29
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

U. N. A. M.

FACULTAD DE CIENCIAS

" TIEMPOS DE TUNELAJE A TRAVES DE UNA REGION CLASICAMENTE PROHIBIDA "

T E S I S

Que para obtener el titulo de :

FISICO

Presenta

FRANCISCO ANTONIO HORTA RANGEL

1 9 9 3

Mexico D.F.

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

El interés por el tiempo que se puede asociar a una partícula en interacción con una barrera de potencial a su paso en movimiento unidimensional se remonta a los principios de la mécanica cuántica que, como teoría ya formalizada se inician a este respecto durante los años 30's.

El problema teórico resurge años después (1951), cuando David Bohm [1], desarrolla el mismo problema, y relaciona un tiempo al cambio de fase resultante sobre la función compleja que se asocia a la función de onda que representa a la partícula en su interacción sobre la barrera de potencial.

Los sesentas marcan un resurgimiento del problema del tiempo de tunelaje dada la aparición de la tecnología semiconductora, que requería conocer el tiempo que tarda una partícula en atravesar una barrera de potencial, de manera que permitiera tener un conocimiento práctico y teórico de los nuevos dispositivos semiconductores. [7], [8]

Smith [2], observa el problema de manera integral, de tal forma que obtiene un resultado en el que plantea que el tiempo total que se puede asociar a la partícula dentro de la barrera esta dado por un tiempo de permanencia (dwell time) , cuya definición es la relación del número total de partículas incidentes (ó salientes) sobre la barrera divida por el flujo incidente (ó saliente).

Dada esta definición no es posible distinguir si la partícula es reflejada ó transmitida, sino solamente el tiempo que "dura" la interacción con la barrera de modo que no se puede conceptualizar como tiempo de travesía.

Baz [3] - Rybachenko [4] en esta misma década proponen un diseño teórico de un experimento que permita a manera de reloj, medir la duración de la interacción. La idea consiste en introducir un campo magnético de pequeña magnitud a todo lo ancho de la barrera de tal modo que al hacer incidir la partícula, se provoque una precesión de Larmor sobre la partícula y con ello un cambio en la orientación de su spin. Este cambio de orientación permitiría a manera de reloj , calcular el tiempo que tardaría la partícula en atravesar la barrera.

En los ochentas resurge el interés en este tema [6], [7], dadas las nuevas tecnologías para semiconductores con respuestas de alta velocidad que aparecen en esta década. Época en la que se hacen revisiones detalladas de lo realizado hasta entonces, sometiendo a comparación y discusión los resultados de tales trabajos [8], además se aportan nuevos enfoques que intentan cuantificar analíticamente el tiempo de tunelaje [9],[10], pero la generalidad de los estudios continuan basados sobre los puntos de vista mencionados anteriormente [1],[2],[3] y [4].

La controversia respecto de asociar un tiempo de travesía a una partícula a su paso a través de una barrera de potencial hasta hoy día sigue vigente y es por ello que la intención de la presente tesis es estudiar (sin pretender dilucidar cuál de estos tiempos sea el más indicado), la mecánica y las interpretaciones de las propuestas mencionadas. Usaremos el formalismo de la mecánica cuántica dado el interés actual en el estudio de las propiedades de transporte electrónico en estructuras semiconductoras de baja dimensionalidad . La intención es mostrar una perspectiva general de este problema, y para tal efecto se emplean algunos casos tanto particulares como límites sobre los resultados encontrados para cada uno de los tiempos en estudio de modo que nos permitan físicamente conceptualizar la validez teórica de tales resultados.

Es necesario, sin embargo, hacer algunas aclaraciones para observar las comparaciones en relación a las dimensiones en los semiconductores y al análisis que se hace en este trabajo. Durante la primera etapa tecnológica que se hizo mención (década de los sesentas), dada las restricciones experimentales de la época, el análisis bastaba para la barrera opaca, que se refiere al orden en dimensiones de la barrera en unas centenas de amstrongs. La posibilidad en los ochentas de reproducir experimentalmente los resultados encontrados en barreras de unas pocas decenas de amstrongs, es lo que ha permitido rescatar el interés sobre este problema.

Queda restringida esta discusión a una barrera rectangular de altura V_o y ancho a, centrado en $x = a/2$. Con una función de onda incidente de amplitud unitaria y una corriente definida $J = \hbar k / m$, con $k=\sqrt{(2mE/\hbar^2)}$. La probabilidad de transmisión para una barrera rectangular es:

$$T = [\ 1+(K_o^4/4k^2q^2)\mathrm{senh}^2 aq\ ]^{-1} \quad \text{con} \quad K_o=\sqrt{(2mV_o/\hbar^2)} \quad , \quad q =\sqrt{(K_o^2-k^2)}$$

Para una barrera casi completamente reflectora , denominada más delante como barrera opaca, la cuál cumple la condición $aq \gg 1$, y para la que la probabilidad de transmisión en el caso $E < V_o$ nos da:

$$T = (\ 16k^2q^2/ K_o^4\ )\ e^{-2aq}$$

Las magnitudes usadas en los gráficos de la presente tesis se muestran a continuación en donde seleccionamos los cuatro casos siguientes.

1). Como primer caso se considero un ancho de barrera $a = 50$ Å , y una altura de barrera $V_o = 0.222$ eV ó bien $K_o = (\pi/50)$, ya que $V_o = @\cdot K_o^2$, donde $@=\hbar^2/2m$, es una constante con valor númerico de $@=56.94$ Å²-eV.

Con estos valores, se obtienen los siguientes productos constantes:

La cantidad $aK_o = \pi$;

$u = a\cdot V$, con valor numérico de $u = 11.1$ Å-eV ;

$\Omega = u/@$ ó $\Omega = a\cdot K_o$ con valor aproximado $\Omega \approx 0.2$ [Å]$^{-1}$.

2). Büttiker [6], en cambio, analiza sus resultados para un valor constante $a\cdot K_o = 3\pi$. Haciendo una similitud a nuestro análisis podemos asociar al mismo potencial de barrera $V_o \approx 0.222$ eV , un ancho de barrera $a = 150$ Å , con lo que resultan los valores para u y para Ω siguientes: $u \approx 33.3$ Å-eV y $\Omega \approx 0.6$ [Å]$^{-1}$

Además de los valores para aK_o mencionados anteriormente se analizan los siguientes casos complementarios.

3). $a\cdot K_o = (\pi/10)$.- Barrera delgada , de ancho $a = 5$ Å

4). $a\cdot K_o = 10\cdot\pi$.- Barrera opaca , de ancho $a = 500$ Å

Estas cantidades son típicas para los semiconductores, por lo que el análisis, esta enfocado hacia el aspecto de tunelaje electrónico sobre capas delgadas de aislante que bien podemos imaginar como dispositivos tipo sandwich con materiales , como el GaAs cubriendo, por ambos lados al aislante GaAlAs , que funcionaría como barrera de potencial [11].

Los siguientes constantes son utilizadas en los siguientes capítulos:

$m = 0.511 \times 10^{-6}$ eV-seg (masa del electrón)

$m^* = 0.067\ m$ (masa efectiva del electrón)

$u = a \cdot V$ A − eV

$\hbar = 6.582 \times 10^{-16}$ eV − seg.

$c = 3 \times 10^{18}$ A / seg

$@ = \hbar^2/2m^*$

$@ = 56.94$ A^2−eV

$\Omega = a \cdot K_o$

$\Omega = u\ /\ @$ $[A]^{-1}$

En adelante entenderemos que [m] es la masa efectiva del electrón en lugar de [m*].

El capítulo primero lo iniciamos definiendo las amplitudes r, t de reflexión y transmisión respectivamente además de los coeficientes R , T , usando la definición de estas cantidades en términos del flujo de probabilidad.

En el siguiente capítulo , utilizamos las expresiones definidas en el capítulo 1 : r, t, R, T y las aplicamos a la barrera rectangular.

En el capítulo 3 se define el concepto de tiempo fase, concepto que es utilizado para la barrera rectangular, y donde se consideran además los casos límites para la barrera delgada , opaca y del tipo delta .

El concepto de tiempo de permanencia (dwell time), es introducido en el capítulo 4 donde este concepto se aplica al mismo tipo de barrera con los mismos casos mencionados anteriormente para el tiempo de fase.

Para el capítulo 5 se revisa el problema relacionado a la travesía y reflexión de una partícula sobre la barrera rectangular inmersa en un campo magnético, encontrandose un tiempo denominado de Larmor (Larmor clock), (idea introducida por Baz [3]-Rybachenko [4]), para posteriormente repetir los mismos casos de barrera mencionados.

En el capítulo 6 se hace la discusión de gráficas y comparaciones a los diversos tiempos en los casos de estudio ($aK_o = \pi$, $aK_o = 3\pi$, barrera delgada, y barrera opaca).

Al término de este trabajo existen ápendices relacionados a la obtención de algunas ecuaciones encontradas a lo largo de estos capítulos, asimismo, un programa Basic que calcula T para una barrera asimétrica. Finalmente mencionamos las conclusiones de este trabajo conjuntamente con las referencias requeridas en el desarrollo de la presente tesis.

C A P I T U L O 1

- Definición de los coeficientes de transmisión (T) y reflexión (R) -

La ecuación de continuidad en una dimensión es de la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \qquad ---- \quad (1)$$

En mécanica cuántica $\rho = |\psi|^2$, se refiere a la densidad de probabilidad, mientras que J se relaciona al flujo de probabilidad.

La ecuación de Schrödinger en una dimensión con potencial que es función exclusivamente de la posición esta dado por la siguiente expresión.

$$-\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \cdot \psi \right] \qquad ---- \quad (2)$$

El Hamiltoniano es en este caso

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \qquad ---- \quad (3)$$

Usando este operador, esta ecuación se escribe

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \cdot \hat{H}\, \psi \qquad ---- \quad (4)$$

De esta ecuación y su conjugado encontramos la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\, \psi^* \psi \,] = -\frac{i}{\hbar} \cdot \psi^* \hat{H}\, \psi + \frac{i}{\hbar} \cdot \psi\, \hat{H}\, \psi^* \qquad ---- \quad (5)$$

Sustituyendo (2) en la ecuación (5) , que simplificando nos da

$$\frac{\partial}{\partial t} [\, \psi^* \psi \,] = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right] \qquad ---- \quad (6)$$

Modificando la expresión anterior, llegamos a la forma equivalente

$$\frac{\partial}{\partial t}[\,\psi^*\psi\,] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\hbar}{i2m}\cdot\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)\right] \quad ---- \quad (7)$$

1.1.- Flujo de probabilidad

Asociamos por comparación con (1), la ecuación (7) y por lo que definimos el flujo de probabilidad del modo siguiente.

$$J = \frac{\hbar}{i\cdot 2m}\cdot\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right] \quad ---- \quad (8)$$

de forma similar, se hace el análisis para tres dimensiones que nos da:

$$\bar{J} = \frac{\hbar}{i\cdot 2m}\cdot\left[\psi^*\cdot\bar{\nabla}\psi - \psi\cdot\bar{\nabla}\psi^*\right] \quad ---- \quad (9)$$

Para ejemplificar la utilidad del resultado anterior supóngase el caso de una partícula que incide en movimiento unidimensional sobre un blanco dispersor en donde, según el formalismo de la mécanica cuántica tendremos dos posibilidades una vez ocurrida la interacción, la partícula bien pudiera ser reflejada ó bien transmitida a través del blanco dispersor. (ver figura 1).

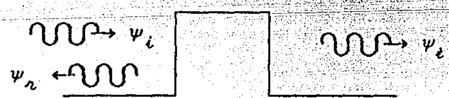


Figura 1.

Según este enfoque se asocian distintas densidades de probabilidad para localizar en cada caso a la partícula y por tanto distintos flujos de probabilidad que denominamos del modo siguiente.

J_i = flujo de probabilidad incidente

J_r = flujo de probabilidad reflejada

J_t = flujo de probabilidad transmitida

entonces la relación de continuidad en el flujo de probabilidad es:

$$|J_i| = |J_r| + |J_t|$$

relación, que dividiendo entre J_i se convierte en

$$\left|\frac{J_r}{J_i}\right| + \left|\frac{J_t}{J_i}\right| = 1 \qquad ---- \quad (10)$$

1.2.- Definimos las cantidades R y T como sigue:

$$R = \frac{|J_r|}{|J_i|} \quad , \quad T = \frac{|J_t|}{|J_i|} \qquad ---- \quad (11a)$$

Cantidades que cumplen (10), y de lo que resulta la siguiente ecuación:

$$R + T = 1 \qquad ---- \quad (11b)$$

Usando esta expresión podemos entender a R como la proporción del flujo que es reflejado, en tanto a T, como la proporción que es transmitida.

(R.- Coeficiente de reflexión ; T.- Coeficiente de transmisión)

Resolveremos para una barrera no simétrica (fig. 2), a manera de ejemplificar la utilidad de los resultados anteriores con las relaciones analíticas debidas a la dispersión de una función de onda tipo onda plana que se caracteriza por poseer una energía bien definida.

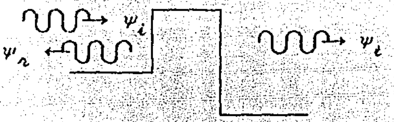


Figura 2.

Las expresiones explícitas son:

$$\psi_i = A\cdot e^{ik_i x}$$
$$\psi_r = B\cdot e^{-ik_r x} \qquad ---- \quad (12)$$
$$\psi_t = C\cdot e^{ik_t x}$$

Donde k_i , k_r , k_t se refiere a los vectores de onda asociados a las funciones ψ_i , ψ_r , ψ_t respectivamente.

Utilizando una función del tipo de las ecs.(12), $\psi = A\cdot e^{ikx}$, además tomando la ecuación (8), derivamos y resolvemos para J con el valor absoluto

$$| J | = \frac{\hbar k}{m}\cdot[\ \psi^*\psi\ ] \qquad ---- \quad (13)$$

Con los siguientes casos en la densidad de probabilidades en cada una de las expresiones dadas en (12).

$$\psi^*\psi = A^*A \qquad\qquad |\psi|^2 = |A|^2 \qquad ---- \quad (14a)$$
$$\psi^*\psi = B^*B \qquad ó \qquad |\psi|^2 = |B|^2 \qquad ---- \quad (14b)$$
$$\psi^*\psi = C^*C \qquad\qquad |\psi|^2 = |C|^2 \qquad ---- \quad (14c)$$

Utilizando las definiciones para R y T , ecs.(11)

$$T = \frac{k_t}{k_i}\,\frac{|C|^2}{|A|^2} \quad , \quad R = \frac{|B|^2}{|A|^2} \qquad ---- \quad (15)$$

Si suponemos el caso de la barrera simétrica (fig.3), en (12) sucede que $k_i = k_t$, de lo que resulta

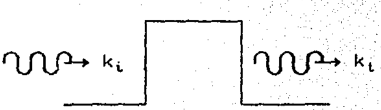


Figura 3.

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}\ ;\ T = \frac{|C|^2}{|A|^2} \qquad --- \quad (16)$$

Estas ecuaciones, bien podemos expresarlas como sigue:

$$T = \frac{C^*}{A^*} \cdot \frac{C}{A} \quad , \quad R = \frac{B^*}{A^*} \cdot \frac{B}{A} \qquad ---- \quad (17)$$

la utilidad de estas ecuaciones expresadas en el modo anterior se discute a continuación en el punto siguiente.

1.3.- Definición de r, t

Las nuevas cantidades $t = C / A$ y $r = B / A$, las nombraremos como amplitudes de transmisión y reflexión respectivamente, notese que R y T son cantidades reales, mientras que r, t son cantidades complejas. Esta propiedad es lo que nos permitirá abordar con bastante utilidad las siguientes expresiones complejas equivalentes.

$$t = |t| \cdot e^{i\theta} \quad ó \quad t = T\,[\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta\,] \qquad ---- \quad (18a)$$

$$r = |r| \cdot e^{i\phi} \quad ó \quad r = R\,[\cos\phi + i \cdot \text{sen}\,\phi\,] \qquad ---- \quad (18b)$$

Donde θ y ϕ son las fases complejas asociadas a la transmisión y la reflexión respectivamente.

Finalmente mencionamos que entonces representaremos las cantidades R y T en términos de las amplitudes de transmisión t, y de reflexión r, del modo válido siguiente

$$T = |t|^2 \qquad ---- \quad (19a)$$

$$R = |r|^2 \qquad ---- \quad (19b)$$

por lo cuál podemos determinar R , T , si tenemos definido las cantidades r, t en cada caso. Este procedimiento se utilizará a menudo a lo largo de este trabajo.

C A P I T U L O 2

- Cálculos de r, t, R y T para una barrera rectangular -

Tomando el caso de la barrera rectangular, iniciamos con este ejercicio para hallar los valores de r, t, R, T. El problema consiste básicamente en considerar una(s) partícula(s) que representamos con una función de onda físicamente aceptable $\psi = A \cdot e^{ikx}$, la cuál conlleva una energía bien definida $E = \hbar^2 k^2/2m$.

Separamos en dos partes el ejercicio, en función de la energía asociada a la partícula respecto al potencial de la barrera.

2.1.- Caso $E < V_o$.

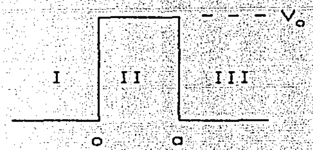


Figura 4.

