

15  
2es.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SIMETRIAS DINAMICAS EN FISICA  
NUCLEAR Y DE PARTICULAS.

T E S I S  
Que para obtener el Título de  
F I S I C O  
p r e s e n t a

RICARDO JAVIER CLAPS ARENAS

México, D. F.

1993

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

Introducción . . . . .	pag. 1
------------------------	--------

### Capítulo 1

#### Sistemas de Bosones Interactuantes

1.1 Introducción . . . . .	5
1.2 El esquema de segunda cuantización . . . . .	7
1.3 Modelo de Bosones $p$ . . . . .	8
1.4 Transiciones y momentos cuadrupolares . . . . .	20
1.5 Generalización y conclusiones . . . . .	26
1.6 Apéndice 1 . . . . .	31
1.7 Referencias . . . . .	35

### Capítulo 2

#### Sistemas de Fermiones Interactuantes

2.1 Introducción . . . . .	37
2.2 Modelo de Fermiones $p$ . . . . .	39
2.3 Momentos cuadrupolares . . . . .	67
2.4 Apéndice 1 . . . . .	69
2.5 Apéndice 2 . . . . .	73
2.6 Referencias . . . . .	83

## Capítulo 3

### Simetrías dinámicas en Bariones

3.1	Introducción . . . . .	85
3.2	Modelo SU(3) para Quarks . . . . .	89
3.3	Momentos magnéticos de los Bariones . . . . .	105
3.4	Fórmulas de masas para los Bariones . . . . .	107
3.5	Referencias . . . . .	116

<b>CONCLUSIONES</b> . . . . .	<b>117</b>
-------------------------------	------------

## INTRODUCCIÓN

Desde que Wigner y colaboradores introdujeron exitosamente la teoría de grupos para el estudio de los espectros atómicos de elementos multieletrónicos, esta herramienta matemática ha encontrado aplicación en múltiples ramas de la física básicamente por dos razones: i) En el problema de muchos cuerpos en mecánica cuántica, permite obtener espectros de energía y una base de estados adecuada al problema sin necesidad de resolver explícitamente la ecuación de Schrödinger (o la de Dirac, en el caso relativista), la cual es en general un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales y acopladas. ii) Cuando se desconoce la forma del potencial de interacción en un problema determinado (como es el caso de la física nuclear y la de partículas), la teoría de Grupos permite obtener, aprovechando el concepto de Simetría, Hamiltonianos modelo que pueden ajustarse de manera adecuada para describir los resultados observados.

En este sentido, y en vista del éxito que ha tenido la aplicación de la teoría de Grupos en el campo de las partículas elementales, el concepto de Simetría ha pasado a ocupar un lugar preponderante en el estudio e interpretación de los fenómenos físicos.

En este trabajo se describirán los conceptos básicos de la teoría de Grupos, así como su aplicación en la física nuclear y de partículas. Se estudiarán modelos simples pero que indican las dificultades que se presentan en modelos de interés actual. La extensión de estos modelos resulta ser directa en el aspecto formal, aunque los cálculos algebraicos se compliquen.

Dentro de estos conceptos vamos a mencionar aquí dos, que son importantes para comprender lo que se hará en este trabajo dentro de lo que sería la aplicación de la teoría de grupos en la física: Algebra de simetría y Algebra dinámica de simetría. La primera es el conjunto de generadores de algún grupo que conmuta con el Hamiltoniano del problema en cuestión; entonces, estos operadores son capaces de generar todo un multiplete correspondiente a un mismo eigen-valor de este Hamiltoniano. Por otro lado, cuando se tiene un álgebra de operadores tales que generan la totalidad del espacio de Hilbert del Hamiltoniano (es decir, su acción permite cambiar estados de un multiplete de energía a otro), se dice que el Hamiltoniano posee un Algebra dinámica. De tal forma, si se tiene un Hamiltoniano escrito en términos de los operadores de Casimir asociados a una cierta cadena de grupos, el grupo 'menor' determina el Algebra de simetría, mientras que el grupo mayor determina el Algebra dinámica.

No daremos aquí, por motivos de extensión, una introducción de los conceptos básicos, pero remitimos a los textos clásicos del tema con enfoque hacia la física: Hamermesh [1], Wigner [2], Chen [3]. De cualquier manera, algunas aclaraciones son pertinentes: Siempre que hablemos en lo sucesivo de la 'representación' de algún grupo, nos referiremos a una representación irreducible. Trabajaremos básicamente con grupos unitarios  $U(n)$  que son un ejemplo de grupos continuos de Lie; también trataremos con el grupo simétrico de permutaciones  $S(n)$ , el cual es un grupo finito que, como se sabe, guarda una relación muy estrecha con los grupos unitarios y en general, con las representaciones irreducibles del grupo lineal en  $n$  dimensiones  $GL(n)$ . Como el manejo que se hará en toda la tesis de la teoría será puramente algebraico, trabajaremos solamente con los generadores infinitesimales de los grupos y utilizaremos las álgebras que satisfacen en términos de relaciones de conmutación. En este sentido nos apartaremos del tratamiento al estilo Hamermesh, sin embargo, en Chen [3] Capítulo V se encuentra una excelente referencia básica para el trabajo de esta tesis. En el capítulo VII del mismo libro se hace un análisis detallado de los grupos unitarios; en la sección 1 de dicho capítulo aparece la relación de conmutación básica que obedecen los generadores de estos grupos a la cual haremos referencia en el trabajo para encontrar el grupo de simetría en cada uno de los problemas que se tratarán.

En física generalmente se utiliza el grupo  $SU(n)$ , el cual consiste en la matrices unitarias complejas con determinante 1. Sin embargo, en muchos de los teoremas y los cálculos de la teoría de Grupos aparece el grupo  $U(n)$  de matrices unitarias (de  $n$  dimensiones), que es más general que el anterior, aunque no aporte más información físicamente relevante. En términos de generadores, los de  $SU(n)$  son los de  $U(n)$  pero sin traza, y son  $n^2 - 1$  en contraste con los  $n^2$  de  $U(n)$ . En términos de diagramas de Young (que veremos en el capítulo 2), la diferencia entre las representaciones de ambos grupos está solamente en las columnas con  $n$  cajas. Es decir, las representaciones de  $U(n)$  en las que aparecen columnas de  $n$  cajas son equivalentes a las representaciones de  $SU(n)$  correspondientes al diagrama que resulta de eliminar dichas columnas. De hecho, es posible demostrar (Chen cap. VII) que cualquier eigen-función  $\Psi(\nu)$  que pertenece a la rep.  $\{\nu\}$  de  $U(n)$  pertenece necesariamente a una representación irreducible de  $SU(n)$ , aquella cuyo diagrama de Young se obtiene del correspondiente a la representación de  $U(n)$ . A lo largo de la tesis se manejará indistintamente a los grupos  $U(n)$  y  $SU(n)$ , pero queda garantizado por la teoría que los resultados son los mismos, con la salvedad que acabamos de mencionar.

En los dos primeros capítulos se tratarán temas que son de interés en física nuclear. El marco general de lo que se hará en ellos será el modelo de capas para el núcleo, en el cual juegan un papel básico los niveles de energía  $N$  de un oscilador armónico tridimensional. El modelo microscópico de referencia será entonces el de un conjunto de partículas (bosones o fermiones) 'embebidas' en una capa  $N$  del potencial común, las cuales a su vez interactúan mutuamente bajo la acción de un potencial indeterminado.

En el tercer capítulo nos ocuparemos del papel que juega la teoría de Grupos a nivel fenomenológico en la física de partículas. Dejaremos de lado el estudio de los estados excitados de los bariones lo cual, como se verá, sería una extensión directa del trabajo que se hace en este capítulo.

Pese a que los temas a tratar son bastante diferentes, se hará uso a lo largo de todo el trabajo del método algebraico de 'segunda cuantización', a través del cual se puede convertir un problema de ecuaciones diferenciales con variables continuas en un problema algebraico susceptible de resolverse de manera sencilla empleando teoría de Grupos. Una justificación de la validez de este método se da en el libro de M. Moshinsky [4] y aquí sólo se hará una mención de ella.

También se puede ver que surgen operadores bosónicos de creación y aniquilación, de manera natural, como los coeficientes de un desarrollo en serie de Fourier para la función de estado de un sistema. Sin embargo, el enfoque de esta tesis será el de Moshinsky, en el cual se interpreta un operador de creación como una partícula física con propiedades definidas, y un operador de aniquilación como su conjugado hermiteano<sup>1</sup>. Para ilustrar el modelo de capas se estudiará un sistema de  $N$  fermiones confinados a ocupar una sola capa principal de un oscilador armónico tridimensional y que están interactuando a través de fuerzas centrales de tipo gaussiano y de Yukawa. Se encontrarán los espectros de energía y las eigenfunciones correspondientes y se analizará el comportamiento del espectro respecto a un parámetro de intensidad de las interacciones mencionadas.

Como ejemplo del procedimiento matemático que se utiliza en el modelo de bosones interactuantes introducido por Iachello y Arima se considerará un sistema de  $N$  bosones con momento angular uno (bosones  $p$ ). Determinando el potencial general que puede asociarse a cualquier interacción entre los bosones que sea invariante ante rotaciones; encontrando su espectro de energías y sus correspondientes eigenfunciones. También se calcularán transiciones electromagnéticas cuadrupolares entre los estados utilizando la forma explícita de las funciones de onda encontradas.

En el campo de las partículas se tratarán los temas siguientes :

- i) Simetrías internas de la interacción fuerte.
- ii) El modelo de quarks . Restringido a solamente tres tipos de quarks (u,d,s).
- iii) Fórmula de masas de Gellmann-Okubo.

Se hará un modelo fenomenológico que describe el espectro de masas de los bariones utilizando la simetría dinámica  $U(6)$ . También se obtendrá la base completa de estados

<sup>1</sup> Dicho en términos más formales: El método de segunda cuantización "es un formalismo matemático en el cual son precisamente los números de ocupación (y no las coordenadas o las proyecciones de los espines de las partículas) los que desempeñan el papel de variables independientes [5].

portando esta simetría y con ella se calcularán los valores de los momentos magnéticos de los bariones y sus proporciones, los cuales han sido un soporte más para la hipótesis de confinamiento del color.

En cuanto a la manera de organizar la bibliografía en este trabajo, debemos comentar lo siguiente: Aunque algunos de los textos a los que se hará referencia fueron utilizados a lo largo de todo el trabajo, daremos, por facilidad de manejo, una referencia bibliográfica para cada capítulo. De tal manera, cuando se mencione un libro citado previamente, sólo escribiremos el nombre del autor, seguido de los datos específicos de la referencia en cuestión, *v.g.* capítulo, sección, página, ecuación, etc. Como es usual, se hará referencia a la bibliografía con números entre corchetes.

## REFERENCIAS

- [ 1 ] Morton Hamermesh; Group Theory and its applications to physical problems Addison-Wesley Publishing Company, 2a. impresión, USA 1964 .
- [ 2 ] Eugene Wigner; Group Theory and its application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra Academic Press USA 1959 .
- [ 3 ] Jin-Quan Chen; Group Representation Theory for physicists World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore 1989 .
- [ 4 ] M.Moshinsky; Group Theory and the many body problem Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. USA 1967 .
- [ 5 ] L.Landau, E.Lifshitz; Curso abreviado de física teórica: Mecánica Cuántica. Editorial MIR, Moscú 1974 . Capítulo VI, par. 47 .

## **Capítulo 1**

---

# SISTEMAS DE BOSONES INTERACTUANTES

## 1 Introducción

Como ya hemos dicho, en el presente capítulo y en el siguiente trabajaremos en temas que tienen aplicación en física nuclear. En la sección 5 nos referiremos con más detalle al Modelo de Bosones Interactuantes propuesto por Iachello y Arima. Aquí haremos una breve referencia al problema microscópico antes de comenzar con cálculos que pertenecen propiamente a un modelo de bosones previamente establecido que en nuestro caso será simplificado y para el cual no tendremos una referencia física concreta.

El Modelo de Bosones Interactuantes (IBM) da una buena descripción de los estados colectivos de núcleos medianos y pesados. El hecho de que el Hamiltoniano en este modelo conserve el número de bosones (c.f. el Hamiltoniano que obtenemos en la sección 2 de este capítulo) sugiere que estos bosones representen de alguna manera pares de nucleones. De hecho, en los modelos propuestos, al menos en los más simples, se proponen bosones que representan pares protón-protón ó neutrón-neutrón. Sin embargo, lograr una perfecta coherencia entre la imagen microscópica del núcleo como un sistema de muchas partículas que además tienen espín, y el modelo algebraico de bosones interactuantes aún en su forma más simple (bosones  $s$  y  $d$  como se verá en la sección 5) resulta una tarea complicada que abarca toda una línea de investigación con la literatura correspondiente.

Como es bien sabido, el modelo de capas es una buena aproximación a la complejidad del problema de muchos cuerpos que presenta el núcleo. En núcleos ligeros, y en núcleos pesados con configuraciones cercanas a las de capa cerrada, el modelo ha permitido obtener exitosos cálculos de niveles de energía y probabilidades de transición. Esto se ha logrado utilizando interacciones de dos cuerpos y operadores de partícula independiente para las transiciones electromagnéticas.

Sin embargo, en los casos en los que el número de nucleones de 'valencia' (ver sec. 5) es grande, la aplicación directa del modelo de capas se torna prácticamente imposible. Tomando en cuenta todo el espacio de Hilbert que en principio implica el modelo, se observaría que mucha de la información incluye estados de muy alta energía en los que juegan un papel muy importante las configuraciones excitadas. Sin embargo,

generalmente interesan sólo los niveles de más baja energía, las cuales muestran una estructura simple y regular. En la ref. [7] se ilustra, con ejemplos concretos para 10 y 12 neutrones de valencia, cómo la dimensión del espacio a considerar prohíbe definitivamente cualquier cálculo en el modelo de capas. Entonces se debe introducir algún esquema de 'truncamiento', o dicho de otra forma, un esquema de 'acoplamiento' que aporte una descripción simple pero adecuada de los niveles más bajos. Esta descripción se tiene con el IBM cuya imagen microscópica resulta ser entonces el modelo nuclear de capas (como lo manejaremos en este trabajo). El IBM ha mostrado ser eficaz en la descripción de estados colectivos de baja energía en términos de bosones con momento angular 0 y 2 (ver sec. 5). El modelo asigna parejas de nucleones de valencia idénticos (protones por una parte y neutrones por otra) acoplados con  $J^P = 0^+ y 2^+$  a bosones  $s$  y  $d$  respectivamente. Esto implica dos cosas:

i) La imagen fermiónica de los bosones (los pares acoplados) debe satisfacer relaciones bosónicas de conmutación (descritas en la siguiente sección).

ii) Los estados colectivos del núcleo serán descritos tan bien como sea posible en términos de estas superposiciones tipo S y D de operadores fermiónicos, pero es de esperar que el modelo tenga limitaciones.

Respecto al punto (ii), es interesante señalar el tipo de problema que se presenta. La prescripción más simple para escoger los pares a acoplar es diagonalizar el Hamiltoniano para nucleones idénticos  $\mathcal{H}_{\tau\tau}$  ( $\tau = \nu$  ó  $\pi$ ) en el espacio de configuraciones de dos partículas y luego identificar los eigenvectores de menor energía de dos partículas acopladas a  $0^+$  con el par S y los eigenvectores de menor energía acoplados a  $2^+$  con el par D. Los operadores S y D de pares así formados crean los estados de mínima energía en la ausencia de otros pares. Pero surge la pregunta de qué ocurre cuando existe más de un par de partículas. El problema es si es posible reproducir el proceso de 'acoplamiento' entre los pares mismos de manera que las interacciones mutuas que estos sufren sean manejables de la misma manera que la interacción nucleón-nucleón, con la consecuencia de que el acoplamiento entre pares resulte en estados de mínima energía. Dada la propiedad de apareamiento de las fuerzas nucleares, resulta que la interacción entre pares semejantes es muy débil. Sin embargo, se ha demostrado que es posible realizar una renormalización entre pares neutrónicos y protónicos ya que la interacción entre estos resulta ser bastante fuerte. En este sentido se pueden esperar resultados importantes aplicando este procedimiento de pares S y D en sistemas que involucren neutrones y protones de valencia.

Considerando los dos puntos anteriores, vemos que se tienen entonces dos problemas por resolver: el primero es encontrar un mapeo bosónico, y el segundo es el de optimizar el truncamiento del espacio fermiónico a mapear en el espacio bosónico. No hablaremos de estos problemas ni de las técnicas que existen para resolverlos<sup>1</sup>, pero

<sup>1</sup> Como ya dijimos, existe toda una literatura al respecto, además de la ref. [7], podemos recomendar [8], y el excelente artículo de revisión de Klein y Marshalek [9].

diremos que éstas básicamente se subdividen en dos tipos: Aquellas que realizan el truncamiento antes de la 'bosonización' y las que lo hacen a la inversa.

En este capítulo estudiaremos un sistema de bosones con momento angular  $l = 1$ , para ésto consideramos un Hamiltoniano general constituido por interacciones de uno y dos bosones en el esquema de segunda cuantización.

El objetivo es indicar los pasos a seguir para identificar la estructura de grupos que está asociada a sistemas de muchas partículas y así descubrir la existencia de simetrías dinámicas asociadas al Hamiltoniano completo o a parte de él. Este análisis permite obtener el espectro de energía en forma analítica o al menos proporciona una base completa de estados, por medio de los cuales es posible diagonalizar el Hamiltoniano.

En el párrafo anterior se han introducido conceptos como esquema de segunda cuantización, estructura de grupos y simetría dinámica que aclararemos en el desarrollo de este capítulo. Primero daré un breve resumen del formalismo de segunda cuantización, para aplicarlo posteriormente al problema particular que nos interesa. Una vez que hayamos obtenido el Hamiltoniano en términos de operadores bosónicos con momento angular 1, determinaremos su estructura de grupos; las simetrías dinámicas asociadas y el correspondiente espectro de energías. Finalmente se harán algunas consideraciones acerca del método general y sus aplicaciones en el campo de la física nuclear.

## 2 El esquema de segunda cuantización :

Básicamente, este método se utiliza para estudiar sistemas de muchas partículas en mecánica cuántica no-relativista, para estos sistemas el problema fundamental consiste en resolver la ecuación de Schrödinger:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.2.1)$$

La función de onda  $\Psi$  representa el estado del sistema de partículas, siendo  $V$  la energía potencial (que puede incluir interacciones entre las partículas además de un potencial común a todas ellas).

La idea es cambiar el espacio de objetos con los que se trabaja. En lugar de tratar con funciones definidas en un espacio continuo de coordenadas, se representará el estado del sistema en términos de operadores de creación (bosónicos ó fermiónicos) actuando sobre un estado que se define como de "vacío". A este nuevo espacio se le conoce como 'espacio de Fock'; de manera que reemplaza al espacio de Hilbert de funciones de

estado. Cada elemento en estos espacios representa un estado del sistema que se estudia. Cada uno de estos operadores crea una partícula (bosón ó fermión) en un estado de partícula independiente bien definido. A continuación nos enfocaremos a estudiar un sistema de bosones  $p$  ( $l = 1$ ) que se encuentran bajo la acción de un potencial común  $U$  y los cuales además interactúan por pares através de un potencial  $V_{ij}$ ; así el Hamiltoniano está definido por la expresión

$$H = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{p_i^2}{2m} \right) + U_i \right] + \sum_{i < j}^n V_{ij}. \quad (1.2.2)$$

Vemos que  $H$  está formado por la suma de operadores de uno y dos cuerpos:

$$\mathcal{W} = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{p_i^2}{2m} \right) + U_i \right] = \sum_{i=1}^n W_i,$$

$$\mathcal{V} = \sum_{i < j}^n V_{ij},$$

que de acuerdo con Moshinsky [1], en segunda cuantización estos operadores toman la forma siguiente:

$$\mathcal{W} = \sum_{\rho, \rho'} \langle \rho | W_1 | \rho' \rangle b_{\rho}^{\dagger} b_{\rho'}, \quad (1.2.3.a)$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{\rho_1, \rho'_1, \rho_2, \rho'_2} \langle \rho_1; \rho_2 | V_{12} | \rho'_1; \rho'_2 \rangle b_{\rho_1}^{\dagger} b_{\rho_2}^{\dagger} b_{\rho'_1} b_{\rho'_2}, \quad (1.2.3.b)$$

donde los índices  $\rho_i, \rho'_i$  denotan el conjunto de números cuánticos que caracterizan los estados de partícula independiente. Se puede demostrar con las relaciones de conmutación generales de los operadores bosónicos  $b_{\rho}^{\dagger}$ , que los elementos de matriz de los operadores así definidos entre dos estados cualesquiera del sistema, son iguales a los obtenidos en la representación del espacio de Hilbert de funciones de onda.

### 3 Modelo de Bosones $P$

En el caso que trataremos en este capítulo, que es el de operadores bosónicos de momento angular 1, o bosones  $p$ , el Hamiltoniano puede escribirse como sigue:

$$\mathcal{H}_{\nu,1} = \sum_{q,q'} (\nu 1q | W_1 | \nu 1q') b_{1q}^\dagger b^{1q'} + \frac{1}{2} \sum_{q_1, q_2, q'_1, q'_2} (\nu 1q_1; \nu 1q_2 | V_{12} | \nu 1q'_1; \nu 1q'_2) b_{1q_1}^\dagger b_{1q_2}^\dagger b^{1q'_1} b^{1q'_2}. \quad (1.3.1)$$

Por simplicidad supondremos que los bosones p se mueven en un potencial común de oscilador armónico, caracterizándose entonces el índice  $\rho$  por  $\{\nu lm\}$ , donde  $\nu = 1$  denota al número de cuantos,  $l = 1$  el momento angular y  $m$  su proyección. De acuerdo al esquema de segunda cuantización tendremos una equivalencia con el estado correspondiente en el espacio de Fock que queda expresada por :

$$\langle \bar{r} | 11q \rangle \longleftrightarrow b_{1q}^\dagger | \emptyset \rangle.$$

El estado de vacío  $|\emptyset\rangle$  se define de la siguiente manera:  $b^{1q}|\emptyset\rangle = 0$ , para toda  $q$  y los bosones p satisfacen las reglas de conmutación siguientes:

$$[b_{1q}^\dagger, b_{1q'}^\dagger] = 0; \quad [b^{1q}, b^{1q'}] = 0; \quad [b^{1q}, b_{1q'}^\dagger] = \delta_q^{q'} \quad (1.3.2.a, b, c)$$

Es inmediato mostrar que los operadores  $C_q^{q'} = b_{1q}^\dagger b^{1q'}$ , cumplen con las relaciones de conmutación:

$$[C_q^{q'}, C_\mu^{\mu'}] = C_\mu^{\mu'} \delta_q^{q'} - C_q^{q'} \delta_\mu^{\mu'},$$

que caracterizan a un álgebra unitaria en tres dimensiones,  $U(3)$ . Utilizando las relaciones (1.3.2) es fácil ver que el Hamiltoniano (1.3.1) puede escribirse en términos de los operadores  $C_q^{q'}$ .

Cuando un operador está formado por combinaciones de los generadores de un grupo o sus potencias, y resulta que conmuta con todos los generadores de dicho grupo, entonces se dice que este operador es invariante y se le conoce como operador de Casimir. La importancia de estos operadores radica en que dada su propiedad, permiten clasificar los estados de un sistema en sub-espacios o multipletes caracterizados por determinados números cuánticos (que son los eigen-valores de los estados respecto del conjunto de los operadores de Casimir), los cuales son invariantes ante la acción de los generadores del grupo. Entonces, diremos que un Hamiltoniano posee una cierta simetría dinámica cuando sea posible escribirlo en términos de operadores de Casimir asociados a un cierto grupo de simetría <sup>1</sup> y sus subgrupos. En este caso,

será posible escribir el Hamiltoniano en forma diagonal en la base de estados definida por los multipletes asociados a estos operadores invariantes.

A continuación demostraremos que el Hamiltoniano para un sistema de  $n$  bosones  $p$  cuyas interacciones son escalares ante rotaciones ( $V_{ij}$  conmuta con cualquier operador  $O$  de rotación del espacio) puede escribirse en términos de los operadores invariantes de Casimir de la cadena de grupos:

$$U(3) \supset SO(3) \supset SO(2).$$

Para encontrar el espectro de energías del Hamiltoniano tendremos que encontrar una base de estados que porte la representación irreducible de dicha cadena en términos de los operadores bosónicos  $b_{1q}^\dagger$  definidos anteriormente.

Introduciendo el operador de número  $\mathcal{N}_p$  tenemos:

$$\mathcal{W} = \sum_{q, q'} \langle \nu 1q | W_1 | \nu 1q' \rangle b_{1q}^\dagger b^{1q'} = E_{\nu 1} \sum_q b_{1q}^\dagger b^{1q} = E_{\nu 1} \mathcal{N}_p,$$

donde  $E_{\nu 1}$  es el valor de la energía del nivel  $\nu 1$  en el espectro de una sola partícula, o energía de bosón independiente. Se puede demostrar fácilmente que el operador  $\mathcal{N}_p$  definido anteriormente, conmuta con todos los operadores  $C_q^j$ , con lo que tenemos un operador de Casimir de  $U(3)$ . Utilizando la invariancia ante rotaciones (simetría rotacional) del Hamiltoniano podemos reordenar las sumas que tenemos en la ec.(1.3.1) en términos del acoplamiento entre los vectores:  $\{|\nu 1q_1\rangle; |\nu 1q_2\rangle\}$  y  $\{|\nu 1q'_1\rangle; |\nu 1q'_2\rangle\}$  y obtener la siguiente expresión para  $\mathcal{V}$ :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{q_1, q_2, q'_1, q'_2} \sum_{J, M, J', M'} \left\{ (1, q_1; 1, q_2 | JM) (1, q'_1; 1, q'_2 | J'M') \right. \\ \left. \bullet (\nu 1JM | V_{12} | \nu 1J'M') \right\} b_{q_1}^\dagger b_{q_2}^\dagger b^{q'_1} b^{q'_2}, \quad (1.3.3)$$

con los símbolos  $\langle ; | \rangle$  denotando a los coeficientes de Clebsch-Gordan del grupo  $SU(2)$ . Dada la simetría de  $V$ , el elemento de matriz es independiente de  $M$  y  $M'$ , y además debe ser cero entre estados con distintos momentos angulares  $J$  y  $J'$ . Podemos entonces escribir, utilizando el Teorema de Wigner-Eckart para  $V_{12}$  un tensor escalar:

$$\langle \nu 1JM | V_{12} | \nu 1J'M' \rangle = \delta_{J, J'}^J \delta_{M, M'}^M \langle \nu 1J || V_{12} || \nu 1J \rangle,$$

<sup>1</sup> Esta es la definición de simetría dinámica que se maneja en el libro de Iachello y Arima [4] y que adoptaremos en este trabajo

donde  $\langle \parallel \parallel \rangle$  es el elemento de matriz reducido de  $V_{1/2}$  que depende en general de  $\nu$  y de  $J$  y que denotaremos por el símbolo  $V_{\nu 1/2}$ . Por lo tanto podemos escribir la expresión (1.3.3) como sigue:

$$\nu = \frac{1}{2} \sum_{J, M} V_{\nu 1/2} \langle \mathbf{b}^\dagger \times \mathbf{b}^\dagger \rangle_M' \langle \mathbf{b} \times \mathbf{b} \rangle^{J, M},$$

donde utilizamos las definiciones

$$\langle \mathbf{b}^\dagger \times \mathbf{b}^\dagger \rangle_M' = \sum_{q_1, q_2} (1q_1; 1q_2; JM) b_{q_1}^\dagger b_{q_2}^\dagger,$$

$$\langle \mathbf{b} \times \mathbf{b} \rangle^{J, M} = \sum_{q_1, q_2} (1q_1; 1q_2; JM) b^{q_1} b^{q_2}.$$

Para que los operadores bosónicos de aniquilación tengan las mismas propiedades de transformación ante rotaciones que los operadores de creación, introducimos los operadores definidos como sigue:  $b_{\ell, -\mu} = (-1)^\mu b_{\ell, \mu}$ . De esta manera podemos acoplar los tensores  $\langle \mathbf{b}^\dagger \times \mathbf{b}^\dagger \rangle_M'$  y  $\langle \bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{b}} \rangle_M'$ , en la forma siguiente:

$$\nu = \frac{1}{2} \sum_J \sqrt{2J+1} V_{\nu 1/2} \left[ \langle \mathbf{b}^\dagger \times \mathbf{b}^\dagger \rangle_M' \times \langle \bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{b}} \rangle_M' \right]_0^0, \quad (1.3.4)$$

reflejando el acoplamiento a momento angular total cero el hecho de que  $V$  debe ser un escalar ante rotaciones.

Ahora vamos a introducir una notación que ayudará a simplificar los resultados y al mismo tiempo escribir  $\nu$  en términos de operadores de Casimir; así definimos los operadores  $\mathcal{G}_L$  y  $\mathcal{F}_\lambda$ :

$$\mathcal{G}_L = \left[ \langle \mathbf{b}^\dagger \times \mathbf{b}^\dagger \rangle^L \times \langle \bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{b}} \rangle^L \right]_0^0, \quad (1.3.5.a)$$

$$\mathcal{F}_\lambda = \left[ \langle \mathbf{b}^\dagger \times \bar{\mathbf{b}} \rangle^\lambda \times \langle \mathbf{b}^\dagger \times \bar{\mathbf{b}} \rangle^\lambda \right]_0^0, \quad (1.3.5.b)$$

con  $L = 0, 1, 2$  y  $\lambda = 0, 1, 2$ . Los operadores anteriores están relacionados a través de un coeficiente de reacomplamiento de momentos angulares, un símbolo 9-J, y tomando en cuenta las reglas de conmutación entre  $\mathbf{b}^\dagger$  y  $\mathbf{b}$  podemos establecer la expresión:

$$\mathcal{G}_L = \sum_{\lambda=0,2} (2L+1)(2\lambda+1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ 1 & 1 & L \\ \lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix} \mathcal{F}_\lambda - (-1)^L \frac{\sqrt{2L+1}}{3} \mathcal{N}_p. \quad (1.3.6)$$

Como  $\mathcal{G}_1 = 0$ , porque únicamente son diferentes de cero los acoplamientos entre dos bosones de creación o de aniquilación a momentos angulares pares, del sistema de ecuaciones (1.3.6) se puede despejar  $\mathcal{F}_2$  en función de  $\mathcal{F}_0$  y  $\mathcal{F}_1$  y determinar las relaciones

$$\mathcal{G}_0 = \frac{1}{3} \mathcal{N}_p + \mathcal{F}_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} \mathcal{F}_1,$$

y

$$\mathcal{G}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \left( -\frac{4}{3} \mathcal{N}_p + 2 \mathcal{F}_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathcal{F}_1 \right).$$

Los operadores de Casimir de la cadena  $U(3) \supset SO(3)$  están dados en términos de  $\mathcal{F}_\lambda$  por :

$$\mathcal{F}_0 = \frac{\mathcal{N}_p^2}{3} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_1 = -\frac{\mathcal{L}^2}{2\sqrt{3}}. \quad (1.3.7a, b)$$

La obtención de estas ecuaciones se hace en el apéndice 1 de este capítulo.

Substituyendo las ecuaciones (1.3.7) en las expresiones para  $\mathcal{G}_0$  y  $\mathcal{G}_2$  y éstas en el Hamiltoniano obtenemos

$$H_{\nu 1} = E_{\nu 1} \mathcal{N}_p + \frac{1}{2} V_{\nu 10} \left\{ \frac{\mathcal{N}_p(\mathcal{N}_p + 1)}{3} - \frac{\mathcal{L}^2}{3} \right\} + \frac{1}{2} V_{\nu 12} \left\{ \frac{2}{3} \mathcal{N}_p^2 - \frac{4}{3} \mathcal{N}_p + \frac{\mathcal{L}^2}{3} \right\}. \quad (1.3.8)$$

Hemos logrado escribir el operador  $H_{\nu 1}$  en términos de los operadores de Casimir de la cadena  $U(3) \supset SO(3)$ . Esto nos permite inmediatamente encontrar el espectro de energías de un sistema de  $N$  bosones  $p$  en interacción, cuya forma explícita depende de los valores seleccionados para las interacciones de uno ( $E_{\nu 1}$ ) y dos bosones ( $V_{\nu 10}$ ,  $V_{\nu 12}$ ). Lo anterior únicamente requiere conocer la regla de ramificación de  $U(3)$  a  $SO(3)$ ; que en este caso corresponde a la bien conocida relación entre el número de cuántos y el momento angular de un oscilador armónico en tres dimensiones.

La ecuación (1.3.8) puede reescribirse de manera que se exhiban claramente los operadores de Casimir de la cadena, con lo que la energía quedaría en términos de coeficientes asociados de manera unívoca a cada uno de ellos

$$H_{\nu 1} = \kappa_1 \mathcal{N}_p + \kappa_2 \mathcal{N}_p^2 + \kappa_3 \mathcal{L}^2 \quad (1.3.9)$$

Los parámetros  $\kappa_i$  están relacionados a los elementos de matriz de uno y dos bosones de acuerdo a

$$\kappa_1 = E_{\nu 1} + \frac{1}{6}V_{\nu 10} - \frac{2}{3}V_{\nu 12}, \quad (1.3.10a)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{6}V_{\nu 10} + \frac{1}{3}V_{\nu 12}, \quad (1.3.10b)$$

$$\kappa_3 = +\frac{1}{6}(V_{\nu 12} - V_{\nu 10}), \quad (1.3.10c)$$

Si con nuestros bosones p buscamos describir el espectro de núcleos par-par, de acuerdo con el modelo se tendrían que ajustar los parámetros  $\kappa_i$  para lograr reproducir la información experimental disponible. En principio, y de acuerdo a como se aplicó originalmente el modelo, solamente en este punto podríamos decir si los bosones p son o no una buena aproximación al problema. En las figuras 1.1 - 1.3 ilustramos los espectros de energía que se obtendrían para distintas elecciones de los parámetros  $V_{\nu 10}$  y  $V_{\nu 12}$ . En la fig. 1.1 vemos claramente cómo la energía del estado base del sistema de bosones describe una parábola de concavidad negativa respecto del número de bosones; si nos fijamos solamente en el espectro de excitación, se ve también muy claramente que es el de un rotor rígido cuyo momento de inercia estaría asociado a la constante  $\kappa_3$ . Estos además se superponen para N par e impar separadamente. Nuestro modelo entonces limita los estados excitados accesibles, lo cual sería un resultado susceptible de verificar experimentalmente. La flecha que aparece en la figura junto a la etiqueta 'momento angular' indica el sentido en el que crecen los momentos angulares del sistema, para cada N, a partir del valor correspondiente al estado base, que según las reglas que hemos encontrado, es cero para N par y uno para N impar.

En la fig. 1.2 se han cambiado los parámetros, de manera que los espectros de excitación son de tipo rotor rígido pero invertido: el estado de máxima energía resulta ser el de menor momento angular, al contrario de lo que se observa en los espectros de la física nuclear. También observamos que los espectros de excitación pares e impares se superponen separadamente. La figura 1.3 repite básicamente las características de la figura 1.1 pero ahora, como los valores de los parámetros se han escogido pequeños, se ve que la interacción no alcanza a reducir por debajo de cero la energía de 'amarre' (energía del estado base).

Ahora determinaremos las correspondientes eigenfunciones, las cuales son necesarias si se quieren evaluar valores esperados de observables de interés, como por ejemplo: probabilidades de transición y momentos magnéticos.

Deseamos construir los estados base de la cadena de grupos :

$$U(3) \supset SO(3) \supset SO(2) .$$

La base está caracterizada por los números cuánticos asociados a los operadores de Casimir de cada uno de los grupos que conforman la cadena, a saber :

$N \rightarrow$  Número de partículas ( bosones con  $\ell = 1$  ) . .

$L \rightarrow$  Momento angular total del sistema .

$M \rightarrow$  Proyección del momento angular .

De tal manera que el estado está definido por el ket  $|NLM\rangle$ , el que debe satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p |NLM\rangle &= N |NLM\rangle, \\ \mathcal{L}^2 |NLM\rangle &= L(L+1) |NLM\rangle, \\ \mathcal{L}_z |NLM\rangle &= M |NLM\rangle. \end{aligned}$$

Los estados que buscamos son polinomios  $\mathcal{P}$  en los operadores  $b_{-1}^\dagger, b_{10}^\dagger, b_{11}^\dagger$  actuando sobre el estado de vacío definido anteriormente

$$|NLM\rangle = \mathcal{P}_{NLM}(b_{-1}^\dagger, b_{10}^\dagger, b_{11}^\dagger) |0\rangle,$$

donde claramente el número  $N$  será el grado del polinomio  $\mathcal{P}_{NLM}$ .

