

19
28



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

facultad de química

Cálculo Simbólico y Numérico
de Aberraciones Ópticas

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
Q U I M I C O
P R E S E N T A
Guillermo Krötzsch Gómez

México DF

1993

TESIS CON
FALLA LE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

| | | |
|----------|--|----|
| 1 | INTRODUCCION | |
| 2 | GRUPOS Y ALGEBRAS DE ABERRACIONES | |
| 2.1 | Grupos y Realizaciones | 1 |
| 2.2 | Espacio Vectorial | 2 |
| 2.3 | Espacios Vectoriales de Polinomios | 3 |
| 2.4 | Multiplicación de Polinomios | 4 |
| 2.5 | Algebras de Lie | 5 |
| 2.6 | Algebras de Cubrimiento | 7 |
| 2.7 | Elementos Centrales y Representaciones | 9 |
| 2.8 | Paréntesis de Poisson y de Berezin | 10 |
| 2.9 | Algebras de Aberraciones (o cálculo de aproximaciones) | 11 |
| 2.10 | Grupos de Invariancia de un Algebra | 12 |
| 2.11 | El Grupo de Heisenberg-Weyl | 14 |
| 2.12 | El Grupo de Invariancia Lineal en el Algebra de Aberraciones $HW(N)$ | 17 |
| 2.13 | El Grupo de Invariancia No-lineal en $HW(N)$ | 21 |
| 3 | LA OPTICA GEOMETRICA EN ESPACIO FASE | |
| 3.1 | Las Ecuaciones de Hamilton de la Optica | 25 |
| 3.2 | La Ley de Snell de la Refracción | 26 |
| 3.3 | Coordenadas de Pantalla y Eje Optico | 27 |
| 3.4 | Refracción en Coordenadas de Pantalla | 29 |
| 3.5 | Factorización de la Transformación de la Superficie Refractante | 30 |
| 3.6 | Desarrollos en Series de Aberraciones | 32 |
| 3.7 | Solución Aproximante a la Transformación Ráfz | 34 |
| 3.8 | La Parametrización más Condensada de las Transformaciones | 39 |
| 3.9 | Compisición de Aberraciones (MEXLIE) | 42 |
| 4 | FUNCIONES DE CALCULO SIMBOLICO | |
| 4.1 | El Manejo de Polinomios por Cómputo Simbólico | 45 |
| 4.2 | Polinomios en 2 + 2 Coordenadas | 46 |
| 4.3 | Manejo de Transformaciones Lineales | 47 |
| 4.4 | Coordenadas del Espacio Fase en Sistemas Axialmente Simétricos | 48 |

| | | |
|------------------------|---|----|
| 4.5 | La Base Monomial y su Representación Vectorial | 50 |
| 4.6 | La Base Simpléctica/Esférica en Una Dimensión | 51 |
| 4.7 | La Base Simpléctica/Esférica en Dos Dimensiones | 52 |
| 4.8 | Los Armónicos Simplécticos | 54 |
| 4.9 | La Base Simpléctica bajo Transformaciones Lineales | 56 |
| 4.10 | Tablas de Multiplicación de Polinomios | 57 |
| 4.11 | Tablas de Paréntesis de Poisson | 60 |
| 4.12 | Comparación entre las dos Bases por el Número de Elementos en las Tablas | 66 |
| CONCLUSIONES | | 69 |
| REFERENCIAS | | 71 |

1. Introducción

Este trabajo está estructurado como una secuencia ordenada de conceptos matemáticos; sin embargo, es notable la manera en que el desarrollo del tema sugiere estructuras sensibles, que nos invitan a pensar en un modelo concreto, cuyas representaciones reproducen los comportamientos reales en el plano fase.

Introducimos el tema en el capítulo 2 con una presentación general del principio de simetría y covariancia bajo las transformaciones que producen los elementos ópticos sobre los rayos del espacio fase de la óptica geométrica, que estudiamos en el capítulo 3 junto con los grupos de transformaciones que son *mapeos canónicos* de este espacio fase.

Para describir la evolución de cualquier sistema derivamos las ecuaciones de movimiento sobre la base de postulados geométricos y dinámicos. Partimos de condiciones iniciales y el problema consiste en resolver estas ecuaciones de movimiento. La dinámica de los sistemas depende de su estructura propia y de la naturaleza del medio, mientras que la geometría depende de la simetría del espacio homogéneo. Las ecuaciones de Hamilton son la representación concreta de la *dialéctica* de nuestro pensamiento del movimiento de la naturaleza.

Cuando las ecuaciones de movimiento de un sistema permanecen inalteradas bajo las transformaciones de un grupo uniparamétrico, entonces alguna cantidad observable del sistema, asociada con ese grupo de transformaciones, permanecerá constante durante la evolución en el parámetro; comúnmente es el tiempo en mecánica, y es la distancia sobre el eje z en óptica. La proposición anterior es una consecuencia del teorema de la matemática alemana Emmy Noether

“Toda simetría de las ecuaciones de movimiento es una ley de conservación.”

Este es el caso en óptica geométrica que describe la evolución de los rayos de luz mediante las ecuaciones de movimiento de Hamilton, donde se encuentra que una componente del momento es invariante; esta es la forma diferencial de la ley de Snell.

Un medio óptico es invariante bajo traslaciones y rotaciones siempre y cuando sea homogéneo e isotrópico. Los elementos ópticos que aquí consideramos tienen simetría solamente bajo rotación alrededor del eje z , por tanto el medio se dice tiene simetría axial. Bajo estas transformaciones se conserva el momento angular, a esta invariante se le conoce como invariante de Petzval.

El conjunto de transformaciones forman un grupo; su acción sobre los rayos de la óptica geométrica conlleva una *representación* del grupo de estas transformaciones. La representación de un grupo *realiza* los elementos del grupo mediante matrices. La representación es reducible a una forma diagonal con bloques irreducibles. La reducibilidad de la representación constituye una poderosa herramienta de cálculo para describir

el resultado de componer las transformaciones mediante productos de matrices más pequeñas y repetidas. Las matrices son la *realización del grupo* y su representación no es trivial.

Los métodos de la óptica de Lie se aplican en la clasificación de aberraciones basada en las propiedades de simetría del sistema. Al hacer un desarrollo en serie de potencias de las coordenadas de un sistema alrededor del eje óptico, la parte lineal es la aproximación paraxial, en tanto que la parte no lineal constituye el *ideal* de aberraciones (un ideal es una subálgebra invariante, no conmutativa para órdenes de aberración mayores que tres, que cuenta con sus constantes de estructura).

Los elementos que constituyen un sistema óptico, tales como vuelo libre, superficies refractantes [WOLF Y KRÖTZSCH (1991B)] y ciertos modelos de fibras ópticas quedan determinados por el conjunto de sus coeficientes de aberración, que son calculados hasta orden siete en el capítulo 4, donde comparamos la eficiencia computacional relativa, al multiplicar y al calcular el paréntesis de Poisson, entre polinomios de base monomial y de base simpléctica. En estas bases damos las tablas de multiplicación y de paréntesis de Poisson.

Para superficies refractantes estos coeficientes de aberración se obtienen a partir de funciones recursivas calculadas, [WOLF Y KRÖTZSCH (1991)] mediante *programación simbólica* en lenguaje *MUSIMP*. Los resultados numéricos se generan con programas en PASCAL para su representación gráfica [CORREA Y WOLF (1989)] mediante diagramas de mancha.

2. Grupos y álgebras de aberraciones

En este capítulo presentamos las estructuras matemáticas que acomodan a los conceptos físicos del capítulo siguiente y a los algoritmos de cómputo del último capítulo. Los conceptos básicos de grupo, espacio vectorial y álgebras de Lie, así como de álgebras de cubrimiento y representaciones por matrices, provienen de material estándar de teoría de grupos en libros de texto como el de Robert Gilmore [GILMORE (1978)]. Los ejemplos que nos interesan aquí son: el álgebra de Heisenberg-Weyl HW, y el álgebra paraxial (lineal o simpléctica) $sl(2, \mathbb{R}) = so(2, 1) = su(1, 1) = sp(2, \mathbb{R})$, cuyo paréntesis de Lie es el paréntesis de Poisson originalmente usado en la mecánica clásica [GOLDSTEIN (1963)]. Las álgebras de aberraciones y sus representaciones por matrices siguen la presentación implícita en los trabajos en óptica de K.B. Wolf, [WOLF (1986)], [NAVARRO-SAAD Y WOLF (1986a)], y [WOLF (1988b)]. Terminamos con la parametrización de Dragt y Finn de las transformaciones canónicas [DRAGT Y FINN (1976)], [DRAGT, FOREST Y WOLF (1986)], [FOREST Y BERZ (1989)].

2.1. Grupos y Realizaciones

Un conjunto de elementos $\{g_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ (etiquetados por el índice i en un conjunto \mathcal{N}) constituyen un grupo \mathcal{G} cuando está definida una regla de composición para cualesquiera dos de sus elementos, tal que satisfaga los cuatro axiomas siguientes:

- Cerradura.** Para todo $g_i, g_j \in \mathcal{G}$ existe $g_i \circ g_j \in \mathcal{G}$.
- Asociatividad.** Para todo $g_i, g_j, g_k \in \mathcal{G}$, existe $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$.
- Existencia del Neutro.** Existe $g_0 \in \mathcal{G}$ tal que, para todo $g_i \in \mathcal{G}$, $g_i \circ g_0 = g_i$.
- Existencia de inversos.** Para todo $g_i \in \mathcal{G}$, existe $g_i^{-1} \in \mathcal{G}$ tal que $g_i \circ g_i^{-1} = g_0$.

Dos consecuencias inmediatas de estos axiomas son la unicidad del elemento neutro y del inverso. Un grupo abeliano es aquel donde la operación de composición es conmutativa ($g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$ para todo $g_i, g_j \in \mathcal{G}$). Un subgrupo \mathcal{G}' de un grupo \mathcal{G} es un subconjunto de elementos contenidos en \mathcal{G} los cuales cumplen entre sí mismos los axiomas de grupo. Un grupo finito es aquel que tiene un número finito $|\mathcal{N}|$ de elementos.

Ejemplos de grupos son: el conjunto de los números enteros bajo la operación de suma ($\circ = +$); este grupo es abeliano, infinito numerable. Un subgrupo finito de éste es el conjunto de enteros módulo un entero N . Otro ejemplo son los grupos de permutaciones de P objetos ($P!$ elementos, no abeliano). Particularmente útil para

nosotros será el grupo de matrices reales no-singulares de $N \times N$ bajo multiplicación ($\mathcal{M} = \mathbb{R}^{N^2}$), llamado $GL(N, \mathbb{R})$. Un subgrupo de este último es el de matrices cuyo determinante es la unidad, llamado $SL(N, \mathbb{R})$; varios otros subgrupos serán definidos más adelante. Las matrices son una forma algebraica útil para escribir y computar con un grupo abstracto; las llamamos una *realización* del grupo.

2.2. Espacio Vectorial

Un espacio vectorial real \mathcal{V} es un conjunto de elementos con *dos* operaciones definidas: una operación de *suma* y una de *producto por número real*. Respecto a la primera forma un grupo abeliano:

(a) Para todo $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathcal{V}$, existe su suma $\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j \in \mathcal{V}$, vale la asociatividad de la suma, el elemento neutro es el vector $\mathbf{0}$, y el elemento inverso a \mathbf{v} lo denotamos por $-\mathbf{v}$. La operación de producto por real (indicada por “ \cdot ”) se introduce por el axioma

(b) Para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y $r \in \mathbb{R}$, existe $r \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, complementado por $r_1 \cdot (r_2 \cdot \mathbf{v}) = (r_1 r_2) \cdot \mathbf{v}$ (donde $r_1 r_2$ es el producto ordinario entre números reales) y $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$. Las operaciones de suma y producto por escalar son *distributivas* entre sí, es decir,

$$(c) \quad r \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = r \cdot \mathbf{v}_1 + r \cdot \mathbf{v}_2 \quad \text{y} \quad (r_1 + r_2) \cdot \mathbf{v} = r_1 \cdot \mathbf{v} + r_2 \cdot \mathbf{v}.$$

Hacemos notar que $r_1 + r_2$ es la suma ordinaria de números reales, mientras que las demás son sumas vectoriales. De aquí que $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. En adelante, normalmente suprimiremos el símbolo “ \cdot ” para el producto de real por vector.

En un espacio vectorial \mathcal{V} un subconjunto de elementos $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ son *linealmente independientes*, si la suma

$$\sum_{i=1}^N r_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \text{tiene por solución única} \quad r_1 = 0, r_2 = 0, \dots, r_N = 0.$$

Si existen soluciones no nulas se dice que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ son *linealmente dependientes*.

Se dice que $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$ es un conjunto *máximo* de elementos linealmente independientes, si, dado cualquier otro $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, el conjunto $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N, \mathbf{v}\}$ es linealmente dependiente. Un espacio vectorial \mathcal{V} es llamado *N -dimensional* cuando es posible encontrar a lo más N vectores linealmente independientes. Si esto no es posible, se considera su dimensión como infinita. En espacios de dimensión finita, este conjunto máximo se llama una *base* de \mathcal{V} . Entonces podremos escribir

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N v_i \mathbf{e}_i,$$

y los números $\{v_i\}_{i=1}^N$ son llamados las *coordenadas* de \mathbf{v} en la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^N$.

Los vectores de un espacio vectorial de dimensión finita se pueden representar por N -adas de coeficientes relativas a una base de la manera siguiente. Representaremos los vectores de la base como

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, un vector cualquiera $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ se puede denotar por un vector columna de la forma

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N v_i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_N) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}.$$

En la última expresión estamos usando notación matricial donde el vector renglón de \mathbf{e}_i 's forma una matriz unidad de $N \times N$.

2.3. Espacios Vectoriales de Polinomios

El conjunto de funciones en dos variables, $f(p, q)$, $g(p, q)$, ..., bajo suma y producto por números reales $[af(p, q) + bg(p, q)]$, forman un espacio vectorial de dimensión infinita. Este espacio \mathcal{F} contiene sub-espacios vectoriales de dimensión finita, como por ejemplo, las funciones homogéneas de cierto grado k estricto, cuya definición es $f(ap, bq) = a^{k_1} b^{k_2} f(p, q)$, con $k_1 + k_2 = k$. Es fácil ver que se trata de funciones de la forma

$$f^{[k]}(p, q) = f_1^{[k]} p^k + f_2^{[k]} p^{k-1} q + f_3^{[k]} p^{k-2} q^2 + \dots + f_k^{[k]} p q^{k-1} + f_{k+1}^{[k]} q^k$$

y constituye un espacio vectorial $\mathcal{F}^{[k]}$ de dimensión $k+1$. De esta manera denotaremos las funciones del espacio por columnas

$$\mathbf{f}^{[k]} = \begin{pmatrix} f_1^{[k]} \\ f_2^{[k]} \\ f_3^{[k]} \\ \vdots \\ f_{k+1}^{[k]} \end{pmatrix}.$$

Funciones polinomiales con sumandos de grados $1, 2, \dots, k, \dots, N$,

$$f(p, q) = \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{k+1} f_m^{[k]} p^{k-m+1} q^{m-1}$$

están en la *suma directa* de espacios $\mathcal{F}^{(N)} = \mathcal{F}^{[0]} \oplus \mathcal{F}^{[1]} \oplus \dots \oplus \mathcal{F}^{[N]}$, donde $\mathcal{F}^{[0]}$ es el espacio 1-dimensional de constantes, $\mathcal{F}^{[1]}$ el espacio 2-dimensional de funciones lineales en p y q , etc. Su representación podemos hacerla por *multicolumnas* de la manera siguiente

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} f^{[0]} \\ f^{[1]} \\ f^{[2]} \\ \vdots \\ f^{[N]} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, el espacio de funciones $\mathcal{F}^{(\mathbb{N}_0)} = \mathcal{F}^{[0]} \oplus \mathcal{F}^{[1]} \oplus \dots \oplus \mathcal{F}^{[N]} \oplus \dots$ que tienen desarrollo en serie formal de Taylor forman el subespacio de dimensión infinita pero numerable.

En el Capítulo 4 trataremos la representación en muSIMP de polinomios descompuestos por grados.

2.4. Multiplicación de Polinomios

El producto ordinario entre dos polinomios es una operación conmutativa y asociativa (aunque sin inverso dentro del espacio vectorial), que define un producto correspondiente entre dos espacios vectoriales de dimensión finita, con valores en otro espacio vectorial. Si los grados estrictos de los polinomios factores son k y k' , el grado estricto del polinomio producto será $k + k'$. Cuando hablamos del grado máximo, esta afirmación también vale en la forma

$$\mathcal{F}^{(k)} \times \mathcal{F}^{(k')} = \mathcal{F}^{(k+k')}.$$

Para polinomios en una variable x , tales como $f = \sum_{a=0}^A f_a x^a$ y $g = \sum_{b=0}^B g_b x^b$, podemos escribir

$$\sum_{a=0}^A f_a x^a \sum_{b=0}^B g_b x^b = \sum_{c=0}^{A+B} \left(\sum_{d=\max(0, c-B)}^{\min(A, c)} f_d g_{c-d} \right) x^c.$$

Cuando los polinomios están almacenados en forma de vector, su cómputo simbólico no tiene que factorizar los coeficientes de potencias x^c , sino solamente efectuar la suma de productos. Por ejemplo para $A = 1$ y $B = 2$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \cdot g_0 \\ f_0 \cdot g_1 + f_1 \cdot g_0 \\ f_0 \cdot g_2 + f_1 \cdot g_1 \\ f_1 \cdot g_2 \end{pmatrix}.$$

En el caso de polinomios de más de una variable, o de bases *no* monomiales —como veremos adelante— lo más conveniente resulta guardar una *tabla* de multiplicaciones entre los coeficientes arreglados en multivectores y accedidos por sus índices

de renglón.

$$\begin{pmatrix} f^{[0]} \\ f^{[1]} \\ f^{[2]} \\ \vdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g^{[0]} \\ g^{[1]} \\ g^{[2]} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{[0]} \times g^{[0]} \\ f^{[0]} \times g^{[1]} + f^{[1]} \times g^{[0]} \\ f^{[0]} \times g^{[2]} + f^{[1]} \times g^{[1]} + f^{[2]} \times g^{[0]} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Esta operación de producto entre vectores está inducida por el producto entre polinomios. El elemento neutro bajo esta multiplicación es el polinomio (escalar) 1. Entre espacios vectoriales podemos definir muchos tipos de operaciones bilineales, con propiedades diversas, por ejemplo: producto componente-por-componente entre vectores renglón de tres componentes: $(a, b, c) \circ (e, f, g) = (ae, bf, cg)$. Que tales productos sean útiles o no depende de la aplicación. Ciertamente el producto "polinomial" examinado en esta sección es el indicado para la multiplicación cuando los vectores almacenan los coeficientes de polinomios.

En el Capítulo 4 trataremos en detalle el algoritmo de multiplicación de polinomios en su forma común de lista y en la representación por vectores indicada aquí.

2.5. Algebras de Lie

De la Sección 2.3, consideramos un espacio vectorial \mathcal{V} provisto de una regla de composición, llamada paréntesis de Lie, $\{ \cdot, \cdot \} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ que asocia a cada pareja de elementos \mathbf{u} y \mathbf{v} un tercer elemento $\mathbf{w} = \{ \mathbf{u}, \mathbf{v} \} \in \mathcal{V}$. La estructura resultante se llama *álgebra lineal* si esta regla de composición tiene las propiedades siguientes:

- (a) *Cerradura:* Para todo $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathcal{V}$, $\{ \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \} \in \mathcal{V}$.
- (b) *Bilinealidad:* $\{ r_i \mathbf{v}_i, r_j \mathbf{v}_j + r_k \mathbf{v}_k \} = r_j \{ \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \} + r_k \{ \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \}$
 $\{ r_i \mathbf{v}_i + r_j \mathbf{v}_j, r_k \mathbf{v}_k \} = r_i \{ \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \} + r_j \{ \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \}.$

Estamos interesados en un tipo especial de álgebra lineal donde la regla de composición cumple (en lugar de la conmutatividad de la multiplicación) la propiedad de

- (c) *Antisimetría:* $\{ \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \} = -\{ \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \},$

y (en lugar de asociatividad cumple) la identidad de

- (d) *Jacobi:* $\{ \{ \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \}, \mathbf{v}_k \} + \{ \{ \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \}, \mathbf{v}_i \} + \{ \{ \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i \}, \mathbf{v}_j \} = 0.$

Cuando la regla de composición del espacio vectorial cumple con estas cuatro propiedades, se llama *álgebra de Lie*. Como la operación es bilineal, es suficiente con definir la operación entre los vectores base del espacio. La forma general escrita en términos de las coordenadas de los vectores $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N u_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^N v_j \mathbf{e}_j$ y $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{e}_k$, se reduce a dar la regla de composición para los vectores base,

$$\{ \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \} = \sum_{k=1}^N c_{ij}^k \mathbf{e}_k,$$

donde las $c_{i,j}^k$ son las constantes de estructura que caracterizan el álgebra. Entonces, para las coordenadas es

$$w_k = \sum_{i,j=1}^N c_{i,j}^k u_i v_j, \quad c_{i,j}^k \in \mathbb{R}.$$

Las constantes de estructura son las que caracterizan el álgebra de Lie y le imprimen su nombre. No cualquier conjunto de constantes $c_{i,j}^k$, $i, j, k = 1, \dots, N$ es adecuado, sino que deben satisfacer relaciones que son consecuencia de las propiedades (c) y (d) anteriores: $c_{i,j}^k = -c_{j,i}^k$ y $\sum_{l=1}^N c_{i,j}^l c_{l,k}^m + c_{j,k}^l c_{l,i}^m + c_{k,i}^l c_{l,j}^m = 0$. Por ejemplo, para $N = 3$ hay 11 álgebras posibles, desde el álgebra de traslaciones o abeliana $c_{i,j}^k = 0$ hasta las que daremos abajo como ejemplos clásicos, y que son las más relevantes para nuestro tema.

El álgebra de Heisenberg-Weyl HW con elementos base p, q y ℓ . En notación vectorial clásica para $v = xp + yq + z\ell$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1 x_2 - x_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente, podemos definir el álgebra por los paréntesis de Lie entre los vectores base

$$\{q, p\} = \ell, \quad \{p, \ell\} = 0, \quad \{q, \ell\} = 0.$$

Como la composición iterada de los vectores del álgebra siempre desemboca en cero, esta álgebra se llama *nilpotente*.

El álgebra de rotaciones $so(3)$. La operación de producto vectorial ordinario (producto cruz) entre 3-vectores $v = xj_x + yj_y + zj_z$ tiene la siguiente forma conocida

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Esto equivale a la regla de composición entre los vectores base

$$\{j_x, j_y\} = j_z, \quad \{j_y, j_z\} = j_x, \quad \{j_z, j_x\} = j_y.$$

Esta álgebra aparece cuando la regla de composición es el conmutador $\{A, B\} = AB - BA$ entre los operadores de momento angular en la mecánica cuántica; se llama $so(3)$.

El álgebra paraxial $sl(2, \mathbb{R}) = so(2, 1) = su(1, 1) = sp(2, \mathbb{R})$. Para $f = f_+ \mathcal{L}_+ + f_0 \mathcal{L}_0 + f_- \mathcal{L}_-$, con los paréntesis de Lie definidos para los vectores base por

$$\{\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_+\} = \mathcal{L}_+, \quad \{\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_-\} = -\mathcal{L}_-, \quad \{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\} = 2\mathcal{L}_0.$$

Hay varias realizaciones de esta álgebra. Una de ellas es mediante matrices de 2×2 , que mapean los vectores base del álgebra en las matrices

$$L_+ \mapsto L_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_0 \mapsto L_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_- \mapsto L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La conmutación de las matrices, indicada $[M; N] = MN - NM$, reproduce el álgebra

$$[L_0, L_+] = L_+, \quad [L_0, L_-] = -L_-, \quad [L_+, L_-] = 2L_0.$$

En esta realización, los vectores generales del álgebra quedan representados por matrices de 2×2 de traza cero:

$$f \mapsto \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}f_0 & f_+ \\ f_- & -\frac{1}{2}f_0 \end{pmatrix}, \quad g \mapsto \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}g_0 & g_+ \\ g_- & -\frac{1}{2}g_0 \end{pmatrix}, \quad \text{etc.}$$

El paréntesis de Lie (conmutador) entre dos elementos es

$$\mathbf{h} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \mathbf{f}\mathbf{g} - \mathbf{g}\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_+g_- - f_-g_+ & -f_+g_0 + f_0g_+ \\ -f_0g_- + f_-g_0 & f_-g_+ - f_+g_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}h_0 & h_+ \\ h_- & -\frac{1}{2}h_0 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de \mathbf{h} , funciones bilineales de las f 's y g 's dan lugar a una nueva representación vectorial del paréntesis de Lie como un vector que *tabula* la operación. Esta es

$$\begin{pmatrix} h_+ \\ h_0 \\ h_- \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} f_+ \\ f_0 \\ f_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_+ \\ g_0 \\ g_- \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -f_+g_0 + f_0g_+ \\ 2f_+g_- - 2f_-g_+ \\ -f_0g_- + f_-g_+ \end{pmatrix}.$$

Esta álgebra de Lie recibe el nombre de $sl(2, \mathbb{R})$; puede verse que es diferente del operación vectorial (producto 'cruz' en $so(3)$) escrito arriba.

Para el álgebra que nos interesa en este trabajo, en el Capítulo 4 damos los algoritmos de cómputo simbólico que permiten efectuar la operación de paréntesis de Lie para polinomios en tres variables.

2.6. Álgebras de cubrimiento

Sea \mathcal{A} un álgebra de Lie y un espacio vectorial de dimensión n , con la regla de composición $\{\cdot, \cdot\}$ (su paréntesis de Lie). Ahora definimos una operación nueva, que en nuestro interés será la multiplicación de funciones y operadores. Es un mapeo de parejas de elementos en \mathcal{A} en un espacio vectorial $\mathcal{A}^{[2]}$, que indicaremos por un asterisco: $\mathcal{A} * \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{[2]}$. Recursivamente, con esto definimos un mapeo $\mathcal{A} * \mathcal{A}^{[k]} \rightarrow \mathcal{A}^{[k+1]}$, para $k = 2, 3, \dots$ e indicando $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{[1]}$. Ahora bien, veremos que podemos extender la operación del álgebra \mathcal{A} para la unión de todas las $\mathcal{A}^{[k]}$'s para una sucesión creciente $k = 2, 3, 4, \dots$. A este espacio vectorial, provisto de un paréntesis de Lie lo llamamos *álgebra universal de cubrimiento* de \mathcal{A} , y lo indicaremos por $\bar{\mathcal{A}}$.

Afirmamos que cada $A^{[k]}$ es un espacio vectorial pues podemos construir una base:

$$\begin{aligned}
 e_1^{[k]} &= \overbrace{e_1 * e_1 * \dots * e_1}^{k \text{ factores}}, \\
 e_2^{[k]} &= e_2 * e_1 * \dots * e_1, \\
 &\vdots \\
 e_n^{[k]} &= e_n * e_1 * \dots * e_1, \\
 e_{n+1}^{[k]} &= e_1 * e_2 * \dots * e_1, \\
 &\vdots \\
 e_{\nu(n)}^{[k]} &= e_n * e_n * \dots * e_n.
 \end{aligned}$$

La dimensión $\nu(n)$ es n^k para un producto "*" general, donde $e_i * e_j \neq e_j * e_i$. La operación "*" puede ser *conmutativa* como en la mecánica clásica y de la óptica geométrica, o *no-conmutativa* como en la mecánica cuántica y la óptica ondulatoria.

En el caso de que el producto sea conmutativo, $e_i * e_j = e_j * e_i$, arriba tendremos $e_{n+1}^{[k]} = e_2^{[k]}$, etc., y la dimensión será menor: el número de combinaciones simétricas de k índices, cada uno con rango $1, 2, \dots, n$, es decir el coeficiente binomial $\nu(n) = \binom{n}{k} = n! / (n-k)! k!$.