Haremos una división del problema en tres regiones, en las que a cada una de estas se les asocia una función, que son soluciones de la ecuación de Schrödinger cuya expresión matemática se mencionó con anterioridad.

$$\psi_{I} = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx} , \qquad x \leq 0 \qquad ---- \quad (20a)$$

$$\psi_{II} = F \cdot e^{-qx} + G \cdot e^{qx} , \qquad 0 \leq x \leq a \qquad ---- \quad (20b)$$

$$\psi_{III} = C \cdot e^{ik(x-a)} , \qquad x \geq a \qquad ---- \quad (20c)$$

donde $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $q = \dfrac{\sqrt{2m(V_o - E)}}{\hbar}$ y $A, B, C, F, G \in \mathbb{C}$

Aplicando las condiciones de continuidad.

$$\psi_{I}(o) = \psi_{II}(o) \quad ; \quad \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \qquad ---- \quad (21a)$$

$$\left.\frac{d\psi_{I}}{dx}\right|_{o} = \left.\frac{d\psi_{II}}{dx}\right|_{o} \qquad \left.\frac{d\psi_{II}}{dx}\right|_{a} = \left.\frac{d\psi_{III}}{dx}\right|_{a} \qquad ---- \quad (21b)$$

llegamos a las expresiones :

$$A + B = F + G \qquad ---- \quad (22a)$$

$$ikA - ikB = -qF + qG \qquad ---- \quad (22b)$$

$$F\cdot e^{-aq} + G\cdot e^{aq} = C \qquad ---- \quad (22c)$$

$$-qF\cdot e^{-aq} + qG\cdot e^{aq} = ikC \qquad ---- \quad (22d)$$

De estas ecuaciones y además de utilizar las identidades:

$$\text{senh } aq = \frac{e^{aq} - e^{-aq}}{2} \quad , \quad \cosh aq = \frac{e^{aq} + e^{-aq}}{2} \qquad --- \quad (23)$$

obtenemos para C, G lo siguiente :

$$G = \left[\frac{-i\ (q+ik)k\cdot e^{-aq}}{(q^2-k^2)\text{senh } aq - i2kq\cosh aq} \right]\cdot A \qquad ---- \quad (24a)$$

$$C = \left[\frac{2q\cdot e^{aq}}{(q + ik)} \right]\cdot G \qquad ---- \quad (24b)$$

De estas dos últimas expresiones obtenemos $t = C / A$ para $E < V_o$

$$t = \frac{-i2kq}{(q^2-k^2)\mathrm{senh}\ aq - i2kq\cosh\ aq} \qquad ---- \quad (25)$$

De la definición (19) obtenemos $T = t^*t$, para $E < V_o$

$$T = \frac{4k^2q^2}{4k^2q^2 + (q^2+k^2)^2 \cdot \mathrm{senh}^2 aq} \qquad ---- \quad (26)$$

dadas las ecuaciones (22) obtenemos una relación para B, G, eliminando F, A y C.

$$B = \left[\frac{(q-ik)\mathrm{senh}\ aq}{ik \cdot e^{-aq}}\right] \cdot G \qquad ---- \quad (27)$$

Sustituyendo G de (24) tenemos, dado que $r = B / A$

$$r = \frac{-(q^2+k^2)\mathrm{senh}\ aq}{(q^2-k^2)\mathrm{senh}\ aq - i2kq\cosh\ aq} \qquad ---- \quad (28)$$

y de igual manera, se procede para R , dada por $R = r^*r$

$$R = \frac{(q^2+k^2)^2 \cdot \mathrm{senh}^2 aq}{4k^2q^2 + (q^2+k^2)^2 \cdot \mathrm{senh}^2 aq} \qquad ---- \quad (29)$$

con los resultados de R y T , entonces

$$T + R = \frac{4k^2q^2 + (q^2+k^2)^2 \cdot \mathrm{senh}^2 aq}{4k^2q^2 + (q^2+k^2)^2 \cdot \mathrm{senh}^2 aq} \qquad ---- \quad (30)$$

por lo cual se concluye que $R + T = 1$, para $E < V_o$

Si $K_o^2 = 2mV_o/\hbar^2$ entonces $K_o = k^2 + q^2$, con esto las ecs. anteriores se modifican al modo siguiente, para el caso $E < V_o$:

$$r = \frac{-K_o^2 \cdot \text{senh } aq}{(q^2-k^2)\cdot \text{senh } aq - i2kq\cosh aq} \quad ---- \quad (31)$$

$$t = \frac{-i2kq}{(q^2-k^2)\cdot \text{senh } aq - i2kq\cosh aq} \quad ---- \quad (32)$$

$$R = \frac{K_o^4 \cdot \text{senh}^2 aq}{4k^2q^2 + K_o^4 \cdot \text{senh}^2 aq} \quad ---- \quad (33)$$

$$T = \frac{4k^2q^2}{4k^2q^2 + K_o^4 \cdot \text{senh}^2 aq} \quad ---- \quad (34)$$

2.2.- Caso $E > V_o$

Para el otro caso $E > V_o$, el análisis es completamente similar pero, para ahorrar pasos en las expresiones anteriores de r, t, R y T sustituimos q por q', cuya expresión es ahora:

$$q' = \frac{\sqrt{2m(E-V_o)}}{\hbar} \quad ó \quad q = iq' \qquad \text{para} \quad E > V_o$$

además de las ecs. $\operatorname{senh}(iaq') = i \operatorname{sen}(aq')$; $\cosh(iaq') = \cos(aq')$, se llega a los siguientes resultados para $E > V_o$,

$K'^2_o = k^2 - q'^2$

$$r = \frac{K'^2_o \cdot \operatorname{sen} aq'}{(q'^2+k^2)\operatorname{sen} aq' + i2kq'\cos aq'} \qquad ---- \quad (35)$$

$$t = \frac{i2kq'}{(q'^2+k^2)\operatorname{sen} aq' + i2kq'\cos aq'} \qquad ---- \quad (36)$$

$$R = \frac{K'^4_o \operatorname{sen}^2 aq'}{4k^2q'^2 + K'^4_o \operatorname{sen}^2 aq'} \qquad ---- \quad (37)$$

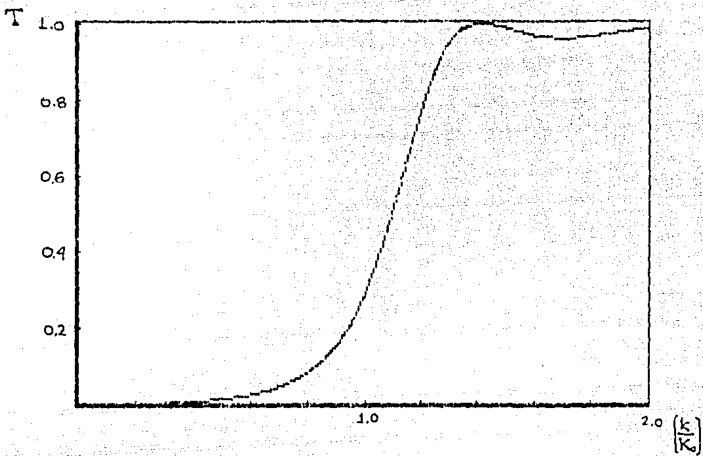
$$T = \frac{4k^2q'^2}{4k^2q'^2 + K'^4_o \operatorname{sen}^2 aq'} \qquad ---- \quad (38)$$

Sumando las cantidades para R y T, se obtiene nuevamente

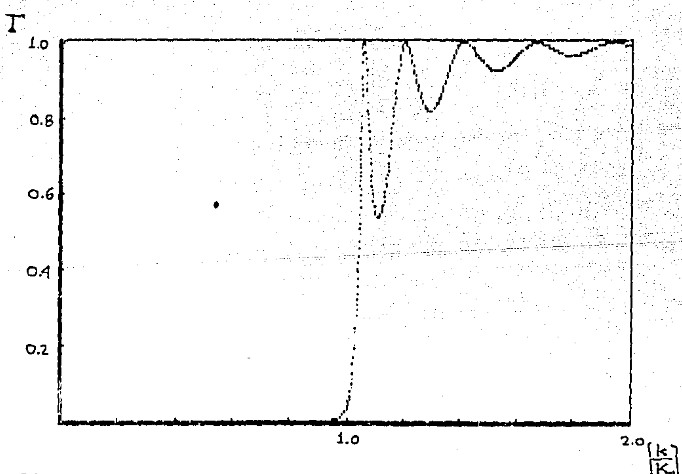
$$R + T = 1 \qquad \text{para} \quad E > V_o$$

y se concluye la validez de este resultado para cualquier energía.

Los gráficos 1 y 2, muestran la variacion del coeficiente de transmisión [T] como función de [k], para dos anchos de barrera distintos. Donde K_o es una cantidad constante con unidades de $[\text{longitud}]^{-1}$.



Gráfica 1. Coeficiente de Transmisión T , para una barrera rectangular de ancho a, y altura $V_0 = \hbar^2 K_0^2/2m$ como función del vector de onda $k = \sqrt{(2mE/\hbar^2)}$,para $aK_0 = \pi$.



Gráfica 2. Coeficiente de Transmisión T , para una barrera rectangular de ancho a, y altura $V_0 = \hbar^2 K_0^2/2m$ como función del vector de onda $k = \sqrt{(2mE/\hbar^2)}$,para $aK_0 = 3\pi$.

2.3.- Casos particulares.

A continuación se muestran algunos casos relacionados al problema:

a). Para $E < V_o$

Si hacemos tender $a \to 0$ conforme $K_o^2 \to \infty$, mientras que el producto $\Omega = aK_o^2$ permanece constante, esto permite reproducir la situación de una barrera de potencial delta de intensidad Ω, y de ese modo llegamos a los resultados siguientes para r, t, R, T.

donde @ = 56.94 $Å^2$-eV.

$$t = \frac{2k}{2k + i\Omega} \qquad \text{----} \quad (39)$$

$$r = \frac{-i\Omega}{2k + i\Omega} \qquad \text{----} \quad (40)$$

$$T = \frac{4k^2}{4k^2 + \Omega^2} \quad \text{ó} \quad T = \frac{4E}{4E + @\Omega^2} \qquad \text{----} \quad (41)$$

$$R = \frac{\Omega^2}{4k^2 + \Omega^2} \quad \text{ó} \quad R = \frac{@\Omega^2}{4E + @\Omega^2} \qquad \text{----} \quad (42)$$

y de nueva cuenta comprobamos que: $R + T = 1$

b). Para la barrera opaca [$aq >> 1$], el coeficiente de transmisión T resulta lo siguiente.

$$T \approx 16\cdot(k/K_o)^2\cdot\left[1-(k/K_o)^2\right]\cdot\exp[-2aq] \qquad ---- \qquad (43)$$

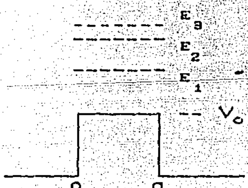
si $aK_o > 10\cdot\pi$ entonces $T < 0.005$ para $k < K_o$ y con tal valor de T , se justifica la nominación de opaca.

c) Resononancias. $E > V_o$

En las expresiones (37) - (38) se observa que el término sen(aq') se anula para aquellos valores $aq' = n\pi$, $n = 1,2..$

Para estos valores de q' , $q' = n\cdot\pi / a$; se tiene que el coeficiente de reflexion R se anula y por lo cuál; $T = 1$.

y las energías de resonancia por encima de la barrera de potencial para $E > V_o$.



$$E_n = V_o + \frac{n\pi\hbar^{\,2}}{2ma} \qquad ---- \qquad (44)$$

según se observa en la figura.

Figura 5.

En el problema anterior se procedió llegar a la barrera tipo delta como un caso límite, a continuación trabajamos este problema donde la barrera es un potencial delta al que definimos como $V_o = u\cdot\delta(x)$,donde la constante u tiene unidades de energía-longitud.

Una propiedad de la función delta de Dirac es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\delta(x)\, dx = f(o)$$

Las unidades relacionadas a $\delta(x)$ son de $[\text{longitud}]^{-1}$, de tal modo que la cantidad $u\cdot\delta(x)$ tiene unidades de energía.

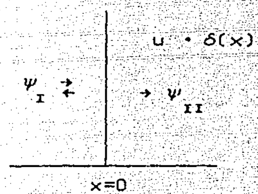


Figura 6.

Este problema es dividido en dos regiones cuyas soluciones son ψ_I (lado izquierdo) y ψ_{II} (lado derecho) en la ecuación de Schrödinger

De manera analítica.

$$\psi_I = A\cdot e^{ikx} + B\cdot e^{-ikx} \quad ; \quad x < 0 \quad - - - - \quad (45a)$$

$$\psi_{II} = C\cdot e^{ikx} \quad ; \quad x > 0 \quad - - - - \quad (45b)$$

La función es continua,razón por lo que se igualan las cantidades evaluadas siguientes:

$$\psi_I \Big|_{o^-} = \psi_{II}\Big|_{o^+}$$

De lo que se concluye

$$A + B = C \quad ó \quad \frac{B}{A} + \frac{C}{A} = 1 \qquad ---- \quad (46)$$

Debido a la discontinuidad de $\frac{d^2\psi}{d\,x^2}$ como se observa en la ecuación

$$\frac{d^2\psi}{d\,x^2} = \frac{2m}{\hbar^2}[\,u\cdot\delta(x) - E\,]\cdot\psi \qquad ---- \quad (47)$$

con lo que:

$$\left.\frac{d\,\psi}{d\,x}\right|_{o^-} \neq \left.\frac{d\,\psi}{d\,x}\right|_{o^+}$$

Para encontrar la relación entre las primeras derivadas en $x = 0$, usamos la ecuación de Schrödinger que integramos de $(-\epsilon)$ a (ϵ) para posteriormente tomar el límite $\epsilon \to 0$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} d\left[\frac{d\psi}{dx}\right] + u\cdot\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\psi\cdot\delta(x)dx = E\cdot\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\psi\cdot dx \qquad -(48)$$

como ψ es continua, la integral del segundo miembro se anula con lo que resulta:

$$\left.\frac{d\,\psi}{d\,x}\right|_{o^+} - \left.\frac{d\,\psi}{d\,x}\right|_{o^-} = \Omega\cdot\psi(o) \qquad ---- \quad (49)$$

donde $@ = \hbar^2/2m$ y $\Omega = u/@$, evaluando (45b) se tiene $\psi(o) = C$, además:

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0^-} = ikA - ikB \qquad ---- \quad (50a)$$

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0^+} = ikC \qquad ---- \quad (50b)$$

Realizando un poco de algebra se halla para $t = C / A$, y $T = t^*t$

$$t = \frac{2k}{2k + i\Omega} \qquad ---- \quad (51)$$

$$T = \frac{4k^2}{4k^2 + \Omega^2} \qquad ---- \quad (52a)$$

ó

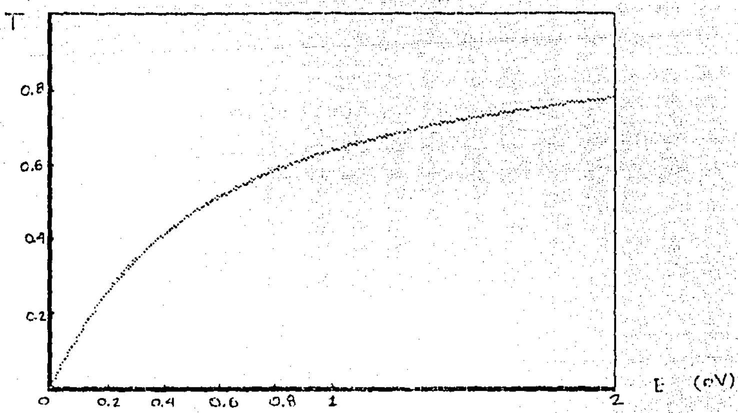
$$T = \frac{4E}{4E + @\Omega^2} \qquad ---- \quad (52b)$$

En las gráficas 3 y 4 se observa la variación de T [ec.(52b)], respecto de la energía E , para dos intensidades Ω diferentes.

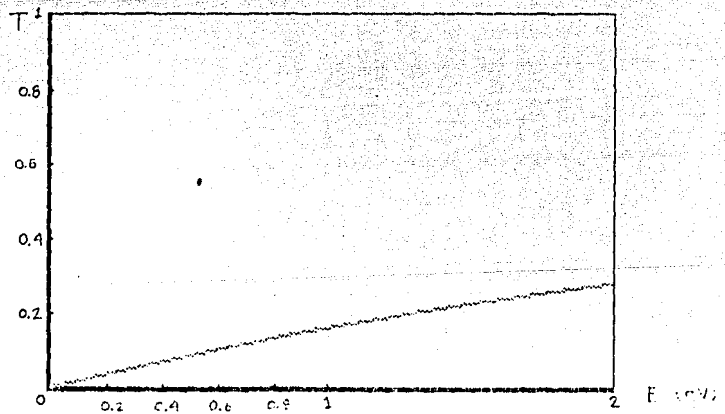
De igual manera con las ecuaciones (49)-(50) , para r , R, se encuentran las siguientes ecuaciones

$$r = \frac{-i\Omega}{2k + i\Omega} \qquad ---- \quad (53)$$

$$R = \frac{\Omega^2}{4k^2 + \Omega^2} \qquad ---- \quad (54)$$



Gráfica 3. Coeficiente de transmisión T , para una barrera tipo delta, de intensidad $\Omega = 0.2$ $\AA^{-1}$, como función de la energía E.



Gráfica 4. Coeficiente de transmisión T , para una barrera tipo delta, de intensidad $\Omega = 0.6$ $\AA^{-1}$, como función de la energía E.

C A P I T U L O 3

- Definición de Tiempo fase [phase time] -

La primera idea que se asoció a un tiempo de retraso fué mediante la construcción de un paquete de ondas. A continuación realizamos este problema en forma esquemática sin entrar en detalles para entender este concepto.

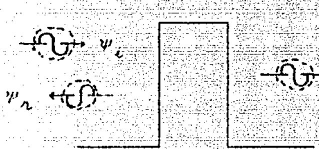


Figura 7.

Asociamos las soluciones ψ, siguientes de la ecuación de Schrödinger.

ψ_r es la función de onda que se utiliza en la reflexión; mientras que ψ_t se asocia a la transmisión.