Siguiendo el procedimiento usual de construcción de estados que son base de las representaciones irreducibles de cadenas de grupos [ 2 , 3 ], buscamos primero el estado de *máximo peso*, que denotaremos como  $\mathcal{P}_{NL}|0\rangle$ ; al mismo tiempo encontraremos la regla que nos permite identificar los valores permitidos de  $L$  para una  $N$  dada. El polinomio de máximo peso debe satisfacer las siguientes ecuaciones :

$$\mathcal{L}_+ \mathcal{P}_{NL}|0\rangle = 0 \quad (1.3.11a)$$

$$\mathcal{L}_z \mathcal{P}_{NL}|0\rangle = L \mathcal{P}_{NL}|0\rangle \quad (1.3.11b)$$

$$\mathcal{N}_p \mathcal{P}_{NL}|0\rangle = N \mathcal{P}_{NL}|0\rangle \quad (1.3.11c)$$

Para resolver estas ecuaciones primero escribimos los operadores  $\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_z, \mathcal{L}_-$ , y  $\mathcal{N}_p$  de manera explícita en términos de  $b^\dagger$  y  $b$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p &= b_{-1}^\dagger b_{-1} + b_{10}^\dagger b_{10} + b_{11}^\dagger b_{11}, \\ \mathcal{L}_+ &= -b_{10}^\dagger b_{-1} - b_{11}^\dagger b_{10}, \\ \mathcal{L}_z &= b_{11}^\dagger b_{11} - b_{-1}^\dagger b_{-1}, \\ \mathcal{L}_- &= b_{-1}^\dagger b_{10} + b_{10}^\dagger b_{11}, \end{aligned}$$

# BOSONES INTERACTUANTES

$$E_\nu = 1$$

$$V_{\nu 10} = -0.3$$

$$V_{\nu 12} = -0.1$$

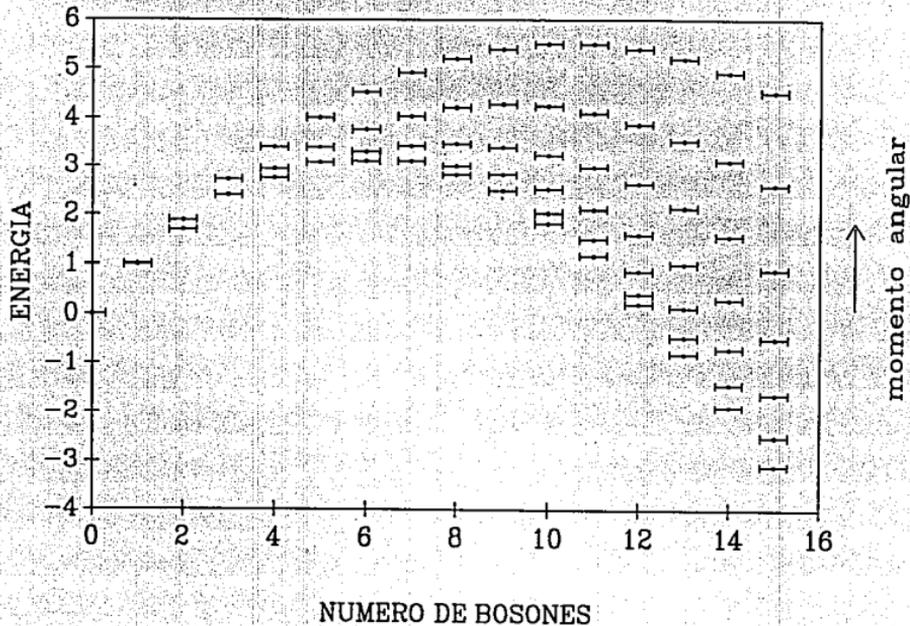


FIGURA 1.1

BOSONES INTERACTUANTES

$$E_\nu = 1$$

$$V_{\nu 10} = -0.01$$

$$V_{\nu 12} = -0.3$$

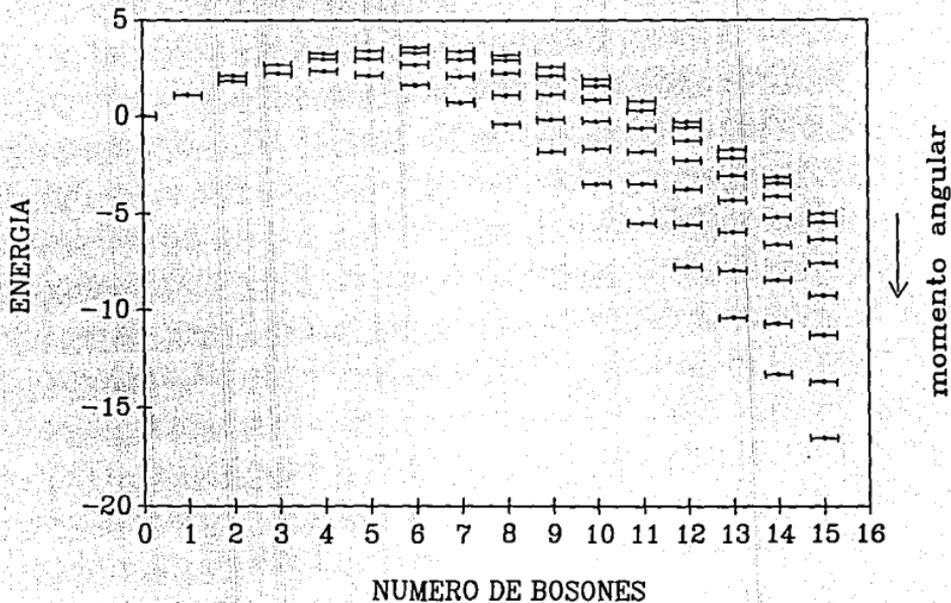


FIGURA 1.2

# BOSONES INTERACTUANTES

$$E_\nu = 1$$

$$V_{\nu 10} = -0.1$$

$$V_{\nu 12} = -0.03$$

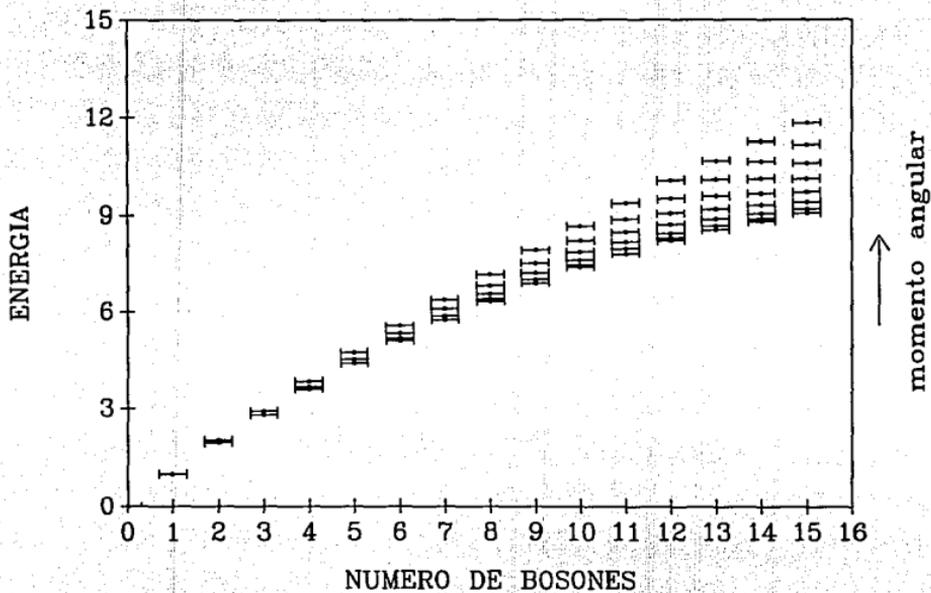


FIGURA 1.3

donde hemos desarrollado la ecuación (1.2.3a) sustituyendo los operadores que nos interesan en lugar de  $\mathcal{M}$  y hemos evaluado los elementos de matriz correspondientes utilizando el teorema de Wigner-Eckart. Para realizar las manipulaciones algebraicas en forma simple, dadas las relaciones de conmutación (1.3.2), podemos hacer la identificación

$$b^{\dagger m} \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial b_{\dagger m}^{\dagger}}$$

Para  $N = 1$  obtenemos el polinomio de máximo peso,  $P_{11} = b_{11}^{\dagger}$  que satisface las ecuaciones (1.3.11) con  $L = 1$ . Si  $N = 2$  se tienen combinaciones de productos  $b_{\dagger m}^{\dagger} b_{\dagger m'}^{\dagger}$ , que pueden expresarse en términos de los polinomios de grado 2 que denotamos como sigue:  $[b^{\dagger} \times b^{\dagger}]_M^{\dagger}$ , donde de acuerdo a (1.3.2)  $J$  esta restringida a tomar los valores 0 y 2. Así, estableciendo la correspondencia  $[b^{\dagger} \times b^{\dagger}]_M^{\dagger} \rightarrow (J, M)$  tenemos

$$\begin{aligned} (2, 2) &\sim b_{11}^{\dagger} b_{11}^{\dagger}, \\ (2, 1) &\sim b_{11}^{\dagger} b_{10}^{\dagger}, \\ (2, 0) &\sim b_{10}^{\dagger 2} + 2 b_{11}^{\dagger} b_{1-1}^{\dagger}, \\ (2, -1) &\sim b_{1-1}^{\dagger} b_{10}^{\dagger}, \\ (2, -2) &\sim b_{1-1}^{\dagger} b_{1-1}^{\dagger}, \\ (0, 0) &\sim b_{10}^{\dagger 2} - 2 b_{11}^{\dagger} b_{1-1}^{\dagger}. \end{aligned}$$

Todas las expresiones anteriores satisfacen la ecuación (1.3.11c) con  $N = 2$ , aunque únicamente las combinaciones  $(0, 0)$  y  $(2, 2)$  cumplen las relaciones (1.3.11a,b) con  $L = 0$  y  $L = 2$ , respectivamente\*. Entonces los polinomios de máximo peso para  $N = 2$  están dados por:

$$P_{20} \sim (0, 0); P_{22} \sim (2, 2),$$

que son los dos únicos valores posibles de  $L$  para un sistema de dos bosones p. Sin embargo es importante señalar que la combinación  $(2, 2)$  se puede generar con el producto  $b_{11}^{\dagger} b_{11}^{\dagger}$ .

En general el polinomio de máximo peso de  $N$  bosones p lo podemos escribir

\* Se puede verificar que:  $(2, 0|0, 0) = \langle 0 | (b_{10}^{\dagger 2} + 2b_{11}^{\dagger} b_{1-1}^{\dagger}) (b_{10}^{\dagger 2} - 2b_{11}^{\dagger} b_{1-1}^{\dagger}) | 0 \rangle = 0$

$$\mathbf{P}_N = (b_{11}^\dagger)^N P\left(\frac{(0,0)}{(b_{11}^\dagger)^2}, \frac{b_{10}^\dagger}{b_{11}^\dagger}\right) |0\rangle, \quad (1.3.12)$$

ya que es directo mostrar que este polinomio cumple la relación (1.3.11c) tomando en cuenta que

$$\mathcal{N}_p = \sum_{q=-1,0,1} b_{1q}^\dagger \frac{\partial}{\partial b_{1q}^\dagger}$$

Explícitamente, primero se obtiene que  $\mathcal{N}_p (b_{11}^\dagger)^N = N (b_{11}^\dagger)^{N-1}$  y después que:

$$\mathcal{N}_p P(x, y) = \sum_q b_{1q}^\dagger \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b_{1q}^\dagger} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b_{1q}^\dagger} \right\}, \quad (1.3.13)$$

donde se definieron  $x = \frac{(0,0)}{(b_{11}^\dagger)^2}$  e  $y = \frac{b_{10}^\dagger}{b_{11}^\dagger}$ . Efectuando las derivadas de  $x$  e  $y$  con respecto a las variables  $b_{1q}^\dagger$  y substituyendo el resultado obtenido en (1.3.13) se concluye que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p P(x, y) &= \frac{\partial P}{\partial x} \left\{ b_{11}^\dagger \frac{2}{(b_{11}^\dagger)^2} (b_{1-1}^\dagger - \frac{(b_{10}^\dagger)^2}{b_{11}^\dagger}) + b_{10}^\dagger \frac{2b_{10}^\dagger}{(b_{11}^\dagger)^2} - b_{1-1}^\dagger \frac{2}{b_{11}^\dagger} \right\} + \\ &+ \frac{\partial P}{\partial y} \left\{ -b_{11}^\dagger \frac{b_{10}^\dagger}{(b_{11}^\dagger)^2} + \frac{b_{10}^\dagger}{b_{11}^\dagger} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto hemos demostrado que  $\mathbf{P}_N$  es un polinomio homogéneo de grado  $N$ , ésto es,

$$\mathcal{N}_p \mathbf{P}_N = N \mathbf{P}_N + (b_{11}^\dagger)^N \mathcal{N}_p P(x, y) = N \mathbf{P}_N.$$

Ahora veremos si cumple la ecuación (1.3.11a) :

$$\left\{ b_{10}^\dagger \frac{\partial}{\partial b_{1-1}^\dagger} + b_{11}^\dagger \frac{\partial}{\partial b_{10}^\dagger} \right\} (b_{11}^\dagger)^N P(x, y) = 0,$$

donde la forma explícita de  $\mathcal{L}_+$  fue utilizada. Realizando las derivadas en la expresión anterior y simplificando se obtiene  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ . Por lo tanto hemos mostrado que  $P$  sólo puede depender de  $x$ . Entonces podemos proponer la forma siguiente para el polinomio de máximo peso :

$$\mathbf{P}_N = \bar{A}_{n_1 n_2} (b_{11}^\dagger)^{n_1} (0,0)^{n_2}.$$

Es inmediato encontrar el grado del polinomio  $N = n_1 + 2n_2$ . Para determinar su momento angular hacemos notar que  $\mathcal{L}_0 b_{11}^\dagger = b_{11}^\dagger$ , y que  $\mathcal{L}_0 (0,0) = 0$ , implicando entonces

$$\mathcal{L}_0 \mathbf{P}_N = n_1 \mathbf{P}_N.$$

y así podemos escribir :

$$\mathbf{P}_{NL} = \bar{A}_{NL} (b_{11}^\dagger)^L (0,0)^{\frac{N-L}{2}},$$

con  $\bar{A}_{NL}$  un factor de normalización. Recordando que  $(0,0) = \sum_q b_q^\dagger b^q = (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)$ , podemos expresar el estado de máximo peso de un sistema de  $N$  bosones p como sigue

$$|NLL\rangle = \bar{A}_{NL} (b_{11}^\dagger)^L (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^{\frac{N-L}{2}} |0\rangle. \quad (1.3.14)$$

Es importante señalar que las relaciones anteriores indican que  $N-L$  debe ser un número par.

Para obtener una proyección arbitraria o sea el estado  $|NLM\rangle$  podemos utilizar el operador  $\mathcal{L}_-$  y actuar con él  $L-M$  veces sobre (1.2.14). Primero encontraremos la acción de  $\mathcal{L}_-$  sobre  $(\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_- (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger) &= \left\{ b_{1-1}^\dagger \frac{\partial}{\partial b_{10}^\dagger} + b_{10}^\dagger \frac{\partial}{\partial b_{11}^\dagger} \right\} \{ (b_{10}^\dagger)^2 - 2b_{11}^\dagger b_{1-1}^\dagger \} \\ &= 2b_{1-1}^\dagger b_{10}^\dagger - 2b_{10}^\dagger b_{1-1}^\dagger = 0, \end{aligned}$$

que da cero, como se esperaba ya que está formado por un producto escalar. Entonces al actuar con  $\mathcal{L}_-$  sobre  $\mathbf{P}_{NL} |0\rangle$  sólo afectamos al término  $(b_{11}^\dagger)^L$ . Para determinar la acción de  $\mathcal{L}_-$  sobre  $(b_{11}^\dagger)^L$ , calculamos los conmutadores :

$$\left[ \mathcal{L}_0, (b_{11}^\dagger)^L \right] = L (b_{11}^\dagger)^L; \quad \left[ \mathcal{L}_+, (b_{11}^\dagger)^L \right] = 0.$$

De tal manera que  $(b_{11}^\dagger)^L$  es un tensor esférico de orden  $L$  y proyección  $L$ , que en forma análoga a la componente  $x_{11}$  del vector de posición es proporcional al armónico esférico sólido  $Y_L^L(\mathbf{r})$ , esto es

$$(b_{11}^\dagger)^L = \sqrt{\frac{4\pi 2^L}{(2L+1)}} L! Y_L^L(\mathbf{b}^\dagger).$$

Esto nos lleva a escribir el estado general de la siguiente manera

$$| NLM \rangle = A_{NL} (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^{\frac{N-k}{2}} Y_M^L(\mathbf{b}^\dagger) | 0 \rangle ,$$

donde sólo nos falta encontrar el factor de normalización  $A_{NL}$ . Este coeficiente real está determinado por la expresión

$$A_{NL}^{-2} = \langle 0 | Y_L^L(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{\frac{N-k}{2}} (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^{\frac{N-k}{2}} Y_L^L | 0 \rangle , \quad (1.3.15)$$

ya que el factor  $A_{NL}$  evidentemente no depende de  $M$  puesto que si  $| NLL \rangle$  es un estado ya normalizado, el operador  $L_-$  da por resultado estados también normalizados si lo multiplicamos por el factor

$$\left\{ \frac{2(L+M)!}{(2L)!(L-M)!} \right\}^{1/2} .$$

A continuación damos los resultados siguientes [10]

$$\begin{aligned} \text{i) } (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^K &= (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^K (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) + \\ &+ 4K(\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^{K-1} (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}) + \\ &+ 2K(2K+1)(\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^{K-1}, \\ \text{ii) } (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}) Y_L^L(\mathbf{b}^\dagger) &= L Y_L^L(\mathbf{b}^\dagger) , \\ \text{iii) } (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) Y_L^L(\mathbf{b}^\dagger) &= 0 , \end{aligned}$$

donde la última ecuación se debe a que  $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})$  es el operador de Laplace en este espacio de Fock y precisamente el que su acción sobre la  $Y_L^L$  de cero lo define como un polinomio armónico. Substituyendo estas expresiones en (1.3.15) obtenemos

$$A_{NL}^{-2} = (N-L)(N+L+1) \langle 0 | Y_L^L(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{\frac{N-k}{2}-1} (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^{\frac{N-k}{2}-1} Y_L^L | 0 \rangle . \quad (1.3.16)$$

Si definimos la función  $g(K,L)$  como sigue

$$g(K,L) = \langle 0 | Y_L^L(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^K (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^K Y_L^L | 0 \rangle ,$$

se obtiene de la ecuación (1.3.16) la siguiente relación de recurrencia

$$g(K, L) = 2K(2K + 2L + 1)g(K - 1, L),$$

que puede resolverse en forma inmediata

$$g(K, L) = (2K)!! \frac{\{2(K+L)+1\}!!}{(2L+1)!!} g(0, L).$$

La función  $g(0, L)$  se calcula utilizando la forma explícita del armónico esférico sólido, esto es

$$g(0, L) = \frac{(2L+1)!}{4\pi} \frac{1}{2^L (L!)^2} \langle 0 | (b_{11})^L (b_{11}^\dagger)^L | 0 \rangle = \frac{(2L+1)!!}{4\pi}.$$

Así, podemos escribir los eigenestados normalizados del sistema como sigue :

$$| NLM \rangle = \left\{ \frac{4\pi}{(N-L)!!(N+L+1)!!} \right\}^{1/2} (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{N-L} Y_M^L(b^\dagger) | 0 \rangle. \quad (1.3.17)$$

Del coeficiente de normalización para nuestros estados, y de la expresión para  $(b_{11}^\dagger)^L$  podemos calcular el coeficiente  $\tilde{A}_{NL}$  :

$$\tilde{A}_{NL} = \frac{1}{L!} \left\{ \frac{(2L+1)!}{(N-L)!!(N+L+1)!!2^L} \right\}^{1/2}$$

Con lo cual hemos completado nuestro problema para el caso de bosones p. Hemos encontrado que se cumplen las siguientes reglas entre los números cuánticos N, L, y M

$$L = N, N-2, N-4, \dots, \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ es par} \\ 1 & \text{si } N \text{ es impar} \end{cases}$$

$$M = -L, -L+1, \dots, L-1, L.$$

Podemos entender la restricción impuesta sobre L en términos de N demostrando que cuando acoplamos N bosones con momento angular l a un estado colectivo con

momento angular  $L$ , la paridad de  $L$  debe ser igual a la de  $N$ . Debido a que los operadores bosónicos conmutan entre sí, y por las simetrías de los coeficientes de acoplamiento, cuando tenemos estados de bosones  $p$  con momentos  $L_1$  y  $L_2$  de paridad opuesta, sólo pueden acoplarse a un estado con  $L$  impar; y si tienen la misma paridad sólo pueden acoplarse a  $L$  par. Ahora procedemos por inducción; supongamos que para  $N = K$  bosones  $p$ , el momento angular total  $L$  debe tener la misma paridad de  $K$ . Consideremos  $K+1$  bosones  $p$ . Acoplamos cualesquiera 2 y obtenemos  $K$  momentos angulares; uno de estos momentos debe ser par (0,2) ya que es el resultado de acoplar dos bosones  $p$ . Si los bosones restantes se acoplan a momento impar, sabemos que el momento total debe ser impar. Pero esos  $K-1$  restantes se acoplan a momento impar si  $K-1$  es impar (por hipótesis de inducción). Entonces  $K+1$  debe ser también impar; así que si  $K+1$  bosones se acoplan a  $L$  impar, entonces  $K+1$  es impar. El argumento es análogo si los  $K-1$  bosones que restan se acoplan a momento par; entonces  $L$  debe ser par, pero por hipótesis  $K-1$  debe ser también par y entonces  $K+1$  es par. De aquí se sigue el resultado.

#### 4 Transiciones y momentos cuadrupolares

Una vez que hemos determinado las funciones de onda para estados de  $N$  bosones  $p$ , ya podemos calcular elementos de matriz y transiciones de los operadores físicamente relevantes. Especial importancia tienen, sobre todo en la física nuclear, la evaluación de las transiciones electromagnéticas. Las transiciones electromagnéticas están caracterizadas por operadores multipolares que se transforman como tensores pertenecientes a una representación definida  $L$  de  $SO(3)$  [4]. El conocer las propiedades de transformación ante rotaciones de los operadores de transición es útil en dos sentidos:

- i) Permite obtener reglas de selección y
- ii) En ciertos casos permite calcular explícitamente sus elementos de matriz entre dos estados definidos del espectro de energía del sistema físico bajo estudio.

Ilustrando estos dos puntos calcularemos en esta sección las transiciones y momentos cuadrupolares que caracterizan al sistema de bosones  $p$ . En general, para un sistema de bosones de momentos angulares  $l, l'$ , podemos escribir al operador multipolar de orden  $L$  en la forma siguiente: [4]

$$T_{\mu}^{(L)} = t_0^{(0)} \delta_{L0} + \sum_{l'l''} t_{l'l''}^{(L)} [b_l^\dagger \times \bar{b}_{l''}]_{\mu}^{(L)} + \dots, \quad (1.4.1)$$

donde se ha cortado la serie hasta términos que incluyen un sólo cuerpo (un bosón de creación y uno de aniquilación). La razón para esto último es simplificar los cálculos, pero de manera general podemos construir tensores de rango arbitrario que pertenezcan a la misma representación  $L$  de  $SO(3)$ . Estos términos de orden superior que se han suprimido se incluyen en cálculos más detallados que buscan una mejor aproximación a las transiciones de espectros nucleares. Entonces esperamos que los coeficientes  $t_{\mu}^{(L)}$ ,  $t_{\mu}^{(L)'} , etc.$  decrezcan en magnitud de tal forma que al truncar la serie no se pierda información relevante. En la ref. [4], sec. 1.4.4, se hace un breve análisis de estos términos de orden superior, para el modelo de bosones  $s$  y  $d$  en interacción.

El operador de transiciones cuadrupolares corresponde a la representación  $L=2$ , y que es proporcional al operador cuadrupolar (ver apéndice 2.2) que además es un generador de  $U(3)$ : [5]

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{(2)} &= \alpha Q_{2\mu} \\ &= \alpha \sqrt{\frac{5}{3}} \sum_{q'q''} \langle 1 q' ; 2 \mu | 1 q'' \rangle b_{q'}^{\dagger} \bar{b}_{q''} \\ &= \alpha [b^{\dagger} \times \bar{b}]_{\mu}^2 \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

donde los operadores  $b_{q'}^{\dagger}$  denotan a los bosones  $p$  que hemos utilizado a lo largo de este capítulo, pero que por simplicidad hemos eliminado el índice del momento angular.

Ahora bien, por el teorema de Wigner-Eckart los elementos de matriz del operador cuadrupolar están dados por:

$$\langle NL'M' | Q_{2\mu} | NLM \rangle = \langle L M ; 2 \mu | L' M' \rangle \langle NL' || Q_2 || NL \rangle.$$

donde  $\langle NL' || Q_2 || NL \rangle$  es el elemento de matriz reducido del tensor  $Q_2$ . Nótese que en todas estas transiciones el número de partículas  $N$  se conserva.<sup>1</sup> Por otro lado, conociendo la estructura de nuestra base de estados  $| NLM \rangle$ , vemos que las transiciones cuadrupolares  $L \rightarrow L'$  con  $L' = L \pm 1$  quedan prohibidas, ya que la paridad de  $N$  y  $L$  debe ser la misma, y como el número de partículas se conserva, entonces debemos tener:  $L' = L \pm 2$ . Por lo tanto únicamente necesitamos evaluar los elementos de matriz reducidos siguientes:

$$i) L' = L - 2 ; \langle NL - 2 || Q_2 || NL \rangle$$

<sup>1</sup> Se pueden definir operadores de 'transferencia' para describir las reacciones nucleares en las cuales un par de nucleones se suma o se separa del núcleo (este par de nucleones representaría en nuestro modelo a un bosón).

$$\text{ii) } L' = L; \langle NL \parallel Q_2 \parallel NL \rangle$$

$$\text{iii) } L' = L + 2; \langle NL + 2 \parallel Q_2 \parallel NL \rangle$$

Primero calculamos la acción del operador  $b^q$ , con  $q = 1, 0, -1$ , sobre los estados  $|NLM\rangle$ . Aquí no vamos a encontrar una fórmula general, sino que vamos a encontrar la acción sobre los estados que convienen para encontrar los elementos de matriz reducidos. Utilizando la forma expl' icita de los estados (1.4.15) para el caso  $|NLL\rangle$  y substituyendo la forma del armónico esférico sólido se tiene,

$$|NLL\rangle = \bar{A}_{NL}(b^\dagger_1)^L (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{N-L}{2}} |0\rangle,$$

con:

$$\bar{A}_{NL} \equiv \frac{1}{L!} \left\{ \frac{(2L+1)!}{(N-L)!!(N+L+1)!!2^L} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Tomando en cuenta la relación de conmutación:  $[b^{-1}, b^\dagger \cdot b^\dagger] = -2b^\dagger_1$  puede encontrarse en forma inmediata la expresión siguiente :

$$\begin{aligned} [b^{-1}, (b^\dagger \cdot b^\dagger)^K] |0\rangle &= \sum_{r=0}^{K-1} (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{K-r-1} [b^{-1}, b^\dagger \cdot b^\dagger] (b^\dagger \cdot b^\dagger)^r |0\rangle \\ &= -2K b^\dagger_1 (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{K-1} |0\rangle. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Calculemos primero  $b^{-1} |NLL\rangle$ : Como en su forma covariante  $b^{-1} = -b_1$ , el único elemento de matriz diferente de cero debe ser de la forma:

$$\begin{aligned} &\langle N-1, L+1, L+1 | b^{-1} |NLL\rangle \\ &= \bar{A}_{NL} \bar{A}_{N-1, L+1} \langle 0 | (b \cdot b)^{\frac{N-L}{2}-1} (b^\dagger)^{L+1} (b^\dagger_1)^L (b^{-1}) (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{N-L}{2}} |0\rangle, \end{aligned}$$

donde hemos aprovechado la conmutatividad entre  $b^{-1}$  y  $b^\dagger_1$ . Utilizando (1.4.3) tenemos:

$$\begin{aligned} &\langle N-1, L+1, L+1 | b^{-1} |NLL\rangle \\ &= (L-N) \bar{A}_{NL} \bar{A}_{N-1, L+1} \langle 0 | (b \cdot b)^{\frac{N-L}{2}-1} (b^\dagger)^{L+1} (b^\dagger_1)^{L+1} (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{N-L}{2}-1} |0\rangle, \\ &= - \left\{ \frac{(N-L)(L+1)}{(2L+3)} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

en el último paso se identifico el miembro izquierdo con el coeficiente de normalización para el estado:  $|N-1, L+1, L+1\rangle$  y se substituyeron los valores de los coeficientes  $\tilde{A}_{NL}$  correspondientes. Obteniendose finalmente que:

$$b^{-1} |NLL\rangle = -\left\{\frac{(N-L)(L+1)}{(2L+3)}\right\}^{1/2} |N-1, L+1, L+1\rangle. \quad (1.4.4)$$

Mediante el teorema de Wigner-Eckart podemos encontrar el elemento de matriz reducido para el operador  $b$ :

$$\begin{aligned} \langle N-1, L+1 || b || N L \rangle &= \frac{\{(N-L)\frac{(L+1)}{(2L+3)}\}^{\frac{1}{2}}}{\langle L L; 1 1 | L+1 L+1 \rangle} \\ &= \left\{\frac{(N-L)(L+1)}{(2L+3)}\right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

donde en la última igualdad se substituyó el valor del coeficiente de Clebsch-Gordan.

Análogamente a como se encontró (1.4.3), se obtiene que:

$$[b^{\dagger}, (b^{\dagger} \cdot b^{\dagger})^K] |0\rangle = -2K b^{\dagger}_{-1} (b^{\dagger} \cdot b^{\dagger})^{K-1} |0\rangle \quad (1.4.6)$$

Por otro lado, de las propiedades de transformación ante rotaciones de  $b^{\dagger}$  sabemos que la acción de  $b^{\dagger}$  sobre el estado  $|NLL\rangle$  debe ser una combinación lineal de los estados  $|N-1, L-1, L-1\rangle$  y  $|N-1, L+1, L-1\rangle$  ya que  $N$  y  $L$  tienen la misma paridad y no se puede construir el estado  $|N-1, L, L-1\rangle$ . De esta combinación, nos interesa el coeficiente para el primer estado, i. e.

$$\begin{aligned} &\langle N-1, L-1, L-1 | b^{\dagger} | NLL \rangle \\ &= \tilde{A}_{NL} \tilde{A}_{N-1, L-1} (0 | (b \cdot b)^{\frac{N-L}{2}} (b^{\dagger})^{L-1} (b^{\dagger}) (b^{\dagger})^L (b^{\dagger} \cdot b^{\dagger})^{\frac{N-L}{2}} | 0) \end{aligned}$$

En el segundo miembro reconocemos el factor de normalización del estado  $|NLL\rangle$ :

$$\langle N-1, L-1, L-1 | b^{\dagger} | NLL \rangle = \frac{\tilde{A}_{N-1, L-1}}{\tilde{A}_{NL}} = \left\{\frac{L}{(2L+1)}(N+L+1)\right\}^{1/2} \quad (1.4.7)$$

Utilizando nuevamente el teorema de Wigner-Eckart encontramos el elemento de matriz reducido:

$$\begin{aligned} \langle N-1, L-1 || b || N L \rangle &= -\frac{\{(N+L+1)\frac{L}{(2L+1)}\}^{\frac{1}{2}}}{\langle L L; 1 -1 | L-1 L-1 \rangle} \\ &= -\left\{\frac{(N+L+1)L}{(2L-1)}\right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

donde el valor del coeficiente de Clebsch-Gordan fue usado en la última igualdad.

El operador cuadrupolar  $Q_{2-2} = b_{-1}^\dagger b^1$ , para evaluar su elemento de matriz utilizamos el conjugado hermiteano de la expresión (1.4.4), con momento angular  $L-2$ , y la relación (1.4.7); obteniéndose el resultado

$$\langle N, L-2, L-2 | Q_{2-2} | NLL \rangle = -\left\{ \frac{(L-1)}{(2L-1)(2L+1)} (N+L+1)(N-L+2) \right\}^{1/2} \quad (1.4.9)$$

Ahora es inmediato obtener el elemento de matriz reducido a partir del teorema de Wigner-Eckart y considerando que  $\langle L L; 2 -2 | L-2, L-2 \rangle = \left\{ \frac{2L-3}{2L+1} \right\}^{1/2}$ , i.e.

$$\langle N, L-2 || Q_2 || NL \rangle = -\left\{ \frac{L(L-1)}{(2L-3)(2L-1)} (N+L+1)(N-L+2) \right\}^{1/2}. \quad (1.4.10)$$

Ahora vamos a determinar  $\langle NL || Q_2 || NL \rangle$ , para esto calcularemos el elemento de matriz:  $\langle NLL | Q_{20} | NLL \rangle$ , que de acuerdo a la ecuación (1.4.2) puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \langle NLL | Q_{20} | NLL \rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \{ \langle NLL | b_{-1}^\dagger b^{-1} | NLL \rangle + \langle NLL | b_1^\dagger b^1 | NLL \rangle \\ &\quad - 2 \langle NLL | b_0^\dagger b^0 | NLL \rangle \}. \end{aligned}$$

Necesitamos la acción de  $b^q$  sobre el estado  $| NLL \rangle$ , de tal manera que:

$$b^q | NLL \rangle = \sum_{L'} (-1)^q | N-1, L', L-q \rangle \langle L L; 1 -q | L', L-q \rangle \langle N-1, L' || \mathbf{b} || NL \rangle$$

Como debe suceder que  $L' = L \pm 1$ ; conocemos los elementos de matriz reducidos (C.f. (1.4.5) y (1.4.7)) podemos calcular la acción de  $b^0$  y  $b^1$  conociendo los coeficientes:

$$\begin{aligned} \langle L L; 1 0 | L+1 L \rangle &= \sqrt{\frac{1}{L+1}}, \\ \langle L L; 1 -1 | L+1 L-1 \rangle &= \sqrt{\frac{1}{(L+1)(2L+1)}}, \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$b^1 | NLL \rangle = - \left\{ \frac{(N-L)}{(2L+3)(2L+1)} \right\}^{1/2} | N-1, L+1, L-1 \rangle \\ + \left\{ \frac{L(N+L+1)}{(2L+1)} \right\}^{1/2} | N-1, L-1, L-1 \rangle, \quad (1.4.11a)$$

$$b^0 | NLL \rangle = \left\{ \frac{(N-L)}{(2L+3)} \right\}^{1/2} | N-1, L+1, L \rangle, \quad (1.4.11b)$$

Así pues multiplicando escalarmente las expresiones (1.4.4), (1.4.11a), y (1.4.11b) con sus correspondientes expresiones hermiteano conjugadas se obtiene

$$\langle NLL | Q_{20} | NLL \rangle = \frac{L(2N+3)}{\sqrt{6}(2L+3)}.$$

Dividiendo esta expresión entre el coeficiente  $\langle L L; 2 0 | L L \rangle = \left\{ \frac{2L(2L-1)}{(2L+3)(2L+2)} \right\}^{1/2}$  se obtiene el elemento de matriz reducido diagonal del operador cuadrupolar:

$$\langle NL || Q_2 || NL \rangle = (2N+3) \left\{ \frac{L(L+1)}{\sqrt{6}(2L+3)(2L-1)} \right\}^{1/2}. \quad (1.4.12)$$

Por último, debemos calcular:  $\langle N, L+2 || Q_2 || NL \rangle$ . Nuevamente por medio de (1.4.2) se deduce que:  $Q_{22} = b_1^\dagger b^{-1}$ , por lo tanto necesitamos calcular la expresión hermiteano conjugada de (1.4.11a), con momento angular  $L+2$ , y multiplicarla escalarmente por (1.4.4); dando el resultado siguiente

$$\langle N, L+2, L+2 | Q_{22} | NLL \rangle = - \left\{ \frac{(L+1)(L+2)}{(2L+3)(2L+5)} (N+L+3)(N-L) \right\}^{1/2}.$$

En este caso el coeficiente de Clebsch-Gordan vale la unidad y entonces

$$\langle N, L+2 || Q_2 || NL \rangle = - \left\{ \frac{(L+1)(L+2)}{(2L+3)(2L+5)} (N+L+3)(N-L) \right\}^{1/2}. \quad (1.4.13)$$

Por medio de las expresiones (1.4.10), (1.4.12), y (1.4.13) podemos calcular transiciones electromagnéticas, las cuales quedan gobernadas por el factor  $B(E2)$ :

$$B(E2; L \rightarrow L') = \left\{ \frac{15}{8\pi} \right\} \left\{ \frac{2L'+1}{2L+1} \right\} |\langle N' L' || Q_2 || NL \rangle|^2, \quad (1.4.14a)$$

y momentos cuadrupolares:

$$Q_{NL} = \sqrt{6} \langle NLL | Q_{20} | NLL \rangle = \frac{L(2N+3)}{(2L+3)}. \quad (1.4.14b)$$

A continuación se ilustrará el comportamiento de los valores  $B(E2)$  y los momentos cuadrupolares como función del número de bosones. Para los decaimientos  $L \rightarrow L-2$  se observa un comportamiento peculiar respecto de  $L$  (ver figura 1.4). Mientras para los decaimientos  $L \rightarrow L+2$  (figura 1.5) la amplitud disminuye con  $L$ , en los primeros se observa un máximo para  $L$  bajos, del orden de 5 ó 6. Como es de esperar, para los decaimientos  $L \rightarrow L+2$ ,  $B(E2)$  vale cero cuando  $L = N$ . En la ref. [4], cap. 2, sec. 6, de la cual haremos mención explícita más adelante, se realiza el cálculo de los coeficientes  $B(E2 L \rightarrow L-2)$ , pero para las cadenas de grupos I, II y III (ver sec. 4 de este capítulo). Se observa gráficamente un comportamiento muy similar al que hemos obtenido aquí (c.f. la fig. 2.14 de la referencia con la fig. 1.4) especialmente para las cadenas II y III, y se aprecia claramente en ambos casos el efecto de "cut-off" a medida que  $L$  alcanza el valor máximo permitido. También mostramos una gráfica de los momentos cuadrupolares para distintos valores de  $N$  (figura 1.7). Se ve claramente el comportamiento creciente respecto a  $N$  y  $L$ , si bien se tiene un valor límite cuando  $L \rightarrow \infty$ . Este comportamiento creciente se entiende ya que a mayor  $L$  se tienen funciones más dispersas espacialmente que contribuyen en mayor medida al momento cuadrupolar.

