1

2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LAS PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA Y EL METODO DE MODELOS INTERNOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. JOSE ALFREDO AMOR MONTAÑO

CIUDAD UNIVERSITARIA, D. F. 1993

INDICE

INTRODUCCION

Este trabajo esta dedicado al estudio de las Pruebas de Consistencia Relativa utilizando el método de Modelos Internos. Los objetivos fundamentales son los siguientes:

a) Precisar los conceptos de Consistencia e Independencia

b) Establecer de que manera se prueba la Consistencia Relativa con el método de Modelos Internos, es decir, establecer que resultado de Lógica justifica nuestras pruebas de Consistencia Relativa.

c) Dar ejemplos de Pruebas de Consistencia Relativa con el método de Modelos Internos, para lo cual utilizaremos la Teoría de Conjuntos ZF (Zermelo-Fraenkel).

En las siguientes líneas tratamos de resaltar la importancia y utilidad de las Pruebas de Consistencia Relativa.

Las primeras Pruebas de Consistencia Relativa las encontramos en Geometría y fueron motivadas por los estudios que se hicieron acerca del V postulado de Euclides. A continuación enunciamos los cinco postulados de Euclides:

I. Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.

II. Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.

III. Una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia.

IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

V. Si una recta que corta a otras dos forma con estas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.

Al leer el V postulado, notamos que no es tan conciso o comprensible como los cuatro primeros postulados, ni expresa al lector la misma "evidencia"; es decir, no tiene las propiedades que se requerían en un postulado.

Los geometras griegos sintieron que el V postulado tiene más de la naturaleza de una proposición que de un postulado, y por lo tanto trataron de deducirlo a partir de los otros 4.

El conjunto de teoremas que se desprenden únicamente de los postulados I – IV se denomina GEOMETRIA ABSOLUTA.

Por ejemplo, el enunciado:

(1) La suma de los ángulos internos de un triángulo no supera a dos rectos.

es un teorema de la Geometría Absoluta.

Los intentos por deducir el V postulado como un teorema a partir de los restantes postulados tuvieron ocupados a los geometras por más de dos mil años.

Se dieron pruebas, pero siempre se encontró que en dichas pruebas se utilizaba alguna suposición equivalente al propio postulado.

Una de las equivalencias del V postulado es debida al físico y matemático escocés John Playfair y que enunciamos como sigue:

"Por un punto dado no situado sobre una recta dada sólo puede trazarse una recta paralela a la recta dada".

Donde entendemos que dos rectas son paralelas, según la definición de Euclides

D23. Rectas paralelas son las que, estando en el mismo plano y prolongándose indefinidamente en ambos sentidos, no se cortan ni en uno ni en otro sentido.

En lo que sigue utilizaremos la equivalencia de Playfair cuando hagamos referencia al V postulado.

El problema del V postulado fue resuelto en el siglo XIX, principalmente por la obra de Bolyai, Lobachevsky, Gauss y Riemann. Finalmente se demostró la IMPOSIBILIDAD de deducir el V postulado a partir de los otros postulados, al mismo tiempo que se llegó a la idea de sustituir este postulado por otro que lo niegue, por ejemplo:

(•) "Existen una recta m y un punto A, tales que por A pasan no menos de dos rectas que no cortan a m y están en un mismo plano con ella". (Lobachevsky).

Cualquier sistema geométrico, cuya base postulacional contradiga algún postulado de la Geometría Euclideana es llamado GEOMETRIA NO EUCLIDEANA.

Siendo profesor de la Universidad de Kazán, Nikolai Ivánovich Lobachevsky en su informe a la Facultad de Física y Matemáticas (del 11 de febrero de 1826, según el calendario juliano vigente entonces en Rusia) y publicado a partir de 1829 en sus famosas INVESTIGACIONES GEOMETRICAS SOBRE LAS PARALELAS, por primera vez formula la idea de que el V postulado no puede ser deducido de los restantes postulados. Las investigaciones de Lobachevski trajeron como consecuencia que: (*) CONSISTENCIA (GEOMETRIA EUCLIDEANA) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ CONSISTENCIA (GEOMETRIA LOBACHEVSKIANA)

A una prueba de (*) la llamamos Prueba de Consistencia Relativa de la Geometría Lobachevskiana con respecto a la Geometría Euclideana.

La prueba rigurosa de (*) la realizaron E. Beltrami, F. Klein, H. Poincaré, A. Cayley y otros.

En el capítulo I discutimos la Consistencia Relativa de la Geometría Lobachevskiana con respecto a la Geometría Euclideana, utilizando una idea de Poincaré, en lo que se conoce como el modelo de Poincaré para la Geometría Plana Lobachevskiana. El método consiste en crear un modelo dentro de la Geometría Euclideana, de tal manera que una inconsistencia en la Geometría Lobachevskiana, implicaría una inconsistencia en la Geometría Euclideana.

De esta manera, hemos notado la importancia que tuvieron las Pruebas de Consistencia Relativa en el problema del V postulado.

Ahora presentamos un ejemplo de la utilidad de estas pruebas en la Teoría de Conjuntos, el problema que trataremos es el que se refiere a la Hipótesis del Continuo.

En sus trabajos sobre cardinalidad de Conjuntos, George Cantor demostró el siguiente resultado:

> La cardinalidad de los números naturales es menor que la cardinalidad de los números reales, es decir $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Una vez conocido que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, es interesante preguntarse

¿Existirá cardinal α tal que $|\mathbb{N}| < \alpha < |\mathbb{R}|$?

La respuesta a esta pregunta fue dada por Gödel y Cohen. Antes de ver como respondieron, hacemos algunos comentarios.

Al enunciado:

"No existe cardinal α tal que $|\mathbb{N}| < \alpha < |\mathbb{R}|$"

se le conoce como la HIPOTESIS DEL CONTINUO (Abreviamos H.C.) y fue conjeturada por George Cantor.

A la negación de la Hipótesis del Continuo la abreviamos como $\neg$H.C.

En 1933, Kurt Gödel mostró que la H.C. no podía ser refutada por los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos, es decir, que la $\neg$H.C. no es un teorema de la Teoría de Conjuntos.

En 1963, Paul Cohen mostró que la negación de la H.C. no podía ser refutada a partir de los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos, es decir, que la H.C. no es un teorema de la Teoría de Conjuntos.

Hacemos el comentario de que los resultados de Gödel y Cohen están sujetos a la hipótesis de que los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos (Teoría de Conjuntos ZF) sean consistentes.

Esto quiere decir que Gödel probó

$$\text{CONSISTENCIA}(ZF) \Rightarrow \text{CONSISTENCIA}(ZF + \text{H.C.})$$

y Cohen probó que

$$\text{CONSISTENCIA}(ZF) \Rightarrow \text{CONSISTENCIA}(ZF + \neg\, \text{H.C.})$$

Esto nos vuelve a ilustrar la utilidad de las Pruebas de Consistencia Relativa.

La Consistencia Absoluta de los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos, no se puede demostrar y esto es debido a un Teorema de Gödel que afirma que para cualquier teoría que pueda representar a la aritmética de los números naturales, si esta teoría es consistente entonces no se puede demostrar su consistencia por métodos formalizables en la misma teoría.

La consistencia de los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos se puede demostrar en otra teoría más fuerte, pero esta consistencia será una consistencia relativa a la consistencia de la teoría más fuerte.

PARTE I
PRECISANDO LOS CONCEPTOS DE CONSISTENCIA E INDEPENDENCIA

CAPITULO 1

MOTIVACION DEL CONCEPTO DE CONSISTENCIA Y DEL CONCEPTO DE PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA

Dentro de la axiomatización que los griegos conocían acerca de la Geometría hay un postulado que desde entonces causo especial atención: el conocido como el 5° postulado de Euclides.

A continuación enunciamos los 5 postulados, tal y como fueron redactados por Euclides:

1. Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.
2. Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.
3. Una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta que corta a otras dos forma con estas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.

Si comparamos el 5° postulado con los otros cuatro, vemos que a diferencia de estos, el 5° postulado no es *tan* conciso o comprensible, ni expresa al lector la misma "evidencia" es decir, carece de las características que se requerían en un postulado.

Euclides mismo trató de evitarlo mientras pudo, ya que no lo utilizó en sus demostraciones sino hasta que llegó a la proposición I 29.

A los geometras griegos les pareció que el 5º postulado tenía más de la naturaleza de una proposición que de un postulado.

En los intentos por deducir el 5º postulado como un teorema a partir de los restantes axiomas y postulados se produjeron demostraciones de este hecho, pero siempre se encontró que había sido utilizada alguna suposición equivalente al propio postulado.

Una de las equivalencias del 5º postulado es debida al físico y matemático escocés John Playfair y la enunciamos como sigue:

"Por un punto dado no situado sobre una recta solo puede trazarse una recta paralela a ella"

o equivalentemente

"Dada una recta y un punto fuera de ella, existe una y solo una recta que pasa por el punto dado y es paralela a la recta dada.

Generaciones enteras de matemáticos intentaron derivar este axioma o postulado, a partir de los otros axiomas o postulados durante más de dos mil años.

Fue solamente en el siglo XIX, principalmente por la obra de Gauss, Bolyai, Lobachevski y Riemann, cuando se demostró la IMPOSIBILIDAD de deducir el postulado de las paralelas a partir de los otros axiomas y postulados.

Y además trajó consigo la idea de sustituir este postulado por otro que lo niegue, por ejemplo:

I) Dada una recta y un punto fuera de ella, no hay ninguna recta que pase por el punto y sea paralela a la recta dada (Riemann).

II) Dada una recta y un punto fuera de ella, al menos hay dos rectas que pasan por el punto dado y son paralelas a la recta dada (Lobachevski).

Cualquier Sistema Axiomático para la Geometría, cuya base postulacional contradiga algún postulado de la Geometría Euclideana es llamada Geometría No Euclideana.

Las Geometrías No Euclideanas fueron consideradas como Inconsistentes con respecto al Espacio Físico, es decir, que sus axiomas eran claramente falsos respecto al Espacio Físico. Por lo tanto, fue decisivo establecer la consistencia de las Geometrías No Euclideanas.

Pero, ¿cómo puede mostrarse la Consistencia de la Geometría Plana **Lobachevskiana**, por ejemplo?

La idea básica es encontrar un "modelo" (o "interpretación") para los postulados del sistema en cuestión, de tal manera que cada postulado (o axioma) se convierta en una afirmación verdadera en tal modelo.

Para la Geometría Euclideana el modelo aceptado era el espacio de la vida ordinaria.

Para la Geometría Lobachevskiana el modelo o interpretación que emplearemos fue ideado por Henri Poincaré y conduce al llamado *modelo de Poincaré* de la Geometría Plana Lobachevskiana.

Elegimos una circunferencia Σ y la llamamos circunferencia fundamental. Damos a continuación las siguientes interpretaciones:

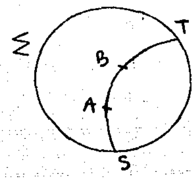
"punto" lo interpretamos como un punto en el interior de Σ.

"recta" lo interpretamos como la parte interior a Σ de cualquier circunferencia euclideana que sea ortogonal a Σ.

También damos algunas definiciones:

DEFINICION. medida de un ángulo entre dos "rectas" que se cortan es igual a la medida en radianes entre las dos circunferencias euclideanas que contienen a las dos "rectas".

DEFINICION. longitud de un "segmento" AB es igual a $\log[(AT/BT)(BS/AS)]$, donde S y T son los puntos en que la circunferencia euclideana que contiene al "segmento" AB corta a Σ, siendo puestos S y T de modo que A quede entre S y B. Deberá observarse que $(AT/BT)(BS/AS)>1$, de donde $\log[(AT/BT)(BS/AS)]>0$



y $(AT/BT)(BS/AS)>1 \iff (AT)(BS)<(BT)(AS)$ que claramente se cumple.

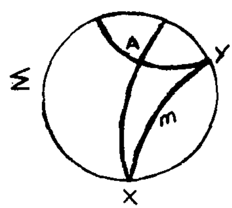
Con las interpretaciones anteriores cada postulado lobachevskiano tiene como traducción un teorema en la Geometría Euclideana.

De esta manera, el postulado lobachevskiano de las paralelas se traduce en una afirmación verdadera en la Geometría Euclideana.

Probemoslo:

Sea Σ una circunferencia euclideana fija.

Sean m una "recta" y A un "punto" fuera de la "recta" m, Supongamos que la circunferencia euclideana que contiene a la "recta" m corta a Σ en X y Y. Tracénse por A las dos circunferencias euclideanas ortogonales a Σ y que pasan respectivamente por X y Y. Estas circunferencias son distintas y además en el interior de Σ no tienen ningún punto en común con m, ya que estas circunferencias son tangentes respectivamente en X y Y a la circunferencia euclideana que contiene a m, pero X y Y no son puntos en el interior de Σ.



De esta forma, hemos visto que el postulado lobachevskiano de las paralelas se traduce en una afirmación verdadera en la Geometría Euclideana.

Aparentemente, esto prueba la consistencia de la Geometría Lobachevskiana. Sin embargo, lo único que se probaría es lo siguiente: la Geometría Lobachevskiana es consistente, siempre que la Geometría Euclideana resulte consistente.

Pero ahora cabe la pregunta

¿es consistente por sí misma la Geometría Euclideana?

En el pasado se argumentaba que la Geometría Euclideana se había construido de acuerdo al espacio de la vida ordinaria.

Sin embargo, existe la posibilidad de que haya un fenómeno del Espacio físico que hasta ahora no haya sido observado y que pueda ser contradictorio con los axiomas de la Geometría Euclideana.

Por lo tanto, este argumento ya no es aceptado. Así que mientras no se pruebe que la Geometría Euclideana es consistente por sí misma (y aquí lo que queremos decir es que no se apele a la consistencia de otro sistema), lo único que tendremos es:

CONSISTENCIA(GEOMETRIA EUCLIDEANA) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ CONSISTENCIA(GEOMETRIA LOBACHEVSKIANA) (1)

Tratando de probar la Consistencia de la Geometría Euclideana podemos mencionar el ensayo de Hilbert:

Hilbert recurre a un sistema algebraíco, transformando la expresión "punto" en un par de números, la expresión "recta" en una relación lineal, etc.

Sin embargo, el intento de Hilbert solo prueba lo siguiente:

CONSISTENCIA(SISTEMA ALGEBRAICO) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ CONSISTENCIA(GEOMETRIA EUCLIDEANA) (2)

A tal sistema algebraíco lo conocemos como Geometría Analítica.

A (1) y (2) las llamamos Pruebas de Consistencia Relativa.
De esta manera hemos motivado el concepto de Pruebas de Consistencia Relativa. Hemos visto que con la utilización de modelos se pueden producir Pruebas de Consistencia Relativa.
Nos interesa también precisar claramente el concepto de consistencia. Esta tarea la realizaremos en el capítulo siguiente.
Como un resumen a estas ideas finalizamos este capítulo con un comentario que hace Alonzo Church acerca de la consistencia:

> La noción de CONSISTENCIA de un sistema logístico tiene unu motivación semántica, que surge de la exigencia de que no ha de ser un teorema nada que sea lógicamente absurdo o que tenga un significado autocontradictorio, o de que no habra dos teoremas, uno de los cuales será la negación del otro. Pero pretendemos modificar esta noción originariamente semántica, de tal forma que tome un caracter sintáctico (y aplicable por lo tanto a un sistema logístico independientemente de la interpretación que se adopte para él) . . .

Church Alonzo.
Introduction to Mathematical Logic
Princeton University Press, 1956 (p.108)

Ver también
Hunter. Metalógica. Paraninfo (p.97)

CAPITULO 2
HACIENDO PRECISOS LOS CONCEPTOS DE CONSISTENCIA E INDEPENDENCIA

En el presente capítulo haremos precisos los conceptos de consistencia, independencia, deducción formal, axioma, etc.
En la primera sección lo haremos desde el punto de vista de los lenguajes formales (punto de vista sintáctico); en la segunda sección haremos resaltar este concepto de consistencia e independencia en un caso especial de lenguajes formales: el lenguaje formal de primer orden.
En la tercera sección discutiremos el concepto de consistencia y el concepto de independencia desde un punto de vista semántico.
En la cuarta parte haremos notar la relación entre el punto de vista formal y el punto de vista semántico, enunciando teoremas importantes acerca de dicha relación.

2.1 SISTEMAS FORMALES

2.1.1 DEFINICION. Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto al que llamamos alfabeto

(1) Una palabra en el alfabeto A es una sucesión finita de símbolos de A ($s_1, \ldots, s_n \in A$ entonces $w = s_1 \cdots s_n$ es una palabra)

(2) $L(A) = \{w / w$ es una palabra en el alfabeto $A\}$

a este conjunto lo llamamos el lenguaje en el alfabeto A.

Solo le pedimos al conjunto A que ninguno de sus elementos se pueda expresar como sucesión de otros símbolos de A.

De esta manera, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no podría ser alfabeto con esta condición. □

2.1.2. DEFINICION. Sea $A \neq \emptyset$

Un lenguaje formal es $\langle L(A), F \rangle$ donde

(1) $L(A)$ es lenguaje en el alfabeto A

(2) $F \subseteq L(A)$, $F \neq \emptyset$

A F lo llamamos el conjunto de formulas bien formadas (fbf's). □

2.1.3. EJEMPLO. Sea A un conjunto, $A \neq \emptyset$

Si $w \in L(A)$, $w = s_1 \cdots s_n$ con $s_i \in A$ para todo $1 \leq i \leq n$ entonces definimos $\ell(w) = n$

$$y \quad F_n = \{w / 0 < \ell(w) \leq n \ , w \in L(A)\}$$

y de esta manera

$\langle L(A), F_n \rangle$ es un lenguaje formal para todo $n \in \mathbb{N}$. □

2.1.4. DEFINICION. Un sistema formal (abreviamos SF) es una terna $\langle L(A), F, D \rangle$ donde

(1) $\langle L(A), F \rangle$ es un lenguaje formal

(2) $D \neq \emptyset$ es un conjunto de reglas de transformación (o inferencia). □

2.1.5. DEFINICION. Sea $SF = \langle L(A), F, D \rangle$, $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq F$
α es una deducción formal (o derivación formal)
en el SF y a partir de Σ si y solo si
existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ tales que
(1) $\alpha_n = \alpha$
(2) Para cada i, $1 \leq i \leq n$
$\alpha_i \in \Sigma$
α_i se obtuvo de anteriores por aplicación de alguna regla de inferencia.

En tal caso abreviamos $\Sigma \vdash_{SF} \alpha$ o $\Sigma \vdash \alpha$ si es claro cual es el SF. □

OBSERVACION. También podríamos llamar deducción formal a la lista "$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$". □

2.1.6. EJEMPLO. Sea $A = \{0, 1\}$
fbf's $= F_3 = \{w / 0 < \ell(w) \leq 3\}$
$D = \left\{\frac{\alpha}{\alpha 0}\right\}$ de α sólo obtenemos $\alpha 0$
$\Sigma = \{0, 01\}$, $\beta = 00$
se cumple que $\Sigma \vdash_{SF} 00$ ya que existe la deducción formal "0,00" cumpliendo:
$\alpha_1 = 0$; $\alpha_1 \in \Sigma$
$\alpha_2 = 00$; α_2 se obtuvo de α_1 por D . □

2.1.7. DEFINICION. Sea $SF = \langle L(A), F, D \rangle$ un sistema formal, $\Sigma \subseteq F$
(1) $\hat{\Sigma} = \{w / w \in F$ y $\Sigma \vdash_{SF} w\}$, $\hat{\Sigma}$ es llamada la cerradura
(2) Σ es consistente si y solo si $\hat{\Sigma} \neq F$
(3) Σ es deductivamente cerrado (DC) si y solo si $\hat{\Sigma} = \Sigma$
(4) Σ es inconsistente si y solo si Σ no es consistente. □

2.1.8. PROPIEDADES. Sean $SF = \langle L(A), F, D \rangle$ un sistema formal
$\Sigma \cup \Delta \cup \{\alpha\} \subseteq F$
(1) $\Sigma \vdash_{SF} \alpha$ y $\Sigma \subseteq \Delta$, entonces $\Delta \vdash_{SF} \alpha$
(2) $\Sigma \subseteq \Delta$ entonces $\hat{\Sigma} \subseteq \hat{\Delta}$
(3) $\hat{\hat{\Sigma}} = \hat{\Sigma}$
(4) $\Sigma \vdash_{SF} \alpha$ si y solo si existe $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que Σ_0 es finito y $\Sigma_0 \vdash_{SF} \alpha$. □

2.1.9. DEFINICION. Un sistema formal axiomático (abreviamos SFA) es $\langle L(A), F, D, \mathcal{a}\rangle$ donde

(1) $\langle L(A), F, D\rangle = SF$ es un sistema formal

(2) $\mathcal{a} \subseteq F$, $\mathcal{a} \neq \phi$, al que llamamos el conjunto de axiomas

(3) hay un procedimiento efectivo (algoritmo) para decidir si una fórmula α es axioma o no, y también para decidir si $\mathcal{a} \vdash_{SF} \alpha$ o no. □

Para un sistema formal axiomático hacemos una ampliación a la definición de deducción formal:

2.1.10. DEFINICION. Sea $SFA = \langle L(A), F, D, \mathcal{a}\rangle$ un sistema formal axiomático $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq F$. Decimos que $\Sigma \vdash_{SFA} \alpha$ si y solo si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tal que

i) $\alpha_n = \alpha$

ii) Para cada i, $1 \leq i \leq n$

$\alpha_i \in \Sigma$

o $\alpha_i \in \mathcal{a}$

o α_i se obtuvo de anteriores por alguna regla de inferencia.

A la sucesión "$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$" la llamamos deducción formal de α. □

Consideremos el caso en que $\Sigma = \phi$

2.1.11. DEFINICION. Sea $SFA = \langle L(A), F, D, \mathcal{a}\rangle$ un sistema formal axiomático $\alpha \in F$. Decimos que α es un teorema del SFA (abreviamos $\vdash_{SFA} \alpha$) si y solo si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tales que

(1) $\alpha_n = \alpha$

(2) para cada i, $1 \leq i \leq n$

$\alpha_i \in \mathcal{a}$

o α_i se obtuvo de anteriores por aplicación de alguna regla de inferencia. □

2.1.12. DEFINICION. $T_{SFA} = \{\alpha / \alpha \in F \text{ y } \vdash_{SFA} \alpha\}$. □

2.1.13. PROPIEDAD DE T_{SFA}. T_{SFA} es DC ($\hat{T}_{SFA} = T_{SFA}$)

PRUEBA

Recordamos que $\hat{T}_{SFA} = \{\omega / \omega \in F \text{ y } T_{SFA} \vdash \omega\}$

a) Probaremos que $T_{SFA} \subseteq \hat{T}_{SFA}$

Sea $\alpha \in T_{SFA}$, entonces $\alpha \in F$ y $\vdash_{SFA} \alpha$ por definición de T_{SFA},

si $\vdash_{SFA} \alpha$ entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

(1) $\alpha_n = \alpha$

(2) Para cada i, $1 \leq i \leq n$

$\alpha_i \in \mathcal{a}$

o α_i se obtuvo de anteriores por aplicación de alguna regla de inferencia esto podemos reescribirlo como que existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tq

(1) $\alpha_n=\alpha$

(2) Para cada i, $1\leq i\leq n$

$\alpha_i\in T_{SFA}$

o $\alpha_i\in \mathcal{a}$

o α_i se obtiene de anteriores.

Con lo que obtenemos que $T_{SFA}\vdash\alpha$, que junto con que $\alpha\in F$ nos implica que $\alpha\in\hat{T}_{SFA}$.

b) Ahora probaremos que $\hat{T}_{SFA}\subseteq T_{SFA}$

Sea $\alpha\in\hat{T}_{SFA}=\{\omega/\omega\in F$ y $T_{SFA}\vdash_{\overline{SFA}}\omega\}$

entonces $\alpha\in F$ y $T_{SFA}\vdash_{\overline{SFA}}\alpha$, por lo tanto existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tq

(1) $\alpha_n=\alpha$

(2) Para cada i, $1\leq i\leq n$

$\alpha_i\in T_{SFA}$

o $\alpha_i\in \mathcal{a}$

o α_i se obtiene de anteriores

Ahora para cada $\alpha_i\in T_{SFA}$ $\exists/n$ $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{im_i}$ tq (observamos que si $\alpha_i\in\mathcal{a}\Rightarrow\alpha_i\in T_{SFA}$)

1') $\alpha_{im_i}=\alpha_i$

2) para cada j, $1\leq j\leq m_i$

$\alpha_i\in\mathcal{a}$

o α_i se obtiene de anteriores.

Entonces existen $\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1m_1},\alpha_{21},\ldots,\alpha_{2m_2},\alpha_{n1},\ldots,\alpha_{nm_n}$ tales que cumplen con las condiciones (1) y (2) de deducción formal.

Por lo tanto $\alpha\in T_{SFA}$.

Por lo tanto $\hat{T}_{SFA}=T_{SFA}$. $\square$

En páginas posteriores usaremos el concepto de que algo no es deducción formal, por lo tanto concluimos esta sección con la siguiente

2.1.14. ABREVIACION.

Sea $SFA=\langle L(A),F,D,\mathcal{a}\rangle$, $\Sigma\cup\{\alpha\}\subseteq F$

$\Sigma\not\vdash_{SFA}\alpha$ abrevia que α no es una deducción formal a partir de Σ en el SFA (Sistema Formal Axiomático). $\square$

2.2. LENGUAJES FORMALES DE PRIMER ORDEN

En esta sección precisaremos el tipo de lenguaje que utilizaremos en el resto de este trabajo, a este tipo de lenguaje lo llamaremos Lenguaje Formal de Primer Orden, y en este lenguaje expresaremos las nociones de deducción formal, consistencia, independencia, axioma, etc.
Comenzamos con la siguiente definición

2.2.1. DEFINICION. ρ es un tipo de semejanza si y solo si
$$\rho = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C} \text{ donde}$$

1) $\mathcal{P}$ es un conjunto de símbolos formales posiblemente vacío. Si $P \in \mathcal{P}$, decimos que P es una letra predicativa y tiene asociado un número natural n $(n \geq 1)$ llamado aridad.
2) $\mathcal{F}$ es un conjunto de símbolos formales posiblemente vacío. Si $f \in \mathcal{F}$, decimos que f es una letra funcional y tiene asociado un número natural n $(n \geq 1)$ llamado aridad.
3) $\mathcal{C}$ es un conjunto de símbolos formales posiblemente vacío. Si $c \in \mathcal{C}$, a c lo llamamos constante individual. □

Estamos listos para precisar el lenguaje que utilizaremos

2.2.2. DEFINICION. Sea ρ un tipo de semejanza.
Un Lenguaje Formal de Primer Orden de tipo ρ, denotado por L_ρ es la unión de los siguientes conjuntos de símbolos

1) ρ
2) $\{v_i / i \in \mathbb{N}\}$, conjunto de variables
3) $\{), (, , \}$, conjunto de símbolos de puntuación
4) $\{\approx\}$, conjunto que tiene como elemento el símbolo de igualdad
5) $\{\neg, \wedge\}$, conjunto de conectivas
6) $\{\exists\}$, conjunto con un cuantificador

CONDICION: ningún símbolo es sucesión finita de otros símbolos.
A la unión de los conjuntos del 2) al 6) lo denotamos por SL = Conjunto de Símbolos Lógicos.
De esta manera, $L_\rho = SL \cup \rho$. □

2.2.3. OBSERVACION. En cuanto a que conjunto de símbolos lógicos (SL) usar existen diferentes opiniones, por ejemplo usar $\{\neg, \rightarrow\}$ o $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ como conjunto de conectivas. O tambien usar $\{\forall\}$ en lugar de $\{\exists\}$. □

2.2.4. OBSERVACION. $L_{\phi} = SL$. □

Como ejemplo para mostrar de que manera este lenguaje de Primer Orden puede recuperar nuestras ideas, definimos las siguientes fórmulas:

$\varphi : (\exists v_1)(\exists v_2)(\neg v_1 \approx v_2)$, la idea de tener al menos 2 elementos

$\varphi_n : \overset{n}{\underset{i=1}{\exists}} v_i \left(\bigwedge_{i \neq j} (\neg v_i \approx v_j) \right)$, la idea de tener al menos n elementos

Hacemos las siguientes definiciones que nos serán útiles.

2.2.5. DEFINICION. (Definición recursiva)

1) toda variable es un ρ-término
2) toda constante es un ρ-término
3) si $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son ρ-términos y $f \in \rho$ es una letra funcional de aridad n, entonces
$f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ es un ρ-término.

Los ρ-términos los denotaremos por las metavariables $\tau, \tau_1, \tau_2, \ldots$ □

2.2.6. DEFINICION. Una ρ-expresión es una sucesión finita de símbolos de L_ρ. □

Cuando sospechemos que hay una propiedad para todos los términos, nos gustaría saber de que manera podríamos verificarlo, esto lo hc emos con el siguiente principio

2.2.7. PRINCIPIO DE INDUCCION PARA ρ-TERMINOS.

Sea φ una propiedad que compete a ρ-términos.

Si se cumplen los 3 pasos siguientes:

1) $\varphi(v_i)$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$

2) $\varphi(c)$ para cualquier $c \in \mathcal{C}$

3) si $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son ρ-términos tq $\varphi(\tau_1), \ldots, \varphi(\tau_n)$ entonces $\varphi(f[\tau_1, \ldots, \tau_n])$ para toda letra funcional de aridad n.