Matemáticamente estan dadas por las integrales:

Para $x < 0$

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} b(k) \cdot e^{-ikX} \cdot e^{i(kx-wt)} dk \quad --- \quad (55)$$

$$\psi_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} r \cdot b(k) \cdot e^{-ikX} \cdot e^{-i(kx-wt)} dk \quad --- \quad (56)$$

Para $x > 0$

$$\psi_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot b(k) . e^{ikX} \cdot e^{i(kx-wt)} dk \quad --- \quad (57)$$

Donde [X], es la posición inicial del paquete centrado en su centro geométrico, y [x] indica la posición de este, al tiempo τ , además

$$r = \sqrt{R} \cdot \exp(i\phi) \quad ; \quad t = \sqrt{T} \cdot \exp(i\theta) \qquad (58)$$

Usando el método de la fase estacionaria, utilizado por Wigner [5], se tiene que para $x < 0$

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(-k \cdot X + kx - w\tau_1 \right) \Big| = 0 \qquad (59a)$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(-k \cdot X - kx - w\tau_2 \right) \Big| = 0 \qquad (59b)$$

Para $x > a$

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(-k \cdot X + kx - w\tau_3 \right) \Big| = 0 \qquad (59c)$$

Además $\dfrac{\partial w}{\partial k} = \dfrac{\hbar k}{m}$ y también que $\dfrac{\partial}{\partial k} = \dfrac{m}{\hbar k} \dfrac{\partial}{\partial E}$

Si despejamos τ_1 , τ_2 y τ_3

Para $x < 0$

$$\tau_1 = \frac{m}{\hbar K}(x - X) \qquad (60a)$$

$$\tau_2 = \frac{m}{\hbar K}(-x - X) + \hbar \frac{d\phi}{dE} \qquad (60b)$$

Para $x > a$

$$\tau_3 = \frac{m}{\hbar K}(x - X) + \hbar \frac{d\theta}{dE} \qquad (60c)$$

De los resultados mencionados se concluye en asociar distintos tiempos a los "retrasos" producidos como consecuencia de la presencia de la barrera.

$$\mathfrak{I}_{\phi} = \hbar \cdot \frac{d\,\phi}{d\,E} \qquad \text{para la reflexión} \quad - - - - \quad (61a)$$

$$\mathfrak{I}_{\theta} = \hbar \cdot \frac{d\,\theta}{d\,E} \qquad \text{para la transmisión} \quad - - - - \quad (61b)$$

3.1.- Tiempo de fase (phase time), para la Barrera rectangular

Dada la forma compleja de la amplitud de transmisión.

$$\ln t = \ln|t| + i\cdot\theta \qquad ---- \quad (62)$$

derivando esta ecuación y separando la parte imaginaria tenemos

$$\frac{d\theta}{dE} = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{t}\frac{dt}{dE}\right] \qquad ---- \quad (63)$$

de la ecuación (32) para t [caso $E < V_o$] ,y separando la parte real e imaginaria, obtenemos la siguiente expresión.

$$t = \frac{4k^2q^2\cosh(aq) - i2kq(q^2-k^2)\mathrm{senh}(aq)}{4k^2q^2 + K_o^4\cdot\mathrm{senh}^2(aq)} \qquad ---- \quad (64)$$

si derivamos , y efectuamos algunas operaciones

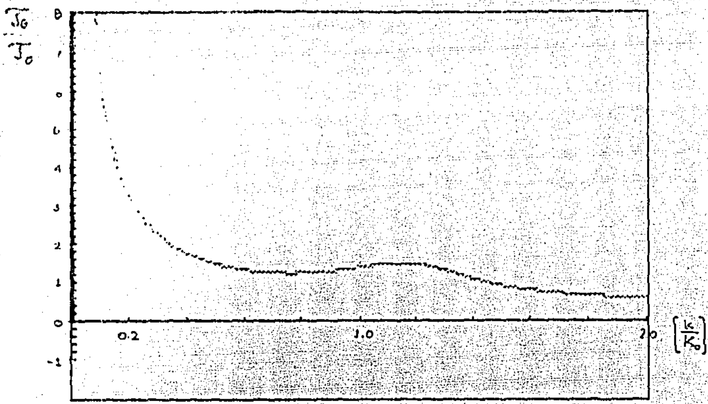
$$\mathrm{Im}\cdot\left[\frac{1}{t}\frac{dt}{dk}\right] = \frac{1}{q}\cdot\left[\frac{2ak^2q(q^2-k^2) + K_o^4\cdot\mathrm{senh}(2aq)}{4k^2q^2 + K_o^4\cdot\mathrm{senh}^2(aq)}\right] \qquad ---- \quad (65)$$

usando (61b), (62) y sustituyendo (64) , junto con $\dfrac{dk}{dE} = \dfrac{m}{\hbar^2k}$,

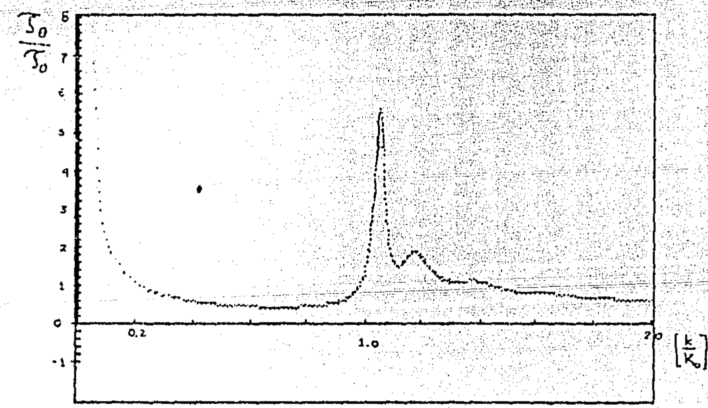
entonces el tiempo fase asociado a la transmisión para la barrera da:

$$\mathfrak{T}_\Theta = \frac{m}{\hbar kq}\left[\frac{2aqk\ (q^2-k^2) + K_o^4\cdot\mathrm{senh}\ 2aq}{4k^2q^2 + K_o^4\cdot\mathrm{senh}\ aq}\right] \qquad ---- \quad (66)$$

En las gráficas 5 y 6, observamos las curvas del tiempo de fase en funcion de [k] , para los productos $aK_o = \pi$, y $aK_o = 3\pi$. Donde se tomaron las constantes $\mathfrak{T}_o = ma/\hbar K_o$ y $K_o = \sqrt{(2mV_o)/\hbar^2}$.



Gráfica 5. Tiempo fase (phase time) para una barrera rectangular de ancho [a], y altura $V_0 = \hbar^2 K_0^2/2m$ como función del vector de onda k. Caso $aK_0 = \pi$



Gráfica 6. Tiempo fase (phase time) para una barrera rectangular de ancho [a], y altura $V_0 = \hbar^2 K_0^2/2m$ como función del vector de onda k. Caso $aK_0 = 3\pi$

De (64), si $t = b_1 + i b_2$ con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$; entonces

$$\tan \theta = \frac{b_2}{b_1} \quad , \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{b_2}{\sqrt{(b_1+b_2)}} \qquad ---- \quad (67)$$

sustituyendo

$$\tan \theta = \frac{k^2-q^2}{2kq} \cdot \tanh aq \qquad ---- \quad (68)$$

Para el caso de reflexión, resolviendo de (31), $\tan \phi = \mathrm{Im}[r] / \mathrm{Re}[r]$ se tiene lo siguiente: (ver figura 8).

$$\tan \phi = \frac{2kq}{q^2-k^2} \cdot \coth aq \qquad ---- \quad (69)$$

De ambas ecuaciones (68) y (69) tenemos

$$\tan \theta \cdot \tan \phi = -1 \qquad ---- \quad (70)$$

que implica la relación $\phi = \theta - (\pi/2)$ ---- (71a)

De este resultado vemos que:

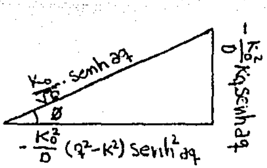


Figura 8.

$$\operatorname{sen} \phi = \cos \theta \qquad ---- \quad (71b)$$

$$\cos \phi = -\operatorname{sen} \theta \qquad ---- \quad (71c)$$

Donde $D = 4k^2q^2 + K_o^4 \cdot \operatorname{senh}^2 aq$

y entonces:

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{-2kq}{\sqrt{(4k^2q^2 + K_o^4 \cdot \operatorname{senh}^2 aq)}} \cdot \cosh aq \qquad ---- \quad (72a)$$

3.2.- Casos particulares de la barrera rectangular (tiempo fase)

Caso de energías pequeñas. $k \ll K_o \Longrightarrow q \approx K_o$

$$\mathfrak{T}_\theta \approx \frac{2m}{\hbar K_o \cdot \tanh(aK_o)} \cdot \frac{1}{k} \qquad ---- \quad (73)$$

resultado que permite concluir que si $k \to 0$, entonces $\mathfrak{T}_\theta \to \infty$

Caso de barrera delgada [$a \cdot K_o < (\pi/10)$, $a < 5$ Å] (gráfica 7)

$$\mathfrak{T}_\theta \approx \frac{m}{\hbar kq} \cdot \left[\frac{2aq \cdot (K_o^2 + 2k^2)}{4k^2 + \Omega^2} \right] \qquad ---- \quad (74a)$$

$$\mathfrak{T}_\theta \approx \frac{m}{\hbar k} \cdot \left[\frac{2\Omega + 4ak^2}{4k^2 + \Omega^2} \right] \qquad ---- \quad (74b)$$

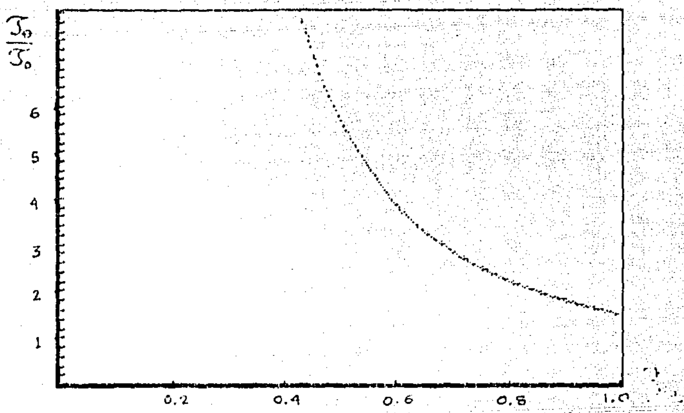
Caso del límite barrera tipo delta:

En el límite $a \to 0$, con $K_o^2 \to \infty$, donde se cumpla que $\Omega = a \cdot K_o^2$ sea una cantidad constante, de (74b) se obtiene el límite de la delta:

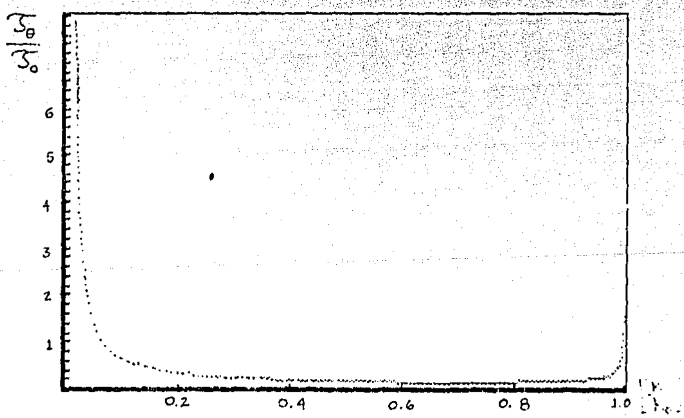
$$\mathfrak{T}_\theta = \frac{\hbar}{@k} \cdot \frac{\Omega}{4k^2 + \Omega^2} \quad \text{ó} \quad \mathfrak{T}_\theta = \hbar \cdot \frac{\sqrt{@} \cdot \Omega}{\sqrt{E} \cdot (4E + @\Omega^2)} \qquad --- \quad (75)$$

Para el caso de la barrera opaca, $a \cdot K_o \gg 1$ con las aproximaciones $\operatorname{senh} 2aq \approx (1/2) \cdot \exp(2aq)$; $\operatorname{senh}^2 aq \approx (1/4) \cdot \exp(2aq)$, implica el resultado para el tiempo fase de transmisión. (ver gráfica 8).

$$\mathfrak{T}_\theta = \frac{2m}{\hbar kq} \qquad ---- \quad (76)$$



Gráfica 7. Tiempo fase (phase time) para una barrera delgada con $a = 5$ Å , $V_o = 0.222$ eV , como función de k/K_o. Donde $K_o=\sqrt{(2mV/\hbar^2)}$, $\mathfrak{T}_o = ma/hK_o$.



Gráfica 8. Tiempo fase (phase time) para una barrera opaca ($aq \gg 1$); $a = 500$ Å , $V_o = 0.222$ eV , como función de k/K_o. ($aK_o = 10\cdot\pi$)

En el análisis anterior, encontramos un tiempo fase que se asocia al retardo en la transmisión de la partícula sobre una barrera rectangular, y como caso particular el límite al potencial delta. Analizamos ahora el caso exacto de una barrera de potencial tipo delta, para el tiempo fase.

De la expresión (51) derivando y asociando términos tenemos

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dE} = \frac{\Omega^2 + ik\Omega}{@k^2\,(\Omega^2 + 4k^2)} \qquad ---- \quad (79)$$

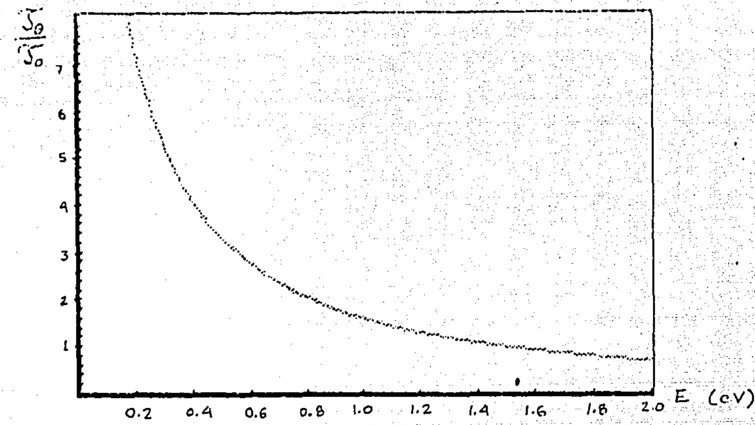
Con la ec. (61b), que define al tiempo fase de transmisión se llega a:

$$\mathfrak{T}_\Theta = \hbar\cdot \mathrm{Im}\left[\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dE}\right] \qquad ---- \quad (80)$$

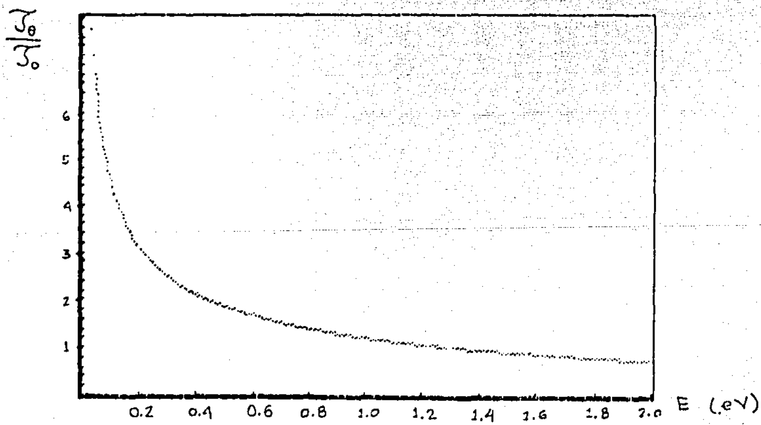
haciendo la sustitución $E = @k^2$ en (79) podemos expresar a $\mathfrak{T}_\Theta$, como función de la energía [E].

$$\mathfrak{T}_\Theta(E) = \frac{\sqrt{@}\cdot\Omega}{\sqrt{E}\,(4E + @\Omega^2)} \qquad ---- \quad (81)$$

Para el resultado anterior las gráficas 9 y 10 muestran el comportamiento de $\mathfrak{T}_\Theta(E)$ en un rango hasta de 2 eV para una barrera de potencial tipo delta, para dos distintas intensidades Ω.



Gráfica 9. Tiempo fase (phase time), para una barrera tipo delta de intensidad $\Omega = 0.2\ A^{-1}$, como función de la energía E.



Gráfica 10. Tiempo fase (phase time) para una barrera tipo delta de intensidad $\Omega = 0.6\ A^{-1}$, como función de la energía E.

En la misma forma, dada la definición de $\Im_{\theta}$ en (61a) tenemos que

$$\Im_{\theta} = \hbar \cdot \left[\mathrm{Im}\ \frac{1}{r}\ \frac{dr}{dE} \right] \qquad ---- \quad (82)$$

Realizando algunas operaciones, dada la ecuación (66) llegamos a

$$\frac{1}{r}\ \frac{dr}{dE} = \frac{-[\ 1+r\ ]}{2 \cdot @ \cdot k} \qquad ---- \quad (83)$$

$$\text{donde} \quad [\ 1+r\ ] = \frac{4k^2 + i2k\Omega}{4k^2 + \Omega^2} \qquad ---- \quad (84)$$

Sustituyendo la parte imaginaria de (83), en (82), y comparando resultados se concluye que las derivadas de las fases son iguales:

$$\frac{d\ \phi}{d\ E} = \frac{d\ \theta}{d\ E}$$

ó bien, de la definición de tiempo fase podemos concluir que los tiempos fase debidos a la reflexión y a la transmisión son iguales, es decir:

$$\Im_{\theta} = \Im_{\phi} \qquad ---- \quad (85)$$

en nuestra interpretación significa que la partícula es retrasada un determinado tiempo al interaccionar con la barrera de potencial y este tiempo es el mismo indistintamente si la partícula es reflejada ó transmitida.

C A P I T U L O 4

- Definición del tiempo de permanencia [dwell time] -

Smith [2], al describir el concepto de tiempo de permanencia (dwell time), utiliza una función de onda en estado estacionario para asociar un tiempo promedio de recidencia en una región localizada (centro dispersor) del evento, definiendo este tiempo como la densidad ρ integrada sobre tal región y dividida entre el flujo total J que incide (ó que sale).

Esta definición fué restablecida por Büttiker [6] en 1983, para el caso unidimensional , que discutimos a continuación.

$$\Im_{o} = \frac{1}{J}\cdot\int_{0}^{a}|\psi|^2dx \qquad ---- \quad (86)$$

Con $J = \hbar k/m$. Para resolver (86) utilizamos la ecuación de Schrödinger y para simplificar las expresiones usamos el operador $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2}{dx^2}$

$$\hat{T}\psi + (V - E)\psi = 0 \qquad ---- \quad (87)$$

Con la ec. conjugada de (87) , además de derivar (87) respecto a la energía, llegamos a las ecuaciones:

$$\psi = \hat{T}\cdot\frac{d\ \psi}{d\ E} + (V - E)\cdot\frac{d\ \psi}{d\ E} \qquad ---- \quad (88a)$$

$$0 = \hat{T}\cdot\psi^* + (V - E)\cdot\psi^* \qquad ---- \quad (88b)$$

eliminando al término que contiene (V - E) de (88a), y (88b) resulta:

$$\psi^*\psi = \psi^*\hat{T}\cdot\frac{d\ \psi}{d\ E} - \frac{d\ \psi}{d\ E}\cdot\hat{T}\ \psi^* \qquad ---- \quad (89)$$

ó bien sustituyendo el valor del operador $\hat{T}$

$$|\psi|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\left[\psi^*\frac{d^2}{dx^2}\cdot\frac{d\psi}{dE} - \frac{d\psi}{dE}\cdot\frac{d^2\psi^*}{dx^2}\right] \quad ---- \quad (90)$$

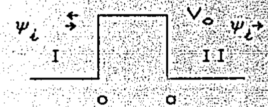
Una forma equivalente de (90) da

$$|\psi|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\left[\psi^*\cdot\frac{d^2\psi}{dxdE} - \frac{d\psi}{dE}\cdot\frac{d\psi^*}{dx}\right] \quad ---- \quad (91)$$

Integrando

$$\frac{1}{J}\int_o^a |\psi| dx = \frac{-\hbar}{2k}\cdot\left[\psi_i^*\frac{d^2\psi}{dxdE} - \frac{d\psi_i}{dE}\frac{d\psi_i^*}{dx}\Bigg|_{x=a} - \psi_i^*\frac{d^2\psi_i}{dxdE} - \frac{d\psi_i}{dE}\frac{d\psi_i^*}{dx}\Bigg|_{x=o}\right] \quad -- \quad (92)$$

donde $J = \hbar k/m$; además con ψ_i , ψ_t soluciones normalizadas de la ecuación de Schödinger.



$$\psi_i = e^{ikx} + r\cdot e^{-ikx}, \quad x \leq 0 \quad --- \quad (93a)$$

$$\psi_t = t\cdot e^{ik(x-a)}, \quad x \geq a \quad --- \quad (93b)$$

Figura 9 .

