UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

PROCESOS MARKOVIANOS DE DECISION
(APLICACION A POLITICAS DE MANTENIMIENTO)

TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
LICENCIADO EN MATEMATICAS
APLICADAS Y COMPUTACION
P R E S E N T A

NIELS OMAR GARCIA ESPINOSA

ACATLAN, EDO. DE MEXICO 1993

I N D I C E

INTRODUCCION

En esta tesis se da a conocer una técnica más dentro de las muchas que existen en la rama de los modelos matemáticos: LOS PROCESOS MARKOVIANOS DE DECISION. Si bien esta técnica fue desarrollada con anterioridad, resultaba muy laboriosa por la necesidad de tener conocimientos básicos de procesos estocásticos y de contar con herramientas de computación especialmente dedicadas y a que los cálculos que implica requieren de un número considerable de operaciones.

Con este trabajo se pretende dar una respuesta a ambos problemas: por un lado se enuncia en forma breve y sencilla la teoría de los procesos markovianos aunados al análisis de decisiones y a la optimización, y por otra parte, se provee de una metodología sistemática y un programa de cómputo interactivo para resolver los problemas con rapidez.

La primera parte de este trabajo comprende el marco teórico en donde se exponen las condiciones bajo las cuales se definirá el problema a resolver. En el capitulo II, se expresa la Teoría de las Cadenas de Markov, en la cual se sustenta el modelo que se va proponer.

El capitulo III explica la metodología para la obtención de los datos, la identificación del modelo, su planteamiento especifico y su solución. Finalmente en el capitulo IV se efectúa una aplicación de Simulación para encontrar otras alternativas de solución al problema y así poder realizar una comparación con la solución que se obtuvo del modelo de decisión markoviana y hacer un análisis de las posibles decisiones.

C A P I T U L O I.

I. MARCO TEORICO

1.1 LA INFORMATICA EN LA ACTUALIDAD.

En este momento en el que nos aproximamos al siglo XXI, se ha podido observar como la informática ha evolucionado considerablemente; si bien hace 30 años el poder realizar un proceso o resolver un problema determinado implicaba por una parte, altos costos de operación así como también tiempos excesivos, este problema se redujo notablemente ya que en materia de computación, se fue trabajando muy fuerte y se empezaron a desarrollar nuevos equipos (hardware) y además en el aspecto de software, surgieron nuevos lenguajes haciendo posible que la aplicación de la informática creciera.

De esta manera el número de personas que tuvieron algo que ver con la computación creció, y con la llegada de las microcomputadoras se resolvieron varios problemas como lograr menor tiempo de operación y menores costos.

Un ejemplo de esto, es que hoy en día con tan sólo una tarjeta bancaria (que contiene en el reverso una cinta magnética), se pueden hacer varias operaciones como una disposición de dinero en efectivo, realizar depósitos a cuenta de cheques y otras operaciones; simplificando el trabajo, disminuyendo costos y tiempo para el client e. Por otro lado al banco le permite ofrecer a su clientela una diversidad de servicios, los cuales le permiten competir mejor en el sistema bancario, especialmente ahora que se ha dado la reprivatización.

La informática ha evolucionado y como se ha visto, un campo en el cual juega un papel determinante es en el sistema bancario, ya que en éste el volumen de información que se maneja es grande y sería muy difícil de hacer esto sin la ayuda de la informática.

1.2 UNA INSTITUCION BANCARIA Y SU RELACION CON EL BANCO DE MEXICO.

En el sistema bancario en México, existe una institución encargada de regular las operaciones de los bancos que operan en el país: el Banco de México. Una de sus funciones es llevar a cabo la compensación bancaria, de la cual se hablará posteriormente.

Una de las instituciones vigilada por el Banco de México (Banxico), es el Multibanco Mercantil de México S.N.C.; dicha institución actualmente se encuentra ubicada a nivel nacional dentro de los diez primeros bancos. Para poder seguir alcanzando una mejor posición en el sistema bancario es necesario que cada vez se haga una mejor planeación de los recursos con que se cuentan y esto traerá como consecuencia la reducción de gastos, maximización de las utilidades así como el rendimiento del personal y del equipo.

1.3 BREVE DESCRIPCION DE LA INSTITUCION.

El Multibanco Mercantil de México S.N.C. actualmente se compone de: Una oficina matriz, un centro operativo, y las sucursales fóraneas, metropolitanas y zona conurbada, siendo un total de 92.

1.4 LA GERENCIA DE CHEQUES Y COBRO INMEDIATO.

El objetivo de esta área consiste en realizar el cobro de documentos (cheques) que son a favor de los clientes del banco o bien son directamente para la institución (Multibanco Mercantil de México S.N.C.), pero dichos documentos son a cargo de otros bancos .

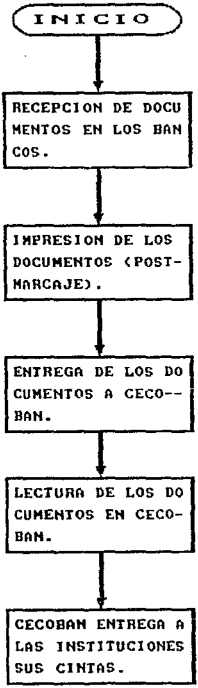
1.5 EL PROCESO DE COMPENSACION DE CHEQUES.

El Banco de México se encarga de efectuar este proceso a través de su Centro de Cómputo Bancario (CECOBAN), de la siguiente forma:

En la primera etapa se procesan los cheques que se reciben durante el día en los bancos,(ver gráfica 1.5.1.). El proceso consiste en imprimir (postmarcar) a cada uno de los documentos el importe de los mismos en la parte inferior derecha, por lo general los cheques ya vienen con la clave del banco al que pertenecen, y en su defecto será necesario realizar la impresion de ésta (premarcaje). Dicho proceso se hace con un equipo de postmarcaje, el cual se encarga de imprimir los cheques con una cinta magnética.

Una vez que los documentos han sido postmarcados éstos se envían a CECOBAN, aquí son leídos por una máquina lectora de caracteres magnéticos; la cual va separando los cheques por banco así como leyendo su importe. Una vez terminado este proceso se efectúa la compensación, así el Banco de México hace las operaciones necesarias en la cuenta de cada banco actualizándolas con el importe total de los documentos que se presentaron en el día, para que al día siguiente los bancos puedan disponer de su saldo y ocuparlos para sus operaciones.

PRIMERA ETAPA DE COMPENSACION DE DOCUMENTOS.



GRAFICA 1.5.1

En la segunda etapa se tienen los llamados cheques de la Cámara Tradicional,conocidos así en el medio bancario, aunque también se conoce como proceso semiautomatizado, en esta etapa tenemos los documentos que tienen un valor superior a los $9,999,999,999. ya que dentro de la impresión al documento (postmarcaje) sólo es posible imprimir 10 digitos, entonces, estos documentos se canalizan a través del proceso semiautomatizado,(ver gráfica 1.5.2.).

Este proceso consiste en:

1.- Se separan los cheques por Banco.

2.- Se suman los cheques.

3.- Se envian en un sobre con el número del banco que está presentando estos documentos, así como al banco al que van dirigidos.

4.- Se relacionan en la forma proceso semiautomatizado de cheques.

5.- Una vez relacionados los sobres, se necesita hacer un volante por cada sobre, al cual se le imprime una clave de reconocimiento del proceso, la clave del banco al que se le presenta, el número de documentos y el total del valor de los mismos. Al final se saca un volante en donde se imprimen la clave del banco que está presentando los cheques, el total de los mismos y su importe global.

6.- Los documentos son enviados a CECOBAN, para que ahí se haga el intercambio de documentos entre los bancos.

CECOBAN se queda con los volantes de todos los bancos para que pueda hacer los asientos contables correspondientes en la cuenta de cada banco terminando está etapa.

Ya terminado el proceso de lectura en CECOBAN, se procede a entregar a los bancos los cheques a su cargo, junto con una cinta magnética de cómputo, para que cada banco actualice los estados de cuenta de sus clientes; o en su caso

SEGUNDA ETAPA DE COMPENSACION
(PROCESO SEMIAUTOMATIZADO)

GRAFICA 1.5.2

verificar la validez del documento, para que sea devuelto, la devolución de un documento puede ser por varias causas, una muy frecuente es la falta de fondos del documento, otras pueden por no tener firma el documento, documento mal endosado, etc.

En CECOBAN también puede ocurrir que no todos los documentos pueden ser leidos, ya que en algunas ocasiones llegan mutilados o con un marcaje defectuoso, entonces se procede a la devolución al banco que lo presentó.

1.6 FUNCIONAMIENTO DE LA GERENCIA DE CHEQUES Y COBRO INMEDIATO.

Para realizar su proceso se hacen dos recepciones, conocidas como "cortes", el primero empieza a las 13:00 horas y termina a las 14:15, y el segundo inicia de las 15:30 a las 17:30 horas.

Los documentos que se reciben en el departamento se separan en compensables y no compensables; los primeros son cheques a cargo de otros bancos, captados a través de los distintos medios con que se cuentan en el banco, como las sucursales.

Los cheques no compensables son aquellos documentos que son exclusivamente del Banco de México y que se les denominan cheques de las tesorería, estos documentos tienen la característica de que ya vienen con el importe impreso (postmarcaje). Ahora bien una vez separados los documentos se inicia el proceso con los cheques compensables, enviandose Cecoban para su trámite.

Conforme se van recibiendo los documentos compensables, se les reparten a cada operador un paquete de documentos que en el medio bancario se denomina "lote" y que contiene aproximadamente 200 documentos; el operador los coloca en la máquina postmarcadora y empieza a operar documento por documento, marcando el importe del valor del cheque y así sucesivamente hasta terminar con el "lote", si en la operación de los documentos alguno de éstos carece de la clave del banco al que pertenecen, el operador deberá de marcarla en la máquina para su impresión. Una vez finalizado el proceso de postmarcaje del lote , se procede a sacar un subtotal que refleja el importe de los documentos, y si coincide con el total enviado por la sucursal o bien por el total compuesto por varias sucursales que componen el "lote", entonces, se saca un volante llamado "volante lote", el cuál contiene el importe total del lote.

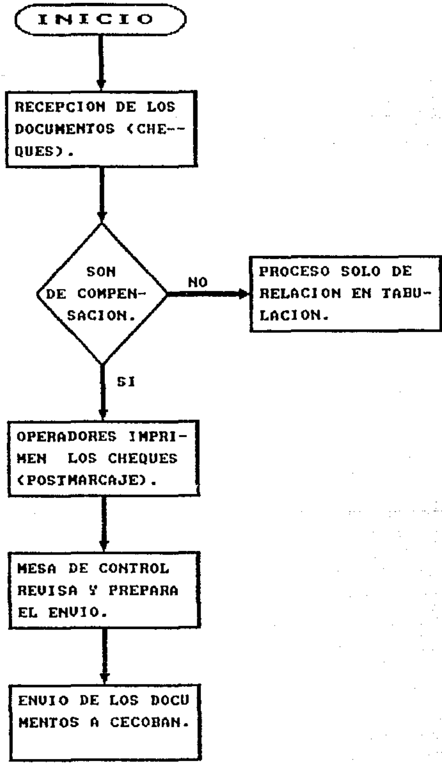
Cuando los lotes se han terminado éstos pasan a una mesa de control , aquí los "lotes" son revisados en su premarcaje y postmarcaje, corrigiendo los documentos mutilados, y mal postmarcados o premarcados. Posteriormente los lotes se colocan en las cajas portadoras las cuales tienen una capacidad de 15 "lotes" formando lo que se designa como "remesa" en el medio bancario, a la que se le antepone un volante-control, llamado "volante remesa".

Cada "remesa" debe ir con una bolsa de plástico transparente conteniendo; en primer término, la "carta remesa", que registra los importes de los "lotes", y el importe total de la "remesa" , en segundo término las tabulaciones de los "lotes", llamadas a las tabulaciones de las máquinas postmarcadoras, ver gráfica 1.6.1.

Una vez finalizado el proceso de compensación de cheques compensables, se procede a realizar la operación de los no compensables, y consiste en ir sumando estos en la máquina en la máquina postmarcadora, ya que también puede usarse como sumadora.

En esta etapa los documentos se suman uno a uno, formando "lotes" de 200 cheques aproximadamente, una vez que se han terminado de sumar, se imprimen los los volantes correspondientes con el total de cada "lote", se colocan en la caja portadora, así como su bolsa de plástico con su "carta remesa" donde se registran los importes de los "lotes", agregandose las tabulaciones de éstos, para enviar el movimiento al siguiente dia.

PROCESO DE IMPRESION DE DOCUMENTOS
(P O S T M A R C A J E)



GRAFICA 1.6.1

1.7 DESCRIPCION Y CONSECUENCIAS DEL PROBLEMA.

El sistema automatizado de compensación bancaria, está regido por ciertas reglas establecidas por Cecoban. Una en la cual existe mucha atención, es el horario de entrega de los documentos postmarcados, por los bancos.

El horario bajo el cual se opera actualmente es efectuar cuatro entregas, con un intervalodeunahora. Esto es debido a que Cecoban tiene que procesar los cheques de todos los bancos, y debe hacerlo en poco tiempo, para que pueda entregar en la noche los documentos correspondientes a cada banco, junto con su cinta de movimientos, para actualizar las cuentas de sus clientes, y revisar los documentos que no presenten alguna anomalía, o en caso de no tener fondos suficientes separarlo para su devolución al siguiente día.

Un aspecto importante es mencionar que si un banco no cumple con los horarios establecidos para la entrega, se les aplica una multa por cada documento presentado en esa entrega, aunque también puede llegar a suceder el caso de entregar los cheques demasiado tarde (aproximadamente 30 minutos después del horario), provocando que en Cecoban no se les admitan los documentos y se queden sin compensar causando improductivos para los bancos.

Por consiguiente, las instituciones deben contar con un equipo de postmarcaje que les permita hacer el proceso lo mejor posible, para que sus fallas sean mínimas, evitando una baja en la producción de documentos .

En Multibanco Mercantil de México S.N.C., el equipo que se tiene para postamarcar sufre de muchas fallas, ocasionando entregas retardadas y multas en Cecoban, perjudicando a la a la institución. Por lo tanto, resulta necesario contar con un equipo en condiciones adecuadas para el proceso, de esta manera se reducen los costos por mantenimiento y multas, ocasionadas por las entregas retrasadas. Resulta importante aplicar políticas que ayuden a prevenir fallas constantes y provoquen un deterioro en el equipo.