## 5 Generalización y conclusiones

El tratamiento anterior para el caso de los bosones  $p$  puede generalizarse fácilmente [4]. Así podemos definir operadores bosónicos de creación, identificados por el conjunto de números cuánticos que caracterizan el estado de una sola partícula; a este conjunto de números lo denotaremos por  $\rho$ . Estos operadores satisfacen las propiedades siguientes:

$$b^\rho |0\rangle = 0; \quad b_\rho^\dagger = (b^\rho)^\dagger;$$

$$[b^{\rho'}, b_\rho^\dagger] = \delta_{\rho\rho'}; \quad [b_\rho^\dagger, b_{\rho'}^\dagger] = [b^\rho, b^{\rho'}] = 0.$$

La función de onda de un sistema de  $n$  partículas puede caracterizarse por los números de ocupación,  $\{n_\rho\}$ , que nos dicen cuántas veces aparece el estado de partícula independiente  $\rho$  en los  $n$  números  $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ . Obviamente, se cumple

VALORES  $B(E2; L \rightarrow L-2)$

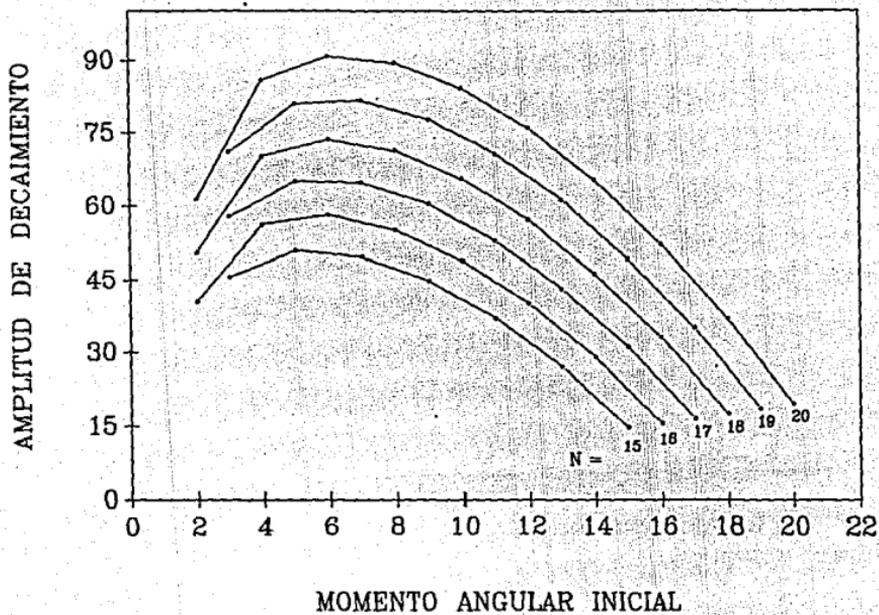


FIGURA 1.4

VALORES B ( E2 ; L  $\rightarrow$  L + 2 )

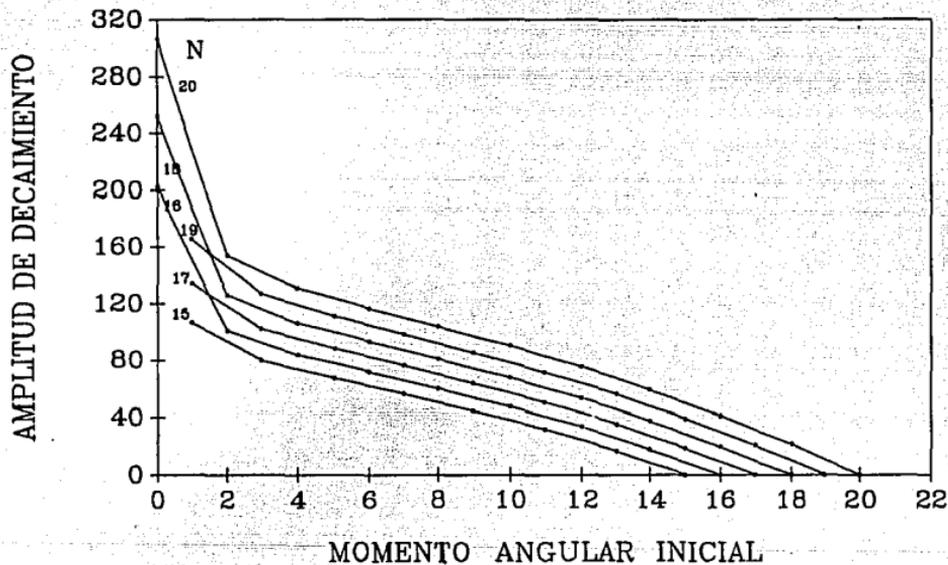


FIGURA 1.5

### MOMENTOS CUADRUPOLARES BOSONICOS

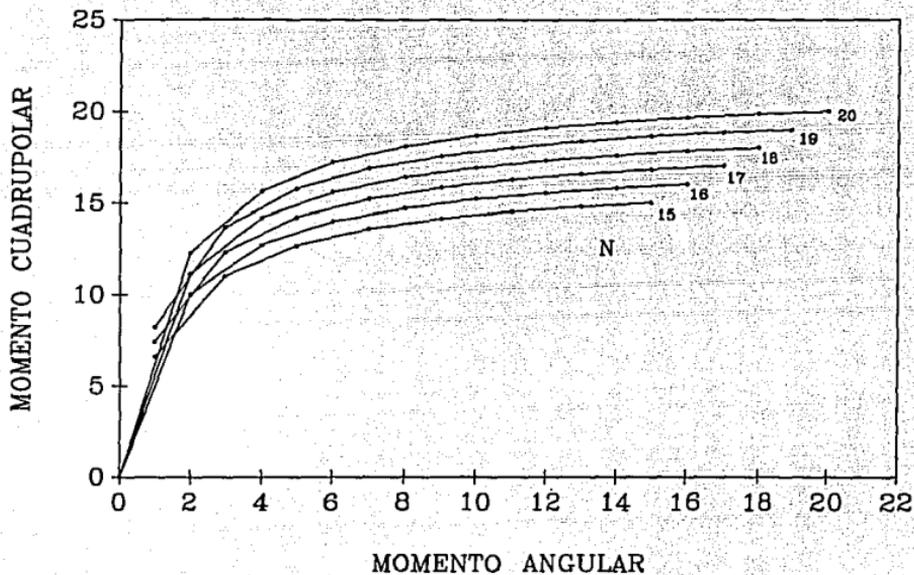


FIGURA 1.6

$$\sum_{\rho} n_{\rho} = n$$

y las funciones totalmente simétricas están descritas por la expresión

$$\Phi_{\{n_{\rho}\}} = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_{\rho}! n!}} \sum_P \varphi_{\rho_1} \cdot \varphi_{\rho_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{\rho_n},$$

donde la suma corre sobre las permutaciones  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  de los números  $(1, 2, \dots, n)$ , y  $\varphi_{\rho_i}$  son las funciones de onda en el espacio de Hilbert que definen los estados de partícula independiente  $\rho_i$ . Esta función de onda es equivalente al estado en el espacio de Fock que caracteriza a  $n$  partículas ocupando los estados  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , esto es

$$| \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_{\rho}!}} b_{\rho_1}^{\dagger} b_{\rho_2}^{\dagger} \dots b_{\rho_n}^{\dagger} | 0 \rangle.$$

Se puede comprobar, considerando las reglas de conmutación de los operadores  $b_{\rho}^{\dagger}$ , que los dos estados anteriores obedecen la estadística de Bose. La expresión del Hamiltoniano de este sistema tiene la misma forma que el descrito en las ecuaciones (1.1.3a y 3b), ésto es, con términos de uno y dos cuerpos. También se puede verificar que los elementos de matriz de estas interacciones en el espacio de Fock son iguales a los obtenidos con las funciones de onda en el espacio de Hilbert.

Ahora definimos los operadores  $C_{\eta}^{\eta'}$ :

$$C_{\eta}^{\eta'} = b_{\eta}^{\dagger} b_{\eta'}$$

Estos operadores satisfacen la siguiente regla de conmutación:

$$[ C_{\eta_1}^{\eta_1'}, C_{\eta_2}^{\eta_2'} ] = C_{\eta_1}^{\eta_1'} \delta_{\eta_2}^{\eta_2'} - C_{\eta_2}^{\eta_2'} \delta_{\eta_1}^{\eta_1'}.$$

De esta manera, vemos que el conjunto de operadores  $C_{\eta}^{\eta'}$  son los generadores infinitesimales de un grupo unitario. Para determinar este grupo se hace una restricción al tipo de problemas con que se va a trabajar, esta restricción es que el número de estados de partícula independiente con los que contaremos debe ser finito\*. Es decir, los índices  $\eta, \eta'$  sólo tomarán  $r$  valores diferentes y entonces el grupo de simetría asociado será desde luego  $U(r)$ . En el problema que tratamos en la sección anterior,

\* Moshinsky . Group Theory and . . . op. cit.

nos restringimos a estados con  $\nu$  fija y  $\ell = 1$ , lo cual dió lugar a que el grupo más grande de simetría fuera  $U(3)$ . En términos de los generadores de  $U(r)$ , los operadores  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{V}$  en segunda cuantización quedarían como sigue:

$$\mathcal{W} = \sum_{\eta\eta'} (\eta | W_1 | \eta') C_{\eta}^{\eta'} ;$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{\eta_1\eta_2\eta'_1\eta'_2} (\eta_1\eta_2 | V_{12} | \eta'_1\eta'_2) \{ C_{\eta_1}^{\eta'_1} C_{\eta_2}^{\eta'_2} - \delta_{\eta_1}^{\eta'_1} C_{\eta_2}^{\eta'_2} \} .$$

De acuerdo con el procedimiento de la sección anterior, el paso siguiente es expresar a  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  en términos de los operadores invariantes de Casimir de una cierta cadena de grupos:

$$U(r) \supset U(r-1) \cdots \supset \cdots SO(3) \supset \cdots SO(2) .$$

Casi siempre en los problemas físicos de sistemas de muchos cuerpos se espera que el Hamiltoniano sea invariante ante rotaciones por eso esperamos tener los grupos  $SO(3) \supset SO(2)$  en cualquier cadena que formemos a partir de  $U(r)$ .

El siguiente problema consiste en hallar la base de estados para la representación irreducible de dichas cadenas de grupos y encontrar todos los números cuánticos que aparecerán asociados a los operadores de Casimir de cada grupo, así como las reglas de selección que deben satisfacer.

Si el operador  $\mathcal{V}$  es invariante ante rotaciones, conviene trabajar con estados caracterizados por:  $\eta \rightarrow \nu\ell\mu$ , donde  $\ell$  denota al momento angular y  $\mu$  su proyección. El número cuántico  $\nu$  es un índice extra que permite definir los estados de bosón independiente en forma completa. Entonces podemos acoplar momentos angulares como lo hicimos anteriormente; y si nos restringimos a un espacio de configuración de un sólo estado; es decir, dejamos  $\nu$  y  $\ell$  fijos permitiendo sólo variar  $m$ . Obtendremos para  $H$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{W} + \mathcal{V} \\ &= E_{\nu\ell} N_{\ell} + \frac{1}{2} \sum_{JM} V_{12J} [ \mathbf{b}_{\ell}^{\dagger} \times \mathbf{b}_{\ell}^{\dagger} ]_{M}^J [ \mathbf{b}_{\ell} \times \mathbf{b}_{\ell} ]_{M}^J \\ &= E_{\nu\ell} N_{\ell} + \frac{1}{2} \sum_{JM} V_{12J} \sqrt{2J+1} (JM; J-M; 00) [ \mathbf{b}_{\ell}^{\dagger} \times \mathbf{b}_{\ell}^{\dagger} ]_{M}^J [ \bar{\mathbf{b}}_{\ell} \times \bar{\mathbf{b}}_{\ell} ]_{-M}^J \\ &= E_{\nu\ell} N_{\ell} + \frac{1}{2} \sum_J V_{12J} \sqrt{2J+1} [ [ \mathbf{b}_{\ell}^{\dagger} \times \mathbf{b}_{\ell}^{\dagger} ]^J \times [ \bar{\mathbf{b}}_{\ell} \times \bar{\mathbf{b}}_{\ell} ]^J ]_0^0 \end{aligned}$$

Ahora reacoplamos el operador  $G_J$  para obtener  $H$  en términos de operadores  $F_j$  y escribir el número máximo de términos en el Hamiltoniano en función de los Casimires de las cadenas de grupos. Tenemos :

$$\begin{aligned} \left[ [b_\ell^\dagger \times b_\ell^\dagger]^{j'} \times [b_\ell \times b_\ell]^{j'} \right]_0^0 &= \sum_{j'} (2j' + 1)(2J + 1) \left\{ \begin{matrix} \ell & \ell & J \\ j' & j' & 0 \end{matrix} \right\} \\ \left[ [b_\ell^\dagger \times b_\ell]^{j'} \times [b_\ell^\dagger \times b_\ell]^{j'} \right]_0^0 &= \frac{(2J + 1)^{1/2}}{(2\ell + 1)} (-1)^J \mathcal{N}_\ell \end{aligned}$$

Nos queda entonces :

$$\begin{aligned} H &= E_{\nu\ell} \mathcal{N}_\ell + \frac{1}{2} \sum_{JM} V_{12J} \frac{(2J + 1)^{1/2}}{(2\ell + 1)} (-1)^J \mathcal{N}_\ell + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j'} V_{12J} (2J + 1)^{3/2} (2j' + 1) \left\{ \begin{matrix} \ell & \ell & J \\ j' & j' & 0 \end{matrix} \right\} F_{j'} \end{aligned}$$

Finalmente, se busca obtener una relación entre los operadores  $F_j$  y los invariantes de Casimir de todas las cadenas contenidas en  $U(r)$  y que contengan a  $SO(3)$ . En el problema resuelto anteriormente sólo tenemos una cadena <sup>1</sup> :

$$U(3) \supset SO(3) \supset SO(2) .$$

De manera que los operadores  $F_j$  nos quedaron en términos de los Casimires de dicha cadena y el Hamiltoniano total resultó ser diagonal de manera directa en la base de estados del oscilador armónico.

En general esto no sucede así, de modo que  $H$  queda en términos de los Casimires de distintas cadenas; escogiendo como base de estados una de las correspondientes a cada cadena, queda el problema de diagonalizar las matrices de los Casimires restantes en esta base.

Una de las aplicaciones importantes del Modelo de Bosones Interactuantes es en el campo de la Física Nuclear. Fué introducido por Iachello y Arima <sup>2</sup> para describir estados colectivos de baja energía en núcleos medianos y pesados [4].

<sup>1</sup> En la cadena podríamos incluir el grupo  $SU(3)$ , o podríamos reemplazar  $SO(3)$  por  $SU(2)$ . En el primer caso, no estaremos introduciendo ningún número cuántico nuevo, ya que los Casimires de  $SU(n)$  quedan expresados en términos de los de  $U(n)$ . Y en el segundo caso, resulta que los números cuánticos asociados a  $SU(2)$  no tendrían una interpretación física clara. Obtenida la base para la cadena, para encontrar el momento angular de los estados habría que diagonalizar el operador  $L^2$  en esta base.

<sup>2</sup> Bonatsos ; Interacting Boson Models for the nuclear structure . Pág.8 1988, Clarendon Press, Oxford.

En el modelo de IBM-1, como se le llamó, se consideran solamente bosones  $b_{\ell m}^{\dagger}$  con  $\ell = 0$  (monopolares) y  $\ell = 2$  (cuadrupolares).

Se tiene entonces un álgebra de  $SU(6)$  involucrada, la cual se puede descomponer en las tres cadenas siguientes: [6]

$$I) U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) .$$

$$II) U(6) \supset U(3) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2) .$$

$$III) U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) .$$

En este caso, el Hamiltoniano más general queda escrito en términos de los operadores de Casimir de todos los subgrupos:

$$H = \epsilon C_{1U5} + \alpha C_{2U5} + \beta C_{2O5} + \gamma C_{2O3} + \delta C_{2SU3} + \eta C_{2O6} .$$

Donde los sufijos indican que  $C$  es el Casimir del orden indicado en el subgrupo correspondiente.

En condiciones particulares puede ocurrir que  $H$  quede en términos de los Casimires de una sola cadena. En estos casos  $H$  será una matriz diagonal, y diremos que posee una *simetría dinámica*.

Cuando  $\eta = \delta = 0$  entonces se puede diagonalizar  $H$  en la base para la cadena I. Este caso límite corresponde a núcleos esféricos.

En el límite  $\epsilon = \alpha = \delta = 0$  se tiene una simetría dinámica dada por la cadena III; la cual corresponde a un núcleo deforme cuya energía no depende de la variable que contribuye a la excentricidad (prolata u oblata).

Para  $\epsilon = \alpha = \eta = \beta = 0$  se tiene la simetría dinámica correspondiente a la cadena II; en este caso, se describe un sistema prolato con simetría axial.

El modelo IBM-1 tiene limitaciones que pueden superarse dentro del marco general del modelo de bosones interactuantes. La idea del IBM-1 ( y de cualquier teoría de bosones interactuantes en física nuclear ) consiste en asumir que Protones y Neutrones ( que son fermiones ) en las capas de valencia, se acoplan por pares que pueden ser tratados como bosones. En el IBM-1 se consideran solamente bosones formados por pares Protón-Protón y Neutrón-Neutrón, ya que se encuentra que en los núcleos pesados

e intermedios los protones de valencia ocupan capas distintas de las que ocupan los neutrones de valencia †. Por tanto en estos núcleos el acoplamiento Protón-Neutrón resulta poco probable; lo cual no ocurre para los núcleos ligeros, en los que deben incluirse estos apareamientos ( Modelos IBM-3, IBM-4 ).

También se encuentra que la descripción de ciertas propiedades de los núcleos requiere de la introducción de bosones con momento angular 4 ( llamados bosones g ); a este modelo se le llama sgd-IBM.

Todos estos modelos sólo pueden describir estados con paridad positiva. Para describir estados con paridad negativa se deben introducir bosones con paridad negativa, como serían por ejemplo los bosones p.

Para describir núcleos impares se tienen que incluir fermiones en el modelo, y aquí se debe considerar si se distingue o no entre protones y neutrones.

En el siguiente capítulo trataremos el problema de la segunda cuantización para el caso de fermiones. El número cuántico importante será el momento angular total J del sistema (momento orbital más espín); es decir, en las cadenas de grupos debe quedar siempre incluido  $SU(2)$ .

## 6 Apéndice 1

### Operadores $\mathcal{N}_p^2$ y $\mathcal{L}^2$ en segunda cuantización

En este apéndice vamos a obtener las expresiones para los operadores de Casimir de la cadena  $U(3) \supset SO(3)$  en términos de operadores bosónicos de creación  $b_{1q}^\dagger$  (para bosones p : q = 1, 0, -1). Comenzamos con el operador 'de peso'  $\mathcal{N}_p^2$

Sabemos que, en términos de operadores bosónicos de creación:  $\mathcal{N}_p = \sum_m b_{1m}^\dagger b_{1m}$ .

Por lo tanto:

$$\mathcal{N}_p^2 = \sum_{mm'} b_{1m}^\dagger b_{1m} b_{1m'}^\dagger b_{1m'} = \sum_{mm'} (-1)^{m+m'} b_{1m}^\dagger b_{1-m} b_{1m'}^\dagger b_{1-m'}$$

† El término 'valencia' se toma de la física atómica, asociando configuraciones de capa cerrada a los números mágicos

y considerando que:  $\langle 1 q; 1 -q | 0 0 \rangle = (-1)^{1-q} \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p^2 &= 3 \sum_{mm'} \langle 1 m; 1 -m | 0 0 \rangle \langle 1 m'; 1 -m' | 0 0 \rangle b_{1m}^\dagger b_{1m'} b_{1m} b_{1m'}^\dagger = \\ &= 3 [ b_\ell^\dagger \times \bar{b}_\ell ]_0^0 \cdot [ b_\ell^\dagger \times \bar{b}_\ell ]_0^0 = 3 [ [ b_\ell^\dagger \times \bar{b}_\ell ]^0 \times [ b_\ell^\dagger \times \bar{b}_\ell ]^0 ]_0^0 = \\ &= 3\sqrt{0} \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Encontremos ahora la forma del Hamiltoniano  $H_0$  de un oscilador armónico en tres dimensiones en el esquema de segunda cuantización. Sabemos que:  $H_0 = \sum_{m=1,0,-1} \eta_m \xi^m + 3/2$  donde:

$$\eta_m = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_m - ip_m)$$

$$\xi_m = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_m + ip_m)$$

$$\xi^m = (-1)^m \xi_{-m} .$$

con  $x_m$  y  $p_m$  las componentes 'esféricas' de los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{p}$ , y  $(-1)^m \delta_{m,-m'}$  la métrica plana en dichas coordenadas. De esto vemos que el Hamiltoniano de un oscilador armónico en tres dimensiones presenta una simetría dinámica de tipo  $U(3)$  [*M. Moshinsky*]. Entonces tenemos que la forma en segunda cuantización del Hamiltoniano de oscilador armónico queda:

$$H_0 = \sum_{mm'} \langle \nu \ell m | \sum_q \eta_q \xi^q + 3/2 | \nu \ell m' \rangle \delta_{\ell m}^\dagger b_{\ell m}^\dagger b_{\ell m'}$$

utilizando el teorema de Wigner-Eckart tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \nu \ell m | \sum_q \eta_q \xi^q | \nu \ell m' \rangle &= \langle \nu \ell || \sum_q \eta_q \xi^q || \nu \ell \rangle \langle \ell m; 0 0 | \ell m' \rangle = \\ &= \nu \langle \ell m; 0 0 | \ell m' \rangle = \nu \delta_{mm'} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_0 = (\nu + 3/2)N_p.$$

Ahora veamos  $\mathcal{L}^2$ . Sabemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q &= \sum_{mm'} \langle \nu \ell m | \mathcal{L}_q | \nu \ell m' \rangle b_{\ell m}^\dagger b_{\ell m'} = \\ &= \langle \nu \ell || \mathcal{L} || \nu \ell \rangle \sum_{mm'} \langle \ell m'; 1 q | \ell m \rangle b_{\ell m}^\dagger b_{\ell m'} \end{aligned}$$

Conociendo que:  $\langle \ell m'; 1 q | \ell m \rangle = (-1)^{\ell+m'} \left\{ \frac{2\ell+1}{3} \right\}^{1/2} \langle \ell m; \ell -m' | 1 q \rangle$ .

Entonces:

$$\mathcal{L}_q = \langle \nu \ell || \mathcal{L} || \nu \ell \rangle \left\{ \frac{2\ell+1}{3} \right\}^{1/2} \sum_{mm'} (-1)^\ell \langle \ell m; \ell -m' | 1 q \rangle b_{\ell m}^\dagger b_{\ell -m'}$$

Finalmente:  $\mathcal{L}_q = (-1)^\ell \langle \nu \ell || \mathcal{L} || \nu \ell \rangle \left\{ \frac{2\ell+1}{3} \right\}^{1/2} [b_\ell^\dagger \times \tilde{b}_\ell]_q^1$ .

Donde estamos considerando forzosamente interacciones en un sólo nivel.

Entonces, para calcular  $\mathcal{L}^2$  tomamos en cuenta la métrica para coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &= \sum_q (-1)^q \mathcal{L}_q \mathcal{L}_{-q} = \\ &= \langle \nu \ell || \mathcal{L} || \nu \ell \rangle^2 \left\{ \frac{2\ell+1}{3} \right\} \sum_q (-1)^q [b_\ell^\dagger \times \tilde{b}_\ell]_q^1 \cdot [b_\ell^\dagger \times \tilde{b}_\ell]_{-q}^1 \end{aligned}$$

Para calcular  $\langle \nu \ell || \mathcal{L} || \nu \ell \rangle$  utilizamos:

$$\langle \nu \ell \ell | \mathcal{L}_0 | \nu \ell \ell \rangle = \ell$$

$$\Rightarrow \langle \nu \ell || \mathcal{L} || \nu \ell \rangle \langle \ell \ell; 1 0 | \ell \ell \rangle = \ell$$

$$\Rightarrow \langle \nu \ell || \mathcal{L} || \nu \ell \rangle = \ell \left\{ \frac{\ell+1}{\ell} \right\}^{1/2} = \{\ell(\ell+1)\}^{1/2}$$

También utilizamos:  $\langle 1 q; 1 -q | 0 0 \rangle = -(-1)^q \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Entonces:

$$\mathcal{L}^2 = -\ell(\ell+1) \frac{(2\ell+1)}{\sqrt{3}} [ [ \mathbf{b}_\ell^\dagger \times \bar{\mathbf{b}}_\ell ]^1 \times [ \mathbf{b}_\ell^\dagger \times \bar{\mathbf{b}}_\ell ]^1 ]_0^0$$

Con  $\ell = 1$  (caso de bosones p) tenemos:

$$\mathcal{L}^2 = -2\sqrt{3}\mathcal{F}_1 \quad (1.6.2)$$

Las fórmulas (1.6.1) y (1.6.2) son las que deseábamos encontrar.

## 7 REFERENCIAS

- [ 1 ] M.Moshinsky; Group Theory and... Cap.2 .
- [ 2 ] M.Moshinsky; " Bases for Irreducible Representations of Unitary Groups and some applications" . Journal of Mathematical Physics Vol. 4 N 9 Sept. 1963 .
- [ 3 ] Elpidio Chacón, notas de clase; Representaciones Irreducibles de Grupos Unitarios Compactos .
- [ 4 ] F.Iachello , A.Arima; The Interacting Boson Model Volumen I ; Cambridge University Press, Gran Bretaña 1987 . Capítulo 2, sección 6 .
- [ 5 ] M.Moshinsky; Group Th. and... Cap. 6, ec. 6.11 .
- [ 6 ] Bonatsos; Interacting Boson Models for the nuclear structure  
Clarendon Press, 1988 .
- [ 7 ] Igal Talmi; "Shell Model description of the interacting bosons" ; en  
Interacting Bosons in Nuclear Physics editado por F. Iachello como parte de la serie: "Ettore Majorana International Series" Vol. I, Plenum Press, New York, 1979 .

[ 8 ] "Proceedings of the workshop on **Bosons In Nuclei**", Drexel USA , 28-29 January 1983 . Editors D.H. Feng, S. Pittel, M. Vallieres, ver artículos: "Microscopic Aspects of the Interacting Boson Model" de S. Pittel, y "On the microscopic picture of the Interacting Boson Model" de M. Vallieres, D.H. Feng, R. Gilmore

[ 9 ] A. Klein, E.R. Marshalek; "Boson realizations of Lie algebras with applications to nuclear physics" ; Reviews of Modern Physics, Vol. 63, No. 2 April 1991, p. 375 .

[ 10 ] M.Moshinsky; The harmonic oscillator in Modern Physics:

from Atoms to Quarks Gordon and Breach Science Publishers, Escocia 1969 .

Capítulo I , sección 8 .

## **Capítulo 2**

---

## SISTEMAS DE FERMIONES INTERACTUANTES

### 1 Introducción

El objetivo del presente capítulo es estudiar un sistema de fermiones con momento angular orbital  $\ell = 1$  (fermiones  $p$ ) y espín  $1/2$  que se mueven en un potencial central con una interacción residual entre ellos. Para ésto, utilizaremos las ideas y conceptos introducidos en el capítulo anterior al tratar sistemas de muchos bosones.

Como hemos dicho en el capítulo anterior, para aplicar el método algebraico en el estudio de los núcleos impares, es necesario introducir fermiones en el modelo. La teoría existe y se le llama Modelo de Fermiones y Bosones Interactuantes (IBFM) [10]. La imagen microscópica concreta de lo que se hará en este capítulo será un núcleo que, teniendo capa cerrada de protones o neutrones, tenga a su vez de tres a ocho neutrones o protones respectivamente. Entonces, considerando que la capa cerrada es inerte, dos de las partículas restantes cerrarán una capa  $1s$  y las demás pueden ser consideradas como fermiones  $p$  de espín  $1/2$  que, como el modelo de capas nos dice, no pueden ser más de seis ya que entonces cierran la segunda capa.

En el IBM se manejan bosones con momento angular  $0$  y  $2$ ; al introducir fermiones en el modelo, como ya no se tienen apareamientos, en principio los operadores fermiónicos pueden tener asociado cualquier momento angular  $J$  correspondiente a alguno de los orbitales permitidos para los estados de partícula independiente. Desde el punto de vista de la teoría de grupos el problema se complica puesto que de alguna manera deben unificarse las cadenas obtenidas para los bosones y las de los fermiones dentro de un álgebra más general. En este capítulo vamos a tratar exclusivamente con operadores fermiónicos sin analizar el problema completo (Modelo de Bosones y Fermiones Interactuantes).

Definimos primero las relaciones algebraicas que deben cumplir los operadores fermiónicos de creación y aniquilación,

$$\{ a_p^\dagger, a^{p'} \} = \delta_p^{p'}; \{ a_p^\dagger, a_q^\dagger \} = 0; \{ a^p, a^{p'} \} = 0, \quad (2.1.1a, b, c)$$

donde  $\{A, B\} \equiv AB + BA$ . El significado físico del operador  $a_{\rho}^{\dagger}$  es el mismo que para el caso bosónico, sólo que ahora creamos un fermión en el estado  $\rho$  y las ecuaciones (2.1) permiten establecer la antisimetría de la función de estado ante el intercambio de cualesquiera dos partículas.

El estado de vacío  $|0\rangle$  se define de tal manera que:  $a^{\rho}|0\rangle = 0$  para todo valor del índice  $\rho$ , el cual especifica los estados de fermión independiente accesibles al sistema. Como tenemos fermiones, ahora los estados  $\rho$  incluyen el espín de las partículas:

$$\rho \rightarrow \mu\sigma,$$

donde  $\mu: \nu\ell m$  denota la parte orbital y  $\sigma: sm_s$  la parte parte espinorial.

Definimos los operadores:

$$C_{\mu}^{\mu'} = \sum_{\sigma} a_{\mu\sigma}^{\dagger} a^{\mu'\sigma} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell; \\ \sigma = -s, -s + 1, \dots, s; \end{array} \right.$$

los cuales, utilizando las relaciones (2.1), satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[C_{\mu_1}^{\mu'_1}, C_{\mu_2}^{\mu'_2}] = \delta_{\mu_2}^{\mu'_1} C_{\mu_1}^{\mu'_2} - \delta_{\mu_1}^{\mu'_2} C_{\mu_2}^{\mu'_1}.$$

Por lo tanto los operadores  $C_{\mu}^{\mu'}$  satisfacen el álgebra de los generadores de un grupo  $U(2\ell + 1)$ .

Por otro lado, podemos también definir los operadores:

$$C_{\sigma}^{\sigma'} = \sum_{\mu} a_{\mu\sigma}^{\dagger} a^{\mu\sigma'},$$

encontrando de manera análoga que:

$$[C_{\sigma}^{\sigma'}, C_{\sigma'}^{\sigma''}] = \delta_{\sigma'}^{\sigma''} C_{\sigma}^{\sigma'} - \delta_{\sigma}^{\sigma''} C_{\sigma'}^{\sigma''}.$$

Es decir,  $C_{\sigma}^{\sigma'}$  son los generadores de un grupo  $U(2s + 1)$ , donde  $s$  es el espín intrínseco de los fermiones que estamos considerando. Estos operadores  $C_{\mu}^{\mu'}$  y  $C_{\sigma}^{\sigma'}$  en realidad son combinaciones de los operadores siguientes:

$$G_{\mu}^{\mu'\sigma'} = a_{\mu\sigma}^{\dagger} a^{\mu\sigma'},$$

los cuales también satisfacen las relaciones de conmutación de un álgebra unitaria, si para cada valor de  $\nu$  (el índice de 'capa' en el Hamiltoniano común) existe un sólo momento angular orbital, de  $\mathcal{N} = (2s + 1)(2\ell + 1)$  dimensiones, es decir  $U(\mathcal{N})$ .

Entonces para un sistema de fermiones que tienen momento angular orbital  $\ell$  y espín  $s$ , se tiene asociada la siguiente estructura algebraica :

$$U(\mathcal{N}) \supset U(2\ell + 1) \otimes U(2s + 1),$$

cada uno de estos grupos toma en cuenta distintas propiedades de una misma partícula : momentos angular orbital y de espín. Por esta razón, el símbolo  $\otimes$  representa un producto *interno* entre grupos. Esto implica, entre otras cosas, que al considerar las representaciones de cada uno de los grupos, éstas deben contener el mismo número de partículas.

Como estamos considerando fermiones, la representación del grupo  $U(\mathcal{N})$  al que pertenece la función de onda del sistema de  $N$  partículas debe ser la totalmente antisimétrica, es decir  $[1^N]$ . Entre corchetes se indica la partición correspondiente, que de manera única denota a una representación irreducible de un grupo unitario y que se le conoce como *diagrama de Young*. Estos diagramas incluyen un número de cajas igual al rango de la representación, colocándose ordenadas en columnas y renglones, tantas en cada renglón como el correspondiente elemento de la partición.

## 2 Modelo de Fermiones p

De la teoría de grupos (ver Hamermesh sec. 7-13) sabemos que el producto interno de dos representaciones  $[\lambda]$  y  $[\mu]$  da lugar a la representación  $[1^N]$  si y sólo si:  $[\mu] = [\bar{\lambda}]$ , es decir, las dos representaciones son conjugadas.

Nuestro problema, como mencionamos antes, será estudiar sistemas de fermiones con espín  $s = \frac{1}{2}$  y momento angular  $\ell = 1$ . La estructura de grupos correspondiente es:  $U(6) \supset U(3) \otimes U(2)$ . Por lo tanto el número de partículas que podemos considerar en nuestros estados debe ser  $N \leq 6$  debido a que tendremos una función totalmente antisimétrica con los seis estados distintos disponibles para caracterizar las propiedades de cada partícula.

En general los subgrupos que se deben considerar dependen del tipo de Hamiltoniano utilizado, en nuestro caso tomaremos una interacción residual que tenga simetría esférica y además sea independiente del espín. Por lo tanto, nos interesará conocer las representaciones de  $SO(3)$ , (es decir, conocer los momentos angulares que tendrán las funciones de onda) contenidas en el grupo  $U(3)$ ; y del grupo  $U(2)$  las representaciones que contiene de  $SU(2)$  que indican el espín total. Finalmente, podemos acoplar los

momentos  $L$  y  $S$  para tener funciones con momento angular total  $J$  definido; aunque éste no aparece en el Hamiltoniano considerado. Entonces, la cadena de grupos a considerar será la siguiente

$$\begin{array}{rcccl}
 U(6) \supset & U(3) & \otimes & U(2) & \\
 & & \cup & & \\
 & SO(3) & \otimes & SU(2) & (2.2.1) \\
 & & \cup & & \\
 & & & SU(2) & 
 \end{array}$$

A continuación escribiremos, para cada número  $N$  de partículas considerado, todas las posibles representaciones de los grupos que aparecen en (2.2.1) y que nos permitirán etiquetar un conjunto completo de funciones de onda.

Num. de partículas	Tabla 1		
	Rep. $U(3)$	Rep. $U(2)$	$S$
1	{1} $\leftrightarrow$ $\square$	$\square$	1/2
2	{2} $\leftrightarrow$ $\square\square$	$\square$ $\square$	0
	{11} $\leftrightarrow$ $\square$ $\square$	$\square\square$	1
3	{21} $\leftrightarrow$ $\square\square$ $\square$	$\square\square$ $\square$	1/2
	{1 <sup>3</sup> } $\leftrightarrow$ $\square$ $\square$ $\square$	$\square\square\square$	3/2

4	{2 <sup>2</sup> } ↔	$\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \end{array}$	$\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \end{array}$	0
	{211} ↔	$\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \\ \square & \end{array}$	$\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \end{array}$	1
5	{221} ↔	$\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \end{array}$	$\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \end{array}$	1/2
6	{222} ↔	$\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{array}$	$\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{array}$	0

Dado el número de partículas,  $N$ ; las representaciones de  $U(2)$  están determinadas por las particiones  $[h]$  tales que

$$h_1 + h_2 = N, \quad (2.2.2a)$$

además, es bien conocido que las representaciones  $S$  de  $SU(2)$  contenidas en  $U(2)$  se obtienen de la expresión

$$S = \frac{1}{2}(h_1 - h_2). \quad (2.2.2b)$$

La condición  $[h] \times [\bar{h}] = [1^N]$  impone una restricción sobre las representaciones  $[\bar{h}]$  de  $U(3)$  a considerar, ya que  $[\bar{h}]$  deberá ser una representación posible para el grupo  $U(2)$ , y esto implica que  $[\bar{h}]$  no puede tener más de dos índices  $h_1$  y  $h_2$ . Como  $[\bar{h}]$  es la representación conjugada de  $[h]$  es inmediato encontrar que:

$$[\bar{h}] = [2^{h_2}, 1^{h_1-h_2}] = [2^{\frac{N}{2}-S}, 1^{2S}],$$

donde para obtener la última igualdad se usaron las expresiones (2.2.2).

Ahora el problema es: dada la representación  $[\bar{h}]$  de  $U(3)$ , encontrar las representaciones de  $SO(3)$  contenidas en ella. De acuerdo con Hamermesh (sec. 10-7), utilizando los diagramas de Young, se pueden obtener las representaciones de  $SO(n)$  contenidas en una cierta representación  $[h]$  de  $U(n)$  seleccionando todos los diagramas  $[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\nu]$  tales que:

$$[h_1 h_2 \dots h_n] \text{ está contenido en : } [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\nu] \times \underbrace{[2] \times \dots \times [2]}_{s \text{ veces}},$$

con  $h_1 + \dots + h_n = r$  ;  $\mu_1 + \dots + \mu_\nu = \nu$  ;  $2s + \nu = r$  . y en donde  $\times$  representa un producto 'externo' entre grupos (como se ve, se está multiplicando un tensor de rango  $\nu$  con  $s$  tensores de rango 2 pertenecientes al mismo grupo  $U_n$  pero que portan la representación  $[2]$  ). Por otro lado, debemos considerar que las representaciones de  $SO(n)$  contenidas en  $U(n)$  son tales que en el diagrama de Young correspondiente la suma del número de cajas en la primera y segunda columnas debe ser menor o igual a  $n$  . De lo contrario, el tensor asociado resulta ser idénticamente nulo (Hamermesh 10-6) . Asimismo, se debe tener en cuenta que las representaciones de  $SO(n)$  con  $a$  cajas en la primera columna son equivalentes a aquellas con  $n-a$  cajas en la primera columna y el mismo número de cajas en las columnas restantes.

En base a los criterios anteriormente descritos,\* podemos escribir la siguiente tabla con las representaciones de  $SO(3)$  contenidas en  $U(3)$  :

\* Para una revisión detallada ver Hamermesh, cap.10 .

Tabla 2

$U(3)$ $(h_1 h_2 h_3)$	$\supset$ $\leftrightarrow$	$SO(3)$ $\ell$
$\square$	$\leftrightarrow$	$\square \ell = 1$
$\square \square$	$\leftrightarrow$	$\begin{cases} \cdot \ell = 0 \\ \square \square \ell = 2 \end{cases}$
$\square$ $\square$	$\leftrightarrow$	$\square \sim \square \ell = 1$
$\square \square$ $\square$	$\leftrightarrow$	$\begin{cases} \square \ell = 1 \\ \square \square \sim \square \square \ell = 2 \end{cases}$
$\square$ $\square$ $\square$	$\leftrightarrow$	$\square \sim \cdot \ell = 0$
$\square \square$ $\square \square$	$\leftrightarrow$	$\begin{cases} \cdot \ell = 0 \\ \square \square \ell = 2 \end{cases}$
$\square \square$ $\square$ $\square$	$\leftrightarrow$	$\square \sim \square \ell = 1$
$\square \square$ $\square \square$ $\square$	$\leftrightarrow$	$\square \ell = 1$
$\square \square$ $\square \square$ $\square \square$	$\leftrightarrow$	$\ell = 0$

En general, se debe esperar que en la descomposición:  $U_{(2\ell+1)} \supset SO_{(2\ell+1)}$  aparezcan dos o más veces una misma representación de  $SO_{(2\ell+1)}$ . En estos casos se requiere para clasificar las funciones de onda de un índice extra llamado de multiplicidad que cuenta el número de veces que aparece dicha representación; este índice no tiene un sentido físico directo, *no está asociado a un observable del sistema*. Sin embargo, esto no sucede en el problema que vamos a estudiar. Los números con los que quedará clasificado nuestro estado serán entonces:

$$|[1^N], [h], [\bar{h}], L, S, J, M\rangle, \quad (2.2.3)$$

donde  $[1^N]$  es la representación totalmente antisimétrica de  $U(6)$ ,  $L$  y  $S$  denotan a los momentos angulares orbital y de espín totales, respectivamente, del sistema de  $N$  fermiones.

En forma análoga al capítulo anterior, escribimos nuestro Hamiltoniano en segunda cuantización en términos de operadores fermiónicos:

$$H = E_{\nu\ell} \sum_{\mu\sigma} a_{\mu\sigma}^\dagger a^{\mu\sigma} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mu_1\mu_2\mu_2'\sigma\sigma'} \langle \nu\ell\mu_1; \nu\ell\mu_2 | V_{12} | \nu\ell\mu_1'; \nu\ell\mu_2' \rangle a_{\mu_2\sigma}^\dagger a_{\mu_1\sigma'}^\dagger a^{\mu_1\sigma'} a^{\mu_2\sigma'}$$

en donde se consideró una interacción  $V_{12}$  independiente del espín. Como hicimos anteriormente, suponemos que los fermiones se encuentran en un solo nivel  $\nu = \ell = 1$ . Lo que debemos hacer entonces es escribir este Hamiltoniano en términos de los operadores de Casimir de la cadena de grupos (2.2.1), es decir

$$U(6) \supset U(3) \times U(2) \leftrightarrow \mathcal{N}_p,$$

$$SO(3) \leftrightarrow \mathcal{L}^2,$$

$$SU(2) \leftrightarrow \mathcal{S}^2,$$

$$SU_2(J) \leftrightarrow (\mathcal{L} + \mathcal{S})^2.$$

Siguiendo el procedimiento indicado en el capítulo anterior, a continuación escribimos su expresión en términos de operadores fermiónicos:

- i) El operador de número esta dado por

$$\mathcal{N}_p = \sum_{\mu} \mathcal{C}_{\mu}^{\mu} = \sum_{\sigma\mu} a_{\mu\sigma}^{\dagger} a^{\mu\sigma} \quad (2.2.4)$$

ii) Para determinar  $\mathcal{L}^2$  primero encontramos  $\mathcal{L}_q$ , un resultado parecido al encontrado antes pero ahora sumamos sobre el índice adicional de espín  $\sigma$  :

$$\mathcal{L}_q = -\left\{ \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{3} \right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{\sigma} [a_{\sigma}^{\dagger} \times \bar{a}_{\sigma}]_q^1,$$

donde  $\bar{a}_{\sigma}$  tiene las mismas propiedades de transformación ante rotaciones en los espacios orbital y de espín que los operadores fermiónicos de creación  $a_{\sigma}^{\dagger}$ . De acuerdo con la métrica introducida en el capítulo anterior para intercambiar índices en la parte orbital y utilizando para la parte de espín [Wigner] que:  $g_{m_s, m'_s} = (-1)^{s+m'_s} \delta_{m_s, -m'_s}$  or  $g^{m_s, m'_s} = (-1)^{s-m_s} \delta_{m_s, -m'_s}$ , se obtiene la expresión  $\bar{a}_{\mu\sigma} = (-1)^{\mu+\frac{1}{2}-\sigma} a_{-\mu, -\sigma}$ .