Sustituyendo en cada uno de los términos en mención

$$\psi_i^*\frac{d^2\psi_i}{dxdE} - \frac{d\psi_i}{dE}\frac{d\psi_i^*}{dx}\Bigg|_{x=o} = i\cdot(1 - r + r^* - r^*r)\cdot\frac{dk}{dE} - 2ikr^*\frac{dr}{dE} \quad --- \quad (94a)$$

$$\psi_t^*\frac{d^2\psi_t}{dxdE} - \frac{d\psi_t}{dE}\frac{d\psi_t^*}{dx}\Bigg|_{x=o} = i\cdot t^*t\cdot\frac{dk}{dE} + 2ikt^*\frac{dt}{dE} \quad --- \quad (94b)$$

Entonces:

$$\frac{1}{J}\int|\psi|^2dx = \frac{-\hbar}{2k}\left[(t^*\cdot\frac{dt}{dE} + r^*\cdot\frac{dr}{dE})\cdot 2ik + (r - r^*)\cdot\frac{dk}{dE}\,i \right] \quad ---- \quad (95a)$$

$$\text{donde} \quad \frac{dk}{dE} = \frac{m}{\hbar^2 k} \quad ; \quad 1 - t^*t - r^*r = 0$$

Factorizando , simplificando y sustituyendo términos en la ec. (86)

$$\Im_d = -i\cdot\left[t^*\cdot\frac{dt}{dE} + r^*\cdot\frac{dr}{dE}\right] - \frac{m}{\hbar k}\cdot\left[\frac{i\cdot(r - r^*)}{2\cdot k}\right] \quad ---- \quad (95b)$$

Por otro lado, dado que $\ln t = \ln|t| + i\theta$; $\ln r = \ln|r| + i\phi$, se tiene ,

$2i\theta = \ln t - \ln t^*$; $2i\phi = \ln r - \ln r^*$, por lo cuál obtenemos las igualdades:

$$i\cdot T\cdot\frac{d\theta}{dE} = \frac{1}{2}\cdot\left[t^*\cdot\frac{dt}{dE} - t\cdot\frac{dt^*}{dE}\right] \quad ---- \quad (96a)$$

$$i\cdot R\cdot\frac{d\phi}{dE} = \frac{1}{2}\cdot\left[r^*\cdot\frac{dr}{dE} - r\,\frac{dr^*}{dE}\right] \quad ---- \quad (96b)$$

y se llega entonces al resultado

$$i\cdot\left[T\cdot\frac{d\theta}{dE} + R\cdot\frac{d\phi}{dE}\right] = \left[t^*\cdot\frac{dt}{dE} + r^*\cdot\frac{dr}{dE}\right] - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{d}{dE}(r^*r + t^*t)\right] \quad ---- \quad (97)$$

donde $r^*r + t^*t = 1$, razón por la que se anula este término en (97), así la ecuación anterior la empleamos en (95) para obtener $\Im_d$

$$\Im_d = \hbar\cdot\left[T\cdot\frac{d\theta}{dE} + R\cdot\frac{d\phi}{dE}\right] - \frac{m}{\hbar k}\cdot\left[\frac{r^* - r}{2ik}\right] \quad ---- \quad (98)$$

Otro modo de expresar (98) , es observando que

$$\frac{r^* - r}{2ik} = -\frac{|r|}{k} \cdot \frac{\exp(i\phi) - \exp(-i\phi)}{2i} \quad ---- \quad (99)$$

ó bien

$$\frac{r^* - r}{2ik} = \frac{\sqrt{R}}{k} \cdot (-\operatorname{sen}\phi) \quad ---- \quad (100)$$

Con lo cuál , obtenemos la expresión que define el tiempo de permanencia para una barrera (dwell time).

$$\mathfrak{J}_d = \left[T \cdot \hbar \frac{d\theta}{dE} + R \cdot \hbar \frac{d\phi}{dE} \right] - \frac{m}{\hbar k} \cdot \left[\frac{\sqrt{R}}{k} \cdot (-\operatorname{sen}\phi) \right] \quad --- \quad (101a)$$

ó para el caso particular de la barrera rectangular, ec.(71b), ec(65)

$$\mathfrak{J}_d = \mathfrak{J}_\theta - \frac{m}{\hbar k} \cdot \left[\frac{\sqrt{R}}{k} \cdot (-\operatorname{sen}\phi) \right] \quad ---- \quad (101b)$$

Smith [2], desprecia el término de interferencia de la ecuación (101a) (proporcional a sen ϕ), bajo el argumento de tener el promedio de (86) sobre distintas distancias.

Hauge y Støvneng más recientemenmte consideran de igual forma anular este factor de interferencia dada su pequeñez al tomar el límite $\mathfrak{G} \to \infty$, donde $\mathfrak{G}$ se refiere a la distancia en donde es evaluada la ec.(86). De modo que el tiempo de permanencia cumple la siguiente expresión.

$$\mathfrak{J}_d = T \left[\hbar \frac{d\theta}{dE} \right] + R \left[\hbar \frac{d\phi}{dE} \right]$$

4.1.- Tiempo de permanencia (dwell time) para la barrera rectangular

Iniciamos ilustrando la importancia del término oscilatorio en la expresión (101b) que define el tiempo de permanencia como la diferencia de dos cantidades positivas

$$\frac{m}{\hbar k}\cdot\sqrt{R}\cdot(-\operatorname{sen}\phi) = \frac{m}{\hbar k}\left[\frac{K_o^2 \operatorname{senh} aq}{\sqrt{(4k^2q^2 + K_o^4 \operatorname{senh}^2 aq)}}\right]\cdot\left[\frac{2kq\cdot\cosh aq}{\sqrt{(4k^2q^2 + K_o^4 \operatorname{senh}^2 aq)}}\right] \quad -(105)$$

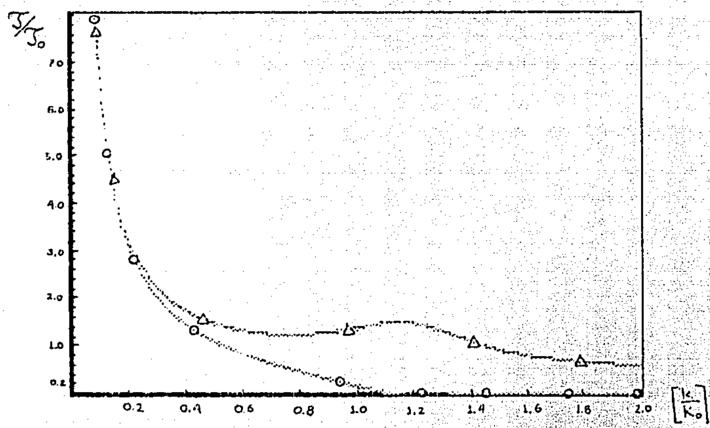
Sustituyendo $q^2 = K_o^2 - k^2$ tenemos

$$\frac{m}{\hbar k}\cdot\left[\frac{\sqrt{R}\cdot(-\operatorname{sen}\phi)}{k}\right] = \frac{m}{\hbar kq}\cdot\left[\frac{(K_o^2-k^2)\,K_o^2\cdot\operatorname{senh} 2aq}{4k^2q^2 + K_o^4 \operatorname{senh}^2 aq}\right] \quad --- \quad (106)$$

Comparando con (65), $$\hbar\cdot\left[T\cdot\frac{d\theta}{dE} + R\cdot\frac{d\phi}{dE}\right] = \Im_o \quad ---- \quad (107)$$

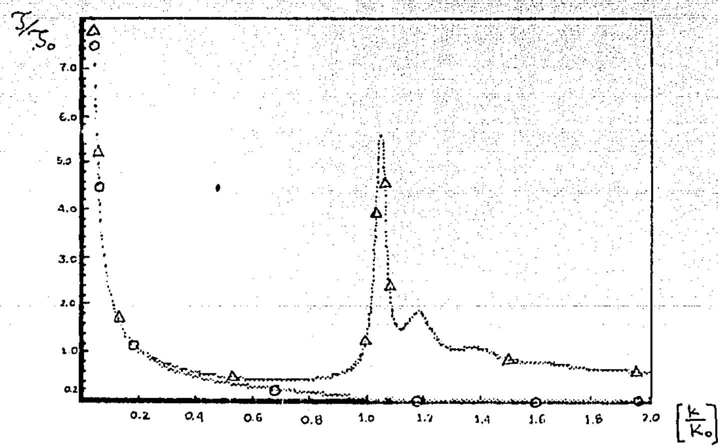
$$T\cdot\left[\hbar\cdot\frac{d\theta}{dE}\right] + R\cdot\left[\hbar\cdot\frac{d\phi}{dE}\right] = \frac{m}{\hbar kq}\cdot\left[\frac{4aqk^4 - 2aqk^2K_o^2 - K_o^4 \operatorname{senh} 2aq}{4k^2q^2 + K_o^4 \operatorname{senh} aq}\right] \quad -(108)$$

En las gráficas 11 y 12 se comparan las curvas de estos dos expresiones , ec.(106) y ec.(108), para los casos $aK_o = \pi$, y $aK_o = 3\pi$.



Gráfica 11. Componentes del tiempo de permanencia (dwell time) para la barrera rectangular, $aK_o = \pi$.

Δ .- $\mathcal{T}_\theta$ ec.(108) ; o .- g(k)·sen Ø , ec.(106)



Gráfica 12. Componentes del tiempo de permanencia (dwell time) para la barrera rectangular, $aK_o = 3\pi$.

Δ .- $\mathcal{T}_\theta$ ec.(108) ; o .- g(k)·sen Ø , ec.(106)

Tomando los siguientes casos extremos, mostramos la importancia de la ecuación (106) comparada a (108)

$E < V_o$.

a). Barrera delgada (observando los numeradores exclusivamente).

[gráfica 13]

ec. (106)--> $-(2aq)\cdot k^2K_o^2 + (2aq)\cdot K_o^4$

ec. (108)--> $(2aq)\cdot k^2K_o^2 + (2aq)\cdot K_o^4 - (4aq)\cdot k^4$

b). $aq >> 1$. Barrera opaca (ver gráfica 14)

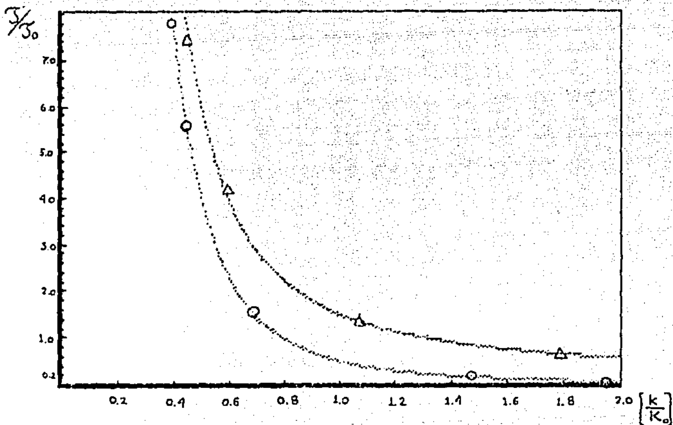
ec. (106)--> $(K_o^4/2)\cdot \exp(2aq) - (k^2K_o^2/2)\cdot \exp(2aq)$

ec. (108)--> $(K_o^4/2)\cdot \exp(2aq)$

De estos resultados, además de las gráficas al respecto , con los casos $aK_o = \pi$, $aK_o = 3\pi$, barrera delgada y barrera opaca ($aq >> 1$) ; hacemos las siguientes observaciones :

Si $E < V_o$ ó $k < K_o$, ambas curvas son del mismo orden para todos los casos mencionados.

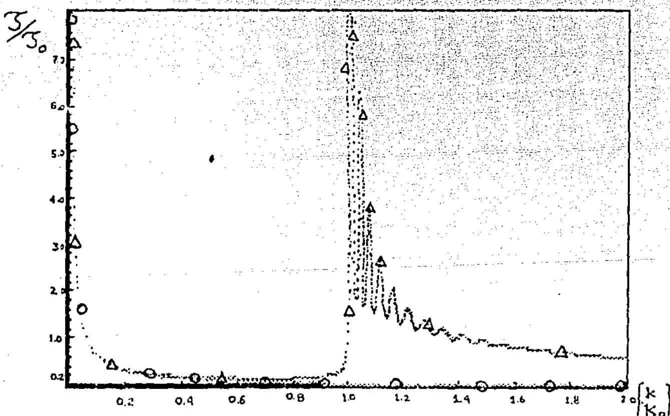
Si $E > V_o$ ó $k > K_o$, la curva del término sinusoidal es despreciable a comparación de la curva del otro término , sin embargo en el caso de la barrera delgada no puede ser despreciado, como confirma la gráfica (13).



Gráfica 13. Componentes del tiempo de permanencia

[barrera delgada, a = 5 Å , V_o = 0.222 eV , $aK_o = \pi/10$]

Δ .- $\mathcal{T}_\theta$ ec.(108) ; ο .- g(k)·sen Ø , ec.(106)



Gráfica 14. Componentes del tiempo de permanencia

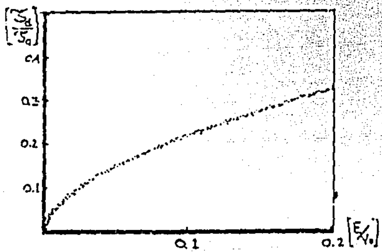
[barrera opaca, a = 500 Å , V_o = 0.222 eV , $aK_o = 10\pi$]

Δ .- $\mathcal{T}_\theta$ ec.(108) ; ο .- g(k)·sen Ø , ec.(106)

Regresamos al problema central, que es encontrar de manera explícita el tiempo de permanencia (dwell time) para la barrera rectangular, resolvemos sustituyendo las cantidades indicadas en la expresión (101b).

$$\mathfrak{I}_d = \frac{mk}{\hbar q}\cdot\left[\frac{2aq\cdot(q^2-k^2) + K_o^2\operatorname{senh} 2aq}{4k^2q^2 + K_o^4\operatorname{senh}^2 aq}\right] \quad ---- \quad (109)$$

En los gráficas 16 y 17 se observa el comportamiento de los curvas del tiempo de permanencia ec. (109), en los casos $aK_o=\pi$; y $aK_o=3\pi$. En apariencia el comportamiento de $\mathfrak{I}_d$ para pequeños energías (gráfica 16), tiene un valor cercano a cero y con un crecimiento lineal respecto a k. A continuación hacemos un pequeño análisis que prueba que $\mathfrak{I}_d$ tiene un comportamiento lineal para [k] mucho menores que K_o .



Gráfica 15. Tiempo de permanencia para energías menores a 0.04 eV .

Si $K_o \gg k$ entonces $q \approx K_o$

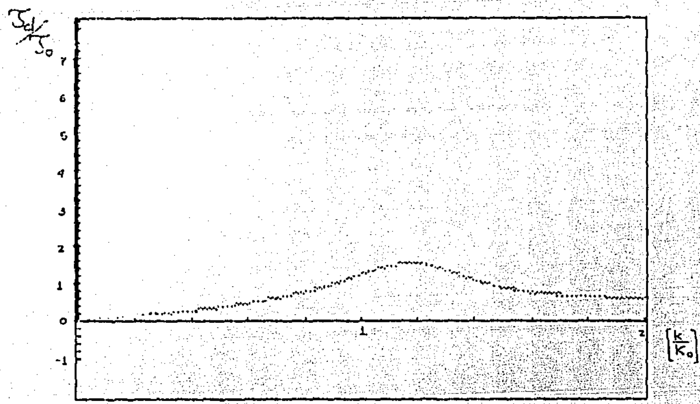
$$\mathfrak{I}_d \approx \left[\frac{m\cdot(2aK_o + \operatorname{senh} 2aK_o)}{\hbar\cdot K_o^2\operatorname{senh} aK}\right]\cdot k \quad -(110)$$

ó lo que es equivalente,

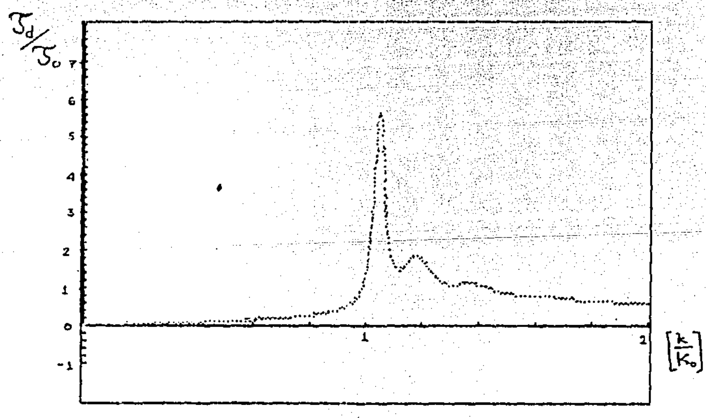
$$\mathfrak{I}_d \approx c_1 k \quad ---- \quad (111)$$

con c_1 una constante

ó bien $\mathfrak{I}_d$ como función de la energía tendría una expresión de la forma $\mathfrak{I}_d(E) = c\sqrt{E}$ que entonces se trata de una parábola abriendo a la derecha con vértice en el origen, en un gráfico de $\mathfrak{I}_d$ vs E como es observado en la gráfica 15 para una barrera con $V_o= 0.222$ eV y $aK_o=\pi$.



Gráfica 16. Tiempo de permanencia (dwell time) como funcion de k, con $K_o = \sqrt{(2mV/\hbar^2)}$, $\mathcal{T}_o = ma/\hbar K_o$. para $aK = \pi$, [a = 50 A , $V_o = 0.222$ eV].



Gráfica 17. Tiempo de permanencia (dwell time) como funcion de k, con $K_o = \sqrt{(2mV/\hbar^2)}$, $\mathcal{T}_o = ma/\hbar K_o$. para $aK_o = 3\pi$, [a = 150 A , $V_o = 0.222$ eV].

4.2.- Casos particulares para el tiempo de permanencia

a). Barrera delgada [$aK_o < (\pi/10)$, $a < 5$ Å]

$$\mathcal{T}_d \approx \frac{ma}{\hbar k} \cdot \frac{4k^2}{[\ 4k^2 + \Omega^2\ ]} \qquad ---- \quad (112)$$

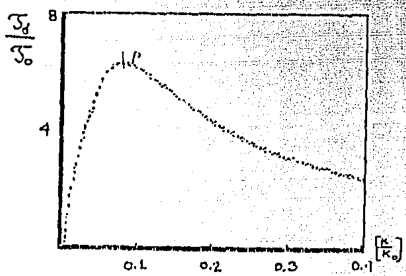
ó bien.

$$\mathcal{T}_d \approx \mathcal{T}_{libre} \cdot T_{delta} \qquad ---- \quad (113)$$

En donde $\mathcal{T}_{libre} = ma/\hbar k$ y $T_{delta} = 4k^2/(4k^2+\Omega^2)$

El comportamiento de esta expresión (112) se muestra en la gráfica 19.