Entonces

para cualquier τ que sea ρ-término, se tiene $\varphi(\tau)$.

A los pasos 1) y 2) se les llama la base de la inducción, al paso 3) se le llama paso inductivo. □

2.2.8. DEFINICION. Una ρ-fórmula atómica es una ρ-expresión de la forma: $(\tau_1 \approx \tau_2)$ ó $P(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ donde $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son ρ-términos y $P \in \mathcal{P}$ de aridad n. □

2.2.9. DEFINICION. Definición recursiva de fórmulas (fórmulas bien formadas)

1) Toda ρ-fórmula atómica es una ρ-fórmula

2) si α y β son ρ-fórmulas entonces $(\neg\alpha)$ y $(\alpha \wedge \beta)$ también son ρ-fórmulas

3) Si α es una ρ-fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x\, \alpha)$ es ρ-fórmula. □

2.2.10. DEFINICION. Sea $L_\rho = SL \cup \rho$

1) $L_\rho^T = \{\tau / \tau \text{ es un } \rho\text{-término}\}$

2) $L_\rho^P = \{\varphi / \varphi \text{ es una } \rho\text{-fórmula atómica}\}$

3) $L_\rho^f = \{\varphi / \varphi \text{ es una } \rho\text{-fórmula}\}$. □

2.2.11. PRINCIPIO DE INDUCCION PARA ρ- fórmulas

Sea $P \subseteq L^f_\rho$. Si suceden los 3 pasos siguientes:

1) toda ρ-fórmula atómica pertenece a P

2) si $(\alpha, \beta \in L^f_\rho$ y $\alpha, \beta \in P) \Rightarrow (\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta) \in P$

3) si $(\alpha \in L^f_\rho$ y x es una variable y $\alpha \in P) \Rightarrow (\exists x \alpha) \in P$

Entonces

$$P = L^f_\rho \; . \square$$

Ahora hacemos algunas definiciones acerca del cuantificador $\exists$

2.2.12. DEFINICION.

(1) Supongamos que $\exists V_n$ ocurre en la formula α. Entonces el alcance de $\exists$ en α es la 1a. fórmula escrita a continuación de $\exists V_n$

(2) V_n ocurre libre en φ (φ fórmula) $\Leftrightarrow$ V_n ocurre en φ y para cualquier cuantificador $\exists$ escrito en φ, se cumple que V_n esta fuera del alcance de $\exists$

(3) V_n ocurre ligada (cuantificada o acotada) en φ $\Leftrightarrow$ V_n está dentro del alcance de algun cuantificador $\exists$ escrito en φ

(4) φ es un ρ-enunciado $\Leftrightarrow$ φ no tiene ocurrencias libres de variables

$$L^e_\rho = \{\varphi \in L^f_\rho \,/\, \varphi \text{ es un } \rho\text{-enunciado}\} \; . \square$$

Con el fin de llegar a la definición de deducción formal damos algunas definiciones

2.2.13. DEFINICION

(1) Sean v, v_i variables y t un término, entonces $(v_i)^v_t = \begin{cases} t & \text{si } v = v_i \\ v & \text{si } v \neq v_i \end{cases}$

(2) sean c una constante, v una variable y t un término, entonces, $(c)^v_t = c$

(3) sean f una letra funcional de aridad n, v una variable, y $t, \tau_1, \ldots, \tau_n$ términos, entonces

$$[f(\tau_1, \ldots, \tau_n)]^v_t = f([\tau_1]^v_t, \ldots, [\tau_n]^v_t)$$

2.2.14. DEFINICION. Sean v una variable, t un término y φ una fórmula. Definimos recursivamente $(\varphi)^v_t$ como

(1) para atómicas

$$(\tau_1 \approx \tau_2)^v_t = ((\tau_1)^v_t \approx (\tau_2)^v_t) \text{ con } \tau_1, \tau_2 \text{ términos}$$

$$[P(\tau_1, \ldots, \tau_n)]^v_t = P((\tau_1)^v_t, \ldots, (\tau_n)^v_t) \text{ donde } \tau_1, \ldots, \tau_n \text{ son términos y } P \text{ es una letra predicativa}$$

(2) Sean α, β fórmulas, entonces

$$(\neg\alpha)^v_t = \neg((\alpha)^v_t)$$

$$(\alpha \wedge \beta)^v_t = ((\alpha)^v_t \wedge (\beta)^v_t)$$

(3) Sean v_i variable, α una fórmula

$$(\exists v_i \alpha)^v_t = \begin{cases} (\exists v_i \alpha) & \text{, si } v = v_i \\ \exists v_i((\alpha)^v_t) & \text{, si } v \neq v_i \text{ y } v_i \text{ no ocurre en } t \\ \exists z((\alpha^{v_i}_z)^v_t) & \text{, si } v \neq v_i \text{ y } v_i \text{ ocurre en } t \end{cases}$$

(donde z es la 1a. nueva variable $z \neq v$ que no aparece en $(\exists v_i \alpha)$, ni en t). □

2.2.15. DEFINICION. Sea α una fórmula, entonces $\forall x \alpha \equiv \neg\exists x(\neg\alpha)$. □

2.2.16. DEFINICION. Sean α, β, γ fórmulas, t un término, x una variable, y variable. Los AXIOMAS LOGICOS son las generalizaciones de

1) $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$
2) $((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$
3) $((\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha))$
4) $\forall x \alpha \to \alpha^x_t$
5) $(\alpha \to \forall x \alpha)$ si x no ocurre libre en α
6) $(\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha \to \forall x \beta))$
7) $x \approx x$
8) $x \approx y \to (\alpha \to \alpha')$, con α atómica y α' se obtiene de α reemplazando x por y en cero o más lugares. □

2.2.17. ABREVIACION. Al conjunto de todos los axiomas lógicos lo abreviamos como AxLog. □

2.2.18. DEFINICION. Definimos al $SF = \langle L_\rho, F, MP \rangle$ de la siguiente manera:

L_ρ es lenguaje formal de Primer Orden

$F = L_\rho^f$ = conjunto de fórmulas bien formadas, que ya definimos

MP es la siguiente regla de inferencia: $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

a MP lo llamamos modus ponens. $\square$

2.2.19. DEFINICION. Sea $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq F = L_\rho^f$.

Una deducción de α a partir de Σ es una sucesión $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ de fórmulas tales que

1) $\alpha_n = \alpha$

2) Para cada i, $1 \leq i \leq n$

a) $\alpha_i \in \Sigma \cup AxLog$

o b) Existen j, k menores que i tales que α_i se obtiene por modus ponens a partir de α_j y $\alpha_k = (\alpha_j \to \alpha_i)$

En tal caso abreviamos $\Sigma \vdash_{SF} \alpha$. $\square$

2.2.20. DEFINICION. Sea $SFA = \langle L_\rho, F, MP, \mathcal{A} \rangle$ un sistema formal axiomático de Primer Orden y sea $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq F = L_\rho^f$.

Una deducción de α a partir de Σ (abreviamos $\Sigma \vdash_{SFA} \alpha$) es una sucesión $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ de fórmulas tq

1) $\alpha_n = \alpha$

2) Para cada i, $1 \leq i \leq n$

a) $\alpha_i \in \Sigma \cup AxLog \cup \mathcal{A}$

o b) Existen $j, k < i$ tq α_i se obtiene por modus ponens a partir de α_j y $\alpha_k = (\alpha_j \to \alpha_i)$. $\square$

En realidad nosotros trabajaremos con SFA y en particular con el SFA que tiene como conjunto de axiomas a $\mathcal{A} = ZF$ = los axiomas de la Teoría de Conjuntos ZF.

Y en particular nos interesará el caso en que $\Sigma = \phi$.

De esta manera hacemos la siguiente definicion.

2.2.21. DEFINICION. Sea $SFA = \langle L_\rho, F, MP, a \rangle$ sistema formal axiomático de Primer Orden, y sea $\alpha \in F = L_\rho^f$.

1) α es un teorema del SFA si y solo si α tiene una deducción a partir de $\Sigma = \phi$

en tal caso abreviamos $\vdash_{SFA} \alpha$.

2) $T_{SFA} = \{\alpha / \alpha \in L_\rho^f \text{ y } \vdash_{SFA} \alpha\}$. □

2.2.22. ABREVIACION. Decimos que $\nvdash_{SFA} \alpha$ si no sucede que $\vdash_{SFA} \alpha$

Decimos que $\Sigma \nvdash_{SFA} \alpha$ (o $\Sigma \nvdash_{SF} \alpha$) si no sucede que $\Sigma \vdash_{SFA} \alpha$ ($\Sigma \vdash_{SF} \alpha$). □

Hemos llegado a las importantes definiciones de Consistencia e Independencia.

2.2.23. DEFINICION. Sea $SF = \langle L_\rho, L_\rho^f, MP \rangle$, $\Sigma \subseteq L_\rho^f$

1) Un conjunto Σ se dice consistente para SF si y solo si ninguna fórmula α es tal que $\Sigma \vdash \alpha$ y $\Sigma \vdash \neg\alpha$

2) Una formula α se dice independiente de Σ para SF si y solo si $\Sigma \nvdash \alpha$ y $\Sigma \nvdash \neg\alpha$

1) es la CONSISTENCIA en L_ρ

2) es la INDEPENDENCIA en L_ρ. □

De esta manera hemos precisado las nociones de CONSISTENCIA e INDEPENDENCIA en un lenguaje formal de primer orden.

2.3. CONSISTENCIA E INDEPENDENCIA. PUNTO DE VISTA SEMANTICO.

2.3.1. DEFINICION. Una estructura elemental es $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{R}, \mathcal{O}, \mathcal{E} \rangle$ tq

1) $A \neq \emptyset$
2) $\mathcal{R}$ conjunto de relaciones n-arias, $n \in \mathbb{N}$
3) $\mathcal{O}$ conjunto de operaciones n-arias, $n \in \mathbb{N}$
4) $\mathcal{E}$ conjunto de elementos distinguidos.

A $|\mathfrak{A}| = A$ lo llamamos el dominio de discurso. □

2.3.2. DEFINICION. Sea $\rho = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ un tipo de semejanza.
Una estructura $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{R}, \mathcal{O}, \mathcal{E} \rangle$ es de tipo ρ o ρ-estructura si y solo si
hay una función $I : \rho \longrightarrow \mathcal{R} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{E}$ (llamada función interpretación) tal que

1) si $P \in \mathcal{P}$ y es de aridad n, entonces $I(P) \in \mathcal{R}$ y es de aridad n
2) si $f \in \mathcal{F}$ y es de aridad m, entonces $I(f) \in \mathcal{O}$ y es de aridad m
3) si $c \in \mathcal{G}$, $I(c) \in \mathcal{E}$
4) I es suprayectiva

Denotamos $I(x) = x^{\mathfrak{A}}$. □

2.3.3. DEFINICION. Sea $\rho = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, sea $\mathfrak{A}$ una ρ-estructura, sea τ un ρ-término y $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$.
Definimos recursivamente la interpretación τ en $\mathfrak{A}$ bajo s denotado por $\tau^{\mathfrak{A}}[s]$

1) si $i \in \mathbb{N}$, $v_i^{\mathfrak{A}}[s] = s_i$
2) $c \in \mathcal{G}$, $c^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}}$
3) si $f \in \mathcal{F}$ y es de aridad $n (n \geq 1)$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son ρ-términos
$$f(\tau_1, \ldots, \tau_n)^{\mathfrak{A}}[s] = f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s])\ .\ \square$$

2.3.4. EJEMPLO. Sea $\rho = \{ f \text{ (1-aria)}, g \text{ (2-aria)}, c_1, c_2 \}$

sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, -, +, 0, 1 \rangle$

donde $-$ es la función inverso aditivo

y donde $+$ es la suma

$f^{\mathfrak{A}} = -$, $g^{\mathfrak{A}} = +$

$c_1^{\mathfrak{A}} = 0$, $c_2^{\mathfrak{A}} = 1$

sea $s = \langle 0, 2, 4, 6, 8, \ldots \rangle$, $\tau_1 = f(g(v_3, c_2))$

$$\Longrightarrow \tau_1^{\mathfrak{A}}[s] = f^{\mathfrak{A}}(g(v_3, c_2)^{\mathfrak{A}}[s]) =$$

$$= -(g^{\mathfrak{A}}(v_3^{\mathfrak{A}}[s], c_2^{\mathfrak{A}}[s])) =$$

$$= -(6+1) = -7 . \square$$

2.3.5. DEFINICION. Si $s = \langle s_1, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots \rangle$,

$\Longrightarrow s(n/d)$ es la sucesión $s(n/d) = \langle s_1, \ldots, d, s_{n+1}, \ldots \rangle$. $\square$

2.3.6. DEFINICION. Sea ρ tipo de semejanza, entonces $K_\rho = \{\mathfrak{A} / \mathfrak{A} \text{ es de tipo } \rho\}$. $\square$

2.3.7. DEFINICION DE SATISFACIBILIDAD (TARSKI)

Sea $\varphi \in L_\rho^f$, $\mathfrak{A} \in K_\rho$, $s \in |\mathfrak{A}|^\omega$, definimos $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$

1) $\varphi : (\tau_1 \approx \tau_2)$, $\mathfrak{A} \models (\tau_1 \approx \tau_2)[s] \Leftrightarrow \tau_1^{\mathfrak{A}}[s] = \tau_2^{\mathfrak{A}}[s]$

$\varphi : P_{n,k}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\mathfrak{A} \models (P_{n,k}(\tau_1, \ldots, \tau_n))[s] \Leftrightarrow \langle \tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s] \rangle \in P_{n,k}^{\mathfrak{A}}$

2) $\varphi : \neg\beta$, $\mathfrak{A} \models (\neg\beta)[s] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \beta[s]$

$\varphi : \beta \wedge \gamma$, $\mathfrak{A} \models (\beta \wedge \gamma)[s] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \beta[s]$ y $\mathfrak{A} \models \gamma[s]$

3) $\varphi : (\exists v_k \beta)$, $\mathfrak{A} \models (\exists v_k \beta)[s] \Leftrightarrow$ para algún $d \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \models \beta[(s(k/d))]$

Si además definimos: $\beta \vee \gamma \equiv \neg(\neg\beta \wedge \neg\gamma)$, $\beta \to \gamma \equiv \neg\beta \vee \gamma$

$\beta \leftrightarrow \gamma \equiv (\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \beta)$, $\forall v_k \beta \equiv \neg(\exists v_k (\neg\beta))$, entonces obtenemos:

•) $\varphi : \beta \vee \gamma$, $\mathfrak{A} \models (\beta \vee \gamma)[s] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \beta[s]$ o $\mathfrak{A} \models \gamma[s]$

••) $\varphi : \beta \to \gamma$, $\mathfrak{A} \models (\beta \to \gamma)[s] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \beta[s]$ o $\mathfrak{A} \models \gamma[s]$

•••) $\varphi : \beta \leftrightarrow \gamma$, $\mathfrak{A} \models (\beta \leftrightarrow \gamma)[s] \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \not\models \beta[s]$ o $\mathfrak{A} \models \gamma[s])$ y $(\mathfrak{A} \not\models \gamma[s]$ o $\mathfrak{A} \models \beta[s])$

••••) $\varphi : (\forall v_k \beta)$, $\mathfrak{A} \models (\forall v_k \beta)[s] \Leftrightarrow$ para todo $d \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \models \beta[s(k/d)]$. $\square$

2.3.8. DEFINICION. (Definición de verdadero y modelo).

Sean ρ un tipo de semejanza, $\mathfrak{A} \in K_\rho$, $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq L_\rho^f$

1) $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[s]$ para toda $s \in {}^\omega|\mathfrak{A}|$

2) φ es verdadera en $\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$

3) $\mathfrak{A}$ es un modelo de $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ es verdadera en $\mathfrak{A}$

4) $\mathfrak{A}$ es un modelo de $\Sigma \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \beta$ para todo $\beta \in \Sigma$

5) φ es falsa en $\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[s]$ para toda $s \in {}^\omega|\mathfrak{A}|$. $\square$

2.3.9. ALGUNAS PROPIEDADES.

Sean ρ un tipo de semejanza, $\mathfrak{A} \in K_\rho$, $s \in {}^\omega|\mathfrak{A}|$, $\Sigma \cup \Delta \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq L_\rho^f$

1) $\mathfrak{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \neg\varphi[s]$

2) $\mathfrak{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\neg\varphi[s]$

3) Para todo enunciado σ : $\mathfrak{A} \models \sigma$ o $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$, pero no ambos

4) $\mathfrak{A} \not\models (\forall v_k \varphi)[s] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\exists v_k (\neg\varphi))[s]$

5) $\mathfrak{A} \not\models (\exists v_k \varphi)[s] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\forall v_k (\neg\varphi))[s]$

6) $\mathfrak{A} \not\models (\varphi \rightarrow \psi)[s] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \neg\psi)[s]$

7) Versión de modus ponens

a) $\mathfrak{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[s], \mathfrak{A} \models \varphi[s] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi[s]$

b) $\mathfrak{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)$, $\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi$

8) Σ no tiene modelo y $\Sigma \subseteq \Delta \Rightarrow \Delta$ no tiene modelo

9) $\Sigma_\varphi = \{\varphi, \neg\varphi\}$ no tiene modelo

10) L_ρ^f, L_ρ^e no tienen modelo . $\square$

2.3.10. DEFINICION. Sean ρ un tipo de semejanza, $\Sigma \subseteq L_\rho^f$

1) $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathfrak{A} / \mathfrak{A} \in K_\rho , \mathfrak{A}$ es modelo de $\Sigma\}$

2) $\mathrm{Teo}(\mathfrak{A}) = \{\varphi / \varphi \in L_\rho^e , \mathfrak{A} \models \varphi\}$. $\square$

2.3.11. OBSERVACIONES. Sean ρ tipo de semejanza, $\mathfrak{A}\in K_\rho$, $\Sigma\subseteq L_\rho^f$

1) Σ tiene modelo $\iff Mod(\Sigma)\neq\emptyset$

2) a) $Teo(\mathfrak{A})\subseteq L_\rho^e$

b) $Teo(\mathfrak{A})$ tiene modelo, ya que $\mathfrak{A}$ es modelo estándar de $Teo(\mathfrak{A})$. □

En Teoría de Modelos tenemos una definición análoga a la definición de deducción formal.

2.3.12. DEFINICION. Sean ρ un tipo de semejanza, $\Sigma\cup\{\varphi\}\subseteq L_\rho^e$

1) φ es consecuencia lógica de Σ ($\Sigma\models\varphi$) si y solo si para todo $\mathfrak{A}\in K_\rho$ ($\mathfrak{A}$ es modelo de $\Sigma\implies\mathfrak{A}\models\varphi$)

2) φ no es consecuencia lógica de Σ ($\Sigma\not\models\varphi$) si y solo si existe $\mathfrak{A}\in K_\rho$ ($\mathfrak{A}$ es modelo de Σ y $\mathfrak{A}\not\models\varphi$)

3) φ es independiente de $\Sigma \iff \Sigma\not\models\varphi$ y $\Sigma\not\models\neg\varphi$

4) Σ es completo $\iff$ para todo $\beta\in L_\rho^e$, $\Sigma\models\beta$ o $\Sigma\models\neg\beta$

5) φ es dependiente de $\Sigma\iff\varphi$ no es independiente de Σ

6) Σ es incompleto $\iff\Sigma$ no es completo

7) Σ es consistente $\iff\Sigma$ tiene modelo

8) Σ es inconsistente $\iff\Sigma$ no tiene modelo

9) $Cn\,\Sigma=\{\beta\ /\ \Sigma\models\beta\}$. □

2.3.13. DEFINICION. Sea $\Sigma\subseteq L_\rho^e$

Σ es una teoría $\iff$ para todo $\varphi\in L_\rho^e$ ($\Sigma\models\varphi\implies\varphi\in\Sigma$). □

2.3.14. EJEMPLOS.

a) Para cualquier $\Sigma\subseteq L_\rho^e$, $Cn\,\Sigma$ es una teoría

b) Para cualquier $\mathfrak{A}\in K_\rho$, $Teo(\mathfrak{A})$ es una teoría. □

2.3.15. PROPIEDADES. Sea ρ tipo de semejanza, $\Sigma \cup \Delta \cup \{\varphi\} \subseteq L_\rho^e$, $\mathfrak{A} \in K_\rho$.

1) $\varphi \in \Sigma \Rightarrow \Sigma \models \varphi$

2) $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \subseteq \Delta \Rightarrow \Delta \models \varphi$

3) $\mathfrak{A}$ es modelo de $\Sigma \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ es modelo de $Cn\,\Sigma$

4) $\Sigma \subseteq \Delta \Rightarrow Cn\,\Sigma \subseteq Cn\,\Delta$

5) $Cn(Cn\,\Sigma) = Cn\,\Sigma$

6) Σ tiene modelo $\Leftrightarrow$ existe $\beta \in L_\rho^e$ tq $\Sigma \not\models \beta$

7) $\Sigma \not\models \varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ tiene modelo

8) $\Sigma \not\models \neg\varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\}$ tiene modelo

9) $\mathfrak{A}$ es modelo de $\Sigma \Leftrightarrow Cn\,\Sigma \subseteq Teo(\mathfrak{A})$

10) son equivalentes

a) Σ es incompleto

b) existe $\beta \in L_\rho^e$ tq β es independiente de Σ

c) existe $\psi \in L_\rho^e$ tq $\Sigma \cup \{\psi\}$ y $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ tienen modelo

d) existe $\gamma \in L_\rho^e$ tq $\{\gamma, \neg\gamma\} \cap Cn\,\Sigma = \emptyset$. $\square$

Como se vio en esta sección, los conceptos de Consistencia e Independencia también se tienen desde un punto de vista semántico.

2.4. Consistencia e Independencia.
Relación de los Puntos de vista Formal y Semántico.

En las secciones pasadas hemos definido Consistencia e Independencia usando dos puntos de vista: el Formal y el Semántico. En esta sección relacionaremos los dos puntos de vista.

Existe un teorema muy importante de la Lógica que nos permite establecer la relación entre estos 2 puntos de vista. Este teorema llamado Teorema de Completud apareció para lenguajes numerables en la tesis doctoral de Kurt Gödel en 1930.

El enunciado del Teorema es el siguiente

2.4.1. TEOREMA DE COMPLETUD (Gödel, 1930)

Sea $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq L_{\rho}^{e}$, entonces

1) si $\Sigma \vdash \alpha$, entonces $\Sigma \models \alpha$

2) si $\Sigma \models \alpha$, entonces $\Sigma \vdash \alpha$

A la parte 1) suele llamarsele Teorema de Validez o Correctud.
a la parte 2) suele llamarsele Teorema de Completud. $\square$

Para una prueba consultar:
Enderton, H.B. Una introducción matemática a la lógica. UNAM.

Este Teorema nos permite tener las siguientes equivalencias como corolario

2.4.2. COROLARIO. Sea $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq L_{\rho}^{e}$. Entonces

1) Σ es consistente desde el punto de vista formal $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ Σ es consistente desde el punto de vista semántico

2) α es independiente de Σ según el punto de vista formal $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ α es independiente de Σ según el punto de vista semántico. $\square$

El Teorema de Completud es de gran valor para nosotros:
Cuando trabajemos en consistencia e independencia, podremos utilizar los dos puntos de vista según nos convenga.
Por ejemplo, ser α independiente de Σ significa que $\Sigma \not\vdash \alpha$ y $\Sigma \not\vdash \neg\alpha$, por el Teorema de Completud podemos enunciar lo siguiente

2.4.3. DEFINICION. Sea $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq L_p^e$

$$\alpha \text{ es independiente de } \Sigma \iff \begin{array}{l} 1)\ \Sigma \not\vdash \alpha \\ 2)\ \Sigma \not\vdash \neg\alpha \end{array} \iff \begin{array}{l} 1')\ \Sigma \cup \{\neg\alpha\} \text{ tiene modelo} \\ 2')\ \Sigma \cup \{\alpha\} \text{ tiene modelo} \end{array} . \square$$

La razón de que estas propiedades se tengan es que las reglas de deducción formal estan dispuestas para que si $\Sigma \vdash \varphi$, entonces para cualquier $\mathfrak{A}$ que sea modelo de Σ, se tiene que $\mathfrak{A}$ es modelo de φ.
Dado $\mathfrak{A}$ modelo de $\Sigma \Rightarrow$ cualquier enunciado falso en $\mathfrak{A}$ no es demostrable de Σ, dado que $\neg\sigma$ y σ (σ enunciado) no pueden tenerse ambos en $\mathfrak{A}$, entonces Σ no puede probar a ambos, por lo tanto Σ es consistente.

CAPITULO 3
PRUEBAS DE CONSISTENCIA ABSOLUTA

3.1. UN EJEMPLO

3.1.1. DEFINICION.

(1) Sea $I \neq \phi$, $\mathbb{E} = \{p_j\}_{j \in I}$ es el conjunto de letras proposicionales.

(2) $A = \mathbb{E} \cup \{), (\} \cup \{ \neg, \rightarrow \}$

$\{), (\}$ símbolos técnicos

$\{ \neg, \rightarrow \}$ símbolos lógicos

(3) Fórmulas bien formadas son

i) cualquier letra proposicional

ii) si α, β son fbf's entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ son fbf's

$\mathfrak{F} = \{ \alpha / \alpha \text{ es fbf} \}$

$\langle L(A), \mathfrak{F} \rangle$ es el lenguaje formal para la lógica de enunciados

(4) Sean $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}$

$$(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg(\alpha \rightarrow \beta))$$

$$(\alpha \vee \beta) \equiv ((\neg\alpha) \rightarrow \beta)$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$$

(5) Sean $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}$. Definimos la Regla de Derivación Modus Ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{c}(\alpha \rightarrow \beta)\\ \alpha\end{array}}{\beta}$$

(6) $A_1 = \{ (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) / \alpha, \beta \in \mathfrak{F} \}$

$A_2 = \{ (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) / \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{F} \}$

$A_3 = \{ ((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) / \alpha, \beta \in \mathfrak{F} \}$

$\mathfrak{a} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. $\square$

Recordamos algunas definiciones

3.1.2. DEFINICION. Sea $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathfrak{F}$

Σ es consistente $\Longleftrightarrow$ no existe $\alpha \in \mathfrak{F}$ tal que $\Sigma \vdash \alpha$ y $\Sigma \vdash \neg\alpha$. $\square$

Demostraremos que $\mathfrak{a}$ es consistente.
Para esto usaremos el concepto de Tautología:

3.2. SEMANTICA

3.2.1. DEFINICION.

(a) los valores de verdad son: verdadero (1), falso (0)

$$2 = \{0, 1\}$$

(b) una interpretación de $\langle L(A), \mathfrak{F} \rangle$ es una función

$$v : \mathfrak{F} \longrightarrow 2 \quad \text{tal que}$$
$$v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$$
$$v(\alpha \to \beta) = \max(1 - v(\alpha), v(\beta)) = \max(v(\neg\alpha), v(\beta))$$

(c) sea $\alpha \in \mathfrak{F}$

α es una tautología $\Longleftrightarrow v(\alpha) = 1$ para toda interpretación v de $\langle L(A), \mathfrak{F} \rangle$. $\square$

3.2.2. TEOREMA. Los siguientes conjuntos de fórmulas son conjuntos de tautologías

$$A_1 = \{ (\alpha \to (\beta \to \alpha)) \ / \ \alpha, \beta \in \mathfrak{F} \}$$
$$A_2 = \{ (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \ / \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{F} \}$$
$$A_3 = \{ ((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to \beta) \ / \ \alpha, \beta \in \mathfrak{F} \}$$

es decir, $\mathfrak{a} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es un conjunto de tautologías.