Como en nuestro caso estamos tomando  $\ell = 1$  resulta :

$$\mathcal{L}^2 = -2\sqrt{3} [ [a_{\sigma}^{\dagger} \times \bar{a}_{\sigma}]^1 \times [a_{\alpha}^{\dagger} \times \bar{a}_{\alpha}]^1 ]_0^0, \quad (2.2.5)$$

donde sumamos sobre los índices  $\sigma$  y  $\alpha$ .

iii) Procediendo de manera idéntica a como lo hicimos en el caso de  $\mathcal{L}_q$ , obtenemos el resultado siguiente para  $\mathcal{S}_q$  :

$$\mathcal{S}_q = -\left\{ \frac{s(s+1)(2s+1)}{3} \right\}^{\frac{1}{2}} \sum_m [a_m^{\dagger} \times \bar{a}_m]_q^1,$$

como estamos estudiando un sistema de fermiones con espín  $s = \frac{1}{2}$ , entonces tenemos

$$\mathcal{S}^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} [ [a_m^{\dagger} \times \bar{a}_m]^1 \times [a_{\mu}^{\dagger} \times \bar{a}_{\mu}]^1 ]_0^0, \quad (2.2.6)$$

donde sumamos sobre los índices  $m$  y  $\mu$ .

iv) Aunque no aparecerá en el Hamiltoniano, vamos a escribir en segunda cuantización el momento angular total  $\mathcal{J}^2$ . Debemos primero tomar combinaciones adecuadas de los operadores  $a_{\mu\sigma}^{\dagger}$  :

$$A_{M}^{\dagger J} = \sum_{mm_s} \langle \ell m ; s m_s | J M \rangle a_{mm_s}^{\dagger}$$

$$\bar{A}_{J'M'} = \sum_{m'm'_s} \langle \ell m'; sm'_s | J' M' \rangle \bar{a}_{m'm'_s}$$

de aquí obtenemos :

$$\mathcal{A} = -\sqrt{\frac{J(J+1)(2J+1)}{3}} [A^{\dagger J} \times \bar{A}^J]_q^1,$$

$$\mathcal{J} = -\frac{J(J+1)(2J+1)}{\sqrt{3}} [ [A^{\dagger J} \times \bar{A}^J]^1 \times [A^{\dagger J} \times \bar{A}^J]^1 ]_0^0.$$

Ahora definimos los siguientes operadores:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\ell; s}^{LS} &= [a^{\dagger} \times a^{\dagger}]_{M; M_s}^{L; S} \\ &= \sum_{mm'm_s m'_s} \langle \ell m; \ell m' | LM \rangle \langle sm_s; sm'_s | SM_s \rangle a_{\ell m_s}^{\dagger} a_{\ell m'_s}^{\dagger} \end{aligned} \quad (2.2.7a)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{\ell; s}^{LS} = [\bar{a} \times \bar{a}]_{M; M_s}^{L; S} \quad (2.2.7b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\ell; s}^{\Lambda\Sigma} &= [a^{\dagger} \times \bar{a}]_{M; M_{\Sigma}}^{\Lambda; \Sigma} \\ &= \sum_{mm'm_s m'_s} \langle \ell m; \ell m' | \Lambda M \rangle \langle sm_s; sm'_s | \Sigma M_{\Sigma} \rangle a_{\ell m_s}^{\dagger} \bar{a}_{\ell m'_s} \end{aligned} \quad (2.8c)$$

Tomando en cuenta que :

$$\begin{cases} \langle \ell m; \ell - m | 0, 0 \rangle = (-1)^{\ell-m} \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}} \\ \langle sm_s; s - m_s | 0, 0 \rangle = (-1)^{s-m_s} \frac{1}{\sqrt{2s+1}} \end{cases}$$

vamos a reescribir  $\mathcal{N}_p$  y  $\mathcal{L}^2$  en términos de los operadores  $\mathcal{F}^{\Lambda\Sigma}$  : Notando que  $\ell$  y  $m$  son enteros, y que  $2s$  y  $2m_s$  tienen la misma paridad, tenemos los resultados siguientes:

$$\mathcal{N}_p = \{(2\ell+1)(2s+1)\}^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}_{\ell; s}^{0;0}, \quad (2.2.8a)$$

$$\mathcal{L}^2 = -\frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)(2s+1)}{\sqrt{3}} [\mathcal{F}_{\ell;s}^{\lambda;0} \times \mathcal{F}_{\ell;s}^{\lambda;0}]_0^0. \quad (2.2.8b)$$

Para simplificar la notación definimos los siguientes operadores

$$\Phi^{\lambda;\Sigma} = [\mathcal{F}_{\ell;s}^{\lambda;\Sigma} \times \mathcal{F}_{\ell;s}^{\lambda;\Sigma}]_0^0,$$

$$\Gamma^{L;S} = [\mathcal{G}_{\ell;s}^{L;S} \times \tilde{\mathcal{G}}_{\ell;s}^{L;S}]_0^0.$$

Utilizando las definiciones anteriores se encuentra que las expresiones (2.2.4), (2.2.5) y (2.2.6) pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\mathcal{N}_p^2 = (2\ell+1)(2s+1)\Phi^{0;0} = 6\Phi^{0;0}, \quad (2.2.9a)$$

$$\mathcal{L}^2 = -\frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)(2s+1)}{\sqrt{3}}\Phi^{1;0} = -4\sqrt{3}\Phi^{1;0}, \quad (2.2.9b)$$

$$\mathcal{S}^2 = -\frac{s(s+1)(2s+1)(2\ell+1)}{\sqrt{3}}\Phi^{0;1} = -\frac{18}{4\sqrt{3}}\Phi^{0;1}, \quad (2.2.9c)$$

donde en la última igualdad se hizo la sustitución  $\ell=1$ ,  $s=1/2$ .

Ahora vamos a escribir el operador Hamiltoniano términos de la base acoplada; ésto es, en función de los operadores  $\Gamma^{L;S}$ : Consideramos primero la interacción de un cuerpo

$$W = \sum_{mm'm_s m'_s} \langle m, m_s | W_1 | m', m'_s \rangle a_{mm_s}^\dagger a^{m'm'_s} = \varepsilon_{\nu\ell} \mathcal{N}_p, \quad (2.2.10)$$

donde  $\varepsilon_{\nu\ell}$  es la energía correspondiente al estado  $\nu\ell$  del Hamiltoniano con el que trabajamos. Nuevamente damos la forma de la interacción de dos cuerpos:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{m'_s} \langle m_1, m_{s_1}; m_2, m_{s_2} | V_{12} | m'_1, m'_{s_1}; m'_2, m'_{s_2} \rangle a_{m_2 m_{s_2}}^\dagger a_{m_1 m_{s_1}}^\dagger a^{m'_1 m'_{s_1}} a^{m'_2 m'_{s_2}},$$

Reacomplando los estados que constituyen el elemento de matriz  $\langle | \nu_{12} | \rangle$ , utilizando coeficientes de Clebsch-Gordan;

$$| m_1, m_{s_1}; m_2, m_{s_2} \rangle = \sum_{LM_L SM_S} \langle \ell m_1; \ell m_2 | LM_L \rangle \langle s m_{s_1}; s m_{s_2} | SM_S \rangle | LM_L; SM_S \rangle,$$

y recordando que

$$\langle LM_L; SM_S | \nu_{12} | L' M'_S; SM_S \rangle = \langle L' M'_S; 00 | LM_L \rangle \delta_L^{L'} \delta_{M'_S}^{M_L} \langle L \| \nu_{12} \| L' \rangle,$$

obtenemos :

$$\nu = -\frac{1}{2} \sum_{LM_L SM_S} \langle L \| \nu_{12} \| L \rangle \langle LM_L; 00 | LM_L \rangle [a^\dagger \times a^\dagger]_{M; M_s}^{L; S} [\bar{a} \times \bar{a}]_{M; M_s}^{L; S}$$

Denotando  $\langle L \| \nu_{12} \| L \rangle = A_L$  y realizando un cambio de índices covariantes por contravariantes en  $a^\dagger$  mediante la métrica que tenemos, llegamos a

$$\nu = -\frac{1}{2} \sum_{LS} A_L \{(2L+1)(2S+1)\}^{\frac{1}{2}} \Gamma^{L; S}$$

Tomando  $\ell = 1$ ,  $s = 1/2$  y considerando los valores de  $(L; S)$  a los que nos hemos restringido, obtenemos

$$\nu = -\frac{1}{2} \{ A_0 \Gamma^{0;0} + 3A_1 \Gamma^{1;1} + \sqrt{5} A_2 \Gamma^{2;2} \}$$

Como el Hamiltoniano está dado en términos de operadores  $\Gamma^{L; S}$ , para escribirlo en términos de los Casimires de la cadena de grupos (2.2.1), debemos primero encontrar una transformación que relacione los operadores:

$$\Gamma^{L; S} \longleftrightarrow \Phi^{L; S}$$

Así como en el capítulo anterior encontramos una restricción sobre los valores de  $L$  que podían tomar los operadores  $G_L$  bosónicos, ahora identificaremos las parejas  $(L; S)$  para las cuales los operadores fermiónicos  $\Gamma^{L; S}$  resultan ser distintos de cero. De la definición misma tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{\ell s}^{LS} &= \sum_{mm'm_s m'_s} \langle \ell m; \ell m' | LM \rangle \langle sm_s; sm'_s | SM_s \rangle a_{mm_s}^\dagger a_{m'm'_s}^\dagger \\
 &= \sum_{mm'm_s m'_s} (-1)^{2\ell-L} (-1)^{2s-S} \langle \ell m'; \ell m | LM \rangle \langle sm'_s; sm_s | SM_s \rangle a_{mm_s}^\dagger a_{m'm'_s}^\dagger \\
 &= \sum_{mm'm_s m'_s} (-1)^{2\ell-L+2s-S+1} \langle \ell m'; \ell m | LM \rangle \langle sm'_s; sm_s | SM_s \rangle a_{m'm'_s}^\dagger a_{mm_s}^\dagger \\
 &= (-1)^{L+S} \mathcal{G}_{\ell s}^{\dagger LS}.
 \end{aligned}$$

El mismo resultado se obtiene para los operadores  $\mathcal{G}_{\ell s}^{LS}$ . Vemos entonces que necesitamos pedir

$$(-1)^{L+S} \rightarrow \text{número par}$$

$$\text{con: } \begin{cases} S = 0, 1, \dots, 2s \\ L = 0, 1, \dots, 2\ell \end{cases}$$

En nuestro caso  $\ell = 1$  y  $s = 1/2$ ; entonces las parejas  $(L, S)$  permitidas son las siguientes:  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(2, 0)$ . De tal manera que:  $\mathcal{G}_{1\frac{1}{2}}^{10} = \mathcal{G}_{1\frac{1}{2}}^{01} = \mathcal{G}_{1\frac{1}{2}}^{21} = 0$  con las correspondientes  $\mathcal{G}_{\ell s}^{\dagger LS}$  también iguales a cero y teniendo como consecuencia que  $\Gamma^{1;0} = \Gamma^{0;1} = \Gamma^{2;1} = 0$ .

Vamos ahora a obtener, en forma general, la relación:

$$\Phi^{\lambda\Sigma} = \sum_{LS} A(\lambda\Sigma; LS) \Gamma^{L;S} \quad (2.2.11)$$

Utilizando los resultados del capítulo anterior, obtenemos la relación:

$$\begin{aligned}
 \Phi^{\lambda\Sigma} &= [ [ \mathbf{a}^\dagger \times \bar{\mathbf{a}} ]^{\lambda; \Sigma} \times [ \mathbf{a}^\dagger \times \bar{\mathbf{a}} ]^{\lambda; \Sigma} ]^{0;0} \\
 &= - \sum_{L'S'} (2L'+1)(2S'+1)(2\lambda+1)(2\Sigma+1) \begin{Bmatrix} \ell & \ell & \lambda \\ L' & L' & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s & s & \Sigma \\ S' & S' & 0 \end{Bmatrix} \Gamma^{L'; S'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (\lambda m_{\lambda_1}; \lambda m_{\lambda_2} | 00) (\ell m_1; \ell m'_1 | \lambda m_{\lambda_1}) (\ell m_2; \ell m'_2 | \lambda m_{\lambda_2}) (\Sigma m_{\Sigma_1}; \Sigma m_{\Sigma_2} | 00) \times \\
 & \times (s m_{s_1}; s m'_{s_1} | \Sigma m_{\Sigma_1}) (s m_{s_2}; s m'_{s_2} | \Sigma m_{\Sigma_2}) a_{\uparrow m_1 m_1}^{\dagger} \{ \bar{a}_{m'_1 m'_{s_1}}, a_{\uparrow m_2 m_{s_2}} \} \bar{a}_{m'_2 m'_{s_2}} \quad (2.2.12)
 \end{aligned}$$

en el segundo término se suma sobre todos los índices que aparecen dos veces (esto es, sobre todas las  $m$ 's). Vamos a reducir primeramente el segundo término, para lo cual necesitaremos las siguientes identidades:

$$i) \{ \bar{a}_{m'_1 m'_{s_1}}, a_{\uparrow m_2 m_{s_2}} \} = \delta_{m'_1, -m_2} \delta_{m'_{s_1}, -m_{s_2}} (-1)^{s-m_2-m_{s_2}}$$

$$ii) (j m_1; j m_2 | 00) = (-1)^{j-m_1} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \delta_{m_1, -m_2}$$

Después de realizar manipulaciones algebraicas obtenemos para el segundo término de la expresión (2.2.12)

$$(-1)^{\lambda+\Sigma} \frac{\{(2\lambda+1)(2\Sigma+1)\}^{\frac{1}{2}}}{(2\ell+1)(2s+1)} \mathcal{N}_p.$$

Substituyendo este resultado en (2.13) se concluye

$$\begin{aligned}
 \Phi^{\lambda\Sigma} = & - \sum_{L'S'} (2L'+1)(2S'+1)(2\lambda+1)(2\Sigma+1) \begin{Bmatrix} \ell & \ell & \lambda \\ \ell & \ell & \lambda \\ L' & L' & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s & s & \Sigma \\ s & s & \Sigma \\ S' & S' & 0 \end{Bmatrix} \Gamma^{L';S'} \\
 & + (-1)^{\lambda+\Sigma} \frac{\{(2\lambda+1)(2\Sigma+1)\}^{\frac{1}{2}}}{(2\ell+1)(2s+1)} \mathcal{N}_p. \quad (2.2.13)
 \end{aligned}$$

Con  $\ell = 1$  y  $s = 1/2$ , los valores posibles de los números  $(\lambda, \Sigma)$  son

$$\{(0, 0); (0, 1)\}; \{(1, 0); (1, 1)\}; \{(2, 0); (2, 1)\}.$$

De acuerdo con las expresiones (2.10), los Casimires  $\mathcal{N}_p^2$ ,  $\mathcal{L}^2$  y  $S^2$  sólo están relacionados con los operadores:  $\Phi^{0;0}$ ,  $\Phi^{0;1}$ , y  $\Phi^{1;0}$ . Por lo tanto sólo tomaremos en cuenta las parejas  $(\lambda, \Sigma) = (0, 0)$ ,  $(0, 1)$ , y  $(1, 0)$ .

Calculando los símbolos 9-j [2] e invirtiendo la relación matricial (2.2.11):

$$\Gamma^{LS} = \sum_{\lambda\Sigma} A^{-1}(LS; \lambda\Sigma) \Phi^{\lambda\Sigma}$$

obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \Gamma^{0;0} \\ \Gamma^{1;1} \\ \Gamma^{2;2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -\frac{4}{\sqrt{3}} \\ -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{4}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{0;0} \\ \Phi^{1;1} \\ \Phi^{1;0} \end{pmatrix} + \mathcal{N}_p \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/2 \\ \sqrt{5}/6 \end{pmatrix}$$

Finalmente efectuando el cambio  $\Gamma^{LS} \leftrightarrow \Phi^{\lambda\Sigma}$  escribimos  $\mathcal{V}$  en términos de  $\mathcal{L}^2, S^2$  y  $\mathcal{N}_p^2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & A_0 \left\{ -\frac{1}{12} \mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{3} S^2 - \frac{1}{6} \mathcal{L}^2 + \frac{8}{12} \mathcal{N}_p \right\} + \\ & + A_1 \left\{ \frac{3}{8} \mathcal{N}_p^2 + \frac{1}{2} S^2 - \frac{3}{4} \mathcal{N}_p \right\} + \\ & + A_2 \left\{ \frac{5}{24} \mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{6} S^2 + \frac{1}{6} \mathcal{L}^2 - \frac{5}{12} \mathcal{N}_p \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Este operador debe satisfacer varias condiciones que son simples de verificar. Primero, el elemento de matriz del potencial (2.2.14), respecto a estados de máxima proyección en  $L$  y  $S$ , se debe anular idénticamente para estados de una sola partícula, ya que  $\mathcal{V}$  corresponde a interacciones partícula-partícula y no hemos incluido auto-interacciones en nuestro modelo. De la Tabla 1 que hemos presentado con los números cuánticos que caracterizan los estados fermiónicos, vemos que con  $N = 1$  debemos tener:  $L = 1, S = 1/2$ . Con esto podemos calcular el valor del elemento de matriz, y lo haremos separadamente para los términos de cada coeficiente  $A_i$

$$A_0: \langle NLS | -\frac{1}{12} \mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{3} S^2 - \frac{1}{6} \mathcal{L}^2 + \frac{8}{12} \mathcal{N}_p | NLS \rangle = -\frac{1}{12} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

$$A_1: \langle NLS | \frac{3}{8} \mathcal{N}_p^2 + \frac{1}{2} S^2 - \frac{3}{4} \mathcal{N}_p | NLS \rangle = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = 0.$$

$$A_2: \langle NLS | \frac{5}{24} \mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{6} S^2 + \frac{1}{6} \mathcal{L}^2 - \frac{5}{12} \mathcal{N}_p | NLS \rangle = \frac{5}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{5}{12} = 0.$$

Ahora consideremos nuestros estados con  $N=2$ . Para estos estados, el elemento de matriz de  $\mathcal{V}$  debe ser  $A_i$  donde  $i=L$  es el momento angular del estado. Esto resulta claro de la propia definición de  $A_i$ . De acuerdo a nuestras tablas, los estados de dos partículas que podemos tener están caracterizados por los siguientes valores de  $L$  y  $S$ :

$N = 2$	$\mathcal{U}_3$	$L$	$S$
	[200]	0 2	0 0
	[110]	1	1

Analizaremos, como en el caso anterior, término a término.

i) Primero el estado :  $|NLS\rangle = |200\rangle$

$$A_0 : \langle 200 | -\frac{1}{12}\mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{3}\mathcal{S}^2 - \frac{1}{6}\mathcal{L}^2 + \frac{8}{12}\mathcal{N}_p | 200 \rangle = -\frac{4}{12} + \frac{16}{12} = 1.$$

$$A_1 : \langle 200 | \frac{3}{8}\mathcal{N}_p^2 + \frac{1}{2}\mathcal{S}^2 - \frac{3}{4}\mathcal{N}_p | 200 \rangle = \frac{12}{8} - \frac{6}{4} = 0.$$

$$A_2 : \langle 200 | \frac{5}{24}\mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{6}\mathcal{S}^2 + \frac{1}{6}\mathcal{L}^2 - \frac{5}{12}\mathcal{N}_p | 200 \rangle = \frac{20}{24} - \frac{10}{12} = 0.$$

ii)  $|NLS\rangle = |220\rangle$

$$A_0 : \langle 220 | -\frac{1}{12}\mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{3}\mathcal{S}^2 - \frac{1}{6}\mathcal{L}^2 + \frac{8}{12}\mathcal{N}_p | 220 \rangle = -\frac{4}{12} - 1 + \frac{16}{12} = 0.$$

$$A_1 : \langle 220 | \frac{3}{8}\mathcal{N}_p^2 + \frac{1}{2}\mathcal{S}^2 - \frac{3}{4}\mathcal{N}_p | 220 \rangle = \frac{12}{8} - \frac{6}{4} = 0.$$

$$A_2 : \langle 220 | \frac{5}{24}\mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{6}\mathcal{S}^2 + \frac{1}{6}\mathcal{L}^2 - \frac{5}{12}\mathcal{N}_p | 220 \rangle = \frac{20}{24} - \frac{10}{12} + 1 = 1.$$

iii)  $|NLS\rangle = |211\rangle$

$$A_0: \langle 211 | -\frac{1}{12}\mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{3}S^2 - \frac{1}{6}\mathcal{L}^2 + \frac{8}{12}\mathcal{N}_p | 211 \rangle = -\frac{4}{12} - \frac{2}{3} - \frac{2}{6} + \frac{16}{12} = 0.$$

$$A_1: \langle 211 | \frac{3}{8}\mathcal{N}_p^2 + \frac{1}{2}S^2 - \frac{3}{4}\mathcal{N}_p | 211 \rangle = \frac{12}{8} + 1 - \frac{6}{4} = 1.$$

$$A_2: \langle 211 | \frac{5}{24}\mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{6}S^2 + \frac{1}{6}\mathcal{L}^2 - \frac{5}{12}\mathcal{N}_p | 211 \rangle = \frac{20}{24} - \frac{10}{12} - \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = 0.$$

Utilizando las expresiones (2.2.10) y (2.2.14) se obtiene que el hamiltoniano que describe al sistema de fermiones p se puede escribir de la manera siguiente

$$\begin{aligned} H_{\nu\ell} = & \varepsilon_{\nu\ell}\mathcal{N}_p + A_0\left\{-\frac{1}{12}\mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{3}S^2 - \frac{1}{6}\mathcal{L}^2 + \frac{8}{12}\mathcal{N}_p\right\} \\ & + A_1\left\{\frac{3}{8}\mathcal{N}_p^2 + \frac{1}{2}S^2 - \frac{3}{4}\mathcal{N}_p\right\} \\ & + A_2\left\{\frac{5}{24}\mathcal{N}_p^2 - \frac{1}{6}S^2 + \frac{1}{6}\mathcal{L}^2 - \frac{5}{12}\mathcal{N}_p\right\}, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

cuyos eigenvalores estan dados por la expresi3n

$$\begin{aligned} \langle NLS | H_{\nu\ell} | NLS \rangle = & N\{\varepsilon_{\nu\ell} + \frac{8}{12}A_0 - \frac{3}{4}A_1 - \frac{5}{12}A_2\} \\ & + N^2\left\{-\frac{1}{12}A_0 + \frac{3}{8}A_1 + \frac{5}{24}A_2\right\} \\ & + \frac{L(L+1)}{6}\{-A_0 + A_2\} \\ & + S(S+1)\left\{-\frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{6}A_2\right\}. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

A continuaci3n vamos a determinar el espectro que se obtiene con este Hamiltoniano, cuando se toman  $A_0, A_1$  y  $A_2$  que provienen de la selecci3n de alg3n potencial de interacci3n  $V_{12}$ . Antes de ver qu3 tipo de potencial vamos a considerar (el inter3s principal ser3 ilustrado), brevemente revisaremos el procedimiento para calcular los coeficientes  $A_i$ . Estos coeficientes son elementos de matriz reducidos entre estados de dos cuerpos, acoplados a un cierto momento angular total  $L_T$ .

Hemos supuesto que el potencial  $V_{12}$  es invariante ante rotaciones en el espacio, de tal manera que tenemos una función de la forma:  $V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ ; así pues, si se tienen dos partículas con coordenadas  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , resulta conveniente describir el estado del sistema en términos de la coordenada relativa:  $\vec{r}_{rel} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  y la coordenada del centro de masas:  $\vec{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ . De esta forma, la interacción  $V_{12}$  no afecta en absoluto la parte de la función de estado descrita por la coordenada  $\vec{R}$ , y su efecto sobre el sistema tiene que ver solamente con la coordenada relativa, de manera que el elemento de matriz de dos cuerpos se reduce a uno de un solo cuerpo.

Para el oscilador armónico el problema se ha resuelto de manera completa [3]; la ventaja que presenta este potencial es que las funciones de onda en las coordenadas  $\{\vec{r}_{rel}, \vec{R}\}$  son las mismas que en las coordenadas  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ ; es decir, son funciones de onda de oscilador armónico. Por esta razón, y también pensando en que el potencial de oscilador armónico ha sido ampliamente utilizado en la física nuclear, vamos a hacer nuestros cálculos para este potencial, tomando los resultados encontrados en la ref. [4]. Aquí mostraremos los resultados sin hacer ninguna deducción.

En general, el cambio de coordenadas para un sistema de dos partículas 'embebidas' en un potencial de oscilador armónico se escribiría como: [4]

$$|n_1 l_1; n_2 l_2; L_T \mu\rangle = \sum_{n l N L} \langle n l, N L, L_T | n_1 l_1, n_2 l_2, L_T \rangle |n l; N L; L_T \mu\rangle \quad (2.2.17)$$

Donde  $n_1, l_1, n_2$  y  $l_2$  son los números cuánticos de las funciones de oscilador armónico en las coordenadas  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  respectivamente, mientras que  $n$  y  $l$  son los números asociados a la función de onda de oscilador armónico asociada a la coordenada relativa  $\vec{r}_{rel}$  y  $N, L$  los correspondientes a la coordenada del centro de masas  $\vec{R}$ . Notemos cómo el momento angular total es  $L_T$  en ambos sistemas de coordenadas, ya que se puede ver fácilmente de la definición de  $\{\vec{r}_{rel}, \vec{R}\}$  que:  $\vec{L}_{rel} + \vec{L}_{\vec{R}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_T$ . Además, como hemos cambiado solamente el sistema de coordenadas y no el sistema de referencia, la energía asociada a las dos funciones debe ser la misma, y como en ambos casos se trata de funciones de oscilador armónico, se debe tener en la ec. (2.2.17):  $2n + l + 2N + L = 2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2$ .

Notamos también que el coeficiente de transformación  $\langle n l, N L, L_T | n_1 l_1, n_2 l_2, L_T \rangle$  no depende de la proyección del momento angular  $\mu$ .

En nuestro caso, como estamos trabajando con fermiones  $p$  en una misma capa  $\nu$  de oscilador armónico, en lugar de  $n_1, l_1$  y  $n_2, l_2$  tendremos los números:  $\nu 1, \nu 1$  y la condición sobre  $n l, N L$  será:  $2n + l + 2N + L = 2\nu$ .

Vamos a tomar la capa  $\nu = 1$ . Así pues, los valores  $n, l, N$  y  $L$  que tendremos serán:

$$i) L_T = 0 \quad (n, l, N, L) = (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$$

$$ii) L_T = 1 \quad (n, l, N, L) = (0, 1, 0, 1)$$

$$iii) L_T = 2 \quad (n, l, N, L) = (0, 1, 0, 1), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 2)$$

El elemento de matriz queda entonces

$$\langle \nu 1; \nu 1; L_T \parallel \nu 1_2 \parallel \nu 1; \nu 1; L_T \rangle =$$

$$= \sum_{nn', l', NN', LL'} \langle n' l'; N' L'; L_T \mid 01; 01; L_T \rangle \langle n l; N L; L_T \mid 01; 01; L_T \rangle$$

$$\cdot \langle n' l'; N' L'; L_T \parallel \nu 1_2 \parallel n l; N L; L_T \rangle =$$

$$(\text{con } \nu = 1, l = 1 \Rightarrow n_1 = n_2 = 0)$$

$$= \sum_{nn' l N L} \langle n' l; N L; L_T \mid 01; 01; L_T \rangle \langle n l; N L; L_T \mid 01; 01; L_T \rangle \langle n' l \parallel \nu 1_2 \parallel n l \rangle$$

(2.2.18)

donde hemos utilizado el hecho de que  $\nu 1_2$  no afecta a la función  $|NL\rangle$  que describe el comportamiento del centro de masas del sistema; también, dada la invariancia del potencial ante rotaciones, se tiene  $l' = 1$ . El elemento de matriz reducido para estados de oscilador armónico está dado por ([4] cap. III)

$$\langle n' l \parallel \nu 1_2 \parallel n l \rangle = \sum_p B(n' l; n l; p) I_p \quad (2.2.19)$$

con  $l \leq p \leq l + n + n'$ . Y el símbolo  $I_p$  denota las integrales de Talmi, definidas como

$$I_p = \frac{2}{\Gamma(p+3/2)} \int_0^\infty r^{2p} e^{-r^2} V(r) r^2 dr$$

los coeficientes  $B(n' l; n l; p)$  han sido calculados por T.A. Brody y M. Moshinsky y se encuentran tabulados en la ref. [4].

En nuestro caso resulta

$$\begin{aligned} \text{i) } L_T = 0 ; A_0 &= \langle 00; 10; 0 \mid 01; 01; 0 \rangle^2 \langle 10 \parallel \mathcal{V}_{12} \parallel 10 \rangle + \\ &+ \langle 10; 00; 0 \mid 01; 01; 0 \rangle^2 \langle 00 \parallel \mathcal{V}_{12} \parallel 00 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle 10 \parallel \mathcal{V}_{12} \parallel 10 \rangle + \langle 00 \parallel \mathcal{V}_{12} \parallel 00 \rangle \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } L_T = 1 ; A_1 &= \langle 01; 01; 1 \mid 01; 01; 1 \rangle^2 \langle 01 \parallel \mathcal{V}_{12} \parallel 01 \rangle = \\ &= \langle 01 \parallel \mathcal{V}_{12} \parallel 01 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } L_T = 2 ; A_2 &= \langle 00; 02; 2 \mid 01; 01; 2 \rangle^2 \langle 02 \parallel \mathcal{V}_{12} \parallel 02 \rangle + \\ &+ \langle 02; 00; 2 \mid 01; 01; 2 \rangle^2 \langle 00 \parallel \mathcal{V}_{12} \parallel 00 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle 02 \parallel \mathcal{V}_{12} \parallel 02 \rangle + \langle 00 \parallel \mathcal{V}_{12} \parallel 00 \rangle \} \end{aligned}$$

Ya tenemos todos los cálculos hechos, y sólo falta escoger el potencial de interacción entre fermiones  $\mathcal{V}_{12}$ , que ilustre el espectro. Tomaremos dos potenciales comúnmente utilizados en física nuclear, aquí simplificados de manera que tengamos una función  $\mathcal{V}_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ : [5]

$$\text{Potencial de Yukawa : } \mathcal{V}_{12} = -V_0 e^{-\mu r} / \mu r \quad ; \quad \mu \sim 0.855 fm^{-1} .$$

$$\text{Potencial de Gauss : } \mathcal{V}_{12} = -V_0 e^{-\alpha^2 r^2} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{1.58} fm^{-1} .$$

La 'profundidad'  $V_0$  del potencial la variaremos de 1 a 30 MeV (en intervalos de 5 MeV) para ver cómo cambia el espectro a medida que la intensidad aumenta. Las integrales de Talmi quedan expresadas en términos del factor  $V_0$ , calculadas utilizando el paquete Matemática resultan:

	$I_0$	$I_1$	$I_2$
Yukawa	$(0.664904)V_0$	$(0.3059956)V_0$	$(0.1848103)V_0$
Gauss	$(0.6344883)V_0$	$(0.4684962)V_0$	$(0.3459302)V_0$

A continuación listamos los valores absolutos (ya que los coeficientes son negativos) de  $A_0$ ,  $A_1$  y  $A_2$  obtenidos para cada valor de  $V_0$ .

$V_0$ (MeV)	Yukawa			Gauss		
	$ A_0 $	$ A_1 $	$ A_2 $	$ A_0 $	$ A_1 $	$ A_2 $
1	0.60	0.31	0.42	0.52	0.47	0.49
5	3.00	1.55	2.10	2.60	2.35	2.45
10	6.00	3.10	4.20	5.20	4.70	4.90
15	9.00	4.65	6.30	7.80	7.05	7.35
20	12.00	6.20	8.40	10.40	9.40	9.80
25	15.00	7.75	10.50	13.00	11.75	12.25
30	18.00	9.30	12.60	15.60	14.10	14.70

Nótese cómo se cumple siempre:  $|A_0| > |A_2| > |A_1|$ . Además, también tenemos la siguiente regularidad:  $|A_0|_Y > |A_0|_G$ ;  $|A_1|_G > |A_1|_Y$ ;  $|A_2|_G > |A_2|_Y$ .

Para evaluar  $H(N,L,S)$  hace falta determinar el valor de la energía  $E_{\nu 1}$  de partícula independiente de la capa donde estamos colocando los fermiones. Esta energía puede calcularse de la expresión empírica:

$E_{\nu 1} \sim 40A^{-1/3}$ . Por ejemplo, para un sistema con  $A = 12$  tenemos:  $E_{11} \sim 17.47$  MeV. Este es el valor que será utilizado para determinar el espectro (2.2.16) y tener así una relación realista entre la energía de la capa y las energías de interacción de dos cuerpos.

Vamos a detenernos en la figura 2.A.1; en ella se muestra el espectro que se obtiene para el potencial de Gauss considerando dos fermiones en la capa. Vemos que para intensidades de interacción pequeñas, existe prácticamente una degeneración entre los distintos multipletes, los cuales tienen una energía igual a la suma de las energías de capa para cada fermión. A medida que la intensidad aumenta, desaparece la degeneración y los multipletes conforman un espectro que se desplaza por debajo de la energía de capa del sistema. En el espectro, si vemos los números cuánticos de los multipletes, y volvemos a las tablas 1 y 2, encontramos que el nivel de mínima energía corresponde a los números  $(L,S) = (0,0)$ , asociados al estado cuya parte orbital (determinada por la rep. de  $U(3)$ ) es la que tiene mayor simetría. El nivel de mínima energía es el mismo para todos los valores de  $V_0$ . Dada la relación entre las magnitudes de los coeficientes  $A_i$ , se ve que la energía total del sistema tiene contribuciones

positivas del tipo rotor para  $L$  y  $S$  separadamente, y es una competencia entre ambas lo que da lugar a los espectros que observamos.

Los mismos comentarios se pueden hacer para las demás figuras. Por ejemplo, vemos que tanto en la interacción de Gauss como en la de Yukawa, para cada  $N$ , el orden en que aparecen los multipletes  $(L,S)$  es el mismo, y siempre el estado base corresponde al de máxima simetría orbital, y de entre estos, al que tiene menor momento angular (c.f. en el caso  $N=3$  los multipletes  $(1,1/2)$  y  $(2,1/2)$ ).

Se aprecia un comportamiento similar entre los espectros para  $N = 2, 4$ , debido a que los valores  $(L,S)$  son los mismos. La diferencia es que mientras para  $N = 2$  los niveles sólo llegan a desplazarse por 20 MeV al variar  $V_0$  (con potencial de Yukawa), para  $N=4$ , se tienen más partículas interactuando, de manera que el sistema está más 'ligado', y se observa un desplazamiento del espectro de 80 MeV (potencial de Yukawa). Ocurre lo mismo con el potencial de Gauss: en este caso, para  $N=2$  el espectro se desplaza alrededor de 15 MeV mientras para  $N=4$  unos 80 MeV.

Esta analogía que existe entre los sistemas  $N=2, N=4$  se puede entender como en la física atómica, en la que aparece el concepto de 'agujero'. En nuestro caso tenemos un sistema de fermiones  $p$  y esto implica que no se podrá tener más de 6 partículas en el sistema. Dado un número  $N$  de partículas, se visualiza el sistema como formado por  $6-N$  'agujeros' que tendrán las mismas propiedades que las partículas; en nuestro caso serían también fermiones  $p$  con espín  $s=1/2$ . Para ilustrar esto, en la figura 2.4 mostramos los espectros de excitación para cada  $N$  (hemos escogido el potencial de Yukawa con intensidad de 25 MeV). Se ve que para sistemas análogos partícula-agujero los espectros son idénticos.

De las gráficas se ve que el potencial Gaussiano tiene mayor 'penetración' que el de Yukawa: los niveles descienden más cuando se varía  $V_0$  en el primer caso. De hecho, mientras que para el potencial de Yukawa el salto  $V_0 : 1 \rightarrow 30$  (MeV) es de aprox. 160 MeV, para el de Gauss es de aprox. 210 MeV. Sin embargo, la estructura del espectro para cada  $N$  particular se ve más claramente en el caso de Yukawa, donde la separación energética entre niveles con la misma  $N$  y distintos valores  $(L,S)$  es mayor.

A continuación vamos a construir los estados  $|N[h_1 h_2]LS; JM\rangle$  en términos de operadores fermiónicos  $a_{ms}^\dagger$ . Estos estados forman una base de la cadena de grupos (2.2) y portan las representaciones irreducibles que hemos indicado en el ket.