Derivando (112), encontramos que la curva $\mathcal{T}_d$ tiene un pico en:



$$\mathcal{T}_d \big|_p = ma/\hbar\Omega \qquad --- \quad (114a)$$

$$\text{para} \quad k \big|_p = \Omega / 2 \qquad --- \quad (114b)$$

Gráfica 18. Tiempo de permánencia para la barrera delgada, $a = 2.5$ Å, $V_o = 0.222$ eV.

b). límite a la barrera tipo delta

De la ecuación $\mathcal{T}_d \approx \dfrac{ma}{\hbar} \cdot \dfrac{4k}{[\ 4k^2 + \Omega^2\ ]}$,(barrera delgada)

se llega al límite delta $a \text{-->} 0$, $K_o^2 \text{-->} \infty$ con Ω cte.

por lo cuál $\mathcal{T}_d = 0$

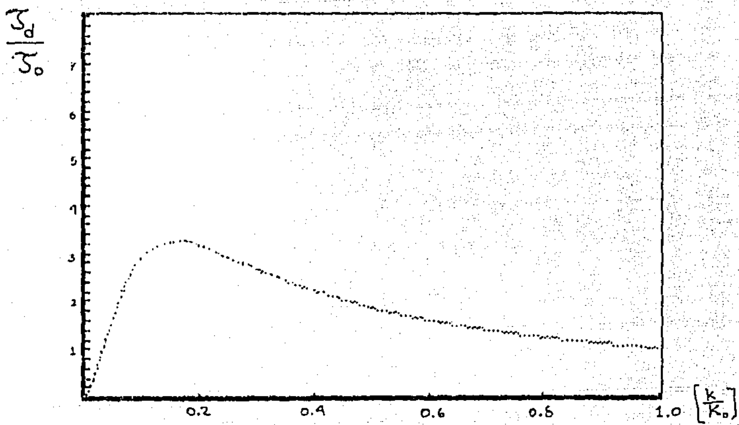
c). barrera opaca. Condición $aq \gg 1$

$$\mathfrak{I}_d \approx \frac{m}{\hbar kq} \cdot \frac{2k^2}{K_o^2}$$

simplificando, además de usar que $K_o^2 = 2mV_o/\hbar^2$

$$\mathfrak{I}_d = \frac{\hbar k}{qV} \qquad - - - - \quad (115)$$

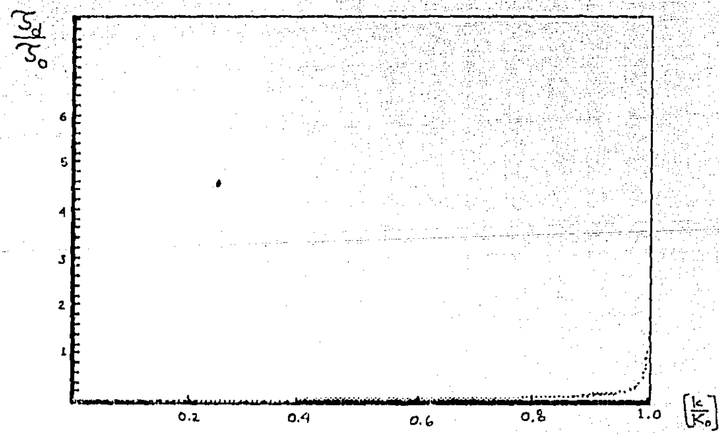
La gráfica 20 permite visualizar el hecho de que para $K_o < k$ el comportamiento de númerico de la curva $\mathfrak{I}_d$ es muy pequeño para la barrera opaca.



Gráfica 19. Tiempo de permanencia (dwell time)

[barrera delgada , a = 5 Å , V_0 = 0.222 eV , $aK_0 = \pi/10$]

Donde $K_0 = \sqrt{(2mV_0/\hbar^2)}$, $\tau_0 = ma/hK_0$.



Gráfica 20. Tiempo de permanencia (dwell time)

[barrera opaca , a = 500 Å , V_0 = 0.222 eV , $aK_0 = 10\pi$]

Donde $K_0 = \sqrt{(2mV_0/\hbar^2)}$, $\tau_0 = ma/hK_0$.

A continuación confirmamos el resultado usando una barrera tipo potencial delta.

Usando la definición de $\Im_d$, ec. (98)

$$\Im_d = (T\cdot \Im_{\Theta} + R\cdot \Im_{\Phi}) - \frac{m\cdot(r - r^*)}{2\hbar\cdot k^2}\cdot i \qquad --- \quad (116)$$

Dada la ec. (40) para [r] y restando su conjugado se obtiene para el término de interferencia de la expresión anterior, lo siguiente.

$$\frac{-\, m\cdot(r - r^*)}{2\,\hbar\, k^2}\cdot i = \frac{\hbar\,\Omega}{@k\,(4k^2 + \Omega^2)} \qquad ---- \quad (117a)$$

De tal modo que los dos términos involucrados en la ec. (116) dan como resultado la misma expresión, comparando (117a) con la ecuaciones (107) y (81) concluimos lo siguiente:.

$$(T\,\Im_{\Theta} + R\,\Im_{\Phi}) = \frac{m(r - r^*)}{2\,\hbar\cdot k^2}\cdot i \qquad ---- \quad (117b)$$

Con lo cuál al ser estos términos iguales y de signo distinto se anulan, resultado que era de esperarse según la ec (101b).

es decir $\qquad \Im_d = 0 \quad . \qquad ---- \quad (118)$

ya que al no tener anchura la barrera, la integral en (98) se debe anular, que en otras palabras significa que no se puede asociar un tiempo de permanencia distinto de cero a la barrera de potencial tipo delta. Este resultado es importante porque nos permite concluir que los intentos tanto de Hauge [7], como Støvneng [4], son erróneos al no ser consistentes con la igualdad (118) puesto que al despreciar el término relacionado a la interferencia referente al tiempo de permanencia este tendría un valor distinto a cero, resultado contrapuesto al encontrado en (118).

CAPITULO 5

- Definición del tiempo de Larmor [Larmor clock] -

Tenemos una nueva definición dada por Baz [3] - Rybachenko [4], en los sesentas y corregido por Buttiker [6], en 1983 , como fué dicutido previamente en el capítulo I .

La idea consiste en la aplicación de un campo magnético a lo ancho de la barrera, de modo que provoque una precesión de Larmor en la(s) partícula(s) que atraviesen tal barrera. Esta precesión cambia la orientación del spin y esto nos sirve para "medir" la duración de la travesía y de forma similar para la duración de la reflexión.

La simplificación teórica en este procedimiento , consiste en utilizar un campo magnético muy pequeño , de modo que las aproximaciones siguientes sean válidas:

$$q >> 2\ \Delta q \quad , \quad q_+ \approx q - \Delta q \quad , \quad q_- \approx q + \Delta q$$

con

$$\Delta q = \frac{m\ w_L}{2\hbar q} \qquad y \qquad q = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$$

donde w_L se refiere a la frecuencia de la precesión de Larmor

La idea consiste en pensar que la(s) partícula(s) incidente(s) , poseen una energía constante y bien definida para todo tiempo. Con este enfoque, la altura de la barrera V_o es la variable a considerar, ó de modo equivalente podemos tomar a [q] como variable, mientras que k es constante.

Figura 10

En la figura 10 mostramos tal idea, donde la variacion de la altura de la barrera estará dada entre los valores asociados a : q_+ y q_- donde $q_- > q_+$ y $V_- > V_+$

En virtud de ello, usamos las siguientes definiciones, cuyas variabies correspondientes se refieren a sustituir en vez de q ,ya sea q_+ ó q_- según sea el caso.

$$t_+ = t\,(q_+) \qquad , \qquad t_- = t\,(q_-)$$

$$T_+ = T\,(q_+) \qquad , \qquad T_- = T\,(q_-) \qquad -(119)$$

$$V_+ = @\cdot(q_+ + k_+) \qquad , \qquad V_- = @\cdot(q_- + k_-)$$

Dado la pequeña diferencia de $(q_+ - q_-)$ entonces podemos relacionar una serie de Taylor que aproximamos a primer orden, con el límite :

$$T_+ = T - 2\,\Delta q\cdot\frac{dT}{dq} \qquad ---- \quad (120)$$

y de la misma manera ,

$$\theta_+ - \theta_- = -2\,\Delta q\cdot\frac{d\theta}{dq} \qquad ---- \quad (121)$$

Otro resultado que será útil mas delante es el siguiente

$$\frac{1}{t}\,\frac{dt}{dq} = i\,\frac{d\theta}{dq} + \frac{d\,\ln\sqrt{T}}{d\,q} \qquad ---- \quad (122)$$

y entonces

$$\left|\frac{1}{t}\,\frac{dt}{dq}\right|^2 = \left|\frac{d\theta}{dq}\right|^2 + \left|\frac{d\,\ln\sqrt{T}}{d\,q}\right|^2 \qquad --- \quad (123)$$

5.1.- Definición de $\mathfrak{T}_x$ ó tiempo de travesia

Lo orientación del spin de la partícula transmitida esta determinada por el spinor

$$\psi = (|t_+|^2 + |t_-|^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} t_+ \\ t_- \end{pmatrix} \qquad ---- \quad (124)$$

Dadas las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad ---- \quad (125)$$

y con las expresiones anteriores se tiene

$$\langle S_x \rangle = (\hbar/2) \cdot \langle \psi |\sigma_x| \psi \rangle$$

$$\langle S_y \rangle = (\hbar/2) \cdot \langle \psi |\sigma_y| \psi \rangle \qquad ---- \quad (126)$$

$$\langle S_z \rangle = (\hbar/2) \cdot \langle \psi |\sigma_z| \psi \rangle$$

asi, resulta

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{t_+ t_-^* + t_+^* t_-}{|t_+|^2 + |t_-|^2} \qquad ---- \quad (127)$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot i \cdot \frac{t_+ t_-^* - t_+^* t_-}{|t_+|^2 + |t_-|^2} \qquad ---- \quad (128)$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{|t_+|^2 - |t_-|^2}{|t_+|^2 + |t_-|^2} \qquad ---- \quad (129)$$

Por otro lado :

$$t_+ t_-^* + t_+^* t_- = 2\sqrt{[T_+ T_-]} \cdot \cos(\theta_+ - \theta_-) \qquad ---- \quad (130)$$

$$t_+ t_-^* - t_+^* t_- = 2\sqrt{[T\ T\ ]} \cdot i \cdot \mathrm{sen}(\theta_+ - \theta_-) \qquad ---- \quad (131)$$

además dadas las ecuaciones $T_+ = |t_+|^2$ y $T_- = |t_-|^2$, cantidades que sustituimos en las expresiones (127),(128) y (129) para obtener:

$$\langle S_x \rangle = \hbar \cdot \frac{\sqrt{(T_+ T_-)}}{T_+ + T_-} \cdot \cos(\theta_+ - \theta_-) \qquad ---- \quad (132)$$

$$\langle S_y \rangle = -\hbar \cdot \frac{\sqrt{(T_+ T_-)}}{T_+ + T_-} \cdot \mathrm{sen}(\theta_+ - \theta_-) \qquad ---- \quad (133)$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} \qquad ---- \quad (134)$$

Resolviendo para la siguiente suma : $\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 + \langle S_z \rangle^2$

$$\sum_{n=x,y,z} \langle S_n \rangle^2 = \frac{\hbar^2 \cdot (T_+ T_-)}{[T_+ + T_-]^2} + \frac{\hbar^2}{4} \cdot \frac{T_+^2 - 2T_+T_- + T_-^2}{[T_+ + T_-]^2} \qquad ---- \quad (135)$$

que resulta ser una cantidad constante

$$\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 + \langle S_z \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4} \qquad ---- \quad (136)$$

Ahora resolvemos para $\langle S_z \rangle$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} \qquad ---- \quad (137)$$

donde utilizamos (120)

$$T_+ - T_- = \frac{-m w_L}{\hbar q} \cdot \frac{dT}{dq} \qquad ---- \quad (138)$$

además con la aproximación.... $T_+ + T_- \approx 2 \cdot T$ resulta,

$$\langle S_z \rangle = (\hbar/2) \cdot w_L \cdot \Im_z \qquad ---- \quad (139)$$

donde hemos asociado $\Im_z$ definido por :

$$\Im_z = \frac{-m}{\hbar q} \cdot \frac{d \ln \sqrt{T}}{d q} \qquad ---- \quad (140)$$

Resolviendo para el siguiente valor esperado $\langle S_y \rangle$ de la ec. (133)

$$\langle S_y \rangle = \frac{-\sqrt{(T_+ T_-)}}{T_+ + T_-} \cdot \hbar \cdot \operatorname{sen}(\theta_+ - \theta_-) \qquad ---- \quad (141)$$

con las aproximaciones

$$\operatorname{sen}(\theta_+ - \theta_-) \approx \theta_+ - \theta_- \qquad ---- \quad (142)$$

ó bien , apoyandonos en la expresión (121)

$$\operatorname{sen}(\theta_+ - \theta_-) \approx - \frac{m w_L}{\hbar q} \cdot \frac{d\theta}{dq} \qquad -- \quad (143)$$

si también consideramos las aproximaciones

$$\sqrt{(T_+ T_-)} \approx T \quad , \quad T_+ + T_- \approx 2T \qquad ---- \quad (144)$$

entonces susituímos las cantidades anteriores en (141) para obtener.

$$\langle S_y \rangle = - \frac{\hbar}{2} \cdot w_L \cdot \Im_y \qquad ---- \quad (145)$$

donde hemos definido $\Im_y$ como:

$$\Im_y \doteq - \frac{m}{\hbar q} \cdot \frac{d\theta}{dq} \qquad ---- \quad (146)$$

Para encontrar el valor asociado a $\Im_x$ recurrimos a $\langle S_x \rangle$

$$\langle S_x \rangle = \frac{\sqrt{(T_+ T_-)}}{T_+ + T_-} \cdot \hbar \cdot \cos(\theta_+ - \theta_-) \qquad ---- \quad (147)$$

con la siguiente aproximacion

$$\cos(\theta_+ - \theta_-) \approx 1 - (\theta_+ - \theta_-)^2/2 \qquad ---- \quad (148)$$

donde utilizamos el valor $\Im_x$ relacionado a la expresión

$$(\theta_+ - \theta_-)^2 = w_L{}^2 \cdot \Im_x^2 \qquad ---- \quad (149)$$

y de este modo :

$$< S_x > = \frac{\hbar}{2} \cdot \left[1 - \frac{w_L \cdot \Im_x^2}{2} \right] \qquad ---- \quad (150)$$

Utilizando la relación (146), donde sustituimos términos para obener la siguiente expresión

$$\frac{\hbar^2}{4} \cdot w_L^2 \cdot \Im_z^2 + \frac{\hbar^2}{4} \cdot w_L^2 \cdot \Im_y^2 + \frac{\hbar^2}{4} \cdot \left[1 - \frac{w_L^2 \cdot \Im_x^2}{2} \right]^2 = \frac{\hbar^2}{4} \qquad --- \quad (151)$$

Aproximando , y cancelando el término de cuarto orden se tiene que

$$\Im_x^2 = \Im_y^2 + \Im_z^2 \qquad ---- \quad (152)$$

Sustituyendo las expresiones (140) y (146) en (152), resulta la ecuación

$$\Im_x = \frac{m}{\hbar\, q} \left[\left(\frac{d\theta}{dq} \right)^2 + \left(\frac{d \ln \sqrt{T}}{d\, q} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad ---- \quad (153)$$

entonces comparando con (123), de la que tomamos su valor absoluto y de este modo obtenemos el resultado final para $\Im_x$.

$$\Im_x = \frac{m}{\hbar\, q} \left| \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dq} \right| \qquad ---- \quad (154)$$

5.2.- Definición de $\Im_{xR}$ ó tiempo Larmor de reflexión

Para hallar los tiempos asociados a la reflexión, se procede de manera completamente similar a lo hecho para los tiempos de transmisión, en presencia de un campo magnético.

Sea el spinor asociado a la reflexión:

$$\psi = (|r_+|^2 + |r_-|^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} r_+ \\ r_- \end{pmatrix} \qquad -- \quad (155)$$

De tal modo que resultan los siguientes valores esperados

$$\langle S_x \rangle_R = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{R_+ - R_-}{R_+ + R_-} \qquad ---- \quad (156)$$

$$\langle S_y \rangle_R = - \hbar \frac{\sqrt{(R_+ R_-)}}{R_+ + R_-} \cdot \mathrm{sen}(\phi_+ - \phi_-) \qquad ---- \quad (157)$$

$$\langle S_z \rangle_R = \hbar \cdot \frac{\sqrt{(R_+ R_-)}}{R_+ + R_-} \cdot \cos(\phi_+ - \phi_-) \qquad ---- \quad (158)$$

Utilizamos las ecuaciones (132),(133) y (134); para la transmisión, contando además con las aproximaciones $R_+ + R_- \approx 2R$; $\sqrt{(R_+ R_-)} \approx R$ para obtener relaciones entre los valores de reflexión y de transmisión.

$$\langle S_z \rangle_R = - \langle S_z \rangle (T/R) \qquad ---- \quad (159)$$

$$\langle S_y \rangle_R = \langle S_y \rangle \qquad ---- \quad (160)$$

De estas cantidades obtenemos ,

$$\Im_{zR} = - \Im_z \cdot (T/R) \qquad ---- \quad (161)$$

$$\Im_{yR} = \Im_y \qquad ---- \quad (162)$$

y de estos cantidades el tiempo total de reflexión. $\Im_{xR}^2 = \Im_{yR}^2 + \Im_{zR}^2$,

que en términos de las componentes del tiempo de transmisión nos da:

$$\Im_{xR} = [\, \Im_y^2 + \Im_z^2 \cdot (T^2/R)^2]^{1/2} \qquad -(163)$$

5.3.- Tiempo de travesía $\Im_x$ y componentes para la barrera rectangular

Derivando $\tan\theta$ respecto a q, despejamos

$$\frac{d\theta}{dq} = \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{d\tan\theta}{dq} \qquad ---- \quad (164)$$

Recordando (68) , donde $\tan\theta = \dfrac{k^2-q^2}{2kq}\tanh(aq)$, y $\dfrac{dk}{dq} = 0$

Si derivamos $\tan\theta$ respecto a q tenemos

$$\frac{d\tan\theta}{dq} = \frac{-k}{4k^2q^2\cosh^2 aq} \cdot \frac{}{} \cdot (\, 2aq(q^2-k^2) + K_o^2 \cdot \mathrm{senh}\, 2aq \,) \qquad -(165)$$

y ,

$$\frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{4k^2q^2 \cdot \cosh^2 aq}{4k^2q^2 + K_o^4 \cdot \mathrm{senh}\, aq} \qquad ---- \quad (166)$$

si sustituimos las cantidades de (165) y (166), en la ec. (164) llegamos a obtener el siguiente resultado:

$$\frac{d\theta}{dq} = \frac{-2akq(q^2-k^2) - kK_o^2 \operatorname{senh} 2aq}{4k^2q^2 + K_o^4 \operatorname{senh}^2 aq} \quad \text{- - - -} \quad (167)$$

la ec. (146) para $\mathfrak{T}_y$ al sustituir la ec.(167) nos da:

$$\mathfrak{T}_y = \frac{mk}{hq} \cdot \frac{2aq\cdot(q^2-k^2) + K_o^2 \operatorname{senh} 2aq}{4k^2q^2 + K_o^4 \operatorname{senh}^2 aq} \quad \text{- - - -} \quad (168)$$

este resultado es idéntico al tiempo de permanencia , ec (109).