C A P I T U L O II.

II. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE DECISION MARKOVIANA.

En esta sección se detallaran algunos conceptos que son importantes para poder comprender este trabajo, el cual tiene sus fundamentos en los Procesos de Markov, conocidos también como procesos " sin memoria ", es decir, el estado actual depende solo del estado pasado inmediato, cabe hacer mención que estos procesos son bastante comunes, por ejemplo:

Podemos tomar uno sencillo como lo es el de la caminata aleatoria en el cual suponemos una determinada particula que se mueve a lo largo de los números enteros, de esta forma la Cadena de Markov nos describe que la partícula estará en x, sin importar cómo se llegó ahí, y que va al estado y con una probabilidad (f(y-x)).

Las series markovianas reciben el nombre de " Cadenas de Markov ", y mantienen el espacio de estados y tiempo en forma discreta. Por otro lado, los procesos de markov forman parte de los procesos estocásticos, siendo estos un proceso en general en donde el espacio de estados y el de tiempo son continuos.

Un proceso estocástico (aleatorio) es aquel sistema que a través del tiempo está expuesto a variaciones del azar .

Estos sistemas estan compuestos por un grupo de variables aleatorias (Xt), que toma valores de un conjunto "S", conocido como espacio de los estados y donde t es un punto en el espacio T llamado espacio paramétrico.

Ahora bien la variable Xt puede tomar distintos valores conocidos como ESTADOS, y sus cambios se llaman TRANSICIONES.

2.1 CADENAS DE MARKOV.

Primeramente se mencionará que una cadena de Markov se puede analizar, en base a 3 herramientas :

i) Probabilidad : Este aspecto nos permite representar directamente a las Cadenas de Markov con espacio de estados infinito.

ii) Algebra Lineal: De este recurso se pueden analizar las Cadenas de Markov, tomando como base la Teoría de Vectores y Valores Característicos (propios), lo que conduce a generar métodos prácticos para la obtención de resultados.

iii) Teoría de Gráficas: Desde este punto de vista la Teoría de Gráficas proporciona en el caso en que los estados sean finitos representarlos en una forma muy sencilla ver(2.8.5).

Definición. Sea Xn una variable aleatoria independiente con n>= 0, que es un buen modelo para los sistemas de experimentos repetidos en donde los estados futuros del sistema son independientes de los estados pasados y presentes,"sin embargo ,aunque en la práctica la mayoría de los sistemas presentan influencia del pasado y presente en el futuro, se establecen restricciones que permitan la aplicación de modelos de resolución sencilla "(1).

Los sistemas que presentan la propiedad de que dado el estado presente los estados pasados no influyen en el futuro, "a esta propiedad se le llama Propiedad de Markov, y los sistemas con esta característica se llaman Cadenas de Markov "(2). La propiedad de Markov se define formalmente como:

Sea Xn ,n>=0, un proceso estocástico con espacio de estados S discreto y espacio paramétrico " T ".

$$P(X_{n+1}=x_{n+1}/X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n) = P(X_{n+1}=X_{n+1}/X_n)$$

Otra forma de escritura es:

Sea $P(x,y) = P(X_{n=1}=y/X_n=x)$; que expresa la probabilidad de transición del estado "x" al estado "y",en una unidad de tiempo.

1.-Procesos Estocásticos con Aplicaciones.González Videgaray Ma.del C. Acatlán Edo.Mex.1985.p.52.

2.-Op.Cit.p.52.1985.

2.2 ESTACIONARIDAD.

Esta característica se deriva del hecho de que un proceso tiende o no a estabilizar su distribución de probabilidad a largo plazo, si dicha distribución permanece estable o no en un cierto tiempo finito, así como también si depende o no del estado inicial del proceso.

Definición: Se dice que X_t, $t \in R$ es estrictamente estacionario si y solo si :

$\forall \; t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n \in R; \; \forall \rho \in R$

"la función F se conserva en una traslación en el tiempo ;es decir:

$F(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = F(X_{t_0+\rho}, \ldots, X_{t_n+\rho})$

De donde resulta que $\forall \rho \in R$
$X_{t_i}, X_{t_i+\rho}$ tienen la misma función de distrubución."(3)

Para poder entender un poco más el concepto de estacionaridad, enfoquémoslo desde un punto de vista más práctico; diremos por ejemplo que: se lanzan al mercado tres tipos de marcas de café, al principio la demanda va a estar bastante alternada para cada una de las marcas, pero con el tiempo el cliente ira eligiendo la que más le haya agradado y entonces veremos como el proceso de la demanda de las tres marcas tenderá a estabilizarse, es decir, que los consumidores se iran con la marca que mayor satisfacción les de, mientras que las otras tendrán mucho menor demanda, pero en general los consumidores seguirán con una sola marca.

3.-Op. Cit. pp. 21,22. 1985.

2.2.1. RELACIONES DE INDEPENDENCIA ESTOCASTICA.

Debido a las relaciones existentes entre las variables aleatorias (X_t), $t \in T$, en los procesos estocásticos pueden distinguirse dichas relaciones especificas por la ley de probabilidades de las n-variables, si

$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ definida para toda $i \in [1,n]$, para toda $t_i \in T$. son independientes, se dice que el proceso tiene incrementos independientes.

Nota 1:

a) "Si to, el menor indice de T, forman parte de la familia supóngase que:

X_{t_0}, $X_{t_1}-X_{t_0}, X_{t_2}-X_{t}; \ldots X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$.

son variables aleatorias independientes.

b) Si X_t, $t \in T$ es un proceso de incrementos independientes, la variable aleatoria.

$X_{t_n} = (X_{t_{n-1}}-X_{t_{n-2}}) + (X_{t_n}-X_{t_{n-1}}) + \ldots + (X_{t_1}-X_{t_0}) + X_{t_0}$

es una suma de variables aleatorias independientes". (4)

2.3. FUNCION DE TRANSICION Y DISTRIBUCION INICIAL.

Sea X_n, $n \geq 0$, una cadena de Markov con espacio de estados S. La función de transición $P(x,y)$, $x \in S$, $y \in S$ está definida por:

$$P(x,y) = P(X_1=y/X_0=x) \quad x,y \in S. \quad \ldots (2.3.1.)$$

" Y " es llamada función de transición de un paso de la cadena y representa la probabilidad de pasar del estado x al estado "y" en un paso. Se cumple que:

$$P(x,y) >= 0 \quad x,y \in S \ldots (2.3.2.)$$

y

$$\sum_{Y} P(x,y) = 1 \quad x \in S \quad \ldots (2.3.3.)$$

4.- Op. Cit. p. 56. 1985

"Dado que la Cadena de Markov tiene probabilidades homogéneas en el tiempo, es decir, las probabilidades se manejan de manera constante a través del tiempo, se observa que:

$$P\ (X_{n+1}=y/X_n=x) = P\ (x,y),\quad n \geq 1 \quad ...(2.3.4.)$$

Se sigue de la propiedad de Markov que:

$$P\ (X_{n+1}=y/X_o=x_o, ...X_{n-1}=x_{n-1}, X_n=x) = P\ (x,y) \quad ...(2.3.5.)$$

En otras palabras si la Cadena de Markov está en el estado x al tiempo n , entonces, sin importar como se llegó a x, tiene probabilidad P(x,y) de estar en el estado y en el siguiente paso.

Por esta razón los valores P (x,y) se llaman probabilidades de transición de un paso en la Cadena de Markov.

La función $\Pi_o(x)$, $x \in S$, definida por

$$\Pi_o(x) = P\ (X_o=x),\ x \in S \ ...\ (2.3.6.)$$

recibe el nombre de Distribución Inicial de la Cadena. Es tal que :

$$\Pi_o(x) \geq 0 \qquad ...\ (2.3.7.)$$

$$\sum_x \Pi_o(x) = 1 \qquad (2.3.8)$$

La distribución conjunta de X_o, ..., X_n, puede expresarse fácilmente en términos de la función de trancisión y de la distribución inicial". (5)

Así tenemos:

$$P(X_o=x_o, X_1=x_1, X_2=x_2) = P(X_o=x_o, X_1=x_1)\ P(X_2=x_2/X_o=x_o, X_1=x_1)$$
$$= \Pi_o(X_o) P(x_o, x_1)\ P(X_2=x_2/X_o=x_o, X_1=x_1)$$

"Como $X_n, n\geq o$, satisface la propiedad de Markov y tiene probabilidades de transición homogéneas en el tiempo, entonces:

5.- Op. Cit. p.57. 1985.

$$P(X_2=x_2/X_0=x_0, X_1=x_1) = P(X_2=x_2/X_1=x_1)$$
$$= P(X_1=x_2/X_0=x_1)$$
$$= P(X_1, X_2)$$

de donde,

$$P(X_0=x_0, X_1=x_1, X_2=x_2) = \Pi_0(x_0)\ P(x_0, x_1)\ P(x_1, x_2)$$

Por inducción se observa que:

$$P(X_0=x_0, \ldots, X_n=x_n) = \Pi_0(x_0)\ P(x_0, x_1) \ldots P(x_{n-1}, x_n) \quad \ldots(2.3.9)$$

. Por conveniencia, generalmente se invierte el orden de las definiciones. Se dice que $P(x, y)$, $x \in S$, $y \in S$. es una función de transición si satisface (2.3.2.) y (2.3.3.) y se dice que $\Pi_0(x)$, $x \in S$, es una distribución inicial si satisface (2.3.7.) y (2.3.8.). Puede demostrarse que también estas variables aleatorias forman una Cadena de Markov con función de transición P y distribución inicial Π_0". (6)

6.- Op.Cit. p.58. 1985.

2.4 FUNCION DE TRANSICION EN N PASOS.

"Sea X_n, $n \geq 0$, es una cadena de Markov en S, con función de transición P. Si al tiempo n, la cadena se encuentra en el estado x, puede calcularse la probabilidad de que, dentro de m pasos, se encuentre en X_{n+m} como:" (7).

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} = X_{n+m} / X_o = x_o, \ldots, X_n = x_n) =$$

$$P(X_n, X_{n+1}) \ldots P(X_{n+m-1}, n+m) \quad \ldots \quad (2.4.1)$$

Como:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} = X_{n+m} / X_o = x_o, \ldots X_n / x_n) =$$

$$\frac{P(X_o = x_o, \ldots, X_{n+m} = x_{n+m})}{P(X_o = x_o, \ldots, X_n = x_n)}$$

Por (2.3.8), tenemos:

$$\frac{\Pi_o (X_o) \ P(X_o, X_1) \ldots \ P(X_{n+m}, X_{n+m})}{\Pi_o (X_o) \ P(X_o, X_1) \ldots \ P(X_{n-1}, X_n)}$$

$$= P(X_n, X_{n+1}) \ldots P(X_{n+m-n}, X_{n+m})$$

Así (2.4.1) se cumple:

Podemos reescribir (2.4.1.) como:

$$P(X_{n+1} = Y_1, \ldots, X_{n+m} = Y_m / X_o = x_o, \ldots X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x)$$

$$= P(X, Y) \ P(Y_1, Y_2) \ldots P(Y_{m-1}, Y_m)$$

Como estamos tratando con una Cadena de Markov nos interesa saber como llega el sistema de X a Y en n pasos, lo

7.- Op. Cit. p.66. 1985

que importa es la probabilidad de que lo que haga por cualquier camino posible.

"Sean entonces $A_0, \ldots, A_{n-1}$ subconjuntos de S que representan los posibles valores que pueden tomar $X_0, \ldots, X_{n-1}$; y sean $B_1, \ldots, B_m$ subconjuntos de S que representan los posibles valores de $X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}$. De donde pueden formularse las siguientes ecuaciones:

$$P(X_{n+1}=Y_1, \ldots, X_{n+m}=Y_m \;/\; X_0 \in A_0, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n=x)$$

$$= P(X, Y_1)\; P(Y_1, Y_2) \ldots P(Y_{m-1}, Y_m) \quad \ldots (2.4.2)$$

$$P(X_{n+1} \in B_1, \ldots, X_{n+m} \in B_m \;/\; X_0 \in A_0, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n=x)$$

$$= \sum_{y_1 \in B_1} \cdots \sum_{y_m \in B_m} P(X, X_1) \quad P(Y_1, Y_2) \ldots P(Y_{m-1}, Y_m) \quad \ldots (2.4.3)$$

Entonces, la función de transición en m pasos P (x, y), es decir, la probabilidad de pasar del estado x al y en n pasos, está definida por:

$$P\ (X, Y) = \sum \cdots \sum P(x, y) \quad P(x, y_1) \quad P(y_1, y_2) \ldots P(y_{m-2}, y_{m-1})\; P(y_{m-1}, y) \quad \ldots (2.4.4)$$

Observese que se toman en cuenta todos los posibles caminos para ir de x a y en m pasos.

Si $m \geq 2$, con $B_1 = \ldots = B_{m-1} = S$ y $B_m = (y)$ ... (2.4.5.)

$$P(X_{n+m}=y \;/ X_0 \in A_0, \ldots, X_{n-1}, X_n = x) = P\ (x, y) \quad \ldots (2.4.6.)$$

Si $A_0 = \ldots = A_{n-1} = S$

$$P\ (X_{n+m} = y \;/\; X_n = x) = P\ (x, y)$$

De (2.4.5.) obtenemos:

$$P(X_{n+m}=y \;/\; X_0=x, X_n=z) = P\ (z, y) \quad \ldots (2.4.7)$$

Por otra parte:

$$P\ (x, y) = P(X_{n+m}=y \;/\; X_0=x)$$

$$= \sum_{z} P(X_n=z \,/\, X_o=x)\; P(X_{n+m}=y \,/\, X_O=x,\; X_n=z)$$

$$= \sum_{z} P\;(x,z)\; P(X_{n+m}=y \,/\, X_O=x, X_n=z)$$

Y de (2.4.6) se concluye:

$$P \quad (x,y) = \sum_{z} P \quad (x,z) \; P \quad (z,y) \; \ldots \; (2.4.8.)$$

Explicando esto significa que pasar el sistema de un estado x a un estado y en n+m pasos, se localizará en algún estado cualquiera z al tiempo n, de donde llegará a y en m pasos. "Estas ecuaciones se conocen como Ecuaciones de Chapman - Kolmogorov". (8)

2.5. TIEMPOS DE ALCANCE.

"Sea A un subconjunto de S. El tiempo de alcance o tiempo de llegada T de A está definido como:

$$T_A = \min\,(n > 0 : X_n \in A)$$

ý

$$T_A = \;(\text{infinito}),\; \text{si } X \notin A, \nabla\, n > 0$$

Es decir, T_A es el primer tiempo positivo en que la Cadena de Markov llega a A". (9)

Podemos tener una ecuación de los tiempos de alcance

$$P \quad (x,y) = \sum_{z} P_x\,(T_y=m)\; P \quad (x,y),\; n \geq 1 \; \ldots \; (2.5.1.)$$

Esto significa la probabilidad de que se encuentre la Cadena en x, y se vaya a encontrar en "y" dentro de "n" pasos como la probabilidad de que alcance "y " en "m" pasos por primera vez, y regrese a "y" en los restantes n-m pasos.

