.* **D 12** 385
Piran T y Williams R M 1986 *Phys. Rev.* **D 33** 1622
Porter J 1987 *Class. Quantum Grav.* **4** 375, 651
Tuckey P A 1989 *Class. Quantum Grav.* **6** 1
Duval M R 1989 *Class. Quantum Grav.* **6** 141

[2] Katsymovsky V 1990 *Class. Quantum Grav.* **8** 1205

[3] Friedmann L y Jack I 1986 *J. Math. Phys.* **27** 2973

[4] Tuckey P A y Williams R M 1990 *Class. Quantum Grav.* **7** 2055

[5] Kheyferts A, La Fave N J y Miller W A 1988 *Int. J. Phys.* **27** 133
Kheyferts A, Miller W y Weeler J A 1988 *Phys. Rev. Lett.* 2042

[6] Bezerra V B 1988 *Class. Quantum Grav.* **5** 1065
Roceck M y Williams R M 1985 *Class. Quantum Grav.* **2** 701

[7] Desser S, Jackiw R y Hooft G 1984 *Ann. Phys.* **152** 220

[8] Brown J D *Lower Dimensional Gravity* (World Scientific, 1988)

[9] Waelbroeck H 1990 *Class. Quantum Grav.* **7** 751

[10] Regge T 1961 *Nuovo Cimento* **19** 558
Collins P A y Williams R M 1974 *Phys. Rev.* **D 10** 3537
Hartle J B y Sorkin R 1981 *Gen. Rel. Grav.* **13** 541
Ellis G F R y Williams R M 1984 *Gen. Rel. Grav.* **13** 541
Hamber H y Williams R M 1984 *Nucl. Phys.* **B 248** 392

Cheeger J *et al* 1984 *Commun. Math. Phys.* **92** 405
Berg B 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 904
Romer H y Zahringer M 1986 *Class. Quantum Grav.* **3** 897
Letho M, Nielsen H B y Nimomiya M 1986 *Nucl. Phys.* **B 272** 213
Miller W A 1986 *Found. Phys.* **16** 97
Piran T y Strominger A 1986 *Class. Quantum Grav.* **3** 97
Barrett J W 1988 *Class. Quantum Grav.* **5** 1187
Dubal M R 1989 *Class. Quantum Grav.* **6** 1925
Dubal M R 1990 *Class. Quantum Grav.* **7** 371

[11] Horowitz G 1989 *Commun. Math. Phys.* **125** 417

[12] Waelbroeck H y Zapata J A *Topological 3+1 Gravity*, en preparación

[13] Waelbroeck H, Urrutia L y Zertuche F *A Lattice Theory With Curvature and Translation Symmetry*, Proc.Sixth Marcel Grossman Meeting, World Scientific 1992

[14] Zuckerman G *Action Principles and Global Geometry*, Proc.1986 San Diego Summer Workshop, Ed. Yau S T 1986
Ashtekar A 1987 *Phys. Rev.Lett.* **57** 2244
Ashtekar A 1987 *Phys. Rev.* **D 36** 1587
Ashtekar A, Husain V, Rovelli C, Samuel J y Smolin L 1989 *Class. Quantum Grav.* **6** L185
Renteln P y Smolin L 1989 *Class. Quantum Grav.* **6** 275

[15] Witten E 1988 *Nucl. Phys.* **B 311** 46
Menotti P 1991 *Ann. Phys.* **208** 449
Renteln P 1990 *Class. Quantum Grav.* **7** 493

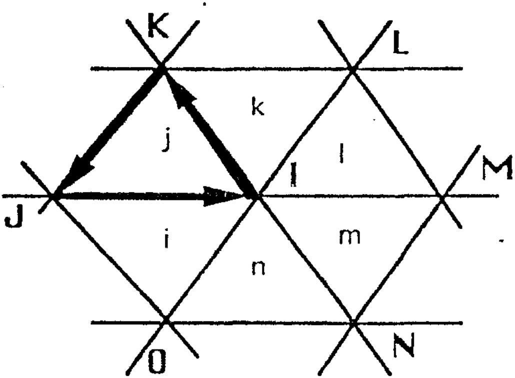
[16] Dirac P A M 1964 *Lectures on Quantum Mechanics* (Graduate School of Science Monograph Series) (New York: Belfer)