Obtención de $\mathfrak{T}_z$

El coeficiente de transmisión T , ec. (34) lo derivamos para obtener

$$\frac{dT}{dq} = -\frac{T^2K_o^2}{2k^2q^3}\cdot[\,(q^2-k^2)\cdot\operatorname{senh}^2 aq + (a/2)\cdot q\cdot K_o^2 \operatorname{senh} 2aq\,] \quad \text{- - - -} \quad (169)$$

Dado que

$$\frac{d\,\ln\sqrt{T}}{d\,q} = \frac{1}{2T}\cdot\frac{dT}{dq}$$

entonces

$$\frac{d\,\ln\sqrt{T}}{d\,q} = \frac{-T\cdot K_o^2}{4k^2q^3}\cdot[\,(q^2-k^2)\operatorname{senh}^2 aq + (a/2)qK_o^2\cdot\operatorname{senh} 2aq] \quad -(170)$$

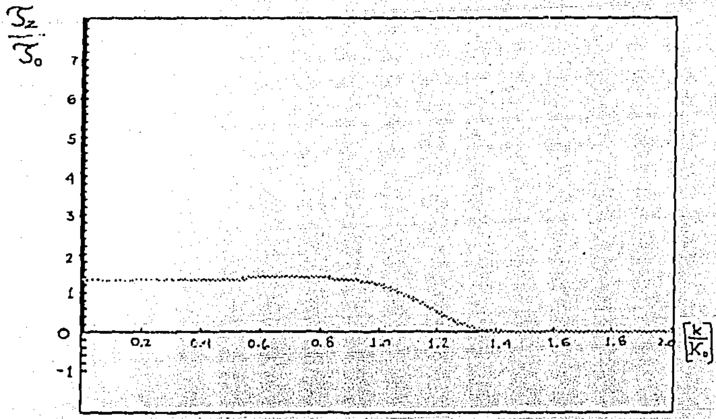
Si sustituimos el valor de T dado por la ec.(26), en la ec.(170)

$$\frac{d\,\ln\sqrt{T}}{d\,q} = -\frac{K_o^2}{q}\cdot\left[\frac{(q^2-k^2)\operatorname{senh}^2 aq + (a/2)qK_o^2 \operatorname{senh} 2aq}{4k^2q^2 + K_o^4 \operatorname{senh}^2 aq}\right] \quad -(171)$$

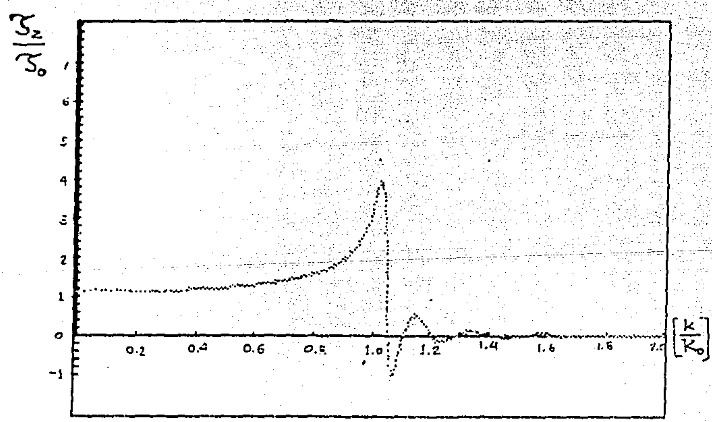
De lo definición para $\mathfrak{T}_z$, ecuación (140), además de usar la expresión anterior, esto implica el siguiente resultado para $\mathfrak{T}_z$

$$\mathfrak{T}_z = \frac{mK}{\hbar q} \cdot \left[\frac{(q^2-k^2)\operatorname{senh}^2 aq + (a/2)qK_o^2 \cdot \operatorname{senh} 2aq}{4k^2q^2 + K_o^4 \operatorname{senh}^2 aq} \right] \qquad (172)$$

Nuevamente acudimos a graficar los casos $aK_o = \pi$ (gráfica 21), y $aK_o = 3\pi$ (gráfica 22), en esta ocasión para observar el comportamiento de la curva de $\mathfrak{T}_z$ ec.(172), que es una componenete del tiempo de Larmor $\mathfrak{T}_x$. Como se puede apreciar en ambas gráficas para ciertos valores de [k] sucede que $\mathfrak{T}_z$ es negativa, en estos puntos Büttiker considera que existe una alineación del spin de la partícula con respecto al campo magnético, por lo cuál Büttiker considera a $\mathfrak{T}_z$ como una componente de $\mathfrak{T}_x$ y no como un tiempo real asociado al proceso de tunelaje.



Gráfica 21. Componente del tiempo de travesía [barrera rectangular de ancho a = 50 Å, y altura V_o = 0.222 eV , $aK_o = \pi$] como función de k.



Gráfica 22. Componente del tiempo de travesía [barrera rectangular de ancho a = 150 Å, y altura V_o = 0.222 eV , $aK_o = 3\pi$] como función de k.

Obtención de $\Im_x$ (Tiempo de Larmor)

Como $\Im_x^2 = \Im_y^2 + \Im_z^2$, y recordando resultados.

$$\Im_y = \frac{m}{\hbar q^2}\cdot\frac{[\ 2akq^2(q^2-k^2) + kqK_o^2 \text{ senh } 2aq\ ]}{4k^2q^2 + K_o^4 \text{ senh}^2 aq} \quad ---- \quad (173)$$

$$\Im_z = \frac{m}{\hbar q^2}\cdot\frac{[\ K_o^2(q^2-k^2)\cdot \text{senh}^2 aq + (a/2)qK_o^4 \text{ senh } 2aq\ ]}{4k^2q^2 + K_o^4 \text{ senh } aq} \quad -(174)$$

Al elevar al cuadrado las expresiones anteriores,para proceder a sumar y tomar la raiz del resultado de tal modo que:

$$\Im_x = \frac{m}{\hbar q^2}\cdot\frac{\{[2akq^2(q^2-k^2)+kqK_o^2\text{senh}2aq]^2+[(q^2-k^2)K_o^2\text{senh}^2aq + (a/2)qK_o^4\text{senh}2aq]^2\}^{1/2}}{4k^2q^2 + K_o^4 \text{ senh } aq}$$

L ---- (175a)

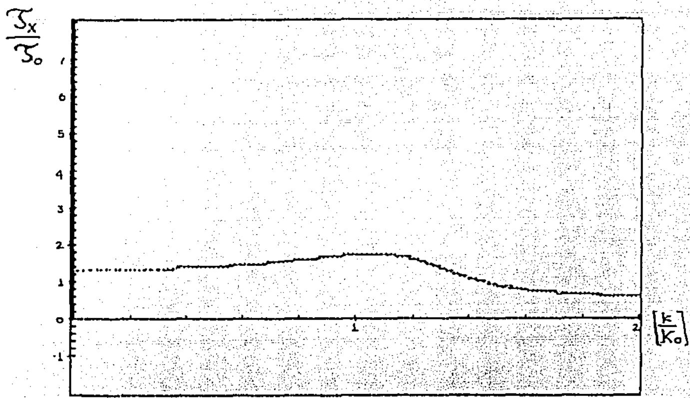
$$\lambda = \{[2akq^2(q^2-k^2)+kqK_o^2\text{senh}2aq]^2+[(q^2-k^2)K_o^2\text{senh}^2aq + (a/2)qK_o^4\text{senh}2aq]^2\}^{1/2}$$

L ---- (175b)

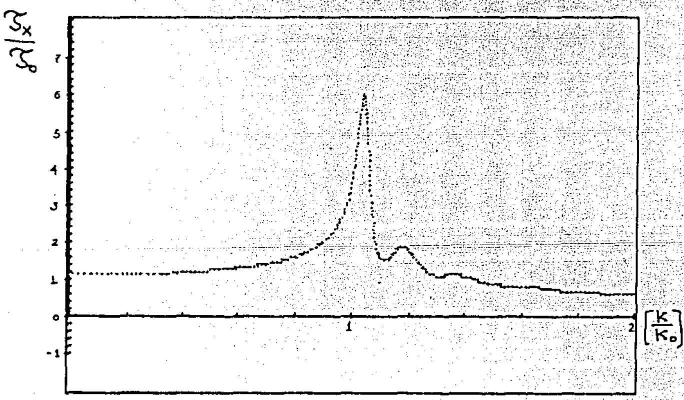
Si $D = 4k^2q^2 + K_o^4 \text{ senh}^2 aq$

entonces
$$\Im_x = \frac{m\cdot\lambda}{\hbar\cdot q^2\cdot D} \quad ---- \quad (175c)$$

Las gráficas 23 y 24 muestran la curva de la ec. (175c), para el tiempo de Larmor $\Im_x$, que se obtiene de sus componentes $\Im_y$ y $\Im_z$.



Gráfica 23. Tiempo de travesía (Larmor clock) ,
para una barrera rectangular, a = 50 Å, V_o = 0.222 eV
como función del vector de onda k. Caso $aK_o = \pi$.



Gráfica 24. Tiempo de travesía (Larmor clock) ,
para una barrera rectangular, a = 150 Å, V_o = 0.222 eV
como función del vector de onda k. Caso $aK_o = 3\pi$.

5.4.- Casos particulares para $\Im_z$ y $\Im_x$

a). Barrera delgada [$a \cdot K_o < (\pi/10)$, $a < 5$ Å]

$$\Im_z \approx \frac{ma}{\hbar k} \cdot \left[\frac{2k\Omega}{4k^2 + \Omega^2} \right] \quad \text{- - - -} \quad (176a)$$

Por otro lado

$$\Im_x \approx \frac{ma}{\hbar k} \cdot \left[\frac{2k \cdot (4k^2 + \Omega^2)}{4k^2 + \Omega^2} \right] \quad \text{- - - -} \quad (176b)$$

El comportamiento de (177) para $\Im_x$, lo tenemos en la gráfico 25, en donde se compara con la curva de $\Im_z$ para la barrera delgada.

Para el límite $a \to 0$, $K \to \infty$ con Ω constante, (límite delta)

$$\Im_z = 0$$

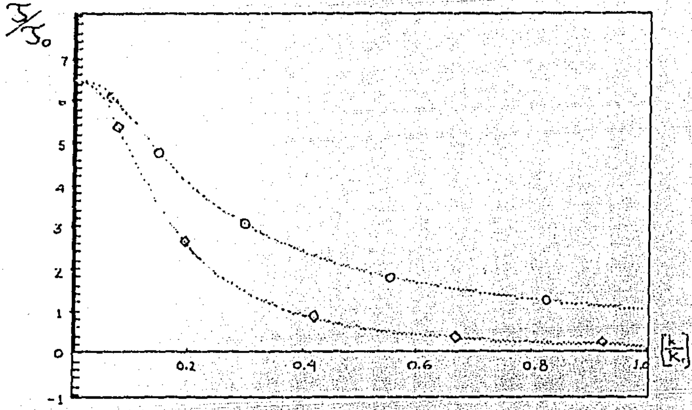
$$\Im_x \equiv 0$$

b). Barrera opaca. Condicion $aq \gg 1$

$$\Im_z \approx \frac{ma}{\hbar\, q} \quad \text{- - - -} \quad (177a)$$

$$\Im_x \approx \frac{ma}{\hbar\, q} \quad \text{- - - -} \quad (177b)$$

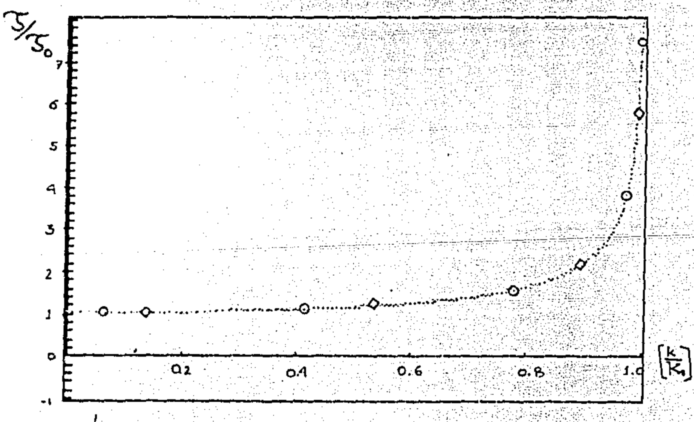
La gráfica 26 nos muestra la curva de $\Im_x$, para la barrera opaca comparada con la variación de $\Im_z$, ecs. (177a) y (177b).



Gráfica 25. Barrera delgada , $aK = \pi/10$.

◇ .- Componente τ_z

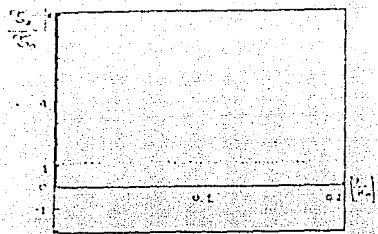
○ .- Tiempo de travesía τ_x



Gráfica 26. Barrera opaca , $aK = 10\pi$.

◇ .- Componente τ_z

○ .- Tiempo de travesía τ_x



Para cantidades muy pequeñas de k, es decir $k \ll K_o$, el campo magnético produce un tiempo de retraso que se ve casi constante en este límite.

Gráfico 27. Curva de $\Im_z$, para energías menores a 0.08 eV., en el caso $aK_o = \pi$

Como $\Im_z \approx 0$ para $k \ll K_o$ entonces $\Im_x \approx \Im_z$ y $q \approx K_o$

$$\Im_z = \frac{m}{\hbar K_o^2} \cdot \left[1 + \frac{aK_o}{\tanh aK_o} \right] \qquad ---- (178)$$

entonces:

$$\frac{\Im_z}{\Im_o} = \left[\frac{1}{aK_o} + \frac{1}{\tanh aK_o} \right] \qquad ---- (179a)$$

Si $aK_o > 1$ entonces la aproximación siguiente es válida

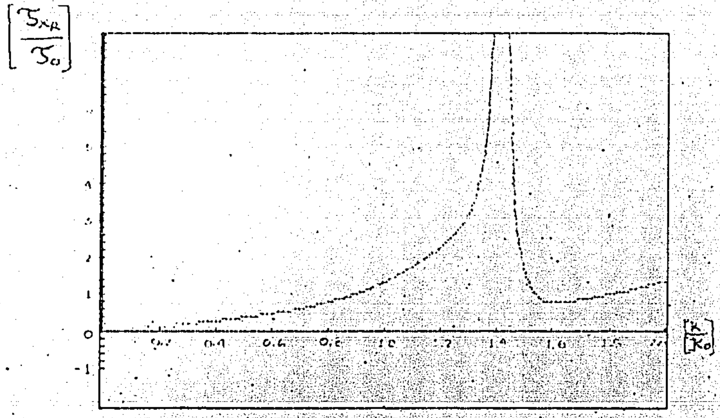
$$\frac{\Im_z}{\Im_o} = 1 + (1/aK_o) \qquad ---- (179b)$$

claramente si $aK_o \gg 1$ (barrera opaca) entonces $\Im_z \approx \Im_o$

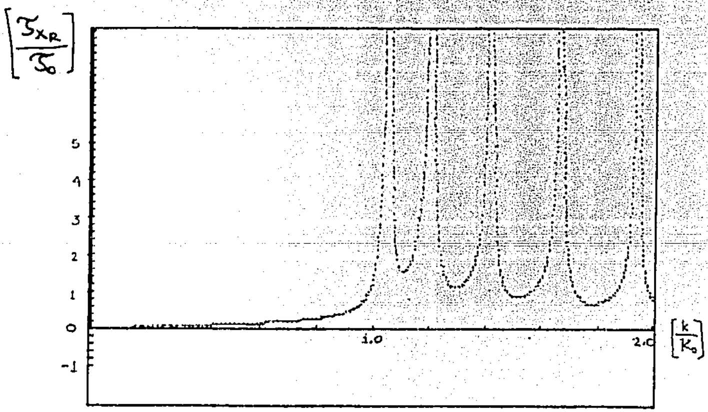
Hasta aquí hemos observado las componentes relacionadas al tiempo de Larmor de travesía y con ellas determinamos el valor de $\Im_x$. Tomando en cuenta la ec. (163), que nos relaciona estas mismas componentes con el tiempo de Larmor de reflexión $\Im_{xR}$ según:

$$\Im_{xR}^2 = \Im_y^2 + \Im_z^2 \cdot (T/R)^2$$

El comportamiento de esta curva se muestra en los gráficos 28 y 29, para los casos $aK_o = \pi$ y $aK_o = 3\pi$. En estas gráficas se aprecian puntos indeterminados de $\Im_{xR}$ para ciertos valores de [k], esto sucede en la ecuación anterior para los puntos en resonancia, R = 0 , T = 1 .



Gráfica 28. Tiempo de reflexión (Larmor clock) τ_{x_R}, para una barrera rectangular, a = 50 Å, V_o = 0.222 eV como función del vector de onda k. Caso $aK_o = \pi$.



Gráfica 29. Tiempo de reflexión (Larmor clock) τ_{x_R}, para una barrera rectangular, a = 150 Å, V_o = 0.222 eV como función del vector de onda k. Caso $aK_o = 3\pi$.

5.5.- Caso límite, barrera nula (V --> 0)

Si la barrera es nula, $V_o = 0$, contando con la presencia del campo magnético, entonces es de esperar una precesión, y para resolver tal problema acudimos al valor de T, sustituyendo q por $ik_\pm$, con $k_\pm^2 = k^2 \pm (mw_L/\hbar)$.

$$T = \frac{4k^2 \cdot [\, k^2 \pm (mw_L/\hbar)\,]}{4k^2 \cdot [\, k^2 \pm (mw_L/\hbar)] + (mw_L/\hbar)^2 \operatorname{sen}^2(aq)} \quad ---- \quad (180)$$

Para w_L muy pequeño, de modo que $(mw_L/\hbar k^2) \ll 1$, la expresión (180) que resulta en este límite con una aproximación a primer orden nos da:

$$T_\pm \approx 1 - \left[\frac{mw_L}{\hbar k^2}\right]^2 \cdot \frac{\operatorname{sen}^2(ak)}{4} + \ldots\ldots \quad ---- \quad (181)$$

donde $T_+ \approx T_- = T$, si derivamos este resultado respecto a k

$$\frac{\partial T}{\partial k} = \left[\frac{mw_L}{\hbar k^2}\right]^2 \cdot \frac{(4 \cdot \operatorname{sen}^2 ak - ak \cdot \operatorname{sen} 2ak)}{4k}$$

Dada la aproximación $T_+ - T_- = \frac{mw_L}{\hbar k} \cdot \frac{\partial T}{\partial k}$

Sustituyendo en la expresión para $\langle S_z \rangle$ ec.(137)

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{4} \cdot \left[\frac{mw_L}{\hbar k^2}\right]^3 \cdot (\, 2 \cdot \operatorname{sen}^2 ak - ak \cdot \operatorname{sen} 2ak\,)$$

como se observa en el resultado anterior tenemos un término de tercer orden en w_L, y que nos permite concluir que no es necesario que el campo magnético este confinado estrictamente a la barrera, ya que en el interior es de primer orden en w_L, con lo cuál podemos despreciar la cantidad de tercer orden (fuera de la barrera), y por otro lado prueba de que se da una presesión de Larmor en ausencia de barrera alguna y en presencia de un campo magnético.