PRUEBA

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{F}$; damos todos los casos para A_1, A_2, A_3, es decir, escribimos las tablas de verdad

Para A_1:

α	β	$\beta \to \alpha$	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Para A_3:

α	β	$\neg\beta$	$\neg\alpha$	$\neg\beta \to \neg\alpha$	$\alpha \to \beta$	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Para A_2:

α	β	γ	$\beta \to \gamma$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \to \gamma$	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\blacksquare$ $\square$

3.2.3. TEOREMA. Sea $\alpha \in \mathfrak{F}$

α es tautología para toda α tal que $\mathfrak{a} \vdash \alpha$

PRUEBA. Inducción

1) si $\alpha \in \mathfrak{a}$, α es tautología por teorema 3.2.2

2) si α se obtiene de $\beta \rightarrow \alpha$ y β por modus ponens

Sea $v: \mathfrak{F} \rightarrow 2$ cualquier interpretación de $\langle L(A), \mathfrak{F} \rangle$

Por hipótesis de inducción, $v(\beta \rightarrow \alpha) = 1$ y $v(\beta) = 1$

$\Rightarrow 1 = v(\beta \rightarrow \alpha) = \max(1 - v(\beta), v(\alpha)) = \max(0, v(\alpha)) = 1$

$\Rightarrow v(\alpha) = 1$

Pero v es una interpretación de $\langle L(A), \mathfrak{F} \rangle$ arbitraria

Por lo tanto α es tautología. $\square$

3.3. UNA PRUEBA DE CONSISTENCIA ABSOLUTA

3.3.1. DEFINICION.

Sea $\langle L(A), \mathfrak{F} \rangle$ el lenguaje formal para la lógica de enunciados y $\Sigma \subseteq \mathfrak{F}$

(a) Σ es simplemente consistente $\Leftrightarrow$ no existe $\alpha \in \mathfrak{F}$ tal que $\Sigma \vdash \alpha$ y $\Sigma \vdash \neg\alpha$ es decir, si es consistente según nuestras definiciones anteriores

(b) Σ es absolutamente consistente $\Leftrightarrow$ existe $\alpha \in \mathfrak{F}$ tal que $\Sigma \nvdash \alpha$

(c) Σ es simplemente inconsistente $\Leftrightarrow$ existe $\alpha \in \mathfrak{F}$ tal que $\Sigma \vdash \alpha$ y $\Sigma \vdash \neg\alpha$

(d) Σ es absolutamente inconsistente $\Leftrightarrow$ para todo $\alpha \in \mathfrak{F}$ se tiene $\Sigma \vdash \alpha$. $\square$

3.3.2. TEOREMA. Sea $\mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ como ya lo hemos definido, entonces

$\mathcal{A}$ es simplemente inconsistente $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ es absolutamente inconsistente

PRUEBA

$\Leftarrow]$ ✓

$\Rightarrow]$ Sea α tal que $\mathcal{A} \vdash \alpha$ y $\mathcal{A} \vdash \neg\alpha$

Por demostrar que $\mathcal{A} \vdash \beta$ para todo $\beta \in \mathfrak{F}$

sea $\beta \in \mathfrak{F}$ cualquier fórmula

$\Rightarrow \mathcal{A} \vdash \neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ ya que $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \in \mathcal{A}$

como $\mathcal{A} \vdash \neg\alpha \Rightarrow$ por modus ponens $\mathcal{A} \vdash (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

también $\mathcal{A} \vdash (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ por ser elemento de $\mathcal{A}$

como $\mathcal{A} \vdash (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow$ por modus ponens $\mathcal{A} \vdash \alpha \rightarrow \beta$

finalmente, ya que $\mathcal{A} \vdash \alpha \Rightarrow$ por modus ponens $\mathcal{A} \vdash \beta$ como se quería probar. □

3.3.3. COROLARIO. $\mathcal{A}$ es absolutamente consistente $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ es simplemente consistente . □

3.3.4. LEMA. Sean p, q letras proposicionales.

$p \vee q$ no es tautología

PRUEBA.

Recordamos que $p \vee q \equiv (\neg p \rightarrow q)$

sea v una interpretación cualquiera tal que $v(p) = 0$, $v(q) = 0$

podemos pensar por ejemplo en $v: \mathfrak{F} \rightarrow 2$ tal que $v(p_j) = 0$ para todo $j \in I$

$\Rightarrow v(p \vee q) = v(\neg p \rightarrow q) = \max(1 - v(\neg p), v(q)) = \max(1-1, 0) = \max(0,0) = 0$

Por lo tanto $p \vee q$ no es tautología. □

3.3.5. COROLARIO (Ejemplo de Una Prueba de Consistencia Absoluta)

Sea $\langle L(A), \mathfrak{F} \rangle$ el lenguaje formal de la lógica de enunciados

y sea $\mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ como ya lo hemos definido

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ es absolutamente consistente y simplemente consistente.

PRUEBA.

Sea $\alpha = p \vee q$ con $p, q \in \mathbb{E}$

Afirmamos que $\mathcal{A} \nvdash p \vee q$

Si $\mathcal{A} \vdash p \vee q \Rightarrow$ por el teorema 3.2.3 $p \vee q$ es tautología 8

es una contradiccion con el Lema 3.3.4 . Por lo tanto $\mathcal{A} \nvdash p \vee q$

Por lo tanto $\mathcal{A}$ es absolutamente consistente.

Y por corolario 3.3.3 $\mathcal{A}$ es simplemente consistente. □

3.3.6. CARACTERISTICAS DEL METODO QUE USAMOS PARA LAS PRUEBAS DE CONSISTENCIA ABSOLUTA

Para precisar nuestras ideas sobre el ejemplo que mostramos de una prueba de consistencia absoluta, resumimos sus características:

Sea $\langle L(A), \mathfrak{F}, D \rangle$ un sistema formal y $\Sigma \subseteq \mathfrak{F}$

El procedimiento de Pruebas de Consistencia Absoluta consiste en encontrar una propiedad de las fórmulas, que satisfaga la siguientes condiciones:

1) La propiedad debe satisfacerse para toda fórmula de Σ

2) La propiedad debe ser hereditaria a partir de las reglas de derivación, es decir, que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha \in \mathfrak{F}$ son fórmulas tales que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \alpha$

y α_i tiene la propiedad para todo i, $i = 1, \ldots, n$

$\Longrightarrow$ α tiene la propiedad

En este caso, β tiene la propiedad para todo β tal que $\Sigma \vdash \beta$

3) Debe existir una fórmula $\gamma \in \mathfrak{F}$ tal que γ no tiene la propiedad.

OBSERVACION. Para nuestro ejemplo particular, la propiedad que usamos fue la propiedad de "ser tautología".

PARTE II

EL TEOREMA FUNDAMENTAL PARA PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA CON EL METODO DE MODELOS INTERNOS

CAPITULO 4

LIMITACION DE LAS PRUEBAS DE CONSISTENCIA

Y JUSTIFICACION DE LAS PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA

4.1. LIMITACIONES DE LAS PRUEBAS DE CONSISTENCIA

Nuestros ejemplos de pruebas de consistencia estarán basadas en tomar como teoría a la Teoría de Conjuntos ZF, es decir a la teoría producida por los axiomas de ZF (Zermelo-Fraenkel). Sea $\Sigma \subseteq L_{\rho}^{e}$, si nosotros produjeramos un modelo M para Σ, estaríamos probando la consistencia de Σ. Sin embargo, ¿qué métodos empleamos para producir tal modelo M, o que propiedades tiene este M?

Intuitivamente ZF (la Teoría de Conjuntos ZF) es consistente, porque al proponer los axiomas, lo hacemos buscando que estos recuperen nuestra idea de conjunto, sin embargo no parece fácil establecer exactamente un modelo M para ZF de una manera formal (matemática) que elimine cualquier ambigüedad.

Para producir un tal M, sólo tenemos a la mano a Σ. Así que deseamos que utilizando a Σ podamos producir un modelo de Σ.

Por el Teorema de Completud de Gödel estaríamos dando una Prueba Absoluta de Consistencia, es decir, sin saber nada de la consistencia de Σ, producimos un modelo para Σ y al parecer utilizamos a Σ para producir tal modelo.

Existe una limitación para este tipo de pruebas, esta limitación de la que hablamos es el siguiente teorema

4.1.1.2° TEOREMA DE INCOMPLETUD DE GÖDEL.

> No hay una prueba de la consistencia de ZF por métodos formalizables dentro de ZF (ZF o una extensión de ZF). □

Para una prueba y un enunciado formal consultar
Enderton, H.B. Una introducción matemática a la lógica. UNAM

Esta limitación nos conduce al concepto de PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA

4.1.2. ABREVIACION. CON(S) = S es consistente. □

4.1.3. DEFINICION. Sean $S, T \subseteq L^e_\rho$.

> Hablamos de una Prueba de Consistencia Relativa si podemos probar que
>
> $\mathrm{CON}(S) \Longrightarrow \mathrm{CON}(T)$.
>
> Es decir, la consistencia de S implica la consistencia de T o T es relativamente consistente con respecto de S. □

Y también podemos dar la definicion de Prueba de Independencia Relativa.

4.1.4. DEFINICION. Sea $S\cup\{\alpha\}\subseteq L_p^e$.

Hablamos de una Prueba de Independencia Relativa si podemos probar que

$$CON(S) \Longrightarrow \begin{matrix} 1)\ CON(S\cup\{\alpha\}) \\ 2)\ CON(S\cup\{\neg\alpha\}) \end{matrix}$$

Es decir, la consistencia de S implica la independencia de α con respecto de S o α es relativamente independiente con respecto de S. $\square$

Nuestro método será:

Sea $S\cup\{\alpha\}\subseteq L_p^e$.

Si CON(S), entonces produciremos un modelo M de $S\cup\{\alpha\}$ para probar su consistencia. Y para la construcción de M utilizaremos a S mismo, es decir, utilizaremos las propiedades que tiene S para producir el M requerido.

En las siguientes secciones estableceremos de una manera más precisa este Método de Modelos Internos, así como probamos un teorema que garantiza que este método es correcto, es decir, es la justificación formal de las Pruebas de Consistencia Relativa por el Método de Modelos Internos.

Cuando lleguemos a los ejemplos estaremos usando este método para hacer Pruebas de Consistencia Relativa.

4.2. ALGUNAS OBSERVACIONES ACERCA DE TEORIAS AXIOMATICAS. Y ALGUNAS OBSERVACIONES DE NUESTRA TEORÍA PARTICULAR ZF.

Comenzamos recordando la definición 2.3.13 (página 28)

DEFINICION. Sea ρ un tipo de semejanza y $\Sigma \subseteq L^e_\rho$
Σ es una teoría $\Longleftrightarrow$ para todo $\varphi \in L^e_\rho$ $(\Sigma \models \varphi \Rightarrow \varphi \in \Sigma)$
También la llamamos una ρ-teoría. □
También damos la definición de teoría axiomatizable y sistema formal axiomático para un tipo de semejanza ρ.

4.2.1. DEFINICION. Sea ρ un tipo de semejanza
$\langle L_\rho, L^f_\rho, D, a\rangle$ es un sistema formal axiomático (SFA) si y solo si
(1) $\langle L_\rho, L^f_\rho, D\rangle$ es un sistema formal (SF)
(2) $a \subseteq F$, $a \neq \emptyset$, al que llamamos el conjunto de axiomas
(3) hay un procedimiento efectivo (algoritmo) para decidir si una fórmula α es axioma o no, y también para decidir si $a \vdash_{SF} \alpha$ o no. □

4.2.2. DEFINICION. Sea ρ un tipo de semejanza, $\Sigma \subseteq L^e_\rho$
Una ρ-teoría Σ es axiomatizable si y solo si existe un sistema formal axiomático SFA tal que $\Sigma = \{\sigma / \sigma$ es enunciado y $\vdash_{SFA} \sigma\}$. □

4.2.3. OBSERVACION. En este trabajó la expresión "una ρ-teoría Σ es axiomática" tiene el mismo significado que la expresión "una ρ-teoría Σ es axiomatizable". □

Estudiaremos un lenguaje formal particular: el lenguaje de la Teoría de Conjuntos de ZF y lo denotaremos L_{ZF}. Aquí $\rho = \{\in\}$.
La teoría axiomática ZF E, tiene como axiomas a:

0. Existencia de conjuntos

$$\exists x(x=x)$$

1. Extensionalidad

$$\forall x \forall y(\forall z(z\in x \leftrightarrow z\in y) \to x=y)$$

Esto lo interpretamos como que todo conjunto está determinado por sus elementos.

2. Fundacion

$$\forall x\,[\exists y(y\in x) \to \exists y(y\in x \wedge \neg\exists z(z\in x \wedge z\in y))]$$

Este axioma lo interpretamos como que todo conjunto no vacío tiene un elemento minimal con la pertenencia, es decir, tal que sus elementos ya no estan en el conjunto.

3. Comprehension (Esquema). Para cada fórmula φ con variables libres entre $x, z, w_1, \ldots, w_n$

$$\forall z\, \forall w_1, \ldots, w_n \exists y\; \forall x\,(x\in y \leftrightarrow x\in z \wedge \varphi)$$

"Si P es una propiedad acerca de conjuntos y x es un conjunto cualquiera, la colección de elementos de x que tienen la propiedad, también es un conjunto".

4. Del Par

$$\forall x\, \forall y\, \exists z(x\in z \wedge y\in z)$$

"Para cualesquiera 2 conjuntos, hay un conjunto que los tiene"

5. Unión

$$\forall \mathfrak{X}\, \exists A \forall Y \forall x(x\in Y \wedge Y\in \mathfrak{X} \to x\in A)$$

"Para cualquier conjunto X, hay un conjunto que tiene a todos los elementos de todos los elementos de X"

6. Reemplazo (Esquema). Para cada fórmula φ con variables **libres** entre $x, y, A, w_1, \ldots, w_n$

$$\forall A \forall w_1, \ldots, w_n [\forall x\in A\, \exists! y\, \varphi \to \exists Y\, \forall x\in A\, \exists y\in Y\, \varphi].$$

"La imagen de un conjunto por una función, es un conjunto"

7. Infinito

$\exists x(0\in x \land \forall y\in x(S(y)\in x))$

"Existe un conjunto inductivo".

a) Observación. 0 es simplemente el conjunto vacío, que no hemos probado que existe. Hagámoslo por comprehensión:
Por axioma 0, $\exists z(z=z)$
Por Comprehensión la colección $\{x\in z : x\neq x\}$ es conjunto
Por Extensionalidad $\neg\exists x(x\neq x)$
Por lo tanto $\{x\in z : x\neq x\}$ no tiene elementos, por lo tanto, otra vez por Extensionalidad, este conjunto es único.

b) Observación. $S(y)$ es simplemente $S(y)=y\cup\{y\}$

8. Conjunto Potencia.

$\forall x\exists y\forall z(z\subset x\rightarrow z\in y)$, donde $z\subset x\leftrightarrow\forall w(w\in z\rightarrow w\in x)$

"Para cualquier conjunto x, existe un conjunto que tiene a los subconjuntos de x"

9. Elección.

$\forall A\exists R$ (R es buen orden para A)

ZF consiste de los axiomas 0-8
ZF-P consiste de los axiomas 0-7
ZFE-P consiste de los axiomas 0-7 más el 9. ZFE consiste de 0-9.
ZFE^-, ZF^-, $ZF^- -P$, $ZFE^- -P$ abrevian respectivamente a ZFE, ZF, ZF-P, ZFE-P, todas ellas sin el axioma 2.
AE abrevia el axioma 9. Elección.

4.2.4. ALGUNAS OBSERVACIONES IMPORTANTES.

Utilizaremos el lenguaje de la Teoría de Conjuntos (ordinales, buen orden, etc.) y solo definiremos aquellos conceptos y mostraremos aquellos teoremas que sean útiles para nuestras Pruebas de Consistencia Relativa.

Informalmente, llamamos clase a cualquier colección de la forma $\{x : \varphi(x)\}$ donde x es libre sobre φ y φ puede tener otras variables libres llamadas parámetros y sobre las que depende la clase.

Entonces cuando hablemos de una clase M podemos identificarla con una fórmula $\varphi(x)$.

Al lenguaje de la Teoría de Conjuntos ZF lo denotamos por L_{ZF} y su tipo de semejanza no tiene constantes individuales, no tiene letras funcionales, y solo tiene una letra predicativa de aridad 2, a saber: $\in$, la relación de pertenencia.

4.3. JUSTIFICACION DE LAS PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA TEOREMA FUNDAMENTAL CON EL METODO DE MODELOS INTERNOS.

Daremos algunas definiciones y lemas para preparar la prueba de este importante Teorema.

4.3.1. DEFINICION. Sea M cualquier clase, entonces para cualquier fórmula φ definimos la fórmula φ^M – la relativización de φ a M –, de manera recursiva:

(1) $(x \approx y)^M$ es $x \approx y$

(2) $(x \in y)^M$ es $x \in y$

(3) $(\beta \wedge \psi)^M$ es $\beta^M \wedge \psi^M$

(4) $(\neg \phi)^M$ es $\neg(\phi^M)$

(5) $(\exists x \varphi)^M$ es $\exists x (x \in M \wedge \varphi^M)$. $\square$

Realmente, M es una fórmula $M(v)$, φ es otra fórmula, y definimos en la metateoría, una tercera fórmula φ^M. $(\exists x (x \in M \wedge \varphi^M))$ en realidad es $\exists x (M(x) \wedge \varphi^M)$

Mas brevemente, φ^M es la fórmula obtenida de φ por el reemplazo de todos los cuantificadores $\exists x$, por $\exists x \in M$.

4.3.2. PROPIEDADES

1) $(\beta \vee \psi)^M$ es $\beta^M \vee \psi^M$

2) $(\beta \rightarrow \psi)^M$ es $\beta^M \rightarrow \psi^M$

3) $(\beta \leftrightarrow \psi)^M$ es $\beta^M \leftrightarrow \psi^M$

4) $(\forall x \varphi)^M$ es $\forall x (M(x) \rightarrow \varphi^M) \equiv \forall x \in M (\varphi^M)$

Estas propiedades se obtienen directamente de las definiciones de $(\beta \vee \psi)$, $(\beta \rightarrow \psi)$, $(\beta \leftrightarrow \psi)$, $(\forall x \varphi)$. $\square$

4.3.3. LEMA. Sean $\mathfrak{A} = \langle A, \in \rangle$ una estructura y M una clase (fórmula) tq

1) $\mathfrak{A} \models \exists x (x \in M)$

Entonces

i) $\mathfrak{B} = \langle B, \in\restriction_B \rangle$ es estructura del mismo tipo de semejanza que $\mathfrak{A}$ donde $B = \{a \in A / \mathfrak{A} \models x \in M[a]\}$

ii) Para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $a_1, \ldots, a_n \in B$, se cumple

$$\mathfrak{A} \models \varphi^M [a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

PRUEBA.

i) Por demostrar que $|\mathfrak{B}| = B \neq \phi$, que se cumple por 1)

ii) Inducción sobre la formación de fórmulas φ

a) $\varphi = x \approx y = \varphi^M$

$\varphi = x \in y = \varphi^M$

sean $a_1, a_2 \in B \subseteq A$, entonces

$\mathfrak{A} \models (x \approx y)[a_1, a_2] \Leftrightarrow a_1 = a_2 \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (x \approx y)[a_1, a_2]$

$\mathfrak{A} \models (x \in y)[a_1, a_2] \Leftrightarrow \langle a_1, a_2 \rangle \in \in^{\mathfrak{A}}\restriction_B = \in\restriction_B = \in^{\mathfrak{B}} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (x \in y)[a_1, a_2]$

b) H.I. para ψ, χ

•) $\mathfrak{A} \models (\neg\psi)^M [a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\neg(\psi^M))[a_1, \ldots, a_n]$

$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi^M [a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \not\models \psi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\neg\psi)[a_1, \ldots, a_n]$

••) $\mathfrak{A} \models (\psi \wedge \chi)^M [a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\psi^M \wedge \chi^M)[a_1, \ldots, a_n]$

$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi^M [a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathfrak{A} \models \chi^M [a_1, \ldots, a_n]$

$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathfrak{B} \models \chi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\psi \wedge \chi)[a_1, \ldots, a_n]$

en ambos casos •) y ••) se tiene que: el primer $\Leftrightarrow$ es la definición de relativización, el segundo y cuarto $\Leftrightarrow$ es la definición de verdad y el tercer $\Leftrightarrow$ es por la hipótesis de inducción.

c) H.I para ψ y $\varphi = \exists x \psi$

$\mathfrak{A} \models (\exists x \psi)^M [a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\exists x (x \in M \wedge \psi^M))[a_1, \ldots, a_n]$

$\Leftrightarrow$ hay un $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models (x \in M \wedge \psi^M)[a, a_1, \ldots, a_n]$

$\Leftrightarrow$ hay un $a \in A$ tal que ($\mathfrak{A} \models x \in M[a, a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathfrak{A} \models \psi^M [a, a_1, \ldots, a_n]$)

$\Leftrightarrow$ hay un $a \in B$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi^M [a, a_1, \ldots, a_n]$

$\Leftrightarrow$ hay un $a \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \psi[a, a_1, \ldots, a_n]$

$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\exists x \psi)[a_1, \ldots, a_n]$

El primer $\Leftrightarrow$ es la definición de relativización
el segundo, tercero y sexto $\Leftrightarrow$ es la definición de verdad
el cuarto $\Leftrightarrow$ es por la definición de B
el quinto $\Leftrightarrow$ es por hipótesis de inducción. □

4.3.4. COROLARIO. Sean $\Gamma \cup \Sigma \subseteq L^e_{ZF}$ y M una clase (fórmula) tq

1) $\Gamma \vdash \exists x (x \in M)$

2) $\Gamma \vdash \sigma^M$ para todo $\sigma \in \Sigma$

Entonces

$\Gamma \vdash \varphi^M$ para todo enunciado φ tq $\Sigma \vdash \varphi$

PRUEBA.

Sea $\mathfrak{A} = \langle A, \in \rangle$ modelo de Γ. Por demostrar que $\mathfrak{A} \models \varphi^M$, con φ tq $\Sigma \vdash \varphi$ y además φ es enunciado.

Como $\mathfrak{A}$ es modelo de Γ y $\Gamma \vdash \exists x (x \in M) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists x (x \in M)$

$\Rightarrow$ por la parte i) del lema 4.3.3 $\mathfrak{B} = \langle B, \in \restriction_B \rangle$ es estructura del mismo tipo de semejanza que $\mathfrak{A}$, donde $B = \{a \in A / \mathfrak{A} \models x \in M[a]\}$

Como Σ es conjunto de enunciados (sin variables libres) $\Rightarrow$ por la parte ii) del lema 4.3.3: $(\mathfrak{A} \models \sigma^M \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma)$ para todo $\sigma \in \Sigma$ (*)

Como $\mathfrak{A}$ es modelo de Γ y $\Gamma \vdash \sigma^M$ para todo $\sigma \in \Sigma$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{A} \models \sigma^M$ para todo $\sigma \in \Sigma \Rightarrow$ por (*) $\mathfrak{B} \models \sigma$ para todo $\sigma \in \Sigma$,

como $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$

pero φ es enunciado (sin variables libres), entonces por LEMA 4.3.3 ii):

$\mathfrak{A} \models \varphi^M \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \models \varphi^M$. Justamente lo que se quería probar. □

4.3.5. TEOREMA FUNDAMENTAL PARA PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA, CON EL METODO DE MODELOS INTERNOS.

Sean $\Gamma \cup \Sigma \subseteq L^e_{ZF}$ y M una clase (fórmula) tq

1) $\Gamma \vdash \exists x (x \in M)$

2) $\Gamma \vdash \sigma^M$ para todo $\sigma \in \Sigma$

Entonces $(CON(\Gamma) \Rightarrow CON(\Sigma))$

PRUEBA.

Supongamos $CON(\Gamma)$, sea $\mathfrak{A} = \langle A, \in \rangle$ modelo de Γ.

Como $\mathfrak{A}$ es modelo de Γ y $\Gamma \vdash \exists x (x \in M) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists x (x \in M)$

$\Rightarrow$ por la parte i) del lema 4.3.3 $\mathfrak{B} = \langle B, \in \restriction_B \rangle$ es estructura del mismo tipo de semejanza que $\mathfrak{A}$, donde $B = \{a \in A / \mathfrak{A} \models x \in M[a]\}$

Nos bastaría probar que $\mathfrak{B}$ es modelo de Σ.

Como $\mathfrak{A}$ es modelo de Γ y $\Gamma \vdash \sigma^M$ para todo $\sigma \in \Sigma$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{A} \models \sigma^M$ para todo $\sigma \in \Sigma$ (*)

Como Σ es conjunto de enunciados (no tienen variables libres) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ por la parte ii) del Lema 4.3.3: $(\mathfrak{A} \models \sigma^M \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma)$ para todo $\sigma \in \Sigma$

$\Rightarrow$ por (*) obtenemos que $\mathfrak{B} \models \sigma$ para todo $\sigma \in \Sigma$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{B}$ es modelo de Σ. Por lo tanto $CON(\Sigma)$. □

4.4. OBSERVACIONES IMPORTANTES SOBRE MODELOS INTERNOS

4.4.1. DEFINICION. Sean $\Gamma \cup \Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq L^{e}_{ZF}$, M una clase

(1) "φ es verdadero en M" en el interior de Γ significa $\Gamma \vdash \varphi^{M}$

(2) "M es un modelo de Σ" en el interior de Γ significa que "σ es verdadero en M" para todo $\sigma \in \Sigma$. □

4.4.2. OBSERVACION. (Observación a la definición 4.4.1)

1') Con "φ es verdadero en M" tratamos de recuperar la idea intuitiva: $M \models \varphi$

2') Con "M es un modelo de Σ" tratamos de recuperar la idea intuitiva: $M \models \sigma$ para todo $\sigma \in \Sigma$. □

4.4.3. CONVENCION. (Convención a la definición 4.4.1)

Una vez hecha la observación 4.4.2, convenimos en omitir las comillas de la definición 4.4.1. □

4.4.4. OBSERVACION. (Observación a la definición 4.4.1)

En la definición 4.4.1 Σ, Γ usualmente serán $ZF, ZFE, ZF-P, ZFE-P, ZFE^{-}, ZF^{-}, ZF^{-}-P$, etc. □

4.4.5. CONVENCION. Para omitir la expresión "en el interior de Γ" que aparece en la definición 4.4.1, cuando nos refiramos a estos conceptos especificaremos a tal Γ escribiendo (Γ) después de la palabra DEFINICION, LEMA, TEOREMA, según sea el caso. □

4.4.6. CONVENCION. Cuando escribamos M (o N) estaremos pensando en una clase, por ejemplo

si escribimos: sea M transitiva

en realidad lo que queremos decir es que M es una clase transitiva. □

4.5. VARIANTE DE RELATIVIZACION Y TEOREMA FUNDAMENTAL

Daremos una variante de relativización. Para esto recordamos

•) Un relacional es una clase R tal que todos sus elementos son pares ordenados, es decir

$\forall x\,(R(x) \to \exists y,z\,(x=\langle y,z\rangle))$.

4.5.1. DEFINICION. Sean M una clase y E un relacional, entonces para cualquier fórmula φ definimos la formula $\varphi^{\langle M,E\rangle}$ — la relativización de φ a $\langle M,E\rangle$ —, de manera recursiva:

(1) $(x \approx y)^{\langle M,E\rangle} = x \approx y$

(2) $(x \in y)^{\langle M,E\rangle} = x\,E\,y$ (donde xEy abrevia $\exists z[z=\langle x,y\rangle \wedge E(z)]$)

(3) $(\beta \wedge \psi)^{\langle M,E\rangle} = \beta^{\langle M,E\rangle} \wedge \psi^{\langle M,E\rangle}$

(4) $(\neg\psi)^{\langle M,E\rangle} = \neg(\psi^{\langle M,E\rangle})$

(5) $(\exists x\,\varphi)^{\langle M,E\rangle} = \exists x(x\in M \wedge \varphi^{\langle M,E\rangle})$. □

4.5.2. OBSERVACION. La relativización natural de φ a una clase M es: $\varphi^{\langle M,\in\rangle} = \varphi^M$ que establecimos en la definición 4.3.1. □

4.5.3. OBSERVACION. Todas las propiedades y observaciones que se hicieron en la sección 4.3, tienen sus análogas con esta variante de relativización. Lo mismo para la sección 4.4. □

4.5.4. POR EJEMPLO. TEOREMA FUNDAMENTAL.

Se puede generalizar el Teorema Fundamental utilizando $\langle M,E\rangle$ en lugar de M.

Para las pruebas del lema 4.3.3 y el Teorema Fundamental 4.3.5 tendríamos $\mathfrak{B}=\langle B,\in^{\mathfrak{B}}\rangle$ donde $\mathfrak{A}=\langle A,\in^{\mathfrak{A}}\rangle$, $B=\{a\in A / \mathfrak{A}\models x\in M[a]\}$

$\in^{\mathfrak{B}} = \in^{\mathfrak{A}} \cap B^2$, es decir $\in^{\mathfrak{B}} = \{\langle b_1,b_2\rangle \in B^2 / \mathfrak{A}\models (v_0 E v_1)[b_1,b_2]\}$

PARTE III

EJEMPLOS DE PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA

CAPITULO 5
REQUISITOS DE CONJUNTOS

Para la discusión de nuestros ejemplos necesitamos precisar algunos conceptos, tales como transitividad y Absolutez. También será importante la definición de la clase WF.

5.1. Transitividad y Conjuntos Bien Fundados

5.1.1 DEFINICION. Un conjunto X es transitivo si y solo si todo elemento de X, es un subconjunto de X. $\square$

5.1.2 OBSERVACION. (a) X_i transitivo $\forall i \in I \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$ es transitivo
(b) X transitivo $\Longrightarrow \mathcal{P}(X)$ es transitivo

PRUEBA.

(a) sea $y \in \bigcup_{i\in I} X_i \Longrightarrow y \in X_i$ para algun $i \in I \Longrightarrow$ por la transitividad de X_i se tiene $y \subseteq X_i \Longrightarrow y \subseteq X_i \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$.

(b) Sea $y \in \mathcal{P}(X) \Longrightarrow y \subseteq X$; queremos probar que $y \subseteq \mathcal{P}(X)$
ahora sea $z \in y \Longrightarrow z \in X \Longrightarrow z \subseteq X$ por transitividad de X
$\Longrightarrow z \in \mathcal{P}(X)$
$\Longrightarrow$ hemos encontrado que $\forall z \in y$ se cumple $z \in \mathcal{P}(X)$
$\Longrightarrow y \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\square$

Aprovechamos para recordar la definición de ordinal

5.1.3 DEFINICION. X es un ordinal si y solo si X es transitivo y bien-ordenado por $\in$.

ON = clase de todos los ordinales. $\square$

En seguida, definimos la clase de los conjuntos bien fundados.