Con respecto a las demás operaciones del espacio vectorial y álgebra, el producto "*" tendrá la propiedad de

$$\begin{aligned}
 \text{(a) Bilinealidad: } w_1 * (r w_2 + s w_3) &= r w_1 * w_2 + s w_1 * w_3 \quad (r, s \in \mathbb{R}, w_i \in A^{[k]}) \\
 (r w_1 + s w_2) * w_3 &= r w_1 * w_3 + s w_2 * w_3.
 \end{aligned}$$

Respecto a la operación de paréntesis de Lie, cumplirá con la

$$\text{(b) Identidad de Leibnitz: } \{w_1 * w_2, w_3\} = w_1 * \{w_2, w_3\} + \{w_1, w_3\} * w_2.$$

Como nuestro interés es trabajar con representaciones de polinomios, pediremos que el producto "*" sea la multiplicación con la propiedad de

$$\text{(c) Conmutatividad: } w_1 * w_2 = w_2 * w_1.$$

Volvemos a nuestro prototipo de espacios vectorial de polinomios en p y q visto en las Secciones 2.3 y 2.4. Estos vectores base estarán sujetos al álgebra de Lie HW (Heisenberg-Weyl) visto en la sección anterior. Así se construye el conjunto de todos los polinomios en p y q ($y \ell$), sujetos al paréntesis de Lie $\{q, p\} = \ell$, $\{p, \ell\} = 0$, $\{q, \ell\} = 0$.

La estructura del álgebra de cubrimiento \overline{HW} y su base es

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{A} = & A^{[1]} & + & A^{[2]} & + & A^{[3]} & + \dots + A^{[N]} + \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & p & & p^2 & & p^3 & & p^N \\ & q & & pq & & p^2q & & p^{N-1}q \\ & \ell & & p\ell & & p^2\ell & & p^{N-1}\ell \\ & & & q^2 & & \vdots & & \vdots \\ & & & q\ell & & q\ell^2 & & q\ell^{N-1} \\ & & & \ell^2 & & \ell^3 & & \ell^N \end{array}$$

Para numerar consecutivamente los elementos base, podemos seguir la regla "lexicográfica": $p^a q^b \ell^c$, donde se ordenan los monomios según los números cuyos dígitos son abc ; en la segunda columna de arriba, éstos son los números decrecientes 200, 110, 101, 020, 011, 002.

2.7. Elementos centrales y representaciones

El álgebra HW y su cubrimiento \overline{HW} , en la mecánica clásica y óptica geométrica, identifica ℓ con el número 1. La manera de introducir esta correspondencia entre elementos del álgebra (aquí ℓ) y números λ es imponer en el álgebra de cubrimiento la siguiente relación entre elementos de $A^{[2]}$ y $A^{[1]}$:

$$\text{Representación } \lambda. \quad v * \ell = \lambda \cdot v$$

donde v es un elemento arbitrario del álgebra y " \cdot " es el producto de número por vector. Para que esta igualdad sea compatible con las operaciones del álgebra y de su cubrimiento, se necesita que respete la bilinealidad de los espacios vectoriales [es decir, $(av_1 + bv_2) * \ell = \lambda a \cdot v_1 + \lambda b \cdot v_2$, lo cual es evidente] y en su carácter de álgebras, la igualdad

$$\{w, v * \ell\} = \{w, \lambda \cdot v\} = \lambda \{w, v\}.$$

Ahora, por la identidad de Leibnitz del álgebra de cubrimiento,

$$\begin{aligned} \{w, v * \ell\} &= v * \{w, \ell\} + \{w, v\} * \ell \\ &= v * \{w, \ell\} + \lambda \{w, v\} \end{aligned}$$

En consecuencia, se necesita que $\{w, \ell\} = 0$ para cualquier $w \in A^{[N]}$. Elementos tales como ℓ , cuyo paréntesis de Lie con cualquier elemento del álgebra es cero, se les llama *elementos centrales* del álgebra.

Este reemplazo de elementos centrales del álgebra (o del álgebra de cubrimiento) por un número real fijo λ , corresponde a estar en una *representación* λ del álgebra, que identifica clases de equivalencia dentro de \bar{A} . Podemos llamar $A^{[0]}$ a las constantes.

Así, la nueva estructura y base del álgebra de cubrimiento \overline{HW} en una representación λ es

$$\begin{array}{cccccccc} \bar{A} = & A^{[0]} & + & A^{[1]} & + & A^{[2]} & + & A^{[3]} & + \dots + & A^{[N]} & + \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 1 & & p & & p^2 & & p^3 & & p^N & \\ & & & q & & pq & & p^2q & & p^{N-1}q & \\ & & & & & q^2 & & pq^2 & & p^{N-2}q & \\ & & & & & & & q^3 & & \vdots & \\ & & & & & & & & & pq^{N-1} & \\ & & & & & & & & & q^N & \end{array}$$

El valor numérico de λ quedará incluido en los coeficientes.

En los ejemplos presentados en la Sección 2.5, se pueden tomar otros elementos centrales de las álgebras de cubrimiento respectivas, pues ni $so(3)$ ni $sl(2, \mathbb{R})$ tienen elementos centrales. Así, para $so(3)$ y $sl(2, \mathbb{R})$ podemos tomar

$$\begin{aligned} j^2 &= j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 \in so(3)^{[2]} \\ L^2 &= L_+ L_- + L_0^2 \in sl(2, \mathbb{R})^{[2]}, \end{aligned}$$

y verificar que $\{j^2, f(j_x, j_y, j_z)\} = 0$ y $\{L^2, g(L_+, L_-, L_0)\} = 0$. Tales elementos se llaman de *Casimir*.

En la representación λ del álgebra de cubrimiento \overline{HW} podemos dar una realización de $sl(2, \mathbb{R})$ que es de importancia en nuestros desarrollos. Representamos

$$L_+ = -p^2/2\lambda, \quad L_0 = pq/2\lambda, \quad L_- = q^2/2\lambda.$$

Con ello, podemos verificar que $\{q, p\} = \lambda$ implica

$$\{L_0, L_+\} = L_+, \quad \{L_0, L_-\} = -L_-, \quad \{L_+, L_-\} = 2L_0.$$

Identificamos esta álgebra con $sl(2, \mathbb{R})$ de la Sección 2.5. Hacemos notar también que, mientras que el álgebra de cubrimiento universal \overline{HW} es de dimensión infinita, ésta contiene $sl(2, \mathbb{R})$ como la (única) subálgebra finita, aparte de \overline{HW} misma. \overline{HW} contiene de la misma manera otras subálgebras propias de dimensión infinita, dadas por funciones de p y q de la forma $qf(p) + g(p)$, pues

$$\{qf_1 + g_1, qf_2 + g_2\} = qf_3 + g_3, \quad f_3 = f_1 f_2' - f_1' f_2, \quad g_3 = f_1 g_2' - g_1' f_2.$$

2.8. Paréntesis de Poisson y de Berezin

Nosotros usaremos la representación del álgebra \overline{HW} $\{L_+, L_0, L_-\}$, donde la dimensión de $A^{[k]}$ es $\nu(k) = k + 1$, como en el ejemplo de la Sección 2.3. El paréntesis

de Lie queda representado, en este caso, por el *paréntesis de Poisson*, que procederemos a construir. Notemos que de la igualdad de Leibnitz $\{q^n, p\} = \{q^{n-1} * q, p\} = \lambda q^{n-1} * \{q, p\} + \lambda \{q^{n-1}, p\} * q = \lambda q^{n-1} + \lambda \{q^{n-1}, p\} * q$. Esta relación de recurrencia es satisfecha por $\{q^n, p\} = n\lambda q^{n-1}$. Similarmente, $\{q, p^m\} = \lambda m p^{m-1}$. Al aplicar nuevamente la identidad de Leibnitz, obtenemos el paréntesis de Lie de dos elementos base arbitrarios del álgebra $A^{[k]}$:

$$\{q^j p^k, q^m p^n\} = \lambda(jn - km)q^{j+m-1}p^{k+n-1}.$$

Para f y g funciones polinomiales o analíticas de q y p , que son combinaciones lineales de estos elementos base, la operación queda satisfecha en términos del *paréntesis de Poisson* definido por

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q},$$

que tomamos para $\lambda = 1$.

La realización de los paréntesis de Lie por medio de derivadas respecto de variables contenidas en el paréntesis de Poisson, se extiende a todas las álgebras de cubrimiento con multiplicación " $*$ " conmutativa. En efecto, si un álgebra A tiene una base $\{e_i\}_{i=1}^N$ y constantes de estructura $c_{i,j}^k$, entonces el paréntesis de Lie en el álgebra de cubrimiento universal \bar{A} , que comprende todas las funciones con serie de Taylor formal en los vectores de la base, $f(e_1, e_2, \dots, e_N)$, $g(e_1, e_2, \dots, e_N)$, se puede representar por la operación diferencial conocida como *paréntesis de Berezin*:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j,k=1}^N c_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial e_i} \frac{\partial g}{\partial e_j} e_k.$$

La veracidad de esto se advierte al notar que se reproduce el paréntesis de Lie ordinario para los vectores de la base $\{e_m, e_n\}$, y por ende para todos los elementos (combinaciones lineales) del álgebra original A ; respecto de elementos en el álgebra de cubrimiento, recordamos que la operación de derivada cumple la identidad de Leibnitz.

2.9. Álgebras de aberraciones (o cálculo de aproximaciones)

Hemos construido el álgebra universal de cubrimiento \bar{A} de un álgebra de Lie A con objeto de trabajar con funciones del espacio fase óptico (desarrollado en el próximo capítulo). Como nos proponemos hacer los cálculos simbólicos mediante el uso de computadora, necesitamos 'cortar' las funciones a un conjunto finito de coeficientes polinomiales. Para ello, definimos el álgebra de aberraciones de orden N de A como aquella subálgebra $A^{[N]}$ de \bar{A} donde todos los elementos de $A^{[k]}$ con rango k mayor que N sean equivalentes a cero. De esta manera, los elementos del álgebra podrán ser representados por las multicolumnas introducidas en la Sección 2.3.

El álgebra de cubrimiento tiene un anidamiento natural según el rango de sus subespacios vectoriales $A^{[k]}$. Debido a la identidad de Leibnitz y recordando que el

producto \ast es conmutativo, el paréntesis de Lie entre dos elementos, uno en $A^{[k]}$ y otro en $A^{[k']}$ cumple

$$\{A^{[k]}, A^{[k']}\} = A^{[k+k'-1]}.$$

Esto puede ser verificado para el álgebra $\overline{sl}(2, \mathbb{R})$ cuyos elementos son funciones $f(L_+, L_0, L_-)$ bajo el paréntesis de Berezin de la Sección 2.8, y bajo el paréntesis de Poisson o Berezin para funciones $f(p^2, p \cdot q, q^2)$. (Sin embargo excluimos explícitamente el álgebra de HW en una representación fija λ , donde ℓ se ve reemplazado por una constante, porque esto baja el grado del resultado de un paréntesis de Poisson [en p y q] en dos unidades.)

Proyectamos ahora los vectores del espacio \overline{A} sobre el subespacio donde las componentes $A^{[N+1]}, A^{[N+2]}, \dots$ son cero. A esta proyección la denotamos por

$$A^{[N]} = A^{[1]} + A^{[2]} + \dots + A^{[N]}.$$

Esta estructura es un álgebra con un paréntesis de Lie que reemplaza al anterior por

$$\{A^{[k]}, A^{[k']}\} = \begin{cases} A^{[k+k'-1]}, & \text{en tanto } k+k'-1 \leq N, \\ 0, & \text{en tanto } k+k'-1 > N. \end{cases}$$

Notamos que de esta manera las álgebras de aberraciones se contienen según

$$A = A^{(1)} \subset A^{(2)} \subset \dots \subset A^{(N-1)} \subset A^{(N)} \subset \dots \subset \overline{A}.$$

2.10. Grupos de invariancia de un álgebra

Cada elemento v (fijo) de un álgebra A se puede usar para producir una transformación de A en sí misma; esta transformación será 'incremental' según un parámetro $\Delta\alpha$, de la siguiente manera

$$v : w \mapsto w' = (1 + \Delta\alpha \{v, \circ\})w = w + \Delta\alpha \{v, w\} \in A,$$

donde w es el elemento genérico de A . También w' es elemento de A porque es combinación lineal de w y $\{v, w\} \in A$.

Iteramos esta transformación M veces, con $\Delta\alpha = \alpha/M$, cuando $M \rightarrow \infty$. Recordamos la fórmula de producto de la función exponencial y su desarrollo en serie:

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{M}\right)^M.$$

De esta manera la transformación $V_\alpha : A \mapsto A$ para α finita generada por v será realizada por el operador

$$V_\alpha = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{M} \{v, \circ\}\right)^M = \exp(\alpha \{v, \circ\}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{m \text{ veces}}.$$

Esta es un conjunto de transformaciones, para $\alpha \in \mathbb{R}$, que forma un grupo uniparamétrico, pues

$$\begin{aligned} V_{\alpha_1} V_{\alpha_2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^m}{m!} \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{m \text{ veces}} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^{m'}}{m'!} \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{m' \text{ veces}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{\alpha_1^k}{k!} \frac{\alpha_2^{j-k}}{(j-k)!} \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{k \text{ veces}} \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{j-k \text{ veces}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \alpha_1^k \alpha_2^{j-k} \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{j \text{ veces}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\alpha_1 + \alpha_2)^j \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{j \text{ veces}} \\ &= V_{\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

Esto demuestra la propiedad de cerradura del conjunto de operadores $\{V_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. La asociatividad del producto entre elementos de este conjunto es evidente, pues ya que $\{V_{\alpha_1}(V_{\alpha_2}V_{\alpha_3}) = V_{\alpha_1}V_{\alpha_2+\alpha_3} = V_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = V_{\alpha_1+\alpha_2}V_{\alpha_3} = (V_{\alpha_1}V_{\alpha_2})V_{\alpha_3}$, el elemento neutro es V_0 , y el inverso de V_{α} es $V_{-\alpha}$. A estas transformaciones se les llama transformaciones de Lie, y, en la realización mediante paréntesis de Poisson, se les llama transformaciones de Lie-Poisson.

Las transformaciones V_{α} actúan linealmente sobre el álgebra A , es decir - $V_{\alpha}(r_1w_1 + r_2w_2) = r_1V_{\alpha}w_1 + r_2V_{\alpha}w_2$, para $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y $w_1, w_2 \in A$. Las propiedades de A en tanto espacio vectorial son, pues, preservadas. Ahora demostraremos que los operadores V_{α} preservan también las propiedades de A en tanto álgebra. Es decir, si $w_1, w_2 \in A$, $\{w_1, w_2\} = w_3$, y $w'_1 = V_{\alpha}w_1$, $w'_2 = V_{\alpha}w_2$, entonces $\{w'_1, w'_2\} = w'_3$ donde $w'_3 = V_{\alpha}w_3$. Para demostrar esto, consideramos la transformación incremental $V_{\Delta\alpha}$ con $(\Delta\alpha)^2 = 0$. Entonces $w'_i = w_i + \Delta\alpha \{v, w_i\}$, $i = 1, 2, 3$, por la identidad de Jacobi cumple

$$\begin{aligned} \{w'_1, w'_2\} &= \{w_1 + \Delta\alpha \{v, w_1\}, w_2 + \Delta\alpha \{v, w_2\}\} \\ &= \{w_1, w_2\} + \Delta\alpha (\{v, w_1\}, w_2 + \{w_1, \{v, w_2\}\}) + O(\Delta\alpha)^2 \\ &= w_3 + \Delta\alpha \{v, \{w_1, w_2\}\} \\ &= V_{\alpha}w_3 = w'_3. \end{aligned}$$

Como el grupo uniparamétrico $\{V_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ generado por $v \in A$ conserva todas las propiedades del álgebra, es un grupo de invariancias de A . Si ahora consideramos todas las v 's de A , tendremos un grupo de invariancias multiparamétrico \mathcal{G} . Como se demuestra en la teoría de álgebras y grupos de Lie, el número de parámetros del grupo \mathcal{G} será el de la dimension vectorial de A . Se llama el grupo de Lie generado por el álgebra, y se denota por $\mathcal{G} = \exp A$.

Las transformaciones de Lie-Poisson tienen también la propiedad de *preservación del producto*. Es decir, para dos funciones $f(p, q)$ y $g(p, q)$, y su producto $h(p, q) = f(p, q)g(p, q)$,

$$\mathbf{V}_\alpha : fg = (\mathbf{V}_\alpha : f)(\mathbf{V}_\alpha : g).$$

Para demostrarlo, recordamos que de la propiedad de las derivadas (para funciones de una variable x),

$$\frac{d^k fg}{dx^k} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{d^j f}{dx^j} \frac{d^{k-j} g}{dx^{k-j}},$$

para toda k . Para funciones de dos variables (p, q) , desarrollamos la serie exponencial de \mathbf{V}_α para obtener

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\alpha : fg &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{m \text{ veces}} fg \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{k \text{ veces}} f \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{m-k \text{ veces}} g \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{\alpha^{m-k}}{(m-k)!} \frac{\alpha^k}{k!} \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{k \text{ veces}} f \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{m-k \text{ veces}} g \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{j \text{ veces}} f \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \overbrace{\{v, \{v, \dots \{v, \circ\} \dots\}\}}^{k \text{ veces}} g \right) \\ &= (\mathbf{V}_\alpha : f)(\mathbf{V}_\alpha : g). \end{aligned}$$

De aquí se obtiene la *propiedad de composición* (o, la *propiedad de saltar a los argumentos de una función*), que se escribe

$$(\mathbf{V}_\alpha : f)(p, q) = f(\mathbf{V}_\alpha : p, \mathbf{V}_\alpha : q).$$

La demostración es inmediata al desarrollar $f(p, q)$ en doble serie de Taylor y al aplicar iterativamente el resultado anterior.

2.11. El grupo de Heisenberg-Weyl

El grupo generado por $A = \text{HW}$ es el *grupo de Heisenberg-Weyl* $\mathcal{G} = \mathcal{HW}$ tiene elementos

$$\mathcal{W}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp \alpha \{p, \circ\} \exp \beta \{q, \circ\} \exp \gamma \{\ell, \circ\}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

que actúan sobre el elemento genérico del álgebra HW,

$$v = xp + yq + z\ell = (x, y, z) \begin{pmatrix} p \\ q \\ \ell \end{pmatrix} = (p, q, \ell) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} p \\ q \\ \ell \end{pmatrix} &= \exp \alpha \{p, \circ\} \cdot \exp \beta \{q, \circ\} \begin{pmatrix} p \\ q \\ \ell \end{pmatrix} \\ &= \exp \alpha \{p, \circ\} \begin{pmatrix} p + \beta \ell \\ q \\ \ell \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p + \beta \ell \\ q - \alpha \ell \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ \ell \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De manera equivalente, nos interesará aplicar las transformaciones a los *coeficientes* de los elementos del álgebra,

$$W(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + \beta x - \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es posible que, para algunas álgebras —entre ellas las de Heisenberg-Weyl HW_d —, exista un grupo \mathcal{G}' de invariancias distinto de $\mathcal{G} = \exp \mathcal{A}$, que permite la construcción de un grupo mayor que contenga tanto a \mathcal{G}' como a \mathcal{G} . Mostraremos esto a continuación para el álgebra HW_1 que es un caso sencillo que nos interesa en óptica. Así, consideramos ahora las transformaciones *lineales* más generales del álgebra HW ,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ \ell \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ \ell' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b & \beta \\ -c & a & -\alpha \\ r & s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ \ell \end{pmatrix}.$$

Si exigimos respeto a la estructura del álgebra, necesitamos $\{q', p'\} = \ell'$, $\{p', \ell'\} = 0$ y $\{q', \ell'\} = 0$. De las dos últimas condiciones se sigue que $r, s = 0$ en la matriz anterior. De la primera, obtenemos la condición

$$\begin{aligned} \ell' &= \{q', p'\} \\ &= \{-cp + aq - \alpha \ell, dp - bq + \beta \ell\} \\ &= (ad - bc)\ell = t\ell. \end{aligned}$$

Es decir, el determinante de la submatriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, es t . La misma matriz, transpuesta, se puede aplicar al vector columna $(x, y, z)^T$ de las coordenadas del elemento genérico $v \in HW$.

Estamos interesados en una representación fija λ del álgebra HW , que para preservarse implica $t = 1$. Entonces el grupo de invariancias es el de matrices de 2×2 de determinante unidad, con la acción

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1.$$

Este grupo de matrices unimodulares de 2×2 se llama $SL(2, \mathbb{R})$. Hacemos notar, como punto importante de notación, que utilizamos la inversa de una matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, porque de esta manera podemos etiquetar las transformaciones de Lie \mathcal{C}_M y describir el producto de transformaciones mediante el producto de matrices, de la manera siguiente:

$$\mathcal{C}_{M_1} \mathcal{C}_{M_2} = \mathcal{C}_{M_1 M_2}.$$

Pues, por la propiedad de las transformaciones de Lie-Poisson de saltar dentro de los argumentos de las funciones,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{M_1} : \left[\mathcal{C}_{M_2} : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right] &= \mathcal{C}_{M_1} : M_2^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= M_2^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{M_1} : p \\ \mathcal{C}_{M_1} : q \end{pmatrix} \\ &= M_2^{-1} M_1^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= (M_1 M_2)^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{C}_{M_1 M_2} : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El álgebra de Heisenberg-Weyl HW es especial en cuanto a que admite un grupo de invariancias mayor que el grupo que ella genera, es decir, el grupo de Heisenberg-Weyl \mathcal{HW} . En efecto, el producto de las matrices de \mathcal{HW} escritas arriba y $SL(2, \mathbb{R})$ componen un grupo de 5 parámetros llamado $WSL(2, \mathbb{R})$. Este es el grupo de transformaciones lineales de invariancia más grande del álgebra de HW.

Consideremos por último las transformaciones más generales —no-lineales—, situándonos en la representación $\lambda = 1$ y utilizando su realización por paréntesis de Poisson dado en la Sección 2.8. Así, consideremos funciones arbitrarias (localmente diferenciables) y escribimos

$$p \mapsto p' = \phi(p, q), \quad q \mapsto q' = \psi(p, q).$$

Para preservar la representación del álgebra, se requiere que

$$\{p', q'\} = \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial p} - \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial p} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial q} = 1.$$

Todas las transformaciones que cumplen con esta condición se llaman *canónicas* $\{G\}$.

Las transformaciones canónicas tienen la propiedad de preservar el elemento de

área $dp \times dq$, como podemos demostrar inmediatamente, pues

$$\begin{aligned} dp' \times dq' &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} dp + \frac{\partial \phi}{\partial q} dq \right) \times \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} dp + \frac{\partial \psi}{\partial q} dq \right) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p} dq \times dp + \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q} dp \times dq \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) dp \times dq \\ &= \{\phi, \psi\} dp \times dq = dp \times dq. \end{aligned}$$

Vemos que el plano p - q se transforma como flujo de un fluido incompresible. Esto constituye el teorema de Liouville en espacios fase de cualquier dimensión.

El conjunto de todas las transformaciones canónicas forma un grupo, puesto que (i) la composición de dos transformaciones localmente diferenciables que preservan el área es otra transformación con las mismas propiedades, (ii) se cumple la asociatividad en esta acción, (iii) el elemento neutro está en el conjunto, y (iv), una transformación donde ningún elemento de área desaparece, es localmente invertible, y su inverso tiene las mismas propiedades. Por la identidad de Leibnitz, además, si una transformación es canónica para HW, también preservará toda el álgebra de cubrimiento \overline{HW} bajo el mismo paréntesis de Poisson; por ejemplo, el álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ de la Sección 2.7, generada por $-\frac{1}{2}p^2$, $\frac{1}{2}pq$ y $\frac{1}{2}q^2$. En el próximo capítulo asumiremos como principio que todas las transformaciones del espacio fase óptico son canónicas.

Si las funciones $p' = \phi(p, q)$, $q' = \psi(p, q)$ tienen desarrollo en serie de Taylor convergente en $|p| < n$, $q \in \mathbb{R}$, entonces el paréntesis de Poisson $\{\phi, \psi\}$ se podrá desarrollar en una serie doble de paréntesis de Poisson que involucran $\{A^{[k]}, A^{[k']}\}$. Cada uno de ellos está en $A^{[k+k'-1]}$, de modo que podemos agrupar los términos según diagonales, y escribir la transformación $p \mapsto p'$, $q \mapsto q'$ como *serie de aberraciones*. Esto lo desarrollamos a continuación.

2.12. El grupo de invariancia lineal en el álgebra de aberraciones $\text{HW}^{(N)}$.

Aquí queremos considerar la acción del grupo $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ de transformaciones lineales del álgebra HW sobre su álgebra de cubrimiento \overline{HW} . Como las transformaciones son lineales es suficiente hacerlo en cada espacio vectorial $\text{HW}^{[k]}$. Los vectores de este espacio son funciones polinomiales de grado $k = 2j$,

$$f^{[k]}(p, q) = \sum_m f_m^j X_m^j = \begin{pmatrix} f_j^j & \cdots & f_{-j}^j \\ \vdots \\ X_{-j}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_j^j & \cdots & X_{-j}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_j^j \\ \vdots \\ f_{-j}^j \end{pmatrix},$$

donde f_m^j son coeficientes (reales o complejos) y X_m^j son los monomios base de $\text{HW}^{[k]}$ dados por

$$X_m^j(p, q) = p^{j+m} q^{j-m}, \quad \begin{aligned} m &= -j, -j+1, \dots, j-1, j, \\ j &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \end{aligned}$$

Tenemos el interés de manejar las transformaciones lineales de estos espacios por los coeficientes f_m^j que se organizarán como las componentes de un vector columna, discutidos en la Sección 2.3. Como ahora la etiqueta m que es útil para numerar componentes corre de j a $-j$, pasará por el valor 0 si j es entero, y por valores semienteros según lo sea j . Tenemos una función `MUSIMP` que permite numerar renglones y columnas por índices sucesivos como en esa Sección. La numeración toma el orden descendente, es decir $m = j, j-1, j-2, \dots, 1-j, -j$. Así escritas, las transformaciones lineales de HW en la Sección 2.11, dadas por una matriz unimodular M ,

$$C_M = C(M) \text{ sobre } \begin{pmatrix} X_{1/2}^{1/2} \\ X_{-1/2}^{-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

son

$$C \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : f^{[1/2]} = \begin{pmatrix} f_{1/2}^{1/2} & f_{-1/2}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_{1/2}^{1/2} \\ X_{-1/2}^{-1/2} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} X_{1/2}^{1/2} & X_{-1/2}^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1 T} \begin{pmatrix} f_{1/2}^{1/2} \\ f_{-1/2}^{1/2} \end{pmatrix},$$

donde M^T es la matriz transpuesta de M . Hacemos notar que es la última expresión la que nos interesa: tener una matriz actuando sobre el vector columna de coeficientes.