8.- Op. Cit. p.69. 1985
9.- Op. Cit. p.70. 1985

2.6. MATRIZ DE TRANSICION.

Sea ahora un espacio de estados S finito, es decir, S=0,1,2,...,d. En este caso puede pensarse en P como la matriz de transición con d+1 renglones y columnas, dada por:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d \end{array} & \left| \begin{array}{cccc} P(0,0) & P(0,1) & \dots & P(0,d) \\ P(1,0) & P(1,1) & \dots & P(1,d) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ P(d,o) & P(d,t) & \dots & P(d,d) \end{array} \right| \end{array}$$

. Como es una matriz de probabilidades, todos los elementos por lo tanto son no negativos; una ventaja de representar en forma matricial es que nos ayuda a ver las relaciones entre los estados, lo cual será muy útil al tratar con la teoría de gráficas.

Como P es la matriz de transición en m pasos. La expresión (2.4.8) con m=n=1 se convierte en:

$$P \quad (x,y) = \sum_{z} P\ (x,z)\ P\ (z,y)$$

$$P\ (x,y) = \sum_{z} P(x,y)\ P(z,y)$$

Si m=1 en (2.4.8.) podemos decir que la matriz de transición en n pasos P , es la n-ésima potencia de P.

"Una distribución inicial Π_o puede pensarse como el vector renglón de dimensión d+1, donde cada elemento representa la probabilidad inicial de la Cadena de encontrarse en cada uno de los estados. Este vector cumple con las mismas propiedades de P:

Es no negativo y la suma de sus elementos es 1..

Si Π_n denota el vector renglón de dimensión (d+1), que representa la distribución de probabilidades en el tiempo n". (10).

9.- Op. Cit. p.70 1985
10.-Op. Cit. p.72. 1985

$\Pi_n = [P(X_n=0), \ldots, P(X_n=d)]$

Podemos escribir:

$$\Pi_n=\Pi_0 P \qquad \ldots(2.6.2.)$$

donde Π_0 es: la distribución inicial de la Cadena de Markov, como:

$$P(X_n=y) = \sum_{m=1} \Pi_0(x)\ P\ (x,y) \qquad \ldots(2.6.3.)$$

De aqui un método para calcular la distribución de X_n, puede encontrarse utilizando una ecuación de recurrencia:

$$P\ (X_{n+1}=y) = \sum P(X_n=x)\ P(x,y) \quad \ldots(2.6.4.)$$

de (2.6.3.) tenemos:

$$\Pi_{n+1} = \Pi_n\ P \quad \ldots(2.6.5.)$$

2.7. TIEMPOS DE RECURRENCIA.

Con frecuencia, deseamos conocer el número de transiciones llevadas a cabo por el proceso que es ir del estado x al estado y por primera vez. Al intervalo de tiempo se le denomina Tiempó de Alcance o Tiempo del Primer Paso, para ir del estado x al estado y. Si sucede que x=y, entonces el tiempo es calculado en base al número de transiciones hasta que el proceso regrese al estado x (estado inicial). En este caso el tiempo del primer paso se conoce como Tiempo de Recurrencia para el estado x.

Como los Tiempos de Alcance sonvariables, por consiguiente están asociadas a distribuciones de probabilidad Así como de las probabilidades de transición dependen las distribuciones de probabilidad, llegamos a:

$$P_x(T_y=n)$$

que no es más que la probabilidad de llegar de un estado x a un estado y el tiempo dado sea n.

2.8 ESTADOS TRANSITORIOS Y RECURRENTES.

a) ESTADO TRANSITORIO.

Decimos que "x" es un estado transitorio si una vez que el proceso llega a él, existe una probabilidad estrictamente positiva de que nunca regrese.

$$\rho_{xx} = P_x(T_x < \text{infinito}) < 1$$

$$\text{Por lo tanto } 1 - \rho_{xx} > 0$$

El estado transitorio se puede ver al instalar una máquina nueva ésta una vez utilizada ya no podrá volver a su estado anterior.

b) ESTADO RECURRENTE Y ESTADO PERIODICO

Decimos que "x" es un estado recurrente si una vez que el proceso se encuentre en el estado "x", regresa con certeza al estado "x". Un conjunto de estados periódicos con longitud de periodo "p", puede reconocerse por matrices de transición iguales en potencias iguales en módulo "p".

Un estado recurrente se puede ubicar en este caso con las máquinas postmarcadoras cundo se rompe una de sus teclas, se repara y vuelve a funcionar. Pero debido al ritmo de trabajo es probable que la descompostura se presente otra vez y regrese al estado anterior. Por otra parte un estado periódico refleja la frecuencia con que las máquinas regresan a un esatdo.

c) ESTADO ABSORBENTE

Tenemos que un estado absorbente es tan solo un caso especial de estado recurrente; así un estado es absorbente si una vez que el proceso llega a él, no lo deja jamás.

2.9 ANALISIS DEL ESPACIO DE ESTADOS

Si son (x,y) dos estados los cuales no necesariamente son distintos." Se dice que "x" lleva a "y" si P(x,y) >0, ver gráfica (2.9.1).

En esta gráfica el estado 4 lleva el estado 1.

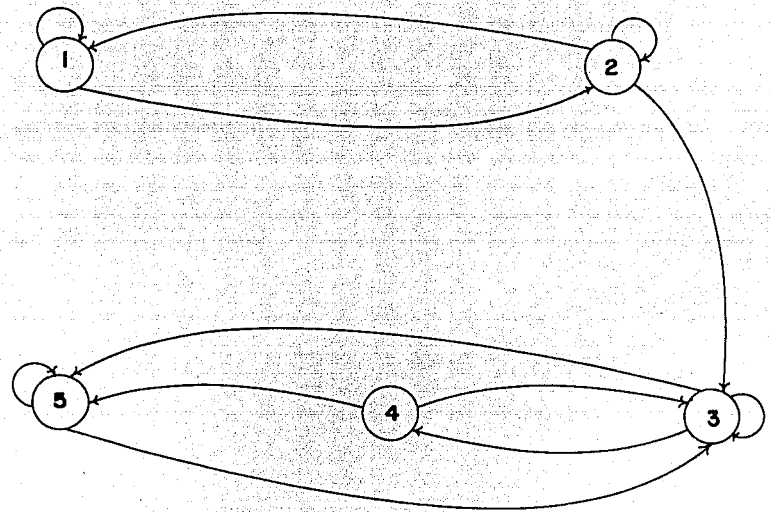
"Se dice que dos estados (x,y) se comunican si "x" lleva a "y", y además, "y" lleva a "x". Esta relación tiene las siguientes propiedades:

a) Reflexibidad: "x" se comunica consigo mismo.

b) Simetría: si "x" comunica con "y", entonces "y" comunica con "x".

c) Transitividad: Si "x" comunica con "y", y "y" comunica "z", entonces "x" comunica con "z"." (11)

11.- Op. Cit. p.83 1985.



GRAFICA 2.9.1

2.10. APLICACION DE LA TEORIA DE GRAFICAS.

Podemos clasificar los estados, usando la teoría de gráficas véase la gráfica siguiente: (2.10.1)

En la gráfica se puede distinguir:

a) Las subgráficas conectadas ocircuitos y manejarlos con un sólo vértice.

b) El Orden por generaciones:

Gen(o) = vértices sin antecesor.

Gen(1) = vértices que al eliminar Gen(o) carecen de antecesor.

c) Gen(2) = aquellos que carezcan de antecesor al eliminar Gen (o) y Gen(1) y así sucesivamente.

Todos los nodos, las clases o subconjuntos finales o colgantes son conjuntos cerrados irreducibles finitos y por lo tanto recurrentes, si es un sólo vértice será absorbente.

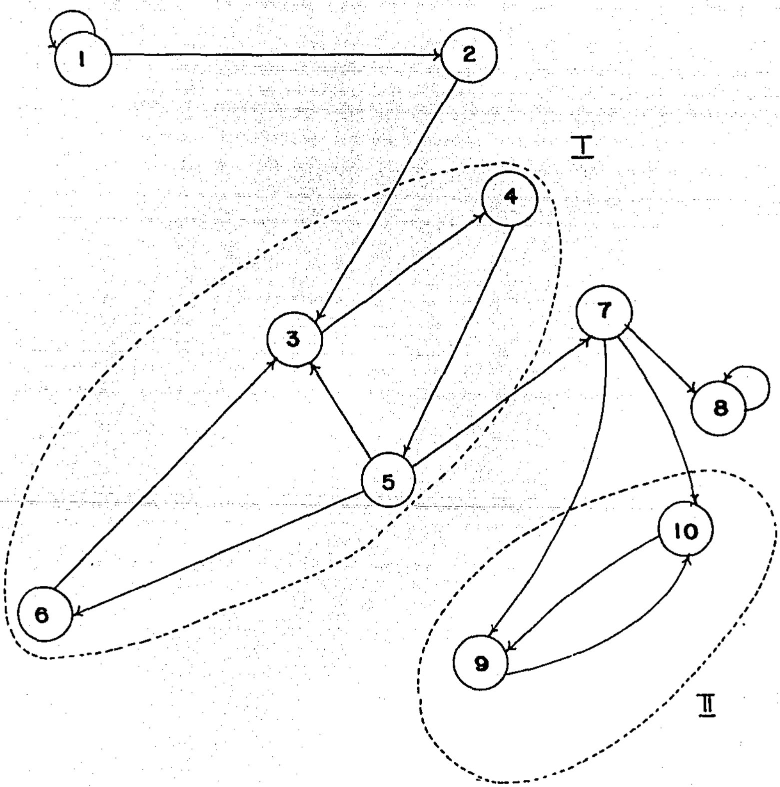
d) Los estados restantes serán transitorios.

Los estados recurrentes son: 8,9,10.

Los estados absorbentes son: 8.

Los estados periódicos son: 9,10.

Los estados transitorios son: 1,2,3,4,5,6,7.



GRAFICA 2.10.1.

2.11. EL COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LA MATRIZ DE TRANSICION.

Como consecuencia en 2.2:

"En muchos casos, al estudiar un sistema se observa que su desarrollo data de mucho tiempo atrás, entonces el sistema puede tener un cierto comportamiento límite, es decir, una distribución estable de probabilidades". (12)

2.11.1. EL COMPORTAMIENTO ASINTOTICO.

Retomando (2.6.5.) $\Pi_{n+1} = \Pi_n P$

Nos interesa determinar que es lo que pasa en el sistema después de un tiempo infinito, sobre todo, si el vector de probabilidades Π_n converge a un vector Π, ahora bien, tenemos que la convergencia está relacionada con el estado de régimen prácticamente alcanzado al cabo de un número suficientemente grande de transiciones.

De aquí resulta que dado Π_0, todo el futuro del sistema está contenido en la matriz P, por lo tanto el comportamiento asintótico del sistema dependerá de las propiedades de esta matriz.

Si existe el límite Π, se puede afirmar que deberá satisfacer las siguientes condiciones:

1.- Si Π_n tiende a un límite Π, entonces Π_{n+1} tiende hacia el mismo límite.

$$\Pi_{n+1}=\Pi_n P$$

entonces

$$\Pi=\Pi P$$

Esto es que Π es un vector propio de P por la izquierda, correspondiente al valor propio 1.

12.- Op. Cit. p.121 1985.

"Luego dicho vector propio, con la condición de ser de términos no negativos cuya suma sea 1 (normalizado), representa una distribución de probabilidad que no está afectada por una transición (no estándolo tampoco por un número cualquiera de transiciones). Una distribución de este tipo recibe el nombre de Distribución Estacionaria asociada a P". (13).

2.- "De igual modo si Π_n tiende efectivamente hacia un límite Π, puede ocurrir que dependa no sólo de P, sino también de la distribución inicial Π_o.

$$\Pi = \Pi\ P$$

En P representa el límite (si existe) de P cuando n tiende a infinito. Sin embargo, en algunos casos la distribución de probabilidad límite será independiente de la distribución inicial Π_o". (14).

2.12 ESTUDIO MATRICIAL.

El hacer la potencia n-ésima de una matriz tiene una gran importancia en el papel que juega su Espectro, que es el conjunto de los valores propios o valores característicos de la matriz.

Teorema 1. "Sea una matriz cuadrada cualquiera. Entonces cualquier valor propio (o valor característico) de la matriz A cae en al menos uno de los circulos en A_{ij} y radio $= \sum_{i=j} | A_{ij} |$

Prueba. "Sea λ un valor propio de la matriz A. Entonces, existe un vector no nulo tal que cumple con la ecuación :

$$\lambda\ x = x\ A$$

De donde se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\lambda\ x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i\ A_{ij} \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n$$

13.- Op. Cit. p.. 1985
14.- Op. Cit. p.. 1985

En particular $\lambda\ x_j = A_{jj}\ x_j + \sum_{i=j} x_j\ A_{ij}$

entonces, $\sum_{i=j} x_i\ A_{ij} = \lambda\ x_j - A_{jj}\ x_j$

$$= x_j\ (\lambda - A_{jj})$$

Tomando valores absolutos.

$|x_j|\ |\lambda - A_{jj}| = |\sum_{i=j} x_i\ A_{ij}|$

y por la desigualdad triangular.

$|x_j| \cdot |\lambda - A_{jj}| \leq \sum_{i=j} |A_{ij}\ x_i|$ ...(2.10.1)

Ahora bien, como el vector x tiene al menos una coordenada X_r de módulo máximo, puede ser normalizado

$$X = (\ X_1\ X_2\ \ldots\ X_n\ )$$

Y en este nuevo vector

$$X_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \ \ldots\ , \ n.$$

Sustituimos en (2.10.1.)

$|\lambda - A_{jj}| \leq \sum_{i=j} |A_{ij}|$

Este teorema se cumple entonces para cualquier valor propio y elementos A en los complejos. Ahora, puede aplicarse este teorema al caso especial de una matriz estocástica". (15).