5.1.4. DEFINICION. Por recursión transfinita, definimos $R(\alpha)$ con $\alpha \in ON$ por:

(a) $R(0) = 0$

(b) $R(\alpha+1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$

(c) $R(\alpha) = \bigcup_{\varepsilon<\alpha} R(\varepsilon)$ cuando α es ordinal límite. □

5.1.5. DEFINICION.

$WF = \bigcup\{R(\alpha) : \alpha \in ON\}$

WF es la clase de los conjuntos bien-fondados. □

5.1.6. LEMA. Para cada α:

(a) $R(\alpha)$ es transitivo

(b) $\forall \varepsilon \leq \alpha \quad (R(\varepsilon) \subset R(\alpha))$

PRUEBA

Inducción

$\alpha = 0$ es inmedidto,

$\alpha = \beta+1$, como $R(\beta)$ es transitivo por HI

$\Rightarrow \mathcal{P}(R(\beta)) = R(\alpha)$ es transitivo por observacion 5.1.2.(b)

$\Rightarrow R(\beta) \subset R(\alpha)$ de aqui que $\forall \varepsilon \leq \alpha\ (R(\varepsilon) \subset R(\alpha))$ por HI.

α es límite, (a) se tiene de la H.I y de la observación 5.1.2.(a)

(b) se obtiene de la definición de $R(\alpha)$ cuando α es límite. □

5.1.7. DEFINICION. Sea $x \in WF$

rango(x) es el menor β tal que $x \in R(\beta+1)$. □

5.1.8. LEMA. Para cualquier α, $R(\alpha) = \{x \in WF : \text{rango}(x) < \alpha\}$

PRUEBA.

Sea $x \in WF$

$\text{rango}(x) < \alpha \Leftrightarrow \exists \beta < \alpha\ (x \in R(\beta+1))$

$\Leftrightarrow x \in R(\beta+1) \subseteq R(\alpha)$. □

5.1.9. LEMA. Si $y \in WF$, entonces
(a) $\forall x \in y (x \in WF \wedge rango(x) < rango(y))$
(b) $rango(y) = \sup\{rango(x)+1 : x \in y\}$

PRUEBA

(a) Sea $\alpha = rango(y)$, entonces $y \in R(\alpha+1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$
$\Longrightarrow y \subset R(\alpha)$
Si $x \in y \Longrightarrow x \in R(\alpha) \Longrightarrow x \in WF$ y ademas $rango(x) < \alpha$

(b) sea $\alpha = \sup\{rango(x)+1 : x \in y\}$
por (a) $rango(x) < rango(y) \Longrightarrow rango(x)+1 \leq rango(y) \quad \forall x \in y$
$\Longrightarrow \alpha \leq rango(y)$
y como $rango(x)+1 \leq \alpha$ por definición de α, entonces
se tiene que $rango(x) < \alpha$ para todo $x \in y$
entonces por Lema 5.1.8 $x \in R(\alpha) \Longrightarrow y \subseteq R(\alpha)$
$\Longrightarrow y \in \mathcal{P}(R(\alpha)) = R(\alpha+1)$
$\Longrightarrow rango(y) \leq \alpha$
por lo tanto $rango(y) = \alpha$. □

5.1.10. LEMA. (a) $\forall \alpha \in ON (\alpha \in WF \wedge rango(\alpha) = \alpha)$
(b) $\forall \alpha \in ON (R(\alpha) \cap ON = \alpha)$

PRUEBA.

(a) Inducción
Para $\beta < \alpha \Longrightarrow \beta \in ON \Longrightarrow$ por HI $\beta \in WF \wedge rango(\beta) = \beta$
$\Longrightarrow \beta \in R(\beta+1) = \mathcal{P}(R(\beta))$
Como $\beta < \alpha$, $\beta+1 \leq \alpha \Longrightarrow R(\beta+1) \subset R(\alpha) \Longrightarrow \beta \in R(\beta+1) \subset R(\alpha)$
$\Longrightarrow \forall \beta < \alpha$ se tiene $\beta \in R(\alpha) \Longrightarrow \alpha \subset R(\alpha)$
$\Longrightarrow \alpha \in R(\alpha+1) \Longrightarrow \alpha \in WF$
Por HI y por Lema 5.1.9 (b) $rango(\alpha) = \sup\{\beta+1 : \beta < \alpha\} = \alpha$

(b) por Lema 5.1.8 $R(\alpha) = \{x \in WF : rango(x) < \alpha\}$
$\Longrightarrow R(\alpha) \cap ON = \{x \in ON : rango(x) < \alpha\}$
como $x \in ON \Longrightarrow$ por Lema 5.1.10 (a) que ya probamos
se tiene que $R(\alpha) \cap ON = \{x \in ON : x < \alpha\} = \alpha$. □

5.1.11. LEMA (a) Si $x \in WF$, entonces $\bigcup x, \mathcal{P}(x), \{x\} \in WF$ y los rangos son menores que $\text{rango}(x)+\omega$.

(b) Si $x, y \in WF \Rightarrow x \times y, x \cup y, x \cap y, \{x,y\}, \langle x,y\rangle, {}^{y}x$ están en WF y su rango es menor que $\max(\text{rango}(x), \text{rango}(y)) + \omega$

PRUEBA.

(a) Sea $\alpha = \text{rango}(x) \Rightarrow x \subset R(\alpha) \Rightarrow \mathcal{P}(x) \subset \mathcal{P}(R(\alpha)) = R(\alpha+1) \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in R(\alpha+2)$.

Como $x \in R(\alpha+1) \Rightarrow \{x\} \subset R(\alpha+1) \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(R(\alpha+1)) = R(\alpha+2)$

si $y \in x$ $\text{rango}(y) < \text{rango}(x) = \alpha \Rightarrow y \subset R(\text{rango}(y)) \subset R(\alpha)$

$\Rightarrow \forall y \in x \quad y \subset R(\alpha) \Rightarrow \bigcup x \subset R(\alpha) \Rightarrow \bigcup x \in R(\alpha+1)$

(b) Sea $\alpha = \max(\text{rango}(x), \text{rango}(y))$

$x, y \in R(\alpha+1) \Rightarrow \{x,y\} \subset R(\alpha+1) \Rightarrow \{x,y\} \in \mathcal{P}(R(\alpha+1)) = R(\alpha+2)$.

tambien $\{x\} \in R(\alpha+2) \Rightarrow \langle x,y\rangle = \{\{x\},\{x,y\}\} \subset R(\alpha+2)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R(\alpha+3)$.

Como $\{x,y\} \in R(\alpha+2)$ y por lo que vimos en (a) $x \cup y = \bigcup\{x,y\} \in R(\alpha+2)$.

Como $x, y \in R(\alpha+1) \Rightarrow x, y \subset R(\alpha) \Rightarrow x \cap y \subset R(\alpha) \Rightarrow x \cap y \in R(\alpha+1)$.

Como $x \cup y \in R(\alpha+2)$, es decir que $x \cup y \subset R(\alpha+1)$

$\Rightarrow \forall x_1 \in x, \forall y_1 \in y$ se tiene que $x_1, y_1 \in R(\alpha)$

$\Rightarrow \{y_1\} \subset R(\alpha), \{y_1, x_1\} \subset R(\alpha)$

$\Rightarrow \{y_1\} \in R(\alpha+1), \{y_1, x_1\} \in R(\alpha+1) \Rightarrow \{\{y_1\},\{y_1,x_1\}\} \subset R(\alpha+1)$

$\Rightarrow \{\{y_1\},\{y_1,x_1\}\} = \langle y_1, x_1\rangle \in R(\alpha+2)$

de aquí que cualquier función $f: y \to x$ cumple $f \subset R(\alpha+2)$

$\Rightarrow f \in R(\alpha+3) \Rightarrow {}^{y}x \subset R(\alpha+3) \Rightarrow {}^{y}x \in R(\alpha+4)$.

Similarmente se puede ver que $x \times y \in R(\alpha+3)$. □

5.1.12. LEMA.

$\forall x (x \in WF \Leftrightarrow x \subset WF)$

PRUEBA. $\Rightarrow]$ Se cumple por la transitividad, $x \in WF$, $x \in R(\alpha)$ para algun α

$\Rightarrow x \subset R(\alpha) \subset WF$

$\Leftarrow]$ Si $x \subset WF$, sea $\alpha = \sup\{\text{rango}(y)+1 : y \in x\} \Rightarrow x \subset R(\alpha) \Rightarrow x \in R(\alpha+1)$. □

5.1.13. LEMA. $\forall n \in \omega \ (|R(n)| < \omega)$

PRUEBA. Inducción. $n=0$, $R(0)=0$, $|R(0)| = 0 < \omega$

Sup que $|R(n)| < \omega \Rightarrow |R(n+1)| = |\mathcal{P}(R(n))| = 2^{|R(n)|} < \omega$. □

5.1.14. LEMA. $|R(\omega)| = \omega$

PRUEBA. $R(\omega)$ es la unión contable de conjuntos contables. □

5.2 RELACIONALES Y RELACIONES

5.2.1. DEFINICION. (a) Un relacional es una clase R tal que todos sus elementos son pares ordenados, es decir

$$\forall x\,(R(x) \longrightarrow \exists y,z\,(x = \langle y,z\rangle))$$

(b) Un relacional que es conjunto, decimos que es una relacion. □

5.2.2. DEFINICION. (a) Un funcional es un relacional F que se comporta como función, es decir, que cualesquiera dos elementos de F con igual elemento izquierdo tienen igual elemento derecho, es decir

$$\forall x,y,z\,(F(\langle x,y\rangle) \wedge F(\langle x,z\rangle) \longrightarrow y = z)$$

(b) Una función es un funcional que es un conjunto. □

5.2.3 DEFINICION. Sea R un relacional (ó un funcional), entonces

$DOM(R) = \{y : \exists z\ R(\langle y,z\rangle)\}$, "el dominio de R"

$Ran(R) = \{y : \exists z\ R(\langle z,y\rangle)\}$, "el rango de R"

$Cam(R) = Dom(R) \cup Ran(R)$, "el campo de R". □

5.2.4 DEFINICION. Un relacional R es bien fundado si y solo si todo subconjunto no vacío de su campo tiene un elemento R-minimal, es decir

$$\forall X \subseteq Cam(R)[X \neq \emptyset \longrightarrow \exists y \in X(\forall z \in X\ \neg R(\langle z,y\rangle))]$$

5.2.5 EJEMPLOS.

(a) $\in = \{\langle x,y\rangle : x \in y\}$ es bien fundada (Regularidad)

(b) $\in_{ON}$ es bien fundada

(c) Si r bien fundada sobre a y $\langle a,r\rangle$ COTO entonces $\langle a,r\rangle$ COBO

(d) $\ni$ no es bien fundada

$x \in \{x\} \in \{\{x\}\} \in \ldots$ □

5.2.6. DEFINICION. Sea R relacional. X conjunto. La clase de los R-predecesores de X, X_R se define como:

$$X_R = \{y : R(\langle y, x\rangle)\}$$

observacion.

Si $X \notin Cam(R)$ entonces $X_R = \phi$

si $R = \in$ entonces $X_\in = X$. □

5.2.7. DEFINICION. Un relacional R es limitado por la izquierda ó como-conjunto si y solo si para todo conjunto X, X_R es conjunto, es decir, $\forall X$, X_R es conjunto

$$(ZF \vdash \forall x \exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow R(\langle z, w\rangle))). \square$$

5.2.8. EJEMPLOS

(a) $\in$ es limitado por la izquierda

(b) si R es relación, R es limitado por la izquierda

(c) $\ni$ no es limitado por la izquierda. □

5.3 INDUCCION Y RECURSION SOBRE RELACIONES BIEN FUNDADAS

5.3.1. TEOREMA. Principio de Inducción para relacionales bien fundados y limitados por la izquierda. (PIRBFLI).

Sea R relacional bien fundado y limitado por la izquierda, sea $\varphi(x)$ una formula. Entonces

Si $\forall x \in Cam(R)[\forall y (yRx \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)]$

entonces $\forall x \in Cam(R)\,(\varphi(x))$. □

5.3.2. COROLARIOS DE INDUCCION

(1) $\in$-induccion. Sea $\varphi(x)$ una fórmula

si $\forall x[\forall y \in x\ \varphi(y) \rightarrow \varphi(x)]$ entonces $\forall x \varphi(x)$. $(R = \in)$

(2) Inducción para ordinales. Sea $\varphi(x)$ fórmula

Si $\forall \alpha \in ON\left[\forall \beta\left(\begin{pmatrix}\beta \in ON \\ \wedge \beta \in \alpha\end{pmatrix} \rightarrow \varphi(\beta)\right) \longrightarrow \varphi(\alpha)\right]$ $(R = \in_{ON})$

entonces $\forall \alpha \in ON$, $\varphi(\alpha)$.

(3) 2° Principio de inducción para ordinales. Sea $\varphi(x)$ fórmula

Si $\varphi(0)$

$\forall \alpha \in ON\,(\varphi(\alpha) \rightarrow \varphi(\alpha+1))$

$\forall \alpha \in ON\,(\text{lím}(\alpha) \wedge \forall \beta\,(\beta \in \alpha \rightarrow \varphi(\beta)) \rightarrow \varphi(\alpha)]$

entonces $\forall \alpha \in ON$, $\varphi(\alpha)$.

(4) Inducción transfinita hasta un ordinal $\gamma > \omega$. Sea $\varphi(x)$ fórmula

si $\forall \alpha < \gamma [\forall \beta (\beta \in \alpha \rightarrow \varphi(\beta)) \rightarrow \varphi(\alpha)]$

entonces $\forall \alpha < \gamma,\ \varphi(\alpha)$.

(5) Inducción finita para naturales (hasta ω). Sea $\varphi(x)$ fórmula

Si $\forall \alpha \in \omega [\forall \beta (\beta \in \alpha \rightarrow \varphi(\beta)) \rightarrow \varphi(\alpha)]$

entonces $\forall \alpha \in \omega,\ \varphi(\alpha)$.

También llamada Inducción finita fuerte para naturales.

(6) Inducción finita (débil) para naturales. Sea $\varphi(x)$ fórmula

si $\varphi(0)$ y $\forall n \in \omega (\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1))$

entonces $\forall n \in \omega\ \varphi(n)$.

OBSERVACION. (5) $\Longleftrightarrow$ (6). $\square$

5.3.3. COROLARIOS DE MINIMALIDAD

(1) PRINCIPIO DEL ELEMENTO R-MINIMAL DE UNA CLASE NO-VACÍA PARA R-BIEN FUNDADA Y LIMITADA POR LA IZQUIERDA.

Sea R relacional bien fundado y limitado por la izquierda, sea $\varphi(x)$ una fórmula. Entonces

$\exists x\, \varphi(x) \rightarrow \exists x (\varphi(x) \wedge \forall y (yRx \rightarrow \neg \varphi(y)))$

es decir, si $C = \{x : \varphi(x)\}$ entonces

$C \neq \phi \rightarrow \exists x \in C$ tal que $\forall y (yRx \rightarrow y \notin C)$

PRUEBA.

Supongamos que $\forall x [\forall y (yRx \rightarrow \neg\varphi(y)) \rightarrow \neg\varphi(x)]$ PD $\forall x \neg\varphi(x)$

Sea x

Si $x \in Cam(R) \Rightarrow$ por PIRBFLI con $\neg\varphi$ se tiene $\neg\varphi(x)$

si $x \notin Cam(R) \Rightarrow \forall y (yRx \rightarrow \neg\varphi(y))$ se cumple por vacuidad, y por la suposición tenemos $\neg\varphi(x)$

Así en cualquier caso: $\forall x \neg\varphi(x)$.

(2) REGULARIDAD FUERTE. Sea $\varphi(x)$ fórmula

$\exists x\, \varphi(x) \rightarrow \exists x (\varphi(x) \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \neg\varphi(y)))$

Toda clase no vacía tiene un elemento $\in$-minimal

Aquí $R = \in_V$.

(3) PRINCIPIO DEL MINIMO ORDINAL. Sea φ fórmula tal que $\forall x(\varphi(x) \rightarrow Ord(x))$, entonces

$$\exists\alpha\,\varphi(\alpha) \rightarrow \exists\alpha(\varphi(\alpha) \wedge \forall\beta(\beta\in\alpha \rightarrow \neg\varphi(\beta)))$$

Toda clase de ordinales no vacía tiene un mínimo ordinal.

(4) PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN. Sea φ fórmula tal que $\forall x(\varphi(x) \rightarrow x\in\omega)$, entonces

$$\exists\alpha\,\varphi(\alpha) \rightarrow \exists\alpha(\varphi(\alpha) \wedge \forall\beta(\beta\in\alpha \rightarrow \neg\varphi(\beta))).\ \square$$

5.3.4. ESQUEMA GENERAL DE RECURSION

Sea R relacional bien fundado y limitado por la izquierda (sobre A)

Sea G funcional. Entonces

Podemos definir un funcional F tal que

(i) $Dom(F) = Cam(R)$ $(A = Cam(R))$

(ii) $\forall x\in Cam(R)$, $F(x) = G(F\restriction_{x_R})$

(iii) Si F' es otro funcional que satisface i), ii), entonces $F = F'$. $\square$

OBSERVACION.

(1) El esquema general de recursión puede reescribirse completamente en el lenguaje de ZF

(2) Puede darse para una clase A, que R cumpla $R\subset A\times A$ $(Cam(R)\subset A)$ y $Dom(F) = A$. Si $x\in A - Cam(R) \Rightarrow F(x) = G(\phi)$ pues $x_R = \phi$ y $F\restriction_\phi = \phi$. $\square$

5.3.5. COROLARIOS:

(1) 1^er Esquema de Recursión para Ordinales. Sea G funcional, podemos entonces definir F tal que

i) $Dom(F) = ON$

ii) $\forall\alpha\in ON$, $F(\alpha) = G(F\restriction_\alpha)$

iii) F es único con las propiedades i), ii).

Aquí $R = \in_{ON}$.

(2) 2º Esquema de Recursión para Ordinales. Sean H, J funcionales, sea a un conjunto. Podemos entonces definir F tal que

(i) $Dom(F) = ON$

(ii) $F(0) = a$

$F(\alpha+1) = H(F(\alpha))$

$F(\gamma) = J(F(\gamma))$ si γ es límite

(iii) F es unico con las propiedades i), ii).

PRUEBA.

Utilizando corolario (1) y definiendo

$$G(\langle x, y\rangle) \equiv (x = 0 \wedge y = a) \vee \exists\alpha\,(ord(\alpha) \wedge Fun(x) \wedge Dom(x) = \alpha+1 \wedge y = H(x(\alpha)))$$
$$\vee\ \exists\alpha\,(lím(\alpha) \wedge Fun(x) \wedge Dom(x) = \alpha \wedge y = J(x[\alpha])).$$

(3) Teorema de Recursión para naturales con funcionales.

Sea G funcional, a conjunto. Entonces hay una única funcion f tal que

(i) $Dom(f) = \omega$

(ii) $f(0) = a$

$\forall n \in \omega\ f(n+1) = G(f(n))$

(4) Teorema de Recursión para naturales con funciones

Sea g una función y a un conjunto tal que $a \in dom(g)$. Entonces hay una única función f tal que

$Dom(f) = 0$

$f(0) = a$

$\forall n \in \omega\ f(n+1) = g(f(n))$.

También tenemos la Justificación de la definicion 5.1.4

(5) Definición de la Jerarquía Acumulativa ó de los bien fundados, en Z.F.

$R(0) = \emptyset$

$R(\alpha+1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$

$R(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$ si α es límite

Aquí usamos el 2º esquema de Recursión para ordinales con $a = \phi$, $H = \mathcal{P}$, $J = \bigcup$

De esta manera también definimos

$$WF = \bigcup_{\alpha \in ON} R(\alpha)$$

(6) Definición de la Jerarquía de los Alephs

$$\aleph_0 = \omega$$
$$\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^{+}$$
$$\aleph_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \aleph_\beta \quad \text{si } \gamma \text{ es límite}$$

Aquí usamos $a=\omega$, $H=$ No. Hartog, $J=\bigcup$

(7) Definición de la Jerarquía de los Beths

$$\beth_0 = \omega$$
$$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$$
$$\beth_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \beth_\beta \quad \text{si } \gamma \text{ es límite}$$

(8) El universo definible ó constructible L de Gödel

$$L_0 = \phi$$
$$L_{\alpha+1} = D(L_\alpha)$$
$$L_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} L_\beta \quad \text{si } \gamma \text{ es límite}$$

$D(A)$ denota (intuitivamente) "el conjunto de todos los subconjuntos de A, definibles a partir de A", es decir

$$D(A) = \left\{ B \subset A \,/\, \begin{array}{l} B \text{ definible en el lenguaje de ZF a partir de} \\ \text{elementos de } A \text{ como parámetros} \end{array} \right\}$$

Si $\mathcal{L}_{ZF}^{n+1}$ denota el conjunto de fórmulas del lenguaje de ZF, con $n+1$ variables libres y φ^A denota la relativización de φ a A, podemos intentar precisar lo anterior, pero aún informalmente, ya que no sería una definición

$$D(A) = \left\{ \{x \in A : \varphi^A(y_0,\ldots,y_{n-1},x)\} \,/\, \varphi \in \mathcal{L}_{ZF}^{n+1}, y_0,\ldots,y_{n-1} \in A, n \in \omega \right\}$$

De esta manera aquí usamos $a=\phi$, $H=D$, $J=\bigcup$

Y obtenemos la definición $L = \bigcup_{\alpha \in ON} L_\alpha$. $\square$

5.4 EL COLAPSO DE MOSTOWSKI

5.4.1. TEOREMA DE ISOMORFISMO. Dos clases transitivas isomorfas son iguales. Es decir

Si M_1, M_2 son clases transitivas y $\Pi : \langle M_1, \in \rangle \cong \langle M_2, \in \rangle$ entonces $M_1 = M_2$ y $\Pi(u) = u \ \forall u \in M_1$.

PRUEBA. $\in$-inducción

Sea $x \in M_1$, supongamos que $\forall z \in x, \Pi(z) = z$

Veamos que $\Pi(x) = x$

$\supset]$ sea $z \in x \Rightarrow \Pi(z) = z$ por H.I y $z = \Pi(z) \in \Pi(x)$ por ser Π morfismo

$\subset]$ sea $t \in \Pi(x)$, como $\Pi(x) \in M_2$ y M_2 es transitiva tenemos $t \in M_2$

por ser Π sobre hay $z \in M_1$ tal que $\Pi(z) = t$

$\Rightarrow \Pi(z) = t \in \Pi(x) \Rightarrow \Pi(z) \in \Pi(x) \Rightarrow z \in x$

por H.I. para $z \in x$ se tiene $t = \Pi(z) = z \Rightarrow t \in x$.

Por lo tanto $\Pi(x) = x \ \forall x \in M_1$, por lo tanto $M_1 = M_2$. □

5.4.2. DEFINICION.

(1) Una relacional E es extensional sobre una clase M si y solo si $\langle M, E \rangle$ es modelo de Extensionalidad.

(2) Una clase M es extensional si y solo si $\langle M, \in \rangle$ es modelo de Extensionalidad. □

5.4.3. OBSERVACION.

M es extensional si y solo si $\in$ es extensional sobre M. □

5.4.4. OBSERVACION.

Toda clase transitiva es extensional

PRUEBA.

Sea M transitiva.

Queremos probar que $\forall x \in M \forall y \in M (\forall z \in M (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

Sean $x, y \in M$ y supongamos $\forall z \in M (z \in x \leftrightarrow z \in y)$

queremos probar que $x = y$

$\subset]$ sea $z \in x$, como $x \in M$ y M es transitiva, se tiene $z \in M$

por la suposición se tiene que $z \in y$,

$\supset]$ sea $z \in y$, como $y \in M$ y M es transitiva, se tiene $z \in M$

por la suposicion encontramos que $z \in x$,

por lo tanto $x = y$. □

5.4.5. TEOREMA DE MOSTOWSKI (COLAPSO DE MOSTOWSKI).

Si R es relacional bien fundado, limitado por la izquierda y extensional en una clase A ($R \subset A \times A$, o° $Cam(R) \subset A$).

Entonces :

(i) Hay una clase transitiva M y un isomorfismo π tal que $\langle A, R \rangle \underset{\pi}{\cong} \langle M, \in \rangle$. π y M únicos.

(ii) En particular, cualquier clase extensional (con $\in$) es isomorfa a una única clase transitiva.

(iii) En el caso ii), si $B \subseteq A$ y B transitiva, entonces $\forall x \in B,\ \pi(x) = x$.

PRUEBA.

(i) Sea G el relacional definido como:

$\langle u, v \rangle \in G \iff Func(u) \wedge \exists x \,(dom(u) = X_R) \wedge v = u[X_R]$

Como se puede ver, G es funcional y como R es bien fundada y limitado por la izquierda podemos definir por recursión un único funcional π tal que:

a) $dom(\pi) = A \supset Cam(R)$

b) $\forall x \in A,\ \pi(x) = G(\pi \restriction_{X_R}) = \{\pi(z) : z \in X_R\} = \pi[X_R]$

Sea $M = \{\pi(x) : x \in A\} = \pi[A]$

π se llama función de Mostowski

M se llama Colapso de Mostowski

Veamos que: M es transitiva, π es biyectiva, π es morfismo, π única, y por lo tanto M único.

- M transitiva:

Sea $y \in w \in M$. Entonces $w = \pi(x)$ para algún $x \in A$, entonces $w = \{\pi(z) : z \in X_R\}$

como $y \in w \Rightarrow y = \pi(z)$ para algún $z \in X_R \Rightarrow z R x$

de donde $z \in Cam(R) \subset A$. Así $y \in M$.

- π sobre:

Inmediato por definicion pues $M = \pi[A]$

- Π es 1-1: (Aquí usamos la extensionalidad de R en A).

Supongamos que no. Sea $z \in M$, de rango mínimo tal que $z = \Pi(x) = \Pi(y)$ con $x \neq y$.

Como R es extensional $X_R \neq Y_R$

Sin pérdida de generalidad, sea $u \in A$ tal que $u \in X_R - Y_R$

$\Rightarrow uRx$ y $u \not R y$

Así, por definición de Π, $\Pi(u) \in \Pi(x) = \Pi(y) = z$

$\Rightarrow \Pi(u) \in \Pi(y) \Rightarrow \Pi(u) = \Pi(v)$ para algún $v \in Y_R$

por lo que $u \neq v$. Pero $\Pi(u) \in \Pi(x) = z$ por lo que rango$(\Pi(u)) <$ rango(z) $\not\!\!8$.

- Π es morfismo: $xRy \Leftrightarrow \Pi(x) \in \Pi(y)$

$\Rightarrow$] si $xRy \Rightarrow$ de definición de Π, $\Pi(x) \in \Pi(y) = \{\Pi(z) / z \in Y_R\}$

$\Leftarrow$] si $\Pi(x) \in \Pi(y) \Rightarrow \Pi(x) = \Pi(z)$ para algún $z \in Y_R$

$\Rightarrow$ como Π es 1-1 se tiene que $x = z$, de donde $x \in Y_R$ es decir, que xRy.

- Unicidad:

Supongase Π_1, Π_2 dos isomorfismos de $\langle A, E \rangle$ sobre $\langle M_1, \in \rangle$ y $\langle M_2, \in \rangle$ respectivamente, $\Rightarrow \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1} : M_1 \cong M_2$

y como M_1, M_2 son transitivas, por Teorema de Isomorfismo $M_1 = M_2$ y $\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1} = Id$ de donde $\Pi_1 = \Pi_2$

ya que $\Pi_1(x) = Id \circ \Pi_1(x) = (\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}) \circ \Pi_1(x) = \Pi_2(x)$.

ii) Caso particular con $R = \in$ que es bien fundada por Regularidad y limitada por la izquierda y si M es extensional (con $\in$), entonces toda clase extensional es isomorfa a una clase transitiva.

iii) Si $B \subset A$, B transitivo, entonces $\forall x \in B$, $x \subset B \subset A$ y entonces $x \cap A = x$ de donde $\Pi(x) = \Pi[x \cap A] = \Pi[x]$

Veamos por $\in$-inducción que $\forall x \in B$, $\Pi(x) = x$:

supongase que $\forall z \in x$, $\Pi(z) = z \Rightarrow \Pi(x) = \Pi[x] = \{\Pi(z) / z \in x\}$

usamos la hipotesis de inducción para obtener

$\{\Pi(z) / z \in x\} = \{z / z \in x\} = x$, por lo tanto $\Pi(x) = x$. $\square$

OBSERVACION. Nótese que este Teorema de Mostowski generaliza el teorema de Enumeración: "todo COBO es isomorfo a un único ordinal". $\square$

5.4.6. COROLARIO. Si ZF tiene un modelo bien fundado con E limitado por la izquierda, entonces ZF tiene un modelo natural transitivo. $\square$

CAPITULO 6

4 EJEMPLOS DE PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA

Antes de pasar a los ejemplos, discutiremos un concepto importante.