Para el grupo  $U(6)$ , que es el que contiene a toda la cadena, debemos tener la representación  $[1^N]$  y sabemos que ello se satisface teniendo:  $U(3) [\tilde{h}] \otimes U(2) [h]$ . Debemos comenzar entonces obteniendo los polinomios  $P[0]$  de máximo peso en  $U(3) \otimes U(2)$  para la representación  $[\tilde{h}] \otimes [h]$  con  $N = 1, \dots, 6$ . Sabemos que actuando con los

# FERMIONES INTERACTUANTES

Interacción de Gauss  $N = 2$

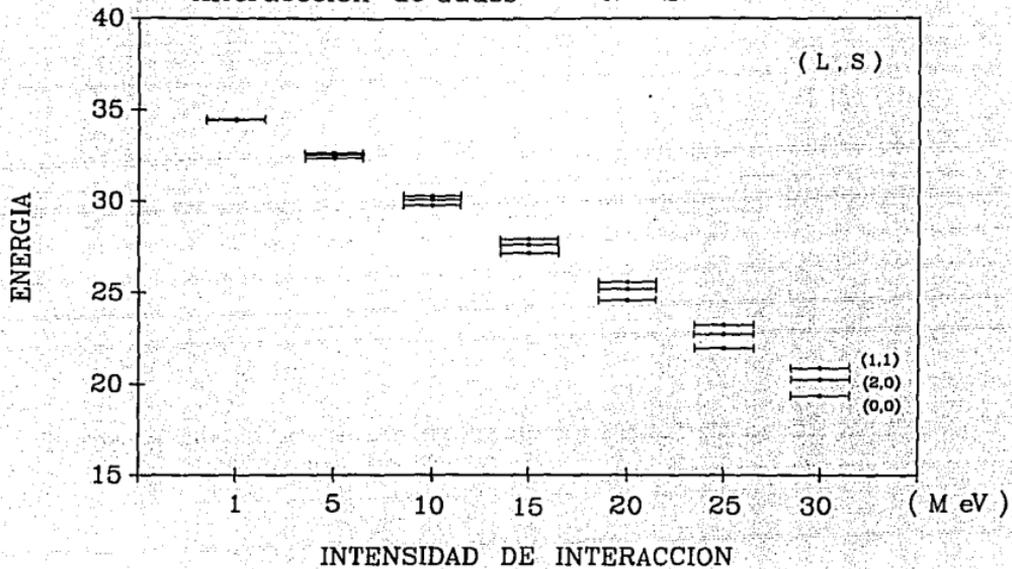


FIGURA 2.B.1

# FERMIONES INTERACTUANTES

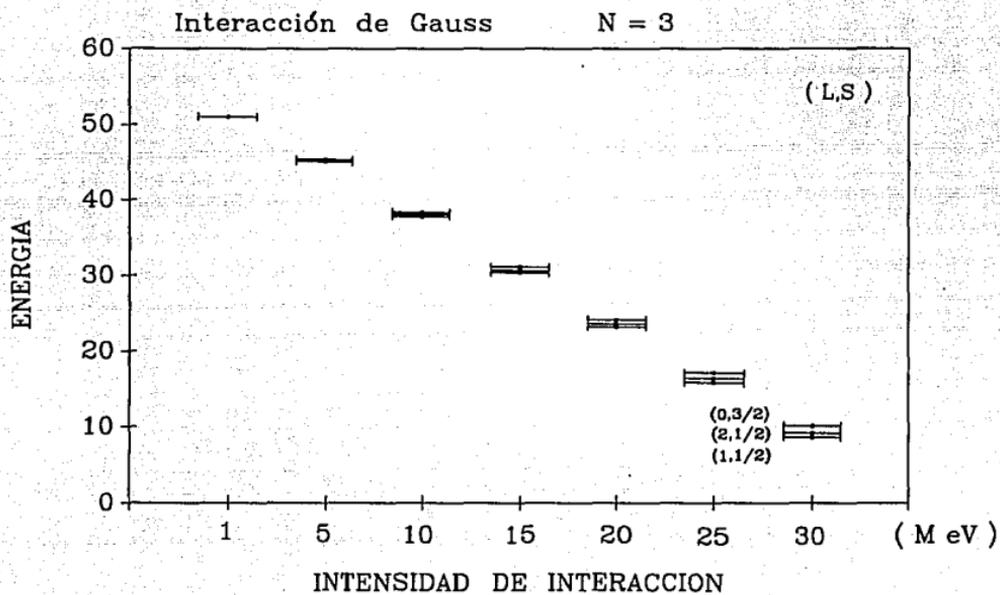


FIGURA 2.A.2

# FERMIONES INTERACTUANTES

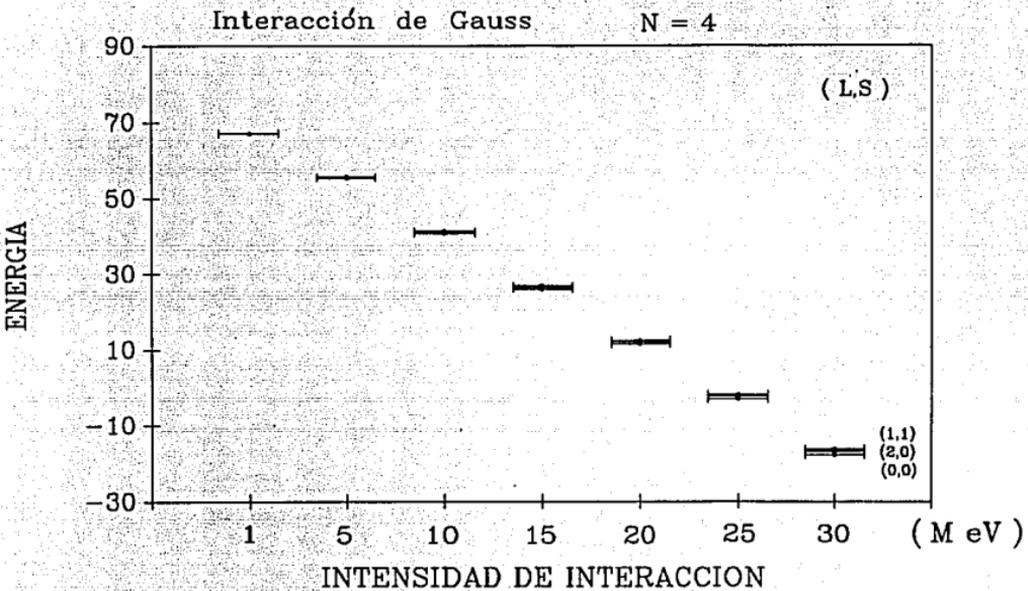


FIGURA 2.A.3

## FERMIONES INTERACTUANTES

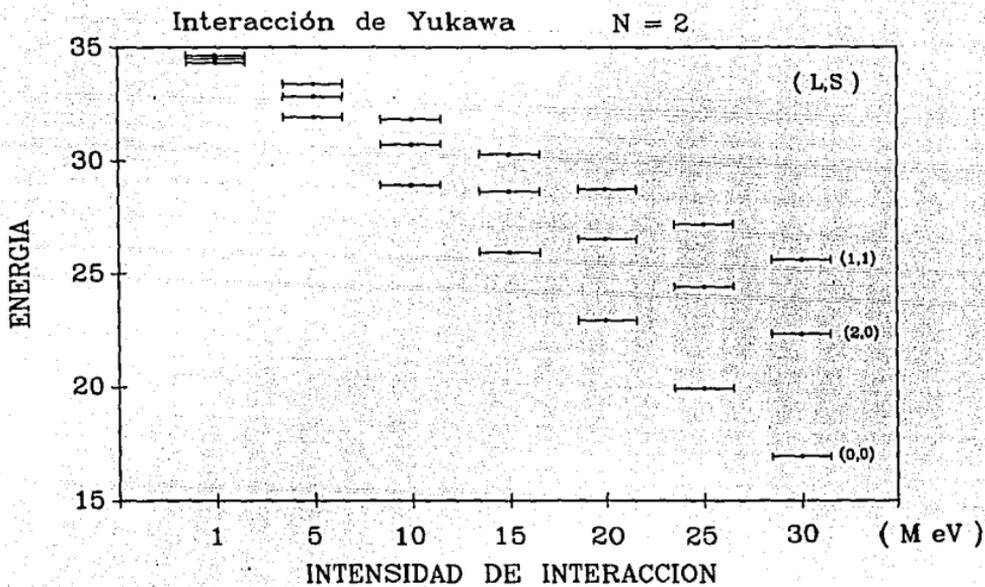


FIGURA 2.B.1

# FERMIONES INTERACTUANTES

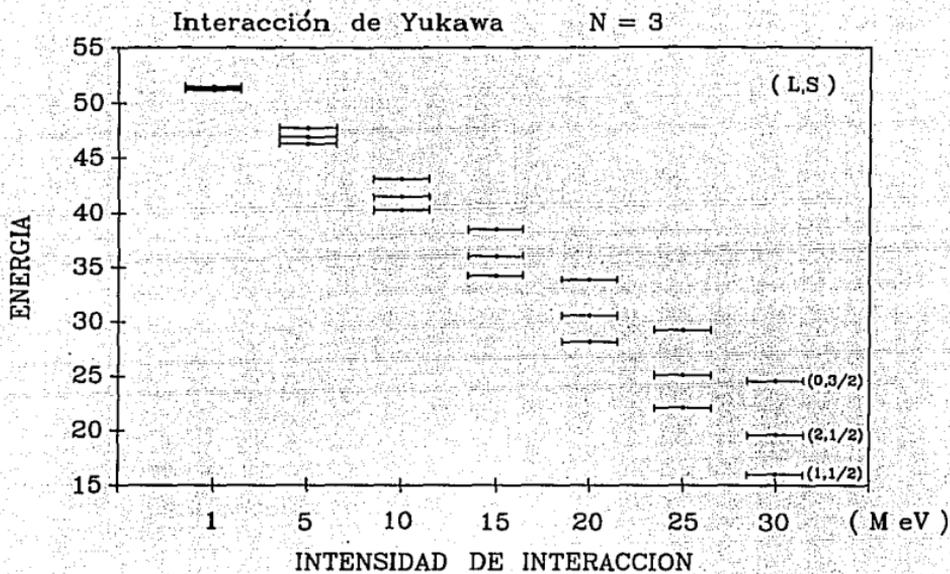


FIGURA 2.B.2

# FERMIONES INTERACTUANTES

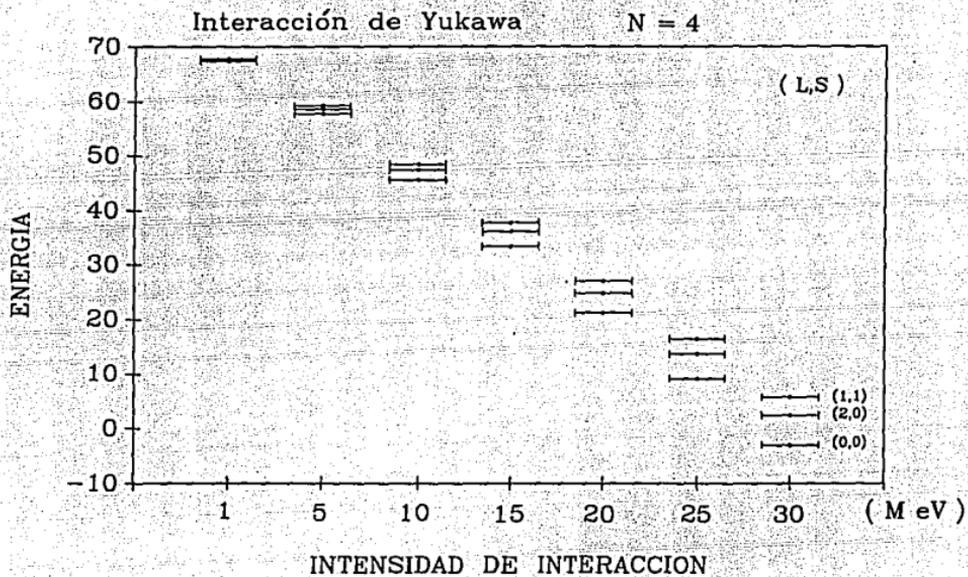


FIGURA 2.B.3

## ESPECTROS DE EXCITACION

(Potencial de Yukawa con intensidad 25 MeV)

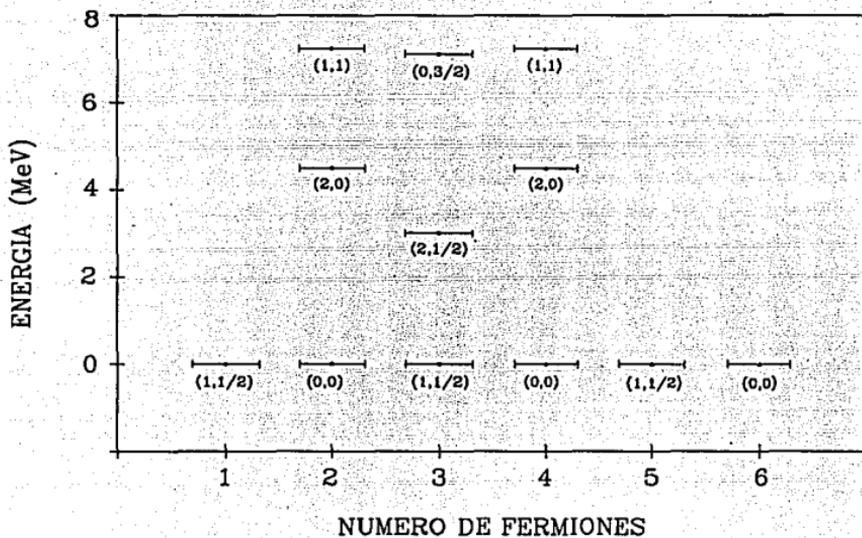


FIGURA 2.4

operadores de descenso de  $U(3)$  y  $U(2)$  sobre estos polinomios podemos construir una base completa de estados. \*

Para manejar en forma más simple los índices de nuestros operadores ( que indistintamente hemos denotado como  $m$  s o  $\mu\sigma$  ), en lugar de tener  $m=-1,0,1$  escribiremos  $r=1,2,3$  donde  $r=1$  corresponderá a la proyección  $m=1$ ,  $r=2$  a  $m=0$ , y  $r=3$  a  $m=-1$ . Análogamente, en lugar de  $s=-1/2, 1/2$  escribiremos  $s=1, 2$  con  $s=1$  correspondiendo a la proyección  $+1/2$ , y  $s=2$  a la proyección  $-1/2$ .

Los generadores de  $U(3)$  los podemos obtener a partir de los de  $U(6)$  sumando sobre el índice  $s$ ; así pues de acuerdo al trabajo de Gelfand, éstos se pueden clasificar como operadores:

$$\text{De peso: } C_1^1 = G_{11}^1 + G_{12}^2; \quad C_2^2 = G_{21}^2 + G_{22}^2; \quad C_3^3 = G_{31}^3 + G_{32}^2$$

$$\text{De ascenso: } C_1^2 = G_{11}^2 + G_{12}^2; \quad C_2^3 = G_{21}^3 + G_{22}^2; \quad C_3^3 = G_{31}^3 + G_{32}^2$$

$$\text{De descenso } C_2^1 = G_{21}^1 + G_{22}^2; \quad C_3^1 = G_{31}^1 + G_{32}^2; \quad C_3^2 = G_{31}^2 + G_{32}^2$$

En forma similar los generadores de  $U(2)$  se obtienen de sumar sobre el índice  $r$ , además se cambia la notación de  $C$  a  $\zeta$  para distinguirlos claramente de los generadores de  $U(3)$  :

$$\text{De peso: } \zeta_1^1 = G_{11}^1 + G_{21}^2 + G_{31}^3; \quad \zeta_2^2 = G_{12}^2 + G_{22}^2 + G_{32}^2$$

$$\text{De ascenso: } \zeta_1^2 = G_{11}^2 + G_{21}^2 + G_{31}^2$$

$$\text{De descenso: } \zeta_2^1 = G_{12}^1 + G_{22}^2 + G_{32}^2$$

Denotaremos al polinomio de máximo peso perteneciente a la representación producto  $\{\bar{h}\} \otimes \{h\}$  en la forma siguiente:  $P^{\{\bar{h}\} \otimes \{h\}}$ . Este polinomio debe satisfacer las ecuaciones:

$$i) C_i^i P^{\{\bar{h}\} \otimes \{h\}} | 0 \rangle = \bar{h}_i P^{\{\bar{h}\} \otimes \{h\}} | 0 \rangle, \quad (2.2.20a)$$

$$ii) C_i^j P^{\{\bar{h}\} \otimes \{h\}} | 0 \rangle = 0 \quad \text{con } i < j, \quad (2.2.20b)$$

\* Para una discusión más detallada de los operadores de ascenso, descenso y de peso de un grupo unitario, así como su relación con la obtención de una base completa de estados, ver el Apéndice 2.1

$$\text{iii) } \zeta_i^{\dagger} \mathbf{P}^{\{\bar{h}\} \otimes \{h\}} | 0 \rangle = h_i \mathbf{P}^{\{\bar{h}\} \otimes \{h\}} | 0 \rangle, \quad (2.2.20c)$$

$$\text{iv) } \zeta_j^{\dagger} \mathbf{P}^{\{\bar{h}\} \otimes \{h\}} | 0 \rangle = 0 \text{ con } i < j, \quad (2.2.20d)$$

Para construir los polinomios de máximo peso, seguimos las ideas de Moshinsky\*: Dado  $\{\bar{h}\} \otimes \{h\}$  tomamos  $\bar{h}_1$  operadores  $a^{\dagger}$  con el primer índice 1, cuyo segundo índice se escoge de manera creciente  $1, \dots, \bar{h}_1$ , o sea hasta que se termine el número de cajas del primer renglón de la partición. Estos se multiplican por la derecha por  $\bar{h}_2$  operadores  $a^{\dagger}$  con primer índice 2 y segundo índice nuevamente en orden creciente  $1, \dots, \bar{h}_2$  hasta terminar con el número de cajas del segundo renglón de la partición; y así sucesivamente. Tomemos como ejemplo la representación  $[220] \otimes [22]$ . Debemos ordenar cuatro operadores  $a^{\dagger}$ , de acuerdo con la partición  $[220]$ , el primer número 2 implica el producto de operadores:  $a_{11}^{\dagger} a_{12}^{\dagger}$ , mientras que el segundo 2 da lugar al término  $a_{21}^{\dagger} a_{22}^{\dagger}$  y teniéndose como resultado final el producto de los monomios en el orden siguiente

$$\mathbf{P}^{[220] \otimes [22]} \sim a_{11}^{\dagger} a_{12}^{\dagger} a_{21}^{\dagger} a_{22}^{\dagger}, \quad (2.2.21)$$

el cual es inmediato checar que satisface las expresiones (2.2.20), i.e.,

$$\text{i) } \zeta_1^{\dagger} \mathbf{P}^{[220] \otimes [22]} | 0 \rangle = 2 \mathbf{P}^{[220] \otimes [22]} | 0 \rangle,$$

$$\text{ii) } \zeta_2^{\dagger} \mathbf{P}^{[220] \otimes [22]} | 0 \rangle = 2 \mathbf{P}^{[220] \otimes [22]} | 0 \rangle,$$

$$\text{iii) } \zeta_1^2 \mathbf{P}^{[220] \otimes [22]} | 0 \rangle = \{ a_{11}^{\dagger} a_{12}^{\dagger} a_{11}^{\dagger} a_{12}^{\dagger} + a_{11}^{\dagger} a_{12}^{\dagger} a_{21}^{\dagger} a_{21}^{\dagger} \} | 0 \rangle = 0,$$

$$\text{iv) } \zeta_1^{\dagger} \mathbf{P}^{[220] \otimes [22]} | 0 \rangle = 2 \mathbf{P}^{[220] \otimes [22]} | 0 \rangle;$$

$$\text{v) } \zeta_2^2 \mathbf{P}^{[220] \otimes [22]} | 0 \rangle = 2 \mathbf{P}^{[220] \otimes [22]} | 0 \rangle,$$

$$\text{vi) } \zeta_1^{\dagger} \mathbf{P}^{[220] \otimes [22]} | 0 \rangle = \{ a_{11}^{\dagger} a_{11}^{\dagger} a_{21}^{\dagger} a_{22}^{\dagger} + a_{11}^{\dagger} a_{12}^{\dagger} a_{21}^{\dagger} a_{21}^{\dagger} \} | 0 \rangle = 0.$$

\* Group Theory and ..., cap.3

Las condiciones sobre la acción de  $C_3^3$ ,  $C_2^3$  y  $C_1^3$  se verifican trivialmente.

A continuación escribimos los polinomios  $\mathbf{P}^{(\tilde{h}) \otimes \{h\}}$  para cada una de las representaciones  $\{\tilde{h}\} \otimes \{h\}$  involucradas.

Tabla 3

$N$	$[\bar{h}]$	$[h]$	$\mathbf{P}(\bar{h}) \otimes (h)$	$L$	$S$
1	[100]	[10]	$a_{11}^{\uparrow}$	1	1/2
2	[200]	[11]	$a_{11}^{\uparrow} a_{12}^{\uparrow}$	2	0
	[110]	[20]	$a_{11}^{\uparrow} a_{21}^{\uparrow}$	1	1
3	[210]	[21]	$a_{11}^{\uparrow} a_{12}^{\uparrow} a_{21}^{\uparrow}$	2	1/2
	[111]	[30]	$a_{11}^{\uparrow} a_{21}^{\uparrow} a_{31}^{\uparrow}$	0	3/2
4	[220]	[22]	$a_{11}^{\uparrow} a_{12}^{\uparrow} a_{21}^{\uparrow} a_{22}^{\uparrow}$	2	0
	[211]	[31]	$a_{11}^{\uparrow} a_{12}^{\uparrow} a_{21}^{\uparrow} a_{31}^{\uparrow}$	1	1
5	[221]	[32]	$a_{11}^{\uparrow} a_{12}^{\uparrow} a_{21}^{\uparrow} a_{22}^{\uparrow} a_{31}^{\uparrow}$	1	1/2
6	[222]	[33]	$a_{11}^{\uparrow} a_{12}^{\uparrow} a_{21}^{\uparrow} a_{22}^{\uparrow} a_{31}^{\uparrow} a_{32}^{\uparrow}$	0	0

Aunque sabemos que estos estados deben tener la máxima proyección de momento angular orbital  $M_L = L$  y de espín  $M_S = S$ , para conocer los valores de  $L$  y de  $S$  de cada polinomio debemos aplicar el operador de peso del grupo  $SO(3)$  y  $SU(2)$ , respectivamente  $\mathcal{L}_0$  y  $\mathcal{S}_0$ ; que a continuación los vamos a escribir en términos de  $C_{\mu}^{\uparrow}$  y  $\zeta_i^{\uparrow}$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_0 &= \sqrt{2} \sum_{\mu=1}^3 \langle 1m_{\mu}; 10 | 1m_{\mu} \rangle C_{\mu}^{\uparrow} \\
 &= \sqrt{2} \{ (1-1; 10 | 1-1) C_3^{\uparrow} + (10; 10 | 10) C_2^{\uparrow} + (11; 10 | 11) C_1^{\uparrow} \} \\
 &= C_1^{\uparrow} - C_3^{\uparrow}, \tag{2.2.22a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s=1}^2 \langle 1/2m_s; 10 | 1/2m_s \rangle \zeta_s^{\uparrow} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (1/2-1/2; 10 | 1/2-1/2) \zeta_2^{\uparrow} + (1/21/2; 10 | 1/21/2) \zeta_1^{\uparrow} \} \\
 &= \zeta_1^{\uparrow} - \zeta_2^{\uparrow}, \tag{2.2.22b}
 \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos los valores de L y S correspondientes a los polinomios  $P(\hbar) \otimes \{h\}$  (ver columnas quinta y sexta de la tabla anterior), que son los mayores asociados a cada partición. Esto no constituye una regla, y en el capítulo siguiente veremos un caso en el que el estado de máximo peso de una representación no tiene el máximo valor de los momentos (de isospín en este caso) asociados a la misma.

El siguiente problema consiste en obtener estados para todos los momentos angulares L contenidos en cada representación  $\{h\}$  de  $U(3)$ . Para lograr esto, vamos a proceder de una manera heurística siguiendo el camino de construcción de estados como lo hemos estado haciendo en este trabajo. Además, este procedimiento lo utilizaremos en el capítulo siguiente para obtener los estados bariónicos. Sin embargo, existe una forma alternativa de resolver el problema, la cual es más elegante, que utiliza un operador  $\mathcal{M}_{L'L}^*$  que actúa sobre estados de máxima proyección de momento angular en la forma siguiente :

$$\mathcal{M}_{L'L} |LL\rangle \sim |L'L'\rangle.$$

En el apéndice 2.2 se indican los pasos a seguir para la construcción del operador  $\mathcal{M}_{L'L}$  y cómo se utiliza para construir los estados  $|L'L'\rangle$  de nuestro problema.

Para simplificar los cálculos, al producto de k operadores fermiónicos de creación los vamos a denotar por el símbolo:

$$\Delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} = a_{\mu_1 i_1}^\dagger a_{\mu_2 i_2}^\dagger \dots a_{\mu_k i_k}^\dagger,$$

donde  $i_1, \dots, i_k = 1, 2$  caracteriza los índices de  $U_2$ , mientras que  $\mu_1, \dots, \mu_k = 1, 2, 3$  son los de  $U(3)$ , y por supuesto si los índices de dos operadores son iguales,  $\Delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$  es cero. Además se verifica fácilmente que las relaciones de conmutación de los generadores de  $U(2)$  y  $U(3)$  con estas expresiones (actuando sobre el estado de vacío) están dadas por

$$[C_\mu^{i'}, \Delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}] |0\rangle = \sum_{l=1}^k \delta_{\mu_l \mu}^{i'} \Delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} |0\rangle, \quad (2.2.23a)$$

$$[C_j^{j'}, \Delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}] |0\rangle = \sum_{l=1}^k \delta_{i_l j}^{j'} \Delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} |0\rangle, \quad (2.2.23b)$$

El polinomio de máximo peso de la representación  $\{\hbar\} \otimes \{h\}$  del producto directo de grupos  $U(3) \otimes U(2)$  está dado por la expresión

\* Definido en Moshinsky, Group Th. and ... Apéndice III

$$\mathcal{P}(\bar{h}) \otimes \{h\} | 0 = \Delta \begin{matrix} 12 \dots \bar{h}_1 & 12 \dots \bar{h}_2 & 12 \dots \bar{h}_3 \\ 1 \bar{h}_1 & 2 \bar{h}_2 & 3 \bar{h}_3 \end{matrix} | 0, \quad (2.2.24)$$

que se obtiene siguiendo el procedimiento indicado anteriormente, y es directo checar que satisfice las ecuaciones (2.2.20). Considerando la representación  $\{220\} \otimes \{22\}$  como ejemplo, la expresión (2.2.21) se escribe

$$\mathcal{P}^{\{220\} \otimes \{22\}} = \Delta \begin{matrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix} | 0. \quad (2.2.25)$$

Debido a que tenemos fermiones, y la representación producto debe ser  $\{1^k\}$ , entonces la partición  $\{\bar{h}\}$  fija automáticamente a la partición  $\{h\}$ ; es decir, cualquier estado de la forma  $\sum_{\mu_i} \Delta \begin{matrix} 12 \dots \bar{h}_1 & 12 \dots \bar{h}_2 & 12 \dots \bar{h}_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \dots \mu_k \end{matrix} | 0$  debe pertenecer a la representación  $\{h\} \otimes \{h\}$ .

En la Tabla 1 se dan los polinomios de máximo peso de sistemas de 1 a 6 fermiones  $\mathcal{P}$ , para construir estados con otros momentos angulares  $L'$  contenidos en la representación  $\{\bar{h}\}$  de  $U(3)$  proponemos el polinomio  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} | 0 = \sum_{\mu_1 \dots \mu_k = 1, 2, 3} A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \Delta \begin{matrix} 12 \dots \bar{h}_1 & 12 \dots \bar{h}_2 & 12 \dots \bar{h}_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots \mu_k \end{matrix} | 0. \quad (2.2.26a)$$

Este polinomio necesariamente pertenece a la representación  $\{\bar{h}\} \otimes \{h\}$ . Si los coeficientes  $A_{\mu_1 \dots \mu_k}$  se eligen de tal manera que se cumplan las ecuaciones

$$\mathcal{L}_0 \mathcal{P} | 0 = L' \mathcal{P} | 0, \quad (2.2.26b)$$

$$\mathcal{L}_+ \mathcal{P} | 0 = 0. \quad (2.2.26c)$$

Se puede obtener una relación de recurrencia para los coeficientes  $A_{\mu_1 \dots \mu_k}$  que, una vez resuelta, dará por resultado un polinomio  $\mathcal{P} | 0$  con momento angular  $L'$  y máxima proyección. Esto lo tenemos que hacer solamente para las representaciones  $\{\bar{h}\} \otimes \{h\}$  que contienen más de un momento angular, que en nuestro caso son: a)  $\{200\} \otimes \{11\}$  que contiene a los momentos angulares 0 y 2; b)  $\{210\} \otimes \{21\}$  que tiene asociados  $L' = 1$  y 2; y c)  $\{220\} \otimes \{22\}$  con  $L' = 0$  y 2.

De acuerdo a la expresión (2.2.26a) para el caso  $\{200\} \otimes \{11\}$  proponemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 | 0 &= \sum_{\mu_1 \mu_2} A_{\mu_1 \mu_2} |\mu_1, \mu_2\rangle \\ &= \sum_{\mu_1 \mu_2} A_{\mu_1 \mu_2} \Delta \begin{matrix} 12 \\ \mu_1 \mu_2 \end{matrix} | 0. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Los operadores de momento angular que necesitamos son  $\mathcal{L}_0$ , que fue dado en (2.2.22a), y  $\mathcal{L}_{+1} = -\mathcal{C}_1^3 - \mathcal{C}_2^3$ . Aplicando la condición (2.2.26b) a  $\mathcal{P}_1$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \mathcal{P}_1 | 0 \rangle &= \sum_{\mu_1 \mu_2} A_{\mu_1 \mu_2} \{ \delta_{\mu_1}^1 \Delta_{1\mu_2}^{12} + \delta_{\mu_2}^1 \Delta_{\mu_1 1}^{12} - \delta_{\mu_1}^3 \Delta_{3\mu_2}^{12} - \delta_{\mu_2}^3 \Delta_{\mu_1 3}^{12} \} | 0 \rangle \\ &= \sum_{\mu} \{ A_{1\mu} \Delta_{1\mu}^{12} + A_{\mu 1} \Delta_{\mu 1}^{12} - A_{3\mu} \Delta_{3\mu}^{12} - A_{\mu 3} \Delta_{\mu 3}^{12} \} | 0 \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó que el estado corresponde a momento angular cero. Utilizando que los estados  $|\mu_1, \mu_2\rangle$  son ortogonales en los índices  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , de la expresión anterior es inmediato concluir que  $A_{13}$ ,  $A_{31}$  y  $A_{22}$  son los únicos coeficientes distintos de cero. Tomando ésto en cuenta, tenemos

$$\mathcal{P}_1 | 0 \rangle = \{ A_{13} \Delta_{13}^{12} + A_{22} \Delta_{22}^{12} + A_{31} \Delta_{31}^{12} \} | 0 \rangle.$$

Aplicando la relación (2.2.26c) al polinomio anterior, obtenemos los resultados siguientes:  $A_{31} + A_{22} = 0$  y  $A_{13} + A_{22} = 0$ ; i. e. ,

$$\mathcal{P}_1 | 0 \rangle = A \{ \Delta_{31}^{12} + \Delta_{13}^{12} - \Delta_{22}^{12} \} | 0 \rangle,$$

donde el coeficiente A se determina normalizando el estado:  $\langle 0 | \mathcal{P}_1^\dagger \mathcal{P}_1 | 0 \rangle = 3A^2 = 1$ , concluyéndose

$$| \{200\} \otimes \{11\}; L = M_L = 0; S = M_S = 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \Delta_{31}^{12} + \Delta_{13}^{12} - \Delta_{22}^{12} \} | 0 \rangle. \quad (2.2.28)$$

Para la representación  $\{210\} \otimes \{21\}$ , con momento angular uno proponemos el estado:

$$\mathcal{P}_2 | 0 \rangle = \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Delta_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{121} | 0 \rangle$$

Aplicando en forma similar al caso anterior la condición (2.2.26b) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \mathcal{P}_2 | 0 \rangle &= \sum_{\mu_1 \mu_2} A_{1\mu_2 \mu_3} \Delta_{1\mu_2 \mu_3}^{121} + A_{\mu_1 1 \mu_3} \Delta_{\mu_1 1 \mu_3}^{121} + A_{\mu_1 \mu_2 1} \Delta_{\mu_1 \mu_2 1}^{121} \\ &\quad - A_{3\mu_2 \mu_3} \Delta_{3\mu_2 \mu_3}^{121} - A_{\mu_1 3 \mu_3} \Delta_{\mu_1 3 \mu_3}^{121} - A_{\mu_1 \mu_2 3} \Delta_{\mu_1 \mu_2 3}^{121} \\ &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Delta_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{121}, \end{aligned}$$

ya que  $L' = 1$ . Tomando en cuenta la forma del polinomio de máximo peso y las propiedades de anticonmutación de los operadores de creación, para tener  $A_{\mu_1\mu_2\mu_3} \neq 0$  debe ocurrir  $\mu_1 \neq \mu_3$  y que  $A_{\mu_1\mu_2\mu_3} = -A_{\mu_3\mu_2\mu_1}$ . Como la acción de  $\mathcal{L}_0$  sobre cada término  $\Delta_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{121}$  es proporcional al mismo, entonces cada término separadamente debe ser tal que  $\mathcal{L}_0 \Delta_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{121} = \Delta_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{121}$ . Así, solamente los coeficientes  $A_{\mu_1\mu_2\mu_3}$  cuyos índices  $\{\mu_1\mu_2\mu_3\} \in I = \{\{113\}, \{311\}, \{221\}, \{122\}\}$  satisfacen esta condición y necesariamente la expresión anterior.

Considerando la condición (2.2.26c) se obtiene

$$(C_1^1 - C_3^3) \sum_{\{\mu_1\mu_2\mu_3 \in I\}} A_{\mu_1\mu_2\mu_3} \Delta_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{121} = 0$$

donde podemos escribir explícitamente la suma utilizando las propiedades  $A_{113} = -A_{311} = A$  y  $A_{221} = -A_{122} = B$ ; entonces

$$\begin{aligned} (C_1^1 - C_3^3) \mathcal{P}_2 | 0 \rangle &= (A(\Delta_{113}^{121} - \Delta_{311}^{121}) + B(\Delta_{221}^{121} + \Delta_{122}^{121} - \Delta_{212}^{121} - \Delta_{121}^{121})) | 0 \rangle \\ &= (\Delta_{113}^{121}(A - B) + \Delta_{211}^{121}(B - A)) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

ésta se anula si y sólo si  $A = B$ . En conclusión, obtenemos el estado

$$\mathcal{P}_2 | 0 \rangle = A(\Delta_{113}^{121} - \Delta_{311}^{121} + \Delta_{221}^{121} - \Delta_{212}^{121}) | 0 \rangle,$$

que al normalizarlo, y teniendo cuidado de considerar  $\Delta_{113}^{121} = -\Delta_{311}^{121}$  y  $\Delta_{221}^{121} = -\Delta_{122}^{121}$ , toma la forma

$$| \{210\} \otimes \{21\}; L = M_L = 1; S = M_S = \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta_{113}^{121} - \Delta_{222}^{121}) | 0 \rangle. \quad (2.2.29)$$

Finalmente consideramos la construcción del estado que porta la representación  $\{220\} \otimes \{22\}$ , con momento angular cero, i.e.

$$\mathcal{P}_3 | 0 \rangle = \sum_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} A_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \Delta_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{1212} | 0 \rangle.$$

Nuevamente observando los índices superiores del factor  $\Delta$  y tomando en cuenta que éste debe ser totalmente antisimétrico ante permutaciones de los operadores, obtenemos las siguientes restricciones:

$$A_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -A_{\mu_1\mu_4\mu_3\mu_2} = -A_{\mu_3\mu_2\mu_1\mu_4}; \mu_1 \neq \mu_3; \mu_2 \neq \mu_4$$

Estas restricciones dan por resultado que solamente sean distintos de cero los siguientes coeficientes:  $A_{1122}, A_{1123}, A_{1223}, A_{2132}, A_{2133}, A_{2233}, A_{1132}, A_{1133}, A_{1233}$ . Aplicando la condición (2.2.26b), con  $L' = 0$ ; se encuentra que cada factor  $\Delta_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{1212}$  debe satisfacer por separado la ecuación  $\mathcal{L}_0 \Delta_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{1212} | 0 \rangle = 0$ , lo que puede cumplirse si entre los subíndices  $\{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\}$  tenemos el mismo número de 1 que de subíndices iguales a 3. Entonces, de los coeficientes anteriores solo quedan  $A_{1133}, A_{1223}, A_{2132} \neq 0$ .

Por medio de la expresión (2.2.26c), i. e.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ \mathcal{P}_3 | 0 \rangle &= \mathcal{L}_+ \{ A_{1133} \Delta_{1133}^{1212} + A_{1223} \Delta_{1223}^{1212} + A_{2132} \Delta_{2132}^{1212} \} | 0 \rangle \\ &= A_{1133} \{ \Delta_{1123}^{1212} + \Delta_{1132}^{1212} \} | 0 \rangle + A_{1223} \Delta_{1223}^{1212} | 0 \rangle + A_{2132} \Delta_{1132}^{1212} | 0 \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

que se anula tomando  $A_{1223} = A_{2132} = -A_{1133}$  y normalizando al estado resultante se tiene

$$| \{220\} \otimes \{22\}; L = M_L = 0; S = M_S = 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \Delta_{2132}^{1212} + \Delta_{1223}^{1212} - \Delta_{1133}^{1212} \} | 0 \rangle. \quad (2.2.30)$$

En el apéndice 2.2 se obtendrán los estados (2.2.28), (2.2.29) y (2.2.30) utilizando el operador  $\mathcal{M}_{L'L}$ . Para completar la base de estados  $\{ \{ \vec{h} \} \otimes \{ h \}; L, M_L; S, M_S \}$ , sólo hace falta aplicar el operador  $\mathcal{L}_-$  a los polinomios de máxima proyección. Finalmente a través de un coeficiente de Clebsch-Gordan se construye la base de estados asociados a la cadena de grupos (2.2.1).

### 3 Momentos cuadrupolares

En analogía a lo que se hizo en el capítulo 1 con los estados bosónicos que ahí se obtuvieron, vamos aquí a calcular los momentos cuadrupolares para los estados  $\mathbf{P}(\vec{h}) \otimes \{h\}$  que tenemos en la Tabla 3. Estos estados tienen máxima proyección de momento angular orbital y son por tanto los que interesan para el cálculo. La proyección de espín no interesa ya que el operador  $\mathcal{Q}_{2r}$  está definido en términos de los generadores de  $U(3)$ .

La fórmula para obtener el momento cuadrupolar de un sistema  $|LL\rangle$  está dada en el capítulo anterior (ec. 1.4.14b); el operador  $\mathcal{Q}_{20}$  que utilizaremos es (ver apéndice 2.2):

$$Q_{20} = \frac{1}{\sqrt{6}} C_3^3 - \sqrt{\frac{2}{3}} C_2^2 + \frac{1}{\sqrt{6}} C_1^1 .$$

La aplicación de la ec. (1.4.14b) con los estados  $P^{\{\bar{h}\} \otimes \{h\}}$  es directa. Los resultados los escribiremos en la siguiente Tabla; en la que omitimos escribir explícitamente los polinomios  $P^{\{\bar{h}\} \otimes \{h\}}$ .

Tabla 4

$N$	$\{\bar{h}\}$	$\{h\}$	$L$	$S$	$Q_{NL}$
1	{100}	{10}	1	1/2	1
2	{200}	{11}	2	0	2
	{110}	{20}	1	1	-1
3	{210}	{21}	2	1/2	-2
	{111}	{30}	0	3/2	0
4	{220}	{22}	2	0	-2
	{211}	{31}	1	1	1
5	{221}	{32}	1	1/2	-1
6	{222}	{33}	0	0	0

Las unidades de  $Q_{NL}$  quedan en principio determinadas por la constante  $\alpha$  de la ec. (1.4.2). Como era de esperarse,  $Q_{NL} = 0$  para todos los estados con  $L=0$ . Si vemos los resultados pensando en la imagen partícula-agujero, comprobamos que el momento cuadrupolar asociado a un sistema de  $N$  agujeros tiene el signo opuesto del asociado al sistema equivalente de  $N$  partículas (equivalente en el sentido de que tienen las mismas  $L$  y  $S$ ).

## 4 Apéndice II.1

De la teoría de grupos, sabemos que dado un grupo unitario  $U_n$ , los generadores  $C_{\mu}^{\mu'}$  (con  $\mu', \mu = 1, \dots, n$ ) del grupo se pueden dividir en tres clases :

i) De peso , con  $\mu' = \mu$  .

ii) De ascenso , con  $\mu' > \mu$  .

iii) De descenso , con  $\mu' < \mu$  .