Teorema 2.

Toda matriz estocástica P tiene valores propios contenidos en un círculo unitario con centro en el origen.

Demostración:

Tomemos la expresión (2.10.1) para una matriz estocástica .

15.- Op. Cit. p.129. 1985

$$|\lambda - P_{jj}| \leq \sum_{i=j} |P_{ij}|$$

Sea:

$$\sum_{j} P_{ij} = 1, \text{ entonces } \sum_{i=j} P_{ij} \leq 1$$

De donde, $|\lambda - P_{ij}| \leq 1$

Teorema 3.

Toda matriz estocástica o matriz de Markov tiene un valor propio cuyo módulo es 1 (con $\lambda = 1$)

Demostración:

Se sabe que:

$$\sum_{j=1} P_{ij} = 1, \; i = 1,2,\ldots,n$$

Por lo que:

$$P \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & P & \cdots & P \\ P & P & \cdots & P \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ P & P & \cdots & P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{vmatrix}$$

"Lo cual demuestra que 1 es un valor propio de P y que el vector de elementos iguales a la unidad es un vector propio a la derecha correspondiente a este valor". (16).

Teorema 4.

"El orden de multiplicidad del valor propio 1 es igual al número de clases recurrentes para una matriz estocásctica finita". (17).

16.- Op. Cit. p.130. 1985.
17.- Op. Cit. p.130. 1985.

Teorema 5.

"Si P es la matriz de transición de una Cadena de Markov finita, irreducible y periódica de periodo t, entonces las t-ésimas raíces de la unidad son valores propios de P, cada una de multiplicidad 1 y no existen otros valores propios de módulo 1".(18)

2.13 PROCESOS DE MARKOV Y ANALISIS DE DECISIONES.

2.13.1 INTRODUCCION.

Sea X_t una cadena de Markov, con espacio de estados $S = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \}$, es decir :

$$P (X_t = y / X_1 = x_1, \ldots , X_{t-1} = x) =$$

$$P (X_t = y / X_{t-1} = x) = P (x,y)$$

El vector de distribución de probabilidades incondicionales en el momento " t " .

$$\Pi_t = (P (X_t = x_0) , \ldots , P (X_t = x_n))$$

Donde:

$$\Pi_t = \Pi P^t$$

ó

$$\Pi_t = \Pi_{t-1} P$$

y sea Π el vector de distribución de estado estacionario tal que:

$$\Pi = \Pi P$$

Se iniciará el estudio de un ejemplo sencillo. Supóngase una máquina sometida a un uso pesado, lo cual ocasiona que se deteriore con rapidez.

La máquina se inspecciona periódicamente (al final de cada día), para evitar fallas en la producción. La condición de la máquina se clasifica en cuatro estados posibles.

18.- Op. Cit. p.130. 1985.

ESTADO	CONDICION
0	Buena
1	Operable con deterioro menor
2	Operable con deterioro mayor
3	Inoperable

Sea X_t = el estado de la máquina al final del t-ésimo día. Se tiene la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

Como ésto sería ilógico (la decisión), en la práctica es necesario tomar acciones que modifiquen esta situación. Por ejemplo puede reemplazarse la máquina cada vez que resulte inoperable.

Por supuesto, tanto el estado de la máquina como la decisión implican un cierto costo. Los costos tendrán en este ejemplo varios componentes:

COMPONENTES	
A	Costo por producción defectuosa
B	Costo de reemplazo
C	Costo por producción perdida

Supóngase que el reemplazo de la máquina tarda un día:

ESTADO	A	B	C	TOTAL
0	0	0	0	0
1	1000	0	0	1000
2	3000	0	0	3000
3	0	4000	2000	6000

El costo esperado de esta politica consistente en reemplazar la máquina es el estado 3 , se obtiene usando el vector de distribución a largo plazo el cual se obtiene de resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\Pi = \Pi\ P$$

Donde en vector Π = (2/13, 7/13, 2/13, 2/13)

Se obtiene el costo esperado a largo plazo, multiplicando cada costo por su respectiva probabilidad y sumando:

E (c) = 0 (2/13) + 1000 (7/13) + 3000 (2/13) + 6000 (2/13)
E (c) = 1,923.08.

2.14 MODELOS DE DECISION.

Aun teniendo las dos únicas acciones anteriores (no tomar acciones, reemplazar) existen otras políticas, como por ejemplo; reemplazar en los estados dos y tres, por lo que en nuestra nueva matriz sustituiríamos los renglores tres y cuatro únicamente, poniendo un " 1 " al principio y lo demás con " 0 " .

Ahora bien tenemos que calcular nuestro vector de distribución el cual lo encontraremos resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\Pi(0) = \Pi(2) + \Pi(3)$$
$$\Pi_1(1) = 7/8\ \Pi(0) + 3/4\ \Pi(1)$$
$$* \ \Pi_2(2) = 1/16\ \Pi(0) + 1/8\ \Pi(1)$$
$$* \ \Pi_3(3) = 1/16\ \Pi(0) + 1/8\ \Pi(1)$$

* Notese que son iguales.

De manera que el vector resultante es:

Π = (2/11, 7/11, 1/11, 1/11)

ESTADO	DECISION	COSTO
0	Nada	0
1	Nada	1000
2	Reemplazar	6000
3	Reemplazar	6000

El costo esperado a largo plazo será:

E (c) = 0 (2/11) + 1000 (7/11) + 6000 (1/11) + 6000 (1/11)
E (c) = 1,727.27

Otra politica posible con estas dos acciones sería reemplazar en 1, 2 y 3. En este caso se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Con π = (16/32, 14/32, 1/32, 1/32)

E (c) = 0 (16/32) + 6000 (14/32) + 6000 (1/32) + 6000 (1/32)
E (c) = 3,000.

Hasta aqui la mejor politica sería la segunda la de reemplazar en dos o tres. Ahora supóngase que puede tomarse tres decisiones:

DECISION	ACCION
1	Ninguna
2	Reparar (regresa a 1)
3	Reemplazo (regresa a 0)

Dado que hay cuatro estados y tres decisiones, podrian considerarse como posibles politicas (3^4=81), ya que son todas las ordenaciones posibles, aunque no todas serian razonables.

En general, se supondrá que se observa el sistema en el momento t = 0, 1, 2, ... y se clasifica en alguno de los estados (finitos) 0, 1, ... , m.

Sea { X_t, t = 0, 1, ... } la sucesión de estados observados.

Después de cada observación se toma una decisión de un conjunto finito de K decisiones posibles denominadas como = 1,2, ... , K

Sea $\{ \Delta_t,\ t = 0,1,2,\ldots \}$ La sucesión de decisiones reales en que se van tomando.

La política denotada por R, es una regla para tomar decisiones en cada momento y en cada estado. Si el sistema es una cadena de Markov, la política "R" puede imaginarse como una regla que prescribe la decisión:

$d_i(R)$ cuando el sistema se encuentra en el estado " i ", $i = 0,1,\ldots,M$, en cualquier momento " t " .

Entonces " R " estará formada por:

$$R = \{ d_0(R),\ d_1(R),\ \ldots\ ,\ d_M(R) \}$$

Por ejemplo, la primera política que se utilizó fue no tomar ninguna acción en cualquier estado.

$$R_a = \{ d_0(R_a) = 1,\ d_1(R_a) = 1,\ d_2(R_a) = 1,\ d_3(R_a) = 1 \}$$

La segunda política fue simplemente reemplazar en tres.

$$R_b = \{ 1,1,1,3 \}$$

Ahora bien sea dada una distribución Π_0, y una política R, el sistema forma una proceso Markoviano de decisión. Para determinar cual es la mejor política se requiere de una estructura de costos. Cuando el sistema se encuentra en el estado " i" y se toma la decisión " k " , se incurre en un costo C_{ik}. Este puede ser un costo esperado o promedio.

Si suponemos que nuestra matriz de costo será:

$$C = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 0 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ \infty & \infty & 6 \end{array} \right| \end{array} \text{(EN MILES)}$$

De aqui se puede calcular el costo promedio esperado a largo plazo por unidad de tiempo para una política R.

$$E(c) = \sum_{i=0}^{m} C_{ik}\, \Pi(i)$$

Donde $K = d_i(R)$

2.15 PROGRAMACION LINEAL Y POLITICAS OPTIMAS.

La técnica utilizada en la parte anterior es simplemente la enumeración exhaustiva de todas las políticas y puede resultar demasiado laboriosa ya que existen K^m políticas posibles, otra forma de resolver el problema es la siguiente:

Sea D la matriz de Decisiones, compuesta por "k" renglones y "n" columnas.

$$D_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{SE TOMA LA DECISION } k \text{ EN EL CASO } i. \\ 0 & \text{OTRO CASO.} \end{cases}$$

De modo que cada renglón contiene un " 1 " y (k-1) ceros. El costo esperado puede plantearse como una función lineal de las D_{ik}, sin embargo, existe el problema de que las D_{ik} no son continuas.

Pueden entonces interpretarse, las D_{ik}, como:

$$D_{ik} = P(k / i) = P(\text{tomar la decisión } k / \text{estado } i).$$

A una política de este tipo se le llama POLITICA ALEATORIZADA.

Se debe cumplir que :

$$\sum_{k=1}^{k} D_{ik} = 1 \qquad \forall\, i = 0, M \quad . . . (1)$$

$$0 \leq D_{ik} \leq 1 \qquad \begin{array}{l}\forall\, i = 0, M \quad . . . (2) \\ \forall\, k = 1, k\end{array}$$

Puede construirse una nueva variable Y_{ik}, relacionada con D_{ik} :

$$Y_{ik} = P\,(\,i \cap k\,) = P\,(\text{ estado } = i \text{ y decisión } = k\,)$$

Por lo que Y_{ik} es la probabilidad incondicional (de estado estacionario) de que el sistema se encuentre en i y se tome la decisión k.

$$Y_{ik} = P\,(i)\;P(k/i)$$
$$Y_{ik} = \Pi(i)\;D_{ik} \qquad \ldots (\,3\,)$$

Por otro lado :

$$\sum_{K=1}^{K} Y_{ik} = \sum_{K=1}^{K} \Pi\,(i)\;D_{ik}$$
$$= \Pi\,(i) \sum_{K=1}^{K} D_{ik}$$
$$= \Pi\,(i)$$

Por lo tanto :

$$D_{ik} = \frac{Y_{ik}}{\Pi\,(i)} = \frac{Y_{ik}}{\sum\limits_{K=1}^{K} Y_{ik}} \qquad \ldots (\,4\,)$$

Se utilizaran las variables Y_{ik} con las restricciones siguientes:

1) $\sum\limits_{i=0}^{M} \sum\limits_{i=1}^{K} Y_{ik} = 1$ $\qquad \| \text{ ya que } \sum\limits_{i=0}^{M} \Pi\,(i) = 1 \; \|$

2) Como $\Pi\,(j\,) = \sum\limits_{i=0}^{M} \Pi\,(i)\;\mathcal{P}_{ij} \quad \forall\, j = 0, M$

$$\sum_{K=1}^{K} Y_{jk} = \sum_{i=1}^{M}\;\sum_{i=1}^{K} Y_{ik}\;\mathcal{P}_{ij}\,(k)$$

3) No negatividad :

$Y_{ik} \geq 0\;, \qquad \forall\; i = 0, M\;, \quad \forall k = 1, k$

El costo (o ganancia) promedio esperado a largo sera:

$$E(c) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{M} \Pi(i)\ C_{ik}\ D_{ik}$$

$$E(c) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} C_{ik}\ Y_{ik}$$

El problema de programación lineal será obtener los valores de Y_{ik} para :

Min E(c)
(Ganancia = Costo negativo)

sujeto a :

1) $\sum_{i=0}^{M} \sum_{K=1}^{K} Y_{ik} = 1$

2) $\sum_{K=1}^{K} Y_{ik} - \sum_{i=0}^{M} \sum_{K=1}^{K} Y_{ik}\ \mathcal{P}_{ij}(k) = 0 \qquad \forall\ j = 0, 1, \ldots, M$

3) $Y_{ik} \geq 0 \qquad \forall i = 0, m\ ;\ \forall\ k = 1,\ k$

Este problema puede resolverse usando el método simplex, y podemos utilizar un paquete de software. La solución tendrá las siguientes características:

a) Como existen M+1 restricciones (una de las ecuaciones de (2) es linealmente dependiente), existirán M+1 variables $Y_{ik} \geq 0$.

b) Dado ésto la solución final sólo se tendra decisiones nes determinísticas, ya que D_{ik} podra tomar valores de cero y uno, con un valor de uno por cada uno de los M+1 estados.

c) Se tendrán K(M+1) variables originales, y por otra parte las dimensiones del problema pueden ser demasiado grandes.

2.16 METODO DE MEJORA DE POLITICA PARA OBTENER POLITICAS OPTIMAS.

"Este método es más eficiente y puede aplicarse aún con estados infinitos.

Siguiendo el modelo general como resultado conjunto del estado original "i" y la decisión "k" se incurre en un costo C_{ik} y el sistema se mueve al estado "j" con probabilidad $p_{ij}(k)$, si en realidad el costo depende también del estado final, puede replantearse como sigue:

Sea $q_{ij}(k)$ el costo esperado en el que se incurre cuando se parte de "i", se decide "k" y se llega a "j" en el siguiente período".(19)

$$C_{ik} = \sum_{j=0}^{m} q_{ij}(k)\ p_{ij}(k).$$

"Sea $V_i^n(R)$ el COSTO TOTAL ESPERADO de un sistema que parte del estado "i" y que se desarrolla durante "n" períodos.

Este costo se puede descomponer en:

1.- C_{ik}, el costo esperado del primer período.

2.- $\sum_{j=0}^{m} p_{ij}(k)\ V_j^{n-1}(R)$, el costo total esperado para los (n-1) períodos restantes.

$$V_i^n(R) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{m} p_{ij}(k)\ V_j^{n-1}(R)$$

Entonces:

$$V_i^1(R) = C_{ik} \quad \ldots \text{"(20)}$$

19.- Apuntes de Modelos de Decisión con procesos estocásticos I. Prof. Ma. del Carmen González Videgaray. 1990

20.-Op. Cit. 1990

Por otro lado, el costo promedio esperado a largo plazo por unidad de tiempo, se puede expresar como:

$$g(R) = \sum_{i=0}^{m} \Pi(i)\; C_{ik}$$

De aquí:

$$V_i^n(R) \cong ng(R)$$

"Entonces $V_i^n(R)$ se puede obtener agregando un factor de corrección que contenga el efecto del estado inicial "i", por lo que:

$$V_i^n(R) = ng(R) + V_i(R) \qquad \ldots (1)$$

donde $V_i(R)$ es el efecto sobre el costo de iniciar en el estado "i".