Cuando escribimos $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1 T} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, estas transformaciones actúan sobre el vector de coeficientes que son coordenadas de los vectores de $HW^{[2]}$ como

$$\begin{pmatrix} f_1^{[1]} \\ f_0^{[1]} \\ f_{-1}^{[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ \alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & \beta\delta \\ \gamma^2 & 2\gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_0^1 \\ f_{-1}^1 \end{pmatrix}.$$

Para vectores en $HW^{[4]}$ dados por sus coeficientes f_m^j , $m = -2, -1, 0, 1, 2$, la transformación es

$$\begin{pmatrix} f_2^{[2]} \\ f_1^{[2]} \\ f_0^{[2]} \\ f_{-1}^{[2]} \\ f_{-2}^{[2]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^4 & 4\alpha^3\beta & 6\alpha^2\beta^2 & 4\alpha\beta^3 & \beta^4 \\ \alpha^3\gamma & \alpha^2(\alpha\delta + 3\beta\gamma) & 3\alpha\beta(\alpha\delta + \beta\gamma) & \beta^2(3\alpha\delta + \beta\gamma) & \beta^3\delta \\ \alpha^2\gamma^2 & 2\alpha\gamma(\alpha\delta + \beta\gamma) & \alpha^2\delta^2 + 4\alpha\beta\gamma\delta + \beta^2\gamma^2 & 2\beta\delta(\alpha\delta + \beta\gamma) & \beta^2\delta^2 \\ \alpha\gamma^3 & \gamma^2(3\alpha\delta + \beta\gamma) & 3\gamma\delta(\alpha\delta + \beta\gamma) & \delta^2(\alpha\delta + 3\beta\gamma) & \beta\delta^3 \\ \gamma^4 & 4\gamma^3\delta & 6\gamma^2\delta^2 & 4\gamma\delta^3 & \delta^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^2 \\ f_1^2 \\ f_0^2 \\ f_{-1}^2 \\ f_{-2}^2 \end{pmatrix}$$

Para una $k = 2j$ entera y arbitraria, cuando

$$C(M) : X_m^j(p, q) = X_{m'}^j(p, q) = \sum_{m''} D_{m, m'}^j(M^{-1}) X_{m''}^j(p, q),$$

entonces los vectores del álgebra de cubrimiento se transforman como

$$C(M) f^{[k]} = \sum_{m'} f_m^j C(M) : X_m^j = \sum_{m, m'} f_m^j D_{m, m'}^j(M^{-1}) X_{m'}^j = \sum_{m'} f_m^j X_m^j = f^{[k]},$$

con coeficientes

$$f_m^j = \sum_{m'} f_{m'}^j D_{m',m}^j(M^{-1}) = \sum_{m'} E_{m,m'}^j(M) f_{m'}^j.$$

Para su empleo en computación simbólica, donde los elementos del álgebra de cubrimiento $f^{[k]}$ se manejan por sus vectores columna de coeficientes, escribimos

$$f^{[k]} = [D^j(M^{-1})]^T f^{[k]} = E^j(M) f^{[k]}.$$

En la última igualdad, hemos definido la matriz $E^j(M) = [D^j(M^{-1})]^T$. Como estas matrices $D^j(M) = \|D_{m,m'}^j(M)\|$ (y las E 's) cumplen $D^j(M_1) D^j(M_2) = D^j(M_1 M_2)$ y en consecuencia $D^j(1) = 1$ y $D^j(M^{-1}) = [D^j(M)]^{-1}$, se llaman una *representación*, por matrices de $(2j+1) \times (2j+1)$, del grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Las matrices $E^j(M)$ son la representación *contragrediente* de las D 's.

Primero encontraremos los coeficientes de las combinaciones lineales de los vectores base de monomios $X_m^j(p, q) = p^{j+m} q^{j-m}$. Para ello usamos el desarrollo binomial de Newton, los ceros del coeficiente binomial $\binom{j}{m} = j!/(j-m)! m!$, y un rearrreglo de las sumas ([WOLF (1979)], Apéndice C). La acción de la transformación $C(M)$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sobre los vectores base de $HW^{[N]}$ es $C(M) : X_m^j(p, q) = X_m^j(p, q)$, donde

$$\begin{aligned} X_m^j(p, q) &= X_m^j(p', q') = p'^{j+m} q'^{j-m} \\ &= (dp - bq)^{j+m} (-cp + aq)^{j-m} \\ &= \left[\sum_{\mu} \binom{j+m}{\mu} d^{\mu} (-b)^{j+m-\mu} \right] \\ &\quad \times \left[\sum_{\nu} \binom{j-m}{\nu} (-c)^{\nu} a^{j-m-\nu} \right] p^{\mu+\nu} q^{2j-\mu-\nu} \\ &= \sum_{m'} \left[\sum_{\ell} \binom{j+m}{\ell} \binom{j-m}{j+m'-\ell} \right. \\ &\quad \left. \times d^{\ell} (-b)^{j+m-\ell} (-c)^{j+m'-\ell} a^{\ell-m-m'} \right] X_m^j(p, q). \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con la anterior, concluimos que

$$D_{m,m'}^j \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \sum_{\ell} \binom{j+m}{\ell} \binom{j-m}{j+m'-\ell} a^{\ell} b^{j+m-\ell} c^{j+m'-\ell} d^{\ell-m-m'}.$$

La suma es sobre un número finito de términos (véase la matriz de 5×5 arriba). Los rangos que permiten los coeficientes binomiales son $0 \leq \ell \leq j+m$ y $0 \leq j+m'-\ell \leq j-m$. De aquí concluye que $-j \leq m' \leq j$ para la suma sobre las f_m^j . Para la sumatoria que da la matriz D^j , notamos que el índice ℓ está en el intervalo $\max(0, m-m') \leq \ell \leq$

$\min(j+m, j-m')$; notamos que si $m = \pm j$ o $m' = \pm j$, entonces la suma se reduce a un solo término; si $m = \pm(j-1)$ o $m' = \pm(j-1)$ quedarán dos términos en el elemento de matriz de D^j ; esto explica que el marco exterior de elementos de la matriz de 5×5 tenga un sólo sumando, el marco interior dos sumandos, y el elemento central tiene tres sumandos.

Para el álgebra de aberraciones $HW^{(k)} = HW^{[1]} + HW^{[2]} + \dots + HW^{[k]}$ tenemos en consecuencia que el grupo de transformaciones lineales de HW implica la siguiente acción diagonal por bloques:

$$\begin{pmatrix} f^{[1]} \\ f^{[2]} \\ f^{[3]} \\ \vdots \\ f^{[k]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{[2 \times 2]}^{1/2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{[3 \times 3]}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{[4 \times 4]}^{3/2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{[(2j+1) \times (2j+1)]}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{[1]} \\ f^{[2]} \\ f^{[3]} \\ \vdots \\ f^{[k]} \end{pmatrix}$$

En el sistema MUSIMP de cómputo simbólico tenemos estas operaciones como funciones, que detallaremos en el Capítulo 4.

En la Sección 2.10 arriba, exponenciamos el operador de Lie-Poisson $\{v, \circ\}$ para $v \in \mathcal{A}$ y la Sección 2.11 lo hicimos explícitamente para $HW^{[1]}$, la cual es un álgebra nilpotente. Consideremos ahora la serie exponencial de $\{v^{[2]}, \circ\}$, con $v^{[2]} \in \mathcal{A}^{[2]}$. En vista de que (según la Sección 2.9) $\{\mathcal{A}^{[2]}, \mathcal{A}^{[k]}\} = \mathcal{A}^{[k]}$, es claro que la serie exponencial $\exp\{v^{[2]}, \circ\}$ al actuar sobre un elemento $w \in \mathcal{A}$ del álgebra, dará una serie en \mathcal{A} :

$$\exp\{v^{[2]}, \circ\} : w = w + \{v^{[2]}, w\} + \frac{1}{2!} \{v^{[2]}, \{v^{[2]}, \circ\}\} + \dots \in \mathcal{A},$$

y producirá transformaciones a lo más lineales sobre los vectores de \mathcal{A} . Cuando $w \in \mathcal{A}^{[k]}$, entonces también la serie exponencial se mantiene en $\mathcal{A}^{[k]}$. En consecuencia podemos afirmar que las transformaciones lineales vistas en esta sección tienen realización como operadores exponenciales de Lie-Poisson.

En efecto, se puede demostrar [WOLF (1979)] que

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(rp^2 + spq + tq^2), \circ\right\} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} \cosh \omega - s \operatorname{sench} \omega & -t \operatorname{sench} \omega \\ r \operatorname{sench} \omega & \cosh \omega + s \operatorname{sench} \omega \end{pmatrix},$$

donde

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \sqrt{s^2 - 4rt}, \quad \operatorname{sench} \omega = \begin{cases} \omega^{-1} \operatorname{senh} \omega, & \omega \neq 0, \\ 1, & \omega = 0. \end{cases}$$

Es fácil comprobarlo si actuamos con ambos miembros sobre p y q para r, s, t pequeñas, y retenemos solamente el primer paréntesis de Poisson:

$$\left(1 + \left\{ \frac{1}{2}(rp^2 + spq + tq^2), \circ \right\}\right) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}sp + tq \\ -rp - \frac{1}{2}sq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}s & -t \\ r & 1 + \frac{1}{2}s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Esto puede compararse con la matriz de la transformación \mathcal{C}_M anotada arriba si $\cosh \omega \approx 1 \approx \sinh \omega$.

2.13. El grupo de invariancia no-lineal en $\text{HW}(N)$.

Después de haber ligado al grupo de transformaciones lineales de un elemento $w \in \mathcal{A}^{[k]}$ con la exponenciación de operadores de Lie-Poisson de elementos cuadráticos $v \in \mathcal{A}^{[2]}$, en la forma $\exp\{v, \circ\} : w \mapsto w'$, ahora consideraremos el caso general en el cual $v \in \mathcal{A}^{[k]}$. Entonces, la serie exponencial consta de los siguientes términos:

$$\exp\{v, \circ\} : w = \underbrace{w}_{\in \mathcal{A}^{[k]}} + \underbrace{\{v, w\}}_{\in \mathcal{A}^{[k+K-2]}} + \frac{1}{2!} \underbrace{\{v, \{v, w\}\}}_{\in \mathcal{A}^{[k+2K-4]}} + \cdots + \frac{1}{m!} \underbrace{\{v, \{v, \dots \{v, w\} \dots\}}}_{\in \mathcal{A}^{[k+m(K-2)]}} + \cdots$$

m veces

Por la finitud de la memoria de las computadoras, debemos trabajar dentro de álgebras finitas $\mathcal{A}^{(N)}$, como fue visto en la Sección 2.9, a un orden de aberración N .

En la realización que hemos manejado en las secciones anteriores, un polinomio genérico de cuarto grado

$$v = \alpha p^4 + \beta p^3 q + \gamma p^2 q^2 + \delta p q^3 + \varepsilon q^4,$$

genera una transformación de Lie-Poisson sobre HW, $\exp\{v, \circ\} : p = p'(p, q)$, $\exp\{v, \circ\} : q = q'(p, q)$; expresadas como series, podemos truncarlas a orden de aberración S (indicando $|_S$):

$$\exp\{v, \circ\} : p|_S = p + \beta p^3 + 2\gamma p^2 q + 3\delta p q^2 + 4\varepsilon q^3,$$

$$\exp\{v, \circ\} : q|_S = q - 4\alpha p^3 - 3\beta p^2 q - 2\gamma p q^2 - \delta q^3.$$

Entonces, sobre el vector columna cuyos elementos son

$$\left((p, q), (p^2, pq, q^2), (p^3, p^2 q, pq^2, q^3) \right),$$

el operador $\exp\{v, \circ\} = 1 + \{v, \circ\}$ actúa como una matriz

$$j \setminus k \begin{matrix} k=1 & k=2 & k=3 \\ \begin{matrix} j = \frac{1}{2} \\ j = 1 \\ j = \frac{3}{2} \end{matrix} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1}_{[2 \times 2]} & \mathbf{0} & \begin{matrix} \beta & 2\gamma & 3\delta & 4\varepsilon \\ -4\alpha & -3\beta & -2\gamma & -\delta \end{matrix} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{[3 \times 3]} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{[4 \times 4]} & & \end{array} \right) \quad \text{sobre} \quad \begin{pmatrix} X^{1/2} \\ X^1 \\ X^{3/2} \end{pmatrix}.$$

El polinomio v de grado cuatro, truncado a *orden de aberración 7* actuará sobre el vector columna $(X^{1/2}, X^1, \dots, X^{7/2})$ mediante una matriz de la estructura y dimensiones dados por:

$$j \setminus k \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{2} & \mathbb{1}_{[2 \times 2]} & 0 & \boxed{v_{[2 \times 4]}^{(1)}} & 0 & \boxed{v_{[2 \times 0]}^{(2)}} & 0 & \boxed{v_{[2 \times 8]}^{(3)}} \\ 1 & 0 & \mathbb{1}_{[3 \times 3]} & 0 & \boxed{v_{[3 \times 5]}^{(1)}} & 0 & \boxed{v_{[3 \times 7]}^{(2)}} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & \mathbb{1}_{[4 \times 4]} & 0 & \boxed{v_{[4 \times 0]}^{(1)}} & 0 & \boxed{v_{[4 \times 8]}^{(2)}} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_{[5 \times 5]} & 0 & \boxed{v_{[5 \times 7]}^{(1)}} & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_{[6 \times 6]} & 0 & \boxed{v_{[6 \times 8]}^{(1)}} \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_{[7 \times 7]} & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_{[8 \times 8]} \end{matrix}$$

donde en la posición $k-k'$ está la submatriz $\boxed{v_{[(k+1) \times (k'+1)]}^{(m)}}$, que involucra polinomios de grado m de los coeficientes de v , y proviene del paréntesis de Poisson aplicado m veces. Estamos escribiendo la acción canónica no-lineal de $\exp\{v, \circ\}$ mediante una matriz, esto es una transformación *lineal* en un espacio vectorial de dimensión mayor a la del álgebra HW original.

Notemos que bajo la transformación generada por $\{v, \circ\}$ la función $v(p, q)$ es una invariante. Esto se debe a que, para cualquier parámetro τ ,

$$v(p, q) = \exp \tau \{v, \circ\} : v(p, q) = v(\exp \tau \{v, \circ\} : p, \exp \tau \{v, \circ\} : q) = v(p(\tau), q(\tau)).$$

Por ello, el flujo (en τ) del espacio fase (p, q) es canónico y tal que las líneas de flujo son las curvas de nivel $v(p, q) = \text{constante}$.

Se puede demostrar que las transformaciones canónicas genéricas $p \mapsto p'(p, q)$, $q \mapsto q'(p, q)$ sin traslación $[(0, 0) \mapsto (0, 0)]$, se pueden aproximar como *producto factorizado*:

$$\begin{pmatrix} p'(p, q) \\ q'(p, q) \end{pmatrix} = \dots \exp\{f^{[5]}, \circ\} \exp\{f^{[4]}, \circ\} \exp\{f^{[3]}, \circ\} \exp\{f^{[2]}, \circ\} : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Donde $f^{[k]}(p, q)$ son polinomios de grado k en los generadores del álgebra. El factor de la extrema derecha ($\exp\{f^{[2]}, \circ\}$) produce transformaciones lineales; el que le sigue a la izquierda produce las aberraciones de segundo orden generadas por $f^{[3]}$ y *retenidas*

hasta cuarto orden en el cálculo; los factores que siguen, generados por $f^{[4]}$ y $f^{[5]}$ son aberraciones de tercer y cuarto orden respectivamente que, al retenerlos a orden cuatro, sólo llegan a producir sumandos lineales en sus parámetros. Esta factorización fue introducida por A.J. Dragt y J. Finn [1976] para el orden inverso del seguido aquí (allí de izquierda a derecha).

Las transformaciones lineales generadas por $f^{[2]}$ fueron vistas en la Sección 2.12. Aquí las excluimos temporalmente para escribir claramente lo que sucede con la aberración 'pura' más general retenida a orden cuatro. Estas están etiquetadas por los coeficientes f_m^j contenidos en los polinomios $\{f^{[5]}, f^{[4]}, f^{[3]}\}$ y son

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\{f^{[5]}, f^{[4]}, f^{[3]}\} &= \exp\{f^{[5]}, \circ\} \exp\{f^{[4]}, \circ\} \exp\{f^{[3]}, \circ\} \\ &= 1 + \{f^{[3]}, \circ\} && (1^\circ \text{ y } 2^\circ \text{ órdenes}) \\ &\quad + \{f^{[4]}, \circ\} + \frac{1}{2!}\{f^{[3]}, \{f^{[3]}, \circ\}\} && (3^\circ \text{ orden}) \\ &\quad + \{f^{[5]}, \circ\} + \{f^{[4]}, \{f^{[3]}, \circ\}\} + \frac{1}{3!}\{f^{[3]}, \{f^{[3]}, \{f^{[3]}, \circ\}\}\}. && (4^\circ) \end{aligned}$$

Las aplicaciones de esta teoría de perturbaciones de orden superior para sistemas ópticos axialmente simétricos nos llevarán adelante a considerar solamente aberraciones de orden impar. En el caso de óptica de una dimensión (como en los primeros dos capítulos de esta tesis) si pedimos que las aberraciones sean simétricas respecto de *inversiones* a través del eje óptico, estamos pidiendo $f^{[k]}(p, q) = f^{[k]}(-p, -q)$, y por ello el grado k de los polinomios generadores sólo puede ser par (4, 6, 8, ...), dando lugar los órdenes de aberración 3, 5, 7, ... La acción de este grupo de aberraciones puras (hasta de orden 7) está contenido en otro conjunto de funciones en muSIMP, que permite encontrar el desarrollo polinomial de funciones impares $p'(p, q)$ y $q'(p, q)$ en serie de Taylor dados los coeficientes f_m^j de los polinomios generadores. Y conversamente, a partir de estos desarrollos de Taylor truncados, permite reconstruir los coeficientes f_m^j .

3. La óptica geométrica en espacio fase

La propagación de la luz se puede idealizar como la trayectoria de un punto (en óptica geométrica) o como frentes de onda sujetos al principio de superposición de Huygens, (en óptica ondulatoria). La luz se mueve en el vacío con velocidad $c \approx 3 \times 10^{10} \text{ cms}^{-1}$; en un medio con índice de refracción $n \geq 1$ su velocidad es $c/n \leq c$. Las trayectorias en un medio ópticamente homogéneo son líneas rectas y los frentes de onda, planos paralelos. Si el medio es inhomogéneo (esto es, si n depende del lugar en el espacio), la evolución del punto o del frente de onda es tal que la luz tiende hacia regiones "ópticamente densas" donde el índice n es mayor.

Un sistema de dos ecuaciones de evolución acopladas entre las variables de posición y momento, llamadas las ecuaciones de Hamilton, pueden ser obtenidas a partir de consideraciones geométricas y dinámicas sencillas. El supuesto geométrico es la continuidad del rayo, y el supuesto dinámico es la ley de Snell [SEKIYUCHI Y WOLF (1987)]. Es un camino alternativo e independiente de la formulación de Lagrange basada en el Principio de Fermat de la función *extremum*. Con las herramientas matemáticas desarrolladas en el capítulo anterior proponemos las ecuaciones de evolución de la luz descritas por las transformaciones de Lie, estos operadores las generan sobre el conjunto de rayos de la óptica geométrica. Los rayos se comportarán según una función vectorial $\vec{q}(s)$, donde s es un parámetro que corre en el eje real \mathbb{R} , y está relacionado con el tiempo t mediante su velocidad: $s = ct/n$. Este parámetro s representa la longitud medida sobre la trayectoria.

Usamos el concepto *evolución* para referirnos al eje sobre el cual se parametriza el movimiento, lo definimos como un mapeo del espacio fase en sí mismo [KRÖTZSCH Y WOLF (1991a)]. El operador diferencial, con un parámetro de longitud, representa la translación como un mapeo de este tipo. Así, la evolución de funciones $f(s)$ estará generada por el operador d/ds , y su desarrollo en serie de Taylor representado por

$$f(a) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \left. \frac{d^m f(s)}{ds^m} \right|_{s=0} = \exp \left(a \frac{d}{ds} \right) f(s) \Big|_{s=0}.$$

Por la semejanza de esta serie exponencial con el desarrollo de operadores de la forma genérica $\exp \alpha(v, \circ)$, de la Sección 2.10, definimos la función de Hamilton $\mathcal{H} = \mathcal{H}(p, q)$ y escribiremos el operador de evolución¹ en forma diferencial

$$\frac{d}{ds} = \{-\mathcal{H}, \circ\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}}$$

¹ Los operadores de translación avanzan el espacio de rayos de manera simultánea al operador de evolución que retroavanza la pantalla de referencia, de ahí su signo opuesto.

para hacerlo actuar sobre las observables del rayo, $f(q_x, q_y, q_z; p_x, p_y, p_z)$. En este capítulo, el vuelo libre es el ejemplo más transparente de esta parametrización.

Como complemento de las transformaciones de evolución, en óptica tenemos transformaciones 'súbitas' del espacio de rayos, como los que produce una superficie refractante. En este capítulo estudiamos detalladamente estos mapeos y mostraremos la propiedad que tienen de *factorizarse* en dos transformaciones raíz, que son canónicas. [NAVARRO-SAAD Y WOLF (1986b)], [KRÖTZSCH Y WOLF (1991b)]. Esta transformación raíz se resuelve por series de aberraciones, al utilizar algunas de las funciones de manejo de polinomios desarrollados por el autor de esta tesis. Se presentan resultados a orden de aberración siete.

3.1. Las ecuaciones de Hamilton de la óptica

Consideramos que el vector de evolución $\vec{q}(s) \in \mathbb{R}^3$, $s \in \mathbb{R}$ delinea la trayectoria del rayo al desplazarse de \vec{q} a $\vec{q} + d\vec{q}$ entre s y $s + ds$, y que un punto se mueve con velocidad $|d\vec{q}| = ds$ en la dirección de la tangente a la trayectoria de $d\vec{q}$, según el vector direccional $\vec{p}(s)$ en \mathbb{R}^3 cuya longitud es $|\vec{p}|$.

Podemos igualar los vectores unitarios de velocidad y de dirección

$$\frac{d\vec{q}}{ds} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \{-\mathcal{H}, \circ\} \vec{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}},$$

y definir la función $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q})$ después de integrar el segundo término respecto de \vec{p} :

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}) = |\vec{p}| - n(\vec{q}),$$

en principio, $n(\vec{q})$ es una función arbitraria de \vec{q} . Para obtener la evolución del vector tangente $\vec{p}(s)$, le aplicamos el operador de evolución $d/ds = \{-\mathcal{H}, \circ\}$:

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \{-\mathcal{H}, \circ\} \vec{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} = \frac{\partial n(\vec{q})}{\partial \vec{q}}.$$

De esta manera el vector tangente al rayo se mueve en la dirección del gradiente de la función de índice $n(\vec{q})$, que asociamos a la refracción del medio en el punto \vec{q} .

El valor de la función de Hamilton, $\mathcal{H}(\vec{p}(s), \vec{q}(s))$, no se considera en las ecuaciones de movimiento anteriores porque su evolución sobre la trayectoria del rayo es constante y las ecuaciones anteriores sólo contienen *derivadas*. Queremos decir que $d\mathcal{H}/ds = \{-\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$. De esta forma, al hacer la constante igual a cero, la longitud del vector tangente \vec{p} será

$$|\vec{p}| = n(\vec{q}),$$

por tanto podemos pensar en un vector tangente $\vec{p}(s)$ que *guía* al rayo y se mueve sobre la superficie de una *esfera* en \mathbb{R}^3 , que ha sido llamada *esfera de Descartes*.

Se denomina *sistema Hamiltoniano*, al sistema de la óptica geométrica que define la evolución de los rayos mediante las dos ecuaciones

$$\frac{d\vec{q}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{n(\vec{q})}, \quad \frac{d\vec{p}}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} = -\frac{\partial n(\vec{q})}{\partial \vec{q}},$$

en las que \vec{p} es la coordenada *canónicamente conjugada* a \vec{q} y \mathcal{H} es la *función de Hamilton* respecto de s , el *parámetro de evolución*. Al espacio 6-dimensional (\vec{p}, \vec{q}) se le llama el *espacio fase* de la óptica con rayos parametrizados por s .

En un medio homogéneo ($n = \text{constante}$), para el caso de *vuelo libre*, la segunda de las ecuaciones de Hamilton se escribe $d\vec{p}/ds = \vec{0}$ y resuelve $\vec{p} = \text{vector constante}$; la primera se escribe entonces $d\vec{q}/ds = \text{vector constante}$. La solución general se puede expresar en términos de los valores *iniciales* en $s = 0$, y es

$$\vec{q}(s) = \vec{q}(0) + s \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{q}(0) + \frac{s}{n} \vec{p}, \quad \vec{p}(s) = \vec{p}(0).$$

3.2. La ley de Snell de la refracción

Cuando el medio *no* es homogéneo, la segunda ecuación de Hamilton $d\vec{p}/ds$, que valga cero para el caso $n = \text{constante}$, es ahora el gradiente refractivo del medio. Estamos especialmente interesados en aquellos sistemas en los que se tienen dos medios homogéneos n y n' separados por una discontinuidad sobre una superficie $S(\vec{q}) = 0$. En ese caso, la magnitud del gradiente $\partial n(\vec{q})/\partial \vec{q}$ se vuelve infinita, aunque su dirección es aún la normal a S , que llamaremos simbólicamente

$$\vec{\Sigma} = \vec{\nabla} S(\vec{q}), \quad \vec{q} \in S.$$

De la segunda ecuación de Hamilton, que se nutre de la ley de senos de Snell, tenemos los vectores tangentes $\vec{p}' = \vec{p}(s')$ y $\vec{p} = \vec{p}(s)$, de magnitudes $|\vec{p}'| = n'$ y $|\vec{p}| = n$, para dos valores cercanos de s sobre el rayo y en ambos lados de la superficie S , $\Delta s = s' - s$. Su incremento $\Delta \vec{p} = \vec{p}' - \vec{p}$ estará aproximado por esta segunda ecuación escrita en la forma $\Delta \vec{p} = (\partial n / \partial \vec{q}) \Delta s$. Al efectuar el producto cruz con el vector gradiente $\partial n / \partial \vec{q}$ obtenemos

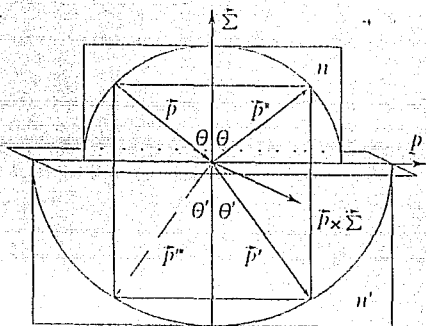
$$\Delta \vec{p} \times \frac{\partial n}{\partial \vec{q}} = 0, \quad \text{al substituir se implica que } \vec{p} \times \vec{\Sigma} = \vec{p}' \times \vec{\Sigma}.$$

Esta ecuación, cuya virtud estriba en ser independiente de la magnitud del gradiente refractivo, tiene perfectamente definida su dirección; es la normal $\vec{\Sigma}$ en la discontinuidad del índice, la superficie S .

En efecto, si θ y θ' son los ángulos que forman los vectores \vec{p} y \vec{p}' con $\vec{\Sigma}$, entonces la magnitud del producto vectorial [que cumple $|\vec{v} \times \vec{v}'| = |\vec{v}| |\vec{v}'| \text{sen } \angle(\vec{v}, \vec{v}')$] se escribe en la forma tradicional de la ley de Snell;

$$n \text{sen } \theta = n' \text{sen } \theta'.$$

FIGURA 3.1. En cada medio los vectores de dirección están sobre sus respectivas esferas de Descartes $n = |\vec{p}|$ y $n' = |\vec{p}'|$. El vector $\vec{p} \times \vec{\Sigma}$ se conserva, y existen las soluciones reflejadas \vec{p}^n y \vec{p}'^n .



La construcción contiene la información de coplanaridad entre el rayo entrante \vec{p} , el refractado \vec{p}' y la normal a la superficie $\vec{\Sigma}$ en el punto de incidencia. La igualdad anterior es una *ley de conservación*, de los componentes tangenciales del vector momento, y gráficamente se puede expresar como en la Figura 3.1, en donde los círculos representan las esferas de Descartes en ambos medios.

3.3. Coordenadas de pantalla y eje óptico

Lo expuesto en este capítulo se aplica a puntos $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$. Las fórmulas son simples pero abstractas, y contienen coordenadas de más (usa seis coordenadas, veremos sin embargo que pueden reducirse a cuatro coordenadas y un signo). Como es común, las ecuaciones de Hamilton pueden reducirse a formas más concretas que son mejores para propósito de cálculo.