Pensando en el esquema de segunda cuantización, con operadores de creación  $a_{\mu}^{\dagger}$ , sabemos que dado un polinomio homogéneo  $\mathcal{P}$  en términos de estos operadores, tenemos un estado para un sistema de  $N$  partículas al hacer:  $\mathcal{P} | 0 \rangle$ , donde  $N$  es el grado de homogeneidad del polinomio.

Se define el peso  $w_{\mathcal{P}}$  del polinomio  $\mathcal{P}$  como el conjunto de números  $\{w_1 w_2 \dots w_n\}$  tales que

$$C_{\mu}^{\mu} \mathcal{P} | 0 \rangle = w_{\mu} \mathcal{P} | 0 \rangle$$

También, dados dos polinomios  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$ , se dice que  $w_{\mathcal{P}_1}$  es mayor que  $w_{\mathcal{P}_2}$  si en el conjunto  $\{w_1(\mathcal{P}_1) - w_1(\mathcal{P}_2), w_2(\mathcal{P}_1) - w_2(\mathcal{P}_2), \dots, w_n(\mathcal{P}_1) - w_n(\mathcal{P}_2)\}$  el primer número distinto de cero (de izquierda a derecha) es positivo.

Hasta aquí tenemos definiciones que resultan de aplicar criterios arbitrarios. Se puede ver, de lo que hemos dicho, que los operadores de ascenso 'aumentan' el peso del polinomio  $\mathcal{P}$  y los de descenso lo 'reducen'.

Se definen entonces los polinomios  $\mathcal{P}$  de 'máximo peso' como aquellos tales que

$$C_{\mu}^{\mu'} \mathcal{P} | 0 \rangle = 0$$

para todos los operadores  $C_{\mu}^{\mu'}$  de ascenso.

Más aún, se encuentra que

$$C_{\mu}^{\mu} \mathcal{P} | 0 \rangle = h_{\mu} \mathcal{P} | 0 \rangle \text{ con : } h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n$$

donde claramente :  $h_1 + h_2 + \dots + h_n = N$  Es decir, el peso  $\{h\}$  de  $\mathcal{P}$  es una partición de  $N$ .

Sin embargo, sabemos que para cada partición de un número entero positivo en  $n$  partes, existe una representación irreducible de  $U(n)$ <sup>1</sup>. Es decir, podemos utilizar a  $\mathcal{P}$  para generar la base de una representación irreducible a la que podemos etiquetar con la partición  $\{h\}$ . La manera de generarla será actuando con los operadores de descenso de  $U(n)$  sobre  $\mathcal{P}$  y pidiendo que los nuevos estados sean eigenvectores de los operadores de Casimir<sup>†</sup> de una determinada cadena de grupos.

El hecho de que actuando con los generadores de descenso de  $U(n)$  sobre  $\mathcal{P}$  se pueda generar una base completa para una representación irreducible se sigue del teorema de Cartan<sup>2</sup> que establece que el polinomio de máximo peso en una base para una representación irreducible de un grupo de Lie semi-simple es único.

Sin entrar en detalles acerca de la definición de un grupo semi-simple de Lie, diremos simplemente que los grupos unitarios  $U(n)$  satisfacen las condiciones del teorema. Asimismo, del teorema se desprende que el polinomio de mínimo peso (si también existe, como ocurre en los casos de los grupos compactos) es también único (mínimo o máximo es cuestión de convención); de tal manera que, el polinomio  $\vec{\mathcal{P}}$  tal que

$$i) \vec{\mathcal{P}} |0\rangle = R (C_{\mu}^{\mu'}) \mathcal{P} |0\rangle$$

$$ii) C_{\mu}^{\mu'} \vec{\mathcal{P}} |0\rangle = 0 \quad \forall \mu' < \mu$$

es el de mínimo peso y completa en consecuencia la base para la representación irreducible  $\{h\}$  de  $U(n)$ .

Ahora bien, recordando que estamos trabajando en segunda cuantización, y que nuestros operadores de creación  $a_{\mu}^{\dagger}$  representan partículas físicas, sabemos que estos operadores deben satisfacer alguna de las relaciones algebraicas siguientes:

$$\text{Comutación : } [a_{\mu}^{\dagger}, a_{\mu}^{\dagger}] = 0 \leftarrow \text{Bosones}$$

$$\text{Anticonmutación : } \{a_{\mu}^{\dagger}, a_{\mu}^{\dagger}\} = 0 \leftarrow \text{Fermiones}$$

<sup>1</sup> Elpidio Chacón, notas: Representaciones irreducibles de grupos unitarios compactos.

<sup>†</sup> O invariantes, en el sentido de que conmutan con todos los generadores del grupo al que están asociados.

<sup>2</sup> Mencionado en M. Moshinsky : "Bases for Irr. Rep. of Unit. Groups and some apl."

Consideremos ambos casos para ejemplificar, de manera breve y sencilla, las ideas de este apéndice.

a) Caso bosónico :

Supongamos que deseamos construir un polinomio de máximo peso de grado  $N$  con operadores bosónicos para representar estados que porten una simetría  $U(n)$ . En principio tendremos tantos polinomios posibles como el número de particiones de  $N$  en  $n$  elementos. Sin embargo, dada la realización que estamos haciendo de nuestros estados, se puede verificar que el único polinomio que satisface las condiciones de 'peso máximo' es de la forma

$$\mathcal{P}^{[N]} = \frac{1}{\sqrt{N!}} (a_1^\dagger)^N \quad (2.4.1)$$

donde el factor  $\frac{1}{\sqrt{N!}}$  normaliza el estado teniendo en cuenta la conmutatividad de los operadores de creación. Este polinomio pertenece a la representación totalmente simétrica del grupo  $S_n$  (grupo de permutaciones de  $n$  objetos) cuya base se compone de un estado totalmente simétrico ante el intercambio de cualesquiera dos partículas, como es el caso de (2.4.1).

Como los generadores de  $U(n)$  conmutan con los operadores de  $S_n$ <sup>3</sup>, entonces toda la base para la rep. irreducible  $\{N\}$  de  $U(n)$  portará la rep.  $\{N\}$  de  $S_n$ ; es decir, todos los estados construidos a partir de (2.4.1) con los operadores de descenso de  $U(n)$  serán totalmente simétricos ante cualquier permutación entre las partículas.

b) Caso fermiónico:

Ahora intentemos lo mismo que en (a) pero considerando operadores fermiónicos. Dada  $N$  debemos construir  $\mathcal{P}$  recordando que ningún operador fermiónico puede aparecer más de una vez. Así pues, para que la representación sea no nula, se debe tener  $N \leq n$ . La única posibilidad para  $\mathcal{P}$  es entonces

$$\mathcal{P}^{[N]} = a_1^\dagger a_2^\dagger \dots a_N^\dagger \quad (2.4.2)$$

Y vemos que (2.4.2) pertenece a la representación  $\{1^N\}$  de  $U(n)$ . También se pudo haber escogido

$$\mathcal{P} = \sum_P \delta_P \mathcal{P}(a_1^\dagger \dots a_N^\dagger) \quad (2.4.3)$$

<sup>3</sup> Ver Hamermesh, secc. 10 - 4 .

donde  $P$  denota una permutación de los números  $1, 2, \dots, N$ , y  $\delta_P$  la signatura de dicha permutación.

Pero, dadas las relaciones de anticonmutación de los operadores fermiónicos, vemos que (2.4.3) es proporcional a (2.4.2).

Encontramos aquí que (2.4.2) pertenece a la representación  $\{1^N\}$  de  $S_N$ , la cual tiene dimensión 1 y cuya base se compone de funciones antisimétricas ante el intercambio de cualesquiera dos partículas. Así pues, toda la base construida a partir de (2.4.2) portará la representación totalmente antisimétrica de  $S_N$ . Notemos que si  $N = n$ , la base en el grupo unitario tiene dimensión 1 ya que cualquier operador de descenso de  $U(n)$  anularía a (2.4.2). De manera general vamos a enunciar el siguiente resultado de la teoría de grupos: Dada una base para la representación irreducible  $\{h_1 \cdots h_2\}$  del grupo unitario  $U(n)$ , esta base porta a su vez la representación irr.  $\{h_1 \cdots h_n\}$  del grupo  $S_f$  donde  $h_1 + \cdots + h_n = f$ <sup>4</sup>.

Por esta razón, de antemano sabemos que si utilizamos operadores bosónicos para representar nuestros estados con simetría  $U(n)$ , donde éste es el máximo grupo de simetría, estos estados deben portar la representación irreducible  $\{N\}$  que corresponde a funciones totalmente simétricas ante permutaciones de las  $N$  partículas. Cuando realizamos los estados en términos de operadores fermiónicos tendremos entonces la representación  $\{1^N\}$  en el máximo grupo de simetría  $U(n)$ , la cual a su vez corresponde a funciones totalmente antisimétricas ante permutaciones (o de 'signatura' alternante).

De tal manera, para obtener representaciones más complejas de grupos unitarios en realizaciones fermiónicas o bosónicas, es necesario 'romper' la simetría máxima, tal como teníamos, de manera natural, en el Cap.2 con los operadores fermiónicos  $a_{\mu s}^\dagger$ . De esto se habló ya al principio del capítulo y aquí mencionaremos que, 'rompiendo' el índice  $\rho$  de los estados en dos subíndices  $\rho \rightarrow \mu\sigma$ , obtenemos la estructura

$$U(mn) \supset U(m) \otimes U(n) .$$

Y así, en los grupos menores  $U(m)$  y  $U(n)$  podemos tener más representaciones, aunque siempre con las restricciones antes mencionadas para la representación del grupo  $U(mn)$ .

<sup>4</sup> Para una revisión completa de las relaciones entre el grupo simétrico y los grupos unitarios existe una extensa bibliografía más o menos estándar, de la cual podemos mencionar a Chen, Loeb, Hamermesh, Weyl

## 5 Apéndice II.2

El operador  $\mathcal{M}_{L'L}$ 

En el capítulo II apareció la necesidad de encontrar, dentro de una misma representación de  $U(3)$ , estados de máxima proyección para distintos valores del momento angular (que llamaremos  $L'$  y  $L$ ) contenidos en dicha representación. Dada la simplicidad del caso particular, se pudo resolver el problema de manera sencilla estableciendo relaciones de recurrencia entre los coeficientes de un polinomio general al que se le imponen condiciones adecuadas. De gran utilidad fue asimismo la propiedad anticonmutativa de los operadores de creación  $a_{\mu\sigma}^\dagger$ . Sin embargo, para casos más complejos (por ejemplo, con un mayor número de partículas) éste método puede resultar demasiado laborioso y en general es poco directo.

Una forma más elegante de resolver el problema desde el punto de vista de la teoría de grupos consiste en obtener un operador  $\mathcal{M}_{L'L}$  que cambie un estado de máxima proyección  $L$  en un estado con máxima proyección  $L'$ . Si este operador se construye utilizando solamente generadores de  $U(3)$ , entonces no cambiará la representación  $\{h\}$  de dicho grupo al actuar sobre los estados  $|LL\rangle$ .

Para construir el operador  $\mathcal{M}_{L'L}$  vamos a introducir los operadores cuadrupolares  $Q_{2\tau}$  ( $\tau = -2, -1, 0, 1, 2$ ).

En la física nuclear juegan un papel importante las interacciones o transiciones cuadrupolares entre distintos estados. Como su nombre lo indica, éstas interacciones tienen que ver con los campos eléctricos debidos al término un grado superior al dipolar en el desarrollo en serie del campo generado por una distribución de carga (incluso se toman en cuenta transiciones cuadrupolares de masa). Se define entonces el operador 'cuadrupolar'  $Q_{2\tau}$  para introducir estas interacciones<sup>1</sup>:

$$Q_{2\tau} = \left(\frac{2\pi}{15}\right)^{1/2} \{ \mathcal{Y}_{2\tau}(\vec{r}) + \mathcal{Y}_{2\tau}(\vec{p}) \},$$

donde  $\mathcal{Y}_{2\tau}$  son los armónicos esféricos sólidos de segundo orden, cuya forma en coordenadas cartesianas es como sigue<sup>2</sup>:

<sup>1</sup> Moshinsky, *Group Theory and . . .* p.49

<sup>2</sup> Eisenberg, Greiner, *Nuclear Models*, p.39

$$\mathcal{Q}_{2\tau}(\vec{\xi}) = \begin{cases} \left(\frac{16\pi}{5}\right)^{-1/2} \{2\xi_x^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2\} & ; \quad \tau = 0 \\ \mp \left(\frac{8\pi}{15}\right)^{-1/2} \{\xi_x \xi_x \pm \xi_y \xi_x\} & ; \quad \tau = \pm 1 \\ \left(\frac{32\pi}{15}\right)^{-1/2} \{\xi_x^2 - \xi_y^2 \pm 2i\xi_x \xi_y\} & ; \quad \tau = \pm 2 \end{cases}$$

Utilizando estas expresiones en el espacio de coordenadas para los operadores  $\mathcal{Q}_{2\tau}$ , se pueden verificar las siguientes relaciones de conmutación entre el conjunto de operadores  $I = \{\mathcal{N}_p, \mathcal{L}_\sigma, \mathcal{Q}_{2\tau}\}$ :

$$i) [\mathcal{N}_p, B] = 0 \quad \forall B \in I \quad (2.5.1)$$

$$ii) [\mathcal{L}_\sigma, \mathcal{Q}_{2\tau}] = A(1\sigma; 2\tau | 2(\tau + \sigma)) \mathcal{Q}_{2(\tau+\sigma)} \quad (2.5.2)$$

$$iii) [\mathcal{Q}_{2\tau'}, \mathcal{Q}_{2\tau}] = B(2\tau'; 2\tau | 1(\tau + \tau')) \mathcal{L}_{(\tau+\tau')} \quad (2.5.3)$$

con  $A = -\sqrt{6}$  y  $B = \frac{\sqrt{10}}{2}$  que no dependen de  $\sigma, \tau$  ó  $\tau'$ . Estas relaciones de conmutación se preservan cuando escribimos los operadores en su forma de segunda cuantización; ésto se puede demostrar fácilmente. Consideremos los operadores A y B cuya forma en segunda cuantización denotaremos por

$$\tilde{A} = \sum_{\mu\mu'} \langle \mu | A | \mu' \rangle a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu'}$$

$$\tilde{B} = \sum_{\mu\mu'} \langle \mu | B | \mu' \rangle a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu'}$$

Entonces

$$i) [\tilde{A}, \tilde{B}] = \sum_{\mu\mu'} \langle \mu | AB | \mu' \rangle a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu'} - \sum_{\mu\mu'} \langle \mu | BA | \mu' \rangle a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu'}$$

Por otro lado, también tenemos

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} =$$

$$= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_1' \mu_2'} \langle \mu_1 | A | \mu_1' \rangle \langle \mu_2 | B | \mu_2' \rangle a_{\mu_1}^{\dagger} a_{\mu_1'} a_{\mu_2}^{\dagger} a_{\mu_2'} -$$

$$- \sum_{\mu_1 \bar{\mu}_1 \mu_2 \bar{\mu}_2} \langle \mu_1 | B | \bar{\mu}_1 \rangle \langle \mu_2 | A | \bar{\mu}_2 \rangle a_{\mu_1}^\dagger a_{\bar{\mu}_1} a_{\mu_2}^\dagger a_{\bar{\mu}_2}$$

Considerando  $a_{\mu_1}^\dagger a_{\bar{\mu}_2} = \delta_{\bar{\mu}_1 \mu_2} \pm a_{\mu_2}^\dagger a_{\bar{\mu}_1}$ , donde el signo  $\pm$  se incluye para considerar bosones o fermiones, el miembro derecho queda:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu_1 k \bar{\mu}_2} \langle \mu_1 | A | k \rangle \langle k | B | \bar{\mu}_2 \rangle a_{\mu_1}^\dagger a_{\bar{\mu}_2} - \sum_{\mu_1 k \bar{\mu}_2} \langle \mu_1 | B | k \rangle \langle k | A | \bar{\mu}_2 \rangle a_{\mu_1}^\dagger a_{\bar{\mu}_2} \\ & \pm \left\{ \sum_{\mu_1 \bar{\mu}_1 \mu_2 \bar{\mu}_2} \langle \mu_1 | A | \bar{\mu}_1 \rangle \langle \mu_2 | B | \bar{\mu}_2 \rangle a_{\mu_1}^\dagger a_{\bar{\mu}_1} a_{\mu_2}^\dagger a_{\bar{\mu}_2} - \right. \\ & \left. - \sum_{\mu_1 \bar{\mu}_1 \mu_2 \bar{\mu}_2} \langle \mu_1 | A | \bar{\mu}_1 \rangle \langle \mu_2 | B | \bar{\mu}_2 \rangle a_{\mu_1}^\dagger a_{\bar{\mu}_2} a_{\mu_2}^\dagger a_{\bar{\mu}_1} \right\} \end{aligned}$$

Però es obvio que  $\sum_k \langle \mu_1 | A | k \rangle \langle k | B | \bar{\mu}_2 \rangle = \langle \mu_1 | AB | \bar{\mu}_2 \rangle$  y  $\sum_k \langle \mu_1 | B | k \rangle \langle k | A | \bar{\mu}_2 \rangle = \langle \mu_1 | BA | \bar{\mu}_2 \rangle$ .

Entonces  $\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} = \sum_{\mu_1 \bar{\mu}_2} \langle \mu_1 | [A, B] | \bar{\mu}_2 \rangle a_{\mu_1}^\dagger a_{\bar{\mu}_2}$ . Es decir, la forma en segunda cuantización del conmutador entre A y B es igual al conmutador entre las formas en segunda cuantización de A y B separadamente.

De las ecuaciones (2.5.1, 2.5.2, 2.5.3) vemos que los operadores del conjunto I forman un álgebra de  $U(3)$ ; es decir, son generadores del grupo, y podemos escribirlos en términos de los operadores  $C_{\mu}^{\mu'}$  definidos en el capítulo 2. Para el caso de  $\mathcal{L}_q$  y  $\mathcal{N}_p$  ya lo sabíamos, y para el caso de  $\mathcal{Q}_{2r}$  tenemos<sup>3</sup>

$$\mathcal{Q}_{2r} = \sqrt{\frac{5}{3}} \sum_{q'q''} (1q'; 2r; 1q'') C_{q'}^{q''}$$

Explícitamente

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{2-2} &= C_3^3; \\ \mathcal{Q}_{2-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} C_3^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} C_2^1; \\ \mathcal{Q}_{20} &= \frac{1}{\sqrt{6}} C_3^3 - \sqrt{\frac{3}{2}} C_2^2 + \frac{1}{\sqrt{6}} C_1^1; \\ \mathcal{Q}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{2}} C_2^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} C_1^1; \\ \mathcal{Q}_{22} &= C_1^1; \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Moshinsky, Group Theory and . . . p.43

La ventaja de utilizar los operadores de  $I$  es que estos representan cantidades físicas relevantes en cualquier problema de muchos cuerpos (no solamente en la física nuclear).

Vamos ahora al operador  $\mathcal{M}_{L'L}$ ; sabemos ya que si lo construimos utilizando operadores  $\mathcal{Q}_{2r}$  y  $\mathcal{L}_q$  dejará invariantes las representaciones de  $U(3)$ . De lo que hemos dicho, se desprende que  $\mathcal{M}_{L'L}$  debe satisfacer las siguientes condiciones

$$a) \mathcal{L}_0 \{ \mathcal{M}_{L'L} | LL \} = L' \{ \mathcal{M}_{L'L} | L'L \} \quad (2.5.4)$$

$$b) \mathcal{L}_{+1} \{ \mathcal{M}_{L'L} | LL \} = 0 \quad (2.5.5)$$

Estas condiciones además son suficientes para lo que necesitamos, ya que ambas implican  $\{ \mathcal{M}_{L'L} | L'L \} \sim | L'L \rangle$ . Si escribimos las condiciones (2.5.4 y 2.5.5) en términos de conmutadores tendremos

$$a.1) [\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_{L'L}] = (L' - L) \mathcal{M}_{L'L}$$

$$b.1) [\mathcal{L}_{+1}, \mathcal{M}_{L'L} | LL] = 0$$

A continuación vamos a mostrar que el operador  $\mathcal{M}_{L'L}$  definido en el apéndice III del libro de Moshinsky (ya citado) como:

$$\mathcal{M}_{L'L} = \sum_{\tau=-2}^2 \langle 2 \tau; L L' - \tau | L' L' \rangle \left\{ \frac{(L + L' - \tau)!}{(L - L' + \tau)!(2L)!} \right\}^{1/2} \mathcal{Q}_{2r}(\sqrt{2}\mathcal{L}_{-1})^{L-L'+\tau}$$

Satisface las condiciones (a.1, b.1).

a.1) Consideremos el conmutador  $[\mathcal{L}_0, \mathcal{Q}_{2r}] = \tau \mathcal{Q}_{2r}$  (que es equivalente a (2.5.2) como se puede verificar calculando los coeficientes de Clebsh-Gordan correspondientes). También sabemos:  $[\mathcal{L}_0, (\sqrt{2}\mathcal{L}_{-1})^{L-L'+\tau}] = -(L - L' + \tau) (\sqrt{2}\mathcal{L}_{-1})^{L-L'+\tau}$ . Para simplificar la notación definamos:

$$F_r = \langle 2 \tau; L L' - \tau | L' L' \rangle \left\{ \frac{(L + L' - \tau)!}{(L - L' + \tau)!(2L)!} \right\}^{1/2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_{L',L}] &= \sum_{\tau=-2}^2 F_{\tau} \tau \mathcal{Q}_{2\tau} (\sqrt{2}\mathcal{L}_{-1})^{L-L'+\tau} - (L-L'+\tau) \mathcal{Q}_{2\tau} (\sqrt{2}\mathcal{L}_{-1})^{L-L'+\tau} \\ &= (L'-L) \sum_{\tau=-2}^2 F_{\tau} \mathcal{Q}_{2\tau} (\sqrt{2}\mathcal{L}_{-1})^{L-L'+\tau} = (L'-L) \mathcal{M}_{L',L} \end{aligned}$$

De manera que (a.1) se satisface.

b.1) Sea  $|L'L\rangle$  un polinomio de máxima proyección escrito en términos de operadores  $a_{\mu\sigma}^{\dagger}$  actuando sobre  $|0\rangle$ ; consideremos también lo siguiente:

$$1. - [\mathcal{L}_{+1}, \mathcal{Q}_{2\tau}] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \{(2-\tau)(2+\tau+1)\}^{1/2} \mathcal{Q}_{2(\tau+1)}$$

(Que es equivalente a (2.5.2)).

$$\begin{aligned} 2. - [\mathcal{L}_{+1}, (\sqrt{2}\mathcal{L}_{-1})^{L-L'+\tau} |LL\rangle] &= \mathcal{L}_{+1} (\sqrt{2}\mathcal{L}_{-1})^{L-L'+\tau} |LL\rangle = \\ &= \mathcal{L}_{+1} \left\{ \frac{(L-L'+\tau)(2L)!}{(L+L'-\tau)!} \right\}^{1/2} |LL'-\tau\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{(L-L'+\tau)(2L)!}{(L+L'-\tau)!} \right\}^{1/2} \{(L-L'+\tau)(L+L'-\tau+1)\}^{1/2} |LL'-\tau+1\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{(L-L'+\tau-1)(2L)!}{(L+L'-\tau+1)!} \right\}^{1/2} (L-L'+\tau)(L+L'-\tau+1) |LL'-\tau+1\rangle \end{aligned}$$

Con esto, vemos que

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{+1}, \mathcal{M}_{L',L} |LL\rangle] &= \sum_{\tau=-2}^2 -\frac{1}{\sqrt{2}} F_{\tau} \{(2-\tau)(2+\tau+1)\}^{1/2} \mathcal{Q}_{2(\tau+1)} (\sqrt{2}\mathcal{L}_{-1})^{L-L'+\tau} + \\ &+ \mathcal{Q}_{2\tau} [\mathcal{L}_{+1}, (\sqrt{2}\mathcal{L}_{-1})^{L-L'+\tau} |LL\rangle] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\tau=-2}^1 -\frac{1}{\sqrt{2}} F_{\tau} \{(2-\tau)(2+\tau+1)\}^{1/2} \left\{ \frac{(L-L'+\tau)(2L)!}{(L+L'-\tau)!} \right\}^{1/2} Q_{2(\tau+1)} | LL' - \tau \rangle + \\
&+ \sum_{\tau=-2}^2 -\frac{1}{\sqrt{2}} F_{\tau} (L-L'+\tau)(L+L'-\tau+1) \left\{ \frac{(L-L'+\tau-1)(2L)!}{(L+L'-\tau+1)!} \right\}^{1/2} \bullet \\
&\quad \bullet Q_{2\tau} | LL' - \tau + 1 \rangle
\end{aligned}$$

En la primera suma renombramos el índice  $\tau \rightarrow \tau+1$  sobre el que se suma

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_{+1}, \mathcal{M}_{L'L}] | LL \rangle &= \sum_{\tau=-1}^2 -\frac{1}{\sqrt{2}} F_{\tau-1} \left\{ \frac{(L-L'+\tau-1)(2L)!}{(L+L'-\tau+1)!} \right\}^{1/2} \bullet \\
&\quad \bullet \{(2-\tau+1)(2+\tau)\}^{1/2} Q_{2\tau} | LL' - \tau + 1 \rangle + \\
&+ \sum_{\tau=-2}^2 -\frac{1}{\sqrt{2}} F_{\tau} (L-L'+\tau)(L+L'-\tau+1) \left\{ \frac{(L-L'+\tau-1)(2L)!}{(L+L'-\tau+1)!} \right\}^{1/2} \bullet \\
&\quad \bullet Q_{2\tau} | LL' - \tau + 1 \rangle
\end{aligned}$$

$$\text{Con } F_{\tau-1} \left\{ \frac{(L-L'+\tau-1)(2L)!}{(L+L'-\tau+1)!} \right\}^{1/2} = (2\tau-1; L'L' - \tau + 1 | L'L')$$

$$F_{\tau} \left\{ \frac{(L-L'+\tau-1)(2L)!}{(L+L'-\tau+1)!} \right\}^{1/2} (L+L'-\tau+1)(L-L'+\tau) = (2\tau; L'L' - \tau; L'L')$$

$$(L-L'+\tau)^{1/2} (L+L'-\tau+1)^{1/2}$$

$$\Rightarrow [\mathcal{L}_{+1}, \mathcal{M}_{L'L}] | LL \rangle =$$

$$= \sum_{\tau=-1}^2 -\frac{1}{\sqrt{2}} \{(2\tau-1; L'L' - \tau + 1 | L'L') \{(2-\tau+1)(2+\tau)\}^{1/2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + (2\tau; L L' - \tau | L' L')(L - L' + \tau)^{1/2}(L + L' - \tau + 1)^{1/2} | L L' - \tau + 1 \rangle - \\
 & - \frac{1}{\sqrt{2}} (2 - 2; L L' + 2 | L' L')(L - L' - 2)^{1/2}(L + L' + 3)^{1/2} | L L' + 3 \rangle
 \end{aligned}$$

Analicemos primero la suma. Sabemos que los coeficientes de Clebsch-Gordan que aparecen están dados por

$$\begin{aligned}
 (2\tau; L L' - \tau | L' L') & = (-1)^\tau \left\{ \frac{2L'+1}{5} \right\}^{1/2} \bullet \\
 & \bullet \left\{ \frac{(2L+1)(2L')(L-L'+2)(2+\tau)(L+L'-\tau)}{(L-L+2)(L+L-2)(L+L'+3)(2-\tau)(L-L'+\tau)} \right\}^{1/2}
 \end{aligned}$$

Entonces se desprende que

$$\frac{(2\tau; L L' - \tau | L' L')}{(2\tau - 1; L L' - \tau + 1 | L' L')} = - \left\{ \frac{(2+\tau)(2-\tau+1)}{(L-L'+\tau)(L+L'-\tau+1)} \right\}^{1/2}$$

Así vemos que los términos de la suma con  $\tau = -1, 0, 1, 2$  se anulan idénticamente. Para el último sumando que queda, vemos que se anula si  $L' = L - 1$ , o  $L' = L - 2$  pero no se anula necesariamente para  $L' \leq L - 3$ .

En conclusión, la condición (b) se cumple para toda  $L$  siempre y cuando  $L'$  satisfaga  $L - 2 \leq L' < L$ . Desde luego que esto no limita la posibilidad de obtener cualquier multiplete  $L'$  contenido en  $U(3)$  ya que se puede construir un operador de la forma  $G_{L_a L_b} = \mathcal{M}_{L_a L_1} \bullet \mathcal{M}_{L_1 L_2} \bullet \dots \bullet \mathcal{M}_{L_n L_b}$  con  $L_a$  y  $L_b$  arbitrarios.

Por lo demás, para las representaciones que tenemos de  $U(3)$  en el Cap. 2, vemos que en ningún caso  $L$  y  $L'$  difieren en más de dos unidades, así que nos bastará con aplicar un sólo operador  $\mathcal{M}_{L' L}$  en cada caso.

Vamos a hacer uso de este operador para obtener los mismos estados  $|L' L'\rangle$  que fueron encontrados en el Cap. 2. Siguiendo la secuencia del capítulo, enumeramos las representaciones para las que tenemos momentos angulares distintos  $L', L$

a)  $\{200\} \otimes [11]; L = 2, L' = 0.$

b)  $\{210\} \otimes [21]; L = 2, L' = 1.$

$$c) \{220\} \otimes [22]; L = 2, L' = 0.$$

Vemos que se tienen que construir los dos operadores  $\mathcal{M}_{02}$  y  $\mathcal{M}_{12}$ ; de las fórmulas para  $\mathcal{M}_{L'L}$  y teniendo en cuenta la forma en segunda cuantización de  $\mathcal{Q}_{2r}$  obtenemos:

$$I. - \mathcal{M}_{02} = \frac{1}{\sqrt{5}} \{C_3^1 + \frac{1}{2}(C_2^2 - C_2^1)(C_2^1 + C_3^2)\} + \frac{1}{6}(C_3^3 - 2C_2^2 + C_1^1)(C_2^1 + C_3^2)^2 - \\ - \frac{1}{6}(C_3^3 - C_1^1)(C_2^1 + C_3^2)^3 + \frac{1}{6}C_1^1(C_2^1 + C_3^2)^4$$

$$II. - \mathcal{M}_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(C_2^2 - C_2^1) + \frac{1}{4}(C_3^3 - 2C_2^2 + C_1^1)(C_2^1 + C_3^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}}(C_2^2 - C_1^1)(C_2^1 + C_3^2)^2 + \frac{1}{12}C_1^1(C_2^1 + C_3^2)^3 \right\}$$

a) El polinomio de máximo peso con  $L=2$  es:  $P^{[220] \otimes [11]} = \Delta_{11}^2$ .<sup>4</sup> Actuamos primero con las potencias de  $\mathcal{L}_+$ :

$$i) (C_2^1 + C_3^2)\Delta_{11}^2 | 0 \rangle = (\Delta_{12}^2 + \Delta_{21}^2) | 0 \rangle$$

$$ii) (C_2^1 + C_3^2)^2 \Delta_{11}^2 | 0 \rangle = (2\Delta_{22}^2 + \Delta_{13}^2 + \Delta_{31}^2) | 0 \rangle$$

$$iii) (C_2^1 + C_3^2)^3 \Delta_{11}^2 | 0 \rangle = 3(\Delta_{23}^2 + \Delta_{32}^2) | 0 \rangle$$

$$iv) (C_2^1 + C_3^2)^4 \Delta_{11}^2 | 0 \rangle = 6\Delta_{33}^2 | 0 \rangle$$

Entonces

$$\mathcal{M}_{02}\Delta_{11}^2 | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \{ \Delta_{13}^2 + \Delta_{31}^2 + \frac{1}{2}(C_2^2 - C_2^1)(\Delta_{12}^2 + \Delta_{21}^2) + \\ + \frac{1}{6}(C_3^3 - 2C_2^2 + C_1^1)(2\Delta_{22}^2 + \Delta_{13}^2 + \Delta_{31}^2) - \frac{1}{6}(C_3^3 - C_1^1)3(\Delta_{23}^2 + \Delta_{32}^2) + \frac{1}{6}C_1^1 6\Delta_{33}^2 \} | 0 \rangle$$

<sup>4</sup> La notación es la misma que la utilizada en el capítulo 2

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{20}{6} (\Delta_{13}^{12} + \Delta_{31}^{12} - \Delta_{22}^{12}) | 0 \rangle$$

Normalizando el estado obtenido

$$\mathcal{M}_2 \Delta_{11}^{12} | 0 \rangle \sim \mathcal{P}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\Delta_{13}^{12} + \Delta_{31}^{12} - \Delta_{22}^{12}) | 0 \rangle$$

Que es justamente el polinomio que tenemos en la ec. (2.2.28).

b) Tenemos  $\mathbf{P}^{(210) \otimes (21)} = \Delta_{112}^{121}$ . Vamos a aplicar  $\mathcal{M}_2$  separadamente

$$i) \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{2}} (C_3^2 - C_2^2) \Delta_{112}^{121} | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (\Delta_{113}^{121} - \Delta_{122}^{121}) | 0 \rangle$$

$$ii) \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{4} (C_3^3 - 2C_2^2 + C_1^3) (C_2^2 + C_3^2) \Delta_{112}^{121} | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{3}{4} (\Delta_{113}^{121} - \Delta_{122}^{121}) | 0 \rangle$$

$$iii) -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} (C_3^3 - C_1^2) (C_2^2 + C_3^2)^2 \Delta_{112}^{121} | 0 \rangle = \frac{3}{4\sqrt{5}} (\Delta_{113}^{121} - \Delta_{122}^{121}) | 0 \rangle$$

$$iv) \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{3}{12} C_1^3 (C_2^2 + C_3^2)^3 \Delta_{112}^{121} | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{3}{12} (\Delta_{113}^{121} - \Delta_{122}^{121}) | 0 \rangle$$

En suma,  $\mathcal{M}_2 \mathbf{P}^{(210) \otimes (21)} | 0 \rangle \sim \mathcal{P}_2 | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta_{113}^{121} - \Delta_{122}^{121}) | 0 \rangle$ . Como tenemos en (2.2.29). c)  $\mathbf{P}^{(220) \otimes (22)} | 0 \rangle = \Delta_{1122}^{1212} | 0 \rangle$ ; procediendo de manera análoga a los casos anteriores

$$i) C_3^4 \Delta_{1122}^{1212} | 0 \rangle = (\Delta_{3122}^{1212} + \Delta_{1322}^{1212}) | 0 \rangle$$

$$ii) \frac{1}{2} (C_3^2 - C_2^2) (C_2^2 + C_3^2) \Delta_{1122}^{1212} | 0 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} (2\Delta_{1133}^{1212} - \Delta_{2132}^{1212} - \Delta_{1223}^{1212}) | 0 \rangle$$

$$\text{iii) } \frac{1}{6}(c_3^3 - 2c_2^2 + c_1^2)(c_2 + c_3)^2 \Delta_{1122}^{212} | 0 \rangle = \frac{1}{6}(-2\Delta_{2132}^{212} - 2\Delta_{2233}^{212} + 8\Delta_{1133}^{212}) | 0 \rangle$$

$$\text{iv) } -\frac{1}{6}(c_3^3 - c_1^2)(c_2 + c_3)^3 \Delta_{1122}^{212} | 0 \rangle = \frac{1}{2}(2\Delta_{1133}^{212} - \Delta_{1223}^{212} - \Delta_{2133}^{212}) | 0 \rangle$$

$$\frac{1}{6}c_3^3(c_2 + c_3)^4 \Delta_{1122}^{212} | 0 \rangle = \{\Delta_{2213}^{212} + \Delta_{2231}^{212}\} | 0 \rangle$$

Sumando tenemos

$$\mathcal{M}_2 \Delta_{1122}^{212} | 0 \rangle = \frac{20}{6}(\Delta_{3122}^{212} + \Delta_{1322}^{212} + \Delta_{1133}^{212}) | 0 \rangle$$

Y normalizando

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 \Delta_{1122}^{212} | 0 \rangle &\sim \frac{1}{\sqrt{3}}(\Delta_{3122}^{212} + \Delta_{1322}^{212} + \Delta_{1133}^{212}) | 0 \rangle = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}(\Delta_{2132}^{212} + \Delta_{1223}^{212} - \Delta_{1133}^{212}) | 0 \rangle = \mathcal{P}_3 | 0 \rangle \end{aligned}$$

como esperábamos obtener (c.f. (2.2.30))

**6 REFERENCIAS**

[ 1 ] E. Wigner; Group Theory .

[ 2 ] A.R. Edmonds Angular Momentum in Quantum Mechanics Princeton University Press, Princeton N.J. 3a. impresión 1974 .

[ 3 ] M.Moshinsky; The harmonic oscillator in Modern Physics:

from Atoms to Quarks Gordon and Breach Science Publishers, Escocia 1969 .

Capítulo II , sección 10 .

[ 4 ] T.A. Brody, M.Moshinsky; Tablas de Paréntesis de Transformación Monografías del Instituto de Física, México 1960 . Capítulo 2, sección 1 y Tablas anexas .

[ 5 ] De Shalit, Feshbach; Theoretical Nuclear Physics Volumen I , p.373 .

[ 6 ] Jin-Quan Chen; ver Ref. de la Introducción.

[ 7 ] Ernest M. Loebl (Editor); Group Theory and its Applications Volumen 1 , Academic Press, USA 1971 . Ver el artículo de W.J. Holman III, y L.C. Biedenharn: "The representations and Tensor Operators of the Unitary Groups" Secc. I .

[ 8 ] M.Hamermesh; ver Ref. de la Introducción.

[ 9 ] Hermann Weyl; The classical Groups, their invariants and representations

Princeton, N.J. University, 1946 .

[ 10 ] Bonatsos; Capítulos 11 y 12 .

## Capítulo 3

---

## SIMETRÍAS DINÁMICAS EN BARIONES

### 1 Introducción

En este capítulo veremos cómo las ideas de la teoría de grupos se aplican en el tratamiento de una de las fronteras contemporáneas de la Física: las partículas elementales. El objetivo será ilustrar algunos de los resultados más importantes que ha producido el modelo  $SU(3)$  de los quarks utilizando para ello las técnicas que hemos descrito a lo largo de este trabajo. Quedará abierta la posibilidad de aplicar el método de segunda cuantización en temas aún más controvertidos y para los cuales no existe una descripción satisfactoria que permita obtener datos fácilmente verificables por el experimento. Uno de estos temas es el estudio de los estados excitados de los hadrones (partículas que interactúan 'fuertemente') acerca de los cuales haremos aquí una breve referencia, y sólo para el caso de los bariones.

A partir del descubrimiento en 1947 de los mesones  $\pi$  cargados en los rayos cósmicos, numerosos hadrones han sido identificados. Algunas de las nuevas partículas, observadas como resonancias o 'picos' en la curva de la sección eficaz de procesos de dispersión respecto de la energía del centro de masas del sistema, resultaron tener un tiempo de vida media sorprendentemente grande en comparación con la escala de tiempo asociada a los decaimientos de las interacciones fuertes ( $10^{-23}$  seg), aún siendo partículas suficientemente masivas como para decaer en objetos más ligeros sin violar conservación de la carga o del número bariónico.

Gell-Mann, e independientemente Nishijima, consideraron esto como la manifestación de un nuevo número cuántico, al que se llamó 'extrañeza'. Entonces se postuló que las interacciones fuertes y electromagnéticas deberían conservar la extrañeza  $S$ . De tal manera, asociando valores de  $S$  adecuados a las partículas observadas, se entendía que ciertos decaimientos violaban este nuevo postulado, explicando la 'estabilidad' ( $\tau \sim 10^{-10}$  seg) de ciertas resonancias.