Si en lugar de iniciar en el estado "i" se inicia en "j" el costo total será:

$$V_j^n(R) = ng(R) + V_j(R) \qquad \ldots (2)$$

Restando (2) de (1):

$$V_i^n(R) - V_j^n(R) = V_i(R) - V_j(R) \qquad \ldots (3)$$

De modo que $V_i(R) - V_j(R)$ es la medida del efecto de partir del estado "i" en lugar de "j" sobre el COSTO TOTAL".(21)

Sustituyendo (1) y (2) en la ecuación recursiva tenemos:

21.- Op. Cit.1990.

$$ng(R) + V_i(R) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{m} \rho_{ij} (R) [(n-1) g(R) + V_j (R)]$$

"Reordenando tenemos la siguiente Ecuación del Algoritmo:

$$g(R) + V_i(R) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{m} \rho_{ij} (k) V_j (R)$$

$$\forall_i = 0, m$$

Se tendran (m + 1) ecuaciones con (m + 2) incógnitas, por convención se hace:

$$V_m(R) = 0$$

* Nota: Obsérvese que los valores de las $V_i(R)$ varian de acuerdo al valor arbitrario, por lo que deberá analizarse su valor comparativo y no el absoluto ".(22)

Se desea obtener la politica R que minimice g(R). Esto puede hacerse eligiendo una politica arbitrária R_1 y calculando los valores de las incógnitas. A continuación se construye una nueva politica R_2 que genere un costo menor, y así sucesivamente hasta encontrar 2 politicas idénticas en iteraciones sucesivas:

A L G O R I T M O

Paso 1) "DETERMINACION DEL VALOR:

Para una politic a ar b itrá r ia R_1, usar $\rho_{ij}(K_1)$, C_{ik}, $V_n(R_1) = 0$ para resolver las (m + 1) ecuaciones.

Paso 2) MEJORAMIENTO DE LA POLITICA:

Utilizando los valores actuales de $V_i(R)$, encontrar la politica alternativa R_2 tal que, para cada estado "i", $d_i(R_2) = K_2$, es la decisión que minimiza .

$$C_{ik_2} + \sum_{j=0}^{m} \rho_{ij} (K_2) V_j (R_1) - V_i (R_1)$$

22.- Op. Cit.1990

y entonces se hace $d_1(R_2)$= valor de k_2 que minimiza esta expresión.

El proceso termina cuando $R_n = R_{n-1}$, y R_n será la política óptima con un costo esperado a largo plazo por unidad de tiempo de $g(R_n)$".(23)

Veamos un ejemplo de como se aplicaría el algoritmo:

Supongamos una política inicial $R_1 = R_b\ (1,1,1,3)$ tomadas de ejemplo anterior.

1) Determinación del valor:

$$g(R_1)-V_0(R_1)= C_{01}+ \rho_{00}(1)V_0(R_1)+\rho_{01}(1)V_1(R_1)+\rho_{02}(1)V_2(R_1)$$

$$g(R_1)-V_1(R_1)= C_{11}+ \rho_{10}(1)V_0(R_1)+\rho_{11}(1)V_1(R_1)+\rho_{12}(1)V_2(R_1)$$

$$g(R_1)-V_1(R_1)= C_{21}+ \rho_{20}(1)V_0(R_1)+\rho_{21}(1)V_1(R_1)+\rho_{22}(1)V_2(R_1)$$

$$g(R_1)-V_1(R_1)= C_{32}+ \rho_{30}(1)V_0(R_1)+\rho_{31}(1)V_1(R_1)+\rho_{32}(1)V_2(R_1)$$

Sustituyendo y ordenando nos queda:

$$\begin{aligned}
&g(R_1) + V_0(R_1) - (7/8)V_1(R_1) - (1/16)V_2(R_1) = 0\\
&g(R_1) \qquad\qquad\quad + (1/4)V_1(R_1) - (1/8)\ V_2(R_1) = 1\\
&g(R_1) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + (1/2)\ V_2(R_1) = 3\\
&g(R_1) - V_0(R_1) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 6
\end{aligned}$$

$$V_0(R_1) = g(R_1) - 6$$

$$V_2(R_1) = \frac{3 - g(R_1)}{2} = 6 - 2g(R_1)$$

$$\begin{aligned}
V_1(R_1) &= 4 + 1/2\ V_2(R_1) - 4g(R_1)\\
&= 3 - g(R_1) - 4g(R_1) + 4\\
&= 7 - 5g(R_1)
\end{aligned}$$

$$g(R_1)+ g(R_1)-6-(7/8)\ 5g(R_1)-(1/16)\ (6)+(1/16)\ 2g(R_1) = 0$$

23.- Op. Cit. 1990.

$(2 + 35/8 + 1/8)\ g(R_1) - 6 - 49/8 - 3/8 = 0$

$52/8\ g(R_1) = 100/8$

$g(R_1) = 100/52 = 1.923$

$V_0\ (R_1) = -4.077$

$V_1\ (R_1) = -2.615$

$V_2\ (R_1) = 2.154$

$V_3\ (R_1) = 0$

2) Mejoramiento de la política:

Es necesario encontrar una política R_2 que minimice:

$C_{0k2}+\rho_{00}(K_2)(-4.077)+\rho_{01}(K_2)(-2.615)+\rho_{02}(K_2)(2.154)+4.077$

$C_{1k2}+\rho_{10}(K_2)(-4.077)+\rho_{11}(K_2)(-2.615)+\rho_{12}(K_2)(2.154)+2.615$

$C_{2k2}+\rho_{20}(K_2)(-4.077)+\rho_{21}(K_2)(-2.615)+\rho_{22}(K_2)(2.154)-2.154$

$C_{3k2}+\rho_{30}(K_2)(-4.077)+\rho_{31}(K_2)(-2.615)+\rho_{32}(K_2)(2.154)-0$

E S T A D O 0

DECISION	$\rho_{00}(K_2)$	$\rho_{01}(K_2)$	$\rho_{02}(K_2)$	C_{0k2}	Valor de (0)
1	0	7/8	1/16	0	1.923
2	0	1	0	4	5.462
3	0	0	0	6	6

E S T A D O 1

DECISION	$\rho_{10}(K_2)$	$\rho_{11}(K_2)$	$\rho_{12}(K_2)$	C_{1k2}	Valor de (1)
1	0	3/4	1/8	1	1.923
2	0	1	0	4	4
3	1	0	0	6	4.538

E S T A D O 2

DECISION	$\rho_{20}(K_2)$	$\rho_{21}(K_2)$	$\rho_{22}(K_2)$	C_{2k}	Valor de (2)
1	0	0	1/2	3	1.923
2	0	1	0	4	-0.769
3	1	0	0	6	-0.231

E S T A D O 3

DECISION	$\rho_{30}(K_2)$	$\rho_{31}(K_2)$	$\rho_{32}(K_2)$	C_{3k}	Valor de (3)
1	0	0	0	∞	∞
2	0	0	0	∞	∞
3	1	0	0	6	1.923

Entonces la nueva política mejorada será :

$R_2 = (1, 1, 2, 3)$

Lo cual significa que en los estados 0 y 1 no hay que no tomar acciones, mientras que el estado 2 hay que reparar y finalmente en el estado 3 reemplazar.

Si volvemos a repetir el algoritmo, tendremos que la nueva política que se obtiene es (1, 1, 2, 3) con un costo mínimo de g(R)= 1,667. De manera que esta es la política óptima.

2.17 CRITERIO DE LOS COSTOS DESCONTADOS.

"De manera más real, puede considerarse el valor del dinero en el tiempo, tomando un valor de descuento $\alpha = (1+i)^{-1}$ (llamado V en análisis de inversiones),donde i es la tasa de rendimiento anual.

Se busca una política que minimice el costo esperado total descontado a largo plazo.

Por lo que la ecuación de recurrencia será :

$$V_i^n(R) = C_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^{m} \rho_{ij}(K)\, V_j^{n-1}(R)$$

Donde $V_i^n(R)$ representa el costo total descontado de un sistema que inicia en el estado "i", y se desarrolla durante "n" períodos. $V_i^n(R) = V_i^n(R)$, solamente cuando $\alpha = 1$.

Sea $V_i(R) = \lim_{n \to \infty} V^n{}_i(R)$ PERPETUIDAD (la cual es una anualidad que se va a pagar indefinidamente).

$$V_i^n(R) = \lim_{n \to \infty} \left(C_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^{m} \rho_{ij}(K)\, V_j^{n-1}(R)\right.$$

$$= C_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^{m} \rho_{ij}(K) \lim V_j^{n-1}(R)$$

$$V_i(R) = C_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^{m} \rho_{ij}(K)\, V_j(R)$$ COSTO ESPERADO A LARGO PLAZO

V(R) es Costo Total esperado con descuento α de un sistema que inicia en "i" y se desarro l l a durante un tiempo indefinido (infinito).

Se tienen (m + 1) incógnitas : $V_0(R)$, $V_1(R)$, ...,V_n; y (m + 1) ecuaciones".(24)

A L G O R I T M O

PASO 1) Determinación del Valor.

Resolver el sistema de (m + 1) ecuaciones con (m + 1) incógnitas, para una política arbitraria R_1.

PASO 2) Mejoramiento de la Política.

Utilizando los valores recién calculados de $V_i(R_1)$,

24. Op. Cit. 1990.

encontrar una política óptima R_2, tal que, para cada estado "i", minimice a:

$$C_{ik_2} + \alpha \sum_{j=0}^{m} \rho_{ij}(K_2)\ V_j(R)$$

El proceso termina cuando se encuentran 2 políticas sucesivas idénticas.

2.18 PROCESOS DE DECISION CON HORIZONTES ACOTADOS. (METODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS)

Supóngase ahora que se desea obtener el Costo Total Descontado esperado de un sistema que se inicia en " i ", y que se desarrolla durante " n " periodos, usando una política óptima. Este problema es análogo a la programación dinámica determinista.

"Sea V_i el costo total descontado de un sistema que parte de " i " y se desarrolla durante " n " períodos (si no hay descuento, $\alpha = 1$).

$$V_i^{n+1} = \min_k \left[C_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^{m} \rho\ (K)\ V_j^{n} \right]$$

Ecuación Recursiva

El procedimiento será calcular los valores anteriores necesarios V_j^0 , V_j^1 , . . . , V_j^n ; con $j = 0 \ldots m$ hasta encontrar el óptimo deseado.

Se tiene que:

$$V_0^0 = V_1^0 = V_2^0 = \ldots = V_m^0 = 0$$

Entonces :

$$V_i^1 = \min_k\ [C_{ik}]$$

De aquí :

$$V_i^2 = \min_k \left[C_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^{m} P_{ij} (K)\, V_j^1 \right]$$

y así sucesivamente .

Solamente cuando " n " sea " muy grande " ($n \to \infty$), los valores de V_i^n convergeran a V_i .

Este método tiene la ventaja de que no hay que resolver sistemas de ecuaciones. Puede usarse como método inicial para obtener una política, y después verificar si es la óptima a largo plazo".(25)

25. Op. Cit. 1990.

C A P I T U L O I I I.

III. MODELO DE DECISION.

3.1 IDENTIFICACION DEL MODELO.

Para poder hacer la identificación del modelo, debemos tener en cuenta los elementos que componen nuestro sistema y sus caracteríticas, se sabe que la institución cuenta con equipo (máquinas postmarcadoras), el cual se utiliza diariamemte, por el ritmo de trabajo es susceptible de sufrir una falla o descompostura. Por lo tanto, una máquina puede pasar de uno a otro estado como por ejemplo, operable, impresión defectuosa de documentos, etc. A estos estados les corresponde una decisión como podría ser reparar y por consiguiente se genera un costo.

De esta manera, se tienen los estados por los que pasan las máquinas (9 máquinas), las decisiones que se van a tomar y los costos que a estas corresponden. Con estos elementos el sistema puede estudiarse desde un enfoque de Procesos Markovianos de Decisión.

3.2 DESCRIPCION DE LOS DATOS.

Primeramente fue necesario tomar de un intervalo de tiempo, los estados por los que iban pasando las máquinas, por ejemplo: un día una máquina puede estar trabajando pero su producción no es del todo satisfactoria, otro caso sería que una tecla de operación de la máquina se rompa y esto ocasione que el equipo tenga una producción más baja y defectuosa, en ocasiones llega a suceder que una máquina no dé información, lo cual significa que al menos durante ese día este equipo dejará de operar y por lo tanto, traerá como consecuencia un costo para la institución. En la siguiente tabla se describen los estados por los cuales pasan las máquinas.

E S T A D O S

1.- FUNCIONE BIEN (OPERABLE).
2.- TECLA(S) ROTA(S).
3.- CINTA DE POSTMARCAJE ENRROLLADA.
4.- SOBRECALENTAMIENTO DE LA MAQUINA.
5.- IMPRESION DE DOCUMENTOS DEFECTUOSA.
6.- LA MAQUINA NO DA INFORMACION.
7.- IMPRESORA DE LA TIRA AUDITORA DESCOMPUESTA.
8.- ENCIMA CANTIDADES EN LA TABULACION.
9.- MOTOR DESCOMPUESTO.

El tomar decisiones implica un costo, por lo que es necesario analizar cuidadosamente las alternativas que se elijan, ya que podemos elegir una con costo bajo pero con efectividad no del todo satisfactoria en un corto tiempo y traiga como consecuencia incurrir en otro costo, ocasionando tomar otra decisión; es importante saber elegir la decisión que mejor resuelva el problema, optimizando los recursos.

3.3 OBTENCION DE LA MUESTRA.

La muestra se obtuvo simplemente utilizando todos los datos disponibles que representan un subconjunto de todos los posibles estados de las máquinas durante un tiempo indefinido. Se observaron los estados del total de máquinas, la razón de esto fue procurar utilizar la maxima información posible, para obtener un modelo más adecuado.

La obtención de la muestra se consiguió del Departamento de Cobro Inmediato del Multibanco Mercantil de México S.N.C., esta muestra se inició el 18 de junio de 1990 y finalizó el 30 de noviembre del mismo año, con datos diarios únicamente de días hábiles (Lunes a Viernes).