Introduzcamos un sistema de coordenadas cartesiano x, y, z , para escribir

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ \sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2} \end{pmatrix},$$

donde $\sigma \sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2} = p_z$, con σ que indica el *signo* de p_z sobre la esfera de Descartes $|\vec{p}| = n$; distingue rayos que se mueven con s en la dirección de z bajo vuelo libre, de aquellos que lo hacen en la dirección $-z$. Seleccionamos el eje z como el *eje óptico*, y el plano x - y como la *pantalla*. Los rayos paralelos a la pantalla (a 90° del eje óptico)

llevan $\sigma = 0$. Por otro lado, los sistemas ópticos que nos interesa describir son aquellos donde hay un eje de simetría del sistema —como microscopios, telescopios o cámaras fotográficas, y una o más pantallas a lo largo de este eje, que nos indican la posición del rayo a esa distancia sobre el eje óptico. En consecuencia nos interesa en lugar de s , la distancia *sobre* el rayo, tener como parámetro de evolución a la distancia sobre el eje óptico $z = q_x(s)$.

Dividiremos las componentes x y y de las ecuaciones de Hamilton entre la componente z de la primera: $dq_x/ds = p_x/n$. Es decir

$$\frac{dq_x}{ds} \bigg/ \frac{dq_z}{ds} = \frac{p_x}{n} \bigg/ \frac{p_z}{n}, \quad \frac{dp_x}{ds} \bigg/ \frac{dq_x}{ds} = \frac{\partial n}{\partial q_x} \bigg/ \frac{p_z}{n},$$

$$\frac{dq_y}{ds} \bigg/ \frac{dq_z}{ds} = \frac{p_y}{n} \bigg/ \frac{p_z}{n}, \quad \frac{dp_y}{ds} \bigg/ \frac{dq_y}{ds} = \frac{\partial n}{\partial q_y} \bigg/ \frac{p_z}{n}.$$

La última ecuación es $dp_z^2/dz = \partial n^2/\partial z$. Si escribimos los vectores sobre la pantalla con

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix},$$

Las ecuaciones sobre la pantalla son

$$\frac{d\mathbf{q}}{dz} = \frac{\mathbf{p}}{\sigma\sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dz} = \frac{n}{\sigma\sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}}.$$

Finalmente, notamos que tenemos la estructura de las ecuaciones de Hamilton, pues las podemos escribir *en forma Hamiltoniana sobre la pantalla* como

$$\frac{d\mathbf{q}}{dz} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dz} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{q}},$$

donde

$$h = -p_z = -\sigma\sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}$$

es el Hamiltoniano de evolución a lo largo del eje óptico. En efecto, h genera traslaciones sobre el eje z , el parámetro de evolución. Al espacio 4-dimensional (\mathbf{p}, \mathbf{q}) se le llama el *espacio fase de pantalla*.

Hemos conservado el signo σ en las ecuaciones. Cuando $\sigma = 0$, no podemos dividir entre la componente z de las ecuaciones originales. Rayos paralelos a la pantalla no son parametrizables por $(\mathbf{p}, \mathbf{q})_\sigma$,

El caso de *vuelo libre* en medio homogéneo ($n = \text{constante}$) es un ejemplo evidente que representaremos por un operador $\mathcal{F}_{z;n}$. La segunda ecuación de Hamilton es $dp/dz = 0$, o sea $\mathbf{p}(z) = \mathcal{F}_{z;n} \mathbf{p}(0) = \text{vector constante}$. La primera ecuación es entonces $d\mathbf{q}/dz = \mathbf{p}/p_z$, y su solución $\mathbf{q}(z) = \mathcal{F}_{z;n} \mathbf{q}(0)$ en términos de los valores

iniciales en la pantalla $z = 0$ es

$$\mathcal{F}_{z;n} : p \mapsto p(z) = p(0).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{z;n} : q \mapsto q(z) &= q(0) + z \frac{p}{\sigma \sqrt{n^2 - |p|^2}} \\ &= q(0) + \sigma z \frac{p}{n} + \sigma z \frac{|p|^2 p}{2n^3} + \sigma z \frac{3|p|^4 p}{8n^5} + \sigma z \frac{5|p|^6 p}{16n^7} + \dots + \sigma z \frac{(2m-1)!! |p|^{2m} p}{(2m)!! n^{2m+1}} + \dots \end{aligned}$$

Al desplazar la pantalla una distancia z sobre el eje óptico, se genera entonces la *evolución* de los rayos mediante el Hamiltoniano,

$$\frac{d}{dz} = \{-h, \circ\} = \{\sigma \sqrt{n^2 - |p|^2}, \circ\}.$$

La solución formal del operador de evolución es

$$\mathcal{F}_{z;n} = \exp(-z\{h, \circ\}) = 1 - z\{h, \circ\} + \frac{z^2}{2!} \{h, \{h, \circ\}\} + \frac{z^3}{3!} \{h, \{h, \{h, \circ\}\}\} + \dots$$

Resulta interesante e ilustrativo comparar los resultados de la mecánica clásica con los de la óptica geométrica al representar el desplazamiento en ambos sistemas mediante el Hamiltoniano. Para hacer dicha comparación establezcamos para la mecánica, un espacio bidimensional de partículas de masa m , afectadas por un potencial $V(q, z)$ dependiente del tiempo z , y para la óptica, como antes, coloquémonos sobre la pantalla. De esta forma los Hamiltonianos correspondientes son

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{mec} &= |p|^2/2m + V(q, z), && \text{en mecánica,} \\ \mathcal{H}^{opt} &= -\sqrt{n^2 - p^2}, && \text{en óptica.} \\ &= -n + p^2/2n + (p^2)^2/8n^3 + (p^2)^3/16n^5 + \dots \end{aligned}$$

De los dos primeros términos de la serie, el índice de refracción substituye al potencial y $p^2/2n$ a la energía cinética. Los términos adicionales a los dos considerados en la serie convergente para $|p| < n$, que dependen de potencias de p^2 , y el hecho de que en lugar de la masa m aparezca el índice de refracción $n(q)$, hacen que la analogía no sea exacta, sin embargo, si se prescinde de estas diferencias podríamos reemplazar la óptica geométrica por la mecánica. Estamos entonces trabajando en el *régimen parcial* donde los rayos se encuentran cercanos al eje óptico ($p^2 \ll n^2$), y el Hamiltoniano es entonces

$$\mathcal{H}^{parax} = |p|^2/2n_0 - n(q, z),$$

n_0 es una constante, $n(0, z)$, siempre y cuando podamos suponer que $|q| \ll 1$.

3.4. Refracción en coordenadas de pantalla

Las coordenadas de pantalla de la sección anterior describen con ventaja la ley de Snell. Repetiremos la construcción en estas coordenadas. Necesitamos la normal $\vec{\Sigma}$ a la superficie S de refracción en el punto de incidencia del rayo.

Referimos la superficie S a la pantalla estándar al escribir

$$S(\vec{q}) = \zeta(\mathbf{q}) - q_z, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_x \\ \Sigma_y \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \nabla \zeta(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \partial \zeta / \partial q_x \\ \partial \zeta / \partial q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \end{pmatrix}.$$

Esto es válido donde la normal $\vec{\Sigma}$ (que apunta del medio n' al medio n) y el eje $-z$ formen un ángulo menor a $\frac{1}{2}\pi$. La ecuación vectorial $\vec{p}' \times \vec{\Sigma} = \vec{p}' \times \vec{\Sigma}$ que representa la ley de Snell puede ser expresada entonces en términos de vectores columna como

$$\begin{pmatrix} \Sigma_x \\ \Sigma_y \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_y p_x - p_y p_x \\ -p_x - p_z \zeta_x \\ \zeta_x p_y - \zeta_y p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{p} + p_z \Sigma)$$

$$= \begin{pmatrix} \Sigma_x \\ \Sigma_y \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{p}' + p'_z \Sigma).$$

La igualdad en la componente z , $\Sigma \times \mathbf{p} = \Sigma \times \mathbf{p}'$, es consecuencia de las dos primeras componentes en producto cruz, vectorial, en *dos* dimensiones.

3.5. Factorización de la transformación de la superficie refractante

Denotaremos la transformación que produce una superficie refractante S [dada por la función $z = \zeta(q_x, q_y)$], por un operador $S_{\zeta; n, n'}$, que actúa sobre los rayos $(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \sigma)$ para convertirlos en $(\mathbf{q}', \mathbf{p}'; \sigma')$, referidos a la pantalla $z = 0$, como en la Figura 3.2. Esta transformación es la ley de Snell en la pantalla, válida en cada punto de incidencia con su correspondiente plano tangente $\vec{\Sigma}$, precedido y seguido de propagación libre en los medios n y n' .

El punto de incidencia del rayo original $\vec{q}(z)$ y del refractado, son el mismo punto que se encuentra sobre el plano $z = \zeta(\mathbf{q})$. En la pantalla $z = 0$ lo llamamos $\bar{\mathbf{q}}$. Se cumple entonces

$$\mathbf{q}(\zeta(\bar{\mathbf{q}})) = \mathbf{q} + \zeta(\bar{\mathbf{q}}) \frac{\mathbf{p}}{\sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}} = \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}' + \zeta(\bar{\mathbf{q}}) \frac{\mathbf{p}'}{\sigma' \sqrt{(n')^2 - |\mathbf{p}'|^2}} = \mathbf{q}'(\zeta(\bar{\mathbf{q}})).$$

Esta es una ley de conservación de *posición*. La ley de Snell se aplica en ese punto, y se escribe

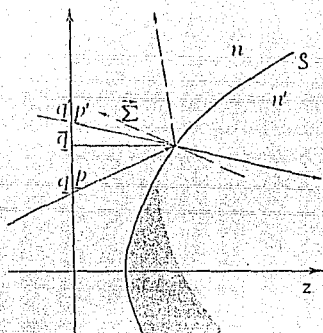
$$\mathbf{p} + (\nabla \zeta)(\bar{\mathbf{q}}) \sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2} = \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}' + (\nabla \zeta)(\bar{\mathbf{q}}) \sigma' \sqrt{(n')^2 - |\mathbf{p}'|^2}.$$

Esta es una ley de conservación de *momento*.

La estructura de las ecuaciones de conservación anteriores permite *factorizar* la transformación de superficie refractante $S_{\zeta; n, n'}$ como

$$S_{\zeta; n, n'} = \mathcal{R}_{\zeta; n} \mathcal{R}_{\zeta; n'}^{-1},$$

FIGURA 3.2. El proceso de refracción se describe como la propagación del rayo incidente hasta la superficie en $(\bar{q}, \zeta(\bar{q}))$ donde se cumple la ley de Snell.



donde $\mathcal{R}_{\zeta;n}$ es la transformación que llamamos raíz y que es

$$\mathcal{R}_{\zeta;n} : \mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \zeta(\bar{\mathbf{q}}) \frac{\mathbf{p}}{\sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}},$$

$$\mathcal{R}_{\zeta;n} : \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \nabla \zeta(\bar{\mathbf{q}}) \sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}.$$

De aquí se despeja la transformación inversa $\mathcal{R}_{\zeta;n}^{-1}$, dada por

$$\mathcal{R}_{\zeta;n}^{-1} : \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} - \zeta(\bar{\mathbf{q}}) \frac{\mathbf{p}}{\sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}},$$

$$\mathcal{R}_{\zeta;n}^{-1} : \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} - \nabla \zeta(\bar{\mathbf{q}}) \sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}.$$

Estas transformaciones se componen, desde la pantalla, como un proceso de ida y vuelta al plano tangente en el punto de incidencia, como se ve en la Figura 3.2. Si la superficie es plana ($\zeta = \text{constante}$), la transformación raíz es el vuelo libre con $z = \zeta_0$:

$$\mathcal{R}_{\zeta_0;n} : \mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \zeta_0 \frac{\mathbf{p}}{\sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}} = \mathcal{I}_{\zeta_0;n} : \mathbf{q},$$

$$\mathcal{R}_{\zeta_0;n} : \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} = \mathcal{I}_{\zeta_0;n} : \mathbf{p}.$$

Notamos que la ecuación que determina $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ es una ecuación implícita, pues el miembro derecho también contiene $\bar{\mathbf{q}}$ como argumento de ζ . Una vez hallada $\bar{\mathbf{q}}$, la $\bar{\mathbf{p}}$ se encuentra de su ecuación correspondiente, que es explícita.

En la transformación inversa, \bar{p} es la solución de una ecuación implícita y aquella para \bar{q} es explícita. El signo de $\sigma = \text{sign } \Sigma \times p$ y $\sigma' = \text{sign } \Sigma \times p'$ indica la dirección de los rayos (o su continuación) al cruzar la pantalla. Si $\sigma = +$, es un rayo incidente desde la izquierda; si el rayo se refracta o refleja tendremos prototípicamente $\sigma' = +$ o $\sigma' = -$.

La transformación $S_{\zeta;n,n'}$ es el producto de $\mathcal{R}_{\zeta;n}$ y $\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1}$, con $n \mapsto n'$. Cada transformación actúa en los argumentos de las funciones $f(q, p, \sigma)$ de modo que se conserva el orden de ellos:

$$\begin{aligned} S_{\zeta;n,n'} : f(q, p) &= (\mathcal{R}_{\zeta;n} \mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1}) : f(q, p) \\ &= \mathcal{R}_{\zeta;n} : (\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : f(q, p)) \\ &= \mathcal{R}_{\zeta;n} : f(\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : q, \mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : p) \\ &= f(\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : [\mathcal{R}_{\zeta;n} : q], \mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : [\mathcal{R}_{\zeta;n} : p]) \\ &= f(\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : \bar{q}, \mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : \bar{p}) \\ &= f(q', p') = f(S_{\zeta;n,n'} : q, S_{\zeta;n,n'} : p). \end{aligned}$$

Así, $\mathcal{R}_{\zeta;n}$ actúa primero y $\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1}$ actúa después —de izquierda a derecha, en el orden que se escriben.

3.6. Desarrollos en series de aberraciones

Al desarrollar en series de potencias las coordenadas del rayo saliente de un sistema óptico, (q', p') —la *imagen*, y las coordenadas del rayo entrante, (q, p) —el objeto, hacemos consecuentemente un *desarrollo en serie de aberraciones*. Para ello, tenemos a disposición herramientas de cómputo simbólico para manejar eficientemente los *polinomios* [WOLF Y KRÖTZSCH (1991)].

Así, para el caso de vuelo libre (hacia adelante: $\sigma = +$), si queremos trabajar a *séptimo orden de aberración* [grado 7 en (p, q) , rango $k = 4$ en $(p^2, p \cdot q, q^2)$], tendremos que retener hasta potencias de orden 7 en $|p|$ y $|q|$ en $\mathcal{F}_{\zeta;n} = \exp(-z\{h, o\})$. Recordemos que la serie $q(z)$ tiene los términos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\zeta;n} : q|7 : q(z)|7 \\ &= q + z \frac{p}{n} + z \frac{|p|^2 p}{2n^3} + z \frac{3|p|^4 p}{8n^5} + z \frac{5|p|^6 p}{16n^7} \\ &= q - z\{|p|^2/2n, q\} - z\{|p|^4/8n^3, q\} - z\{|p|^6/16n^5, q\} - z\{5|p|^8/128n^7, q\}. \end{aligned}$$

En efecto, podemos desarrollar la serie $\exp(-z\{h, o\})$ a la manera del Teorema

de Dragt y Finn [DRAGT Y FINN (1970)]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{z;n} &= \exp(z\{\sigma\sqrt{n^2 - |p|^2}, o\}) \\ &= \exp\left(z\left\{n - \frac{1}{2n}|p|^2 - \frac{1}{8n^3}|p|^4 - \frac{1}{16n^5}|p|^6 - \frac{5}{128n^7}|p|^8 - \dots, o\right\}\right) \\ &= \dots \exp\left\{-\frac{5z}{128n^7}|p|^8, o\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{z}{16n^5}|p|^6, o\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{z}{8n^3}|p|^4, o\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{z}{2n}|p|^2, o\right\} \end{aligned}$$

El último paso es sencillo porque todos los operadores $\{f(|p|), o\}$ conmutan entre sí y podemos reorganizar las series como si fuesen numéricas. Luego, es válido expresar que $\exp(\dots + B + A) = \dots \exp B \exp A$, pues $\{B, A\} = 0$. Aplicado este operador como serie a q , da $q +$ términos en p , y aplicado a p la deja invariante:

$$\mathcal{F}_{z;n} : p \mapsto p(z) = p.$$

En consecuencia, la acción del operador de vuelo libre a orden de aberración 7 se puede escribir como

$$\mathcal{F}_{z;n}|_7 = \left(1 - \frac{5z}{128n^7}\{|p|^8, o\}\right) \left(1 - \frac{z}{16n^5}\{|p|^6, o\}\right) \left(1 - \frac{z}{8n^3}\{|p|^4, o\}\right) \left(1 - \frac{z}{2n}\{|p|^2, o\}\right),$$

que aplicado a q reproduce la serie de $q(z)|_7$. Este manejo simple de las series se debe a que se trata de operadores de Poisson de funciones que dependen de $|p|^2$ únicamente.

Una superficie de revolución polinomial,

$$\zeta(q) = \zeta_0 + \zeta_2 q^2 + \zeta_4 (q^2)^2 + \zeta_6 (q^2)^3 + \dots,$$

en las ecuaciones de la transformación raíz, resueltas recursivamente, nos proporciona las soluciones polinomiales de aberraciones de hasta cierto orden en (q, p) . Para ello usaremos la transformación raíz descrita en la sección anterior. Para efectos de cómputo, veremos que resulta mucho más económico considerar superficies que son tangentes a la pantalla en el centro óptico, es decir $\zeta(0) = 0$ o $\zeta_0 = 0$. Mostraremos que

$$\mathcal{R}_{\zeta+\zeta_0;n} = \mathcal{F}_{\zeta_0;n} \mathcal{R}_{\zeta;n},$$

donde $\mathcal{F}_{\zeta_0;n}$ es el operador de vuelo libre por la distancia de la superficie al centro óptico. En efecto, escribimos la transformación raíz por una superficie $\zeta(q) + \zeta_0$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\zeta+\zeta_0;n} q &= \bar{q} = q + \left[\zeta(\bar{q}) + \zeta_0\right] \frac{p}{\sigma\sqrt{n^2 - |p|^2}} \\ &= q + \zeta_0 \frac{p}{\sigma\sqrt{n^2 - |p|^2}} + \zeta(\bar{q}) \frac{p}{\sigma\sqrt{n^2 - |p|^2}}, \\ \mathcal{R}_{\zeta+\zeta_0;n} p &= \bar{p} = p + \nabla[\zeta(\bar{q}) + \zeta_0] \sigma\sqrt{n^2 - |p|^2} \\ &= \mathcal{R}_{\zeta;n} p. \end{aligned}$$

Puesto que $\mathcal{F}_{\zeta_0, n} p = p$, la forma final de la primera ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\zeta_0, n} q &= \bar{q} = \mathcal{F}_{\zeta_0, n} q + \zeta(\bar{q}) \frac{\mathcal{F}_{\zeta_0, n} p}{\sigma \sqrt{n^2 - |\mathcal{F}_{\zeta_0, n} p|^2}} \\ &= \mathcal{F}_{\zeta_0, n} \left[q + \zeta(\bar{q}) \frac{p}{\sigma \sqrt{n^2 - |p|^2}} \right] \\ &= \mathcal{F}_{\zeta_0, n} \mathcal{R}_{\zeta; n} q. \end{aligned}$$

Para una superficie arbitraria, esta factorización de la transformación raíz en un factor de vuelo libre seguido de una transformación raíz a una superficie tangente a la pantalla, es válido entre los operadores, pues vale sobre todo el espacio fase.

3.7. Solución aproximante a la transformación raíz

Ilustraremos primero el proceso recursivo de solución de la transformación raíz a tercer orden. A primer orden, la solución es $\bar{q}_{[1]} = q$. Introducimos esta $\bar{q}_{[1]}$ en la ecuación para el siguiente paso, $\bar{q}_{[3]}$, cortamos el miembro derecho de la ecuación a tercer grado en las componentes de q y p , para $\zeta(q) = \zeta_2 q^2 + \zeta_4 (q^2)^2 + \dots$:

$$\bar{q}_{[3]} = q + [\zeta_2 (\bar{q}_{[1]})^2 + \dots] \left[\frac{p}{n} + \dots \right]_3 = q + \frac{\zeta_2}{n} |q|^2 p.$$

La ecuación para \bar{p} a tercer orden se calcula en forma similar, para $\nabla \zeta(q) = 2\zeta_2 q + 4\zeta_4 |q|^2 q + \dots$:

$$\bar{p}_{[3]} = p + [2\zeta_2 \bar{q}_{[3]} + \dots] \left[n - \frac{|p|^2}{2n} - \dots \right]_3 = p + 2\zeta_2 n q - \frac{\zeta_2}{n} |p|^2 q.$$

Continuamos la recursión con el paso para $\bar{q}_{[5]}$, reemplazamos $\bar{q}_{[3]}$ en el miembro derecho de la ecuación para \bar{q} , retenemos términos hasta orden 5. Posteriormente reemplazamos $\bar{q}_{[5]}$ en el miembro derecho de la ecuación para \bar{p} , obtenemos así $\bar{p}_{[5]}$. Los resultados del cómputo son los siguientes:

$$\bar{q} = q \quad (\text{primer orden})$$

$$+ \frac{\zeta_2}{n} q^2 p \quad (\text{tercer orden})$$

$$+ \frac{\zeta_2}{2n^3} p^2 q^2 p + \frac{2\zeta_2^2}{n^2} q \cdot p \cdot q^2 p + \frac{\zeta_4}{n} (q^2)^2 p, \quad (\text{quinto orden})$$

$$\bar{p} = p + 2\zeta_2 n q \quad (\text{primer orden})$$

$$- \frac{\zeta_2}{n} p^2 q + 2\zeta_2^2 q^2 p + 4\zeta_4 n q^2 q \quad (\text{tercer orden})$$

$$- \frac{\zeta_2}{4n^3} (p^2)^2 q - \frac{2\zeta_4}{n} p^2 q^2 q + \frac{4\zeta_2^3}{n} q \cdot p \cdot q^2 p \quad (\text{quinto orden})$$

$$+ 8\zeta_2 \zeta_4 (q^2)^2 p + 8\zeta_2 \zeta_4 q \cdot p \cdot q^2 q + 8\zeta_6 n (q^2)^2 q.$$

A continuación, se obtienen otras dos expresiones polinomiales para $q'(\bar{q}, \bar{p})$ y $p'(\bar{q}, \bar{p})$, que darán la acción de la transformación raíz inversa, $\mathcal{R}_{\zeta; m}^{-1}$. En este caso, la ecuación implícita es para $p'(\bar{q}, \bar{p})$. Para desplegar los polinomios correspondientes, podemos emplear la notación de vectores multicolonna indicados en la Sección 2.3. Observamos en las ecuaciones anteriores que aparece una suma de términos, cada uno de los cuales tiene un factor

$$Z(k_+, k_0, k_-) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = (\bar{p}^2)^{k_+} (\bar{p} \cdot \bar{q})^{k_0} (\bar{q}^2)^{k_-} \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$$

Podemos ordenar estos Z -monomios² lexicográficamente como elementos de un multivector y representar $p'(\bar{p}, \bar{q})$ de la manera siguiente:

| REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE $p'(\bar{q}, \bar{p})$: | COEFICIENTE DE: |
|--|--|
| $\{1, -2m \zeta_2\}$, | $\bar{p} = Z(0, 0, 0, 0)$ $\bar{q} = Z(0, 0, 0, 1)$ |
| $\{0, \zeta_2/m, 0, -4 \zeta_2^2, 0, -4m \zeta_1 + 4m \zeta_2^2\}$, | $ \bar{p} ^2 \bar{p} = Z(1, 0, 0, 0)$ $ \bar{p} ^2 \bar{q} = Z(1, 0, 0, 1)$ $(\bar{p} \cdot \bar{q}) \bar{p} = Z(0, 1, 0, 0)$ $(\bar{p} \cdot \bar{q}) \bar{q} = Z(0, 1, 0, 1)$ $ \bar{q} ^2 \bar{p} = Z(0, 0, 1, 0)$ $ \bar{q} ^2 \bar{q} = Z(0, 0, 1, 1)$ |
| $\{0, \zeta_2/(8m^5) + \zeta_2/(4m^3), 0, -\zeta_2^2/(4m^4) + 3/2 \zeta_2^2/m^2, 0, -3/4 \zeta_2^2/m^4 - \zeta_2^2/m^2 + 2 \zeta_4/m - 4 \zeta_2^3/m, 0, 3/2 \zeta_2^3/m^3 - 6 \zeta_2^3/m, 0, -16 \zeta_2 \zeta_4 + \zeta_2^3/m^3 + \zeta_2^3/m + 24 \zeta_2^4, 0, -6m \zeta_0 + 24m \zeta_2^2 \zeta_4 - 16m \zeta_2^5 - 2 \zeta_2^4/m^2 - 2 \zeta_2^4\}$, | $ \bar{p} ^4 \bar{p} = Z(2, 0, 0, 0)$ $ \bar{p} ^4 \bar{q} = Z(2, 0, 0, 1)$ $ \bar{p} ^2 (\bar{p} \cdot \bar{q}) \bar{p} = Z(1, 1, 0, 0)$ $ \bar{p} ^2 (\bar{p} \cdot \bar{q}) \bar{q} = Z(1, 1, 0, 1)$ $ \bar{p} ^2 \bar{q} ^2 \bar{p} = Z(1, 0, 1, 0)$ $ \bar{p} ^2 \bar{q} ^2 \bar{q} = Z(1, 0, 1, 1)$ $(\bar{p} \cdot \bar{q})^2 \bar{p} = Z(0, 2, 0, 0)$ $(\bar{p} \cdot \bar{q})^2 \bar{q} = Z(0, 2, 0, 1)$ $(\bar{p} \cdot \bar{q}) \bar{q} ^2 \bar{p} = Z(0, 1, 1, 0)$ $(\bar{p} \cdot \bar{q}) \bar{q} ^2 \bar{q} = Z(0, 1, 1, 1)$ $ \bar{q} ^4 \bar{p} = Z(0, 0, 2, 0)$ $ \bar{q} ^4 \bar{q} = Z(0, 0, 2, 1)$ |

Encontrada $p'(\bar{q}, \bar{p})$, introducimos esta expresión en la ecuación para $q'(\bar{q}, \bar{p})$ para obtener $q'(\bar{q}, \bar{p})$. El resultado nuevamente lo desplegamos en forma de multivector, y hacemos notar que la numeración de las componentes es tal como las maneja muSIMP. La expresión para $q' = \mathcal{R}_{\zeta; m} : \bar{q}$ es:

²Se les ha nombrado Z -monomios para distinguirlos de los monomios, que no contienen el término $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$

| REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE $q'(\bar{q}, \bar{p})$: | COMPONENTE VECTORIAL |
|--|----------------------|
| {0, | [1, 1] |
| 1}, | [1, 2] |
| {0, | [2, 1] |
| 0, | [2, 2] |
| 0, | [2, 3] |
| 0, | [2, 4] |
| $-\zeta_2/m$, | [2, 5] |
| $2\zeta_2^2$ }, | [2, 6] |
| {0, | [3, 1] |
| 0, | [3, 2] |
| 0, | [3, 3] |
| 0, | [3, 4] |
| $-\zeta_2/(2m^3)$, | [3, 5] |
| 0, | [3, 6] |
| 0, | [3, 7] |
| 0, | [3, 8] |
| $2\zeta_2^2/m^2$, | [3, 9] |
| 0, | [3, 10] |
| $-\zeta_4/m - 2\zeta_2^3/m$, | [3, 11] |
| $6\zeta_2\zeta_4$ }}, | [3, 12] |

Finalmente, como en la Sección 3.5, reconstituimos la transformación de superficie refractante reemplazando una pareja de variables en la otra de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 f(q', p') &= S_{\zeta; n, m} : f(q, p) \\
 &= \mathcal{R}_{\zeta; n} \mathcal{R}_{\zeta; m}^{-1} : f(q, p) \\
 &= f(\mathcal{R}_{\zeta; m}^{-1} : [\mathcal{R}_{\zeta; n} : q], \mathcal{R}_{\zeta; m}^{-1} : [\mathcal{R}_{\zeta; n} : p]) \\
 &= f(\mathcal{R}_{\zeta; m}^{-1} : \bar{q}, \mathcal{R}_{\zeta; m}^{-1} : \bar{p}).
 \end{aligned}$$