6.1. Absolutez

6.1.1. DEFINICION. Sea φ una fórmula con a lo mas $x_1, \ldots, x_n$ libres

(1) Si $M \subset N$, φ es absoluta para M, N si y solo si

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in M \; (\varphi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^N(x_1, \ldots, x_n)).$$

(2) φ es absoluta para M si y solo si φ es absoluta para M, V. Equivalentemente

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in M \; (\varphi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)). \square$$

OBSERVACION. Todo lo anterior se dice y se hace desde un conjunto Π de enunciados, por ejemplo ZF ó ZF^- ó ZF - Potencia ó ZF - Infinito, etc. □

6.1.2. OBSERVACION. Si φ es absoluta para M, y es absoluta para N y $M \subset N$, entonces φ es absoluta para M, N. □

6.1.3. LEMA. Si φ, ψ son absolutas para M, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$ son absolutas para M

PRUEBA.

La prueba es clara si recordamos que $(\neg\varphi)^M = \neg\varphi^M$ y $(\varphi \wedge \psi)^M = \varphi^M \wedge \psi^M$ y usando contraposición y la definicion de absolutez. □

Dado que $x=y$ y $x\in y$ son absolutas para todo M, se tiene lo siguiente:

6.1.4. COROLARIO. Si φ no tiene cuantificadores, entonces φ es absoluta para cualquier M. $\square$

Sin embargo, existen fórmulas que son muy utilizadas y que involucran cuantificadores, tal como $X\subset Y$ (esto es $\forall z(z\in X\rightarrow z\in y)$)

Para el tratamiento de estas fórmulas, necesitamos algunos resultados y definiciones.

6.1.5. LEMA. Si M es transitiva y φ es absoluta para M, también es absoluta para M la fórmula $\exists x(x\in y\wedge\varphi)$

PRUEBA.

Indicamos todas las variables libres de φ, es decir, $\varphi(x,y,z_1,\ldots,z_n)$, entonces para cualquier $y,z_1,\ldots,z_n\in M$

$$[\exists x(x\in y\wedge\varphi(y,z_1,\ldots,z_n))]^M\longleftrightarrow\exists x(x\in y\wedge\varphi^M(y,z_1,\ldots,z_n))\longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow\exists x(x\in y\wedge\varphi(y,z_1,\ldots,z_n))$$

Para el primer $\longleftrightarrow$ se usa la transitividad de M para escribir $\exists x(x\in y\wedge\varphi^M(y,z_1,\ldots,z_n))$ en lugar de $\exists x\in M(x\in y\wedge\varphi^M(y,z_1,\ldots,z_n))$

Para el segundo $\longleftrightarrow$ utilizamos la absolutez de φ. $\square$

Llamamos a $\exists x\in y$ un cuantificador acotado, y una fórmula en la que todos los cuantificadores son acotados es llamada Δ_0. Formalmente:

6.1.6. DEFINICION. Las formulas Δ_0 las definimos recursivamente

(1) $x\in y$, $x=y$ son Δ_0

(2) si φ,ψ son Δ_0, así lo son $\neg\varphi$ y $\varphi\wedge\psi$

(3) si φ es Δ_0, tambien lo es $\exists x(x\in y\wedge\varphi)$. $\square$

6.1.7. COROLARIO. Si M es transitivo y φ es Δ_0, entonces φ es absoluta para M. $\square$

A pesar de que es raro encontrar una fórmula Δ_0, en ocasiones podemos encontrar una formula Δ_0 que sea lógicamente equivalente a la fórmula en cuestión. Por ejemplo,
$x \subseteq y$ es $\forall z(z\in x \to z\in y)$, que abrevia $\neg\exists z \neg(z\in x \to z\in y)$, esta fórmula no es Δ_0, sin embargo es lógicamente equivalente a $\neg\exists z\in x(\neg z\in y)$ que si es Δ_0.

Para justificar esta idea necesitamos el siguiente resultado:

6.1.8. LEMA. Sea Σ un conjunto de enunciados de $\mathcal{L}_{ZF}$ y M una clase novacía talque

(i) σ^M para todo $\sigma\in\Sigma$, es decir, $ZF\vdash\sigma^M$ para todo $\sigma\in\Sigma$

(ii) $\Sigma\vdash\forall x_1,\ldots,x_n(\varphi(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi(x_1,\ldots,x_n))$

Entonces

φ es absoluta para M si y solo si ψ es absoluta para M.

PRUEBA

Como $ZF\vdash\sigma^M$ para todo $\sigma\in\Sigma$

y $ZF\vdash\exists x M(x)$

entonces por el corolario 4.3.4

se cumple que $ZF\vdash\forall x_1,\ldots x_n\in M(\varphi^M(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi^M(x_1,\ldots,x_n))$ (*)

Ahora probemos el lema

$\Rightarrow]$ Sup. que φ es absoluta para M, y sean $x_1,\ldots,x_n\in M$ arbitrarios

Por demostrar que ψ absoluta para M

Por demostrar que $\psi^M(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi(x_1,\ldots,x_n)$

Por (*) se tiene que $\psi^M(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\varphi^M(x_1,\ldots,x_n)$

Por la absolutez de φ se tiene que $\varphi^M(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\varphi(x_1,\ldots,x_n)$

Pero por ii) se tiene $\varphi(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi(x_1,\ldots,x_n)$

Por lo tanto llegamos a que $\psi^M(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi(x_1,\ldots,x_n)$

pero $x_1,\ldots,x_n$ son cualesquiera elementos de M,

por lo tanto ψ es absoluta para M.

$\Leftarrow]$ Análogo. $\square$

OBSERVACION AL LEMA 6.1.8. En el lema 6.1.8 usamos la teoría particular ZF para facilitar la comprehension de la prueba, sin embargo ZF podría sustituirse por ZF^-, ZF-Potencia, ZF-Infinito, etc. $\square$

6.1.9. COROLARIO. Si φ y ψ son equivalentes en ZF, entonces para todo modelo M de ZF,

φ es M-absoluta si y solo si ψ es M-absoluta. □

6.1.10. OBSERVACION. Nuestra definición de funciones relativizadas a M se acepta sólo cuando su fórmula definitoria satisface existencia y unicidad en M y este criterio de existencia y unicidad en M es un teorema de ZF, por tanto hay una colección finita de axiomas de ZF a partir de los cuales se prueba tal teorema de existencia y unicidad. Formalmente

Si $ZF \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \exists! y\, \phi(x_1, \ldots x_n, y)$

y la función F esta definida como $F(x_1, \ldots, x_n) = y$

Si ademas $ZF \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \in M\, \exists! y \in M\, \phi^M(x_1, \ldots, x_n, y)_M$

entonces F^M esta definida como el único $y \in M$ tal que $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$. □

COMENTARIO. Como ya habíamos mencionado, para otras teorías como ZF^-, ZF-Potencia, ZF-Infinito, etc., el COROLARIO 6.1.9 y la observación 6.1.10 también son válidos. □

6.1.11. TEOREMA. Las siguientes relaciones y funciones pueden ser definidas en ZF^--P-Inf. Afirmamos que todas ellas son absolutas para cualquier M transitiva que sea modelo de ZF^--P-Inf.

(a) $x \in y$
(b) $x = y$
(c) $x \subset y$
(d) $\{x, y\}$
(e) $\{x\}$
(f) $\langle x, y \rangle$
(g) $z = \phi$
(h) $x \cup y$
(i) $x \cap y$
(j) $x \setminus y$
(k) $S(x)$ $(x \cup \{x\})$
(l) x es transitivo
(m) $\bigcup x$
(n) $\bigcap x$ (con $x \neq 0$)

PRUEBA.

La idea es escribirlas como fórmulas Δ_0, o mostrar que son equivalentes a fórmulas Δ_0.

(a) y (b) se tienen porque $x \in y$, $x = y$ so fórmulas Δ_0 por definición

(c) $x \subset y \leftrightarrow \neg\exists z \in x(\neg z \in y)$ que si es Δ_0

(d) $z = \{x, y\} \leftrightarrow [x \in z \wedge y \in z \wedge [\neg\exists w(w \in z \wedge [\neg w = x] \wedge [\neg w = y])]]$

y la fórmula de la derecha es Δ_0

(e) $\{x\}$ es análogo a (d)

(f) $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

coma ya vimos $\{x\}, \{x, y\}$ son lógicamente equivalentes a fórmulas Δ_0 por (d) y (e). Utilizando otra vez (d) para el par $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ obtenemos que es lógicamente equivalente a una fórmula Δ_0

(g) $z = \emptyset \leftrightarrow \neg\exists w(w \in z)$

(h) $z = x \cup y \leftrightarrow [x \subset z \wedge y \subset z \wedge \neg\exists w(w \in z \wedge \neg[w \in x] \wedge \neg[w \in y])]$

como $x \subset z$, $y \subset z$ son equivalentes a fórmulas Δ_0, entonces la fórmula de la derecha es equivalente a una fórmula Δ_0.

El mismo argumento es similar para (i)

(i) $z = x \cap y \leftrightarrow [z \subset x \wedge z \subset y \wedge \neg\exists w(w \in z \wedge [\neg(w \in x \wedge w \in y)])]$

(j) como $x \setminus y = x \cap y^c$, también obtenemos (j) por un argumento análogo al argumento en (i)

(k) $z = S(x) \leftrightarrow [x \in z \wedge x \subset z \wedge \neg\exists w(w \in z \wedge [\neg w = x] \wedge [\neg w \in x])]$

(l) x es transitivo $\leftrightarrow \neg\exists w(w \in x \wedge \neg[w \subset x])$

y sabemos que $w \subset x$ es equivalente a una fórmula Δ_0

(m) $z = \bigcup x \leftrightarrow [\neg\exists v(v \in x \wedge \neg(v \subset z)) \wedge \neg\exists w(w \in z \wedge \neg\exists v(v \in x \wedge w \in v))]$

(n) $z = \bigcap x \leftrightarrow [\neg\exists v(v \in x \wedge \neg(z \subset v)) \wedge \neg\exists w(w \in z \wedge \exists v(v \in x \wedge \neg[w \in v]))]$. $\square$

6.1.12. LEMA. Las nociones absolutas son cerradas bajo composición.

Esto es, si $\phi(x_1,\ldots,x_n)$, $F(x_1,\ldots,x_n)$, $G_i(y_1,\ldots,y_m)$ $1\leq i\leq n$ son absolutas para M, entonces también es absoluta para M la fórmula $\phi[G_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots G_n(y_1,\ldots,y_m)]$ y la función $F[G_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots G_n(y_1,\ldots,y_m)]$

PRUEBA. Sean $y_1,\ldots,y_m\in M$

$$(\phi[G_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,G_n(y_1,\ldots,y_m)])^M \longleftrightarrow \phi^M[G_1^M(y_1,\ldots,y_m),\ldots,G_n^M(y_1,\ldots,y_m)]$$

$$\longleftrightarrow \phi^M[G_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,G_n(y_1,\ldots,y_m)] \longleftrightarrow \phi[G_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,G_n(y_1,\ldots,y_m)]$$

el primer $\leftrightarrow$ es la definición de relativizacion

el segundo $\leftrightarrow$ es por la absolutez de G_i para todo $1\leq i\leq n$

el tercer $\leftrightarrow$ es por la absolutez de ϕ^M

Similarmente

$$(F[G_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,G_n(y_1,\ldots,y_m)])^M \longleftrightarrow F^M[G_1^M(y_1,\ldots,y_m),\ldots,G_n^M(y_1,\ldots,y_m)]$$

$$\longleftrightarrow F^M[G_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,G_n(y_1,\ldots,y_m)] \longleftrightarrow F[G_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,G_n(y_1,\ldots,y_m)]. \square$$

6.1.13. TEOREMA. Las siguientes relaciones y funciones son absolutas para cualquier modelo transitivo de $ZF^- - P - Inf$

(a) z es un par ordenado

(b) $A\times B$

(c) R es una relación

(d) $dom(R)$

(e) $ran(R)$

(f) R es una función

(g) $R(x)$

(h) R es una función 1-1

PRUEBA.

(a) z es un par ordenado $\leftrightarrow [\exists x \in \bigcup z \exists y \in \bigcup z\ (z=\langle x,y\rangle)$

y la fórmula de la derecha es obtenida por la sustitución de funciones absolutas en una relación absoluta, es decir

$G_1(z)=G_2(z)=\bigcup z$, $G_3(z)=z$ y $\phi(a,b,c)$ es $\exists x\in a \exists y \in b\ (c=\langle x,y\rangle)$

G_1, G_2 son absolutas por el teorema 6.1.11 (m) y ϕ es absoluta porque es obtenida por cuantificación acotada de la fórmula absoluta $c=\langle x,y\rangle$.

(b) $C=A\times B \leftrightarrow [\forall x\in A \forall y\in B\ (\langle x,y\rangle \in C) \wedge \forall z\in C \exists x\in A \exists y \in B\ (z=\langle x,y\rangle)]$

(c) R es una relación $\leftrightarrow [\forall z\in R$ (z es un par ordenado)$]$

(d) $A=\mathrm{dom}(R) \leftrightarrow [\forall x\in A \exists y \in \bigcup\bigcup R\ (\langle x,y\rangle\in R) \wedge \forall x\in \bigcup\bigcup R \forall y\in\bigcup\bigcup R\ (\langle x,y\rangle \in R \rightarrow x\in A)]$

(e) es similar a (d)

(f) R es función $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow [R$ es una relación $\wedge \forall x\in\bigcup\bigcup R \forall y\in \bigcup\bigcup R \forall y'\in\bigcup\bigcup R\ (\langle x,y\rangle\in R \wedge \langle x,y'\rangle \in R \rightarrow y=y')]$

(g) $y=R(x) \leftrightarrow [\ (\phi(x)\wedge \langle x,y\rangle \in R) \vee (\neg\phi(x) \wedge y=0)]$, donde $\phi(x)$ es la fórmula $\exists v\in \bigcup\bigcup R (\langle x,v\rangle \in R \wedge \forall w\in \bigcup\bigcup R\ (\langle x,w\rangle \in R \rightarrow v=w))$

(h) R es función 1-1 $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow [R$ es función $\wedge \forall x\in \mathrm{dom}(R) \forall x'\in\mathrm{dom}(R)\ (R(x)=R(x') \rightarrow x=x')]$

Todas las nociones, (b), ..., (h) son obtenidas de nociones absolutas por sustitución, por cuantificación acotada, y por conectivas proposicionales. Para obtener que son absolutas usamos el lema 6.1.12. □

6.2. PRIMER EJEMPLO

6.2.1. LEMA. Si M es transitiva, el Axioma de Extensionalidad es verdadero en M.

PRUEBA.

Extensionalidad relativizado a M es $\forall x, y \in M (\forall z \in M (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$.

Sean $x, y \in M$ y supongamos $\forall z \in M (z \in x \leftrightarrow z \in y)$. Por demostrar que $x = y$

$\subset]$ sea $z \in x$, como $x \in M$ y M es transitiva, se tiene que $z \in M$ usando que $\forall z \in M (z \in x \rightarrow z \in y)$ obtenemos que $z \in y \Rightarrow x \subset y$

$\supset]$ es análogo a $\subset]$ usando ahora que $\forall z \in M (z \in x \leftarrow z \in y)$. □

6.2.2. LEMA. Suponer que para toda fórmula $\phi(x, z, w_1, \ldots, w_n)$ sin otras variables libres que las exhibidas se cumple que $\forall z, w_1, \ldots, w_n \in M (\{x \in z / \phi^M(x, z, w_1, \ldots, w_n)\} \in M)$;

Entonces

El Axioma de Comprehensión es verdadero en M.

PRUEBA

Sea $\phi(x, z, w_1, \ldots, w_n)$ una fórmula. Para esta fórmula, el Axioma de Comprehensión relativizado a M es

$\forall z, w_1, \ldots, w_n \in M \exists y \in M \forall x \in M (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi^M(x, z, w_1, \ldots, w_n))$

Sean $z, w_1, \ldots, w_n \in M$, definimos $y = \{x \in z / \phi^M(x, z, w_1, \ldots, w_n)\}$

sabemos que $y = \{x \in z / \phi^M(x, z, w_1, \ldots, w_n)\} \in M$

entonces para todo x, y por lo tanto para todo $x \in M$, se cumple que

$x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi^M(x, z, w_1, \ldots, w_n)$. □

6.2.3. COROLARIO. Si $\forall z \in M (\mathcal{P}(z) \subset M)$, entonces el Axioma de Comprehensión es verdadero en M.

PRUEBA.

Sea $\phi(x, z, w_1, \ldots, w_n)$ una fórmula y sean $z, w_1, \ldots, w_n \in M$

$\Rightarrow \{x \in z / \phi^M(x, z, w_1, \ldots, w_n)\} \subset z \Rightarrow \{x \in z / \phi^M(x, z, w_1, \ldots, w_n)\} \in \mathcal{P}(z)$

como $z \in M$ y $\forall z \in M (\mathcal{P}(z) \subset M) \Rightarrow \{x \in z / \phi^M(x, z, w_1, \ldots, w_n)\} \in M$

entonces por lema 6.2.2, el Axioma de Comprehensión es verdadero en M. □

6.2.4. LEMA. (ZF$-$).

Si $M=\{0\}$, entonces los axiomas 0-3 junto con $\forall y(y=0)$, son verdaderos en M.

PRUEBA.

$\forall y(y=0)$ es en realidad $\forall y \forall x (x \notin y)$, relativizado a M resulta $\forall y \in M \forall x \in M (x \notin y)$ que es verdadero en M ya que $0 \notin 0$.

Axioma 0 es $\exists x(x=x)$. Relativizado a M es $\exists x \in M (x=x)$ que es verdadero en M, ya que $\exists 0 \in M (0=0)$

Axioma 1. Extensionalidad. Es verdadero en M por el lema 6.2.1 ya que $M=\{0\}$ es transitivo

Axioma 2. Fundación $\forall x[\exists y(y\in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z\in x \wedge z \in y))]$ relativizado a M es $\forall x \in M[\exists y \in M(y \in x) \rightarrow \exists y \in M (y \in x \wedge \neg \exists z \in M(z \in x \wedge z \in y))]$ que resulta verdadero en M porque el único elemento de M es 0 y por lo tanto $\neg\exists y(y \in 0)$

Axioma 3. Comprehension. Por el corolario 6.2.3 bastaría probar que $\forall z \in M(\mathcal{P}(z) \subset M)$

Sea $z \in M \Rightarrow z=0 \Rightarrow \forall z \in M(\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(0) = \{0\} = M \subset M)$. $\square$

1a. Prueba de Consistencia Relativa

6.2.5. COROLARIO

$\mathrm{CON}(ZF-) \Rightarrow \mathrm{CON}(\text{Extensionalidad} + \text{Fundación} + \text{Comprehensión} + \forall y(y=0))$. $\square$

6.3. SEGUNDO EJEMPLO

Primero hacemos algunas observaciones

$(z \subset x)^M$ abrevia $\forall v \in M (v \in z \to v \in x)$

que es equivalente a $z \cap M \subset X$,

entonces podemos escribir el Axioma del Conjunto Potencia Relativizado a M como $\forall x \in M \exists y \in M \forall z \in M (z \cap M \subset X \to z \in y)$

6.3.1. LEMA. Si M es transitiva. El Axioma del Conjunto Potencia se tiene en $M \iff \forall x \in M \exists y \in M (\mathcal{P}(x) \cap M \subset y)$.

PRUEBA

Si **M** es transitiva $z \cap M = z \ \forall z \in M$

entonces para $z, y \in M$ se tiene $(z \subset y)^M \leftrightarrow z \subset y$

entonces el Axioma del Conjunto Potencia se tiene en $M \iff$

$\iff \forall x \in M \exists y \in M \forall z \in M (z \subset x \to z \in y) \iff$

$\iff \forall x \in M \exists y \in M (\mathcal{P}(x) \cap M \subset y)$. □

6.3.2. LEMA. Si $\forall x, y \in M \exists z \in M (x \in z \wedge y \in z)$, ý $\forall x \in M \exists z \in M (\bigcup x \subset z)$ entonces los axiomas del Par y Unión son verdaderos en M.

PRUEBA.

El Par. $\forall x, y \in M \exists z \in M (x \in z \wedge y \in z)$ se tiene y es precisamente el Axioma del Par relativizado a M

Unión. Si tenemos $\forall x \in M \exists z \in M (\bigcup x \subset z)$

$\Rightarrow \forall x \in M \exists z \in M \forall y \forall w (w \in y \wedge y \in x \to w \in z)$

en particular, cuando $y \in M, w \in M$ obtenemos que

$\forall x \in M \exists z \in M \forall y \in M \forall w \in M (w \in y \wedge y \in x \to w \in z)$

que precisamente es el Axioma de Unión relativizado a M. □

6.3.3. LEMA. Sea M transitiva.

Suponer que podemos probar, para cada fórmula $\phi(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)$ y cada $A,w_1,\ldots,w_n \in M$ que:

si $\forall x \in A \exists ! y \in M \phi^M(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)$

$\Longrightarrow \exists Y \in M (\{y / \exists x \in A \phi^M(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)\} \subset Y)$

Entonces el Esquema de Reemplazo es verdadero en M

PRUEBA

Sea $\phi(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)$ una fórmula. Entonces el Axioma de Reemplazo relativizado a M queda para esta fórmula como:

$\forall A \in M \forall w_1,\ldots,w_n \in M [\forall x \in M (x \in A \rightarrow \exists ! y \in M \phi^M) \rightarrow (\exists Y \in M \forall x \in M [x \in A \rightarrow \exists y \in M (y \in Y \wedge \phi^M)]])$

como M es transitiva, para todo $A \in M$ se tiene que $x \in M \wedge x \in A \leftrightarrow x \in A$

similarmente, para $Y \in M$ se tiene que $y \in M \wedge y \in Y \leftrightarrow y \in Y$

por lo tanto el Axioma de Reemplazo relativizado a M es equivalente a

$\forall A \in M \forall w_1,\ldots,w_n \in M [\forall x \in A \exists ! y \in M \phi^M \rightarrow \exists Y \in M \forall x \in A \exists y \in Y \phi^M]$

sean $A,w_1,\ldots,w_n \in M$ y supongamos que $\forall x \in A \exists ! y \in M \phi^M$ (1)

entonces por la hipótesis del lema $\exists Y \in M (\{y / \exists x \in A \phi^M(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)\} \subset Y)$

nos bastaría probar que $\forall x \in A \exists y \in Y \phi^M$

sea $x_0 \in A$, por demostrar que $\exists y \in Y \phi^M$

como $x_0 \in A \Longrightarrow$ por (1) $\exists ! y_0 \in M \phi^M$

bastaría probar que $y_0 \in Y$

como x_0, y_0 son tales que se tiene $\phi^M(x_0,y_0,A,w_1,\ldots,w_n)$, entonces

$y_0 \in \{y / \exists x \in A \phi^M(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)\} \subset Y$

por lo tanto $y_0 \in Y$, como se quería probar. □

Partiendo de ZF^-, tenemos el siguiente lema

6.3.4. LEMA. El Axioma de Fundación es verdadero en cualquier $M \subset WF$.

PRUEBA. El Axioma de Fundación relativizado a M es

$\forall x \in M(\exists y \in M(y \in x) \Rightarrow \exists y \in M(y \in x \wedge \neg \exists z \in M(z \in x \wedge z \in y)))$

Sea $x \in M$ y supongamos que $\exists y \in M(y \in x)$

$\Rightarrow M \cap x \neq 0$, sea $y_0 \in M \cap x$ con rango α mínimo

como $\text{rango}(y_0) = \alpha \Rightarrow y_0 \in R(\alpha+1) \Rightarrow y_0 \subset R(\alpha)$

supongamos que existe $z \in M(z \in x \wedge z \in y_0)$

como $z \in M$ y $z \in x \Rightarrow z \in M \cap x$

ahora como $z \in y_0$ y $y_0 \subset R(\alpha) \Rightarrow z \in R(\alpha) \Rightarrow \text{rango}(z) < \alpha$

$\Rightarrow z \in M \cap x$ y $\text{rango}(z) < \alpha$ ✗ (contradicción con la minimalidad de α)

por lo tanto $\neg \exists z \in M(z \in x \wedge z \in y)$. □

6.3.5. LEMA. WF y $R(\omega)$ son modelos de $ZF-Inf$. (partiendo de ZF^-)

PRUEBA.

Sea $N = WF$ ó $N = R(\omega)$. En cualquier caso N es transitivo.

Axioma 0. $\exists x(x = x)$. relativizado es $\exists x \in N(x = x)$, se satisface ya que $R(\omega)$ y WF son no vacías.

Axioma 1. Extensionalidad. Se satisface por lema 6.2.1 ya que N es transitivo.

Axioma 2. Fundación. Como $N \subset WF$, Fundación es verdadero en N por lema 6.3.4

Axioma 3. Comprehensión. Sea $z \in N$, $\Rightarrow$ por lema 5.1.11 $\mathcal{P}(z) \in WF$ y rango de $\mathcal{P}(z) < \text{rango}(z) + \omega$ (de hecho $\text{rango}(\mathcal{P}(z)) = \text{rang}(z)+1$) $\Rightarrow$ en cualquier caso $\mathcal{P}(z) \in N$ y $\mathcal{P}(z) \subset N$, entonces por el corolario 6.2.3 el Axioma de Comprensión es verdadero en N.

Axioma 4. Del Par.

y Axioma 5. Union. También por el lema 5.1.11, N es cerrado bajo los operadores Par y Unión, entonces por e lema 6.3.2 encontramos que los axiomas del Par y Unión son verdaderos en N.

Axioma 6. Esquema de Reemplazo. Sea $\phi(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$ una fórmula, definimos $Y = \{y \in N : \exists x \in A\, \phi^N(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)\}$ con $A, w_1, \ldots, w_n \in N$ $\Rightarrow Y \subset N$, veamos los 2 casos:

(a) $N = WF$, por lema 5.1.12 $Y \subset N \Leftrightarrow Y \in N$. Por lo tanto $Y \in N = WF$

(b) $N = R(\omega)$, $\Rightarrow |Y| \leq |A| < \omega$

$\Rightarrow$ para algún n, $Y \subset R(n) \Rightarrow Y \in R(n+1) \subset N$.

Por lo tanto, por lema 6.3.3 el Esquema de reemplazo es verdadero en N.

Axioama 8. Conjunto Potencia. Similarmente a Comprehensión, encontramos que $\forall z \in N(\mathcal{P}(z) \in N) \Rightarrow \forall z \in N \exists \mathcal{P}(z) \in N\ (\mathcal{P}(z) \cap M \subset \mathcal{P}(z))$ entonces por lema 6.3.1. el Axioma del Conjunto Potencia es verdadero en N.

6.3.6. LEMA (ZF⁻). Sea M un modelo transitivo de $ZF^- - P - Inf$.

Sean $A, R \in M$ y suponer que R bien-ordena A.

$\Rightarrow$ (R bien-ordena A)^M

PRUEBA.

Notamos que (R totalmente ordena A)^M esta expresado usando propiedades básicas de pares y cuantificación sobre A,

$\Rightarrow$ (R totalmente ordena A) es absoluta para M por los resultados sobre absolutez probados en 6.1.11, 6.1.12, 6.1.13.

Para buen orden debemos checar que $(\forall x\, \phi(x,A,R))^M$,

donde $\phi(x,A,R)$ es la fórmula $x \subset A \wedge x \neq 0 \rightarrow \exists y \in x\, \forall z \in x\, (\langle z,y\rangle \notin R)$

ϕ también es absoluta por los resultados ya mencionados.

Por lo tanto bastaría probar que $\forall x \in M\, \phi(x,A,R)$

y esto se sigue del hecho de que R bien-ordena A.

6.3.7. LEMA (ZF⁻). $R(\omega)$ es modelo de AE

PRUEBA.

Debemos probar que $\forall A \in R(\omega)\, \exists R \in R(\omega) [(R \text{ bien-ordena } A)^{R(\omega)}]$

Sea $A \in R(\omega) \Rightarrow$ sin suponer **AE**, A es finito y por lo tanto puede ser bien ordenado. Sea $R \subset A \times A$ un buen-orden de A

$\Rightarrow R \in R(\omega)$

por lema 6.3.5, $R(\omega)$ es modelo transitivo de $ZF^- - P - Inf$

$\Rightarrow$ por lema 6.3.6 se tiene (R bien-ordena A)$^{R(\omega)}$.

6.3.8. LEMA (ZF⁻). El Axioma de Infinito es falso en $R(\omega) = M$.

<u>PRUEBA</u>.

Por teorema 6.1.11 (g), (k) tenemos que 0 y S son absolutas para M, en consecuencia Infinito relativizado a M es equivalente a

$$\exists x \in R(\omega)\, (0 \in x \wedge \forall y \in x\, (S(y) \in x)),$$

ahora como $\text{rango}(S^{n+1}(0)) = \text{rango}(S^n(0)) + 1$

$\Rightarrow$ resulta que un tal x que tenga a 0 como elemento y sea cerrado bajo S, deberá tener rango infinito; pero los elementos de $R(\omega)$ tienen rango finito.

2a. Prueba de Consistencia Relativa

6.3.9. COROLARIO (ZF^-). $R(\omega)$ es modelo de $ZFE - Inf + (\neg Inf)$

PRUEBA.

Por lema 6.3.5, $R(\omega)$ es modelo de $ZF - Inf$.

Por lema 6.3.7, $R(\omega)$ es modelo de AE.

Por lema 6.3.8, $R(\omega)$ es modelo de $(\neg Inf)$.

Por lo tanto, $R(\omega)$ es modelo de $ZFE - Inf + (\neg Inf)$.