La forma en la que se obtuvo fue la siguiente: todos los días a partir de la fecha de inicio, se verificaba el estado del equipo, y si éste presentaba algún estado que no fuera el de operable, se anotaba el estado al cual había pasado. Los estados que fueron expresados en la tabla de estados, (ver apéndice I).

3.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Las alternativas de decisión que se van a considerar son las siguientes:

1.- NO TOMAR ACCIONES.
2.- REPARAR LA MAQUINA.
3.- CAMBIAR O REEMPLAZAR LA MAQUINA.

Por lo tanto, es necesario contar con una matriz de transición por cada decisión, ya que de acuerdo a las decisiones, las probabilidades de transición de un estado a otro cambian, así como también sus respectivas matrices de costos.

Para poder construir la matriz de transición con la primera decisión la obtenemos de la informacion recabada en el muestreo, para poder determinar cada elemento de la matriz de transición se empleó la siguiente expresión:

$$P(x,y) = \frac{\text{Número de veces promedio que la máquina paso del estado " x " al " y "}}{\text{Número de veces promedio que inicio en x}}$$

y así sucesivamente para cada estado siguiente (ver apén dice II). Para las otras dos matrices no fue necesario realizar ningún cálculo, ya que al elegir estas decisiones por lógica su probabilidad va a ser uno de pasar al estado correspondiente, en la columna principal de cada matriz (ver apéndice II).

Los costos se manejaron en dólares, debido a que el equipo y sus refacciones los maneja una empresa americana y todos sus precios al cliente los opera endolares. Estos costos se pueden ver en el apéndice II, a continuación se mencionan algunos de los costos, a partirde los cuales se hizo el cálculo para los otros estados con sus respectivas decisiones, el costo es independiente del estado, por que hay un contrato de mantenimiento.

C O S T O S

1.- MANTENIMIENTO ACTUAL:	$1,244.54 US.
2.- REPARAR EL EQUIPO:	$ 785.00 US.
3.- REEMPLAZAR:	$6,000.00 US.

3.4.1 DESCRIPCION DEL MODELO.

Se pueden identificar los elementos del modelo de la siguiente forma:

1.- X_t= Variables endógenas, controladas por las diferentes políticas, es decir, representan el estado de la máquina al día t.

2.- S = Espacio de estados (1,2,3,4,5,6,7,8,9).

3.- Las decisiones, las cuales son tres:

1.- No tomar acciones.
2.- Reparar.
3.- Reemplazar.

4.- Las matrices de costos:

ESTADOS	C O S T O S (DECISION 1)
1	1,244.00 DLLS.
2	167.00 DLLS.
3	837.00 DLLS.
4	418.00 DLLS.
5	167.00 DLLS.
6	837.00 DLLS.
7	837.00 DLLS.
8	167.00 DLLS.
9	837.00 DLLS.

ESTADOS	C O S T O S (DECISION 2)
1	3.27 DLLS.
2	3.27 DLLS.
3	3.27 DLLS.
4	3.27 DLLS.
5	3.27 DLLS.
6	3.27 DLLS.
7	3.27 DLLS.
8	3.27 DLLS.
9	3.27 DLLS.

C O S T O S (DECISON 3)

ESTADOS	
1	6,000.00 DLLS.
2	6,000.00 DLLS.
3	6.000.00 DLLS.
4	6,000.00 DLLS.
5	6,000.00 DLLS.
6	6,000.00 DLLS.
7	6,000.00 DLLS.
8	6,000.00 DLLS.
9	6,000.00 DLLS.

5.- Las matrices de transición para cada decisión:

(NO TOMAR ACCIONES)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.921	.008	.001	.000	.034	.009	.009	.008	.010
2	.450	.550	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.666	.000	.000	.000	.334	.000	.000	.000	.000
4	.000	.000	.000	.000	.000	1.000	.000	.000	.000
5	.393	.015	.000	.000	.592	.000	.000	.000	.000
6	.599	.000	.000	.000	.000	.401	.000	.000	.000
7	.168	.033	.000	.000	.066	.000	.733	.000	.000
8	.213	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.787	.000
9	.500	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.500

(R E P A R A R)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0

(R E E M P L A Z A R)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0

3.5 RESOLUCION.

Se aplicó para la resolución del problema un programa de cómputo (paquete) llamado Mejoramiento de Politicas Aproximaciones Sucesivas (Mepas) desarrollado durante el curso de la materia de modelos de decisión. Fue hecho en lenguaje pascal por que permite manejar de una forma sencilla arreglos y otras expresiones matemáticas, dicho paquete se opera a través de menus los cuales indican lo que se quiere hacer, por ejemplo:

M E N U   P R I N C I P A L

0 CAPTURA DE DATOS
1 MEJORAMIENTO DE POLITICAS SIN DESCUENTO
2 MEJORAMIENTO DE POLITICAS CON DESCUENTO
3 APROXIMACIONES SUCESIVAS
4 GENERACION DE REPORTES
5 SALIR DEL SISTEMA

Los resultados obtenidos por el paquete y descritos más abajo indican que la politica es la de reparar, dado que su costo es mucho menor que el de reemplazar. Sin embargo, se debe considerar las condiciones actuales del equipo de la institución:

1.- El equipo tiene una antigüedad de más de diez años, motivo por el cual el distribuidor encargado de su mantenimiento ha comunicado que en un corto plazo dejará de proporcionar este servicio, ya que no contará con las refacciones necesarias para su reparación o mantenimiento, esto es debido a que la empresa dejará de fabricar las refacciones para este equipo, por otra parte se debe considerar que se ha lanzado al mercado nuevos equipos con avances tecnológicos que hacen el trabajo mucho más facil y rápido, de esta manera el equipo se encuentra practicamente obsoleto.

2.- También se puede ver en el muestreo que e ntre más tiempo mantengamos el equipo en funcionamiento con mayor frecuencia se presentarán fallas en su accionar.

Por lo tanto, se debe tener en cuenta que a largo plazo la Institución se va a beneficiar si decide reemplazar su equipo lo más pronto posible, aunque en un principio el costo de reemplazar será alto, de acuerdo a los datos, se puede decir que las fallas en el equipo disminuirán en gran forma, y además aumentar la producción de documentos postmarcados debido a que los nuevos equipos son más rápidos y de según al proveedor el índice de falla en las máquinas se reduce bastante, por otra parte, hay los costos para la institución por concepto de mantenimiento.

A continuación se expresarán los resultados obtenidos por el paquete en sus distintas opciones:

Por el Método de Mejoramiento de Politicas.

ESTADOS	DECISION
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2

G (R) = $4,000. Costo esperado a largo plazo por unidad de tiempo.

Vi(R)= Costo total descontado de un sistema que inicia en el estado "i" y se desarrolla durante "n" periodos.

V(1) = 0 US
V(2) = 0 US
V(3) = 0 US
V(4) = 0 US
V(5) = 0 US
V(6) = 0 US
V(7) = 0 US
V(8) = 0 US
V(9) = 0 US

Por el Método de Mejoramiento de Política con Descuento.

ESTADO	DECISION
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2

V(1) = $ 4,123.71 US
V(2) = $ 4,123.71 US
V(3) = $ 4,123.71 US
V(4) = $ 4,123.71 US
V(5) = $ 4,123.71 US
V(6) = $ 4,123.71 US
V(7) = $ 4,123.71 US
V(8) = $ 4,123.71 US
V(9) = $ 4,123.71 US

* Nota : El descuento fue del 3% , tomando la diferencia entre la tasa que ofrece el banco y el nivel de la inflación al final del año de 1990

Por el Método de Aproximaciones Sucesivas.

ESTADO	DECISION
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2

Con descuento del 3% y con 6 periodos.

V(1) = $ 4,123.71 US
V(2) = $ 4,123.71 US
V(3) = $ 4,123.71 US
V(4) = $ 4,123.71 US
V(5) = $ 4,123.71 US
V(6) = $ 4,123.71 US
V(7) = $ 4,123.71 US
V(8) = $ 4,123.71 US
V(9) = $ 4,123.71 US

Por el Método de Aproximaciones Sucesivas.

ESTADO	DECISION
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2

Con descuento del 3% y con 12 periodos.

V(1) = $ 4,123.71 US
V(2) = $ 4,123.71 US
V(3) = $ 4,123.71 US
V(4) = $ 4,123.71 US
V(5) = $ 4,123.71 US
V(6) = $ 4,123.71 US
V(7) = $ 4,123.71 US
V(8) = $ 4,123.71 US
V(9) = $ 4,123.71 US

C A P I T U L O   I V.

CAPITULO IV

4.1 INTRODUCCION.

El concepto de SIMULACION como tal, se remonta al año de 1940, en el que dos científicos llamados Von Neuman y Ulam, trabajaron durante la Segunda Guerra Mundial, logrando obtener soluciones a problemas de reacciones nucleares; ya que tanto la solución analítica (matemática) como la experimental, resultarían por una parte costosa y por otra complicada.

Una vez que ya hemos manejado la palabra simulación, sería apropiado dar una definición formal de este tema.

Según Thomas H. Naylor: " Simulación es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos períodos de tiempo ".

Ahora bien, la mayoría de los autores de simulación opinan que las etapas para realizar un estudio de ésta son:

1.- Definición del problema: Hacer un análisis del sistema, para determinar interacciones, medio ambiente, restricciones, interrelaciones y medidas de efectividad, para así definir al sistema y estudiar los resultados que se esperan obtener.

2.- Formulación del Modelo: Definición de todas sus variables, relaciones lógicas y diagramas de flujo.

3.- Recopilación de Datos: Dependiendo de la disposición de los datos, influirá en el modelo. Por consiguiente es de vital importancia definir los datos que se emplearán.

4.- Implementación del Modelo en la Computadora: Decidir qué tipo de lenguaje se va a utilizar o bien qué paquetería (software) se puede ocupar para procesar el modelo en la computadora.

5.- Validación: Es detectar fallas en el modelado o en la obtención de los datos.

6.- Experimentación: Lo cual consiste en efectuar un Análisis de Sensibilidad de los índices requeridos, siendo éste la investigación que tienen cambios en los diferentes parámetros sobre la solución óptima del problema.

7.- Interpretación: Analizar los resultados y hacer la toma de decisión.

8.- Documentación. Dividida en 2 clases:

a) Tipo Técnico: La del procesamiento de datos.

b) Manual del Usuario.

Por otra parte, la simulación se tiene como otro recurso y gracias a los avances en el desarrollo de ésta, y la gran variedad de software (paquetería) que existen hoy en día hacen de la simulación, una herramienta más, aplicada a los sistemas actuales. En seguida se mombran algunas ventajas y desventajas que Thomas H. Naylor ha mencionado de esta metodología

- Se pueden estudiar el efecto de cambios internos y externos del sistema, al hacer alteraciones en el modelo del sistema y observando los efectos de éstas .

- Puede ser usada para experimentar con nuevas situaciones, sobre las cuales se tiene poca o ninguna información. A través de esta experimentación se puede anticipar a mejorar posibles resultados no previstos.

- Cuando nuevos elementos son introducidos en un sistema, la simulación puede ser usada para anticipar cuellos de botella o algún otro tipo de problema que pueda surgir.

Aunque la simulación tiene ventajas importantes, ésta también representa ciertas desventajas como el de requerir un equipo de computo y recursos humanos costos. Además por lo general el desarrollo de un modelo de simulación, requiere de bastante tiempo.

4.2 SIMULACION DEL MODELO.

El modelo es identico al definido anteriormente, solo cambia la metodología de solución, para efectuar la simulación utilizamos como fuente de información las matrices de transición de cada una de las decisiones. Por otra parte, los elementos del modelo de simulación son los siguientes:

Las variables aleatorias, los estados de las máquinas, la funcion de distribución formada por cada renglón de la matriz de transición, además se va a generar un número aleatorio en este caso se le llamara "r" el cual esta entre 0 y 1, donde r es un núnero seudoaleatorio

Se realizó un programa para poder efectuar la simulación, esté fue desarrollado en pascal, y puede ser visto en el apéndice IV.

El programa va a tomar los elementos de la matriz de transición, de acuerdo a la decisión elegida, y después se va a generar un número aleatorio, el cual se va a comparar con el elemento de la matriz de transición si ese número aleatorio está dentro del rango de comparación entonces, significa que pasará al siguiente estado, el número aleatorio generado debe ser uniforme. La comparación se realizó de la siguiente manera:

$$0 \leq r \leq \rho_{11} \qquad \rightarrow \text{ estado 1}$$

$$\rho_{11} < r \leq \rho_{12} + \rho_{11} \qquad \rightarrow \text{ estado 2}$$

$$\vdots$$

* NOTA: Donde " r " es un número seudoaleatorio entre 0 y 1, y se llaman así por que son genererados a través de relaciones matemáticas de recurrencia.

y así sucesivamente hasta estar dentro del rango de comparación.

4.3 EJEMPLOS DE LA SIMULACION DEL MODELO.

Una vez establecido el modelo a utilizar y crear el programa que efectuará la simulación, se pueden llevar a cabo las (corridas) necesarias para evaluar y analizar el sistema. A continuación se presentan algunos ejemplos de los resultados obtenidos durante la simulación en la cual se cambiaron los datos de entrada para poder ver como variaba el comportamiento del sistema bajo parámetros distintos y tener idea del comportamiento del sistema:

Ejemplo 1. Iniciando con :

Estado : 2 (Tecla(s) Rota(s)).
Decisión : 2 (Reparar).
Período : 10 días.

P E R I O D O	E S T A D O
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

La simulación nos proporciona estos datos debido a que, para la decisión 2 la probabilidad de pasar al estado 1 es alta de uno para los demás estados bajo esta decisión.

Ejemplo 2. Iniciando con :

Estado : 2 (Tecla(s) Rota(s)).
Decisión : 3 (Reemplazar).
Periodo : 10 Días.

PERIODO	ESTADO
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Para este caso, tenemos que como para la decisión 3 (reemplazar) su probabilidad asociada de pasar al estado 1 es alta (de uno) y por lo tanto el elegir esta política el modelo tiende hacia el estado de operable (estado 1).

Ejemplo 3. Iniciando con :

Estado : 3 (Cinta de Postmarcaje Enrollada).
Decisión : 1 (No Tomar Acciones).
Periodo : 10 Días.