El resultado es $p'(q, p)$ y $q'(q, p)$

REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE $p'(q, p)$:

$$\{1, -2m\zeta_2 + 2n\zeta_2\},$$

$$\begin{aligned}
 &\{0, \\
 &\zeta_2/m - \zeta_2/n, \\
 &0, \\
 &4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2, \\
 &-2m\zeta_2^2/n + 2\zeta_2^2, \\
 &-4m\zeta_4 + 4n\zeta_4 + \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{0, \\
& \zeta_2/(4m^3) - \zeta_2/(4n^3), \\
& 0, \\
& n\zeta_2^2/(2m^3) + 3/2\zeta_2^2/m^2 - 2\zeta_2^2/(mn), \\
& -m\zeta_2^2/m^3 + \zeta_2^2/(mn), \\
& (4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) + n\zeta_2^2/m^3 - \zeta_2^2/m^2 + 2\zeta_4/m + 4\zeta_2^2/m - 2\zeta_4/n - 4\zeta_2^2/n, \\
& 0, \\
& (-4n\zeta_2^2/m^3 + 4\zeta_2^2/m^2)(m\zeta_2/2 - n\zeta_2/2) + 8n\zeta_2^3/m^2 - 8\zeta_2^3/m, \\
& -4m\zeta_2^2/n^2 + 4\zeta_2^2/m, \\
& -8m\zeta_2\zeta_4/m - 8\zeta_2\zeta_4 + (-8m\zeta_2^2 + 8n\zeta_2^2)(\zeta_2^2/m - \zeta_2^2/n) + \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(4m^3) + 2\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^2 + \\
& 10n\zeta_2\zeta_4/m + (4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2)^2, \\
& -8m\zeta_2\zeta_4/n + 8\zeta_2\zeta_4 + \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(mn), \\
& -8m\zeta_6 + 8n\zeta_6 + (-2n\zeta_2^2/m + 2\zeta_2^2)(8m\zeta_4 - 8n\zeta_4 - 2\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m) + \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^3/(4m^3) + \\
& 2\zeta_4(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{0, \\
& \zeta_2/(8m^5) - \zeta_2/(8n^5), \\
& 0, \\
& n\zeta_2^2/(4m^5) + \zeta_2^2/(2m^4) - \zeta_2^2/(4m^3n) - \zeta_2^2/(2mn^3), \\
& -3/4m\zeta_2^2/n^5 + \zeta_2^2/(4m^3n) + \zeta_2^2/(2mn^3), \\
& (4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2)(\zeta_2/(4m^3) - \zeta_2/(4n^3)) + n\zeta_2^2/(4m^5) + \zeta_2^2/(4m^4) + \zeta_4/(2m^3) - \zeta_2^2/(2m^3n) + 2\zeta_2^2/(m^2n) + \\
& \zeta_2(\zeta_2/m - \zeta_2/n)^2/m - \zeta_4/(2n^3) - 2\zeta_2^2/n^3, \\
& 0, \\
& (4\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2/n)(n\zeta_2/(4m^3) - \zeta_2/(4n^3)) + (n\zeta_2^2/m^3 - \zeta_2^2/m^2)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) + \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(8m^5) + \\
& 2n\zeta_2^2/m^4 + 2\zeta_2^2/m^3 - 4\zeta_2^2/(m^2n), \\
& -4m\zeta_2^2/n^4 + \zeta_2^2/(2m^3) + 3/2\zeta_2^2/(m^2n) + 2\zeta_2^2/(mn^2), \\
& -4m\zeta_2\zeta_4/n^3 + (-8m\zeta_2^2 + 8n\zeta_2^2)(\zeta_2^2/(2m^3n) - \zeta_2^2/(2n^3)) + (4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2)(n\zeta_2^2/(2m^3) + 3/2\zeta_2^2/m^2 - \\
& 2\zeta_2^2/(mn)) + (4\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2/n)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) + (10n\zeta_2^2/m^2 - 10\zeta_2^2/m)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) + (n\zeta_2^2/m^3 - \\
& \zeta_2^2/m^2)(\zeta_2/n - \zeta_2/m) + n\zeta_2^2/(2m^5) + 2n\zeta_2^2/m^4 - \zeta_2^2/(2m^4) + n\zeta_2\zeta_4/m^3 - \zeta_2^2/(2m^3) + 7\zeta_2\zeta_4/m^2 - \\
& 3/2\zeta_2^2/(m^2n) + 10\zeta_2^2/m^2 - 4\zeta_2\zeta_4/(mn) - 8\zeta_2^2/(mn) - 8\zeta_2^2/n^2, \\
& -3m\zeta_2\zeta_4/n^3 - 2m\zeta_2^2/n^3 + (4\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2/n)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) + \zeta_2^2/m^3 - \zeta_2^2/(m^2n) + \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(2mn^3) + \\
& 3\zeta_2\zeta_4/(mn) + 4\zeta_2^2/(mn) - 2\zeta_2^2/n^2, \\
& -4m\zeta_2^2/n^4 + (-8\zeta_2\zeta_4 + 2\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^2 + 8n\zeta_2\zeta_4/m)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) + (-8\zeta_2\zeta_4 + 8n\zeta_2\zeta_4/m)(\zeta_2/m - \\
& \zeta_2/n) + (-4n\zeta_2^2/m^5 + 4\zeta_2^2/m^4)(n\zeta_2/4 - n\zeta_2/4) + (-4n\zeta_2^2/m^3 + 4\zeta_2^2/m^2)(m\zeta_2^2/(2n) + (m\zeta_2/2 - n\zeta_2/2)(\zeta_2/m - \\
& \zeta_2/n) - \zeta_2^2/2) + (4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2)((4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) + n\zeta_2^2/m^2 - \zeta_2^2/m^2 + 2\zeta_4/m + 4\zeta_2^2/m - \\
& 2\zeta_4/n - 4\zeta_2^2/n) + \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(2m^4) + 3n\zeta_2\zeta_4/m^3 - \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(4m^3n) - 3\zeta_2\zeta_4/m^2 + \\
& 2\zeta_2^2(-2n\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(m^2n) + \zeta_2(-2m\zeta_2^2/n + 2\zeta_2^2)^2/m + 3\zeta_6/m + 20\zeta_2^2\zeta_4/m - 3\zeta_6/n - 10\zeta_2^2\zeta_4/n, \\
& 0, \\
& (-8n\zeta_2^2/m^4 + 8\zeta_2^2/m^3)(m\zeta_2/2 - n\zeta_2/2) + (-4n\zeta_2^2/m^5 + 4\zeta_2^2/m^4)(m\zeta_2/4 - n\zeta_2/4) + 2n\zeta_2^3/m^4 + 10n\zeta_2^4/m^3 - \\
& 2\zeta_2^2/m^2 - 10\zeta_4^2/m^2, \\
& -8m\zeta_2^4/n^3 + (-4\zeta_2^2/m^3 + 4\zeta_2^2/(m^2n))(m\zeta_2/2 - n\zeta_2/2) + 8\zeta_2^4/m^2, \\
& -10m\zeta_2^2\zeta_4/n^2 + (-8n\zeta_2\zeta_4/m^3 + 8\zeta_2\zeta_4/m^2)(m\zeta_2/2 - n\zeta_2/2) + (-2n\zeta_2^2/m + 2\zeta_2^2)(8m\zeta_2^2/n^2 - 8\zeta_2^2/m) + \\
& (4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2)(4\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2/n) + (4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2)((-4n\zeta_2^2/m^2 + 4\zeta_2^2/m^2)(m\zeta_2/2 - n\zeta_2/2) + 8n\zeta_2^2/m^2 - \\
& 8\zeta_2^2/m) + (8n\zeta_2^2/m - 8\zeta_2^2)(n\zeta_2/(2m^2) - \zeta_2/(2m^2)) + (10n\zeta_2^2/m - 10\zeta_2^2)(n\zeta_2/(4m^3) - \zeta_2/(4m^3)) + (10\zeta_2^2/m - \\
& 10\zeta_2^2)(\zeta_2^2/m - \zeta_2^2/n) + n\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(2m^5) + 4\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^3 + 48n\zeta_2^2\zeta_4/m^2 + 3\zeta_2(4n\zeta_2^2/m - \\
& 4\zeta_2^2)^2/m - 10\zeta_2^2\zeta_4/m - 10\zeta_2^2\zeta_4/n, \\
& -28m\zeta_2^2\zeta_4/n^2 + (-8m\zeta_2^2/n + 8\zeta_2^2)(\zeta_2^2/m - \zeta_2^2/n) + (4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2)(4\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2/n) + \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + \\
& 2n\zeta_2)^2/(4m^3n) + 2\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(m^2n) + 2\zeta_2^3(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(mn^2) + 20\zeta_2^2\zeta_4/m + 8\zeta_2^2\zeta_4/n, \\
& -24m\zeta_2\zeta_6/n - 8m\zeta_4^2/n + (-10m\zeta_2\zeta_4 + 10n\zeta_2\zeta_4)(\zeta_2^2/m - \zeta_2^2/n) + (-10m\zeta_2\zeta_4 + 10n\zeta_2\zeta_4 + 4\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + \\
& 2n\zeta_2)^2/m)(\zeta_2^2/m - \zeta_2^2/n) + (-8\zeta_2\zeta_4 + 2\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^2 + 8n\zeta_2\zeta_4/m)[8n\zeta_2^2/m - 8\zeta_2^2] + (-4\zeta_2^2/m^3 + \\
& 4\zeta_2^2/(m^2n))(m\zeta_2 - n\zeta_2) + (-4n\zeta_2^2\zeta_4/m + 4\zeta_2^2\zeta_4)(8\zeta_2 - 8n\zeta_2/m) + (-2n\zeta_2^2/m + 2\zeta_2^2)(12m\zeta_2\zeta_4/m - 12\zeta_2\zeta_4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(mn) + \{-2n\zeta_2^2/m + 2\zeta_2^2\}(10m\zeta_2\zeta_4/n + 16\zeta_2\zeta_4 + (16m\zeta_2^2 - 16n\zeta_2^2)(\zeta_2^2/m - \zeta_2^2/n) - \\
& \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(2m^3) - 4\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^2 - 32n\zeta_2\zeta_4/m - 2(4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2)^2) + (8n\zeta_2^3/m - \\
& 8\zeta_2^3)(n\zeta_2/(2m^3) - \zeta_2/(2m^2)) + \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(8m^5) + \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(2m^4) + \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + \\
& 2n\zeta_2)^3/(2m^4) + 2n\zeta_2\zeta_4/m^3 + \zeta_4(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(2m^3) - 2\zeta_2\zeta_4/m^2 + 8\zeta_2\zeta_4(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^2 + \\
& 24n\zeta_2\zeta_4/m + 16n\zeta_2^2/m + 4\zeta_2\zeta_4(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(mn) - 8\zeta_4^2, \\
& -8m\zeta_2\zeta_6/n - 4m\zeta_4^2/n + 8\zeta_2\zeta_6 + \{-2\zeta_2^2/m + 2\zeta_2^2/n\}(8m\zeta_4 - 8n\zeta_4 - 2\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m) + \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + \\
& 2n\zeta_2)^3/(4m^3n) + 3\zeta_2\zeta_4(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(mn) + 4\zeta_4^2, \\
& -8m\zeta_8 + 8n\zeta_8 + \{-4n\zeta_2^2/m^3 + 4\zeta_2^2/m^2\}(m\zeta_4 - n\zeta_4 + \{-m\zeta_2/2 + n\zeta_2/2\}(2m\zeta_2^2/n - 2\zeta_2^2) + (4n\zeta_2^2/m - \\
& 4\zeta_2^2)(m\zeta_2/2 - n\zeta_2/2) - \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(4m)) + \{-2n\zeta_2^2/m + 2\zeta_2^2\}(12m\zeta_6 - 12n\zeta_6 + (4n\zeta_2^2/m - \\
& 4\zeta_2^2)(8m\zeta_4 - 8n\zeta_4 - 2\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m) - \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^3/(2m^3) - 4\zeta_4(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m) + \\
& \{-m\zeta_2^2 + n\zeta_2^2\}(\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(8m^4) + 4n\zeta_4/m^3 - 4\zeta_4/m^2) + (4\zeta_2\zeta_4 - 4n\zeta_2\zeta_4/m)(8m\zeta_4 - 8n\zeta_4 - 2\zeta_2(-2m\zeta_2 + \\
& 2n\zeta_2)^2/m) + \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^3/(8m^5) + n\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^4 + \zeta_4(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^3/(2m^3) - \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + \\
& 2n\zeta_2)^2/m^3 + \zeta_2(-4m\zeta_4 + 4n\zeta_4 + \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^2)/m + 3\zeta_6(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m),
\end{aligned}$$

REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE $q^1(q, p)$:

$$\{0, 1\},$$

$$\begin{aligned}
& 0, \\
& 0, \\
& 0, \\
& 0, \\
& -\zeta_2/n + \zeta_2/n, \\
& -2n\zeta_2^2/m + 2\zeta_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{0, \\
& 0, \\
& 0, \\
& 0, \\
& -\zeta_2/(2m^3) + \zeta_2/(2n^3), \\
& -n\zeta_2^2/m^3 + \zeta_2^2/(mn), \\
& 0, \\
& 0, \\
& -2n\zeta_2^2/m^3 + 2\zeta_2^2/n^2 - 2\zeta_2^2/(mn) + 2\zeta_2^2/n^2, \\
& -\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^3 - 4n\zeta_2^2/m^2 + 4\zeta_2^2/n, \\
& -\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(2m^3) - \zeta_4/m - 2\zeta_2^2/m + \zeta_4/n + 2\zeta_2^2/n, \\
& 8\zeta_2\zeta_4 - \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^3/(2m^3) - \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^2 - 8n\zeta_2\zeta_4/m\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{0, \\
& 0, \\
& 0, \\
& 0, \\
& -3/8\zeta_2/m^5 + 3/8\zeta_2/n^5, \\
& -3/4n\zeta_2^2/m^5 + \zeta_2^2/(2m^3n) + \zeta_2^2/(4mn^3), \\
& 0, \\
& 0, \\
& -3/4n\zeta_2^2/m^5 - \zeta_2^2/(4m^4) - \zeta_2^2/(mn^3) + 2\zeta_2^2/n^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-2n\zeta_2^2/m^3 + 2\zeta_2^2/m^2)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) + (-2\zeta_2^2/m + 2\zeta_2^2/n)(n\zeta_2/m^3 - \zeta_2/m^2) - 3/8\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^5 - \\
& 5/2n\zeta_2^2/m^4 - 3/2\zeta_2^2/m^3 + 2\zeta_2^2/(m^2n) + 2\zeta_2^2/n^3, \\
& (-2n\zeta_2^2/m^3 + 2\zeta_2^2/m^2)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) - 3/2n\zeta_2^2/m^5 + 3/2\zeta_2^2/m^4 - \zeta_4/(2m^3) - 3\zeta_2^2/m^3 + 2\zeta_2^2/(m^2n) - \\
& \zeta_2^2/(m^2n^2) + \zeta_4/(2m^3) + 2\zeta_2^2/n^3, \\
& (-4n\zeta_2^2/m^2 + 4\zeta_2^2/m)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) + (2m\zeta_2^2/n + (2m\zeta_2^2 - 2n\zeta_2^2)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) - 2\zeta_2^2)(2n\zeta_2/m^3 - 2\zeta_2/m^2) + \\
& (2m\zeta_2^2 - 2n\zeta_2^2)(3/2n\zeta_2/m^5 - 3/2\zeta_2/m^4) - n\zeta_2^2/m^4 - \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^4 - 3n\zeta_2\zeta_4/m^3 + \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + \\
& 2n\zeta_2)^2/(2m^3n) + \zeta_2^2/m^3 - 4\zeta_2^4/m^2 + 3\zeta_2\zeta_4/(mn) + 2\zeta_2^4/(mn) + 2\zeta_2^4/n^2, \\
& 0, \\
& 0, \\
& (2m\zeta_2^2 - 2n\zeta_2^2)(3/2n\zeta_2/m^5 - 3/2\zeta_2/m^4) - 4n\zeta_2^2/m^4 + 4\zeta_2^2/(m^2n) - 4\zeta_2^2/(m^2n^2) + 4\zeta_2^2/n^3, \\
& (-8n\zeta_2^2/m + 8\zeta_2^2)(n\zeta_2/m^3 - \zeta_2/m^2) + (-2n\zeta_2^2/m^3 + 2\zeta_2^2/m^2)(4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2) + (4n\zeta_2^3/m^4 - 4\zeta_2^3/m^3)(m\zeta_2/2 - \\
& n\zeta_2/2) - 3/2n\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^5 + 3/2\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^4 - 8n\zeta_2^4/m^3 - 2\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(m^3n) + \\
& 8\zeta_2^4/n^2, \\
& (-2n\zeta_2^2/m^3 + 2\zeta_2^2/m^2)(4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2) + (2m\zeta_2^2/n - 2\zeta_2^2)(4n\zeta_2/m^3 - 4\zeta_2/m^2) - 3/8\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^5 - \\
& \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^4 - 6n\zeta_2\zeta_4/m^3 - \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/(m^3n) + n\zeta_2\zeta_4/m^2 - 4\zeta_2^4/m^2 - 6\zeta_2\zeta_4/(mn) - \\
& 4\zeta_2^4/(mn) + 6\zeta_2\zeta_4/n^2 + 8\zeta_2^4/n^2, \\
& (-8n\zeta_2^2/m + 8\zeta_2^2)(\zeta_2/m - \zeta_2/n) + (2m\zeta_2^2 - 2n\zeta_2^2)((-2m\zeta_2^2/n + 2\zeta_2^2)(2n\zeta_2/m^3 - 2\zeta_2/m^2) + (2n\zeta_2/m^3 - \\
& 2\zeta_2/m^2)(4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2) + \zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^4 + 4n\zeta_4/m^3 - 4\zeta_4/m^2) + (2m\zeta_2^2 - 2n\zeta_2^2)(\zeta_2(-2m\zeta_2 + \\
& 2n\zeta_2)^2/m^4 + 4n\zeta_4/m^3 - 4\zeta_4/m^2) - 3/8\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^3/m^5 - 2n\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^4 - \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + \\
& 2n\zeta_2)^2/(4m^4) - \zeta_4(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^3 - \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^3/(m^3n) - 20n\zeta_2^2\zeta_4/m^2 - 2\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/ \\
& (m^2n) - \zeta_2(4n\zeta_2^2/m - 4\zeta_2^2)^2/m - 8\zeta_2^2\zeta_4/m + 28\zeta_2^2\zeta_4/n, \\
& (2m\zeta_2^2 - 2n\zeta_2^2)(\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^4 + 4n\zeta_4/m^3 - 4\zeta_4/m^2) - 3/8\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^3/m^5 - \zeta_4(-2m\zeta_2 + \\
& 2n\zeta_2)^2/(2m^3) - \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^3 - \zeta_6/m - 8\zeta_2^2\zeta_4/m + \zeta_6/n + 8\zeta_2^2\zeta_4/n, \\
& 8\zeta_2\zeta_6 + (2n\zeta_2^2/m^2 - 2\zeta_2^2/m)(8m\zeta_4 - 8n\zeta_4 - 2\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m) - 3/8\zeta_2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^4/m^5 - \zeta_2^2(-2m\zeta_2 + \\
& 2n\zeta_2)^3/(4m^4) - 3/2\zeta_2^2(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^4/m^4 - 6n\zeta_2\zeta_4(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^3 - \zeta_4(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^3/(2m^3) + \\
& 3\zeta_2\zeta_4(-2m\zeta_2 + 2n\zeta_2)^2/m^2 - 8n\zeta_2\zeta_6/m - 4n\zeta_4^2/m + 4\zeta_4^2,
\end{aligned}$$

Esta es la transformación de superficie refractante a séptimo orden de aberración para $p'(q, p)$ y $q'(q, p)$ [DRAGT, FOREST Y WOLF (1986)]. Contiene 100 y 50 operaciones de suma, respectivamente. El cálculo a orden de aberración nueve fue hecho por Miguel Navarro Saad y ocupa catorce páginas de su tesis profesional [NAVARRO SAAD (1985)], [NAVARRO-SAAD Y WOLF (1985)]. La interfase entre el sistema MUSTMP de cómputo simbólico y T_EX permite evitar erratas en estas expresiones.

3.8. La parametrización más condensada de las transformaciones

En la Sección anterior, caracterizamos la transformación de superficie refractante por medio de las formas explícitas de $q'(q, p)$ y $p'(q, p)$. Sin embargo, ésta no es la forma más económica de acero, como podemos ver en el siguiente ejemplo, al considerar el polinomio de cuarto orden

$$|f|^4 = \alpha|p|^4 + \beta|p|^2 p \cdot q + \gamma|p|^2 |q|^2 + \delta(p \cdot q)^2 + \varepsilon p \cdot q |q|^2 + \zeta |q|^4,$$

la transformación exponencial de Lie-Poisson que genera a tercer orden es

$$\begin{aligned} p|_3(q, p) &= \exp\{\mathfrak{f}^{[4]}, \circ\} p|_3 = p \\ &\quad + \beta|p|^2 p + 2\gamma|p|^2 q + 2\delta p \cdot qp + 2\varepsilon p \cdot qq + \varepsilon|q|^2 p + 4\eta|q|^2 q, \\ q|_3(q, p) &= \exp\{\mathfrak{f}^{[4]}, \circ\} q|_3 = q \\ &\quad - 4\alpha|p|^2 p - \beta|p|^2 q - 2\beta p \cdot qp - 2\delta p \cdot qq - 2\gamma|q|^2 p - \varepsilon|q|^2 q. \end{aligned}$$

Podemos verificar que la transformación $(p, q) \mapsto (p', q')$ es en sí una transformación canónica a orden 3, pues

$$\begin{aligned} (q'_i, p'_j)|_3 &= \{q_i - 4\alpha|p|^2 p_i - \beta|p|^2 q_i - 2\beta p \cdot qp_i - \dots, p_j + \beta|p|^2 p + 2\gamma|p|^2 q + \dots\} \\ &= \{q_i, p_j\} + \alpha\{-4|p|^2 p_i, p_j\} \\ &\quad + \beta\{-|p|^2 q_i, p_j\} + \{-2p \cdot qp_i, p_j\} + \{q_i, |p|^2 p_j\} \\ &\quad + \gamma \times \dots + \dots \alpha\beta\{|p|^2 p_i, |q|^2 q_j\}|_3 \\ &= \delta_{ij} + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \dots + \alpha\beta \cdot 0. \end{aligned}$$

En la Sección 2.13 manejamos una fórmula similar para el caso de una dimensión. Ahí introdujimos los cinco coeficientes $\alpha, \dots, \varepsilon$ en una submatriz de 2×4 fuera de la diagonal de la matriz triangular superior que representó la acción de $\exp\{\mathfrak{f}^{[4]}, \circ\}$ sobre el espacio de monomios reducido por grado. Aquí tenemos dos dimensiones y hay 6 monomios de grado 3, de modo que la submatriz es ahora

$$k = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|ccc} \text{transf. lineal} & & & \\ \hline & \mathbf{1}_{[2 \times 2]} & \begin{array}{|ccc|} \hline \text{aberración de orden 3} \\ \beta & 2\gamma & 2\delta & 2\varepsilon & \varepsilon & 4\eta \\ \hline -4\alpha & -3\beta & -2\beta & -2\delta & -2\gamma & -\varepsilon \\ \hline \end{array} & \\ \hline & 0 & \mathbf{1}_{[6 \times 6]} & \end{array} \right) \text{ sobre } \begin{pmatrix} p \\ q \\ |p|^2 p \\ |p|^2 q \\ p \cdot qp \\ p \cdot qq \\ |q|^2 p \\ |q|^2 q \end{pmatrix}$$

Evidentemente, es más conveniente manejar los 12 elementos de la submatriz de transformación, que las expresiones polinomiales de p' y q' que repiten los monomios $|p|^2 p \dots$. Pero, la parametrización más condensada de la transformación son los 6 coeficientes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta)$.

Para el caso de la transformación por vuelo libre vista al final de la Sección 3.3, a tercer orden la transformación explícita es

$$p(z)|_3 = p, \quad q(z)|_3 = q + z \frac{p}{n} + z \frac{|p|^2 p}{2n^3}.$$

Escribimos esta transformación como matriz,

$$\begin{pmatrix} p(z) \\ q(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{transf. lineal} & \text{aberración de orden 3} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z/n & 1 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z/2n^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ |p|^2 p \\ |p|^2 q \\ p \cdot q p \\ p \cdot q q \\ |q|^2 p \\ |q|^2 q \end{pmatrix}$$

Al comparar los términos lineales con la serie de la Sección 3.6 constatamos que $f^{[2]} = -z|p|^2/2n$. El elemento 2-1 de la submatriz de 2×6 aparece como $-4\alpha = z/2n^3$. Esto nos dice que $\alpha = -z/8n^3$, $\beta = \gamma = \dots = \eta = 0$ y que el polinomio de aberración del vuelo libre a tercer orden es $f^{[4]} = -z|p|^4/8n^3$.

Para la transformación raíz, tenemos a tercer orden

$$\begin{aligned} \bar{p}[3] &= p + 2\zeta_2 n q - \frac{\zeta_2}{n} |p|^2 q + 2\zeta_2^2 |q|^2 p + 4\zeta_4 n |q|^2 q, \\ \bar{q}[3] &= q + \frac{\zeta_2}{n} |q|^2 p. \end{aligned}$$

Su forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{transf. lineal} & \text{aberración de orden 3} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2\zeta_2 n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -\zeta_2/n & 0 & 0 & 2\zeta_2^2 & 4\zeta_4 n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_2/n & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ |p|^2 p \\ |p|^2 q \\ p \cdot q p \\ p \cdot q q \\ |q|^2 p \\ |q|^2 q \end{pmatrix}$$

Buscamos polinomios $r^{[2]}$ y $r^{[4]}$ tales que

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} = \exp\{r^{[4]}, 0\} \cdot \exp\{r^{[2]}, 0\} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Si comparamos los términos lineales vemos que $r^{[2]} = 2\zeta_2 n$, es decir

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} = \exp\{r^{[4]}, 0\} \begin{pmatrix} p + 2\zeta_2 n q \\ q \end{pmatrix}.$$

El segundo elemento del bivector es:

$$\bar{q} = q + \zeta_2/n |q|^2 p = q - 4\alpha |p|^2 p - \beta |p|^2 q - 2\beta p \cdot q p - 2\delta p \cdot q q - 2\gamma |q|^2 p - \varepsilon |q|^2 q.$$

De modo que concluimos que

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\zeta_2/2n, \quad \delta = 0, \quad \epsilon = 0, \quad \eta = ?$$

Con esta información (y aún sin sustituir γ por su resultado) la primera componente del bivector es:

$$\bar{p} = (1 + \{r^{[4]}, o\})(p + 2\zeta_2 n q) = p + 2\zeta_2 n q + 2\gamma |p|^2 q - 4\zeta_2 n \gamma |q|^2 p + 4\eta |q|^2 q.$$

Al comparar esto con la expresión para \bar{p} indicada arriba concluimos nuevamente que $\gamma = -\zeta_2/2n$ verifica los coeficientes de los términos en $|p|^2 q$ y $|q|^2 p$, mientras que la comparación de los coeficientes de $|q|^2 q$ nos termina la lista anterior con

$$\eta = \zeta_4 n.$$

De la misma manera, se ha trabajado a séptimo orden de aberración.¹ En ese caso es necesario trabajar con matrices más grandes, o bien deducir directamente los coeficientes de los polinomios de aberración más allá de $f^{[4]}$, es decir, $f^{[6]}$ y $f^{[8]}$. Las ecuaciones a resolver, substituyendo w por p o q , provienen de

$$\begin{aligned} w' |_{[7]} &= \exp\{f^{[6]}, o\} \cdot \exp\{f^{[0]}, o\} \exp\{f^{[4]}, o\} w \\ &= w + \{f^{[4]}, w\} \\ &\quad + \{f^{[6]}, w\} + \frac{1}{2!} \{f^{[4]}, \{f^{[4]}, w\}\} \\ &\quad + \{f^{[8]}, w\} + \{f^{[0]}, \{f^{[4]}, w\}\} + \frac{1}{3!} \{f^{[4]}, \{f^{[4]}, \{f^{[4]}, w\}\}\}. \end{aligned}$$

Con las expresiones para $p'(p, q)|_{[7]}$ y $q'(p, q)|_{[7]}$ se pueden extraer los coeficientes de los polinomios de aberración de orden 5 y 7.