CAPITULO 6

- Discusión y comparaciones -

Las siguientes gráficas tienen la intención de mostrar en forma conjunta al lector, los tiempos aquí estudiados de modo de poder observar sus diferencias y sus distintos comportamientos en los casos indicados.

La primera de esta serie de gráficas, graf.(30), representa el tiempo que tarda una partícula en recorrer una cierta distancia [a], en ausencia de barrera alguna, a este tiempo lo denominamos tiempo libre $\Im_{libre}$.

En los gráficos siguientes 31 y 32, se muestran los casos para $aK_o = \pi$ y $aK_o = 3\pi$, respectivamente. En las cuáles, se observa que existe un comportamiento completamente diferente para cada uno de los tiempos en estudio ($\Im_\Theta$, $\Im_d$, $\Im_x$) en la región de interés $k < K_o$.

Para ambas gráficas podemos referir el siguiente comportamiento en el límite $k << K_o$, $\Im_d \longrightarrow 0$, $\Im_\Theta \longrightarrow \infty$, $\Im_x \longrightarrow M_o$,con M_o una constante.

Para valores mayores de k, se ve que $\Im_\Theta$ es una curva suave que desciende hasta un valor mínimo, para aumentar levemente para valores $k \approx K_o$.

En los gráficos 33 y 34 mostramos los siguientes casos :

.- Barrera delgada (graf. 33) , [$a = 5$ A , $aK_o = (\pi/10)$].

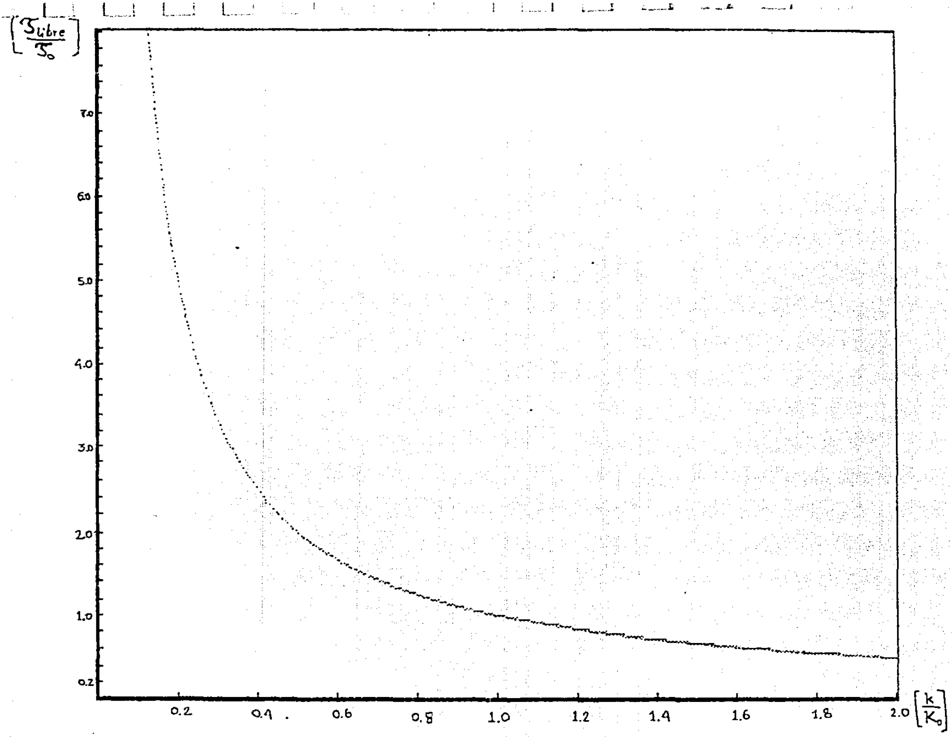
El comportamiento es similar a los puntos límites anteriores en el caso $k << K_o$,mientras que para $k < K_o$ se observa la existencia de un pico para $\Im_d$, centrado en $k = (\Omega/2)$.

Para este caso (barrera delgada), se tiene que: $\Im_\Theta > \Im_x \geq \Im_d$

.- Barrera opaca (graf. 34) , [$a = 500$ A , $aK_o = 10\pi$] .

En esta gráfica se muestra solamente la parte para $k < K_o$, para evitar observar un sinúmero de oscilaciones para $k > K_o$. Tenemos un comportamiento parecido al caso mencionado para $k << K_o$;

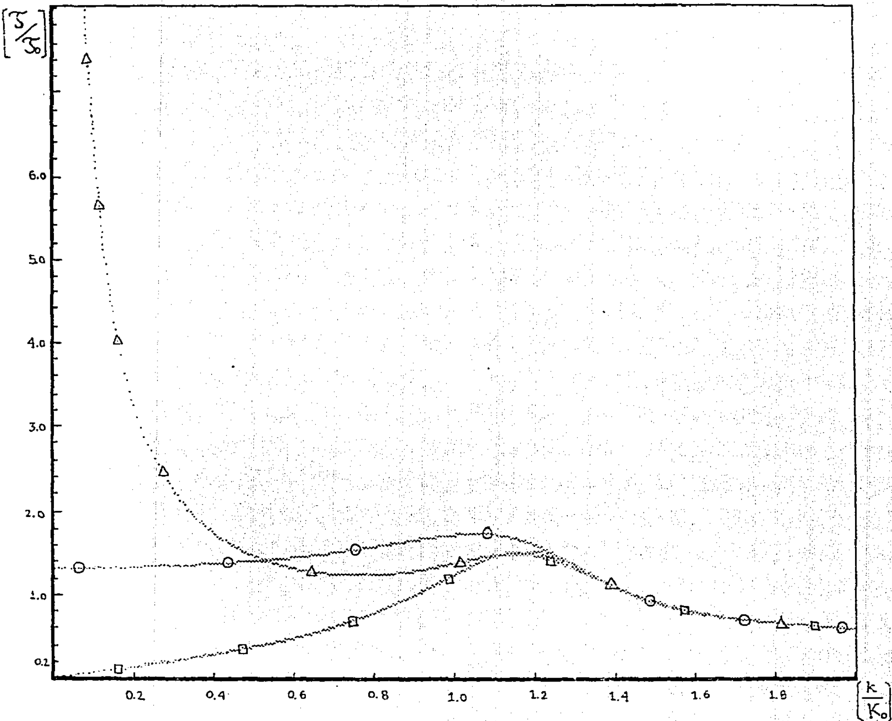
$$\Im_d \longrightarrow 0 \ , \ \Im_\Theta \longrightarrow \infty \ , \ \Im_x \longrightarrow \Im_o \quad \text{(valor constante)} .$$



Gráfica 30 . Tiempo de libre recorrido ($\mathcal{T}_{libre}$)

La gráfica muestra el tiempo que tarda una partícula en recorrer una distancia [a], como función de k, en ausencia de barrera. $\mathcal{T}_{libre} = ma/hk$.

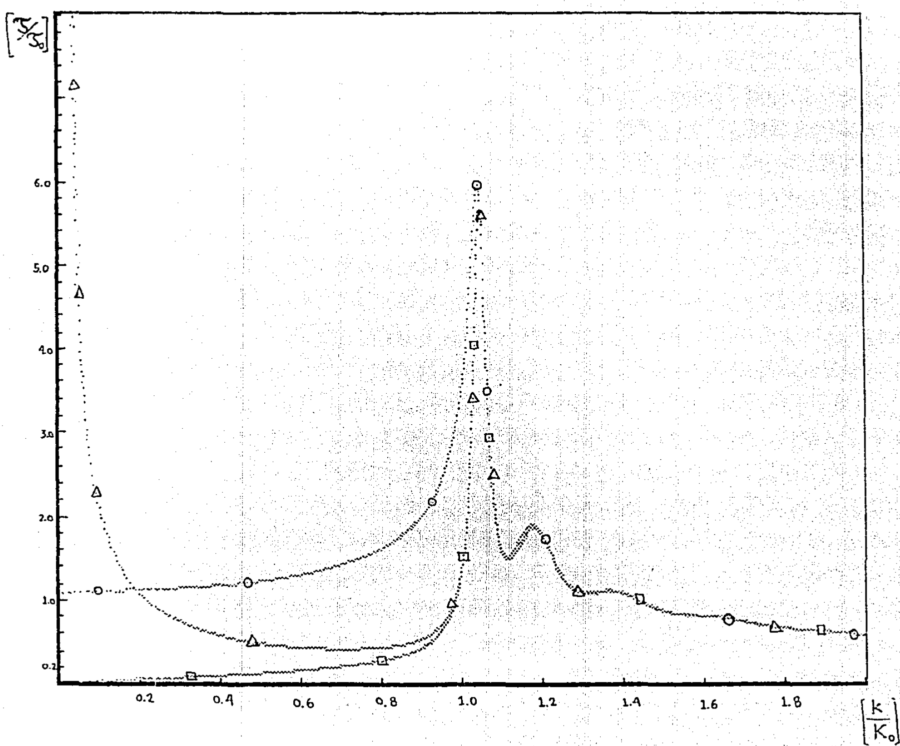
Las constantes son: $\mathcal{T}_o = ma/hK_o$, $K_o = \pi/50$ de modo que $\frac{\mathcal{T}_{libre}}{\mathcal{T}_o} = (K_o/k)$.



Gráfica 31. $aK_0 = \pi$

□ .- Tiempo de permanencia (τ_d); Δ .- Tiempo fase (τ_θ); O .- Tiempo de travesía (τ_x)

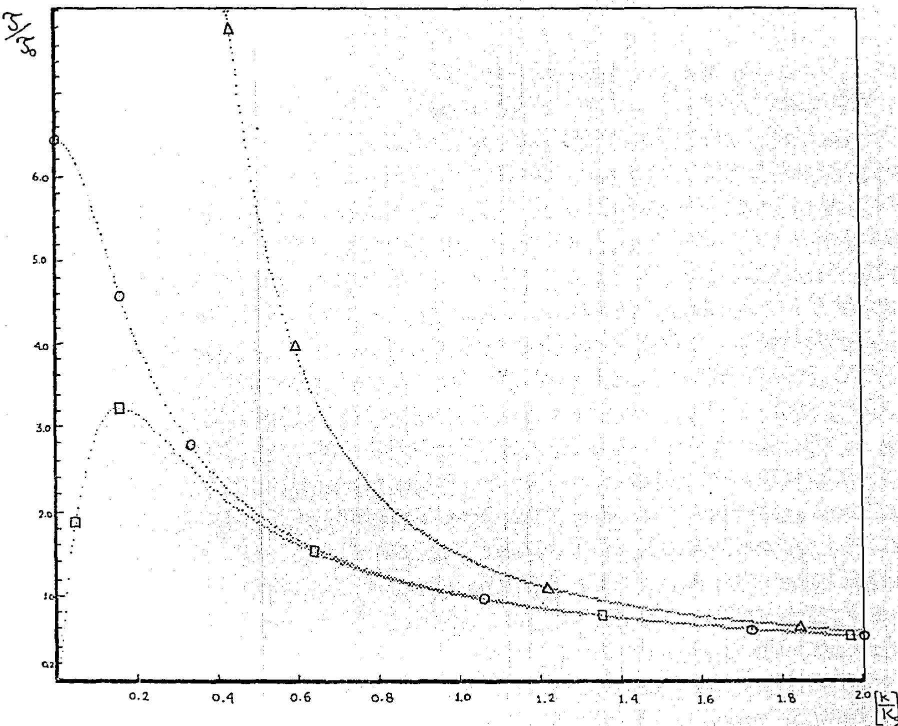
Los tiempos mostrados en esta gráficas son función del vector de onda $|k|$, para el caso $aK_0 = \pi$, con los valores constantes $a = 150$ A , $V_0 = 0.222$ eV , y $\tau_0 = ma/hK_0$.



Gráfica 32. $aK_o = 3\pi$

□ .- Tiempo de permanencia (τ_d); △ .- Tiempo fase (τ_e); O .- Tiempo de travesìa (τ_x)

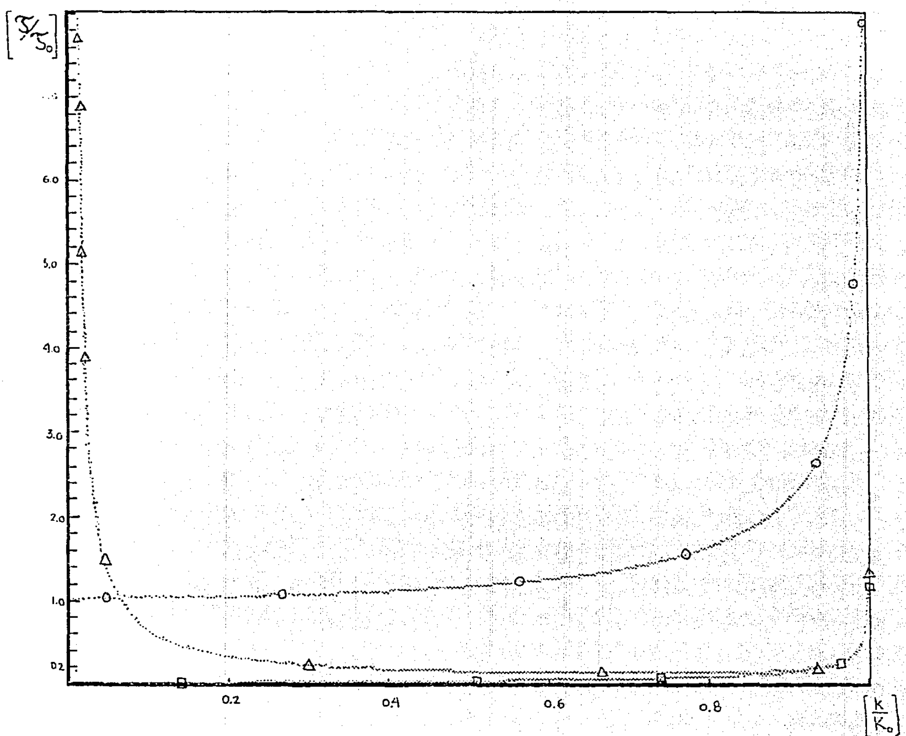
Los tiempos mostrados en esta gráficas son función del vector de onda [k] , para el caso $aK_o = 3\pi$, con los valores constantes a = 150 Å , V_o = 0.222 eV , y τ_o = ma/hK$_o$.



Gráfica 33. $aK_o = \pi / 10$

□ .- Tiempo de permanencia (τ_d); Δ .- Tiempo fase (τ_t); .- Tiempo de travesía (τ_y)

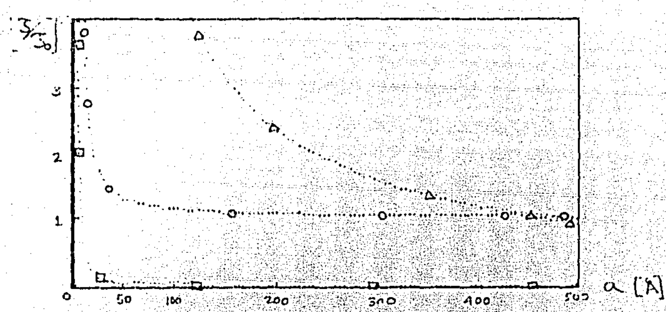
Los tiempos mostrados en esta gráficas son función del vector de onda [k], para el caso de barrera delgada $aK_o=\pi/10$, con las constantes $a = 5$ Å , $V_o = 0.222$ eV , y $\tau_o= ma/hK_o$.



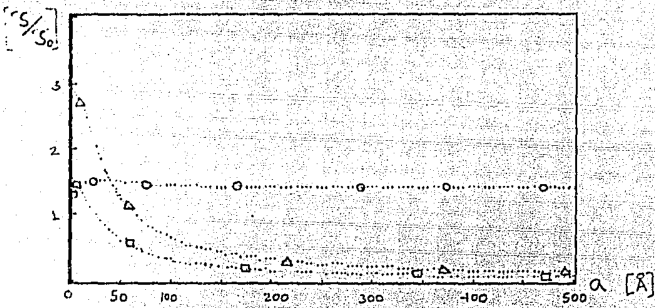
Gráfica 34. $aK_o = 10\pi$

□ .- Tiempo de permanencia (τ_d); △ .- Tiempo fase (τ_t); o .- Tiempo de travesia (τ_v)

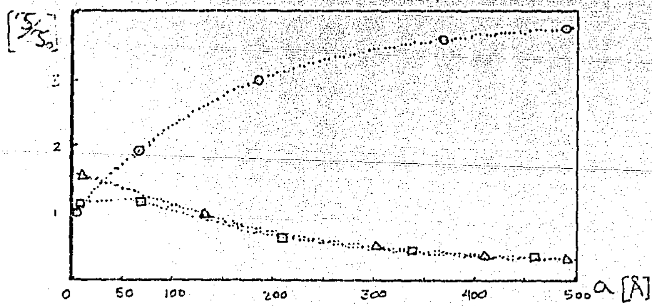
Los tiempos mostrados en esta gráficas son función del vector de onda [k], para el caso de barrera opaca $aK_o=10\pi$, con las constantes $a = 500$ A , $V_o = 0.222$ eV , y $\tau_o = ma/hK_o$.



Graf. [illegible]. energia = 0.001 eV , V_o = 0.222 eV



Graf. 36. energia = 0.111 eV , V_o = 0.222 eV



Graf. 37. energía = 0.21 eV , V_o = 0.222 eV

□ .- Tiempo de perm.(τ_d); Δ.- Tiempo fase (τ_θ); o.- Tiempo de trav.(τ_x)

Los tiempos mostrados en estas gráficas son función del ancho [a] de la barrera, cubriendo la gama de barrera delgada a barrera opaca. Se utilizaron energías fijas para la partícula con los valores que se indican.

CONCLUSIONES

Conforme al orden de estudio de las propuestos para los tiempos de tunelaje realizados en este trabajo mencionamos los siguientes puntos que a manera de conclusiones nos parecen importantes.

Dado el tiempo de fase (phase time), para el caso estudiado de la barrera rectangular, encontramos que los tiempos asociados a la reflexión y a la transmisión son iguales, es decir $\Im_{\Theta} = \Im_{\Phi}$. Sobre este mismo problema, al aplicar el límite a una barrera tipo potencial delta, se halló que estos tiempos, además de seguir siendo iguales, no se anulaban , $\Im_{\Theta} > 0$, con lo que podemos pensar que el tiempo de fase , es un tiempo de retraso más que de travesía , ya que era de esperarse para este caso , al no tener dimensiones este tipo particular de barrera, no debe de existir un tiempo de travesía, y por el contrario la presencia física de este objeto le provoca un retraso temporal a la partícula al cruzar a su paso, por la barrera.