PERIODO	ESTADO
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	9
7	9
8	1
9	1
10	1

Se observa que el sistema ya no sólo pasa al estado 1 (operable) si no que en ocasiones pasa a otro estado el cual no conviene, además con estas mismas condiciones y solamente variando el período para 20 y 40 días la simulación reflejó que el sistemaen ocasiones cambiadelestado1 (operable) pasando al estado 8 (encima cantidades), lo cual perjudica el funcionamiento del sistema.

Ejemplo 4. Iniciando con :

Estado : 4 (Sobrecalentamiento de la Máquina).
Decisión : 1 (No Tomar Acciones).
Período : 10 Dias.

P E R I O D O	E S T A D O
1	6
2	6
4	1
5	6
6	6
7	6
8	6
9	1
10	2

Los resultados expresados muestran un comportamiento bastante diferente de los anteriores, en los cuales a pesar de no estar en el estado de operable su variación no era muy grande pero existía, aquí los resultados que se observan son que el sistema tiende al estado 6 que es el de no dar información la máquina, y noconviene; porloquesi se obervan los datos y la matriz de transición para esta decisión, la probabilidad de caer en un estado que no sea el de operable es mucho mayor, por lo tanto, es necesario cambiar de decisión para así asegurar que el sistema tenga un comportamiento mucho más aceptable.

Se hicieron otras pruebas con estos datos, pero variando el período y se obtuvo que el sistema cambia del estado 6 al estado 8 (encima cantidades en la tabulación), y después tiene una ligera variación hacia el estado 1 (operable),pero posteriormente muestra una tendencia hacia el estado 8.

Ejemplo 5. Iniciando con :

Estado : 5 (Impresión Defectuosa).
Decisión : 1 (No Tomar Acciones).
Período : 10 Días.

P E R I O D O	E S T A D O
1	5
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	6
8	6
9	1
10	2

En este ejemplo, se hicieron pruebas para un período de 20 y 40 días y el comportamiento del sistema es un poco inestable ya que se inicia en el estado 1, pasando después al estado 2(tecla(s) rota(s)) para posteriormente ir al estado 5 y pasar algunas veces por el estado 9, por tanto encontramos que esta política no beneficia en mucho al sistema, sin embargo, si nos da un ejemplo de como se comporta el modelo bajo ciertas condiciones.

4.4 VALIDACION DEL MODELO.

Para realizar la validación del modelo, se utilizó la prueba estadística de la Ji-Cuadrada, a través de un programa de cómputo desarrollado en pascal el cual efectúa la prueba de bondad de ajuste ji- cuadrada, tomando las frecuencias esperadas de la matriz de transición simulación, en donde para cada estado hay que multiplicar cada probabilidad de transición por el número de simulaciones, mientras que las frecuencias observadas se obtienen directamente de los resultados de la simulación.

$$X^2 = \sum_{j=o}^{m} \sum_{i=o}^{m} \frac{(E_{ij} - O_{ij})^2}{E_{ij}}$$

(con m^2 grados de libertad)

Si X^2 < Valor en tablas, entonces la simulación se considera adecuada, ya que se ajusta a la función de transición.

Donde :

E_{ij} = Frecuencias Esperadas = P_{ij} k

K = Número de simulaciones.

O_{ij} = Frecuencias Observadas en la simulación, es decir, cantidad de veces que el sistema pasó del estado " i " al estado " j " .

Una vez que el programa ha procesado los datos, proporciona el estadístico al que se llego, se busca en las tablas de la Ji-cuadrada y si el valor en tablas es mayor que el obtenido entonces significa que los datos obtenidos son correctos, a continuación se presentan las frecuencias utilizadas así como también el resultado dado por el programa este programa se puede consultar en el apéndice IV.

PRUEBA DE LA CHI - CUADRADA

FRECUENCIA OBSERVADAS

9.21	0.08	0.01	0.00	0.34	0.09	0.09	0.08	0.10
4.50	5.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6.66	0.00	0.00	0.00	3.34	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	10.00	0.00	0.00	0.00
3.93	0.15	0.00	0.00	5.92	0.00	0.00	0.00	0.00
5.99	0.00	0.00	0.00	0.00	4.01	0.00	0.00	0.00
1.68	0.33	0.00	0.00	0.66	0.00	7.33	0.00	0.00
2.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	7.87	0.00
5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5.00

FRECUENCIAS ESPERADAS

9.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2.00	8.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6.00	0.00	0.00	0.00	3.00	0.00	0.00	1.00	0.00
6.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.00	0.00	0.00	0.00
5.00	0.00	0.00	0.00	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.00	0.00	0.00	0.00
4.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	5.00	0.00	0.00
2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	8.00	0.00	0.00
7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.00

El valor de la Chi - Cuadrada es:

$$X^2 = 24.5887 \quad \text{con } 64 \text{ g.l.}$$

Cuando las decisiones son 2 y 3 que corresponden a reparar y reemplazar, los resultados son determiníticos, por lo cual no se requiere efectuar prueba de bondad de ajuste.

4.5 VENTAJAS DEL MODELO.

La ventaja que nos ofrece está herramienta matemática como es la simulación, es poder manejar la variable de el tiempo, además si contamos con una buena muestra podemos estar seguros de que los resultados proporcionados por la simulación serán bastante cercanos a la realidad.

Al efectuar la simulación para nuestro modelo, se pudo ver que al elegir la decisión de reemplazar la simulación refleja que en un período de 10 días el estado en cual se encontrarán será el de operable. Así se hicieron más corridas (pruebas) empezando con otros estados diferentes del de operable , pero elegiendo la decisión de reemplazar y se vió que la simulación nos lleva al estado operable; esto se puede ver en el apéndice III .

Por otra parte, podemos decir que la simulación nos llevó a reflejar la situación que ya se había mencionado en la que la decisión que se sugería era la del reemplazo, misma que a través de esta técnica de la simulación se llegó a ver que en un cierto tiempo si se toma la decisión sugerida los resultados van a ser positivos.

Cabe destacar un aspecto importante que es que este modelo que se ha planteado, nos puede ayudar a emplearlo en otro conjunto de una determinada población, siempre y cuando tengan características similares.

C O N C L U S I O N .

CONCLUSION

A lo largo de este trabajo se ha descrito el funcionamiento de las máquinas postmarcadoras, de donde se generó el problema original, que, aunado al marco teórico permitió crear un modelo matemático adecuado. A partir de las alternativas de solución se llegó a una serie de resultados y recomendaciones basados en un análisis formal.

Se analizó el problema desde dos puntos de vista diferentes pero complementarios:

- Método Análitico : El cual se realizó a través del Análisis de Decisión Markoviana.

- Método de la Simulación : Que dejó ver detalladamente el comportamiento del modelo para un cierto período de intercambiando los datos de entrada, para poder observar la manera en que variaban los resultados, confirmando la decisión previamente obtenida.

Además de lo ya mencionado, la aplicación de las matemáticas resulta importante en este caso, ya que da bases firmes para sostener una decisión, proporciona los elementos en los cuales se sustenta todo el modelo así como también su solución. Por esta razón es muy importante que actualmente este tipo de aplicación se haga mucho más fre c uente, y en México se debe de tener mayor cuidado ahora con el Tratado Trilateral de Libre Comercio con Estados Unidos de Norteamerica, Canada y México, por que este tratado va a provocar una competitividad entre los tres países y donde estos buscaran salir beneficiados. Por lo tanto, será necesario que en todos los sectores se busquen alternativas, para óptimizar sus recursos materiales, humanos y técnicos, con el fin de maximizar sus utilidades disminuyendo sus costos lo más posible, pero sin olvidarse de la calidad, parte importante en todo proceso de producción, el cual es vigilado por un Control de Calidad, punto decisivo para poder hacer una buena competencia con los demás bienes o servicios que se vayan a ofrecer en un corto plazo.

Las ventajas de los métodos usados son su sencillez, la facilidad para ser aplicados y la confiabilidad de los resultados ya que los modelos utilizados reflejan de manera muy aproximada a la realidad, el comportamiento del fenómeno.

Es por esto que este tipo de aplicación puede usarse en casos similares como por ejemplo: en equipos de cómputo, lavanderías, flotilla de autos. En donde los estados retomando como ejemplo el las lavanderías los estados podrían ser sin una máquina funciona o no, funciona pero no satisfactoriamente, y las decisiones que se pueden proponer serían reparar, reemplazar, o no tomar acciones dejar que el equipo trabaje hasta que ya no funcione totalmente.

A P E N D I C E .

APENDICE I

Registro del muestréo que se efectuó a las máquinas postmarcadoras, a continuación se definen los estados así como también el número de máquinas:

MAQUINAS

El número de máquinas en las cuales se realizó el muestréo fue de un total de nueve máquinas.

ESTADOS

El número de estados que se establecieron para efectos del muestréo fueron un total de nueve, los cuales son:

1.- Funciona bien (Operable).
2.- Tecla(s) rota(s).
3.- Cinta de postmarcaje enrollada.
4.- Sobrecalentamiento de la máquina.
5.- Impresión de documentos defectuosa.
6.- No da información la máquina.
7.- La impresora de la tabulación no funciona.
8.- Encima las cantidades en la tabulación.
9.- Motor descompuesto.

D I A S

MAQUINA	18-06-90	19-06-90	20-06-90	21-06-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	5	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	22-06-90	25-06-90	26-06-90	27-06-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	2	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	28-06-90	29-06-90	02-07-90	03-07-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	5	1
5	1	1	6	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	5
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	04-07-90	05-07-90	06-07-90	09-07-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	5	5	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	7	1

D I A S

MAQUINA	10-07-90	11-07-90	12-07-90	13-07-90
1	1	1	1	1
2	1	5	5	5
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	2	2	2	2
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	16-07-90	17-07-90	18-07-90	19-07-90
1	1	1	1	1
2	5	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	5	1	1	5
6	2	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	23-07-90	24-07-90	25-07-90	26-07-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	5	5	1	1
6	1	5	5	5
7	1	1	1	1
8	1	1	5	5
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	27-07-90	30-07-90	31-07-90	01-08-90
1	1	1	5	1
2	5	5	5	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	6	6	1
8	5	5	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	02-08-90	03-08-90	06-08-90	07-08-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	08-08-90	09-08-90	10-08-90	13-08-90
1	1	1	1	7
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	14-08-90	15-08-90	16-08-90	17-08-90
1	7	7	7	7
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	20-08-90	21-08-90	22-08-90	23-08-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	8	8	8	8

D I A S

MAQUINA	24-08-90	27-08-90	28-08-90	29-08-90
1	1	1	1	1
2	5	5	5	5
3	1	1	1	1
4	5	5	5	5
5	1	1	5	5
6	1	1	1	1
7	1	1	2	2
8	1	1	1	1
9	8	8	8	8

D I A S

MAQUINA	30-08-90	31-08-90	03-09-90	04-09-90
1	1	1	1	1
2	5	1	2	2
3	1	1	1	1
4	5	1	1	1
5	5	1	1	1
6	1	1	1	1
7	2	1	1	1
8	1	1	1	1
9	8	1	1	1

D I A S

MAQUINA	05-09-90	06-09-90	07-09-90	10-09-90
1	1	1	1	5
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	6
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	11-09-90	12-09-90	13-09-90	14-09-90
1	1	1	1	5
2	1	1	1	5
3	1	1	1	5
4	1	1	1	1
5	1	1	5	5
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	8	8
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	17-09-90	18-09-90	19-09-90	20-09-90
1	5	2	1	1
2	5	5	5	1
3	5	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	7	1
8	8	8	8	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	21-09-90	24-09-90	25-09-90	26-09-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	5	1	1	1
5	7	7	7	2
6	1	7	7	7
7	7	1	1	1
8	1	1	1	8
9	7	1	1	1

D I A S

MAQUINA	27-09-90	28-09-90	01-10-90	02-10-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	5	1	1
4	1	7	7	7
5	2	2	1	1
6	7	7	7	7
7	1	1	1	1
8	8	8	8	8
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	03-10-90	04-10-90	05-10-90	08-10-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	7	7	7	7
4	5	1	1	1
5	1	1	2	1
6	7	7	7	7
7	1	1	1	1
8	8	1	1	8
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	09-10-90	10-10-90	11-10-90	15-10-90
1	1	1	1	1
2	5	1	1	1
3	5	5	1	1
4	1	1	1	1
5	1	8	8	1
6	1	8	1	5
7	1	1	1	1
8	8	8	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	16-10-90	17-10-90	18-10-90	19-10-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	5

D I A S

MAQUINA	22-10-90	23-10-90	24-10-90	25-10-90
1	1	1	1	1
2	1	3	1	3
3	1	1	1	1
4	1	1	1	5
5	1	1	1	1
6	5	5	5	5
7	1	1	1	1
8	8	8	8	8
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	26-10-90	29-10-90	30-10-90	31-10-90
1	1	1	1	1
2	3	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	5	5	5	1
7	1	1	1	1
8	8	8	8	1
9	1	6	6	1

D I A S

MAQUINA	05-11-90	06-11-90	07-11-90	08-11-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	09-11-90	12-11-90	13-11-90	14-11-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

D I A S

MAQUINA	15-11-90	16-11-90	19-11-90	21-11-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	5
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	2	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

DIAS

MAQUINA	22-11-90	23-11-90	26-11-90	27-11-90
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	2
4	5	5	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	9	9	1	1
9	1	1	1	1

DIAS

MAQUINA	28-11-90	29-11-90	30-11-90
1	1	1	1
2	1	1	1
3	2	2	1
4	1	1	1
5	1	1	1
6	1	1	1
7	1	1	1
8	1	1	1
9	1	1	1

A P E N D I C E I I.

APENDICE II

Proceso que se efectuó para poder calcular los elementos de la matriz de transición, recordemos que en el capítulo III se hizo mención de los cálculos que eran necesarios para obtenerla:

En esta parte se contará el número de veces que cada máquina estuvo en cada estado y obtenemos el promedio de las nueve máquinas.

	ESTADOS								
MAQUINA	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	104	1	0	0	4	0	6	6	0
2	93	2	3	0	17	0	0	0	0
3	102	3	0	0	6	0	4	0	0
4	100	0	0	0	12	0	3	0	0
5	95	5	0	0	9	0	3	2	0
6	87	5	0	0	11	0	11	1	0
7	104	4	0	0	3	2	2	0	0
8	87	0	0	0	4	1	0	21	2
9	101	0	0	0	0	2	1	9	0
	873	20	3	0	66	5	30	33	2
	873/9	20/9	3/9	0/9	66/9	5/9	30/9	33/9	2/9
	=97	=2.22	=.33	=0	=7.33	=.55	=3.33	=3.66	=.22

Ahora bien, el siguiente paso será encontrar el segundo componente que se necesita para la obtención de la matriz de transición, en el que se va a registrar el número de veces que paso del estado 1 a 1 y asi sucesivamente para todos los demás estados.