6.3.10. COROLARIO.

$$CON(ZF^-) \Longrightarrow CON(ZFE - Inf + (\neg Inf))$$

6.4. TERCER EJEMPLO

6.4.1. LEMA. Sea M un modelo transitivo de $ZF^- - P\text{-}Inf$.

Si $\omega \in M \Rightarrow$ el Axioma de Infinito es verdadero en M.

PRUEBA.

Por teorema 6.1.11 (g),(k), se tiene que 0 y S son absolutas para M,

$\Rightarrow$ Infinito relativizado a M es equivalente a

$\exists x \in M\ (0 \in x \wedge \forall y \in x\ (S(y) \in x))$

que es verdadero tomando $x = \omega$, ya que $\omega \in M$.

Por lo tanto el Axioma de Infinito es verdadero en M.

6.4.2. COROLARIO (ZF^-). WF es modelo de ZF

PRUEBA.

Por lema 6.3.5, WF es modelo de $ZF - Inf$.

Por lema 6.4.1, WF es modelo del Axioma de Infinito, ya que WF es modelo de $ZF^- - P\text{-}Inf$ y $\omega \in WF$.

Por lo tanto WF es modelo de ZF.

3a. Prueba de Consistencia Relativa

6.4.3. COROLARIO

$$CON(ZF^-) \Longrightarrow CON(ZF)$$

6.5. CUARTO EJEMPLO

6.5.1. LEMA. Sea $A\in WF$. Entonces

$$A \text{ puede ser bien-ordenado} \iff (A \text{ puede ser bien-ordenado})^{WF}$$

PRUEBA.

Recordemos lema 5.1.12, $\forall x(x\in WF \iff x\subset WF)$

$\Rightarrow]$ Si A puede ser bien-ordenado, sea $R\subset A\times A$ buen orden de A,

$A\times A\in WF$ por lema 5.1.11 (b) $\Longrightarrow A\times A\subset WF$

$\Longrightarrow R\subset A\times A\subset WF \Longrightarrow R\subset WF \Longrightarrow R\in WF$

como $A, R\in WF$ y WF es modelo de $ZF^{-}-P-Inf$ y R bien-ordena A

$\Longrightarrow$ por lema 6.3.6, $(R \text{ bien-ordena } A)^{WF} \Longrightarrow (A \text{ puede ser bien-ordenado})^{WF}$

$\Leftarrow]$ si $(A \text{ puede ser bien-ordenado})^{WF}$, sea $R\in WF$ tal que $(R \text{ bien-ordena } A)^{WF}$

$(R$ totalmente ordena $A)$ es absoluta para WF por los resultados de absolutez probados en 6.1.11, 6.1.12, 6.1.13 ya que $(R$ totalmente ordena $A)$ esta expresado usando propiedades básicas de pares y cuantificación sobre A

también tenemos que $(\forall x\phi(x,A,R))^{WF}$, donde $\phi(x,A,R)$ es la fórmula

$x\subset A\wedge x\neq 0 \rightarrow \exists y\in x\,\forall z\in x\,(\langle z,y\rangle\notin R)$,

ϕ también es absoluta por los resultados ya mencionados,

por lo tanto tenemos que $\forall x\in WF\ \phi(x,A,R)$ (1)

Por demostrar que $\forall x\ \phi(x,A,R)$,

sea x arbitrario y supongamos que $x\subset A$ y además $x\neq 0$,

como $A\in WF$, por lema 5.1.12, tenemos que $A\subset WF$

$\Longrightarrow$ como $x\subset A$, y usando que $A\subset WF$, llegamos a que $x\subset WF$

$\Longrightarrow x\in WF$ por lema 5.1.12

$\Longrightarrow$ por (1) llegamos a que $\phi(x,A,R)$,

pero partimos de x arbitrario

por lo tanto $\forall x\ \phi(x,A,R)$, como queriamos probar.

Por lo tanto R bien-ordena A.

6.5.2. COROLARIO (ZF-). $AE \rightarrow (AE)^{WF}$.

6.5.3. OBSERVACION. El inverso del corolario 6.5.2 podría no ser cierto, ya que en lema 6.5.1 usamos que $A \in WF$, por lo tanto solo tenemos que es consistente que todo conjunto bien-fundado puede ser bien-ordenado, pero algún conjunto que no es bien-fundado podría no serlo

6.5.4. COROLARIO (ZFE⁻). WF es modelo de ZFE.

PRUEBA.

Por corolario 6.4.2, WF es modelo de ZF

y por corolario 6.5.2, WF es modelo de AE

4a. Prueba de Consistencia Relativa

6.5.5. COROLARIO.

$$CON(ZFE^-) \rightarrow CON(ZFE)$$

CAPITULO 7
TEOREMA DE REFLEXION

7.1. MAS ABSOLUTEZ

7.1.1. LEMA. Las siguientes relaciones y funciones se definen en ZF-P. Y son absolutas para Modelos transitivos de ZF-P

(a) x es un ordinal
(b) x es un ordinal límite
(c) x es un ordinal sucesor
(d) x es un ordinal finito
(e) ω
(f) $0, 1, \ldots$
(g) x es finito
(h) ${}^nA$
(i) R bien ordena A
(j) el tipo de orden de $\langle A, R\rangle$ CUBO
(k) $\alpha+1$, α ordinal
(l) $\alpha+\beta$, α, β ordinales
(m) $\alpha\cdot\beta$, α, β ordinales

PRUEBA.

(a) x es un ordinal $\Leftrightarrow$ x es transitivo y totalmente ordenado por $\in$ por teorema 6.1.11 "x es transitivo" es absoluta y "es totalmente ordenado por $\in$" queda expresado como $\forall y\in x\, \forall z\in x\, (y\in z \vee y=z \vee z\in y) \wedge$ "$\in$ es un orden sobre x" que es una fórmula Δ_0

(b) x es un ordinal límite $\Leftrightarrow$ x es un ordinal y $\forall y\in x\, \exists z\in x (y\in z) \wedge x\neq 0$ y esta fórmula es Δ_0 , y "x es un ordinal" es absoluta por (a)

(c) x es un ordinal sucesor $\Leftrightarrow$ x es un ordinal y no es ni un ordinal límite ni 0. Por (a) y (b) esta formula resulta Δ_0

(d) x es ordinal finito $\Leftrightarrow$ tanto x como todo $y\in x$ son 0 o son ordinales sucesores. Por los incisos anteriores esta fórmula es absoluta

(e) $x=\omega \Leftrightarrow x$ es ordinal límite y $\forall y\in x$ (y no es ordinal límite) por incisos anteriores resulta absoluta.

(f) Recordamos que $x=S(y)$ es Δ_0 por teorema 6.1.11. (k)

$$x=0 \leftrightarrow \neg\exists y\in x$$
$$x=1 \rightarrow \exists y\in x (y=0 \wedge x=S(y))$$
$$x=2 \leftrightarrow \exists y\in x (y=1 \wedge x=S(y))$$
$$\vdots$$

La primera es una formula Δ_0. Para las demás se aplica inducción

(g) Sobre las bases de ZF-P, x es finito $\Leftrightarrow \exists f\, \phi(x,f)$, donde $\phi(x,f)$ es: f es función $\wedge$ dom$(f) = x \wedge$ ran$(f) \in \omega \wedge f$ es 1-1

Por teorema 6.1.13 (f), (d), (e), (h) ϕ resulta absoluta para M donde M es modelo transitivo de ZF-P

Para terminar la prueba solo resta verificar que para $x \in M$, $\exists f \in M\, \phi(x,f) \Leftrightarrow \exists f\, \phi(x,f)$

$\rightarrow]$ es obvia

$\leftarrow]$ Sup que $\exists f\, \phi(x,f)$, esto implica que f es un conjunto finito de pares ordenados de elementos de M. M es cerrado bajo el par por la absolutez del par, según teorema 6.1.11 (d)

$\Rightarrow$ bastaría probar $\forall x \subset M\, (|x| = n \rightarrow x \in M)$ por inducción

a) $n=0$, es la absolutez de 0

b) H.I para n PD para $n+1$

Sea $x \subset M$ con $n+1$ elementos, sea $y \in x \Rightarrow y \in M$

como $x \setminus \{y\} \subset x \subset M$ y $x \setminus \{y\}$ tiene n elementos

$\Rightarrow$ por H.I $x \setminus \{y\} \in M$ y como $y \in M$, por el teorema 6.1.11 (d) la absolutez del par nos da $\{x \setminus \{y\}, \{y\}\} \in M$ y 6.1.11 (m) la absolutez de la Unión nos da $x = x \setminus \{y\} \cup \{y\} \in M$.

(h) ${}^{n}A$ es la siguiente función $F(A,x)$

$$F(A,x) = 0 \text{ si } x \notin \omega \text{ y si } n \in \omega \quad F(A,n) = \left\{ f \in M : f \text{ es función} \wedge \text{dom}(f) = n \wedge \text{ran}(f) \subset A \right\}$$

entonces por la absolutez de ω y por teorema 6.1.13 se tiene $F^M(A,n) = F(A,n)$.

(i) PD Para $A, R \in M$, (R bien-ordena $A)^M \Leftrightarrow$ (R bien-ordena A)

$\leftarrow]$ es el lema 6.3.6

$\rightarrow]$ sabemos que todo buen orden es isomorfo a un ordinal, así que si (R bien-ordena $A)^M \Rightarrow$ hay $f, \alpha \in M$, tal que (α es un ordinal y f es un isomorfismo de $\langle A, R \rangle$ en $\alpha)^M$

Por (a) y por teorema 6.1.13 concluimos este resultado.

(j) Mismo argumento que (i).

(k) $\alpha + 1 = S(\alpha)$ por la absolutez de la función sucesor

(m) $\alpha \cdot \beta = \text{tipo}(\beta \times \alpha, \text{lex}(\beta, \alpha))$, donde lex$(\beta,\alpha)$ es el orden lexicográfico sobre $\beta \times \alpha$ y puede ser escrito como fórmula Δ_0 y por lo tanto es absoluta

(l) $\alpha + \beta$ es similar a (m). $\square$

7.1.2. TEOREMA. Sea R relacional bien fundado y limitado por la izquierda.
Sea G un funcional. Sea F definido como en el Esquema general de recursión tal que:
$dom(F)=Cam(R)$
$\forall x \in Cam(R)$, $F(x)=G(F\restriction_{x_R})$
Sea M modelo transitivo de $ZF-P$ y supongamos G, R absolutas para M, $(R$ es limitado por la izquierda$)^M$ y $\forall x \in M\ (x_R \subset M)$ y $Cam(R)$ absoluta para M.
Entonces
F es absoluta para M.

PRUEBA

Observacion. Se cumple que $(R$ bien fundado$)^M$
$(R \text{ bien fundado})^M \Longleftrightarrow (\forall x\, \varphi(x, Cam(R), R))^M$ donde
$\varphi(x, Cam(R), R) \equiv x \subset Cam(R) \wedge x \neq 0 \rightarrow \exists y \in x \forall z \in x (\langle z, y\rangle \notin R)$
pero en esta fórmula, solo aparecen cuantificadores acotados y nociones como $x \subset Cam(R)$ y $\langle x, y\rangle$ que son absolutas $\Rightarrow \varphi(x, Cam(R), R)$ es absoluta para M
$\Rightarrow$ solo basta probar que $\forall x \in M\, \varphi(x, Cam(R), R)$ que se cumple porque R es bien fundado
Por esta observación obtenemos que $R^M = R \cap (M \times M)$ es bien fundada
$\Rightarrow$ (1) todo subconjunto no vacío de $Cam(R^M) = Cam(R) \cap M$ tiene un elemento R^M-minimal.
Por nuestras hipotesis y por nuestra observación obtenemos que R^M es bien fundado y limitado por la izquierda y G^M es funcional
Así que aplicando recursión transfinita, podemos definir F^M como
$dom(F^M) = Cam(R^M) = Cam(R) \cap M$
$\forall x \in Cam(R) \cap M$, $F^M(x) = G^M(F^M\restriction_{x_{R^M}})$
Para la absolutez de F bastaría probar que $F^M = F\restriction_{Cam(R)\cap M}$
Supongamos que no $\Rightarrow \{x \in Cam(R)\cap M : F^M(x) \neq F(x)\} = B \neq 0$
$\Rightarrow B$ tiene un elemento x R^M-minimal por (1)
Afirmación. $\forall z \in Cam(R) \cap M$, $z_R = \{y : \langle y, z\rangle \in R\} = \{y : \langle y, z\rangle \in R \cap (M\times M)\} = z_{R^M}$
$\supseteq]$ es clara
$\subseteq]$ Para $z \in Cam(R)\cap M \Rightarrow z \in M$, por hipótesis $z_R \subset M$
así que, si $y \in z_R \Rightarrow y \in M \Rightarrow \langle y, z\rangle \in M \times M \Rightarrow \langle y, z\rangle \in R \cap (M \times M) \Rightarrow y \in z_{R^M}$.
Por lo tanto $z_R = z_{R^M}$ para todo $z \in Cam(R) \cap M$.
Ahora, como x es R^M-minimal $\Rightarrow F^M(y) = F(y)$ para todo $y \in x_{R^M}$
Utilizando la afirmación, $x_R = x_{R^M} \Rightarrow F\restriction_{x_R} = F\restriction_{x_{R^M}} = F^M\restriction_{x_{R^M}}$ (2)
$\Rightarrow F(x) = G(F\restriction_{x_R}) = G^M(F\restriction_{x_R}) = G^M(F^M\restriction_{x_{R^M}}) = F^M(x)$
el primero y cuarto = es la definición recursiva de F y F^M, respectivamente; el segundo = es la hipotesis de la absolutez de G, el tercer = es por (2).
$\Rightarrow F(x) = F^M(x)$ $\lightning$ ya que x es R^M-minimal tq $F(x) \neq F^M(x)$. $\square$

7.1.3. COROLARIO. α^β es absoluta para modelos transitivos de ZF-P, con $\alpha, \beta \in ON$.

PRUEBA. α^β esta definida por recursión sobre β. □

7.1.4. LEMA. Para cada fórmula φ que se probó que es absoluta para modelos transitivos de ZF-P, podemos efectivamente encontrar axiomas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de ZF-P tales que

$$ZF\text{-}P \vdash \forall M[M \text{ transitivo} \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i)^M \rightarrow (\varphi^M \leftrightarrow \varphi)]$$

PRUEBA.

Esto debe ser claro si pensamos que cuando decimos:

"M es modelo de ZF-P", lo que realmente tratamos de decir es que "ZF-P $\vdash \sigma^M$ para cada axioma σ de ZF-P".

Por otro lado, la demostración de que una fórmula φ es absoluta para M, es un proceso finito, por lo que el número de axiomas usados en el caso de una fórmula φ es finito.

Así pues, nuestros resultados anteriores muestran que ciertas fórmulas son absolutas para modelos transitivos de ZF-P, pero en realidad suponemos menos: establecen la absolutez de esas ciertas fórmulas para modelos transitivos de fragmentos finitos (suficientemente grandes) de ZF-P. □

7.1.5. OBSERVACION. En el lema 7.1.4 podemos cambiar ZF-P por ZF o por alguna otra teoría desde la cual se haya probado la absolutez de alguna fórmula. □

7.2. TEOREMA GENERAL DE REFLEXION

Antes de enunciar y probar este importante teorema, daremos una definición y lema previos:

7.2.1. DEFINICION. Una lista de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ se llama cerrada por sub-fórmulas $\Longleftrightarrow$ toda sub-fórmula de una fórmula de la lista también pertenece a la lista. □

OBSERVACIONES. Se entiende por subfórmula cualquier parte de la fórmula que sea fórmula. Por ejemplo, $P(x) \wedge Q(x,y)$ y $Q(x,y)$ son subfórmulas de la fórmula $\exists x(P(x) \wedge Q(x,y))$, pero $\exists x(P(x) \wedge$ y $\wedge Q(x,y)$ no lo son.

Dada una lista finita de fórmulas, es fácil obtener otra lista finita de fórmulas que contiene a la primera y es cerrada por subfórmulas.

7.2.2. LEMA (CRITERIO DE TARSKI-VAUGHT).

Sean $M \subseteq N$ clases y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ lista finita de fórmulas, que es cerrada por subfórmulas. Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(a) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son M-N absolutas (absolutas para M,N).

(b) Para toda $\varphi_i (i=1,\ldots,n)$ de la forma $\exists x \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_m)$ se cumple $\forall y_1, \ldots, y_m \in M[\exists x \in N \varphi_j^N(x, y_1, \ldots, y_m) \to \exists x \in M \varphi_j^N(x, y_1, \ldots, y_m)]$

PRUEBA.

(a)→(b)] Sean $y_1, \ldots, y_\ell \in M$ y suponer $\exists x \in N\ \varphi_j^N\ (x, y_1, \ldots, y_\ell) \Rightarrow \varphi_j^N(y_1, \ldots, y_\ell)$

Por la absolutez de φ_i obtenemos $\varphi_i^M(y_1, \ldots, y_\ell)$, es decir, $\exists x \in M \varphi_j^M(x, y_1, \ldots, y_\ell)$ y por la absolutez $\exists x \in M \varphi_j^N(x, y_1, \ldots, y_\ell)$

(b)→(a)] Inducción.

1) φ_i atómica, claramente es absoluta

2) sup. φ_j, φ_k son absolutas $\Rightarrow \varphi_j \wedge \varphi_k$ y $\neg\varphi_k$ son absolutas

3) supongamos que φ_i es $\exists x \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_\ell)$,

sean $y_1, \ldots, y_\ell \in M$, entonces

$$\varphi_i^M(y_1, \ldots, y_\ell) \leftrightarrow \exists x \in M \varphi_j^M(x, y_1, \ldots, y_\ell) \leftrightarrow \exists x \in M \varphi_j^N(x, y_1, \ldots, y_\ell)$$
$$\leftrightarrow \exists x \in N \varphi_j^N(x, y_1, \ldots, y_\ell) \leftrightarrow \varphi_i^N(y_1, \ldots, y_\ell)$$

El primero y el último $\leftrightarrow$ son la definición de relativización, el segundo $\leftrightarrow$ aplica la absolutez de φ_j, el tercero aplica la condicion (b) para un sentido y $M \subseteq N$ para el otro sentido. □

7.2.3. TEOREMA GENERAL DE REFLEXION.

Sea Z una clase no vacía y para todo α ordinal, Z_α un conjunto, tales que

A) $\alpha < \beta \longrightarrow Z_\alpha \subseteq Z_\beta$

B) γ ordinal límite $\longrightarrow Z_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha$

C) $Z = \bigcup_{\alpha\in ON} Z_\alpha$

Entonces para cualquier lista finita de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$

$$\forall\alpha\exists\beta>\alpha(\varphi_1,\ldots,\varphi_n \text{ son absolutas para } Z_\beta, Z) \quad (1)$$

Antes de dar la prueba hacemos algunas observaciones

I) Decimos que A), B), C) definen una Jerarguía Acumulativa.

Ejemplos: $WF = \bigcup_{\alpha\in ON} R(\alpha)$, $L = \bigcup_{\alpha\in ON} L_\alpha$.

II) Con(1) queremos decir que Z_β "refleja" a Z respecto $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$. Usualmente Z_α será $R(\alpha)$, o sera L_α y Z sera WF o L.

PRUEBA DEL TEOREMA GENERAL DE REFLEXION.

Aplicaremos el lema anterior con $N=Z$ y trataremos de encontrar $M=Z_\beta$ para algún $\beta>\alpha$ para el α dado y tal que cumpla (b) del lema.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ es cerrada por subfórmulas.

Para cada $i=1,\ldots,n$, sea m_i el número de variables libres de φ_i

Definimos para cada i, las funciones $G_i: V^{m_i} \to ON$ y $F_i: ON \to ON$

$$G_i(y_1,\ldots,y_{m_i}) = \begin{cases} \min\eta \text{ tal que } \exists x\in Z_\eta \varphi_j^Z(x,\bar{y}) \\ \qquad \text{si } \varphi_i = \exists x \varphi_j(x,\bar{y}) \text{ y } \exists x\in Z\, \varphi_j^Z(x,\bar{y}) \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

$$F_i(\xi) = \operatorname{Sup}\{G_i(y_1,\ldots,y_{m_i}) / y_1,\ldots,y_{m_i}\in Z_\xi\} = \operatorname{Sup} G_i[Z_\xi^{m_i}]$$

Obsérvese que ya que $\forall\xi\in ON$, Z_ξ es conjunto, por el Axioma de Reemplazo $\{G_i(\bar{y}) / \bar{y}\in Z_\xi\}$ es conjunto de ordinales por lo que $F_i(\xi)$ existe para cada $\xi\in ON$.

<u>Observación 1</u>. Si φ_i no es existencial, $F_i(\xi)=0$ para todo $\xi\in ON$.

Observación 2. F_i es monótona: $\xi<\xi' \Rightarrow F_i(\xi)\leq F_i(\xi')$.

Si $\xi<\xi' \Rightarrow$ por A) $\{G_i(\bar{y})/\bar{y}\in Z_\xi\}\subseteq\{G_i(\bar{y})/\bar{y}\in Z_{\xi'}\} \Rightarrow$

$F_i(\xi)=\operatorname{Sup}\{G_i(\bar{y})/\bar{y}\in Z_\xi\}\leq \operatorname{Sup}\{G_i(\bar{y})/\bar{y}\in Z_{\xi'}\}=F_i(\xi')$

Observación 3. Si β es límite y $\forall i=1,\dots,n$ $\forall\xi<\beta\,(F_i(\xi)<\beta)$. Entonces para cualquier $\varphi_i=\exists x\varphi_j(x,\bar{y})$ se cumple que:

$\forall y_1,\dots,y_{m_i}\in Z_\beta\,[\exists x\in Z\varphi_j^Z(x,\bar{y})\longrightarrow\exists x\in Z_\beta\varphi_j^Z(x,\bar{y})]$.

Sea $\varphi_i=\exists x\varphi_j(x,\bar{y})$. Sean $y_1,\dots,y_{m_i}\in Z_\beta$ y supongamos que $\exists x\in Z\varphi_j^Z(x,\bar{y}) \Rightarrow$ por la definición de $G_i(\bar{y})$ obtenemos que $\exists x\in Z_{G_i(\bar{y})}\varphi_j^Z(x,\bar{y})$.(*)

Como β es límite y $\bar{y}\in Z_\beta \Rightarrow$ por B) $\exists\xi<\beta$ tal que $\bar{y}\in Z_\xi$, de donde $G_i(\bar{y})\leq F_i(\xi)<\beta$ por hipótesis y por definición de F_i.

$\Rightarrow$ por A) $Z_{G_i(\bar{y})}\subseteq Z_\beta \Rightarrow$ por (*) $\exists x\in Z_\beta\varphi_j^Z(x,\bar{y})$.

Observación 4. Por el lema 7.2.2 ((b)$\rightarrow$(a)), si β es límite y para todo $i=1,2,\dots,n$ se cumple $\forall\xi<\beta(F_i(\xi)<\beta)$. Entonces $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ son $Z_\beta-Z$ absolutas.

Ahora si terminamos la Prueba del Teorema General de Reflexión.

Veamos pues, que dado α, podemos encontrar $\beta>\alpha$ tal que

β límite $\wedge$ $(\forall i=1,\dots,n\ \forall\xi<\beta\,(F_i(\xi)<\beta)$ (**)

y es suficiente probar esto por nuestras observaciones anteriores.

Dado α, β_n queda definido por recursión sobre ω:

$\beta_0=\alpha$

$\beta_{(p+1)}=\max\{\beta_p+1, F_1(\beta_p),\dots,F_n(\beta_p)\}$

Observacion. $\beta_1\geq\alpha+1>\alpha$

Sea $\beta=\operatorname{Sup}\{\beta_p: p\in\omega\}$

como $\alpha=\beta_0<\beta_1<\dots<,\dots, \Rightarrow$ β es límite mayor que α.

Sea $\xi<\beta \Rightarrow \xi<\beta_p$ para algún $p\in\omega$.

$\Rightarrow$ por la observación 2 $F_i(\xi)\leq F_i(\beta_p)$

por definición de $\beta_{(p+1)}$, $F_i(\beta_p)\leq\beta_{(p+1)}$. Y como $\beta_{p+1}<\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow F_i(\xi)\leq F_i(\beta_p)\leq\beta_{(p+1)}<\beta. \Rightarrow \forall\xi<\beta\,(F_i(\xi)<\beta)$.

y esto lo hemos probado para cada $i=1,\dots,n$.

Entonces queda probado (**) y por lo tanto queda probado el Teorema General de Reflexión. □

7.2.4. COROLARIO. Dadas $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ fórmulas

(a) $\forall\alpha\,\exists\beta>\alpha\,(\varphi_1,\dots,\varphi_n$ son absolutas para $R(\alpha)$-WF).

(b) $\forall\alpha\,\exists\beta>\alpha\,(\varphi_1,\dots,\varphi_n$ son absolutas para L_β-L). $\square$

PRUEBA

(a) $Z=WF$, $Z_\alpha=R(\alpha) \Rightarrow \alpha<\beta\rightarrow R(\alpha)\subset R(\beta)$

$$\gamma \text{ limite } \rightarrow R(\gamma)=\bigcup_{\alpha<\gamma} R(\alpha)$$
$$WF=\bigcup_{\alpha\in ON} R(\alpha)$$

(b) $Z=L$; $Z_\alpha=L_\alpha \Rightarrow \alpha<\beta\rightarrow L_\alpha\subseteq L_\beta$

$$\gamma \text{ limite } \rightarrow L_\gamma=\bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$$
$$L=\bigcup_{\alpha\in ON} L_\alpha \quad . \square$$

7.2.5. COROLARIO. Dados $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ enunciados cualesquiera.

(a) $\forall\alpha\,\exists\beta>\alpha\,\bigwedge_{i=1}^{n}(\sigma_i^{R(\beta)}\leftrightarrow\sigma_i^{WF})$

(b) $\forall\alpha\,\exists\beta>\alpha\,\bigwedge_{i=1}^{n}(\sigma_i^{L_\beta}\leftrightarrow\sigma_i^{L})$. $\square$

7.2.6. COROLARIO. Dados $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ axiomas de ZF

Entonces

i) $\forall\alpha\,\exists\beta>\alpha\,(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i^{R(\beta)})$ y $\exists\beta\,(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i^{R(\beta)})$

y $\exists M\,(M$ es transitivo $\wedge\,(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i)^M)$

ii) Suponiendo $ZF\vdash\sigma^L$ para todo σ axioma de ZF,

$\forall\alpha\,\exists\beta>\alpha\,(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i^{L_\beta})$

PRUEBA.

i) Usamos corolario 7.2.5 (a) y el hecho de que $ZF\vdash\sigma_i$ para todo $i=1,\dots,n$

$\Rightarrow\forall\alpha\,\exists\beta>\alpha\,(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i^{R(\beta)})\Longrightarrow\exists\beta\,(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i^{R(\beta)})$

para $\exists M\,(M$ es transitivo $\wedge\,(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i)^M)$ usamos $M=R(\beta)$

ii) es similar a i) . $\square$

7.2.7. COROLARIO. ZF, ZFE y cualquier extensión de ZF no son finitamente axiomatizables.

PRUEBA.

Si ZF (ZFE) fuera finitamente axiomatizable y $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ los axiomas $\Rightarrow \sigma_1,\dots,\sigma_n \vdash \exists\beta\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i^{R(\beta)}\right)$

Sea β_0 el mínimo β con esta propiedad

$$\Rightarrow ZF \vdash \left(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i^{R(\beta_0)}\right) \wedge \left[\forall\alpha<\beta_0 \neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i\right)^{R(\alpha)}\right] \quad (*)$$

$\Rightarrow$ por corolario 4.3.4 anterior al Teorema Fundamental 4.3.5 tenemos que $ZF \vdash \left[\exists\beta\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i\right)^{R(\beta)}\right]^{R(\beta_0)}$

de donde $ZF \vdash \exists\beta\in R(\beta_0)\left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i\right)^{R(\beta)}\right)^{R(\beta_0)}$

Pero si $\beta\in R(\beta_0) \Rightarrow \beta<\beta_0$ (Recordamos $\beta=\rho(\beta)<\rho(\beta)+1\leq\beta_0$ pues $\beta\in R_{\rho(\beta)+1}\subseteq R(\beta_0)$)

y si $\beta<\beta_0$ entonces es fácil verificar que

$$(R(\beta))^{R(\beta_0)} = R(\beta) \quad \text{y que} \quad (\varphi^{R(\beta)})^{R(\beta_0)} \rightarrow \varphi^{R(\beta)}$$

Así que $ZF \vdash \exists\beta<\beta_0\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma_i\right)^{R(\beta)}$ $\lightning$ (contradicción con (*)).