3.9. Composición de aberraciones (MEXLIE)

La representación de elementos del grupo de aberraciones de orden $N = 2k - 1$ mediante la notación que usamos anteriormente,

$$\mathcal{G} \{a^{[N]}, \dots, a^{[6]}, a^{[4]}, M\}$$

donde $a^{[2k]}$ es un polinomio de grado $2k = 4, 6, \dots, N + 1$, y M es una matriz de 2×2 (generada por un polinomio cuadrático $a^{[2]} = a[2, 1] |p|^2 + a[2, 2] p \cdot q + a[2, 3] |q|^2$) que describe la parte lineal de la transformación, es la más condensada. En esta notación solamente tenemos que guardar los cuatro elementos de la matriz M y los coeficientes $a[k, l]$ de los polinomios de aberración.

Las transformaciones lineales puras están dadas por $\mathcal{G} \{0; M\}$, y las aberraciones puras por $\mathcal{G} \{a; 1\}$. Existen funciones en MEXLIE que concatenan dos elementos de

grupo para producir un tercero

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\{a; M\} \mathcal{G}\{b; N\} &= \mathcal{G}\{a; 1\} \mathcal{G}\{0; M\} \mathcal{G}\{b; 1\} \mathcal{G}\{0; N\} \\ &= \mathcal{G}\{a; 1\} \mathcal{G}\{0; M\} \mathcal{G}\{b; 1\} \mathcal{G}\{0; M^{-1}\} \mathcal{G}\{0; M\} \mathcal{G}\{0; N\} \\ &= \mathcal{G}\{a; 1\} \mathcal{G}\{D(M, b); 1\} \mathcal{G}\{0; MN\} \\ &= \mathcal{G}\{a \# D(M, b); MN\}, \end{aligned}$$

donde $D(M, b) = [D(M^{-1})]^T b = E(M)b$ es la acción de la representación del grupo lineal sobre el conjunto de vectores con los coeficientes de aberración contenidos en b , como vimos en la Sección 2.12.

La operación $\#$ (*gato*) es la operación de composición de aberraciones puras:

$$\mathcal{G}\{a; 1\} \mathcal{G}\{b; 1\} = \mathcal{G}\{a \# b; 1\} = \mathcal{G}\{c; 1\}.$$

A séptimo orden de aberración específicamente tenemos

$$\begin{aligned} \exp\{c^{[8]}, o\} \exp\{c^{[6]}, o\} \exp\{c^{[4]}, o\} &= \exp\{a^{[8]}, o\} \exp\{a^{[6]}, o\} \exp\{a^{[4]}, o\} \\ &\quad \times \exp\{b^{[8]}, o\} \exp\{b^{[6]}, o\} \exp\{b^{[4]}, o\}. \end{aligned}$$

El algoritmo para obtener el conmutador de exponenciales de operadores que no conmutan se llama el problema de Baker-Campbell-Hausdorff. Este se puede resolver explícitamente para órdenes bajos, pero no existe una fórmula recursiva para hacerla a órdenes arbitrarios. Escrita para los polinomios de grado 4, 6 y 8 que nosotros usamos, esta fórmula implementa la operación $\#$ en términos de los paréntesis de Poisson [STEINBERG (1980)] y es

$$\begin{aligned} c^{[4]} &= a^{[4]} + b^{[4]}, \\ c^{[6]} &= a^{[6]} + b^{[6]} + \frac{1}{2}\{a^{[4]}, b^{[4]}\}, \\ c^{[8]} &= a^{[8]} + b^{[8]} + \{a^{[4]}, b^{[6]}\} \\ &\quad + \frac{1}{3}\{a^{[4]}, \{a^{[4]}, b^{[4]}\}\} - \frac{1}{6}\{\{a^{[4]}, b^{[4]}\}, b^{[4]}\}. \end{aligned}$$

El inverso de un elemento $\mathcal{G}\{a; M\}$, es decir $\mathcal{G}\{a; M\}^{-1}$ tal que $\mathcal{G}\{a; M\} \times \mathcal{G}\{a; M\}^{-1} = \mathcal{G}\{a; M\}^{-1} \mathcal{G}\{a; M\} = \mathcal{G}\{0; 1\}$. Para transformaciones lineales puras, la matriz se invierte: $\mathcal{G}\{0; M\}^{-1} = \mathcal{G}\{0; M^{-1}\}$. Para aberraciones puras, de la fórmula anterior para $c^{[4,6,8]}$ concluimos, orden por orden, que

$$\bar{a}^{[4]} = -a^{[4]}, \quad \bar{a}^{[6]} = -a^{[6]}, \quad \bar{a}^{[8]} = -a^{[8]} + \{a^{[4]}, a^{[6]}\}.$$

Es tal que $\mathcal{G}\{a; 1\} \mathcal{G}\{\bar{a}; 1\} = \mathcal{G}\{a \# \bar{a}; 1\} = \mathcal{G}\{0; 1\}$. De su composición, podemos entonces escribir

$$\mathcal{G}\{a; M\}^{-1} = \mathcal{G}\{D(M^{-1}, \bar{a}); M^{-1}\}$$

donde $\bar{a}(a)$ fue definida arriba por grados y a tercero y quinto orden de aberración, $\bar{a} = -a$. Podemos verificar que lo requerido se cumple, pues

$$\mathcal{G}(a; M) \mathcal{G}(a; M)^{-1} = \mathcal{G}\{a; D(M, D(M^{-1}, \bar{a})); M M^{-1}\} = \mathcal{G}(a; \bar{a}; 1) = \mathcal{G}(0; 1)$$

Finalmente, MEXLIE contiene funciones que representan los elementos ópticos comunes, como son el vuelo libre, la transformación de superficie refractante, espejo, vuelo en fibra, e interfase refractante entre dos fibras alineadas. Con estos elementos y las funciones de concatenación se pueden componer los sistemas ópticos, calcular el vuelo libre necesario para formación de imagen, y desplegar los resultados como diagramas de mancha [CORREA Y WOLF (1989)].

4. Funciones de cálculo simbólico

El paquete de funciones para calcular y manejar aberraciones a séptimo orden para óptica geométrica que se ha desarrollado en el UMAS/Cuernavaca, se ha denominado MEXLIE y se considera que el paquete existente es su versión 1.0. Se ha empleado para diseñar sistemas ópticos axialmente simétricos. El paquete MEXLIE 1.0 está escrito en el lenguaje programable muSIMP. Corre satisfactoriamente en una computadora PC de 612 KB de RAM. El intérprete de pseudo-código muSIMP es un programa de lenguaje ensamblador que ejecuta programas armados para su sistema de *matemática simbólica* en formato muSIMP. Este lenguaje ya es un tanto obsoleto; en 1985 Miguel Navarro Saad y Bernardo Wolf habían trabajado con REDUCE, pero muSIMP representó una alternativa comoda para el trabajo de escritorio, aunque lenta y poco interactiva. Es factible que las funciones sean reescritas en otro intérpretes de pseudo-código como MATHEMATICA. Este capítulo enfatizará aspectos de MEXLIE que son transportables de un intérprete a otro, tales como los cambios de base y su eficiencia computacional.

En este capítulo exponemos el resultado de la referencia [WOLF Y KRÖTZSCH (1991)], sobre la eficiencia relativa de las bases monomial y simpléctica en las operaciones de producto y paréntesis de Poisson de polinomios. Fue al efectuar las operaciones implícitas de la transformación raíz vistas en el Capítulo 3, que nos percatamos de este problema de eficiencia. En las primeras Secciones detallamos el uso de listas por muSIMP para manejar polinomios en el espacio fase de la óptica y sus transformaciones bajo sistemas ópticos axialmente simétricos. Presentamos la construcción de la base de armónicos simplécticos [WOLF (1986)], [DRAGT, FOREST Y WOLF (1986)] clasificada por rango, spin simpléctico e índice de Seidel, que clasifican las aberraciones ópticas [WOLF (1988a)]. En estas bases damos las tablas de multiplicación y de paréntesis de Poisson, y comparamos su complejidad computacional.

4.1. El manejo de polinomios por cómputo simbólico

muSIMP trabaja con secuencias binarias que son estructuradas en forma de notación prefija de lista. Por ejemplo, el polinomio, en dos variables, p y q ,

$$f = p + 5q + Ap^2 - Bpq + Cq^2 + 8p^3q - \frac{1}{2}p^3q^2$$

estará representado en formato de *input* y *output* en pantalla como

```
?      F: P + 5 Q + A P^2 - B P Q + C Q^2 + 8 P^3 Q - 1/2 P^2 Q^2 &
```

```
0:      (+ P (+ B Q) (+ A (^P 2)) (+ -1 B P Q) (+ C (^Q 2))
      (+ 8 (^P 3) Q) (+ -1 (^2 -1) (^P 3) (^Q 2)))
```

La representación de polinomios en muSIMP la hacemos por medio de estructuras de multivectores columna, en este caso con dos índices, k y m (no consideramos los escalares $k = 0$). muSIMP escribe vectores con una longitud que acomoda a la última entrada diferente de cero y por tanto la salida es una lista compacta de todos los posibles polinomios. Hecha la transformación del polinomio F a su estructura de vector de monomios FV , formamos el vector columna

```
?      FV: NONDECOMP (F, B):
```

```
0:      {{1,
        B},
        {A,
         -B,
         C},
        {0,
         0,
         8},
        {0,
         0,
         -1/2 }}.
```

La estructura de lista correspondiente es

```
?      FV &
```

```
0:      ((({1 B}) ({A (+ -1 B) C}) ({0} ({0 8}) ({0 0 (+ -1 (^ 2 -1))}))
```

Hacemos notar que la longitud de la lista que representa al polinomio es considerablemente menor que la lista de *output* anterior, pues no se tiene que guardar la información redundante de las potencias de las variables p y q y sus productos, sino solo los coeficientes que nos interesan. Los coeficientes se guardan etiquetados por su posición en la lista. Una posible desventaja es que en polinomios ralos en p (con pocos términos pero potencias altas en q), la representación vectorial guardará muchos ceros.

4.2. Polinomios en 2 + 2 coordenadas

En la óptica ordinaria de tres dimensiones se trabaja con cuatro coordenadas Hamiltonianas con respecto a una pantalla dada: dos coordenadas de posición $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ y dos de momento $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$. Los elementos ópticos son transformaciones de estas coordenadas, que en general son canónicas a cierto orden y *no son lineales*. Como hemos visto en el Capítulo 2, su desarrollo en serie de Taylor conduce al desarrollo en aberraciones.

Los elementos ópticos pasivos transforman un *objeto* del espacio fase de rayos, en una *imagen* del espacio. El rayo (p_o, q_o) se mapea en (p_i, q_i) , y queremos conocer $p_i(p_o, q_o)$ y $q_i(p_o, q_o)$ en sus formas de polinomiales explícitas. Los mapeos de polinomios que hemos manejado en los capítulos anteriores son *canónicos* cuando restringimos el cálculo a un determinado orden de aberración o *rango* [HEALY Y DRAGT (1989)].

Las cuatro variables del espacio fase son (p_x, p_y, q_x, q_y) y para ellas MEXLIE tiene las *primitivas reservadas*

$$PX : p_x, \quad PY : p_y, \quad QX : q_x, \quad QY : q_y.$$

Nos interesan también los desarrollos de sistemas asimétricos según coordenadas de *helicidad*:

$$\begin{aligned} PP: \quad p_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_x + ip_y), & PM: \quad p_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_x - ip_y), \\ QP: \quad q_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_x + iq_y), & QM: \quad q_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_x - iq_y). \end{aligned}$$

Aquí hemos tenido especial interés en sistemas ópticos *axialmente simétricos*. En ellos, las coordenadas del objeto y la imagen rotan simultáneamente en torno al eje, de modo que la orientación *x-y* de la pantalla es en principio arbitraria. En los sistemas ópticos axialmente simétricos necesitamos solamente p_+ y q_+ (PP y QP), dado que los $-$'s son sus conjugados complejos. Las primitivas PP y QP son usadas para recobrar de sus partes real e imaginaria las coordenadas Cartesianas. Pueden ser leídas también *vectorialmente*: un factor de P o Q estará asociado a $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ o $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ respectivamente.

Los polinomios que generan las transformaciones de Lie que representan sistemas ópticos axialmente simétricos, son polinomios en las cantidades *cuadráticas* $|\mathbf{p}|^2$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ y $|\mathbf{q}|^2$, invariantes bajo rotaciones *x-y*, cuyos símbolos reservados son:

$$\begin{aligned} P2: \quad p^2 &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 = 2p_+ p_-, \\ PQ: \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &= p_x q_x + p_y q_y = p_+ q_- + p_- q_+, \\ Q2: \quad q^2 &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = q_x^2 + q_y^2 = 2q_+ q_-. \end{aligned}$$

La transformación de Lie generada por estas funciones actúa sobre las coordenadas del espacio fase (\mathbf{p}, \mathbf{q}) y produce imágenes de la forma genérica

$$\mathbf{q}'(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \alpha(p^2, \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, q^2)\mathbf{p} + \beta(p^2, \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, q^2)\mathbf{q}.$$

Una expresión similar vale para el mapeo del momento $\mathbf{p}'(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

4.3. Manejo de transformaciones lineales

La parte lineal de las transformaciones canónicas, como las que hemos manejado aquí, requiere de un tratamiento separado al de las series de aberraciones, como fue detallado en la Sección 2.12.

En el sistema muSIMP de cómputo simbólico tenemos esta operación como una función. Guardámosla bajo el identificador MAT a la matriz genérica de 2×2 declarada por

```
? MAT: {[a, b], [c, d]};
```

entonces podemos invocar a la función DMAT que realiza $D_{m,m}^j \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que tiene como argumento la matriz MAT y el índice $j = \frac{1}{2}k$, que puede ser entero o semientero. Así

```
? DMAT (MAT, 1/2);
```

```
0: {[a, b],
    [c, d]}
```

y, para el caso $j = 2$ obtenemos la matriz de la Sección 2.12:

```
? DMAT (MAT, 2);
```

```
0: {[a^4, 4 a^3 b, 6 a^2 b^2, 4 a b^3, b^4],
    [a^3 c, 3 a^2 b c + a^3 d, 3 a b^2 c + 3 a^2 b d,
      3 a b^2 d + b^3 c, b^3 d],
    [a^2 c^2, 2 a b c^2 + 2 a^2 c d, 4 a b c d + a^2 d^2 + b^2 c^2,
      2 a b d^2 + 2 b^2 c d, b^2 d^2],
    [a c^3, 3 a c^2 d + b c^3, 3 a c d^2 + 3 b c^2 d,
      a d^3 + 3 b c d^2, b d^3],
    [c^4, 4 c^3 d, 6 c^2 d^2, 4 c d^3, d^4]}
```

Finalmente, para aplicar la transformación C_M al vector columna f de coeficientes FV dado como ejemplo en la sección 2.12, usamos una función que aplica $E^j(M)$ sobre $f^{[k]}$ para dar $f^{[k]} = C_M f^{[k]}$. Así, sobre FV [1] = {F [1,1], F [1,2]} usamos

```
? FPRIME: APPDMATR (INVM (MAT), 1/2, FV [1]);
```

```
0: {d F [1,1] - c F [1,2],
    - b F [1,1] + a F [1,2]}
```

donde INVM es la función que invierte las matrices unimodulares de 2×2 . Sobre el vector FV completo, la acción $C_M : f \mapsto f'$ para rangos k hasta 4 ($j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$), es

```
? FVP: {APPDMATR (INVM (MAT), 1/2, FV [1]),
        APPDMATR (INVM (MAT), 1, FV [2]),
        APPDMATR (INVM (MAT), 3/2, FV [3]),
        APPDMATR (INVM (MAT), 2, FV [4])}
```

4.4. Coordenadas del espacio fase en sistemas axialmente simétricos

La descripción de sistemas axialmente simétricos en óptica de aberraciones requiere de tres variables que son invariantes bajo rotaciones de la pantalla alrededor del eje óptico:

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2, \quad p \cdot q = p_x q_x + p_y q_y, \quad q^2 = q_x^2 + q_y^2.$$

Son invariantes bajo rotaciones pues $\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w'_x \\ w'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$, donde w es p y q , las tres variables se transforman en sí mismas:

$$\begin{aligned} p'^2 &= p_x'^2 + p_y'^2 \\ &= (\cos \alpha p_x + \operatorname{sen} \alpha p_y)^2 + (-\operatorname{sen} \alpha p_x + \cos \alpha p_y)^2 \\ &= p_x^2 + p_y^2 = p^2, \end{aligned}$$

donde hacemos uso de identidades trigonométricas en el último paso. Demostraciones similares valen para las otras dos variables. Por ello, p^2 , $p \cdot q$ y q^2 son coordenadas adecuadas para el espacio fase óptico (de cuatro dimensiones) en sistemas axialmente simétricos.

Hay una cuarta variable cuadrática que también es invariante bajo rotaciones:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{p} = q_x p_y - q_y p_x \quad \text{el invariante de } \sqrt{\text{Petzval}}.$$

El Petzval es invariante, más aún, bajo transformaciones lineales canónicas axialmente simétricas:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{p}' \\ \mathbf{q}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mathbf{p} + b\mathbf{q} \\ c\mathbf{p} + d\mathbf{q} \end{pmatrix},$$

donde $ad - bc = 1$. Para probar la invariancia del Petzval bajo estas transformaciones verificamos que se cumple

$$\mathbf{q}' \times \mathbf{p}' = (cp_x + dq_x)(ap_y + bq_y) - (cp_y + dq_y)(ap_x + bq_x) = (ad - bc)(q_x p_y - q_y p_x) = \mathbf{q} \times \mathbf{p}.$$

Finalmente, notamos que el Petzval está relacionado con las otras tres coordenadas ($p^2, p \cdot q, q^2$) por una identidad vectorial:

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{q})^2 = p^2 q^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2,$$

pues se lee $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ como coeficiente de $p^2 q^2$.

De esta manera, pasamos de las coordenadas 4-dimensionales del espacio fase ($p_x, p_y; q_x, q_y$) a las 4 coordenadas cuadráticas ($p^2, p \cdot q, q^2, \mathbf{q} \times \mathbf{p}$), que son invariantes bajo rotaciones. Más aún, para transformaciones lineales se respeta la superficie $\mathbf{q} \times \mathbf{p} = \text{constante}$. La naturaleza de estas superficies (sub-variedades) invariantes se hace patente al usar las variables básicas:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{2}(p^2 - q^2), & \xi_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}p^2, \\ \xi_2 &= \frac{i}{2}(p^2 + q^2), & \xi_0 &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, \\ \xi_3 &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, & \xi_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - i\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}q^2, \end{aligned}$$

en un espacio $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$. La norma de este 3-vector es el radio de la esfera

$$\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \xi_0^2 - 2\xi_+ \xi_- = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 - p^2 q^2 = -(\mathbf{q} \times \mathbf{p})^2.$$

Este radio es un *invariante*, como vimos, bajo el grupo de las transformaciones lineales de p y q , $Sp(2, \mathbb{R})$ y es (menos) el *Petzval*, invariante de la óptica clásica [STAVROUDIS (1972)], [DRAQT (1982)].

Hacemos notar que la transformación de las coordenadas $(p^2, p \cdot q, q^2)$ a las (ξ_1, ξ_2, ξ_3) es una transformación lineal compleja. En el espacio 3-dimensional ξ , transformaciones lineales dejan invariantes las superficies de las esferas $\xi^2 = \text{constante}$, que hemos llamado [WOLF (1988b)] la *segunda esfera de Descartes*. En el espacio fase, el invariante correspondiente es $\xi^2 = (p \cdot q)^2 - p^2 q^2$, un hiperboloide. Mucho de lo que se usa en óptica de Lie aprovecha precisamente el *truco de Weyl* [GILMORE (1978)] entre $Sp(2, \mathbb{R})$ y $SO(3)$ (como complexificación el uno del otro) para aplicar la teoría simple y conocida del grupo de rotaciones, armónicos esféricos y matrices D de Wigner, a los desarrollos del espacio fase en series de aberraciones.

4.5. La base monomial y su representación vectorial

Consideramos *polinomios* de la forma $A(p^2, p \cdot q, q^2)$ en las variables del espacio de $\xi \in \mathbb{R}^3$, de grado $1 \leq k \leq k_{\max}$, y los escribimos como sumas de *monomios*:

$$M_{k_+, k_0, k_-} = (p^2)^{k_+} (p \cdot q)^{k_0} (q^2)^{k_-} = 2^{(k_+ + k_-)/2} \xi_+^{k_+} \xi_0^{k_0} \xi_-^{k_-}.$$

Las sumas pueden ser arregladas como

$$\begin{aligned} A &= \sum_{1 \leq k_+ + k_0 + k_- \leq k_{\max}} A^M(k_+, k_0, k_-) M_{k_+, k_0, k_-} \\ &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \sum_{n=1} A^M[k, n] M_{k_+, k_0, k_-}, \end{aligned}$$

donde los tres índices k_+, k_0, k_- dan lugar a la pareja de valores k, n por medio de las relaciones

$$k = k_+ + k_0 + k_-, \quad n = \frac{1}{2}(k_0 + k_-)(k_0 + k_- + 1) + k_- + 1.$$

Llamamos, como antes, k al *rango* de un monomio. Para rango $k = 1$, $n = 1, 2, 3$ tenemos los monomios $k_+, k_0, k_- = 100, 010, 001$; los elementos del vector son los coeficientes de $p^2, p \cdot q$, y q^2 , respectivamente. Para $k = 2$, $n = 1, \dots, 6$ renglones, los índices monomiales 200, 110, 101, 020, 011, y 002, están arreglados *lexicográficamente*, en forma decreciente según su orden numérico, 200 > 110 > \dots > 002.

Como ya vimos arriba, representamos el polinomio A en la *base monomial* por un vector columna de dos niveles A_{vec}^M , cuyos elementos contienen los coeficientes; el primer nivel es el del rango $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$, y el segundo numera lexicográficamente los renglones con n . El número de componentes n en los rangos $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ es $n_{\max} = 3, 6, 10, 15, \dots, \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$, como los números triangulares. Para describir aberraciones ópticas del orden $A = 2k - 1 = 1, 3, 5, 7, \dots$, requerimos de polinomios con

3, 0, 10, 34, ..., $\frac{1}{6}k(k^2 + 6k + 11)$ sumandos distinguibles que son las componentes vectoriales en nuestra representación. Eliminamos el uso explícito de términos constantes (los cuales corresponden al rango $k = 0$) porque estos no participan en la caracterización de los elementos ópticos, nuestra aplicación principal; su inclusión no altera significativamente nuestros algoritmos básicos. Para rango $k_{\max} = 2$ (aberraciones ópticas de tercer orden) el arreglo de estas nueve componentes es

$$A_{\text{vec}}^M = \begin{pmatrix} A^M[1,1] \\ A^M[1,2] \\ A^M[1,3] \\ A^M[2,1] \\ A^M[2,2] \\ A^M[2,3] \\ A^M[2,4] \\ A^M[2,5] \\ A^M[2,6] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^M(1,0,0) \\ A^M(0,1,0) \\ A^M(0,0,1) \\ A^M(2,0,0) \\ A^M(1,1,0) \\ A^M(1,0,1) \\ A^M(0,2,0) \\ A^M(0,1,1) \\ A^M(0,0,2) \end{pmatrix}, \text{ coeficiente de } \begin{pmatrix} p^2 \\ p \cdot q \\ q^2 \\ (p^2)^2 \\ p^2 p \cdot q \\ p^2 q^2 \\ (p \cdot q)^2 \\ p \cdot q q^2 \\ (q^2)^2 \end{pmatrix}$$

4.6. La base simpléctica/esférica en una dimensión

Bajo transformaciones lineales, como vimos, los vectores anteriores se transformarán mediante una matriz de 0×0 , diagonal por bloques, con submatrices de 3×3 y 6×6 sobre la diagonal. Sin embargo, notamos que entre los monomios existe la combinación lineal $p^2 q^2 - (p \cdot q)^2 = (q \times p)^2$, el invariante de Pétzval. Por ello, la submatriz de 6×6 debe a su vez ser reducible a una submatriz diagonal de 1×1 y el resto, una submatriz de 5×5 . En esta sección utilizamos esta propiedad —y la correspondiente para k 's más altas— para reducir las matrices D a submatrices diagonales más pequeñas. De este modo encontraremos una base para los polinomios cuyas transformaciones lineales son más eficientes para cómputo.

Recordemos que en la Sección 2.7, para q y p en una dimensión (y $\lambda = 1$), introdujimos las funciones

$$L_{-} = \frac{1}{2} p^2, \quad L_0 = \frac{1}{2} p q, \quad L_{+} = \frac{1}{2} q^2.$$

Identificamos el álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{R})$ generada por las L 's:

$$\{L_0, L_{\pm}\} = \pm L_{\pm}, \quad \{L_{+}, L_{-}\} = 2L_0.$$

Todavía en una dimensión, recordemos los monomios de la Sección 2.12,

$$X_m^j(p, q) = p^{j+m} q^{j-m}, \quad m = j, j-1, \dots, -j, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

Estos monomios se transforman entre sí bajo la acción de los operadores (de Lie-Poisson) del álgebra:

$$\begin{aligned}
\{L_+, X_m^j\} &= p \frac{\partial}{\partial q} (p^{j+m} q^{j-m}) = (j-m) p^{j+m+1} q^{j-m-1} \\
&= (j-m) X_{m+1}^j, && \text{ascenso} \\
\{L_0, X_m^j\} &= \frac{1}{2} p \frac{\partial X_m^j}{\partial p} - \frac{1}{2} q \frac{\partial X_m^j}{\partial q} \\
&= \left[\frac{1}{2} (j+m) - \frac{1}{2} (j-m) \right] p^{j+m} q^{j-m} \\
&= m X_m^j, && \text{peso} \\
\{L_-, X_m^j\} &= q \frac{\partial}{\partial p} (p^{j+m} q^{j-m}) = (j+m) p^{j+m-1} q^{j-m+1} \\
&= (m+j) X_{m-1}^j. && \text{descenso}
\end{aligned}$$

Hemos llamado *ascenso*, *peso* y *descenso* a la acción de los operadores, pues *suben*, *cuentan* y *bajan* el índice m , que llamamos el *peso* del monomio $X_m^j(p, q)$. Si conocemos una X_m^j , podemos generar todo el *multiplete* de monomios $X_j^j, X_{j-1}^j, \dots, X_{-j}^j$. En particular, si proponemos el monomio de peso más alto, $X_j^j = p^{2j}$, podemos generar sistemáticamente los $2j+1$ compañeros del multiplete mediante L_- :

$$X_{m-1}^j = \frac{1}{j+m} \{L_-, X_m^j\}, \quad m = j, j-1, \dots, -j+1,$$

hasta llegar al monomio *más bajo*, X_{-j}^j . Allí *termina* el multiplete, pues si aplicamos nuevamente el operador de descenso, llegamos a $\{L_-, X_{-j}^j\} = 0$. Correspondientemente, la función de "peso más alto" que hemos utilizado, $X_j^j = p^{2j}$, puede ser reconocida por su propiedad de ser aniquilada por el operador de ascenso, $\{L_+, X_j^j\} = 0$.