La introducción de la extrañeza  $S$  resultó ser equivalente a otro nuevo número cuántico, la 'hipercarga'  $Y$ , relacionada a la carga  $Q$  y a la componente  $I_3$  del isoespín a través de la relación de Gell-Mann - Nishijima

$$Y = 2(Q - I_3) = S + B, \quad (3.1.1)$$

donde en la última igualdad se definió el número bariónico  $B$ . Así que, al igual que  $Q$  e  $I_3$ , la hipercarga resulta ser un número cuántico aditivo, que genera transformaciones de un parámetro,  $U_Y(1)$ , que son invariantes bajo las interacciones fuertes. La ventaja de utilizar a  $Y$  en lugar de  $Q$  es que  $Y$  conmuta con los operadores de isoespín  $I_1, I_2$ , e  $I_3$  de  $SU_1(2)$ . De esta forma, todos los miembros de un multiplete de isoespín tendrán el mismo valor de la hipercarga, aunque no tengan la misma carga coulombiana.

En ese entonces se tenía la simetría  $SU_1(2) \otimes U_Y(1)$  que resultaba bastante útil en la clasificación de las partículas que interactúan fuertemente; entonces la idea fue extender el grupo de simetría  $SU_1(2) \otimes U_Y(1)$  de forma tal que el nuevo grupo incluyera a los multipletes de isoespín, y al ampliarlos, conjuntara en cada uno de los nuevos multipletes a los hadrones con propiedades similares.

Se buscó entonces entre los grupos de segundo rango, es decir, aquéllos que tienen entre sus generadores a dos que conmutan entre sí. Dentro de los grupos simples de Lie (aquellos que no contienen subgrupos invariantes) se tenía entre otros a  $SU(3)$  [6]: grupo unitario unimodular en tres dimensiones, que tiene ocho parámetros. A este respecto Gell-Mann y Ne'eman en 1961 diseñaron un esquema para clasificar todos los hadrones hasta entonces conocidos de acuerdo a ciertas representaciones del grupo  $SU(3)$ , que contenía a  $SU_1(2)$  y  $U_Y(1)$  como subgrupos. De esta manera los bariones y mesones fueron clasificados como miembros de la representación  $\{2, 1\}$  de  $SU(3)$ . Esta simetría, conocida actualmente como ' $SU(3)$  de sabor' (de aquí en adelante denotada por  $SU_F(3)$ ), era violada por las interacciones fuertes. El orden de magnitud del rompimiento de simetría puede estimarse de la razón

$$\left\{ \frac{m_\Lambda - m_p}{m_p} \right\} \approx .2 \quad (3.1.2)$$

con  $m_\Lambda$  y  $m_p$  denotando las masas de las partículas  $\Lambda$  y del protón. Esta razón es suficientemente pequeña para que los efectos del rompimiento de simetría se traten por medio de la teoría de perturbaciones. Uno de los éxitos de la teoría de Gell-Mann y Ne'eman fue la predicción de la existencia y el valor de la masa de la partícula  $\Omega^-$  descubierta en 1964. También llamó la atención que en la clasificación  $SU(3)$  de las partículas elementales ninguno de los hadrones estaba asociado a la representación fundamental  $\{1, 0\}$ . Esto sugirió a Gell-Mann y Zweig en 1964 introducir partículas que deberían transformarse de acuerdo a la representación fundamental y que recibieron el nombre de quarks; que ha sido generalmente aceptado. Los quarks se introdujeron en tres variedades 'up'  $u$ , 'down'  $d$ , y 'strange'  $s$ ; con espín  $1/2$ , cuyos otros números

cuánticos intrínsecos daremos más adelante, destacando el hecho de que poseen cargas fraccionarias. En la teoría de los quarks, los mesones y bariones son estados que están compuestos como sigue: Mesones  $\sim q\bar{q}$ , y los Bariones  $\sim qqq$ ; con  $q$  representando a un quark y  $\bar{q}$  a un antiquark <sup>†</sup>.

Ahora bien, tener un grupo de simetría asociado a un cierto tipo de interacción no solamente significa tener la posibilidad de clasificar a las partículas involucradas sino también de describir a la interacción misma en términos de los generadores del grupo, así como los operadores de transición. En este sentido, la interacción podría quedar en términos de los operadores de Casimir del grupo y en este caso se tendría una simetría exacta, ya que entonces la energía estaría degenerada para cada representación irreducible del grupo; lo que significa que la acción de los generadores o de cualquier operador perteneciente al mismo deja invariante al Hamiltoniano del sistema. De forma más general, se podría pensar que la interacción 'rompe' la simetría del grupo, de manera que las energías serían diferentes dentro de un mismo multiplete. De cualquier modo, podría escribirse la interacción en términos de una serie de operadores de orden creciente que posean propiedades definidas de transformación ante el grupo de simetría. La acción de estos operadores 'tensoriales' sería entonces conocida y se podría encontrar un espectro con el nivel de aproximación deseado cortando la serie hasta un término de cierto orden. Ahora la simetría no sería exacta ya que la acción de los generadores del grupo no dejaría invariante la interacción. Por ejemplo, para el caso del grupo  $SU_f(2)$  se observa que mientras las interacciones electromagnéticas no son invariantes del grupo (en un mismo multiplete de isoespín tenemos partículas con diferente carga), las interacciones más fuertes sí lo son, como aquéllas responsables de la estabilidad de los núcleos atómicos.

De manera análoga, en el caso de los hadrones se espera que sus interacciones puedan clasificarse básicamente en dos grupos distintos: de las interacciones más fuertes que serían invariantes ante  $SU_f(3)$ ; y el de las interacciones 'moderadamente fuertes', las cuales no serían invariantes ante este grupo y son por lo tanto las que 'rompen' la simetría  $SU_f(3)$  y dan lugar a que las partículas de un mismo multiplete de este grupo tengan masas distintas.

En el caso del grupo  $SU_f(2)$ , afortunadamente la forma de la interacción electromagnética que rompe la simetría es bien conocida. Sin embargo, éste no es el caso de las interacciones 'moderadamente fuertes' que rompen  $SU_f(3)$ . Lo más que se puede proponer es que estas interacciones se transforman como las componentes de algún

<sup>†</sup> En Noviembre de 1974 fue encontrada una nueva partícula, el mesón  $\Psi$ , con una masa sorprendentemente superior a la de los mesones formados por los quarks conocidos hasta entonces, se postuló entonces la existencia de un nuevo 'sabor' de quark, al cual se le asoció un tercer número cuántico aditivo, el 'encanto' C (del inglés charm). Esto desde luego introdujo una extensión en el modelo de  $SU(3)$  que se tenía hasta el momento, y se propuso el grupo  $SU(4)$ . El análisis en términos de esta nueva descripción no será visto en este trabajo. De hecho actualmente existen nuevas extensiones del modelo, pero todas resultan directas a partir del descubrimiento de la simetría de  $SU(3)$ .

tensor del grupo. De cualquier manera, una de las ventajas de la teoría de grupos es que aún con esta pequeña información es posible predecir muchos procesos físicos.

Cuando se implementó el modelo de  $SU_F(3)$  para los hadrones, se encontraron bariones con espín semientero que eran descritos por funciones de onda totalmente simétricas, contradiciendo el Principio de Pauli. Por ejemplo, dentro de uno de los multipletes del grupo para los bariones aparece la partícula  $\Delta^{++}$  formada por tres quarks de sabor 'up':  $\Delta^{++} = uuu$ . Esta configuración encajaba de manera correcta dentro de las características del barión doblemente cargado encontrado por Fermi y colaboradores en 1951 como una resonancia en la colisión  $\pi^- + p$ . Su espín  $J=3/2$  se obtiene sumando tres espines  $1/2$  (uno por cada quark  $u$ ), obligando el modelo a combinar tres fermiones idénticos en un estado base completamente simétrico para incluir el estado  $\Delta^{++}$  observado experimentalmente. Sin embargo sabemos que esto viola la estadística de Fermi que se postula para los quarks (partículas de espín  $1/2$ ). Más aún, ignorando este problema, habría que explicar por qué en la Naturaleza no se han encontrado estados ligados de dos quarks, los cuales en principio no quedan prohibidos por la simetría  $SU_F(3)$ ; y solamente se tienen estados del tipo tres quarks, tres antiquarks, o quark-antiquark.

Para resolver estos problemas, Gell-Mann en 1972 y Fritzsche en 1973 introdujeron un nuevo número cuántico, el 'color'. Se supone entonces que cada quark posee alguno de tres 'colores' que denotaremos  $R$ ,  $G$  y  $B$  (del inglés 'Red', 'Green' y 'Blue'). Estos tres estados de 'color', serían los elementos del triplete fundamental de un grupo  $SU_C(3)$  de color. Con esto queda resuelto el problema de la partícula  $\Delta^{++}$  ya que a cada quark se le asignaría un color distinto.

Sin embargo, el segundo problema planteado no queda del todo resuelto; además, aparece un nuevo problema en el caso del protón. Se sabe que  $p \sim uud$  y solamente existe un estado base observado para el protón; sin embargo, existen varias combinaciones de color que se le podrían asignar:  $u_R u_G d_B$ ,  $u_R u_G d_G$ ,  $u_R u_B d_B$ , ..., encontrando entonces un conflicto con las observaciones experimentales. El problema se resuelve postulando que todas las partículas observadas en la Naturaleza son 'singletes' de color (es decir, invariantes ante transformaciones en el espacio  $SU_C(3)$  de color). Así, en el caso de tener tres quarks ligados, éstos deben combinar sus colores de manera totalmente antisimétrica, ya que con tres cajas, la representación antisimétrica [111] es el singlete de  $SU_C(3)$ . Por esta razón no es posible tener sistemas ligados con solamente dos quarks (sólo tendríamos dos cajas para la representación de  $SU_C(3)$ ). Esta es la hipótesis de 'confinamiento' del color, y hasta el momento no se ha observado ningún proceso que contradiga alguno de los numerosos resultados que se derivan de ella.

De esta forma, tenemos dos nuevos grupos de simetría que intervienen en la descripción de las nuevas partículas:  $SU_F(3)$  y  $SU_C(3)$ ; de éstos, experimentalmente ha quedado claro que  $SU_F(3)$  no constituye una simetría 'exacta' de la Naturaleza, mientras que  $SU_C(3)$  sí lo es, al menos hasta los límites de validez del modelo estándar. El

hecho de que  $SU_C(3)$  sea una simetría exacta implica que se puede construir una 'Teoría de Norma' en la cual las transformaciones del grupo  $SU_C(3)$  jueguen un papel preponderante para encontrar cantidades conservadas y también para construir Lagrangianos que preserven estas cantidades. Esta teoría es la Cromodinámica Cuántica (QCD), la que tiene muy pocos parámetros fundamentales que deben ajustarse al experimento; a saber, un parámetro de acoplamiento (constante de estructura fina) y los parámetros de masa de los diferentes quarks (masas de los leptones). Entre paréntesis se indican los parámetros análogos de la electrodinámica cuántica. El fin último de la QCD es describir todos los fenómenos asociados con las interacciones fuertes; meta que está muy lejos de ser alcanzada. En este trabajo nos restringiremos a la discusión fenomenológica de las interacciones fuertes.

## 2 Modelo SU(3) para los quarks

El objetivo en esta sección es obtener las expresiones explícitas para las funciones de onda de los bariones en su estado base, utilizando los métodos de la teoría de grupos que han sido expuestos en este trabajo, es decir en términos de operadores fermiónicos de creación pertenecientes a la representación fundamental de un cierto grupo de simetría.

Los bariones son sistemas de tres quarks, cada uno con color (R,G,B), sabor (u,d,s)<sup>1</sup> y espín 1/2; teniendo 18 diferentes quarks que representamos por operadores fermiónicos de creación  $a_{s\mu\sigma}^\dagger$ ; con  $s = R,G,B$ ;  $\mu = u,d,s$ ; y  $\sigma = 1/2, -1/2$ . Para simplificar la notación vamos enumerar los estados de acuerdo con la siguiente tabla:

<i>Sabor</i>	u	d	s	u	d	s
<i>Espín</i>	↑	↑	↑	↓	↓	↓
<i>Estado</i>	1	2	3	4	5	6

Entonces los operadores fermiónicos de creación y aniquilación pueden escribirse en la forma siguiente:  $a_{s\beta}^\dagger$  y  $a^{s'\beta'}$ , respectivamente; y los generadores de U(18) están definidos por la expresión

$$G_{s\beta}^{s'\beta'} = a_{s\beta}^\dagger a^{s'\beta'}, \quad (3.2.1)$$

<sup>1</sup> En este trabajo nos quedaremos con el modelo de quarks más simple en el que se incluyen sólo los tres sabores mencionados, aunque como sabemos existe evidencia experimental contundente [1] acerca de la existencia de por lo menos otros dos sabores: c (encanto) mencionado anteriormente, y b (del inglés "bottom" or "beauty") que se introdujo para explicar a la partícula T, descubierta en 1977. Posteriormente en 1984, se encontró evidencia experimental de la existencia de un sexto quark llamado t (del inglés "top" or "truth"), pero éste no ha sido confirmado aún.

con  $s', s = R, G, B$ ; y  $\beta', \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Sabemos que  $a_{\alpha\beta}^\dagger$  y  $a^{\alpha'\beta'}$  son operadores fermiónicos por lo cual satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{a_{s\beta}^\dagger, a_{s'\beta'}^\dagger\} = \{a^{s\beta}, a^{s'\beta'}\} = 0; \{a_{s\beta}^\dagger, a^{s'\beta'}\} = \delta_s^{s'} \delta_\beta^{\beta'}. \quad (3.2.2)$$

Por lo tanto las funciones de onda que describen sistemas de  $N$  quarks pueden clasificarse por la representación  $[1^N]$  de  $U(18)$ , que por supuesto son funciones totalmente antisimétricas ante las permutaciones de las partículas constituyentes.

Sumando la expresión (3.2.1) con respecto a los índices  $s$  o  $\alpha$  obtenemos los generadores de los grupos  $U_{FS}(6)$  o  $U_C(3)$ , respectivamente. Por otro lado, existe el postulado de 'confinamiento' del color [1], de acuerdo con el cual en todos los sistemas de quarks que existen en la Naturaleza, el color total es 'blanco'; es decir, el sistema debe ser invariante ante transformaciones de color y por lo tanto debe estar caracterizado por la representación  $[nnn]$  de  $U_C(3)$ , donde  $N = 3n$ . De manera que únicamente definiremos explícitamente a los generadores de  $U_{FS}(6)$  y sus subgrupos, i. e. ,

$$C_\beta^\alpha = \sum_s G_{s\beta}^{\alpha s}, \quad (3.2.3)$$

los generadores de  $U_F(3)$  están definidos por las expresiones:

$$C_u^u = C_1^1 + C_4^4, \quad C_d^d = C_2^2 + C_5^5, \quad C_s^s = C_3^3 + C_6^6, \quad (3.2.4a)$$

$$C_d^u = C_1^2 + C_4^5, \quad C_u^d = C_1^3 + C_4^6, \quad C_d^s = C_2^3 + C_5^6, \quad (3.2.4b)$$

$$C_s^u = C_1^5 + C_4^6, \quad C_u^s = C_1^4 + C_4^3, \quad C_d^s = C_2^4 + C_5^3, \quad (3.2.4c)$$

mientras que los de  $U_S(2)$  quedan

$$\zeta_1^1 = C_1^1 + C_2^2 + C_3^3, \quad \zeta_2^2 = C_4^4 + C_5^5 + C_6^6, \quad (3.2.5a)$$

$$\zeta_1^2 = C_1^4 + C_2^5 + C_3^6, \quad \zeta_2^1 = C_4^1 + C_5^2 + C_6^3. \quad (3.2.5b)$$

Como es usual, los generadores de ascenso son combinaciones lineales de operadores  $C_\beta^\alpha$  con  $\alpha > \beta$  y viceversa para los generadores de descenso.

Por lo mencionado en los párrafos anteriores, se concluye que la cadena de grupos apropiada que caracterizará las funciones de onda de un sistema de  $N$  ( $=3n$ ) quarks es

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & U(18) & \{1^N\} & & & \\
 & & \cup & & & & \\
 \{nnn\} & U_C(3) & & \otimes & & U_{FS}(6) & \{3^n\} \\
 & & & & & \cup & \\
 & & \{\bar{h}_1 \bar{h}_2\} & U_F(3) & & \otimes & U_S(2) & \{h_1 h_2\} \\
 & & \cup & & & & & \\
 \{Y\} & U_Y(1) & & \otimes & & U_I(2) & \{\mu_1 \mu_2\} & \\
 & & & & & & & (3.2.6)
 \end{array}$$

donde hemos indicado también la representación que corresponde a cada grupo. Los subíndices indican las propiedades físicas que incluye cada grupo:  $FS$  - sabor y espín;  $C$  - color;  $Y$  - hipercarga, y finalmente  $I$  - isoespín. Teniendo  $N = 3$  quarks, el único invariante de color es el totalmente antisimétrico  $\{1^3\}$  y se conoce de la teoría de grupos [2] que para tener estados totalmente antisimétricos debemos multiplicarla por la representación totalmente simétrica  $\{3\}$  de  $U_{FS}(6)$ . En la expresión (3.2.6) debemos tener entonces  $\{\bar{h}_1 \bar{h}_2\} = \{h_1 h_2\}$  ya que para grupos simétricos y unitarios se cumple la relación:

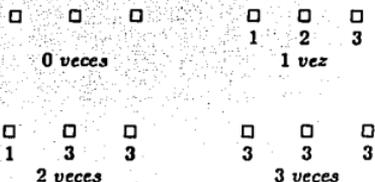
$$\{\lambda\} \otimes \{\mu\} = \{N\} \Leftrightarrow \{\lambda\} \equiv \{\mu\},$$

Primero encontraremos cuáles son las representaciones  $\{h_1 h_2\}$  de  $U_F(3)$  y  $U_I(2)$  que permiten obtener la representación  $\{3\}$  de  $U(6)$ . De la teoría de grupos, utilizando los coeficientes de Clebsch-Gordan del grupo simétrico de permutaciones de tres objetos  $S_3$  [3], tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
 \square & U_{FS}(6) & \square = & \square & U_F(3) & \square & U_S(2) \\
 \square & \square & & \square & \square & \otimes & \square & \square \\
 \{3\} & \{3\} & & \{21\} & \{21\} & & \{21\} & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & U_F(3) & \square \otimes & \square & U_S(2) \\
 & & & & \{3\} & & \{3\} & \square & (3.2.7)
 \end{array}$$

donde hemos utilizado los diagramas de Young para identificar las representaciones. Ahora veremos qué representaciones tenemos de  $U_I(2)$  para cada multiplete de  $U_F(3)$ .

Comenzamos con la representación  $\{3\}$  de  $U_F(3)$ : Este grupo tiene tres estados básicos distintos  $u$ ,  $d$  y  $s$  que etiquetamos 1, 2, y 3, respectivamente; entonces existen las siguientes maneras 'regulares' de incluir el estado 3 en su diagrama de Young [4], i.e.,



Antes de continuar es conveniente recordar la definición del operador asociado a la hipercarga, en términos de los operadores  $N_\rho$  que determina el número de quarks, u y d y el de número de quarks s,  $N_3$ , i.e.†

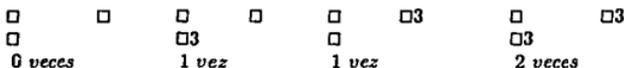
$$Y = \frac{1}{3}N_\rho - \frac{2}{3}N_3. \quad (3.2.8)$$

En cada una de las tablas de Young anteriores, el diagrama que conforman los estados 1 y 2 constituye una representación de  $U_I(2)$  contenida en  $U_F(3)$ , y utilizando (3.2.8) se determina la hipercarga correspondiente. Concluyéndose que la representación  $\{3\}$  de  $U_F(3)$  contiene a las siguientes representaciones del producto directo  $SU_I(2) \otimes U_Y(1)$

$$\{0\} \otimes \{Y = -2\} \quad \{1\} \otimes \{Y = -1\} \quad \{2\} \otimes \{Y = 0\} \quad \{3\} \otimes \{Y = 1\}, \quad (3.2.9)$$

con  $\bullet$  denotando el singulete de isoespín 0.

Procediendo análogamente para la representación  $\{21\}$  de  $U_F(3)$  tenemos:



En este caso no incluimos tres veces el estado 3 ya que la tabla de Young  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  es idénticamente cero. Se obtienen las representaciones

$$\{21\} \otimes \{Y = 1\} \quad \{2\} \otimes \{Y = 0\}$$

† Esta ecuación se obtiene tomando los valores de la hipercarga para estados de quark 'independiente' (ver tabla más adelante en este Capítulo), y empleándolos en la fórmula conocida para obtener la forma del operador en segunda cuantización (ver ec. 1.1.3a).

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \{1, 1\} \otimes \{Y = 0\} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \square \\ \{1\} \otimes \{Y = -1\} \end{array} \qquad (3.2.10)$$

Concluimos entonces que los estados de un sistema de N quarks quedan caracterizados por los siguientes números cuánticos:  $\{|N\rangle; \{h_1 h_2\}; S m_s; I m_I; Y\rangle$ , y de hecho, para N=3 conocemos los valores que dichos números pueden tener a través de las expresiones (3.2.7), (3.2.9), y (3.2.10).

Ahora pasemos a la construcción de los estados, para ésto es conveniente definir los siguientes polinomios de tercer grado,

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma}^{RGB} = \sum_{P(RGB)} \delta_P P a_{R\alpha}^\dagger a_{G\beta}^\dagger a_{B\gamma}^\dagger \qquad (3.2.11)$$

donde P representa todas las permutaciones posibles entre los índices R,G,B y  $\delta_P$  su signo correspondiente. Por definición estos polinomios son antisimétricos ante el intercambio de cualesquiera 2 de los índices R,G,B y por lo tanto portan la representación  $\{111\}$  de  $U_C(3)$ . También es importante calcular la acción de los generadores  $C_\alpha^\beta$  de  $U_{FS}(6)$  sobre los polinomios  $\Delta_{\sigma\gamma\delta}^{RGB}$ :

$$C_\alpha^\beta \Delta_{\sigma\gamma\delta}^{RGB} |0\rangle = \delta_\alpha^\beta \Delta_{\alpha\gamma\delta}^{RGB} |0\rangle + \delta_\gamma^\beta \Delta_{\sigma\alpha\delta}^{RGB} |0\rangle + \delta_\delta^\beta \Delta_{\sigma\gamma\alpha}^{RGB} |0\rangle$$

De la expresión (3.2.11), resulta inmediato que los elementos  $\Delta_{\alpha\beta\gamma}^{RGB}$  son simétricos ante cualquier permutación de los índices  $\alpha, \beta, \gamma$ ; es decir:  $\Delta_{\alpha\beta\gamma}^{RGB} = \Delta_{\beta\alpha\gamma}^{RGB} = \Delta_{\beta\gamma\alpha}^{RGB}$ , etc.

Los estados que portan la representación  $\{3\}$  de  $U_{FS}(6)$  y están asociados a una representación de espín y sabor  $\{h_1, h_2\}$  pueden construirse tomando combinaciones lineales de (3.2.11), i.e.,

$$|\{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y\rangle = \sum_{\alpha\beta\gamma}^6 A_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\alpha\beta\gamma}^{RGB} |0\rangle \qquad (3.2.12)$$

Es importante señalar, de acuerdo a (3.2.11), que los coeficientes A en la ecuación anterior tienen que ser simétricos ante el intercambio de sus índices. Así para cada multiplete de espín y sabor  $\{h_1, h_2\} = \{3, 0\}$  y  $\{2, 1\}$  vamos a obtener los estados de máximo peso. Entonces los estados (3.2.12) para ser de máximo peso en el sabor debén cumplir el conjunto de ecuaciones siguientes

$$C_u^u |\{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y\rangle = h_1 |\{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y\rangle, \qquad (3.2.13a)$$

$$C_d^d | \{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y = h_2 | \{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y, \quad (3.2.13b)$$

$$C_s^s | \{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y = 0, \quad (3.2.13c)$$

$$C_u^u | \{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y = 0, \quad (3.2.13d)$$

$$C_u^s | \{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y = 0, \quad (3.2.13e)$$

$$C_d^s | \{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y = 0. \quad (3.2.13f)$$

De manera correspondiente son de máximo peso en el espín si satisfacen

$$\zeta_1^1 | \{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y = h_1 | \{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y, \quad (3.2.14a)$$

$$\zeta_2^2 | \{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y = h_2 | \{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y, \quad (3.2.14b)$$

$$\zeta_3^3 | \{3\}; \{h_1 h_2\}; S, S; I, I; Y = 0. \quad (3.2.14c)$$

De las dos representaciones de  $U_F(3) \otimes U_S(2)$  contenidas en la representación  $\{3\}$  de  $U_{FS}(6)$  vamos a considerar el estado de máximo peso de  $\{3\} \otimes \{3\}$ . La condición (3.2.13a) implica que:  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 4$ . Con esto, queda satisfecha también la ecuación (3.2.13b), entonces tenemos solamente  $\{A_{111}, A_{141}, + \text{permutaciones}\}$  como coeficientes distintos de cero. Luego (3.2.14c) implica las relaciones

$$A_{141} + A_{114} + A_{411} = 0 ;$$

$$A_{144} + A_{144} = 0 ; + \text{permutaciones}$$

$$A_{444} = 0 .$$

Además como los coeficientes A son simétricos, concluimos  $A_{\alpha\beta\gamma} = 0$  si  $\alpha, \beta$  ó  $\gamma = 4$ . Por último, la condición (3.2.14a) queda satisfecha automáticamente, obteniendo

$$| \{3\}; \{30\}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1 \rangle = \frac{1}{6} \Delta_{111}^{RGB} | 0 \rangle \equiv \Delta^{++}, \quad (3.2.15)$$

es el estado normalizado de máximo peso que porta la representación  $\{3\} \otimes \{3\}$  del producto directo  $U_F(3) \otimes U_S(2)$ ; en el miembro derecho hemos identificado al estado obtenido con el nombre de la partícula que se le asocia en la literatura. Además por medio de las expresiones en segunda cuantización de los operadores de espín e isoespín,

$$I_+ = \sum_{s=R,G,B} (s\mu | I_+ | s\mu') a_{s\mu}^\dagger a_{s\mu'} = C_u^d \quad (3.2.16a)$$

$$I_0 = \sum_{s=R,G,B} \langle s\mu | I_0 | s\mu' \rangle a_{s\mu}^\dagger a^{s\mu'} = \frac{1}{2} (C_u^u - C_d^d) \quad (3.2.16b)$$

$$I_- = \sum_{s=R,G,B} \langle s\mu | I_- | s\mu' \rangle a_{s\mu}^\dagger a^{s\mu'} = C_d^u \quad (3.2.16c)$$

$$S_+ = \sum_{s=R,G,B} \langle s\mu | S_+ | s\mu' \rangle a_{s\mu}^\dagger a^{s\mu'} = \zeta_1^2 \quad (3.2.16d)$$

$$S_0 = \sum_{s=R,G,B} \langle s\mu | S_0 | s\mu' \rangle a_{s\mu}^\dagger a^{s\mu'} = \frac{1}{2} (\zeta_1^1 - \zeta_2^2) \quad (3.2.16e)$$

$$S_- = \sum_{s=R,G,B} \langle s\mu | S_- | s\mu' \rangle a_{s\mu}^\dagger a^{s\mu'} = \zeta_2^1 \quad (3.2.16f)$$

se determinaron el resto de los números cuánticos del estado (3.2.15). Para escribir los operadores (3.2.16) en términos de los generadores del grupo  $U_{FG}(6)$  se consideró la acción de éstos sobre los estados de quark independiente. Esta la conocemos [1], y tenemos entonces la representación fundamental de  $U_F(3)$  para los quarks u, d, y s:

	u	d	s
<i>Isospin</i> ( $I, I_0$ )	(1/2, 1/2)	(1/2, -1/2)	(0, 0)
<i>Hipercarga</i> ( $Y$ )	1/3	1/3	-2/3

Ahora vamos a encontrar los estados restantes del multiplete  $\{3\} \supset \{30\} \otimes \{30\}$ , verificando que cada estado se pueda obtener del estado de máximo peso en la representación  $\{h_1/h_2\}$  correspondiente actuando sólo con operadores de descenso de  $U_F(3)$ . Comencemos con el multiplete de máximo isoespín  $I = 3/2$ . Sobre el estado de máximo peso (3.2.15) actuamos con  $I_-$ , obteniendo el estado

$$\begin{aligned} |3/2 \ 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} I_- |3/2 \ 3/2\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \{C_2^1 + C_5^4\} \frac{1}{6} \Delta_{111}^{RGB} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta_{211}^{RGB} |0\rangle \equiv \Delta^+ \end{aligned} \quad (3.2.17a)$$

donde simplificamos la notación del estado indicando solamente los índices de isoespín y su proyección. Aplicando el operador de descenso dos veces obtenemos los estados siguientes:

$$|3/2 \ -1/2\rangle = \frac{1}{2} I_- |3/2 \ 1/2\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta_{122}^{RGB} |0\rangle \equiv \Delta^0, \quad (3.2.17b)$$

$$\begin{aligned} |3/2 - 3/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{T}_- |3/2 - 1/2\rangle \\ &= \frac{1}{6} \Delta_{222}^{RGB} |0\rangle \equiv \Delta^-. \end{aligned} \quad (3.2.17c)$$

En las expresiones (3.2.17) se utilizó el factor  $1/\{I(I+1) - M_I(M_I - 1)\}^{1/2}$  para normalizar la acción de  $\mathcal{T}_-$ .

Ahora, de la expresión (3.2.9) es inmediato mostrar que la representación irreducible  $\{30\}$  de  $U_F(3)$  contiene además del isoespín  $I = 3/2$ , con hipercarga 1, las siguientes representaciones del producto directo  $U_I(1) \otimes SU_I(2)$ :  $\{(Y = 0, I = 1); (Y = -1, I = 1/2); (Y = -2, I = 0)\}$ . Para encontrar estos estados vamos a proponer un desarrollo del tipo (3.2.12) con  $h_1 = 3, h_2 = 0$  i.e.

$$|\{3\}; \{30\}; 3/2, 3/2; I, I; Y\rangle = \sum_{\alpha\beta\gamma=1}^6 A_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\alpha\beta\gamma}^{RGB} |0\rangle$$

La condición de que este estado sea de máximo isoespín sería cualquiera de las siguientes:

$$\alpha\beta\gamma \neq 2, 5, \quad (3.2.18a)$$

$$\alpha\beta\gamma \in \{\alpha 24, \alpha 15 + \text{permutaciones}; \alpha \neq 2, 5\}, \quad (3.2.18b)$$

Para obtener el multiplete  $I = 1$  tenemos que tomar la condición (3.2.18a) y además

$$\alpha, \beta, \gamma \in \{11\gamma; 44\gamma; 14\gamma + \text{permutaciones } \gamma \neq 1, 2, 4, 5\}$$

Si el estado también cumple la relación (3.2.14a) con  $h_1 = 3$  tendremos  $A_{116} + A_{143} + A_{413} = 0 + \text{permutaciones}$

$$A_{443} + A_{416} = 0 + \text{permutaciones}$$

$$A_{113} = A_{131} = A_{311} \neq 0$$

Finalmente, usando con  $h_2 = 0$  la condición (3.2.14b) nos queda

$$| \{3\}; \{30\}; 1, 1; 3/2, 3/2; 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta_{113}^{RGB} | 0 \rangle \equiv \Sigma^{+*}, \quad (3.2.19a)$$

Donde es inmediato checar que la acción de la hipercarga sobre el estado da cero; también puede demostrarse que

$$| \{3\}; \{30\}; 1, 1; 3/2, 3/2; 0 \rangle \sim \{C_3^u\} | \{3\}; \{30\}; 3/2, 3/2; 3/2, 3/2; 1 \rangle.$$

Ahora obtengamos el multiplete  $I = 1$  completo

$$\begin{aligned} | \{3\}; \{30\}; 1, 0; 3/2, 3/2; 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{I} - \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta_{113}^{RGB} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \Delta_{123}^{RGB} | 0 \rangle \equiv \Sigma^{0*} \end{aligned} \quad (3.2.19b)$$

$$\begin{aligned} | \{3\}; \{30\}; 1, -1; 3/2, 3/2; 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{I} - \frac{1}{\sqrt{6}} \Delta_{123}^{RGB} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta_{232}^{RGB} | 0 \rangle \equiv \Sigma^{-*} \end{aligned} \quad (3.2.19c)$$

Para el multiplete con  $I = 1/2$  correspondiente a la tabla  $\square$  de  $SU_I(2)$  tenemos que añadir, además de las condiciones (3.2.18), la siguiente posibilidad para los índices

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ in } \cup \{1\sigma\beta, 4\sigma\beta + \text{permutaciones}; \sigma, \beta = 3, 6\}$$

Ahora aplicamos las condiciones (3.2.14) con  $h_1 = 3$  y nos queda solamente un coeficiente libre  $A_{133} = A_{313} = A_{331} \neq 0$

El estado queda

$$| \{3\}; \{30\}; 1/2, 1/2; 3/2, 3/2; -1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta_{133}^{RGB} | 0 \rangle \equiv \Xi^{0*}, \quad (3.2.20a)$$

comprobamos que  $Y | * \rangle = - | * \rangle$  y también

$$| \{3\}; \{30\}; 1/2, 1/2; 3/2, 3/2; -1 \rangle \sim \{C_3^u\} | \{3\}; \{30\}; 1, 1; 3/2, 3/2; 0 \rangle$$

Completando el doblete

$$\begin{aligned} | \{3\}; \{30\}; 1/2, -1/2; 3/2, 3/2; -1 \rangle &= \mathcal{I}^- | \{3\}; \{30\}; 1/2, 1/2; 3/2, 3/2; -1 \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{12}} \Delta_{333}^{RGB} | 0 \rangle \equiv \Xi^{*-}, \end{aligned} \quad (3.2.20b)$$

Por último, para completar el decuplete  $\{3\} \supset \{30\} \otimes \{30\}$  tomemos el estado singlete con  $I = 0$

$$(i) \mathcal{I}_0^- | * \rangle = 0$$

La condición (i), junto con (3.2.18) lleva a que los únicos coeficientes distintos de cero satisfagan

$$A_{243} + A_{153} = 0 + \text{permutaciones}$$

$$A_{246} + A_{156} = 0 + \text{permutaciones}$$

o bien tener solamente  $\alpha\beta\gamma = 3, 6$ .

Por último, pidiendo que se cumplan (3.2.14) de la misma forma como lo hicimos anteriormente, implica tener sólo  $A_{333} \neq 0$

Entonces  $| \{3\}; \{30\}; 0, 0; 3/2, 3/2; -2 \rangle = \frac{1}{6} \Delta_{333}^{RGB} | 0 \rangle \equiv \Omega^-$  (3.2.21). Y vemos que  $Y | * \rangle = -2 | * \rangle$ , entonces escribimos

$$\begin{aligned} | \{3\}; \{30\}; 0, 0; 3/2, 3/2; -2 \rangle &= \frac{1}{6} \Delta_{333}^{RGB} | 0 \rangle \\ &\sim \{C_3^1 + C_6^4\} | \{3\}; \{30\}; 1/2, 1/2; 3/2, 3/2; -1 \rangle \end{aligned}$$

Ahora vamos a completar el octete  $\{3\} \supset \{21\} \otimes \{21\}$ .

Encontremos primero el estado de máximo peso que, como hemos estado haciendo, denotaremos como

$$| \{3\}; [21] \otimes [21] \rangle = \sum_{\alpha\beta\gamma=1}^6 A_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\alpha\beta\gamma}^{RGB} | 0 \rangle$$

Sobre este estado actuamos con los generadores de  $SU_F(3)$  y pedimos que se cumplan las ecs. (3.2.13 y 14) con  $h_1 = 2$  y  $h_2 = 1$

(3.2.13a) con esto debemos pedir

$$\alpha, \beta, \gamma \in \{14\sigma; 11\sigma; 44\sigma + \text{permutaciones}\}$$

(3.2.13b) implica que  $\sigma$ , en el inciso anterior, debe ser 2 ó 5.

(3.2.14a y b) implican conservar sólo

$$\alpha, \beta, \sigma \in \{142, 115; + \text{permutaciones}\}$$

(3.2.13d) tenemos  $A_{142} + A_{241} + A_{151} = 0 + \text{permutaciones}$ .

(3.2.13f) se cumple con lo que tenemos en (3.2.13d), así como (3.2.13e).

Entonces concluimos

$$| \{3\}; [21] \otimes [21] \rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \{ \Delta_{124}^{RGB} - \Delta_{115}^{RGB} \} | 0 \rangle.$$

Para completar los números cuánticos del estado vemos que

$$\mathcal{I}_0 | \star \rangle = \frac{1}{2} | \star \rangle$$

$$\mathcal{Y} | \star \rangle = | \star \rangle$$

También debemos notar que tenemos la representación  $[21]$  de  $SU_5(2)$  la cual como sabemos está asociada a un momento de espín  $S = 1/2$ .

Entonces el estado queda

$$| \{3\}; \{21\}; 1/2, 1/2; 1/2, 1/2; 1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \{ \Delta_{124}^{RGB} - \Delta_{115}^{RGB} \} | 0 \rangle \equiv P. \quad (3.2.22a)$$

Tenemos entonces un doblete de  $SU_1(2)$ ; actuando con  $\mathcal{I}_-$  obtenemos el otro estado

$$| \{3\}; \{21\}; 1/2, -1/2; 1/2, 1/2; * \rangle = \mathcal{I}_- | * \rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \{ \Delta_{125}^{RGB} - \Delta_{224}^{RGB} \} | 0 \rangle \equiv N. \quad (3.2.22b)$$

Vemos aquí como el estado de máximo peso en una representación de un grupo unitario (el protón P) no pertenece al multiplete de máximo isospín contenido en el grupo, tal como hicimos notar en el capítulo anterior.

Ahora obtengamos el estado de máxima proyección del triplete con  $I = 1$  contenido en  $[21] \otimes [21]$ .

Tenemos

$$(i) \mathcal{I}_0 | * \rangle = | * \rangle$$

Como ya discutimos en el caso del estado  $| \{3\}; \{30\}; 1, 1; *, *, * \rangle$  vemos que (i) y (3.2.13d) implican

$$\alpha, \beta, \gamma \neq 2, 5 \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{11\gamma; 44\gamma; 14\gamma + \text{permutaciones}\}$$

Aplicando (3.2.14c), los únicos coeficientes distintos de cero deben satisfacer

$$A_{116} + A_{143} + A_{143} = 0 + \text{permutaciones}$$

$$A_{443} + A_{416} = 0 + \text{permutaciones}$$

$$A_{113} = A_{131} = A_{311} \neq 0$$

De todas estas combinaciones vemos que sólo los coeficientes  $A_{116}, A_{143}, A_{413}$  satisfacen las condiciones (3.2.14a y b). Asimismo vemos que la hipercarga correspondiente a cada uno de los términos asociados a estos coeficientes es cero; entonces el estado queda

$$| \{3\}; \{21\}; 1, 1; 1/2, 1/2; 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \{ \Delta_{43}^{RGB} - \Delta_{116}^{RGB} \} | 0 \rangle \equiv \Sigma^+, \quad (3.2.23a)$$

Y con esto obtenemos el triplete completo

$$\begin{aligned} | \{3\}; \{21\}; 1, 0; 1/2, 1/2; 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{I} | \{3\}; \{21\}; 1, 1; 1/2, 1/2; 0 \rangle \\ &= \frac{1}{6} \{ \Delta_{243}^{RGB} + \Delta_{153}^{RGB} - 2\Delta_{216}^{RGB} \} | 0 \rangle \equiv \Sigma^0, \end{aligned} \quad (3.2.23b)$$

$$\begin{aligned} | \{3\}; \{21\}; 1, -1; 1/2, 1/2; 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{I} | \{3\}; \{21\}; 1, 0; 1/2, 1/2; 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{18}} \{ \Delta_{253}^{RGB} - \Delta_{226}^{RGB} \} | 0 \rangle \equiv \Sigma^-, \end{aligned} \quad (3.2.23c)$$

Tenemos ya cinco estados del octete. Nos faltan los dos estados de un doblete más (sabemos que en el octete aparece dos veces el doblete de  $SU_I(2)$ ) y el estado singulete con  $I = 0$ .