- Veamos que si $\beta<\beta_0 \Rightarrow (R(\beta))^{R(\beta_0)} = R(\beta)$ y $(\varphi^{R(\beta)})^{R(\beta_0)} \rightarrow \varphi^{R(\beta)}$

(i) $(R(\beta))^{R(\beta_0)} = \{x/\ \rho(x)<\beta\}^{R(\beta_0)} = \{x\in R(\beta_0)/\ \rho(x)<\beta\} = \{x/\ \rho(x)<\beta\} = R(\beta)$

la tercera igualdad se tiene porque $R(\beta)\subset R(\beta_0)$

(ii) $(\varphi^{R(\beta)})^{R(\beta_0)} \rightarrow \varphi^{R(\beta)}$ por inducción

1) φ atómica. es trivial

2) H.I para ψ,χ, es inmediato para $(\neg\psi)$, $(\psi\wedge\chi)$

3) $\varphi=\exists x\psi$, H.I para ψ

$(\varphi^{R(\beta)})^{R(\beta_0)} \Leftrightarrow ((\exists x\psi)^{R(\beta)})^{R(\beta_0)} \Leftrightarrow \left[\exists x\,(x\in R(\beta)\wedge\psi^{R(\beta)})\right]^{R(\beta_0)}$

$\Leftrightarrow \exists x\left[x\in R(\beta_0)\wedge x\in R(\beta)^{R(\beta_0)} \wedge (\psi^{R(\beta)})^{R(\beta_0)}\right]$

$\Rightarrow \exists x\left[x\in R(\beta_0)\wedge x\in R(\beta) \wedge \psi^{R(\beta)}\right]$

$\Rightarrow \exists x\left[x\in R(\beta)\wedge\psi^{R(\beta)}\right] \Leftrightarrow (\exists x\psi)^{R(\beta)} \Leftrightarrow \varphi^{R(\beta)}$

Para el primer $\Rightarrow$ usamos 1) y la H.I

Para el segundo $\Rightarrow$ usamos $\beta<\beta_0$

Para todos los $\Leftrightarrow$ usamos la definición de relativización. $\square$

7.2.8. TEOREMA (AE). Sea Z clase y $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ fórmulas, entonces

$$\forall X\subset Z\ \exists A[X\subset A\subset Z \wedge (\varphi_1,\dots,\varphi_n \text{ son absolutas para } A, Z) \wedge |A|\leq \max\{\aleph_0, |X|\}]$$

PRUEBA

Sea Z clase. Sin pérdida de generalidad supongamos $\varphi_1,\dots,\varphi$ cerrada por subfórmulas

Sea $Z_\alpha = Z\cap R(\alpha)$. Notamos que Z y Z_α satisfacen A), B), C) del Teorema General de Reflexión

A) $\alpha<\beta \Rightarrow Z_\alpha = Z\cap R(\alpha)\subset Z\cap R(\beta) = Z_\beta$

B) γ límite $\Rightarrow Z_\gamma = Z\cap R(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma}(Z\cap R(\alpha)) = \bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha$

C) $Z = \bigcup_{\alpha\in ON}(Z\cap R(\alpha)) = \bigcup_{\alpha\in ON} Z_\alpha$

Sea $X\subseteq Z$. Sea α tal que $X\subset Z_\alpha$. Por Teorema General de Reflexión, sea $\beta>\alpha$ tal que $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ son absolutas para Z_β, Z. $\Rightarrow X\subset Z_\alpha\subset Z_\beta\subset Z$.

Encontraremos $A\subset Z_\beta$ que cumple lo pedido. Z_β cumple con todo, excepto posiblemente con ser de cardinalidad $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.

Por AC, sea $<$ un buen orden para Z_β, esto es, $\langle Z_\beta, <\rangle$ CUBO.

Si φ_i tiene m_i variables libres $y_1,\dots,y_{m_i}$, para cada $i=1,\dots,n$ definimos $H_i: Z_\beta^{m_i}\to Z_\beta$ como sigue

$$H_i(\bar{y}) = \begin{cases} \text{el } <\text{-menor } z \text{ tal que } z\in Z_\beta \text{ y } \varphi_j^{Z_\beta}(z,\bar{y}) \\ \qquad\qquad \text{si } \varphi_i = \exists z\varphi_j(z,\bar{y}) \text{ y } (\varphi_i)^{Z_\beta} \\ \text{el } <\text{-menor } z \text{ de } Z_\beta, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Si $m_i=0$, identificamos H_i con un elemento de Z_β

Las funciones H_i se llaman funciones de Skolem o constantes de Skolem para las φ_i.

Sea A = clausura de X bajo $H_1,\dots,H_n$. formalmente

1) $A_0 = X$

2) $A_{m+1} = A_m\cup\{H_i(y_1,\dots,y_{m_i}) / y_j\in A_m, i\in\{1,\dots,n\}\}$

3) $A = \bigcup_{m\in\omega} A_m$

Observación 1. $\forall m\in\omega$, $|A_m| = |X|$ si X es infinito

Observación 2. Como A es cerrado bajo cada H_i, entonces φ_i será absoluta para A, Z_β (Por el criterio de Tarski-Vaugt, lema 7.2.2.) pues $\forall y_1,\dots,y_{m_i}\in A[\exists z\in Z_\beta\,\varphi_j^{Z_\beta}(z,\bar{y})\to\exists x\in A\,\varphi_j^{Z_\beta}(x,\bar{y})]$ tomando a x como $x = H_i(\bar{y})$, si $\varphi_i = \exists x\varphi_j(x,\bar{y})$

Así que, φ_i es absoluta para A, Z_β y como φ_i es absoluta para $Z_\beta, Z \Rightarrow$
$\Rightarrow$ φ_i es absoluta para A, Z.

Ahora, $|A| = |\bigcup_{m\in\omega} A_m| \leq \sum_{m\in\omega} |A_m| = \sum_{m\in\omega} |X| = \aleph_0 \cdot |X| = \max\{\aleph_0, |X|\}$. $\square$

Recordemos el corolario de Colapso de Mostowski (corolario 5.4.6) que dice: "Toda clase extensional (con la pertenencia) es isomorfa a una única clase transitiva".

7.2.9. LEMA. Sea A extensional. Sea $G: \langle A, \in\rangle \cong \langle M, \in\rangle$ por el Teorema de Mostowski. Entonces para toda fórmula φ se cumple
$\forall x_1, \ldots, x_n \in A [\varphi^A(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))]$

PRUEBA

Inducción sobre φ

1) φ es $x \in y$, $(x\in y)^A \Leftrightarrow x \in y \Leftrightarrow G(x) \in G(y) \Leftrightarrow (G(x) \in G(y))^M$

el segundo $\Leftrightarrow$ es porque G es morfismo, los otros es por definición de relativización.

φ es $x \approx y$ $(x\approx y)^A \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow G(x) = G(y) \Leftrightarrow (G(x) = G(y))^M$

el segundo $\Leftrightarrow$ es porque G es 1-1, los otros es por definición de relativización.

2) H.I para α, β

$(\neg\alpha)^A \Leftrightarrow \neg(\alpha^A) \Leftrightarrow \neg(\alpha^M) \Leftrightarrow (\neg\alpha)^M$

$(\alpha\wedge\beta)^A \Leftrightarrow (\alpha^A \wedge \beta^A) \Leftrightarrow (\alpha^M \wedge \beta^M) \Leftrightarrow (\alpha\wedge\beta)^M$

en ambos casos, el segundo $\Leftrightarrow$ es por H.I, los otros $\Leftrightarrow$ es por definición

3) H.I para α, por demostrar para $\exists x \alpha$

$(\exists x \alpha)^A \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \alpha^A(x)) \Leftrightarrow \exists x (G(x) \in M \wedge \alpha^M(G(x)))$
$\Leftrightarrow \exists x (x \in M \wedge \alpha M) \Leftrightarrow (\exists x \alpha)M$

el primero y cuarto $\Leftrightarrow$ es por la definición de relativización
el segundo $\Leftrightarrow$ es por H.I, y el tercero es porque G es sobre. $\square$

7.2.10. COROLARIO. Si A es extensional y φ es enunciado $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ hay M transitivo tal que: $\varphi^A \Leftrightarrow \varphi^M$.

7.2.11. COROLARIO (AC). Sea Z clase transitiva, y $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ enunciados. Entonces

$$\forall x\subset Z\,[x \text{ transitivo} \rightarrow \exists M[X\subseteq M \wedge M \text{ transitivo} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}(\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i^Z)$$
$$\wedge\, |M|\leq \max\{\aleph_0, |x|\}\,]$$

PRUEBA.

Sin pérdida de generalidad supongamos que φ_n es el Axioma de Extensionalidad, Si no, lo agregamos. Sea A el del teorema 7.2.8, $\Rightarrow$

$x\subset A\subset Z \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i^A \leftrightarrow \varphi_i^Z) \wedge |A|\leq \max\{\aleph_0, |x|\}$

Como Z es transitiva $\Rightarrow$ se tiene $(\text{Extensionalidad})^Z$ y por lo tanto $(\text{Extensionalidad})^A$. Así, por el Colapso de Mostowski, teorema 5.4.5, hay G y M conjunto transitivo tal que $\langle A,\in\rangle \underset{G}{\cong} \langle M,\in\rangle$ y por el lema 7.2.9, para cada $i=1,\ldots,n$ se tiene que

$\varphi_i^M \Leftrightarrow \varphi_i^A \Leftrightarrow \varphi_i^Z$

y además $|M|=|A|\leq \max\{\aleph_0,|x|\}$

Solo falta ver que $x\subset M$.

Por hipótesis x es transitivo,

por el colapso de Mostowski, teorema 5.4.5, $M=G(A)$

y como $x\subset A \Rightarrow G[x]\subseteq G[A]=M$

Para este caso particular, en que x es transitivo, se tiene que

$\forall w\in x \quad G(w)=w\in M \Rightarrow G[x]=x\subset M.$ □

7.2.12. COROLARIO. (AC). Sean $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ axiomas de ZFC, entonces

$$\exists M(|M|=\aleph_0 \wedge M \text{ es transitivo} \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_i)^M)$$

PRUEBA.

tomamos $Z=V$ y $X=\omega$, entonces por corolario 7.2.11

$\exists M[\omega\subseteq M \wedge M \text{ es transitivo} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}(\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i)\wedge |M|\leq \max\{\aleph_0,|\omega|\}]$

Como $\omega\subseteq M \Rightarrow \aleph_0\leq |M|\leq \max\{\aleph_0,|\omega|\}=\aleph_0 \Rightarrow |M|=\aleph_0$

$\Rightarrow \exists M[\,|M|=\aleph_0 \wedge M \text{ es transitivo} \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_i)^M]$

$(\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_i)^M$ se tiene porque se tiene $\bigwedge_{i=1}^{n}(\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i)$ y $\varphi_i\in ZFC$. □

7.2.13. COROLARIO (AE). Para todo subconjunto finito de ZFE hay un modelo numerable y transitivo. □

CAPITULO 8
DEFINIBILIDAD Y EL UNIVERSO L DE GÖDEL

8.1. DEFINIENDO DEFINIBILIDAD

$D(A)$ denotará a "el conjunto de los subconjuntos de A, definibles a partir de A", intuitivamente

$D(A)=\{Y\subset A /\ Y$ es "definible" en A, a partir de elementos de $A\}$

Para hacer más precisa esta idea, hacemos otro intento de definición

$$D(A)=\{\{x\in A: \varphi^A(y_0,\ldots,y_{n-1},x)\}/\varphi\in L_{ZF}^{n+1},\ y_0,\ldots,y_{n-1}\in A;\ n\in\omega\}$$

donde L_{ZF}^{n+1} denota al conjunto de fórmulas de L_{ZF}, con $n+1$ variables libres. Desde un punto de vista riguroso tal "definición" es incorrecta, pues no está definida en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos ZF, ya que las φ de las que se habla son fórmulas y no conjuntos. Este capítulo esta dedicado a definir $D(A)$ de modo riguroso, así como a mostrar algunos propiedades.

8.1.1. DEFINICION. Si $n\in\omega$, $i,j<n$

a) $Proy(A,R,n)=\{s\in A^n: \exists t\in R\ (t\restriction_n=s)\}$

b) $Diag_\in(A,n,i,j)=\{s\in A^n: s(i)\in s(j)\}$

c) $Diag_=(A,n,i,j)=\{s\in A^n: s(i)=s(j)\}$

d) $Df'(k,A,n)$ se define por recursión sobre $k\in\omega$

1) $Df'(0,A,n)=\{Diag_\in(A,n,i,j): i,j<n\}\cup\{Diag_=(A,n,i,j): i,j<n\}$

2) $Df'(k+1,A,n)=Df'(k,A,n)\cup\{A^n-R: R\in Df'(k,A,n)\}\cup$
$\cup\{R\cap S: R,S\in Df'(k,A,n)\}\cup\{Proy(A,R,n): R\in Df'(k,A,n+1)\}$

e) $Df(A,n)=\bigcup\{Df'(k,A,n): k\in\omega\}$. $\square$

La idea de definir $Df(A,n)$ es que sea de la forma
$Df(A,n)=\{\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle : \varphi^A(x_1,\ldots,x_n)\}/\varphi$ es fórmula con n variables libres$\}$

8.1.2. LEMA. Si $R,S\in Df(A,n) \Rightarrow A^n - R\in Df(A,n)$ y $R\cap S\in Df(A,n)$
Si $R\in Df(A,n+1) \Rightarrow Proy(A,R,n)\in Df(A,n)$

PRUEBA

- Observación. Si $k<k' \Rightarrow Df'(k,A,n)\subseteq Df'(k',A,n)$

Supongamos que $R,S\in Df(A,n)=\bigcup_{k\in\omega} Df'(k,A,n)$
$\Rightarrow$ por la observación $\exists k\in\omega$ tq $R,S\in Df'(k,A,n)$
$\Rightarrow R\cap S\in Df'(k+1,A,n)\subseteq Df(A,n)$
Ahora, como $R\in Df'(k,A,n) \Rightarrow A^n - R\in Df'(k+1,A,n)\subseteq Df(A,n)$
Ahora, supongamos que $R\in Df(A,n+1) \Rightarrow R\in Df'(k_1,A,n+1)$ p.a. $k_1\in\omega$
$\Rightarrow Proy(A,R,n)\in Df'(k_1,A,n)\subseteq Df(A,n)$. □

8.1.3. LEMA (ESQUEMA). Sea $\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})$ fórmula con variables libres entre $x_0,\ldots,x_{n-1}$. Entonces
$(*)\ \forall A[\{s\in A^n : \varphi^A(s(0),\ldots,s(n-1))\}\in Df(A,n)]$

PRUEBA. Inducción.

1) Si φ es $x_i\in x_j$, entonces $(*)$ se sigue de que $Diag_\in(A,n,i,j)\in Df(A,n)$
Si φ es $x_i=x_j$, entonces $(*)$ se sigue de que $Diag_=(A,n,i,j)\in Df(A,n)$

2) Supongamos que $(*)$ se tiene para ψ,χ
$(*)$ se tiene para $\psi\wedge\chi$, ya que $Df(A,n)$ es cerrado bajo intersecciones finitas
$(*)$ se tiene para $\neg\psi$, ya que $Df(A,n)$ es cerrado bajo complementos

3) Supongamos $(*)$ para ψ. Por demostrar para $\exists y\psi=\varphi$

a) y es distinta de $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}$
Entonces usando la hipotesis de inducción
$\{s\in A^n : \varphi^A(s(0),\ldots,s(n-1)\}=Proy(A,\{t\in A^{n+1}/\psi^A(t(0),\ldots,t(n))\},n)\in Df(A,n)$

b) Si $y=x_j \Rightarrow \varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})\equiv\exists x_j\psi(x_0,\ldots,x_{n-1})$, así que x_j no es libre en φ. Sea z una variable que no ocurre en ninguna parte de φ, sea $\psi'(x_0,\ldots,x_{n-1},z)=\psi(x_0,\ldots,x_{j-1},z,x_{j+1},\ldots,x_{n-1})$
y sea $\varphi'\equiv\exists z\psi'$
$\Rightarrow \varphi$ y φ' son lógicamente equivalentes y las variables libres de φ' se encuentran entre $x_1,\ldots,x_{j-1},\ x_{j+1},\ldots,x_{n-1}$
y z es distinta a todas ellas, $\Rightarrow$ aplicamos a) y obtenemos que $(*)$ se tiene para φ' y por lo tanto para φ. □

8.1.4. OBSERVACION. El inverso del lema (Esquema) 8.1.3 no se puede justificar rigurosamente, solo intuitivamente se tiene que: "todo elemento de $Df(A,n)$ se define por una fórmula".

"PRUEBA".

Sean $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas de L_{ZF} con variables entre $x_0, \ldots, x_{n-1}$

$$\Rightarrow (*)\ \forall A \forall Y \in Df(A,n) \bigvee_{i\in\omega} \left[Y = \{ s \in A^n / \varphi_i^A(s(0), \ldots, s(n-1)) \} \right]$$

Tomamos $Y \in Df(A,n)$, entonces $Y \in Df'(k,A,n)$ para algun K

Entonces aplicamos inducción sobre K.

Veamos como se aplicaría la hipotesis de inducción

$$Y \in Df'(k+1,A,n) = Df'(k,A,n) \cup \{ A^n - R : R \in Df'(k,A,n) \} \cup$$
$$\cup \{ R \cap S : R,S \in Df'(k,A,n) \} \cup \{ Proy(A,R,n) / R \in Df'(k,A,n+1) \}$$

•) Si $Y \in Df'(k,A,n)$ es la H.I. la que nos implica el resultado.

••) Si $Y = A^n - R$, con $R \in Df'(k,A,n) \Rightarrow$ por H.I.

$R = \{ s \in A^n / \varphi_i^A(s(0), \ldots, s(n-1)) \}$ para alguna fórmula φ_i

$\Rightarrow$ veríamos que $Y = A^n - R = \{ s \in A^n / \neg \varphi_i^A(s(0), \ldots, s(n-1)) \}$

•••) y ••••) son casos similares, ahora usando $\wedge$ y $\exists$. □

Pero $(*)$ no es un enunciado del lenguaje de la Teoría de Conjuntos ZF.

Así, sólo tenemos intuitivamente

$Df(A,n) = \{ \{ s \in A^n : \varphi^A(s(0), \ldots, s(n-1)) \} / \varphi \in L_{ZF}^{\mathcal{F}}$ con variables libres entre $x_0, \ldots, x_{n-1} \}$

8.1.5. OBSERVACION. $Df(A,n)$ es contable, pues fue definido como la cerradura de un conjunto contable: $\{ Diag_\in(A,n,i,j) / i,j < n \} \cup \{ Diag_=(A,n,i,j) / i,j < n \}$ bajo operaciones finitas (complemento, intersección, proyección). □

8.1.6. DEFINICION. Por recursión sobre $m \in \omega$, definimos $E(m,A,n)$

1) Si $m = 2^i \cdot 3^j$ y $i,j < n \Rightarrow E(m,A,n) = Diag_\in(A,n,i,j)$

2) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ y $i,j < n \Rightarrow E(m,A,n) = Diag_=(A,n,i,j)$

3) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^2 \Rightarrow E(m,A,n) = A^n \setminus E(i,A,n)$

4) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3 \Rightarrow E(m,A,n) = E(i,A,n) \cap E(j,A,n)$

5) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4 \Rightarrow E(m,A,n) = Proy(A, E(i,A,n+1), n)$

6) Si m no es de la forma 1)-5) $\Rightarrow E(m,A,n) = 0$. □

8.1.7. LEMA. $\forall n\in\omega, A;\ Df(A,n)=\{E(m,A,n): m\in\omega\}$

PRUEBA.

$\subseteq]$ $R\in Df(A,n)=\bigcup_{k\in\omega} Df'(k,A,n) \Rightarrow \exists k\in\omega$ tq $R\in Df'(k,A,n)$. Entonces usamos inducción sobre $k\in\omega$: $\forall n[Df'(k,A,n)\subseteq\{E(m,A,n)/m\in\omega\}]$

a) $R\in Df'(0,A,n)\Rightarrow R=Diag_{\in}(A,n,i,j)$ con $i,j<n \Rightarrow R=E(2^i\cdot 3^j,A,n)$

$R=Diag_{=}(A,n,i,j)$ con $i,j<n\Rightarrow R=E(2^i\cdot 3^j\cdot 5,A,n)$

b) Dividiendolo en casos para $R\in Df'(k+1,A,n)$. Es claro en cada caso, con la definicion de $E(m,A,n)$ y con H.I.

$\supseteq]$ Por inducción sobre $m\in\omega$ veremos que $E(m,A,n)\in Df(A,n)$ $\forall n\in\omega$

$m=0\Rightarrow m$ no es de la forma 1)-5) $\Rightarrow E(m,A,n)=0$ y $0\in Df(A,n)$ ya que $0=\{s\in A^n/s(i)\in s(i)\}=Diag_{\in}(A,n,i,i)\in Df(A,n)$

H.I. Supongamos para menores que m, por demostrar para m

6) si m no es de la forma 1)-5), $\Rightarrow$ la prueba es similar al caso $m=0$.

1) $m=2^i\cdot 3^j$ $i,j<n\Rightarrow E(m,A,n)=Diag_{\in}(A,n,i,j)\in Df'(0,A,n)\subseteq Df(A,n)$

2) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5$ $i,j<n$, es similar a 1)

3) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5^2 \Rightarrow E(m,A,n)=A^n\setminus E(i,A,n)$

como $i<m\Rightarrow$ por H.I. $E(i,A,n)\in Df'(k,A,n)$ para algun $k\in\omega$

$\Rightarrow E(m,A,n)=A^n\setminus E(i,A,n)\in Df'(k+1,A,n)\subseteq Df(A,n)$

4) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5^3 \Rightarrow E(m,A,n)=E(i,A,n)\cap E(j,A,n)$

como $i,j<m\Rightarrow$ por H.I. y por la observación de que: ($\text{si } k<k'\Rightarrow Df'(k,A,n)\subseteq Df'(k',A,n)$), podemos obtener un $k\in\omega$ tq $E(i,A,n),E(j,A,n)\in Df'(k,A,n)$

$\Rightarrow E(m,A,n)=E(i,A,n)\cap E(j,A,n)\in Df'(k+1,A,n)\subseteq Df(A,n)$

5) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5^4 \Rightarrow E(m,A,n)=Proy(A,E(i,A,n+1),n)$

como $i<m\Rightarrow$ por H.I. $E(i,A,n+1)\in Df'(k,A,n+1)$ para algún $k\in\omega$

$\Rightarrow E(m,A,n)=Proy(A,E(i,A,n+1),n)\in Df'(k+1,A,n)\subseteq Df(A,n)$. □

8.1.8. COROLARIO. $|Df(A,n)|\leq\omega$. □

8.1.9. LEMA. Df y E son absolutas para modelos transitivos de ZF-P.

PRUEBA.

$Proy, Diag_{\in}, Diag_{=}, Df', Df, E$, están definidas usando nociones que ya hemos probado que son absolutas: por ejemplo, para el caso de recursión aplicamos nuestro resultado que tenemos sobre absolutez de funciones recursivas, teorema 7.1.2; para E también usamos la absolutez de la exponenciación ordinal, corolario 7.1.3. □

8.1.10. NOTACION. Si $s=(s_0,\ldots,s_{n-1})$ es una sucesión, entonces $s^\wedge\langle y\rangle$ es la sucesión $s^\wedge\langle y\rangle=(s_0,\ldots,s_{n-1},y)$

$s^\wedge\langle y\rangle$ la llamamos la concatenación de s con y. □

8.1.11. DEFINICION

$D(A)=\{X\subseteq A / \exists n\in\omega \exists s\in A^n \exists R\in Df(A,n+1) \text{ tq } X=\{y\in A : s^\wedge\langle y\rangle \in R\}\}$

Aquí, si $s=(s_0,\dots,s_{n-1}) \Rightarrow s^\wedge\langle y\rangle=(s_0,\dots,s_{n-1},y)$. $\square$

8.1.12. LEMA (ESQUEMA). Sea $\varphi(x_0,\dots,x_{n-1},x)$ fórmula con variables libres entre $x_0,\dots,x_{n-1},x$. Entonces

$\forall A \forall x_0,\dots,x_{n-1}\in A[\{x\in A : \varphi^A(x_0,\dots,x_{n-1},x)\}\in D(A)]$

PRUEBA.

Claramente $\{x\in A : \varphi^A(x_0,\dots,x_{n-1},x)\}\subseteq A \quad \forall A \forall x_0,\dots,x_{n-1}\in A$

Sean A conjunto y $x_0,\dots,x_{n-1}\in A$

Ahora, recordamos por lema 8.1.3 que

(1) $\{s\in A^{n+1} / \varphi^A(s(0),\dots,s(n-1),s(n))\}\in Df(A,n+1)$

Sea $\xi\in A^n$ tq $\xi(0)=x_0,\dots,\xi(n-1)=x_{n-1}$

$\Rightarrow$ (2) $\varphi^A(\xi^\wedge\langle x\rangle(0),\dots,\xi^\wedge\langle x\rangle(n-1),\xi^\wedge\langle x\rangle(n)) \Leftrightarrow \xi^\wedge\langle x\rangle \in \{s\in A^{n+1} / \varphi^A(s(0),\dots,s(n))\}$

Por lo tanto $\exists n\in\omega \; \exists \xi\in A^n$ con $\xi(0)=x_0,\dots,\xi(n-1)=x_{n-1}$

y por (1) existe $R=\{s\in A^{n+1} / \varphi^A(s(0),\dots,s(n-1),s(n))\}\in Df(A,n+1)$

tal que

$\{x\in A / \varphi^A(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x)\}=\{x\in A / \varphi^A(\xi^\wedge\langle x\rangle(0),\dots,\xi^\wedge\langle x\rangle(n-1),\xi^\wedge\langle x\rangle(n))\}=$

$=\{x\in A / s^\wedge\langle x\rangle\in R\}$

y donde la última igualdad se da por (2). $\square$

8.2. CONJUNTOS CONSTRUCTIBLES

8.2.1. DEFINICION. Por recursión transfinita sobre ON definimos

(a) $L(0)=0$

(b) $L(\alpha+1)=D(L(\alpha))$

(c) $L(\alpha)=\bigcup_{\varepsilon<\alpha} L(\varepsilon)$ cuando α es un ordinal límite. □

8.2.2 DEFINICION. (El Universo Definible o Constructible de Gödel).

$L=\bigcup\{L(\alpha):\alpha\in ON\}$. □

8.2.3. OBSERVACION. $D(A)\subseteq \mathcal{P}(A)$.

Esto es inmediato de la definición.

Además si $A\in V$ y (si $D(A)\subseteq\mathcal{P}(A)\in V$) $\Rightarrow D(A)\in V$ por Comprehensión. □

8.2.4. LEMA. $\forall X\subseteq A\,[\,|X|<\omega \rightarrow X\in D(A)\,]$

PRUEBA.

Sea $X\subseteq A$ y $|X|=n\in\omega$

Consideremos al conjunto $E_n^m=\{s\in A^{n+1}: \exists i<m,\ s(n)=s(i)\}$ para $m\leq n$

Veamos que $E_n^m\in Df(A,n+1)$, para $m\leq n$ por inducción sobre m:

- $m=0$, $E_n^0=\{s\in A^{n+1}: \exists i<0\ (s(n)=s(i))\}=\emptyset\in Df(A,n+1)$ por prueba del lema 8.1.7

- Supongo para m.

$E_n^{m+1}=\{s\in A^{n+1}: \exists i<m+1\ (s(n)=s(i))\}$

$=E_n^m\cup\{s\in A^{n+1}: s(n)=s(m)\}\in Df(A,n+1)$

Por H.I para E_n^m, y porque $\{s\in A^{n+1}: s(n)=s(m)\}=Diag_=(A,n+1,n,m)$ y por definición de $Df(A,n+1)$ y Unión.

Así, para cualquier n y cualquier $s\in{}^nA$, si R_s denota al "Rango de S", tengo $R_s=\{y\in A: s^\frown\langle y\rangle\in E_n^n\}\in D(A)$

Por definición de $D(A)$ pues $R_s\subseteq A$, $n\in\omega$, $s\in{}^nA$ y hay $E_n^n\in Df(A,n+1)$ tal que $R_s=\{y\in A: s^\frown\langle y\rangle\in E_n^n\}$, por lo que $R_s\in D(A)$, así

* $D(A)=\{X\subseteq A: \exists n\in\omega\,\exists s\in A^n\,\exists R\in Df(A,n+1)$ tq $X=\{y\in A: s^\frown\langle y\rangle\in R\}\}$

regresando a $X=\{a_0,\dots,a_{n-1}\}$ considero $s\in A^n$ tq $s(i)=a_i$

$\Longrightarrow X=\{y\in A: s^\frown\langle y\rangle\in E_n^n\}\in D(A)$. □

8.2.5. COROLARIO. Si A es finito $\Longrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq D(A)$. Por lo que $D(A)=\mathcal{P}(A)$ y $|D(A)|=|\mathcal{P}(A)|=2^{|A|}>|A|$. $\square$

8.2.6. COROLARIO.

(1) $R(n)=L(n) \quad \forall n\in\omega$

(2) $R(\omega)=\bigcup_{n\in\omega} R(n)=\bigcup_{n\in\omega} L(n)=L(\omega)$. $\square$

8.2.7. PROPOSICION. (AC)

i) Si A es infinito, $|D(A)|\leq|A|$

ii) $|A|\leq|D(A)|$

iii) Si A es infinito, $|D(A)|=|A|$

PRUEBA.

i) Por la definición de $D(A)$, $|D(A)|\leq\aleph_0\cdot|A^n|\cdot\aleph_0$

Por ser A infinito $\aleph_0\cdot|A^n|\cdot\aleph_0=|A^n|\underset{AC}{=}|A|$

ii) $|A|\leq|D(A)|$ pues $\forall b\in A$, $\{b\}=\{x\in A : x=b\}\in D(A)$

iii) por i) y ii). $\square$

8.2.8. PROPOSICION. Si A es transitivo $\Longrightarrow A\subseteq D(A)$

PRUEBA.