Cuando se estudio el tiempo de permanencia (dwell time), se llegó a la expresión $\Im_d = [T\cdot\Im_{\Theta} + R\cdot\Im_{\Phi}]+[g(k)\cdot sen\ \phi]$,ec.(101) , que aplicada al caso de barrera tipo delta , el término oscilatorio es en este caso, del mismo orden que el sumando $[T\cdot\Im_{\Theta} + R\cdot\Im_{\Phi}]$,de lo que se concluye que no se puede cancelar a priori este término y para confirmar este argumento presentamos dos casos más: el caso de la barrera delgada en el que se observa que el término oscilatorio es del mismo orden mientras que para la barrera opaca este término sinusoidal llega a ser más importante que su término contraparte de la expresión dada por la ecuación (101).

Tanto Smith [2], como Hauge [7], han intentado bajo argumentos no del todo convincentes, eliminar el término oscilatorio de la expresión del tiempo de permanencia (dwell time) ec. (101a). Los casos particulares presentados prueban el hecho de que en la región por debajo de la altura de la barrera V_o ($E < V_o$ ó $k < K_o$), no es posible anular el término oscilatorio de la expresión para el tiempo de permanencia ya que, de hacerlo se obtendrían resultados erróneos al menos en este rango.

Haciendo mención de esta misma expresión, ec. (101), para el tiempo de permanencia, se plantean las siguientes observaciones de su comportamiento en el rango de energías por debajo de V_o, esto, apoyado en su expresión analítica y en su gráfica.

El tiempo de permanencia tiende a anularse a medida que la energía de la partícula se hace más pequeña, lo que significaría que la partícula tendría un tiempo de interacción con la barrera cada vez más corto, resultando una probabilidad de reflexión casi total.

Al suponer una barrera delgada, de ancho menor a una decena de amstrongs, se encontró en el rango $E < V_o$, la existencia de un pico de la curva para el tiempo de permanencia, localizandose en el valor $k = \Omega/2$.

Mientras que el caso de la barrera opaca nos mostró que el tiempo de permanencia es casi nulo en este rango, excepto si la partícula posee una energía cercana a la altura de la barrera, es decir $E \approx V_o$, valores en los que aumenta considerablemente $\Im_d$.

En el último de los tiempos analizados, tiempo de Larmor (Larmor clock), para $E < V_o$, se obtuvieron los resultados $\Im_z=0$ y $\Im_x=0$ para la barrera tipo potencial delta. Este resultado es de extrema importancia debido a la manera en que fué definido este concepto , de modo que la expresión (175) es relacionada a un tiempo de travesía, por lo cuál era de esperar que $\Im_x$ se anulase en el límite de la barrera delta.

Además este tiempo Larmor de travesía parte de un valor temporal diferente de cero para una energía asociada nula, es decir , la partícula tarda un tiempo de travesía fijo para aquellas energías muy pequeñas en comparación de V_o . Hacemos los siguientes observaciones, en el caso de barrera opaca para valores de energía cercanos a la altura de la barrera, $E \approx V_o$ hallamos que la curva $\Im_x$ tiene un crecimiento pronunciado, mientras que para el caso de la barrera delgada sucede lo contrario, la curva de $\Im_x$ desciende hasta casi anularse en este punto.

Los tiempos encontrados según las definiciones aqui estudiadas, para la barrera rectangular fueron los siguientes:

$$\Im_\theta = \frac{m}{\hbar kq} \cdot \frac{2aqk^2(q^2-k^2)+K_o^4 \operatorname{senh} 2aq}{4k^2q^2 + K_o^4 \operatorname{senh}^2 aq} \quad \text{Tiempo fase} \qquad \text{(phase time)}$$

$$\Im_d = \frac{mk}{\hbar q} \cdot \frac{2aq(q^2-k^2) + K_o^2 \operatorname{senh} 2aq}{4k^2q^2 + K_o^4 \operatorname{senh}^2 aq} \quad \text{Tiempo de permanencia (dwell time)}$$

$$\Im_x = \frac{m}{\hbar q} \cdot \frac{\lambda(k)}{4k^2q^2 + K_o^4 \operatorname{senh}^2 aq} \quad \text{Tiempo Larmor} \qquad \text{(Larmor clock)}$$

Con $\lambda(k)$ definida en la ec.(171b)

El caso límite de barrera opaca $aq \gg 1$ arrojó los siguiente resultados para los tiempos de tunelaje propuestos:

$$\mathfrak{T}_o = \frac{2m}{\hbar kq} \; ; \; \mathfrak{T}_d = \frac{\hbar k}{qV} \; ; \; \mathfrak{T}_x = \frac{ma}{\hbar q}$$

Por último es importante recalcar el hecho de que aún no ha sido posible diseñar en el laboratorio un experimento que nos permita inclinarnos por alguna de las teorías aquí presentadas. La intención de este trabajo era el mostrar algunas de tales teorías ,sus enfoque y diferencias ofreciendo una perspectiva reciente del problema relacionado al tiempo de tunelaje en una región clasicamente prohibida, sin pretender dilucidar cuál de estos enfoques es el indicado.

APENDICE A

A continuación obtenemos algunos resultados encontrados en este estudio, de manera explícita, y que se especifican en cada caso.

a). Deducción de la expresiones (94a) y (94b)

De (93a), $\psi_i = e^{ikx} + r\cdot e^{-ikx}$

entonces, $\psi_i^* = e^{-ikx} + r^*\cdot e^{ikx}$

Derivando ,

$$\frac{d\ \psi_i}{d\ x} = i\cdot k\cdot(e^{ikx} - r\cdot e^{-ikx}) \quad ; \quad \frac{d\ \psi_i^*}{d\ x} = -i\cdot k\cdot(e^{-ikx} - r^*\cdot e^{ikx})$$

$$\frac{d\ \psi_i}{d\ E} = i\cdot x\cdot\frac{dk}{dE}\cdot(e^{ikx} - r\cdot e^{-ikx}) + \frac{dr}{dE}\cdot e^{-ikx}$$

Derivando esta última expresión respecto a x ,

$$\frac{d^2\ \psi_i}{dxdE} = -xk\cdot\frac{dk}{dE}\cdot(e^{ikx} + r\cdot e^{-ikx}) - i\cdot k\cdot\frac{dr}{dE}\cdot e^{-ikx} + i\cdot\frac{dk}{dE}\cdot(e^{ikx} - r\cdot e^{-ikx})$$

otros resultados

$$\frac{d\ \psi_i}{d\ E}\cdot\frac{d\ \psi_i^*}{d\ x} = xk\cdot\frac{dk}{dE}\cdot(1 - r\cdot e^{-2ikx} - r^*\cdot e^{2ikx} + r^*r) - i\cdot k\cdot\frac{dr}{dE}\cdot (e^{-2ikx} - r^*)$$

$$\frac{d^2\ \psi_i}{dxdE}\psi_i^* = -xk\cdot\frac{dk}{dE}\cdot(1 + r\cdot e^{-2ikx} + r^*\cdot e^{2ikx} + r^*r) - i\cdot k\cdot\frac{dr}{dE}\cdot(e^{-2ikx} + r^*) + \ldots$$

$$\ldots + i\cdot\frac{dk}{dE}\cdot(r\cdot e^{2ikx} - r\cdot e^{-2ikx} + 1 - r^*r)$$

Con las ecuaciones anteriores llegamos al resultado deseado, ec. (94a):

$$\psi_i^*\frac{d^2\ \psi_i}{dxdE} - \frac{d\ \psi_i}{d\ E}\cdot\frac{d\ \psi_i^*}{d\ x}\Bigg|_{x=0} = i\cdot\frac{dk}{dE}\cdot(1 + r^* - r - r^*r) - 2ikr^*\frac{dr}{dE}$$

Para obtener (94b)

De (93b), $\psi_t = t \cdot e^{ik(x-a)}$

entonces, $\psi_t^* = t^* \cdot e^{-ik(x-a)}$

Derivando ,

$$\frac{d\,\psi_t}{d\,x} = i \cdot k \cdot \psi_t \qquad ; \qquad \frac{d\,\psi_t^*}{d\,x} = -i \cdot k \cdot \psi_t^*$$

$$\frac{d\,\psi_t}{d\,E} = \left[\frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dE} + i \cdot (x - a) \cdot \frac{dk}{dE} \right] \cdot \psi_t$$

Derivando esta última expresión respecto a x ,

$$\frac{d^2\,\psi_t}{dxdE} = \left[ik \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dE} - k \cdot \frac{dk}{dE} \cdot (x - a) \right] \cdot \psi_t + i \cdot \frac{dk}{dE} \cdot \psi_t$$

otros resultados

$$\frac{d\,\psi_t}{d\,E} \cdot \frac{d\,\psi_t^*}{d\,x} = \left[-ik \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dE} + k \cdot \frac{dk}{dE} \cdot (x - a) \right] \cdot (\psi_t^* \psi_t)$$

$$\psi_t^* \frac{d^2\,\psi_t}{dxdE} = \left[ik \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dE} - k \cdot \frac{dk}{dE} \cdot (x - a) \right] \cdot (\psi_t^* \psi_t) + i \cdot \frac{dk}{dE} \cdot (\psi_t^* \psi_t)$$

Con las ecuaciones anteriores llegamos al resultado deseado, ec.(94b):

$$\psi_t^* \frac{d^2\,\psi_t}{dxdE} - \frac{d\,\psi_t}{d\,E} \cdot \frac{d\,\psi_t^*}{d\,x} = \left[2ik \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dE} - 2k \cdot \frac{dk}{dE} \cdot (x - a) \right] \cdot (t^* t) + i \cdot \frac{dk}{dE} \cdot (t^* t)$$

$$\left. \psi_t^* \frac{d^2\,\psi_t}{dxdE} - \frac{d\,\psi_t}{d\,E} \cdot \frac{d\,\psi_t^*}{d\,x} \right| = 2ik \cdot \left[\frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dE} \right] \cdot (t^* t) + i \cdot \frac{dk}{dE} \cdot (t^* t)$$

A P E N D I C E   B

Programa Basic

Calcula el coeficiente de transmisión T, por eliminación algebraica de números complejos de las siguientes ecuaciones, para obtener t= C/A y de aqui, T=(Re t) +(Im t) en el caso de una barrera no simétrica, que bien puede reducirse al caso rectangular haciendo U=0.

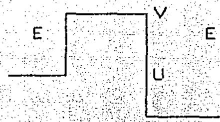


Figura 12.

V < E	V > E
A + B = F + G	A + B = F + G
ikA −ikB = −iq'F + iq'G	−ikA − ikB = −qF + qG
F•e + G•e = C•e	F•e + G•e = C•e
−iq'F•e + iq'G•e = iSC•e	qF•e + qG•e = iSC•e

```
10 SCREEN 2
20 WINDOW (0, 1)-(5, 0)
25            REM  Ejes y divisiones
30  LINE (0, 0)-(5, 0): LINE (0, 0)-(0, 5)
40 FOR I = 1 TO 5: LINE (0, I)-(.1, I): LINE (I, 0)-(I, .01): NEXT I
45            REM  Constantes
50    M(ELECTRON) = 5.11E-07           : REM UNIDADES   (eV)(seg )/(c )
60    MO = .067 * M(ELECTRON)          : REM MASA EFECTIVA DEL ELECTRON
70    HPLANK = 6.582E-16               : REM UNIDADES    (eV)(seg)
80    A = 50                           : REM UNIDADES    ( Å )
90    CTE = 56.94                      : REM  Cte = @ =h /2*MO    (eV)(Å)
95            REM  Altura de la barrera en ambos lados
100   LOCATE 22, 65: PRINT "                    ": LOCATE 22, 60: INPUT "Volt "; V
110   LOCATE 23, 65: PRINT "                    ": LOCATE 23, 60: INPUT "   U "; U
120       IF U>=V THEN COEF=1 :GOTO 19      :REM Diferencia tipo-escalón
125           REM  Iteración
130 FOR E = .00001 TO 5 * V STEP (V / 30): REM energia de la onda incidente
140  ENERGIA = V - (E + U): IF E + U < 0 THEN COEF = 0: GOTO 760
150   IF ENERGIA < 0 THEN ENERGIA = -ENERGIA: IND = 1
160       K = (E / CTE) ^ (1 / 2)
170       S = ((E + U) / CTE) ^ (1 / 2)
180       Q = ((ENERGIA) / CTE) ^ (1 / 2)
190  IF IND = 1 THEN GOSUB 890 ELSE GOSUB 850
200                    REM  P A R A M E T R O S
210 L11(1) = 1: L12(1) = 1: L13(1) = -1: L14(1) = -1
220 L11(2) = 0: L12(2) = 0: L13(2) = 0: L14(2) = 0
230 L21(1) = NU1(1): L22(1) = NU2(1): L23(1) = -COS(S * A): L24(1) = 0
240 L21(2) = NU1(2): L22(2) = NU2(2): L23(2) = -SIN(S * A): L24(2) = 0
250 L51(1) = 0: L52(1) = 0: L53(1) = SU1(1): L54(1) = SU2(1)
260 L51(2) = K: L52(2) = -K: L53(2) = SU1(2): L54(2) = SU2(2)
270 L61(1) = MU1(1): L62(1) = MU2(1): L63(1) = S * SIN(S * A): L64(1) = 0
280 L61(2) = MU1(2): L62(2) = MU2(2): L63(2) = -S * COS(S * A): L64(2) = 0
```

```
290                REM   OPERACIONES ALGEBRAICAS
300  XA1  = L12(1):  XB1  = L52(1):  XA2  = L51(1):  XB2  = L11(1)
310  YA1  = L12(2):  YB1  = L52(2):  YA2  = L51(2):  YB2  = L11(2)
330  GOSUB 810:     PA1(1) = X:          PA1(2) = Y
340                               XA2  = L53(1):  XB2  = L13(1)
350                               YA2  = L53(2):  YB2  = L13(2)
370  GOSUB 810:     PA2(1) = X:          PA2(2) = Y
380                               XA2  = L54(1):  XB2  = L14(1)
390                               YA2  = L54(2):  YB2  = L14(2)
410  GOSUB 810:     PA3(1) = X:          PA3(2) = Y
420  XA1  = L23(1):  XB1  = L63(1):  XA2  = L61(1):  XB2  = L21(1)
430  YA1  = L23(2):  YB1  = L63(2):  YA2  = L61(2):  YB2  = L21(2)
450  GOSUB 810:     PB1(1) = X:          PB1(2) = Y
460                               XA2  = L62(1):  XB2  = L22(1)
470                               YA2  = L62(2):  YB2  = L22(2)
490  GOSUB 810:     PB2(1) = X:          PB2(2) = Y
500  XA1  = L21(1):  XB1  = L61(1):  XA2  = L62(1):  XB2  = L22(1)
510  YA1  = L21(2):  YB1  = L61(2):  YA2  = L62(2):  YB2  = L22(2)
530  GOSUB 810:     PC1(1) = X:          PC1(2) = Y
540                               XA2  = L63(1):  XB2  = L23(1)
550                               YA2  = L63(2):  YB2  = L23(2)
570  GOSUB 810:     PC2(1) = X:          PC2(2) = Y
580  XA1  = PA2(1):  XB1  = PB1(1):  XA2  = 0:  XB2  = PA1(1)
590  YA1  = PA2(2):  YB1  = PB1(2):  YA2  = 0:  YB2  = PA1(2)
610  GOSUB 810:     QA1(1) = X:          QA1(2) = Y
620                               XA2  = PB2(1):  XB2  = PA3(1)
630                               YA2  = PB2(2):  YB2  = PA3(2)
650  GOSUB 810:     QA2(1) = X:          QA2(2) = Y
660  XA1  = PC1(1):  XB1  = QA2(1):  XA2  = QA1(1):  XB2  = 0
670  YA1  = PC1(2):  YB1  = QA2(2):  YA2  = QA1(2):  YB2  = 0
690  GOSUB 810:     RA1(1) = X:            RA1(2) = Y
700                               XA2  = 0:  XB2  = PC2(1)
710                               YA2  = 0:  YB2  = PC2(2)
730  GOSUB 810:     RA2(1) = X:        RA2(2) = Y
740  ZA1SQR =(RA1(1)^ 2) + (RA1(2)^ 2):  ZA2SQR =(RA2(1)^ 2) + (RA2(2)^ 2)
750    T = ZA1SQR / ZA2SQR:  COEF = S * T / K
760 IF E = .00001 THEN 780
770  LINE (E / V, COEF)-(COLX, COLY), 1
780                                         COLX = E / V:  COLY = COEF
790 NEXT E
800 IF INKEY$ = "" THEN 800 ELSE GOTO 20    : REM   Nueva Gráfico
805              REM  Multiplicación de Números Complejos
810    XA = XA1 * XA2 - YA1 * YA2:  YA = XA1 * YA2 + XA2 * YA1
820    XB = XB1 * XB2 - YB1 * YB2:  YB = XB1 * YB2 + XB2 * YB1
830        X = XA - XB:                 Y = YA - YB
840    RETURN
845              REM  PARAMETROS   Caso  E < V
850  NU1(1) = EXP(-Q * A):  NU1(2) = 0:   NU2(1) = EXP(Q * A):  NU2(2) = 0
860  MU1(1) =-Q * EXP(-Q * A):  MU1(2) =0:  MU2(1)=Q * EXP(Q * A):  MU2(2)=0
870  SU1(1) = Q:  SU1(2) = 0:              SU2(1) = -Q:  SU2(2) = 0
880 RETURN
885              REM  PARAMETROS   Caso   E > V
890 NU1(1) =COS(Q*A):  NU1(2) =-SIN(Q*A):  NU2(1) =COS(Q*A):  NU2(2) =SIN(Q*A)
900 MU1(1)=-Q*SIN(Q*A):MU1(2)=-Q*COS(Q*A):MU2(1)=-Q*SIN(Q*A)
   :MU2(2)=Q*COS(Q*A)
910  SU1(1) = 0:  SU1(2) = Q:  SU2(1) = 0:  SU2(2) = -Q
920 RETURN
```

R E F E R E N C I A S

1. D. Bohm, Quantum Theory (Prentice Hall, London 1951), 257

2. F. T. Smith, Phys. Rev. 118, 349 (1960)

3. A.I. Baz, Sov. J. Nucl. Phys. 4, 182, (1967); 5, 161, (1967)

4. V.F. Rybachenko, Sov. J. Nucl. Phys. 5, 635, (1967)

5. E.P. Wigner Phys. Rev. 98, 145, (1955)

6. M. Büttiker , Phys. Rev. B27, 6178, (1983)

7. Hauge–Stovneng, Rev. of Mod. Phys., 61, 917 , (1989)

8.- V. Okhovsky & E. Recami, Phys. Reports, 214, 339, (1992)

9.- M. Büttiker & R. Landauer, Phys. Rev. Lett. 49, 1739, (1982)

10.- D. Sokolovsky & L. Baskin, Phys. Rev., A36, 4604, (1987)

11.- J. R. Barker, Phys. 134B, 31, 22, (1985)