E S T A D O S

MAQUINA	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
1	99	1	0	0	3
2	83	1	2	0	4
3	96	1	0	0	3
4	93	0	0	0	5
5	85	1	0	0	4
6	80	1	0	0	3
7	97	2	0	0	1
8	79	0	0	0	1
9	96	0	0	0	0
	808/9	7/9	2/9	0/9	24/9

E S T A D O S

MAQUINA	(1,6)	(1,7)	(1,8)	(1,9)	(2,1)
1	0	1	0	0	1
2	0	0	0	0	1
3	0	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	1	0	3
6	0	1	1	0	1
7	1	2	0	0	2
8	1	0	4	1	0
9	1	1	1	0	0
	3/9	8/9	7/9	1/9	9/9

E S T A D O S

MAQUINA	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	2	0	0	0	0
6	4	0	0	0	0
7	2	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0

11/9	0/9	0/9	0/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(2, 7)	(2, 8)	(2, 9)	(3, 1)	(3, 2)
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	2	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
	0/9	0/9	0/9	2/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
	0/9	0/9	0/9	0/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(3, 8)	(3, 9)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
	0/9	0/9	0/9	0/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
	0/9	0/9	0/9	0/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(4, 9)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)
1	0	2	1	0	0
2	0	5	0	0	0
3	0	4	0	0	0
4	0	6	0	0	0
5	0	4	0	0	0
6	0	3	0	0	0
7	0	1	0	0	0
8	0	1	0	0	0
9	0	0	0	0	0
	0/9	26/9	1/9	0/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(5, 5)	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)	(5, 9)
1	1	0	0	0	0
2	12	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0
4	6	0	0	0	0
5	5	0	0	0	0
6	8	0	0	0	0
7	2	0	0	0	0
8	3	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
	39/9	0/9	0/9	0/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0
	3/9	0/9	0/9	0/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(6,6)	(6,7)	(6,8)	(6,9)	(7,1)
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1
7	1	0	0	0	2
8	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	1
	2/9	0/9	0/9	0/9	5/9

E S T A D O S

MAQUINA	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0
5	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
	1/9	0/9	0/9	2/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(7,7)	(7,8)	(7,9)	(8,1)	(8,2)
1	5	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	3	0	0	0	0
4	2	0	0	0	0
5	2	0	0	1	0
6	10	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	4	0
9	0	0	0	1	0
	22/9	0/9	0/9	7/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,6)	(8,7)
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
	0/9	0/9	0/9	0/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(8,8)	(8,9)	(9,1)	(9,2)	(9,3)
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	17	0	1	0	0
9	8	0	0	0	0
	26/9	0/9	1/9	0/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(9,4)	(9,5)	(9,6)	(9,7)	(9,8)
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
	0/9	0/9	0/9	0/9	0/9

E S T A D O S

MAQUINA	(9,9)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	1
9	0
	0/9

Por lo tanto, la matriz de transición con la cual se va a trabajar, para la decisión 1 (no tomar acciones) es:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.921	.008	.001	.000	.034	.009	.009	.008	.010
2	.450	.550	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.666	.000	.000	.000	.334	.000	.000	.000	.000
4	.000	.000	.000	.000	.000	1.000	.000	.000	.000
5	.393	.015	.000	.000	.592	.000	.000	.000	.000
6	.599	.000	.000	.000	.000	.401	.000	.000	.000
7	.168	.033	.000	.000	.066	.000	.733	.000	.000
8	.213	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.787	.000
9	.500	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.500

Para las decisiones 2 y 3 las cuales son reparar y reemplazar respectivamente sus matrices serán :

D E C I S I O N 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0

D E C I S I O N 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Por otra parte, las matrices de costos que se utilizaron fueron las siguientes:

C O S T O S (DECISION 1)

ESTADOS	
1	1,244.00 DLLS.
2	167.00 DLLS.
3	837.00 DLLS.
4	418.00 DLLS.
5	167.00 DLLS.
6	837.00 DLLS.
7	837.00 DLLS.
8	167.00 DLLS.
9	837.00 DLLS.

C O S T O S (DECISION 2)

ESTADOS	
1	3.27 DLLS.
2	3.27 DLLS.
3	3.27 DLLS.
4	3.27 DLLS.
5	3.27 DLLS.
6	3.27 DLLS.
7	3.27 DLLS.
8	3.27 DLLS.
9	3.27 DLLS.

C O S T O S (DECISION 3)

ESTADOS	
1	6,000.00 DLLS.
2	6,000.00 DLLS.
3	6,000.00 DLLS.
4	6,000.00 DLLS.
5	6,000.00 DLLS.
6	6,000.00 DLLS.
7	6,000.00 DLLS.
8	6,000.00 DLLS.
9	6,000.00 DLLS.

A P E N D I C E I I I.

APENDICE III

En este apéndice se presentan los resultados que se lograron obtener después de haber efectuado la simulación en la computadora :

Estado Inicial: 1
Decisión: 1

Período	Estado
1	1
2	2
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 2
Decisión: 2

Período	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 2
Decisión: 3

Período	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 3
Decisión: 1

Período	Estado
1	5
2	5
3	5
4	1
5	1
6	1
7	1
8	8
9	1
10	1

Estado Inicial: 3
Decisión: 2

Período	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial:3
Decisión: 3

Período	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 4
Decisión: 1

Período	Estado
1	6
2	6
3	6
4	6
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 4
Decisión: 2

Período	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 4
Decisión: 3

Período	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 5
Decisión: 1

Período	Estado
1	1
2	5
3	5
4	5
5	5
6	5
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 5
Decisión: 2

Período	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 5
Decisión: 3

Período	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 6
Decisión: 1

Período	Estado
1	6
2	6
3	6
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 6
Decisión: 2

Período	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial:6
Decisión:3

Período	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 7
Decisión: 1

Período	Estado
1	7
2	7
3	7
4	7
5	1
6	1
7	1
8	1
9	7
10	5

Estado Inicial: 7
Decisión: 2

Periodo	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 7
Decisión: 3

Periodo	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 8
Decisión: 1

Periodo	Estado
1	8
2	8
3	8
4	8
5	8
6	8
7	8
8	8
9	1
10	1

Estado Inicial: 8
Decisión: 2

Periodo	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 8
Decisión: 3

Periodo	Estado
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 9
Decisión: 1

Periodo	Estado
1	9
2	9
3	9
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

Estado Inicial: 9 Decisión: 2		Estado Inicial: 9 Decisión: 3	
Periodo	Estado	Periodo	Estado
1	1	1	1
2	1	2	1
3	1	3	1
4	1	4	1
5	1	5	1
6	1	6	1
7	1	7	1
8	1	8	1
9	1	9	1
10	1	10	1

A P E N D I C E I V.

PROGRAMA PARA REALIZAR LA SIMULACION DEL MODELO

```
{* SIMULACION*}
Program Omar;
Uses
  Crt;
Type
    Arreglo = Array[1..9,1..9] Of Real;
    Valores = Record
       Numero : Arreglo;
    End;
    Archivo = File Of Valores;
Var
   Matriz, Matriz2, Matriz3, MatA     : Arreglo;
   Registro                           : Valores;
   Mat                                : Archivo;
   i,j,k,EdoIni,Dec,Per               : Integer;
   num,num2,num3                      : Real;

Begin
   ClrScr;
   Randomize;
   Assign(Mat,'MatDec.DAT');     {'Omar.Dat');}
   Reset(Mat);
   k := 1;
   Writeln;
   Read(Mat,Registro);
   With Registro Do
      Matriz := Numero;
   Close(Mat);
   ClrScr;
   For i:=1 To 9 Do
   Begin
      For j:=1 To 9 Do
          Write('':2,Matriz[i,j]:5:3);
      Writeln;
   End;
   Readln;
   ClrScr;
   GotoXY(10,2); Write('Estado Inicial : '); Readln(EdoIni);
   GotoXY(10,3); Write('DecisiOn : '); Readln(Dec);
   GotoXY(10,4); Write('Número de PerIodos : '); Readln(Per);
   MatA := Matriz;
   ClrScr;
   For j:=1 To Per Do
   Begin
      num := Random;
      num2 := 0; num3 := MatA[EdoIni,1];
      If (num >= 0) And (num <= num3) Then  k := 1  { * k = Edo. Siguiente * }
      Else
```

```
        For i:=2 To 9 Do
        Begin
          num2 := num2 + MatA[EdoIni,i-1]; num3 := num3 + MatA[EdoIni,i];
          If  (num > num2) And (num <= num3) Then  k := i;
        End;
     {GotoXY(10,6+4*(j-1));} Writeln('Número Generado : ',num:6:4);
     {GotoXY(10,7+4*(j-1));} Writeln('Estado Siguiente : ',k:2);
     {GotoXY(10,8+4*(j-1));}
     For i:=1 To 10 Do  Write('':2,MatA[EdoIni,i]:6:4);
     Readln;
     EdoIni := k;
   End;
End.
```

PROGRAMA DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE

```
Program ji_cuad;

Uses
   Crt;

Const
   m    = 9;

Type
  Tama    = 1..m;
  Matriz  = Array[Tama,Tama] Of Real;
  Arreglo = Record
    Numero : Matriz;
  End;
  Arch    = File Of Arreglo;
  Valor   = Arreglo;

Var
  i, j              : Integer;
  E, O, T           : Matriz;
  Xi                : Real;
  Ch, Op            : Char;
  NomArch           : Arch;
  Num               : Valor;

Procedure  Lee_Mat ( Var MAT : Matriz; Rango : Integer; Nom : String );
Var
  i1, j1 : Integer;
Begin
  ClrScr;
  Writeln('':10,' Elementos de la Matriz  ',Nom);
  For i1:=1 To 9 Do
    For j1:=1 To 9 Do
    Begin
      GotoXY(20,3); Write('Elemento  ',Nom,' [ ',i1,',',j1,' ] : ');
      Readln(MAT[i1,j1]); GotoXY(20,3); ClrEol;
      GotoXY(4+8*(j1-1),i1+7); Write(MAT[i1,j1]:6:2);
    End;
End;
      If  E1[i1,j1] <> 0 Then
          Suma := Suma + Sqr(E1[i1,j1]-O1[i1,j1]) / E1[i1,j1];
  Calc_Ji := Suma;
End;
Procedure Guarda ( MAT : Matriz ; Archivo : String );
Begin
  Assign(NomArch,Archivo);
  ReWrite(NomArch);
  With Num Do
    For i:=1 To m Do
      For j:=1 To m Do
        Numero[i,j] := MAT[i,j];
  Write(NomArch,Num);
  Close(NomArch);
End;
Procedure Abre ( Var MAT : Matriz ; Archivo : String );
Begin
```

```
  Assign(NomArch,Archivo);
  ReSet(NomArch);
  Read(NomArch,Num);
  With Num Do
    For i:=1 To m Do
      For j:=1 To m Do
        MAT[i,j] := Numero[i,j];
  Close(NomArch);
End;
Procedure Lee_Arch;
Var
  Op2 : Char;
Begin
  ClrScr;
  Abre(T,'MatDec.DAT');
  Abre(O,'MatObs.DAT');
End;

Procedure Lee_Dat;
Var
  Op2, Op3 : Char;
Begin
  Lee_Mat(O,m,'Observadas');
  Lee_Mat(T,m,'Transición'); ClrScr;
  GotoXY(10,4); Write('¿ Desea guardar datos en algún Archivo (S/N) ? ');
  Op2 := ReadKey;
  Case Op2 Of
    'S' : Begin
            Guarda(T,'MatDec.DAT');
            Guarda(O,'MatObs.DAT');
          End;
  End;
End;
Begin
  ClrScr;
  GotoXY(10,2); Write('C lculo de la Xi - Cuadrada');
  GotoXY(10,4); Write('¿ Desea traer datos de algún Archivo (S/N) ? ');
  Op := ReadKey;
  Op := UpCase(Op);
  Case Op Of
    'S' : Lee_Arch;
    'N' : Lee_Dat;
  End;
  Writeln; Writeln; Write(' Presione Cualquier Tecla para Continuar ...');
  Ch := ReadKey; ClrScr;
  {*}
  GotoXY(30,1); Write('Prueba de la X² ');
  GotoXY(26,2); Writeln('Frecuencias Esperadas');
  Writeln('┌','':64,'┐');
  For i:=1 To 9 Do
  Begin
    Write('│ ',10*T[i,1]:5:2);
    For j:=2 To 9 Do
       Write('':2,10*T[i,j]:5:2);
    Writeln('  │');
  End;
```

```
  Writeln('└','':64,'┘');
  GotoXY(26,14); Writeln('Frecuencias Observadas');
  Writeln('┌','':64,'┐');
  For i:=1 To 9 Do
  Begin
Write('| ',O[i,1]:5:2);
    For j:=2 To 9 Do
      Write('':2,O[i,j]:5:2);
    Writeln('  |');
  End;
  Write('└','':64,'┘');
  {*}
  Readln;
  ClrScr;
  For i:=1 To 9 Do
    For j:=1 To 9 Do    E[i,j] := 10*T[i,j]; { 10 = # Simul. }
  Xi := Calc_Ji(E,O,m);
  ClrScr; GotoXY(10,5); Writeln('El valor de la Xi - Cuadrada es');
  Writeln; Write('':10,Xi:7:4);
  GotoXY(15,15); Write(' Presione Cualquier Tecla para Continuar ...');
  Ch := ReadKey;
  ClrScr;
 End.
```

B I B L I O G R A F I A.

B I B L I O G R A F I A

Hiller - Liberman . " Introducción a la Investigación de Operaciones". Cuarta Edición (Segunda en Español). Ed. Mc Graw Hill México, D.F. 1989.

González Videgaray María del Carmen. " Aplicación de Procesos Estocásticos". UNAM. 1985.

Prawda Juan. " Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones". Tomo II. Edición 2a. Ed. Limusa. México 1980.

Coss Bu Raul." Simulación : Un Enfoque Práctico ". Ed. Limusa

Naylor. " Técnicas de Simulación en Computadoras ". Ed. Limusa.

González de Romero María del Carmen. " Apuntes de la Materia de Modelos de Decisión con Procesos Estocáticos I ". México D.F. 1990.

I N D I C E   A L F A B E T I C O .

Indice Alfabético