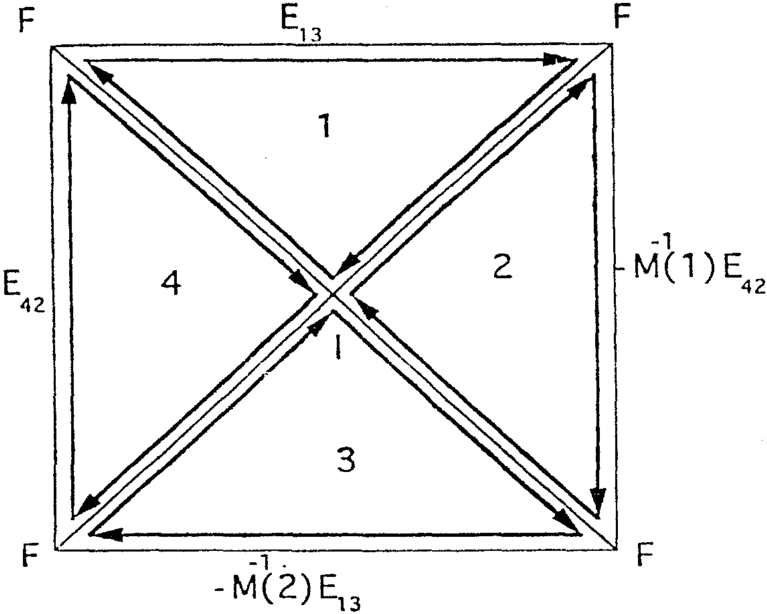
[17] Hanson A, Regge T y Teitelboim C 1976 *Constrained Hamiltonian Systems* (Roma: Academia Nazionale dei Lincei)

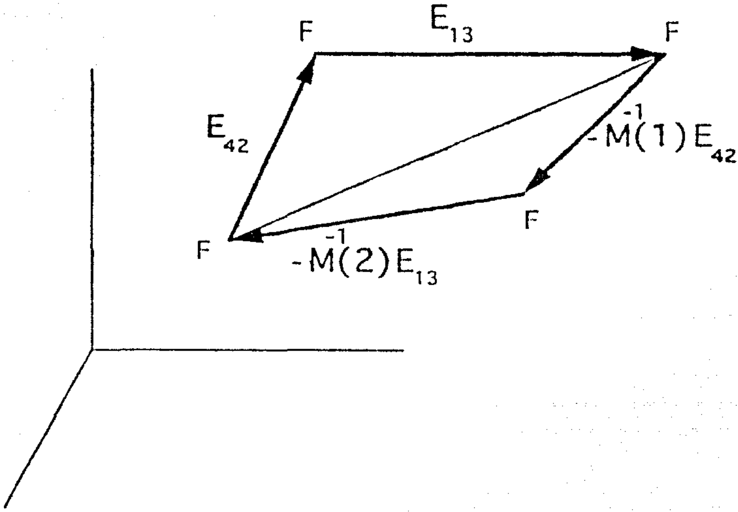
[18] Waelbroeck H 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2222

[19] Bander M 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 1825

[20] Montcrief V 1986 *Ann. Phys.* **167** 118
Montcrief V 1989 *J. Math. Phys.* **30** 2299
Carlip S 1989 *Nucl. Phys.* **B 324** 106
Hosoya A y Nakao K 1990 *Class.Quantum Grav.* **7** 63


K
L
k
j
l
M
I
J
i
m
n
N
O


F
E_{13}
F
1
4
2
E_{42}
$-M^{-1}(1)E_{42}$
I
3
F
F
$-M^{-1}(\dot{2})E_{13}$


F
E_{13}
F
E_{42}
$-M^{-1}(1)E_{42}$
F
F
$-M^{-1}(2)E_{13}$