Obtengamos el estado de máximo peso en  $SU_I(2)$  con  $I = 1/2$ . Nuestras condiciones son

$$(i)\mathcal{I}_0 | * \rangle = \frac{1}{2} | * \rangle$$

Y las ecuaciones (3.2.13 y 14). La condición (i) junto con (3.2.13) nos llevan a exactamente las mismas restricciones encontradas para el estado de  $I = 1/2$  del decuplete, de manera que la información nueva está en las ecuaciones (3.2.14).

(3.2.14c) implica  $A_{136} + A_{163} + A_{433} = 0$ . Además, la combinación  $A_{442} = -A_{451}$  debe eliminarse ya que la acción de  $\mathcal{S}_+$  no anula estos términos.

(3.2.14a y b) se satisfacen con  $A_{136}, A_{163}$  y  $A_{433}$ .

Entonces, el estado ya normalizado queda

$$| \{3\}; \{21\}; 1/2, -1/2; 1/2, 1/2; -1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \{ \Delta_{136}^{RGB} - \Delta_{433}^{RGB} \} | 0 \rangle \equiv \Xi^0, \quad (3.2.24a)$$

Observamos que  $Y | * \rangle = - | * \rangle$ .

Completando el doblete

$$| \{3\}; \{21\}; 1/2, -1/2; 1/2, 1/2; -1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \{ \Delta_{236}^{RGB} - \Delta_{533}^{RGB} \} | 0 \rangle \equiv \Xi^-, \quad (3.2.24b)$$

Por último, debemos obtener el estado singulete con  $I = 0$  que debe cumplir, junto con las ecs. (3.2.13 y 14) la condición

$$(i) \mathcal{I}_0 | * \rangle = 0$$

Con (i) y (3.2.13) se repiten las posibilidades que teníamos para la partícula  $\Omega^-$  del decuplete. Pidiendo que se cumplan las ecs. (3.2.14a y b) queda libre un índice que puede ser 3 ó 6. Falta verificar (3.2.14c).

Si escogemos  $\gamma = 3$  vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_+ | * \rangle &= \{ C_1^4 + C_2^5 + C_3^6 \} \{ A_{423} \Delta_{423}^{RGB} + A_{513} \Delta_{513}^{RGB} \} | 0 \rangle = \\ &= (A_{423} + A_{513}) \Delta_{123}^{RGB} | 0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Con  $\gamma = 6$  tendríamos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_+ | * \rangle &= A_{426} \{ \Delta_{126}^{RGB} + \Delta_{423}^{RGB} \} | 0 \rangle + A_{516} \{ \Delta_{216}^{RGB} + \Delta_{513}^{RGB} \} | 0 \rangle = \\ &= (A_{426} \Delta_{423}^{RGB} + A_{516} \Delta_{513}^{RGB}) | 0 \rangle = 0 \Leftrightarrow A_{426} = A_{516} = 0 \end{aligned}$$

Entonces el estado normalizado es

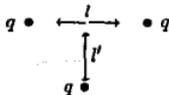
$$| \{3\}; \{21\}; 0, 0; 1/2, 1/2; 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} \{ \Delta_{423}^{RGB} - \Delta_{513}^{RGB} \} | 0 \rangle \equiv \Lambda. \quad (3.2.25)$$

Hemos encontrado ya, utilizando los elementos que nos da la teoría de grupos, todo el conjunto posible de estados que existirían si los bariones estuvieran constituidos por quarks descritos por la simetría  $SU_F(3)$  de acuerdo con la tabla mostrada anteriormente.

Con este mismo modelo, todavía se podría pensar en estados formados por pares partícula - antipartícula ( mesones ) y estudiar los multipletes a que da lugar la simetría  $SU(3)$ , ahora tomando en cuenta representaciones especiales para las antipartículas. Esto no se hará aquí ya que, aunque técnicamente no es difícil de realizarse, requiere de la introducción de conceptos de la teoría de grupos que sería extensa de exponer. Así pues, tanto en el caso de los bariones como en el de los mesones, en el cálculo de razones de decaimiento, momentos angulares y paridades de los estados observados experimentalmente, el éxito del modelo de  $SU_F(3)$  para los quarks es contundente e indiscutible.

Como ejemplo de una de las predicciones de este modelo para los bariones haremos una breve referencia a sus estados excitados [1]. Como se ha manejado hasta ahora, aunque sin hacer una referencia explícita de ello, los tres quarks  $u, d, s$  conforman un sistema con momento angular orbital cero en el estado base de los bariones que hemos considerado.

Consideremos los momentos angulares  $l$  y  $l'$  en el sistema de tres quarks que conforman un barión como se muestra a continuación



La paridad del sistema en su estado base  $(-1)^{l+l'}$  es entonces positiva. El primer estado excitado puede tener  $l = 1, l' = 0$  ó  $l = 0, l' = 1$ , o una combinación de ambos. El momento angular total del sistema será entonces  $L = 1$ . Para considerar las funciones de onda que tendremos debemos entonces incluir al grupo  $SO(3)$  y sus representaciones en nuestro esquema general, de manera que será el producto de tres representaciones ( $SU_F(3)$ ,  $SU_S(2)$ , y  $SO(3)$  de momento orbital) el que debe presentar simetría total ante permutaciones de 3 partículas.

Las representaciones del grupo simétrico  $S_3$  son tres

$$[3] \leftrightarrow \square\square\square \quad [21] \leftrightarrow \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square \quad [111] \leftrightarrow \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$$

De estas tres representaciones, debemos saber cuál puede contener a la representación  $L = 1$  de  $SO(3)$ . Sabemos, de acuerdo a un resultado obtenido por Moshinsky [5], que para el caso de tres partículas interactuando bajo potenciales tipo oscilador armónico, la función de onda del sistema para  $L=1$  porta la rep. [21] de  $S_3$ . Vamos a tomar este resultado, asumiendo entonces que es válido en rigor sólo si suponemos que las fuerzas de interacción entre los quarks son del tipo de oscilador armónico.

Entonces, en el espacio  $SU_F(3) \otimes SU_S(2)$  debemos también tener funciones con simetría [21] para que el producto contenga una función totalmente simétrica, y finalmente tener el singlete antisimétrico al considerar el color. Ahora bien, sabemos que la rep. [21] de  $SU(6)$  se obtiene como producto  $SU(3) \otimes SU(2)$  de la siguiente forma

$$\begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \square + \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \end{array} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \square + \\ + \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} \otimes \begin{array}{c} \square \square \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \square$$

Donde hemos señalado con un punto negro los lugares que 'sobran' en la representación [21]  $\equiv$  [1] de  $SU_S(2)$  que corresponde a funciones de onda de tres partículas con simetría [21] y espín  $1/2$ . Vemos que aparecen el decuplete y el octuplete conocidos de  $SU_F(3)$  y también aparece el singlete, que nosotros no necesitamos al construir el estado base de los bariones. Más aún, de las funciones anteriormente obtenidas es posible separar la parte de espín, de manera que la parte de 'sabor' de estas nuevas funciones puede ser encontrada sin dificultad.

No vamos a entrar en detalles, pero de lo que hasta aquí hemos dicho podemos extraer la siguiente conclusión: El modelo de  $SU_F(3)$  para los quarks predice que el primer estado excitado de los bariones contendrá los multipletes de sabor  $1 + 8 + 10$  con espín  $S = 1/2$  y un octete de bariones con espín  $3/2$ . Estos espines se combinarán con  $L = 1$  para dar por resultado multipletes  $1 + 8 + 10$  con  $J^P = (1/2)^-, (3/2)^-$  y tres octetes con  $J^P = (1/2)^-, (3/2)^-, (5/2)^-$ .

Este resultado es ampliamente confirmado para los bariones observados con masas de alrededor de 1600 MeV<sup>2</sup>.

### 3 Momentos magnéticos

Utilizando las funciones de onda que tenemos para el estado base de los bariones, vamos a calcular sus momentos magnéticos para compararlos con resultados experimentales que, para algunos de ellos (especialmente el protón y el neutrón) están bastante bien establecidos. En primera aproximación, los momentos magnéticos de los bariones pueden expresarse como la suma vectorial de los momentos de los quarks más la contribución de su momento angular orbital. Suponiendo que éste último es cero, el momento magnético de un barión se define como [1]:  $\mu = \sum_i \mu_i (\sigma_3)_i$ , donde la suma se realiza sobre los quarks constituyentes y  $\sigma_3$  es la tercera componente del tensor de Pauli (la proyección del espín en la dirección polar). De acuerdo con la convención aceptada, el operador se evalúa entre estados con  $M_J = +J$ , como es el caso de todos los estados que hemos encontrado (recordemos que para el estado base  $J = S$ ). El momento magnético de una partícula puntual con espín 1/2 y carga  $e$  sabemos que es  $\mu = e/2m$ . Entonces, un quark de carga  $Q_i e$  y masa  $m_i$  tiene un momento magnético  $\mu_i = Q_i \frac{e}{2m_i}$ , i.e.  $\mu_u = \frac{e}{3m_u}, \mu_d = -\frac{e}{6m_d}, \mu_s = -\frac{e}{6m_s}$  (3.3.1).

Dentro de nuestro formalismo, el operador de momento magnético está definido por la expresión

$$\mu = \mu_u \{C_1^+ - C_4^+\} + \mu_d \{C_2^+ - C_3^+\} + \mu_s \{C_3^+ - C_6^+\} \quad (3.3.2)$$

En la aproximación no-relativista, en la que no se toma en cuenta ninguna corrección debida al movimiento relativo de los quarks, el momento magnético del protón resultaría ser simplemente

$$\mu_p = \langle p \uparrow | \mu | p \uparrow \rangle$$

Considerando la función que hemos encontrado

<sup>2</sup> El estudio de los estados excitados de los bariones ofrece un extenso campo de trabajo y aplicación de las técnicas de la teoría de grupos que se han visto en este trabajo de manera introductoria e ilustrativa.

$$|p \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} (\Delta_{124}^{RGB} - \Delta_{115}^{RGB}) |0\rangle$$

Obtenemos  $\mu_p = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d)$  (3.3.3).

Para el neutrón obtenemos

$$\begin{aligned} \mu_n &= \langle n \uparrow | \mu | n \uparrow \rangle ; \text{ con } |n \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} (\Delta_{125}^{RGB} - \Delta_{225}^{RGB}) |0\rangle \\ \Rightarrow \mu_n &= \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

En el límite en que  $m_u = m_d$  (que resulta natural ya que ambos quarks constituyen un multiplete de sabor e isospín -ver la siguiente sección-) tendremos entonces  $\mu_u = -2\mu_d$ . Entonces, el modelo que consideramos predice  $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3}$ . Lo que concuerda bastante bien con los resultados experimentales, se sabe que  $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -0.68497945 \pm 0.00000058$  (3.3.5).

En este punto hacemos el siguiente comentario. Supongamos que para construir nuestros estados no hubiéramos considerado el confinamiento del color, y por tanto no necesitaríamos del grupo  $SU_C(3)$  para describir nuestros estados bariónicos. Entonces las funciones de onda deberían pertenecer a la cadena

$$SU(6) \supset SU_F(3) \otimes SU_S(2)$$

y tendrían que portar la representación [111] antisimétrica en  $SU(6)$ . El protón sería entonces el estado de máximo peso con espín  $1/2$  y simetría [21] de  $SU_F(3)$  en el producto de grupos arriba escrito. Esta función la hemos encontrado en el capítulo anterior y es

$$|\bar{p} \uparrow\rangle = \Delta_{142}^{\dagger} |0\rangle$$

Donde recordamos la definición  $\Delta_{\alpha\beta\gamma}^{\dagger} = a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\gamma}^{\dagger}$  con  $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, 6$ .

La función de onda del neutrón se obtiene actuando con el operador  $\mathcal{L} = C_2^{\dagger} + C_5^{\dagger}$

$$|\bar{n} \uparrow\rangle = \Delta_{152}^{\dagger} |0\rangle$$

Calculando los momentos magnéticos  $\mu_{\bar{p}}$  y  $\mu_{\bar{n}}$  asociados con estos estados, obtenemos

$$\mu_{\bar{p}} = \langle \bar{p} \uparrow | \mu | \bar{p} \uparrow \rangle = \mu_d ;$$

$$\mu_{\bar{n}} = \langle \bar{n} \uparrow | \mu | \bar{n} \uparrow \rangle = \mu_u ;$$

Vemos que estos resultados contrastan notablemente con los obtenidos anteriormente, pero también son contradictorios respecto a los resultados experimentales puesto que se obtiene  $\mu_{\bar{p}} < 0$  siendo que el valor medido del momento magnético intrínseco del protón es positivo, y además la razón entre los momentos magnéticos será  $\frac{\mu_{\bar{n}}}{\mu_{\bar{p}}} = -2$

De esta forma, la construcción propuesta queda inmediatamente desechada por el experimento. En conclusión, tenemos un elemento más de apoyo para sostener la hipótesis de confinamiento del color.

#### 4 Fórmulas de masas para los bariones

Si la simetría  $SU_F(3)$  fuera exacta para las interacciones fuertes entre los quarks, entonces las masas para los estados no excitados de los bariones podrían escribirse en la forma

$$m_b(h_1 h_2) = a_0 + b_0 \Gamma_{U_F(3)}(h_1 h_2 h_3) \quad (3.4.1)$$

donde  $a_0$  sería una constante independiente de los generadores de  $SU_F(3)$  y  $\Gamma_{U_F(3)}(h_1 h_2 h_3)$  sería el eigenvalor del operador invariante de Casimir (de segundo orden) de  $U_F(3)$  asociado a la representación irreducible  $\{h_1 h_2 h_3\}$  del grupo.

Como ya hemos mencionado al inicio de este capítulo, en general debemos esperar que la simetría no sea exacta, y además se observa experimentalmente que esto no ocurre así. Para comprobarlo, veamos una lista de las masas aproximadas de los bariones †

† Datos tomados de: *Physics Letters*, Volume 170 B, Abril 10, 1986; *Review of Particle Properties* - Particle Data Group. North Holland, Amsterdam.

Partícula	Masa decuplete	Masa octuplete
$\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$	1232	
$\Sigma^-$	1387.18*	1197.39
$\Sigma^0$	1383.7*	1192.53
$\Sigma^+$	1382.79*	1189.37
$\Xi^-$	1535.18*	1321.34
$\Xi^0$	1531.78*	1314.83
$N$		939.5729
$P$		938.2796
$\Omega^-$	1672.43	

donde el símbolo \* indica estados excitados de los bariones correspondientes. Todas las cantidades están en MeV; de aquí en adelante todas las masas que reportemos estarán en las mismas unidades.

De tal forma, una ecuación como (3.4.1) no describe de manera precisa las masas de los bariones. Sin embargo, si se espera que el modelo propuesto sea útil, se requiere que la fórmula (3.4.1) sea válida en cierto grado de aproximación (para lo cual se escogen, claro está, valores adecuados para las constantes  $a_0$  y  $b_0$ ). En otras palabras, cualquier desviación de las masas de los bariones respecto a (3.4.1) se debe a términos en el Hamiltoniano que no son invariantes ante  $SU_F(3)$ , y que en nuestro modelo intentaremos describir como componentes de tensores con propiedades de transformación bien definidas ante la acción de los generadores de  $SU_F(3)$ .

Si pensamos en términos físicos, los operadores que pueden romper esta simetría tendrían que ver con propiedades observables de las partículas. Desde luego que tenemos a la hipercarga y al isoespín como candidatos idóneos, además de que sabemos que son independientes  $[Y, \mathcal{I}_\alpha] = 0, \alpha = 0, \pm 1$ ; y sirven para etiquetar nuestros estados.

Podemos extender entonces la fórmula (3.4.1) de la siguiente manera

$$m(h_1, h_2; Y) = a_1 + b_1 \Gamma_{U_F(3)}(h_1 h_2 h_3) + c_1 Y \quad (3.4.2)$$

$$m(h_1, h_2; Y; I) = a_2 + b_2 \Gamma_{U_F(3)}(h_1 h_2 h_3) + c_2 Y + d_2 I(I+1) \quad (3.4.3)$$

La preferencia dada en las ecuaciones (3.4.2,3) al operador  $Y$  sobre  $I^2$  y el no incluir al operador  $\mathcal{I}_3$  tiene que ver solamente con los resultados experimentales que pueden verse en la tabla anteriormente escrita. Por ejemplo, entre los miembros de un multiplete de isoespín, las diferencias de masa son menores del 1 % de la masa promedio del multiplete, lo cual va más allá de la precisión que tiene el modelo y se

entiende muy bien dentro de la invariancia ante el grupo  $SU_I(2)$  propuesta para las interacciones entre quarks. Las pequeñas diferencias de masa observadas pueden atribuirse a interacciones electromagnéticas. La magnitud de las fuerzas de interacción con que estamos tratando (aquellas invariantes ante  $SU_F(3)$ ) queda de manifiesto si se comparan las masas de cada multiplete de isoespín respecto de las perturbaciones electromagnéticas. Por esto hemos descartado en nuestras ecuaciones al operador  $\mathcal{I}_3$ .

Razonando de manera análoga, vemos que el operador de hipercarga  $\mathcal{Y}$  juega un papel importante en el rompimiento de la simetría  $SU_F(3)$ . Por ejemplo, para el octete vemos que la diferencia de masas entre los dobletes  $(n,p)$  y  $(\Xi^-, \Xi^0)$ , ambos con el mismo isoespín  $I = 1/2$ , es mayor que 350 MeV; del orden del 30 % de la masa promedio de cada multiplete.

De aquí que en (3.4.2) se haya considerado al operador  $\mathcal{Y}$  sobre el operador  $\mathcal{I}^2$

Queda aún la pregunta de por qué en (3.4.1) hemos escogido en el segundo término al operador invariante de Casimir de segundo orden y no cualquier otro. La respuesta es que el operador invariante de primer orden es el operador de número, en nuestra notación  $\mathcal{N} = \sum_{\alpha} C_{\alpha}^{\alpha}$ . Este operador no distingue entre las dos representaciones de  $SU_F(3)$  que tenemos, y en principio buscamos una descripción más detallada (que aporte alguna nueva información). Asimismo, cualquier otra potencia  $\mathcal{N}^2, \mathcal{N}^3$ , etc. tampoco agrega más información. El operador  $\Gamma_{SU_F(3)}(h_1 h_2)$  en cambio sí distingue entre las representaciones  $\{3\}$  y  $\{21\}$ . Este operador de Casimir es, en nuestro esquema  $\Gamma_{U_F(3)}(h_1 h_2 h_3) = \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\beta} C_{\beta}^{\alpha}$ . Y sabemos que sus eigenvalores para la representación  $\{h_1 h_2 h_3\}$  de  $U_F(3)$  son [7]

$$\langle \{h_1 h_2 h_3\} | \Gamma_{SU_F(3)}(h_1 h_2) | \{h_1 h_2\} \rangle = \sum_{i=1}^3 h_i (h_i + 4 - 2i)$$

donde  $|\{h_1 h_2 h_3\}\rangle$  representa cualquier estado normalizado perteneciente a la rep.  $\{h_1 h_2 h_3\}$ . Tenemos entonces

$$\square \square \square \leftrightarrow \Gamma_{U_F(3)}(h_1 h_2 h_3) = 15$$

$$\square \square \leftrightarrow \Gamma_{U_F(3)}(h_1 h_2 h_3) = 9$$

$$\square \leftrightarrow \Gamma_{U_F(3)}(h_1 h_2 h_3) = 3$$

Vamos a buscar, tomando los datos que hemos tabulado, valores adecuados para las constantes que aparecen en las fórmulas (3.4.1, 2, 3).

Como no tomaremos en cuenta el operador  $I_3$ , trabajaremos con los promedios aritméticos de las masas de cada multiplete de isoespín, lo cual reduce a siete el número de valores que debemos ajustar y no se pierde información en relación a la magnitud de las interacciones fuertes.

Para la fórmula (3.4.1), tomamos el promedio de masas de cada multiplete del grupo completo  $\{3\}, \{21\}$ , de manera que obtenemos un sólo par de valores para las constantes  $a$  y  $b$ . El resultado es

$$m_b(h_1 h_2) = (804.6) + (38.5)\Gamma_{U_F(3)}(h_1 h_2) \quad (3.4.1 - 1)$$

Vemos que el coeficiente del Casimir de segundo orden es pequeño, por lo que esta fórmula separa levemente las masas de los dos multipletes

$$m_b(\{30\}) = 1382.1 ; m_b(\{21\}) = 1151.1$$

La diferencia entre estas dos masas es aún menor que la diferencia dentro de un mismo multiplete; así pues la fórmula (3.4.1) resulta ser una aproximación muy burda. Esta 'debilidad' en la contribución de los operadores cuadráticos o de orden superior justifica la idea de describir las interacciones mediante series truncadas con términos de orden creciente.

Para encontrar las constantes de la fórmula (3.4.2) debemos seleccionar 3 de los 7 valores promedio que tenemos. Lo que se hará es tomar el valor de las constantes tal que la fórmula resultante aproxime mejor las masas promedio restantes. La aproximación se evaluó tomando la desviación cuadrática respecto a los datos que se tienen. El resultado es

$$m(h_1, h_2; Y) = (859.99) + (34.59)\Gamma_{U_F(3)}(h_1 h_2) + (-146.81)Y \quad (3.4.2 - 1)$$

La desviación cuadrática respecto de los datos experimentales es  $\sigma = 88.82$ ; es decir, tenemos ahora una fórmula que se ajusta bastante bien a los datos. Se ve también cómo el peso del operador de hipercarga es mucho mayor que el del invariante de segundo orden. Es importante notar que los pesos de los términos comunes en (3.4.1-1) y (3.4.2-1) son muy parecidos.

El mismo procedimiento se ha repetido para las constantes de la fórmula (3.4.3), obteniendo el siguiente resultado

$$m(h_1, h_2; Y; I) = (817.21) + (31.74)\Gamma_{U_F(3)}(h_1 h_2) + (-189.58)Y + (34.22)I(I+1) \quad (3.4.3 - 1)$$

Esta fórmula da lugar a una desviación cuadrática  $\sigma = 40.28$ . Como era de esperarse, la precisión aumentó. Vemos que los pesos de los dos operadores de segundo orden son también muy parecidos. Hay que resaltar de las fórmulas que hemos obtenido que sus parámetros no dependen de la representación de  $SU_F(3)$ .

### Fórmula de Masas de Gell-Mann - Okubo

A continuación vamos a derivar de manera semi-empírica la famosa fórmula de masas obtenida por Gell-Mann y Okubo al proponer el modelo  $SU_F(3)$  para los quarks. Posteriormente mostraremos una manera mucho más elegante de obtener esta fórmula utilizando solamente los argumentos de teoría de grupos que hemos mencionado en este capítulo.

Primero se propone una fórmula que contenga un término invariante ante  $SU_F(3)$  más un término lineal en los generadores del grupo; este término lineal debe ser la hipercarga ya que estamos despreciando el papel de las interacciones electromagnéticas controlado por el operador  $I_3$ .

Entonces tenemos

$$M = a + bY \quad (3.4.4)$$

Vemos que esta fórmula no distingue entre las representaciones de  $SU_F(3)$ . Por otro lado, se satisface la condición, respaldada hasta cierta aproximación por los datos experimentales, dada por

$$M_{\Omega} - M_{\Xi} = M_{\Xi} - M_{\Sigma} = M_{\Sigma} - M_{\Lambda} \quad (3.4.5)$$

La cual apoya fuertemente el peso del factor lineal en la hipercarga como aparece en (3.4.4). Entonces, para aumentar la precisión de la fórmula, deben aparecer términos de segundo orden en los generadores del grupo. Pensando en los operadores físicos, tenemos a  $I^2$  y a  $Y^2$

$$M = a + bY + cI(I+1) + dY^2 \quad (3.4.6)$$

Sin embargo, debemos imponer la condición de que (3.4.6) cumpla con (3.4.5); llamando  $\Delta M$  a las diferencias de masas, tenemos de (3.4.6)

$$\Delta M = b\Delta Y + c\{\Delta I^2 + \Delta I\} + \Delta Y^2$$

Considerando la restricción (3.4.5) tenemos

$$\Delta Y = -1; \Delta Y^2 = 2Y\Delta Y + 1 = 1 - 2Y$$

$$\Delta I = -1/2; \Delta I^2 = 2I\Delta I + 1/4 = 1/4 - I$$

Con  $(I, Y) = (1/2, -1); (1, 0); (3/2, 1)$  denotando los estados de  $M_{\Xi}, M_{\Sigma}$  y  $M_{\Lambda}$  respectivamente. Entonces, la condición (3.4.5) implica

$$-b + c\{1/4 - I\} + d\{1 - 2Y\} = K \quad (K \text{ constante})$$

O bien

$$-cI - 2dY = K' \quad (K' \text{ constante}) \quad (3.4.7)$$

La pareja  $(I, Y) = (1, 0)$  nos lleva a  $K' = -c$ ; y se puede verificar que (3.4.7) se cumple para  $d = -1/4 c$ ; quedando entonces la fórmula de masas

$$M = a + bY + c\{I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2\}, \quad (3.4.8)$$

que es la fórmula de Gell-Mann - Okubo .

Notemos cómo (3.4.8) no distingue las representaciones de  $SU_F(3)$ . Así que en principio los valores de los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  se encuentran separadamente para cada representación. De esta manera es posible incluso obtener una fórmula de masas para los mesones. [6]

Vamos a obtener ahora la fórmula de Gell-Mann - Okubo utilizando los coeficientes de acoplamiento de  $SU(3)$  y los criterios de simetría que hemos venido discutiendo. Debemos conocer primeramente las propiedades de transformación de la interacción 'moderadamente fuerte' bajo la acción del grupo  $SU(3)$ , como ya hemos dicho, esta interacción es la que rompe la simetría del grupo precisamente.

Los generadores de  $SU(3)$  forman una representación del grupo bajo la conmutación entre operadores. Un operador tensorial se define como aquel cuyas componentes, al conmutar con los generadores del grupo, se transforman como los elementos de la base para alguna rep. irreducible del mismo. Se denota entonces al tensor con las etiquetas correspondientes a la base para dicha representación [6].

Tomando la cadena  $SU(3) \supset SU(2) \otimes U(1)$  que hemos estado utilizando, a la cual hemos etiquetado con los números  $\{h_1, h_2\} \supset \{I, I_3, Y\}$ , y mediante una notación abreviada  $\mu = \{h_1, h_2\}$ ;  $\nu = \{I, I_3, Y\}$  vemos que el teorema de Wigner - Eckart para el operador tensorial  $T_\mu^\mu$  queda en la forma

$$\langle \Psi^{\mu_3} | T_{\nu_2}^{\mu_2} | \Psi^{\mu_1} \nu_1 \rangle = \sum_{\gamma} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \langle \Psi^{\mu_3} || T^{\mu_2} || \Psi^{\mu_1} \rangle_{\gamma}$$

donde  $\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix}$  denota el coeficiente de acoplamiento entre las bases  $\mu_1$  y  $\mu_2$  de  $SU(3)$ , para dar por resultado un elemento de la base  $\mu_3$  del mismo grupo, con  $\gamma$  denotando las diferentes bases  $\mu_3$  que aparecen en el producto  $\mu_1 \otimes \mu_2$  (es decir, la multiplicidad de  $\mu_3$ ); en términos concretos, estos coeficientes aparecen en el producto

$$| \Psi^{\mu_1} \nu_1 \rangle | \Psi^{\mu_2} \nu_2 \rangle = \sum_{\mu_3 \gamma} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} | \Psi^{\mu_1 \mu_2} \nu \rangle_{\gamma}$$

Los generadores de  $SU(3)$  pertenecen a la representación de octete ( $\{21\}$ ) del grupo; de tal manera, existe una combinación lineal de estos operadores (en la forma en que se tengan) tal que pueden escribirse como las componentes de un tensor  $T_{\nu}^{\mu}$ ; esta es la forma fundamental de Cartan de los generadores del grupo. En esta forma, el operador de hipercarga  $Y$  resulta ser proporcional a la componente  $T_{000}^8$ .

Gell-Mann propuso en su artículo <sup>†</sup> que el operador de interacción 'moderadamente fuerte' se transforma como el generador de hipercarga  $Y$ . Como hemos dicho, la masa asociada a un estado  $|\Psi^{\mu} \nu\rangle$  se podría expresar en términos de una serie

$$m(\mu\nu) = \langle \Psi^{\mu} \nu | \mathcal{H}_0 | \Psi^{\mu} \nu \rangle + \langle \Psi^{\mu} \nu | \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathcal{H}_n^{\mu} | \Psi^{\mu} \nu \rangle \quad (3.4.9)$$

Donde  $\mathcal{H}_0$  es la parte de la interacción invariante ante  $SU_F(3)$  (la interacción propiamente 'fuerte') y los términos  $\mathcal{H}_n^{\mu}$  son proporcionales a tensores de rango  $n$  que pertenecen a alguna representación irreducible del grupo contenida en el producto (externo en este caso, ya que el rango crece; es decir, el número de cajas en las tablas de Young se suma) de  $n$  octetes  $\{21\}$ . Entonces, con esta proposición, y desarrollando la serie hasta segundo orden, Gell-Mann obtuvo

<sup>†</sup> Phys. Rev. 125, 1067 (1962).

$$m(\mu\nu) = m_0(\mu) + a(\mu) \begin{pmatrix} \mu & 8_1 & \mu \\ \nu & 000 & \nu \end{pmatrix} + b(\mu) \begin{pmatrix} \mu & 8_2 & \mu \\ \nu & 000 & \nu \end{pmatrix} \quad (3.4.10)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican el rango del tensor que se está considerando, como ya hemos dicho, en el primer caso se trata simplemente del operador de hipercarga. Como los coeficientes  $a_n$  en (3.4.9) son invariantes ante  $SU_F(3)$  (la parte tensorial queda en el factor  $\mathcal{H}_F^a$ ) deben ser independientes de los parámetros  $\nu$ , pero dependen de la representación  $\mu$  del grupo ya que en los coeficientes  $a$  y  $b$  se incluye el elemento de matriz reducido que aparece en el teorema de W.E., el cual depende explícitamente de  $\mu$ .

El cálculo de los coeficientes de acoplamiento no se hará aquí, pero remitimos a la referencia [6] en donde se calcula su valor en términos de las cantidades físicas contenidas en los índices  $\mu$  y  $\nu$

$$\begin{pmatrix} \mu & 8_1 & \mu \\ \nu & 000 & \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{2} Y ;$$

$$\begin{pmatrix} \mu & 8_2 & \mu \\ \nu & 000 & \nu \end{pmatrix} = \{I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2 - g_2\} ;$$

Con  $g_2$  el eigenvalor del operador de Casimir de segundo orden de  $SU_F(3)$ . La fórmula de masas de Gell-Mann queda entonces

$$m(\mu\nu) = m_0(\mu) + \frac{1}{2}a(\mu) Y + b(\mu)\{I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2 - g_2\} \quad (3.4.11)$$

La fórmula (3.4.11) es aplicable dentro de cada multiplete de  $SU_F(3)$ , de manera que los coeficientes  $m_0$ ,  $a$  y  $b$  pueden cambiar al describir la masa de los bariones del decuplete  $\{3\}$  con respecto a aquellas del octuplete  $\{21\}$ . Esta fórmula es idéntica a la deducida en (3.4.8) bajo la identificación de los coeficientes

$$a = m_0(\mu) - g_2 b(\mu) ;$$

$$b = \frac{1}{2} a(\mu) ;$$

$$c = b(\mu) .$$

El hecho de suponer que la interacción 'moderadamente fuerte' se transforme como el operador de hipercarga ha tenido importancia también en otros aspectos de la física de partículas, por ejemplo en el estudio de las interacciones débiles y electromagnéticas de los hadrones .

## 5 REFERENCIAS

[ 1 ] F.Halzen,A.D. Martin; Quarks and Leptons;

An Introductory Course in Modern Particle Physics John Wiley and Sons, USA  
1984 . Capítulos 1 y 2 .

[ 2 ] Hamermesh; Capítulo 7, sección 13 .

[ 3 ] Chen; Capítulo 7, sección 10.

[ 4 ] Lichtenberg; Unitary Symmetry and elementary particles Academic Press, New  
York 1978 . Capítulo 7, sección 3 .

[ 5 ] M.Moshinsky; The harmonic oscillator . . . . . Capítulo III, sección 17 .

[ 6 ] R.E. Behrends; "Broken SU(3) as a Particle Simetry" . Aparece en E.M. LoebI,  
Op. Cit. Vol.II .

## CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha mostrado de una manera muy simple la utilización del método de segunda cuantización en Teoría de Grupos para tratar el problema de muchas partículas en mecánica cuántica. Hemos escrito un Hamiltoniano invariante ante rotaciones para bosones  $p$  interactuando en una capa  $\nu 1$  en términos de operadores físicamente relevantes, mostrando gráficamente los distintos tipos de espectros que se pueden obtener. También ha sido posible calcular amplitudes de transición y momentos cuadrupolares de los estados, ya que teniendo la base de estados del sistema caracterizada en forma completa, y construyéndolos utilizando técnicas de teoría de grupos, se pueden calcular estas transiciones multipolares. Más aún, se podría tomar un Hamiltoniano que esté dado en términos de los generadores del álgebra, y con nuestra base de estados podríamos realizar cálculos numéricos de elementos de matriz, etc.

El paso de bosones a fermiones significó solamente la inclusión del grupo  $SU(2)$  de espín como un grado de libertad 'extra' y la definición de operadores que cumplieran relaciones de anti-conmutación. Con los fermiones se ha hecho algo análogo a lo que se hizo en el caso de los bosones, mostrándose las diferencias entre ambos casos. Una diferencia fundamental es que en el caso de los fermiones la base de estados consta de un número finito de elementos. Debido a que no se consideraron interacciones invariantes ante rotaciones que mezclen los grados de libertad espaciales y de espín, el momento angular total:  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ , no es un número importante, y no se construyó la base acoplada, pero el procedimiento es directo a partir de los estados encontrados, utilizando coeficientes de acoplamiento de Clebsch-Gordan. También para los fermiones hemos mostrado gráficamente los espectros de energías obtenidos considerando dos potenciales de interacción que son bastante comunes en la literatura; en éstos espectros se vió claramente cómo existe una similitud entre sistemas de partículas y de 'agujeros', la cual quedó apoyada con el cálculo de los momentos cuadrupolares.

Una vez teniendo las imágenes bosónica y fermiónica, podría buscarse un modelo que combine a las dos, de manera tal que se pudieran describir espectros de cualquier núcleo impar en el que se tuvieran tanto bosones como fermiones interactuando en una capa de valencia. En el IBFM (mencionado en la sección 2.1) se busca tener cadenas bosónicas y fermiónicas idénticas<sup>1</sup>, lo que implica que los operadores bosónicos y fermiónicos puedan combinarse de la misma manera que se combinan  $\mathbf{L}$  (de  $SO(3)$ ) y

<sup>1</sup> En el lenguaje de la teoría de grupos, éstas son cadenas en las que los grupos que las forman son isomorfos

S (de  $SU(2)$ ) para formar  $J$ , y tener así una sola cadena de grupos (más general), en términos de cuyos operadores de Casimir (como sería  $J^2$  en el caso anterior) se buscaría describir los espectros de energía. Una manera más ambiciosa de combinar bosones y fermiones sería tomar todos los operadores de creación (bosónicos y fermiónicos) para formar un álgebra generalizada cuyos generadores serían productos de operadores de creación y aniquilación tomados indistintamente, combinándolos de manera que se tuviera un álgebra cerrada de operadores que obedecen relaciones de conmutación y anticonmutación. Vemos entonces que estos generadores podrían aniquilar un par (un 'bosón') para crear una partícula no apareada; es decir, con las representaciones obtenidas en este modelo ('supersimétrico') se buscaría describir a todos los núcleos [3]

Cabe notar que los 'bosones' y 'fermiones' de los que hemos hablado en este trabajo son partículas abstractas cuyo significado microscópico puede ser muy distinto dependiendo de la aplicación física que se le quiera dar a este método. En la introducción mencionamos que este fue introducido por Iachello y Arima para tratar problemas de física nuclear, en la cual se obtuvieron resultados sorprendentemente buenos con las cadenas de Grupos I, II e III (mencionadas en el capítulo 1) para el  $^{110}_{48}Cd$  (cadena I), para el  $^{156}_{64}Gd$  (cadena II) y para el  $^{196}_{78}Pt$  (cadena III). Sin embargo, también se puede aplicar en problemas de física atómica y molecular (para estudiar colisiones y fenómenos de dispersión) donde cada partícula (bosón o fermión) podría ser un sistema microscópicamente complejos pero cuya estructura interna no interese en el problema a tratar.

Un aspecto del método que no fue discutido es la geometría que se puede extraer del mismo. La idea básica, de la cual partieron Iachello y Arima al proponer su modelo, es el hecho de que cada grupo continuo tiene asociado con él una cierta topología (Iachello, Arima [1]). El hecho es que utilizando estados 'coherentes' aparecen variables geométricas las cuales resultaron ser, en el caso de las cadenas de grupos anteriormente mencionadas, las introducidas por Bohr y Mottelson en 1952.

Otro punto que quedaría a analizar es la analogía partícula-agujero observada en el caso de los fermiones  $p$ . Una manera formal de hacer el tratamiento es introducir el concepto de 'representaciones conjugadas', de las cuales no hemos hablado en este trabajo; pero se ve que estas aparecen de manera natural tanto en esta forma (partícula-agujero), como con la idea de las antipartículas.

En cuanto a nuestro tratamiento de los bariones, podemos decir que los resultados son un buen elemento de partida para cualquier trabajo que se enfoque en sus estados excitados e incluso, como lo ha mostrado Behrends [2], se podrían encontrar razones de decaimiento para ciertos procesos; claro que habría que extender el modelo a los mesones, lo cual, como ya mencionamos en el capítulo 3, no implica mayores dificultades. El punto básico es que conociendo los coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(3)$  (los cuales ya están calculados en la literatura) podemos definir operadores de

---

transición cuya acción sobre los estados sería directo evaluar puesto que ya tenemos una base de estados adecuada.

**REFERENCIAS**

[ 1 ] Iachello, Arima; ver Ref. Cap.1 .

[ 2 ] Behrends; ver Ref. Cap.3 .

[ 3 ] Bonatsos , cap. 12 .