Recordemos finalmente que la exponencial de estos generadores del álgebra de Lie, $\exp\{\alpha_+ L_+ + \alpha_0 L_0 + \alpha_- L_-, \circ\}$, produce una transformación *finita* dada como una matriz de 2×2 , $M \in SL(2, \mathbb{R})$, representada por las matrices $D_{m,m}^j(M)$ de dimensión $(2j+1) \times (2j+1)$ vistas en la Sección 2.12.

4.7. La base simpléctica/esférica en dos dimensiones

Ahora bien, en dos o más dimensiones tenemos la *misma* álgebra con las funciones invariantes vistas en la Sección 4.4:

$$L_+ = -\frac{1}{2}|p|^2, \quad L_0 = \frac{1}{2}p \cdot q, \quad L_- = \frac{1}{2}|q|^2.$$

Aquí, L_- es el operador de descenso que podemos usar para generar el multiplete de funciones de *tres* variables ($p^2, p \cdot q, q^2$). Las funciones de peso más alto que podemos

reconocer son $p^{2j} = (|p|^2)^j, (q \times p)^2 p^{2(j-2)}, \dots, (q \times p)^{2n} p^{2(j-2n)}, \dots$, hasta $(q \times p)^j$ cuando $j = 2n$ es par, y $(q \times p)^{j-1} p^2$, si $j = 2n + 1$ es impar. Los factores $(q \times p)^{2n} = [q^2 p^2 - (p \cdot q)^2]^n$ son invariantes del grupo y del álgebra, pues $\{L_r, (q \times p)^2\} = 0$ para $r = 0, \pm$. Por ello son 'polinomios de peso más alto' $\{L_+, (q \times p)^{2n} p^{2(j-2n)}\} = 0$.

Cada uno de estos 'polinomios más altos' sirve para generar su multiplete mediante L_- . Los polinomios de los multipletes que tienen el mismo rango k (grado de homogeneidad en $p^2, p \cdot q, q^2$) quedarán denotados por

$${}^k \chi_m^j(p^2, p \cdot q, q^2), \text{ donde } \begin{cases} k = 0, 1, 2, \dots \\ j = k, k-2, \dots \\ m = j, j-1, \dots, -j \end{cases} \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ par,} \\ 1 & \text{si } k \text{ impar,} \end{cases} \begin{array}{l} \text{rango} \\ \text{spin simpléctico} \\ \text{índice de Seidel.} \end{array}$$

El multiplete se genera como antes

$${}^k \chi_{m-1}^j = \frac{1}{j+m} \{L_-, {}^k \chi_m^j\}, \quad m = j, j-1, \dots, -j+1.$$

Para una k determinada, el número de funciones ${}^k \chi_m^j$ es $\sum_{j=k}^1 \sum_{m=j}^0 \sum_{m=-j}^{-1} 1 = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$, igual al número de monomios M_{k_+, k_0, k_-} , $k_+ + k_0 + k_- = k$, y constituyen la base simpléctica del conjunto de polinomios de rango k .

Las funciones $k = 1$ son las propias coordenadas del espacio \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} {}^1 \chi_1^1 &= p^2 = \sqrt{2} \xi_+ &= M_{100}, \\ {}^1 \chi_0^1 &= p \cdot q = \xi_0 &= M_{010}, \\ {}^1 \chi_{-1}^1 &= q^2 = \sqrt{2} \xi_- &= M_{001}. \end{aligned}$$

Bajo la transformación de Fourier del espacio fase $(q \mapsto p, p \mapsto -q)$, la esfera- ξ efectúa una rotación de $\frac{1}{2} \pi$ alrededor del eje ξ_2 : $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (-\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$, y $\xi_+ \mapsto \xi_- \mapsto \xi_+$, $\xi_0 \mapsto -\xi_0$. Las dos bases se transforman una en la otra como

$$M_{k_+, k_0, k_-} \mapsto (-1)^{k_0} M_{k_-, k_0, k_+} \\ (-1)^{j-m} {}^k \chi_m^j(p^2, p \cdot q, q^2) \mapsto {}^k \chi_{-m}^j(p^2, p \cdot q, q^2) = {}^k \chi_m^j(q^2, p \cdot q, p^2).$$

Anotaremos los polinomios solamente para $m \geq 0$; los polinomios $m < 0$ son obtenidos de la última transformación.

Las funciones $k = 2$ son las generadoras de las aberraciones de tercer-orden; estas consisten en un quintuplete

$$\begin{aligned} 2 \chi_2^2 &= 2 \xi_+^2 &= M_{200}, \\ 2 \chi_1^2 &= \sqrt{2} \xi_+ \xi_0 &= M_{110}, \\ 2 \chi_0^2 &= \frac{2}{3} (\xi_+ \xi_- + \xi_0^2) &= \frac{1}{3} M_{101} + \frac{2}{3} M_{020}, \end{aligned}$$

y un singulete

$${}^2\chi_0^0 = 2\xi_+ \xi_- - \xi_0^2 = M_{101} - M_{020}.$$

Las funciones $k = 3$ son las generadoras de las aberraciones de *quinto*-orden. Constan de un septuplete

$$\begin{aligned} {}^3\chi_3^3 &= 2\sqrt{2}\xi_+^3 &&= M_{300}, \\ {}^3\chi_2^3 &= 2\xi_+^2 \xi_0 &&= M_{210}, \\ {}^3\chi_1^3 &= \frac{2}{5}\sqrt{2}(\xi_+^2 \xi_- + 2\xi_+ \xi_0^2) &&= \frac{1}{5}M_{201} + \frac{4}{5}M_{120}, \\ {}^3\chi_0^3 &= \frac{2}{5}(3\xi_+ \xi_0 \xi_- + \xi_0^3) &&= \frac{2}{5}M_{111} + \frac{2}{5}M_{030}, \end{aligned}$$

y un triplete, que repite el triplete $k = 1$ con el factor invariante

$${}^3\chi_m^1 = {}^2\chi_0^0 {}^1\chi_m^1, \quad m = 1, 0, -1.$$

Las funciones $k = 4$ son las generadoras de las aberraciones del *séptimo*-orden que se descomponen en un nonuplete

$$\begin{aligned} {}^4\chi_4^4 &= 4\xi_+^4 &&= M_{400}, \\ {}^4\chi_3^4 &= 2\sqrt{2}\xi_+^3 \xi_0 &&= M_{310}, \\ {}^4\chi_2^4 &= \frac{4}{7}(\xi_+^3 \xi_- + 3\xi_+^2 \xi_0^2) &&= \frac{1}{7}M_{301} + \frac{6}{7}M_{220}, \\ {}^4\chi_1^4 &= \frac{2}{7}\sqrt{2}(3\xi_+^2 \xi_0 \xi_- + 2\xi_+ \xi_0^3) &&= \frac{3}{7}M_{211} + \frac{4}{7}M_{130}, \\ {}^4\chi_0^4 &= \frac{4}{35}(3\xi_+^2 \xi_-^2 + 12\xi_+ \xi_0^2 \xi_- + 2\xi_0^4) &&= \frac{24}{35}M_{202} + \frac{24}{35}M_{121} + \frac{8}{35}M_{040}, \end{aligned}$$

un quintuplete factorizable

$${}^4\chi_m^2 = {}^2\chi_0^0 {}^2\chi_m^2, \quad m = 2, 1, \dots, -2,$$

y un singulete

$${}^4\chi_0^0 = ({}^2\chi_0^0)^2.$$

4.8. Los armónicos simplécticos

Para k, j, m generales se obtiene [WOLF (1986)]

$$\begin{aligned} {}^k\chi_m^j &= (\xi^2)^{(k-j)/2} \frac{(j+m)!(j-m)!}{2^{m/2}(2j-1)!!} \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{\xi_+^{m+n} \xi_0^{j-m-2n} \xi_-^n}{(m+n)!(j-m-2n)! n!} \\ &= |p \times q|^{k-j} \frac{(j+m)!(j-m)!}{2^m(2j-1)!!} \sum_n \frac{1}{2^{2n}} \frac{(p^2)^{m+n} (p \cdot q)^{j-m-2n} (q^2)^n}{(m+n)!(j-m-2n)! n!}. \end{aligned}$$

El factorial doble $x!!$ es $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots x$ para x impar y $2 \cdot 4 \cdots x$ para x par. Para $j = k$, los coeficientes binomiales de ${}^k\chi_m^j$ tienen la propiedad de que su suma es la unidad; constituye una buena forma visual de cotejar resultados.

De hecho, esta base ${}^k\chi_m^j(\xi)$ es proporcional a la bien conocida [BIEDENHARN Y LOUCK (1981)] base de armónicos esféricos sólidos $Y_m^j(\xi)$. La relación que existe es

$${}^k\chi_m^j = (\xi^2)^{(k-j)/2} \frac{\sqrt{4\pi(2j+1)(j+m)!(j-m)!}}{(2j+1)!!} Y_m^j(\xi),$$

pero con la ventaja que las ${}^k\chi_m^j$ no contienen raíces cuadradas en sus coeficientes, y esto simplifica considerablemente los algoritmos de cómputo simbólico que se hacen con ellos.

El cambio de la base simpléctica ${}^k\chi_m^j$ a la base monomial M_{k_+, k_0, k_-} , es el inverso de las expresiones ${}^k\chi_m^j(M_{k_+, k_0, k_-})$ dadas arriba. Se obtienen como la suma [DRAGT, FOREST Y WOLF (1986)]

$$M_{k_+, k_0, k_-}({}^k\chi_m^j) = \sum_{j=k-2}^{j=0} L_{k_+, k_0, k_-}^{k, j, m} {}^k\chi_m^j,$$

donde los dos índices monomiales y simplécticos, están relacionados por

$$k_+ + k_0 + k_- = k, \quad k_+ - k_- = m,$$

y la suma solamente se efectúa sobre $j = k, k-2, \dots, 1$ o 0 para k impar o par respectivamente; $\frac{1}{2}(k-j)$ es un entero. Los coeficientes $L_{k_+, k_0, k_-}^{k, j, m}$ pueden hallarse de las relaciones de recurrencia de tres terminos [WOLF (1986)] en el índice ν :

$$\begin{aligned} & (k-2\nu-m)(k-2\nu-m-1)L_{k(\nu+1)}^{k, j, m} \\ &= [2(k-2\nu-m)(2\nu+m+1) + 2\nu - (j-m)(j+m+1)]L_{k(\nu)}^{k, j, m} \\ &+ 4\nu(\nu+m)L_{k(\nu-1)}^{k, j, m}, \end{aligned}$$

donde

$$k(\nu) = (k_+, k_0, k_-)(\nu) = (\nu+m, k-2\nu-m, \nu).$$

La recurrencia termina cuando $\nu = 0$, con

$$L_{m, 2k-m, 0}^{k, j, m} = \frac{(-\frac{1}{2})^{(k-j)/2} (k-m)! (2j+1)!!}{(\frac{1}{2}(k-j))! (j-m)! (k+j+1)!!}.$$

Por ejemplo, para los valores $k_+ = 5, k_0 = 2$ y $k_- = 3$, vale

$$M_{523} = (p^2)^5 (p \cdot q)^2 (q^2)^3 = -\frac{100}{3003} 10\chi_2^2 + \frac{16}{143} 10\chi_2^4 + \frac{14}{17} 10\chi_2^6 + \frac{29}{15} 10\chi_2^8 + 10\chi_2^{10}.$$

4.9. La base simpléctica bajo transformaciones lineales

Las funciones de la base simpléctica se pueden usar para desarrollar los mismos polinomios A que usamos en la subsección anterior. Ahora los escribimos como la siguiente suma:

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \sum_{j=k(-2)}^{1 \text{ o } 0} \sum_{m=-j}^j A^S(k, j, m) {}^k \chi_{m}^j \\
 &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \sum_{n_j=1}^{[k/2]+1} \sum_{n_m=1}^{2j+1} A^S[k, n_j, n_m] {}^k \chi_{n_m}^{j, n_j},
 \end{aligned}$$

donde

$$n_j = \frac{1}{2}(k - j) + 1, \quad n_m = j - m + 1.$$

Los coeficientes de un polinomio A en la base simpléctica, con tres índices, se colocan en vectores columna de tres niveles, k , j y m . Para $k = 2$, el arreglo de los nueve coeficientes es como sigue:

$$A_{\text{vec}}^S = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} A^S[1, 1, 1] \\ A^S[1, 1, 2] \\ A^S[1, 1, 3] \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} A^S[2, 1, 1] \\ A^S[2, 1, 2] \\ A^S[2, 1, 3] \\ A^S[2, 1, 4] \\ A^S[2, 1, 5] \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} A^S[2, 2, 1] \end{array} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} A^S(1, 1, 1) \\ A^S(1, 1, 0) \\ A^S(1, 1, -1) \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} A^S(2, 2, 2) \\ A^S(2, 2, 1) \\ A^S(2, 2, 0) \\ A^S(2, 2, -1) \\ A^S(2, 2, -2) \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} A^S(2, 0, 0) \end{array} \right) \end{pmatrix} \text{ coeficiente de } \begin{pmatrix} {}^1 \chi_1^1 \\ {}^1 \chi_0^1 \\ {}^1 \chi_{-1}^1 \\ {}^2 \chi_2^2 \\ {}^2 \chi_1^2 \\ {}^2 \chi_0^2 \\ {}^2 \chi_{-1}^2 \\ {}^2 \chi_{-2}^2 \\ {}^2 \chi_0^0 \end{pmatrix}$$

Al trabajar con polinomios y sus representaciones multi-vectoriales, hemos desarrollado una serie de funciones en **MUSIMP** que nos permiten manejar los polinomios ya sea en forma explícita con las tres variables reservadas P2, PQ y Q2, o mediante sus representaciones vectoriales monomial y simpléctica. Podemos convertir libremente entre las tres formas hasta un rango máximo específico (u orden de perturbación) que no está acotado.

Las álgebras $sl(2, \mathbb{R})$ que generan las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, son isomorfas en 1, 2 o más dimensiones de la pantalla en el espacio óptico. Su exponenciación al grupo $SL(2, \mathbb{R})$ produce las mismas matrices $D_{m, m'}^j(M)$ sobre los multipletes de la misma j , sean en 1, 2 o más dimensiones. Por este motivo no necesitamos repetir el cálculo para obtener los elementos de las matrices en 2 dimensiones. Sabemos, además que de cada nivel de rango k , las matrices D estarán *reducidas por bloques* según los valores del spin simpléctico j . Sabemos, finalmente, que estos bloques son *irreducibles* bajo la acción del grupo $sl(2, \mathbb{R})$ es decir, que no es posible encontrar una base que reduzca aún más esta estructura de bloques.

La matriz bajo la cual se transforman los vectores en su descomposición a tres niveles mostrada arriba, para séptimo orden de aberración es:

$$\begin{pmatrix}
 \boxed{D^1_{[3 \times 3]}} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \boxed{D^2_{[5 \times 5]}} & 0 & 0 \\
 & 0 & \boxed{D^0_{[1 \times 1]}} & 0 \\
 0 & 0 & \boxed{D^3_{[7 \times 7]}} & 0 \\
 & & 0 & \boxed{D^1_{[3 \times 3]}} \\
 0 & 0 & 0 & \boxed{D^4_{[9 \times 9]}} & 0 & 0 \\
 & & & 0 & \boxed{D^2_{[5 \times 5]}} & 0 \\
 & & & 0 & 0 & \boxed{D^0_{[1 \times 1]}}
 \end{pmatrix}$$

El número de elementos de matriz que *no* son cero en las dos bases es:

| BASE | ORDEN 1 | ORDEN 3 | ORDEN 5 | ORDEN 7 | $k \rightarrow \infty$ |
|-------------|---------|---------|---------|---------|------------------------|
| MONOMIAL | 9 | 36 | 100 | 225 | $\sim k^4/4$ |
| SIMPLÉCTICA | 9 | 26 | 58 | 107 | $\sim 2k^3/3$ |

4.10. Tablas de multiplicación de polinomios

Simbolicemos con A y B dos polinomios hasta cierto rango k , y con " \circ " una operación binaria, que generalmente es no-lineal y no-commutativa, a un tercer polinomio $C = A \circ B$, también a rango k . Los elementos tabulados, resultado de la operación entre los elementos generales de los polinomios A y B son los objetos de nuestro interés.

En lo que concierne a la óptica de Lie, las operaciones que realizamos son la multiplicación ordinaria, el paréntesis de Poisson y la composición de grupos de aberraciones. La multiplicación se usa para obtener el desarrollo en serie de la transformación raíz. Al introducir este desarrollo dentro de la fórmula implícita que se resuelve para $\bar{q}(p, q)$ es necesario obtener repetidamente $|q|^2$ para órdenes crecientes de aberración. En ello se emplean los algoritmos que trataremos en esta sección.

La base monomial

Para efectuar la multiplicación ordinaria (bilineal, conmutativa) entre polinomios, la base monomial es la más adecuada. Esto se hace evidente por la simplicidad

de la estructura de composición "x" de los vectores base

$$M_{k_+, k_0, k_-} \times M_{k'_+, k'_0, k'_-} = M_{k_+ + k'_+, k_0 + k'_0, k_- + k'_-}$$

La tabla de multiplicar en esta base, para el caso general $A = \sum A^M M_{...}$, $B = \sum B^M M_{...}$ y $C = A \times B = \sum C^M M_{...}$, especifica los coeficientes $C^M(k_+, k_0, k_-) = C^M[k, n]$ de cada elemento del vector como las sumas de productos de un coeficiente A^M y uno B^M ; que refleja la bilinealidad de la operación. Usamos la notación del arreglo (vector columna) de componentes de la Sección 4.5 y para reducir espacio; escribimos $A^M(k_+, k_0, k_-)$ como $A^M_{k_+, k_0, k_-}$ y usamos los delimitadores de vector columna $\{\dots\}$ como lo hace muSIMP. Podemos escribir el resultado de multiplicar dos polinomios de rango $k = 3$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C_{k=1}^M &= \{ \{ 0 \}, & \text{para } 100, 010, 001, \\ C_{200}^M &= \{ A_{100}^M B_{100}^M, \\ C_{110}^M &= A_{010}^M B_{100}^M + A_{100}^M B_{010}^M, \\ C_{101}^M &= A_{001}^M B_{100}^M + A_{100}^M B_{001}^M, \\ C_{020}^M &= A_{010}^M B_{010}^M, \\ C_{011}^M &= A_{001}^M B_{010}^M + A_{010}^M B_{001}^M, \\ C_{002}^M &= A_{001}^M B_{001}^M \}, \\ C_{300}^M &= \{ A_{100}^M B_{200}^M + A_{200}^M B_{100}^M, \\ C_{210}^M &= A_{010}^M B_{200}^M + A_{100}^M B_{110}^M + A_{110}^M B_{100}^M + A_{200}^M B_{010}^M, \\ C_{201}^M &= A_{001}^M B_{200}^M + A_{100}^M B_{101}^M + A_{101}^M B_{100}^M + A_{200}^M B_{001}^M, \\ C_{120}^M &= A_{010}^M B_{110}^M + A_{020}^M B_{100}^M + A_{100}^M B_{020}^M + A_{110}^M B_{010}^M, \\ C_{111}^M &= A_{001}^M B_{110}^M + A_{010}^M B_{101}^M + A_{011}^M B_{100}^M + A_{100}^M B_{011}^M + A_{101}^M B_{010}^M + A_{110}^M B_{001}^M, \\ C_{102}^M &= A_{001}^M B_{101}^M + A_{002}^M B_{100}^M + A_{100}^M B_{002}^M + A_{101}^M B_{001}^M, \\ C_{030}^M &= A_{010}^M B_{020}^M + A_{020}^M B_{010}^M, \\ C_{021}^M &= A_{001}^M B_{020}^M + A_{010}^M B_{011}^M + A_{011}^M B_{010}^M + A_{020}^M B_{001}^M, \\ C_{012}^M &= A_{001}^M B_{011}^M + A_{002}^M B_{010}^M + A_{010}^M B_{002}^M + A_{011}^M B_{001}^M, \\ C_{003}^M &= A_{001}^M B_{002}^M + A_{002}^M B_{001}^M \} \}. \end{aligned}$$

Las primeras tres componentes, C_{100}^M , C_{010}^M , y C_{001}^M , valen cero porque el producto de polinomios sin termino constante comienza con rango 2. En efecto, todo polinomio módulo un rango finito k_{\max} es nilpotente. Cuando las constantes aditivas A_{000}^M son necesarias, adicionamos $A_{000}^M B_{vec}^M + A_{vec}^M B_{000}^M$ a C_{vec}^M , en lugar de escribir la tabla con dos o más sumandos en cada línea.

El número de términos AB , tanto de vectores base como de monomios en la tabla de multiplicar considerada a rango cinco (noveno orden de aberración), es de

manera tabular

| | RANGO $k =$ | | | | |
|--|-------------|---|----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| NÚMERO DE VECTORES BASE | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| DIMENSIÓN ACUMULATIVA | 3 | 9 | 10 | 34 | 55 |
| TÉRMINOS EN LA MULTIPLICACIÓN MONOMIAL | 0 | 9 | 36 | 96 | 120 |
| LONGITUD ACUMULATIVA | 0 | 9 | 45 | 141 | 261 |

Dado que en la tabla de multiplicación todos los coeficientes de AB son uno, la computación involucrada realiza solamente sumas de productos.

La base simpléctica

La multiplicación de elementos de la base simpléctica no conduce a términos simples como la multiplicación ordinaria. Se expresa más bien como una suma sobre los valores del índice de spin simpléctico j'' , permitidos por el rango total $k'' = k + k' \geq j''$, por el 'número magnético' $|m + m'| \leq j''$ y la exigencia de que $k - j''$ sea par. La estructura de composición "x" de los vectores base es como sigue:

$$k \chi_m^j \times k' \chi_{m'}^{j'} = \sum_{j''=|j-j'|}^{j+j'} X^s(j, j', m, m'; j'') k^{k'} \chi_{m+m'}^{j''}$$

Los coeficientes $X^s(j, j', m, m'; j'')$ son números *racionales* que pueden ser obtenidos de la relación de los armónicos esféricos con las matrices de rotación en términos de dos coeficientes $3jm$ de Wigner (ver: [BIEDENHARN AND LOUCK (1981)], ecuaciones (3.138) y (3.189)). La complejidad de cálculo de esta expresión se incrementa rápidamente, lo cual limita su manipulación. Es por esta razón que armamos una tabla análoga de tres niveles a la tabla de multiplicar de base monomial, que agrupa los *multipletes* de spin simpléctico de la siguiente manera*

$$C_{11m}^s = \{ \{ 0 \} \}, \quad \text{para } m = +1, 0, -1,$$

$$C_{222}^s = \{ \{ A_{111}^s D_{111}^s \},$$

$$C_{221}^s = A_{110}^s D_{111}^s + A_{111}^s D_{110}^s,$$

$$C_{220}^s = A_{111}^s D_{111}^s + A_{110}^s D_{110}^s + A_{111}^s D_{111}^s,$$

$$C_{221}^s = A_{111}^s D_{110}^s + A_{110}^s D_{111}^s,$$

$$C_{222}^s = A_{111}^s D_{111}^s \},$$

$$C_{200}^s = \{ 2/3 A_{111}^s D_{111}^s - A_{110}^s D_{110}^s / 3 + 2/3 A_{111}^s D_{111}^s \},$$

$$C_{333}^s = \{ \{ A_{111}^s D_{222}^s + A_{222}^s D_{111}^s \},$$

$$C_{332}^s = A_{110}^s D_{222}^s + A_{111}^s D_{221}^s + A_{221}^s D_{111}^s + A_{222}^s D_{110}^s,$$

$$C_{331}^s = A_{111}^s D_{222}^s + A_{110}^s D_{221}^s + A_{111}^s D_{220}^s + A_{220}^s D_{111}^s + A_{221}^s D_{110}^s + A_{222}^s D_{111}^s \},$$

* Para mantener la uniformidad entre las columnas, indicamos índices negativos con índices subrayados: $-1 = \bar{1}$, etc.

$$\begin{aligned}
C_{330}^S &= A_{111}^S D_{221}^S + A_{110}^S D_{220}^S + A_{111}^S D_{221}^S + A_{221}^S D_{111}^S + A_{220}^S D_{110}^S + A_{221}^S D_{111}^S, \\
C_{351}^S &= A_{111}^S D_{220}^S + A_{110}^S D_{221}^S + A_{111}^S D_{222}^S + A_{222}^S D_{111}^S + A_{221}^S D_{110}^S + A_{220}^S D_{111}^S, \\
C_{332}^S &= A_{111}^S D_{221}^S + A_{110}^S D_{222}^S + A_{222}^S D_{110}^S + A_{221}^S D_{111}^S, \\
C_{333}^S &= A_{111}^S D_{222}^S + A_{222}^S D_{111}^S, \\
C_{311}^S &= \{ 4/5 A_{111}^S D_{222}^S - A_{110}^S D_{221}^S/5 + A_{111}^S D_{200}^S + 2/15 A_{111}^S D_{220}^S + A_{200}^S D_{111}^S \\
&\quad + 2/15 A_{220}^S D_{111}^S - A_{221}^S D_{110}^S/5 + 4/5 A_{222}^S D_{111}^S, \\
C_{310}^S &= 2/5 A_{111}^S D_{221}^S + A_{110}^S D_{200}^S - 4/15 A_{110}^S D_{220}^S + 2/5 A_{111}^S D_{221}^S + A_{200}^S D_{110}^S \\
&\quad + 2/5 A_{221}^S D_{111}^S - 4/15 A_{220}^S D_{110}^S + 2/5 A_{221}^S D_{111}^S, \\
C_{311}^S &= A_{111}^S D_{200}^S + 2/15 A_{111}^S D_{220}^S - A_{110}^S D_{221}^S/5 + 4/5 A_{111}^S D_{222}^S + A_{200}^S D_{111}^S \\
&\quad + 4/5 A_{222}^S D_{111}^S - A_{221}^S D_{110}^S/5 + 2/15 A_{220}^S D_{111}^S \}.
\end{aligned}$$

Nuevamente, las tres primeras componentes C_{11m}^S valen cero debido a que nuestro polinomio comienza con rango 1.

El número de términos AB que se encuentran presentes en la tabla de multiplicar a rango cinco, para esta base son:

| RANGO k (SPIN j) | 1(1) | 2(2, 0) | 3(3, 1) | 4(4, 2, 0) | 5(5, 3, 1) |
|-------------------------|------|---------|-----------|---------------|---------------|
| NÚMERO DE VECTORES BASE | 3 | 6(5+1) | 10(7+3) | 15(9+5+1) | 21(11+7+3) |
| TERMINOS EN LA MULT. | 0 | 12(9 3) | 54(30 24) | 156(67+77+12) | 222(70+98+54) |
| LONGITUD ACUMULATIVA | 0 | 12 | 66 | 222 | 444 |

Los coeficientes de los multipletes $j = k$ valen la unidad en esta última tabla de multiplicar, en tanto que los coeficientes de los multipletes degenerados $j < k$ tienen valores fraccionarios.

4.11. Tablas de paréntesis de Poisson

El paréntesis de Poisson [GOLDSTEIN (1963)] es una operación bilineal y antisimétrica que actúa sobre funciones analíticas y polinomiales, según tratamos en la Sección 2.8. Los paréntesis de Poisson contienen las variables derivables que realizarán el paréntesis de Lie, que es exactamente la regla de composición del espacio vectorial de funciones.

El paréntesis de Poisson de dos funciones $A(\xi(p, q))$ y $B(\xi(p, q))$ constituye una tercera función

$$\begin{aligned}
\{A, B\} &= \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial B}{\partial p_1} + \frac{\partial A}{\partial q_2} \frac{\partial B}{\partial p_2} - \frac{\partial A}{\partial p_1} \frac{\partial B}{\partial q_1} - \frac{\partial A}{\partial p_2} \frac{\partial B}{\partial q_2} \\
&= 2\xi_+ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi_0} \frac{\partial B}{\partial \xi_+} - \frac{\partial A}{\partial \xi_+} \frac{\partial B}{\partial \xi_0} \right) + 2\xi_0 \left(\frac{\partial A}{\partial \xi_-} \frac{\partial B}{\partial \xi_+} - \frac{\partial A}{\partial \xi_+} \frac{\partial B}{\partial \xi_-} \right) \\
&\quad + 2\xi_- \left(\frac{\partial A}{\partial \xi_-} \frac{\partial B}{\partial \xi_0} - \frac{\partial A}{\partial \xi_0} \frac{\partial B}{\partial \xi_-} \right)
\end{aligned}$$

que, como mencionamos en el Capítulo 2, obedece la identidad de Jacobi y sigue la regla de Leibnitz.

El interés que encierra el manejar eficientemente estos paréntesis para las funciones A y B representadas por vectores de dos y tres niveles, estriba en que constituyen los cálculos principales al aplicar los métodos de Lie a problemas de perturbación de ordenes altos.

Denotamos por A_k, B_k, \dots polinomios de *estricto* rango k , homogéneos de grado k en las componentes ξ_i y de grado $2k$ en el espacio fase de las variables (p, q) . El paréntesis de Poisson involucra productos de primeras derivadas y tiene la propiedad

$$\{A_k, B_{k'}\} = C_{k+k'-1},$$

en particular,

$$\{A_1, B_k\} = C_k.$$

Apuntamos nuevamente que las bases de polinomios de rango 1,

$${}^1\chi_1^1 = p^2 = M_{100}, \quad {}^1\chi_0^1 = p \cdot q = M_{010}, \quad {}^1\chi_{-1}^1 = q^2 = M_{001},$$

cierran bajo esta operación de paréntesis, y constituyen el álgebra de Lie de tres-dimensiones $sp(2, \mathbb{R})$, llamada álgebra real simpléctica dos-dimensional.

Con los elementos base que hemos usado construimos el paréntesis elemental

$$\begin{array}{ccc} \{ {}^1\chi_1^1, {}^1\chi_1^1 \} & p^2 & p \cdot q & q^2 \\ p^2 : & 0 & -2p^2 & -4p \cdot q \\ p \cdot q : & 2p^2 & 0 & -2q^2 \\ q^2 : & 4p \cdot q & 2q^2 & 0 \end{array}$$

o, en monomios

$$\begin{array}{ll} \{M_{100}, M_{010}\} = -2M_{100}, & \{ {}^1\chi_0^1, {}^1\chi_m^1 \} = 2m {}^1\chi_m^1, \\ \{M_{010}, M_{001}\} = -2M_{001}, & \{ {}^1\chi_1^1, {}^1\chi_1^1 \} = -4 {}^1\chi_0^1. \\ \{M_{001}, M_{100}\} = 4M_{010}, & \end{array}$$

El mapeo en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ de $C_1 = \{A_1, B_1\}$, tanto en la base monomial como en la base simpléctica es dado por la tabla

$$\begin{array}{l} C_{100}^M = 2A_{010}^M B_{100}^M - 2A_{100}^M B_{010}^M, \\ C_{010}^M = 4A_{001}^M B_{100}^M - 4A_{100}^M B_{001}^M, \\ C_{001}^M = 2A_{001}^M B_{010}^M - 2A_{010}^M B_{001}^M. \end{array}$$

El álgebra $sp(2, \mathbb{R})$ es el miembro degenerado de baja dimensionalidad de varias familias del álgebra de Cartan, [GILMORE (1978)], denotada como $sp(2, \mathbb{R}) = so(2, 1) = su(1, 1) = sl(2, \mathbb{R})$, representa el grupo pseudo-ortogonal en 2+1, el grupo pseudo-unitario en 1+1, y el grupo especial lineal de álgebras en dos dimensiones, respectivamente.

Al efectuar el paréntesis de Poisson entre un polinomio de rango 1 y otro de rango k , el resultado permanece a rango k ; recordemos que $\{A_1, B_k\} = C_k$. Por ello, el subespacio vectorial de polinomios de rango estricto k es un *ideal* (es un espacio *homogéneo*), invariante bajo la acción del *operador de Lie* $\{A_1, \circ\}$ [STEINBERG (1980)]. La suma directa de todos los polinomios con $k > 1$ es por tanto *reducida* en sub-ideales nivelados por k , cada uno invariante bajo el álgebra de operadores y, más importante aún, todo el *grupo de Lie* de las transformaciones lineales simplécticas del espacio fase está reducido. De esta manera en la notación vectorial que nosotros usamos, graduamos por rango la operación de paréntesis de Poisson, como sigue:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{A_1, B_1\} \\ \{A_1, B_2\} + \{A_2, B_1\} \\ \{A_1, B_3\} + \{A_2, B_2\} + \{A_3, B_1\} \\ \{A_1, B_4\} + \{A_2, B_3\} + \{A_3, B_2\} + \{A_4, B_1\} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La base monomial

Para minimizar el tiempo de cálculo que emplea la computadora en substituir recursivamente funciones polinomiales explícitas y distributivas, arreglamos de manera táctica los polinomios, tal que estos tengan la estructura de lista de una suma de términos. Cada suma de término constituirá una sublista con coeficientes (que puede ser numéricos, simbólicos o vacíos cuando son unidad) y un conjunto de identificadores reservados para los índices monomiales. La propiedad de bilinealidad

$$\{A, B\} = -\{B, A\}, \quad \{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\},$$

requiere de un algoritmo que efectúe descomposición recursiva para expresar los paréntesis como una suma de paréntesis elementales de Poisson entre los elementos base.

Para la base monomial tenemos la siguiente expresión cerrada del paréntesis de Poisson

$$\begin{aligned} \{M_{k_+, k_0, k_-}, M_{k'_+, k'_0, k'_-}\} &= 4(k_- k'_+ - k_+ k'_-) M_{k_+, k'_+, k_0 + k'_0 - 1, k_- + k'_- - 1} \\ &\quad + 2(k_0 k'_+ - k_+ k'_0 + k_- k'_0 - k_0 k'_-) M_{k_+, k'_+, k_0 + k'_0 - 1, k_- + k'_-} \end{aligned}$$

En particular,

$$\{M_{100}, M_{k_+, k_0, k_-}\} = -4k_- M_{k_+, k_0 + 1, k_- - 1} - 2k_0 M_{k_+, k_0 + 1, k_- - 1},$$

$$\{M_{010}, M_{k_+, k_0, k_-}\} = 2(k_+ - k_-) M_{k_+, k_0, k_-},$$

$$\{M_{001}, M_{k_+, k_0, k_-}\} = 4k_+ M_{k_+ - 1, k_0 + 1, k_-} + 2k_0 M_{k_+, k_0 - 1, k_- + 1},$$

y notamos que el paréntesis con el invariante $(p \times q)^2$ es igual a cero;

$$\{M_{101} - M_{020}, M_{k_+, k_0, k_-}\} = 0.$$

Cada paréntesis elemental de Poisson entre monomios produce dos, uno o ningún monomio. Con esta táctica tenemos una forma corta de escribir paréntesis de Poisson simbólicos en funciones *M*SIMP, pero es evidente que la recursión de tales funciones se hace más lenta cuando los polinomios no están dispersos pero son 'arbitrarios', por que una proporción creciente del tiempo de cálculo se usa para administrar el árbol de recursión y porque el resultado (*output*) aún debe ser escrutado para coleccionar los coeficientes de los vectores de la base. Por ejemplo, no es posible usar la primera igualdad de la función de Poisson, dada al principio de esta sección, para calcular las cuatro componentes Cartesianas de funciones escalares (usadas en óptica con simetría axial); por esta razón empleamos las bases ξ_i dadas en la segunda igualdad de la función citada.

Examinemos el número de términos en el paréntesis de Poisson de A_1 con B_1 , B_2 y B_3 , para lo cual empleamos las componentes $k = 1$, del caso particular para monomios dado arriba, que serán los elementos C^M de la forma tabular. La cuenta de términos al resolver en el paréntesis es

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|----------|----|----|-----------|----|----|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| (M..., M...) | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. |
| 100: | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 010: | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 001: | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | total: 0 | | | total: 16 | | | total: 32 | | | | | | | | | | | | |

y la cuenta para $C_4 = \{A_1, B_4\}$ es 52.

Como los resultados que hemos manejado en esta sección se despliegan explícitamente a $k_{\max} = 3$, escribimos la tabla de paréntesis de Poisson para $C_3 = \{A_2, B_2\}$:

$$\begin{aligned}
 C_{300}^M &= 4A_{110}^M B_{200}^M - 4A_{200}^M B_{110}^M, \\
 C_{210}^M &= 8A_{020}^M B_{200}^M + 8A_{101}^M B_{200}^M - 8A_{200}^M B_{020}^M - 8A_{200}^M B_{101}^M, \\
 C_{201}^M &= 4A_{011}^M B_{200}^M - 4A_{200}^M B_{011}^M, \\
 C_{120}^M &= 8A_{011}^M B_{200}^M + 4A_{020}^M B_{110}^M + 4A_{101}^M B_{110}^M - 4A_{110}^M B_{020}^M - 4A_{110}^M B_{101}^M - 8A_{200}^M B_{011}^M, \\
 C_{111}^M &= 16A_{002}^M B_{200}^M + 4A_{011}^M B_{110}^M - 4A_{110}^M B_{011}^M - 16A_{200}^M B_{002}^M, \\
 C_{102}^M &= 4A_{002}^M B_{110}^M - 4A_{110}^M B_{002}^M, \\
 C_{030}^M &= 4A_{011}^M B_{110}^M - 4A_{110}^M B_{011}^M, \\
 C_{021}^M &= 8A_{002}^M B_{110}^M + 4A_{011}^M B_{020}^M + 4A_{011}^M B_{101}^M - 4A_{020}^M B_{011}^M - 4A_{101}^M B_{011}^M - 8A_{110}^M B_{002}^M, \\
 C_{012}^M &= 8A_{002}^M B_{020}^M + 8A_{002}^M B_{101}^M - 8A_{020}^M B_{002}^M - 8A_{101}^M B_{002}^M, \\
 C_{003}^M &= 4A_{002}^M B_{011}^M - 4A_{011}^M B_{002}^M.
 \end{aligned}$$

El número de elementos en la tabla, para orden de aberración siete, rango $k = 4$, se obtiene de $C_3 = \{A_2, B_2\}$ como indicamos anteriormente, y de $C_4 = \{A_2, B_3\}$ cuya

forma explícita omitimos. Estos son:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|-----------|----|----|----|----|----|----|----|-----------|----|----|----|----|----|----|----|
| | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| (M..., M...) | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. |
| 200: | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 110: | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 101: | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 020: | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 011: | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 002: | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | total: 34 | | | | | | | | total: 72 | | | | | | | |

Como parte de la estructura para graduar por rangos, podemos contar totales para esta base a rangos $k = 1, 2, 3, 4$. De la tabulación de totales para el préntesis de A_1 con B_1, B_2 y B_3 , sabemos que el rango $k = 1$ involucra solamente 6 términos; a rango estricto $k = 2$ se involucran 32 términos (16 para $\{A_1, B_2\}$ y 16 para $\{A_2, B_1\}$); $k = 3$ entraña $2 \times 32 + 34 = 98$ términos; y $k = 4$ debe contener $2 \times 52 + 2 \times 72 = 248$ términos. La complejidad acumulativa se encuentra más adelante, en la Sección 4.12.

La base simpléctica

El paréntesis de Poisson entre los monomios de la base simpléctica ${}^k\chi_m^j$, se expresa también en términos de una fórmula cerrada (extensa) que relaciona los coeficientes de Wigner $3jm$ (ver la referencia [DRAGT, FOREST, y WOLF (1986)], ecuaciones (7.14), (7.21), y (7.52)). La estructura es simple y tiene la forma de una sola suma

$$\{ {}^k\chi_m^j, {}^{k'}\chi_{m'}^{j'} \} = \sum_{\substack{j''=|m+m'| \\ k+k'+j'' \text{ non}}}^{j+j'-1} p_{m,m'}^{j,j',j''} {}^{k+k'-1}\chi_{m+m'}^{j''}$$

donde el índice j'' toma valores espaciados por dos unidades tal que $k+k'-j''-1$ sea par. Esta operación conserva el índice magnético $m+m'$ en ambos lados de la igualdad.

Una propiedad que puede ser verificada por la segunda igualdad en la fórmula para ${}^k\chi_m^j$, al inicio de la Sección 4.8, es

$$\begin{aligned} \{ {}^\kappa\chi_1^1, {}^k\chi_m^j \} &= 2(m-j) {}^{\kappa+k-1}\chi_{m+1}^j, & \text{ascenso} \\ \{ {}^\kappa\chi_0^1, {}^k\chi_m^j \} &= 2m {}^{\kappa+k-1}\chi_m^j, & \text{peso} \\ \{ {}^\kappa\chi_{-1}^1, {}^k\chi_m^j \} &= 2(m+j) {}^{\kappa+k-1}\chi_{m-1}^j, & \text{descenso} \\ \{ {}^\kappa\chi_0^0, {}^k\chi_m^j \} &= 0. & \text{escalares} \end{aligned}$$

Estas expresiones cerradas son válidas para todos los tripletes ${}^\kappa\chi_m^1 = |p \times q|^{\kappa-1} {}^1\chi_m^1$ para κ impar, y para todos los singuletes ${}^\kappa\chi_0^0$ para κ par, porque usamos

4.12. Comparación entre las dos bases por el número de elementos en las tablas

Para realizar una comparación de eficiencia al multiplicar polinomios en la base monomial y en la base simpléctica, una razón es su longitud o extensión de monomios. Para esto construimos una función muSIMP que cuenta el número de monomios en un vector, usamos para ello la función implícita LENGTH que cuenta el número de nodos en una lista.

La multiplicación

En la multiplicación la base monomial es más eficiente que la simpléctica porque la regla para el producto $M_{k_+, k_0, k_-} \times M_{k'_+, k'_0, k'_-}$ genera solamente un término. Sin embargo, la regla para multiplicar ${}^k\chi_m^j \times {}^{k'}\chi_{m'}^{j'}$ en la base simpléctica, no queda muy atrás debido a que dos de los tres niveles, k y m , se suman. En la base simpléctica el número de sumandos j'' es uno para $m = \pm k$ y $m = \pm(k-1)$, dos para $m = \pm(k-2)$ y $m = \pm(k-3)$, etc., además de la parte entera de $k/2$ con un término para $m = 0$. Sobre los $2k+1$ valores de m , el número total de sumandos es nuevamente $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$, la dimensión del multiplete k . El número promedio de sumandos por encima del rango de las m 's es $(k+1)(k+2)/2(2k+1)$, lo cuál se comporta asintóticamente $\sim \frac{1}{2}k$. Las razones de las longitudes acumulativas, en las tablas de multiplicar para la base monomial y para la simpléctica son, 1, 0.75, 0.68, 0.64 y 0.59, para los rangos $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Al comparar los tiempos de proceso de CPU, los coeficientes de la tabla de multiplicar para la base simpléctica presentan un problema particular en una porción de esta tabla: en cada rango k , los $2k+1$ miembros de los $j = k$ multipletes tienen coeficientes fraccionarios, en tanto que los multipletes $j = k-2, \dots, 1$ o 0 tienen coeficientes fraccionarios. muSIMP utiliza razones enteras; debe convertir entonces fracciones a razones, lo cual contribuye a la lentitud de los cálculos. El promedio de tiempo de procesos de CPU en una computadora PC XT de 10 MHz que requieren las tablas de multiplicar para ser resueltas hasta rango 5, se aprecia en la Gráfica 4.1 y se apunta en la tabla siguiente para una muestra de 15 corridas y coeficientes polinomiales numéricos fraccionarios y simbólicos. En unidades *ad hoc* (segundos), son:

| RANGO k | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------------------|------|------|-------|-------|
| BASE MONOMIAL, SIMBÓLICA | 0.24 | 1.04 | 6.55 | 12.76 |
| id. BASE SIMPLÉCTICA | 0.55 | 4.91 | 29.22 | 72.94 |
| BASE MONOMIAL NUMÉRICA | 0.51 | 2.98 | 10.50 | 18.96 |
| id. BASE SIMPLÉCTICA | 0.88 | 6.05 | 21.03 | 46.37 |

Las razones de tiempo de cálculo para estas dos bases con coeficientes numéricos que son fraccionarios, es 0.58, 0.49, 0.49, y 0.41, para $k = 2, 3, 4, 5$. Los cálculos con coeficientes simbólicos alargan la lista en cada multiplicación y la primera suma; esto se refleja en la razón de tiempo de cálculo de monomios a simplécticos: 0.43, 0.33, 0.22, y 0.18, para los mismos rangos.

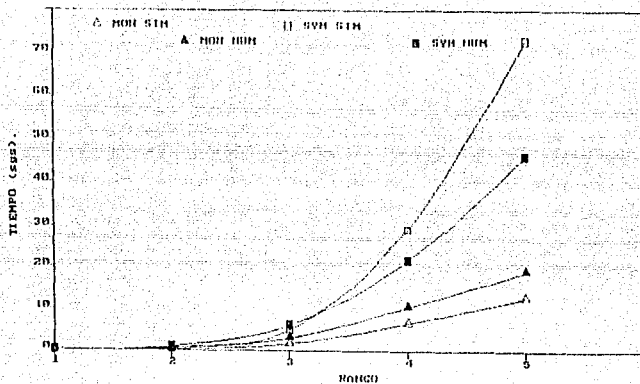


FIGURE 4.1. Promedio de tiempo de procesos de CPU que requieren las tablas de multiplicar al aplicarse a polinomios con coeficientes numéricos (NUM) fraccionarios y simbólicos (SIM), para las bases monomial (MON) y simpléctica (SYM).

El paréntesis de Poisson

La cuenta comparativa de términos AB en el paréntesis de Poisson para las dos bases, favorece a la simpléctica en la siguiente medida:

| RANGO k | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------|---|----|-----|-----|
| BASE MONOMIAL | 0 | 32 | 98 | 248 |
| BASE SYMPLÉCTICA | 0 | 24 | 80 | 200 |
| ACUMULATIVA, MONOMIAL | 0 | 38 | 130 | 384 |
| ACUMULATIVA, SIMPLÉCTICA | 0 | 30 | 110 | 310 |

Las razones del número total de sumandos, entre estas bases son 1, 1.207, 1.236, 1.280 para rangos $k = 1, 2, 3, 4$. El uso de la base simpléctica, en este caso, significa una ventaja de alrededor del 25% en el número de sumandos.

Como en la multiplicación, la tabla para la base simpléctica incluye coeficientes *fraccionarios*, lo cual dijimos, introduce una complejidad computacional extra. De

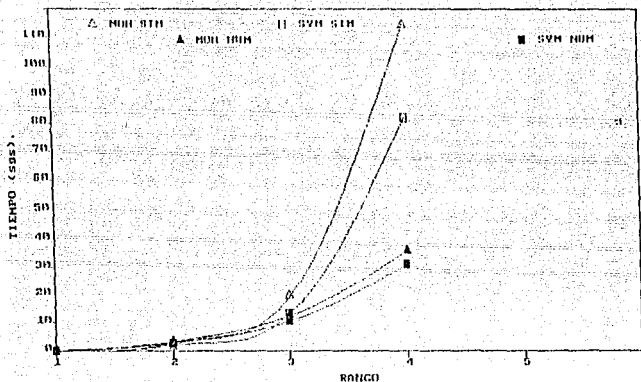


FIGURE 4.2. Promedio de tiempo de procesos de CPU que requieren las tablas de paréntesis de Poisson al aplicarse a polinomios con coeficientes numéricos (NUM) fraccionarios y simbólicos (SIM), para las bases monomial (MON) y simpléctica (SYM).

la misma manera que anteriormente, escribimos ahora la tabla para los promedios de tiempo de CPU, para el mismo tipo de coeficientes polinomiales, simbólicos y numéricos fraccionarios:

| | RANGO k | 2 | 3 | 4 |
|-----------------------------|-----------|-----|------|-------|
| BASE MONOMIAL, SIMBÓLICA | | 2.8 | 19.3 | 113.9 |
| <i>id.</i> BASE SIMPLÉCTICA | | 2.0 | 13.1 | 81.8 |
| BASE MONOMIAL NUMÉRICA | | 3.3 | 12.4 | 35.7 |
| <i>id.</i> BASE SIMPLÉCTICA | | 2.8 | 10.5 | 31.0 |

Las razones de tiempos de cálculo de estas bases para coeficientes simbólicos son 1.397, 1.475, y 1.393 para rangos $k = 2, 3, 4$, y para coeficientes numéricos fraccionarios las razones son 1.165, 1.176, y 1.151. Finalmente, para rangos bajos, la ventaja de usar la base simpléctica sobre la monomial para coeficientes simbólicos, es de alrededor de 40% y de 15% para cálculos numéricos.

Conclusiones.

Las funciones que hemos manejado son polinomios en las variables del espacio fase de un sistema óptico geométrico. Estos polinomios están sujetos a operaciones de combinación lineal, multiplicación, paréntesis de Poisson y transformaciones canónicas no lineales producidas por los elementos ópticos de un sistema calculado en un orden dado de aberración. La construcción matemática que aquí empleamos es aplicable también a ciertos sistemas mecánicos Hamiltonianos, tales como osciladores armónicos perturbados. La teoría de álgebras de Lie es aplicable a una amplia gama de problemas e interpretaciones en física y química, como es el caso de la aproximación a la teoría de union valencia.

- La formulación Hamiltoniana de la óptica geométrica en medios inhomogéneos, puede ser abordada con base en el principio de *mínima acción* de Fermat, del cual se derivan las ecuaciones de Euler - Lagrange por métodos variacionales. Se definen en éstas las observables de momento como el gradiente de velocidad de la función Lagrangiana. Finalmente se escriben las ecuaciones de Hamilton. La manera en que se obtuvieron las ecuaciones de Hamilton en el Capítulo 3, directamente a partir de las propiedades geométricas y dinámicas del sistema, es una manera alternativa más simple que la anterior.

Las transformaciones *canónicas* del espacio fase modelan los elementos pasivos de la óptica paraxial, tales como propagación libre en medios homogéneos o en fibras, y la acción de las interfases refractantes entre éstos.

Si un sistema óptico es invariante bajo rotaciones en torno a un eje común, su caracterización paraxial conduce a un subgrupo $sp(2, \mathbb{R})$ contenido en $sp(4, \mathbb{R})$. Existe un homomorfismo accidental 2:1 entre el grupo de transformaciones simpléctico en dos dimensiones $sp(2, \mathbb{R})$ y el grupo de pseudo rotaciones $so(2, 1)$. Trabajamos por ello con polinomios armónicos esféricos sólidos en tres variables, p^2 , $p \cdot q$ y q^2 . La óptica de aberraciones requiere funciones de polinomios de estas variables, de grado superior a dos.

- El grupo de la óptica paraxial es usado para clasificar los polinomios según su spin simpléctico. Los polinomios fueron expresados en la base monomial y en la base de armónicos simplécticos para clasificar las aberraciones ópticas. Matemáticamente estos últimos son similares a los eigen-estados de momento

angular definido en el oscilador armónico tridimensional. Las aberraciones ópticas son así clasificadas en multipletes simplécticos irreducibles, los cuales se mezclan entre sí bajo las transformaciones lineales de la óptica paraxial.

- El procesador de cómputo simbólico muSIMP que empleamos para nuestros cálculos se compone de un kernel intrínseco de funciones y de un kernel elaborado por el usuario para su necesidad específica. De esta manera armamos nuestro kernel con las funciones para generar las tablas de multiplicación y de paréntesis de Poisson, y operamos con ellas en las dos bases, la cartesiana y la simpléctica. Concluimos, en particular, que en la base monomial se favorece la multiplicación ordinaria, bilineal y conmutativa, en tanto que en la base simpléctica se favorece el paréntesis de Poisson.

Referencias.

BIEDENHARN, L. C. Y LOUCK, J. D. (1981). *Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and Application*. Encyclopedia of Mathematics, Vol. 8, New York: Academic Press.

CORREA, G. Y WOLF, K. B. (1989). SPOT_D, Programa para graficación de diagramas de manchas en óptica. Comunicaciones Técnicas IIMAS, Serie Desarrollo, # 97.

DRAGT, A. J. (1982). Lie algebraic theory of geometric optics and optical aberrations. *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 372-379.

DRAGT, A. J. Y FINN, J. (1976). Lie series and invariant functions for analytic symplectic maps. *J. Math. Phys.* **17**, 2215-2227.

DRAGT, A. J., FOREST, E., Y WOLF, K. B. (1986). Foundations of a Lie algebraic theory of geometrical optics. En *Lie Methods in Optics*, Lecture Notes in Physics, Vol. 250, Ed. por Sánchez Mondragón, J. y Wolf, K. B., Heidelberg: Springer Verlag.

FOREST, E. Y BERZ, M. (1989). Canonical integration with non-standard analysis. En *Lie Methods in Optics, II Workshop*, Lecture Notes in Physics, Vol. 352, Ed. por Wolf, K. B., Heidelberg: Springer Verlag.

GILMORE, R. (1978). *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of their Applications*, New York: Wiley Interscience.

GOLDSTEIN, H. (1963). *Classical Mechanics*, Reading, Mass.: Addison-Wesley, Capítulos 7 y 8.

HEALY, L. M. Y DRAGT, A. J. (1989). Concatenation of Lie algebraic maps. En *Lie Methods in Optics, II Workshop*, Lecture Notes in Physics, Vol. 352, Ed. por Wolf, K. B., Heidelberg: Springer Verlag.

KRÖTZSCH, G. Y WOLF, K. B. (1991A). Las tres caras de Hamilton en la óptica geométrica y en la mecánica. *Rev. Mex. Fis.* **37**, 130-140.

KRÖTZSCH, G. Y WOLF, K.B. (1991b). La transformación raíz de superficies refractantes y espejos. *Rev. Mex. Fís.* **37**, 540-554.

NAVARRO SAAD, M. (1985). *Cálculo de Aberraciones en Sistemas Ópticos con Teoría de Grupos*, Tesis Profesional (Facultad de ciencias, UNAM).

NAVARRO-SAAD, M. Y WOLF, K.B. (1985). Applications of a factorization theorem for ninth-order aberration optics. *J. Symb. Comp.* **1**, 235-239.

NAVARRO-SAAD, M. Y WOLF, K.B. (1986a). The group-theoretical treatment of aberrating systems. I. Aligned lens systems in third aberration order. *J. Math. Phys.* **27**, 1449-1457.

NAVARRO-SAAD, M. Y WOLF, K.B. (1986b). Factorization of the phase-space transformation produced by an arbitrary refracting surface. *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 340-346.

PALDUS, J. Y LI, X. (1991). Lie algebraic approach to valence bond theory of π -electron systems: a preliminary study of excited states. AIP Conference Proceedings, *Group Theory in Physics*, Vol. 206, Ed. por Frank, A., Seligman, T. y Wolf, K.B., American Institute of Physics, Nueva York.

SEKIGUCHI, T. Y WOLF, K.B. (1987). The Hamiltonian formulation of optics. *Am. J. Phys.* **55**, 830-835.

STAVROUDIS, O. (1972). *The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics*, Academic Press, Nueva York.

STEINBERG, S. (1986). Lie series, Lie transformations, and their applications. En *Lie Methods in Optics*, Lecture Notes in Physics, Vol. 250, Ed. por Sánchez Mondragón, J. y Wolf, K.B., Heidelberg: Springer Verlag.

WOLF, K.B. (1979). *Integral Transforms in Science and Engineering* Plenum Press, Nueva York.

WOLF, K.B. (1986). Symmetry in Lie optics. *Annals of Physics* **172**, 1-25.

WOLF, K.B. (1988a). Symmetry-adapted classification of aberrations. *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 1226-1232.

WOLF, K.B. (1988b). Nonlinearity in Aberration Optics. En *Symmetries and Non-linear Phenomena*, Ed. por Levi, D. y Winternitz, P., Singapore: World Scientific.

WOLF, K.B. Y KRÖTZSCH, G. (1991). Group-classified polynomials of phase space in higher-order aberration expansions. *J. Symb. Comp.* **12**, 673-693.