Sea A transitivo. Sea $b\in A$. Entonces

$b=\{x / x\in b\}=\{x\in A / x\in b\}=\{x\in A / (x\in b)^A\}\in D(A)$

la segunda igualdad es por transitividad de A, la tercera porque $(x\in b)^A\equiv(x\in b)$

8.2.9. PROPOSICION. (PROPIEDADES DE L y $L(\alpha)$'s).

(a) $L(\alpha)\subset R(\alpha) \quad \forall\alpha\in ON$ y $L\subset WF$

(b) $L(n)=R(n) \quad \forall n\in\omega$ y $L(\omega)=R(\omega)$.

$|L(n)|<|\mathcal{P}(L(n))|=|D(L(n))|=|L(n+1)| \quad \forall n\in\omega$

(c) Si α es infinito, $|L(\alpha)|=|D(L(\alpha))|=|L(\alpha+1)|$

(d) $L(\alpha)$ es transitivo $\forall\alpha\in ON$

(e) $\forall\beta<\alpha$, $L(\beta)\subseteq L(\alpha)$

(f) L es clase transitiva

(g) $\forall\alpha\in ON\,((L(\alpha)\cap ON)=\alpha)$

(h) $\forall\alpha\in ON\,(\alpha\in L)$ es decir $ON\subseteq L$

(i) $\forall\alpha\in ON\,(\rho_L(\alpha)=\alpha=\rho(\alpha))$ donde $\rho_L(x)$ es el L-rango de x y esta definido como $\rho_L(x)=\bigcap\{\alpha\in ON / x\in L(\alpha+1)\}$

(j) $\forall\alpha\in ON \quad L(\alpha)=\{x\in L / \rho_L(x)<\alpha\}$

(k) $\forall\alpha\in ON \quad L(\alpha)\in L(\alpha+1)$

(l) si $\alpha<\beta \Longrightarrow L(\alpha)\in L(\beta)$

PRUEBA.

(a) Induccion, $L(0)=R(0)=0$

$$L(\alpha+1)=D(L(\alpha))\subseteq \mathcal{P}(L(\alpha))\overset{H.I}{\subseteq}\mathcal{P}(R(\alpha))=R(\alpha+1). \Rightarrow L\subseteq WF.$$

Si $L(\alpha)\subseteq R(\alpha)$ $\forall\alpha\in\gamma$ y γ límite $L(\gamma)=\bigcup_{\alpha<\gamma}L(\alpha)\subseteq\bigcup_{\alpha<\gamma}R(\alpha)=R(\gamma)$

(b) es por corolario 8.2.5 y corolario 8.2.6.

(c) es por proposición 8.2.7 iii)

(d) $L(\alpha)$ es transitivo $\forall\alpha\in ON$. Inducción

$L(0)=0$ es transitivo

$L(\alpha+1)=D(L(\alpha))\subseteq\mathcal{P}(L(\alpha))$ por observación 8.2.3

Sea $X\in L(\alpha+1)\Rightarrow X\subset L(\alpha)$

Como $L(\alpha)$ es transitivo por H.I $\Rightarrow L(\alpha)\subset D(L(\alpha))=L(\alpha+1)\Rightarrow X\subseteq L(\alpha+1)$

$L(\gamma)=\bigcup_{\beta<\gamma}L(\beta)$ y $L(\beta)$ transitivo $\forall\beta<\gamma$

$\Rightarrow$ por OBSERVACION 5.1.2. la unión de transitivos es transitivo

$\Rightarrow L(\gamma)$ es transitivo

(e) $\forall\beta<\alpha$, $L(\beta)\subseteq L(\alpha)$. Inducción sobre α

•) $\alpha=0$, es trivial

••) $\beta<\alpha+1$ Si $\beta<\alpha\Rightarrow L(\beta)\subseteq L(\alpha)$ por H.I. $\Rightarrow L(\beta)\subseteq L(\alpha)\subseteq D(L(\alpha))=L(\alpha+1)$

Si $\beta=\alpha\Rightarrow L(\beta)=L(\alpha)\subseteq D(L(\alpha))=L(\alpha+1)$

Donde la contención $L(\alpha)\subseteq D(L(\alpha))$ es por la trasitividad de $L(\alpha)$.

•••) γ límite y supongamos la H.I. para todo $\beta<\gamma$

$\Rightarrow L(\beta)\subseteq L(\beta+1)$ por H.I

como γ es límite $\Rightarrow\beta+1<\gamma\Rightarrow L(\beta)\subseteq L(\beta+1)\subseteq\bigcup_{\varepsilon<\gamma}L(\varepsilon)=L(\gamma)$

(f) L es transitivo. Por observación 5.1.2 unión de transitivos es transitivo

(g) $\forall\alpha\in ON$ $(L(\alpha)\cap ON=\alpha)$. Inducción

•) $\alpha=0$ $L(0)=0$ y $0\cap ON=0=\alpha$

••) $\alpha=\beta+1$ y por H.I $L(\beta)\cap ON=\beta$. Por observación 8.2.3 $L(\beta+1)=D(L(\beta))\subseteq\mathcal{P}(L(\beta))$

Por (e) $L(\beta)\subseteq L(\beta+1)$, por (a) $L(\beta)\subseteq R(\beta)\Rightarrow\mathcal{P}(L(\beta))\subseteq\mathcal{P}(R(\beta))\Rightarrow$

$\Rightarrow\beta=L(\beta)\cap ON\subseteq L(\beta+1)\cap ON\subseteq\mathcal{P}(L(\beta))\cap ON\subseteq\mathcal{P}(R(\beta))\cap ON=R(\beta+1)\cap ON=\beta+1$

la última igualdad es por lema 5.1.10 (b).

Por lo tanto $\beta\subseteq L(\beta+1)\cap ON$ y $L(\beta+1)\cap ON\subseteq\beta+1$

solo falta ver que $\beta\in L(\beta+1)\cap ON$, $\Rightarrow$ solo falta ver que $\beta\in L(\beta+1)$

$\beta\underset{HI}{=}L(\beta)\cap ON=\{\delta\in L(\beta)\,/\,\delta\text{ es ordinal}\}=\{\delta\in L(\beta)\,/\,(\delta\text{ es ordinal})^{L(\beta)}\}\in D(L(\beta))=L(\beta+1)$

el tercer = es porque (δ es ordinal) es absoluta para transitivos y la pertenencia es por lema 8.1.12.

•••) γ límite $L(\gamma)\cap ON=(\bigcup_{\beta<\gamma}L(\beta))\cap ON=\bigcup_{\beta<\gamma}(L(\beta)\cap ON)\overset{HI}{=}\bigcup_{\beta<\gamma}\beta=\gamma$

(h) $\forall \alpha \in ON\ (\alpha \in L)$. Es decir, $ON \subseteq L$

usando (g) para $\alpha \in ON$, $\alpha \in \alpha+1 = L(\alpha+1) \cap ON \Rightarrow \alpha \in L(\alpha+1) \subseteq L$.

(i) $\forall \alpha \in ON \quad \rho_L(\alpha) = \alpha$

sea $\alpha \in ON$, $\alpha \in \alpha+1 = L(\alpha+1) \cap ON \Rightarrow \alpha \in L(\alpha+1)$ y $\alpha \notin L(\alpha)$ ya que si $\alpha \in L(\alpha) \Rightarrow \alpha \in L(\alpha) \cap ON = \alpha$ 8 $(\alpha \notin \alpha) \Rightarrow \rho_L(\alpha) = \alpha$

(j) $\forall \alpha \in ON \quad L(\alpha) = \{x \in L / \rho_L(x) < \alpha\}$

$\subseteq$] Si $x \in L(\alpha) \Rightarrow x \in L$ y $\rho_L(x) < \alpha$ por la definición de L-rango

$\supseteq$] Si $x \in L$ y $\rho_L(x) < \alpha \Rightarrow x \in L(\rho_L(x)+1)$ y $\rho_L(x)+1 \leq \alpha$

$\Rightarrow$ por (e) $L(\rho_L(x)+1) \subseteq L(\alpha) \Rightarrow x \in L(\alpha)$.

(k) $\forall \alpha \in ON$, $L(\alpha) \in L(\alpha+1)$

$L(\alpha) = \{x \in L(\alpha) / (x \approx x)^{L(\alpha)}\} \in \mathcal{D}(L(\alpha)) = L(\alpha+1)$

la pertenencia $\in$ es por el lema 8.1.12.

(l) si $\alpha < \beta \Rightarrow L(\alpha) \in L(\beta)$. Inducción sobre β

•) $\beta = 0$. —

••) sup $\alpha < \beta+1$ (y H.I para β) $\Rightarrow \alpha \leq \beta$

si $\alpha < \beta \Rightarrow$ por H.I y por (k) $L(\alpha) \in L(\beta) \in L(\beta+1)$

$\Rightarrow$ por (d) (transitividad de $L(\beta+1)$) se tiene $L(\alpha) \in L(\beta+1)$

•••) sup $\alpha < \gamma$ y γ límite

$\Rightarrow \alpha < \alpha+1 < \gamma \Rightarrow L(\alpha) \in L(\alpha+1) \subseteq \bigcup_{\beta<\gamma} L(\beta) = L_\gamma \Rightarrow L(\alpha) \in L(\gamma)$

$L(\alpha) \in L(\alpha+1)$ es por (k). □

8.2.10. COROLARIO. L es clase transitiva que contiene a todos los ordinales.

PRUEBA.

Por proposición 8.2.9 (f) y (h). □

8.2.11. OBSERVACION. $L(\alpha) \neq R(\alpha)$ para la mayoría de $\alpha > \omega$

Pues si $\omega < \alpha < \omega_1$, $|L(\alpha)| = |\alpha|$ es contable pero $R(\alpha)$ es incontable.

En nuestros resultados que siguen haremos mas clara esta observación. □

8.2.12. PROPOSICION. (AE) $\forall \alpha \geq \omega \quad |L(\alpha)| = |\alpha|$

PRUEBA

Inducción sobre $\alpha \geq \omega$

•) $\alpha = \omega \quad |L(\omega)| = |R(\omega)| = \aleph_0 = |\omega|$

••) $\alpha+1$, $|L(\alpha+1)| = |D(L(\alpha))| = |L(\alpha)| = |\alpha| = |\alpha+1|$

el segundo = es por Proposición 8.2.7 y el tercer = es por H.I.

•••) γ límite $|L(\gamma)| = |\bigcup_{\beta<\gamma} L(\beta)| = |L(\omega) \cup (\bigcup_{\omega\leq\beta<\gamma} L(\beta))| \leq \aleph_0 + \sum_{\omega\leq\beta<\gamma} |L_\beta|$

$= \aleph_0 + |\gamma| \cdot \sup_{\omega\leq\beta<\gamma} |\beta| = |\gamma|$

el penúltimo = es por H.I y el último es porque γ es limite mayor que ω.

$\Rightarrow |L(\gamma)| \leq |\gamma|$

Pero por 8.2.9.(g) $\gamma = L(\gamma) \cap ON \subseteq L(\gamma) \Rightarrow |\gamma| \leq |L(\gamma)| \Rightarrow |L(\gamma)| = |\gamma|$. □

8.2.13. COROLARIO. Si $\omega < \alpha < \omega_1$, $L(\alpha)$ es contable ($|L(\alpha)| = |\alpha| = \aleph_0$) □

8.2.14. OBSERVACION. $R(\alpha)$ es incontable con $\alpha = \omega+1$ pues $|R(\alpha)| = |\mathcal{P}(R(\omega))| > \aleph_0$. □

8.2.15. OBSERVACION. Sea $\alpha \geq \omega \cdot \omega$

$|L(\alpha)| = |R(\alpha)| \Leftrightarrow \alpha = \beth_\alpha$

PRUEBA

$\Leftarrow]$ si $\beth_\alpha = \alpha \Rightarrow$ como $L(\alpha) \subseteq R(\alpha)$, $|L(\alpha)| \leq |R(\alpha)|$, además

$|R(\alpha)| \leq |R(\omega+\alpha)| = \beth_\alpha = \alpha = |\alpha| = |L(\alpha)|$

$|\alpha| = \alpha$ ya que $\beth_\alpha = \alpha$ y $\beth_\alpha$ es cardinal

$\Rightarrow]$ $\beth_\alpha \geq \alpha \quad \forall \alpha \in ON \quad$ PD $\beth_\alpha \leq \alpha$

NOTA. Si $\alpha \geq \omega \cdot \omega \Rightarrow \omega + \alpha = \alpha$

Por NOTA si $\alpha \geq \omega \cdot \omega \Rightarrow \omega + \alpha = \alpha \Rightarrow R(\omega+\alpha) = R(\alpha)$

$\Rightarrow \beth_\alpha = |R(\omega+\alpha)| = |R(\alpha)| = |L(\alpha)| = |\alpha| \leq \alpha \Rightarrow \beth_\alpha \leq \alpha$. □

8.2.16. LEMA. $L(\alpha)$ es un funcional absoluto para modelos M transitivos de ZF − P.

PRUEBA.

D es absoluto para M, ON es absoluto para M y $\forall x \in M (x_\in = x \subseteq M)$ y $L(\alpha)$ está definido por recursión transfinita sobre ON a partir de D. Así por teorema 7.1.2 se tiene que $L(\alpha)$ es absoluta para M transitivo y modelo de ZF−P. □

CAPITULO 9
OTROS EJEMPLOS

9.1. EL AXIOMA DE CONSTRUCTIBILIDAD $V=L$

9.1.1. DEFINICION. El Axioma de Costructibilidad es el enunciado $V=L$, es decir, $\forall x \exists \alpha (x \in L(\alpha))$.

9.1.2. TEOREMA (ZF). L es un modelo de ZF.

PRUEBA

0. Existencia de Conjuntos, $\exists x(x=x)$ se tiene ya que $\exists 0 \in L (0=0)$ esto se podría argumentar ya que 0 es finito, $\Rightarrow$ por corolario 8.2.5 obtenemos que $\mathcal{P}(0) \subset D(0) \Rightarrow \{0\} = \mathcal{P}(0) \subset D(0) = D(L(0)) = L(1) \subseteq L \Rightarrow 0 \in L$.

1: Extensionalidad.
Por proposición 8.2.9, L es clase transitiva (8.2.9 (f))
$\Rightarrow$ por Lema 6.2.1 L es modelo del Axioma de Extensionalidad

2. Fundación.
Por proposición 8.2.9 (a), $L \subset WF$
$\Rightarrow$ por lema 6.3.4, L es modelo del Axioma de Fundación

3. Comprehensión (Esquema).
Por lema 6.2.2, es suficiente verificar, para cada fórmula $\Psi(x, z, v_1, \ldots, v_n)$ sin otras variables libres que las exhibidas, que
$\forall z, v_1, \ldots, v_n \in L \ (\{x \in z / \Psi^L(x, z, v_1, \ldots, v_n)\} \in L)$
La definición de $L(\alpha+1) \in D(L(\alpha))$ fue preparada para hacer este trabajo, pero $D(L(\alpha))$ envuelve relativizaciones de $L(\alpha)$, No L.
Para remediar esto, aplicaremos el Teorema General de Reflexión.
Sean $z, v_1, \ldots, v_n \in L \Rightarrow$ sea $\alpha \in ON$ tal que $z, v_1, \ldots, v_n \in L(\alpha)$
Por Teorema General de Reflexion 7.2.3 sea $\beta > \alpha$ tq Ψ es absoluta para $L(\beta)$, L.
definimos $\varphi \equiv (x \in z \wedge \Psi) \Rightarrow \{x \in z / \Psi^L(x, z, v_1, \ldots, v_n)\} = \{x \in L(\beta) / \varphi^{L(\beta)}(x, z, v_1, \ldots, v_n)\}$
Por lema 8.1.11 este conjunto esta en $D(L(\beta)) = L(\beta+1) \subset L$.

4. El Par.
Sean $x, y \in L \Rightarrow$ sea α tq $x, y \in L(\alpha)$
$\Rightarrow \{x, y\} = \{z \in L(\alpha) / (z = x \vee z = y)\} = \{z \in L(\alpha) / (z = x \vee z = y)^{L(\alpha)}\} \in D(L(\alpha)) \in L(\alpha+1)$
utilizando el lema 8.1.11 y también la definición de Relativización.

5. Unión. Sea $x\in L \Rightarrow \exists \alpha$ tq $x\in L(\alpha) \Rightarrow x\subset L(\alpha)$ por transitividad de $L(\alpha)$ también por ser $L(\alpha)$ transitivo, $\bigcup x \subset \bigcup L(\alpha) \subset L(\alpha) \Rightarrow \bigcup x \subset L(\alpha)$ entonces

$$\bigcup x = \{y\in L(\alpha) / \exists z (z\in x \wedge y\in z)\}$$

pero $z\in x$ y $x\subset L(\alpha) \Rightarrow z\in L(\alpha)$ y además $(z\in x\wedge y\in z)^{L(\alpha)} = z\in x\wedge y\in z$

$$\Rightarrow \bigcup x = \{y\in L(\alpha) / \exists z (z\in x \wedge y\in z)\} = \{y\in L(\alpha) / \exists z\in L(\alpha) (z\in x\wedge y\in z)^{L(\alpha)}\}$$
$$= \{y\in L(\alpha) / (\exists z (z\in x\wedge y\in z))^{L(\alpha)}\} \in D(L(\alpha)) = L(\alpha+1) \subseteq L$$

donde $\{y\in L(\alpha) / (\exists z (z\in x\wedge y\in z))^{L(\alpha)}\} \in D(L(\alpha))$ es por lema 8.1.11

6. Reemplazo (Esquema).

Por lema 6.3.3, es suficiente probar que para cada fórmula $\varphi(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$ y cada $A, w_1, \ldots, w_n \in L$, si suponemos

(1) $\forall x\in A \exists! y\in L\, \varphi^L(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$

entonces podemos concluir

(2) $\exists Y\in L (\{y / \exists x\in A\, \varphi^L(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)\} \subset Y)$

Suponiendo (1), sea

$$\alpha = \sup\{\rho(y)+1 / \exists x\in A\, \varphi^L(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)\}.$$

entonces tomamos $Y = L(\alpha)$ y como $Y = L(\alpha)\in L(\alpha+1)$ por proposición 8.2.9(k)

$\Rightarrow$ (2) queda satisfecho.

7. Infinito.

Se obtiene por lema 6.4.1, ya que ya probamos que L es modelo de ZF-P-Inf y además $\omega\in L$ por proposición 8.2.9 (h)

8. Conjunto Potencia

Sea $x\in L$ PD $\exists \bar{y}\in L\, \forall z\in L (z\in\bar{y} \leftarrow z\subset^L x)$

Probaremos algo más fuerte: $\exists \bar{y}\in L\, \forall z\in L (z\in\bar{y} \leftrightarrow z\subset^L x)$

Por ser L transitivo, $z\subset x$ es absoluta para L por teorema 6.1.11,

$$\Longrightarrow (\mathcal{P}(x))^L = \{y\in L / y\subset^L x\} = \{y\in L / y\subset x\} = \mathcal{P}(x)\cap L$$

$\forall y\subset x$ tq $y\in L$ sea β_y tq $y\in L(\beta_y)$ y β_y es el menor con esta propiedad

Definimos $\alpha = \sup\{\beta / y\in L(\beta), y\subset x, y\ \beta$ mínimo$\}$

$\Rightarrow \forall y\subset x$ tq $y\in L$ $(y\in L(\alpha+1))$

$$\Rightarrow (\mathcal{P}(x))^L = \{y\in L / y\subset x\} = \{y\in L(\alpha+1) / y\subset x\} = \{y\in L(\alpha+1) / (y\subset x)^{L(\alpha+1)}\} \quad (*)$$

la última igualdad es porque $y\subset x \Leftrightarrow (y\subset x)^{L(\alpha+1)}$

ya que $(y\subset x)^{L(\alpha+1)} \Leftrightarrow (y\cap L(\alpha+1))\subset x$.

pero si $y\in L(\alpha+1) \Rightarrow y\subset L(\alpha+1) \Rightarrow [(y\subset x)^{L(\alpha+1)} \Leftrightarrow (y\cap L(\alpha+1))\subset x \Leftrightarrow y\subset x]$.

Por lo tanto por lema 8.1.11, finalmente tenemos usando $(*)$

$$(\mathcal{P}(x))^L = \{y\in L(\alpha+1) / (y\subset x)^{L(\alpha+1)}\} \in D(L(\alpha+1)) = L(\alpha+2) \subset L.$$

Entonces definimos $\bar{y} = (\mathcal{P}(x))^L$ y obtenemos el resultado. $\square$

9.1.3. LEMA(ZF). L es modelo del Axioma de Costructibilidad V=L.

PRUEBA

Debemos probar que $\forall x \in L \exists \alpha \in L\ ((x \in L(\alpha))^L)$

Sea $x \in L \Rightarrow$ sea α tq $x \in L(\alpha)$, con $\alpha \in ON$

Por proposición 8.2.9 (h), $\alpha \in L$

y también se tiene $(x \in L(\alpha))^L$ ya que $L(\alpha)$ es absoluta para L por lema 8.2.16.□

9.1.4. COROLARIO(ZF). L es modelo de ZF + (V=L)

PRUEBA.

Por teorema 9.1.2 y lema 9.1.3.□

5a. Prueba de Consistencia Relativa

9.1.5. COROLARIO

$$CON(ZF) \rightarrow CON(ZF + (V=L))$$

9.2. EL AXIOMA DE ELECCION **AE**

9.2.1. OBSERVACION.

Recordar ahora el Teorema Fundamental 4.3.5 y el Corolario 4.3.4.

Si $\Pi \vdash \exists x(x \in M)$

$\Pi \vdash \sigma^M$ para todo $\sigma \in \Sigma$

si además $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow$ por corolario 4.3.4 se tiene $\Pi \vdash \varphi^M$

Entonces

$\Pi \vdash \exists x(x \in M)$

$\Pi \vdash \sigma^M$ para todo $\sigma \in \Sigma \cup \{\varphi\}$

$\Rightarrow$ por Teorema Fundamental 4.3.5: $CON(\Pi) \Rightarrow CON(\Sigma \cup \{\varphi\})$

En particular:

para $M = L$, $\Pi = ZF$, $\Sigma = ZF + (V=L)$, $\varphi = AE$ o $\varphi = HGC$

escribimos esta observación en forma de corolario

9.2.2. COROLARIO

(1) Si $ZF + (V=L) \vdash AE$

entonces $CON(ZF) \Rightarrow CON(ZF + AC)$

(2) Si $ZF + (V=L) \vdash H.G.C$

entonces $CON(ZF) \Rightarrow CON(ZF + HGC)$

PRUEBA

Por observación 9.2.1. $\square$

Con el fin de probar $CON(ZF) \Rightarrow CON(ZF + AE)$, damos algunas definiciones.

9.2.3. NOTACION. $^{\omega}L(\alpha) = \bigcup_{n \in \omega} {}^{n}L(\alpha)$ "las sucesiones finitas de elementos de $L(\alpha)$". $\square$

Probaremos que $ZF + (V=L) \vdash AE$.
Para esto definiremos un buen orden para $L(\alpha)$ $\forall \alpha \in ON$.

9.2.4. DEFINICION. Sea $\lhd_\alpha$ un buen orden de $L(\alpha)$ con $\alpha \in ON$.
Definimos $\lhd_\alpha^n \subseteq L^n(\alpha) \times L^n(\alpha)$ como sigue

$$\lhd_\alpha^n = \left\{ (s,t) \in L^n(\alpha) \times L^n(\alpha) / \exists k < n \left[s\restriction_k = t\restriction_k \wedge s(k) \lhd_\alpha t(k) \right] \right\}. \square$$

9.2.5. OBSERVACION. $\forall \alpha \in ON, Df(L(\alpha), n+1) = \{E(m, L(\alpha), n+1) / m \in \omega\}$
$\forall \alpha \in ON, Df(L(\alpha), n) = \{E(m, L(\alpha), n) / m \in \omega\}$.

PRUEBA.
Por lema 8.1.7. $\square$

9.2.6. OBSERVACION. Dado $\lhd_\alpha$ un buen orden de $L(\alpha)$,
$\lhd_\alpha^n$ es un buen orden, para $L^n(\alpha)$.

PRUEBA.
$\lhd_\alpha^n$ es el orden lexicográfico de $L^n(\alpha)$ inducido por $\lhd_\alpha$. $\square$

9.2.7. OBSERVACION.
$$D(L(\alpha)) = \{X \subset L(\alpha) / \exists n \in \omega \exists s \in L^n(\alpha) \exists m \in \omega (X = \{y \in L(\alpha) / s^\frown\langle y\rangle \in E(m, L(\alpha), n+1)\})\}$$

PRUEBA
Por definición 8.1.10
$$D(L(\alpha)) = \{X \subset L(\alpha) / \exists n \in \omega \exists s \in L^n(\alpha) \exists R \in Df(L(\alpha), n+1) (X = \{y \in L(\alpha) / s^\frown(y) \in R\})\}$$
Por observación 9.2.6
$$D(L(\alpha)) = \{X \subset L(\alpha) / \exists n \in \omega \exists s \in L^n(\alpha) \exists m \in \omega (X = \{y \in L(\alpha) / s^\frown(y) \in E(m, L(\alpha), n+1)\})\}. \square$$

9.2.8. DEFINICION. Sea $\lhd_\alpha$ un buen orden de $L(\alpha)$, sea $X \in L(\alpha+1) = D(L(\alpha))$.
1) n_X es el menor $n \in \omega$ tq $\exists s \in L^n(\alpha) \exists m \in \omega (X = \{y \in L(\alpha) / s^\frown\langle y\rangle \in E(m, L(\alpha), n+1)\})$
2) S_X es la $\lhd_\alpha^{n_X}$-menor $s \in L_\alpha^{n_X}$ tq $\exists m \in \omega (X = \{y \in L(\alpha) / s^\frown(y) \in E(m, L(\alpha), n_X+1)\})$
3) m_X es el menor $m \in \omega$ tq $X = \{y \in L(\alpha) / s_X^\frown\langle y\rangle \in E(m, L(\alpha), n_X+1)\}$. $\square$

9.2.9. DEFINICION. Sea $\lhd_\alpha$ un buen orden de $L(\alpha)$. Sean $x, y \in L(\alpha+1)$.
Entonces $x \lhd_{\alpha+1} y \iff$
a) $(x, y \in L(\alpha)) \wedge (x \lhd_\alpha y)$
ó b) $(x \in L(\alpha)) \wedge (y \notin L(\alpha))$
ó c) $(x, y \notin L(\alpha)) \wedge$
$$\wedge \left[(n_x < n_y) \vee (n_x = n_y \wedge s_x \lhd_\alpha^{n_x} s_y) \vee (n_x = n_y \wedge s_x = s_y \wedge m_x < m_y) \right]. \square$$

9.2.10. LEMA. Sea $\lhd_\alpha$ un buen orden de $L(\alpha)$.
Entonces $\lhd_{\alpha+1}$ bien ordena a $L(\alpha+1)$

PRUEBA.

Sea $A \subset L(\alpha+1) = D(L(\alpha))$ y $A \neq \emptyset$

Si $A \cap L(\alpha) \neq 0$ entonces encontramos un elemento mínimo usando $\lhd_\alpha$,
supongamos $A \cap L(\alpha) = 0$

Sea n_0 el menor n tq $\exists s \in L^n(\alpha) \exists m \in \omega$ tq $\{y \in L(\alpha) / s^\frown\langle y\rangle \in E(m, L(\alpha), n+1)\} \in A$

sea s_0 la $\lhd_\alpha^{n_0}$-menor $s \in L^n(\alpha)$ tq $\exists m \in \omega$ tq $\{y \in L(\alpha) / s^\frown\langle y\rangle \in E(m, L(\alpha), n_0+1)\} \in A$

Sea m_0 el menor $m \in \omega$ tq $\{y \in L(\alpha) / s_0^\frown\langle y\rangle \in E(m, L(\alpha), n_0+1)\} \in A$

Entonces $\{y \in L(\alpha) / s_0^\frown\langle y\rangle \in E(m_0, L(\alpha), n_0+1)\}$ es el $\lhd_{\alpha+1}$ primer elemento de A. □

9.2.11. DEFINICION. Por recursión sobre $\alpha \in ON$, definimos un buen orden para $L(\alpha)$

1) $\lhd_0 = 0$
2) dado $\lhd_\alpha$, un buen orden de $L(\alpha)$
definimos $\lhd_{\alpha+1}$ como en la definición 9.2.10
3) Si γ es límite

$$\lhd_\gamma = \{\langle x, y\rangle \in L(\gamma) \times L(\gamma) / [\rho_L(x) < \rho_L(y)] \vee [\rho_L(x) = \rho_L(y) \wedge \langle x, y\rangle \in \lhd_{\rho_L(x)+1}]\}. \square$$

9.2.12. DEFINICION. Sean $x, y \in L$.

$$x \leq_L y \iff [\rho_L(x) < \rho_L(y)] \vee [\rho_L(x) = \rho_L(y) \wedge \langle x, y\rangle \in \lhd_{\rho_L(x)+1}]. \square$$

9.2.13. LEMA. $<_L$ bien ordena a L.

PRUEBA

Cada $L(\alpha)$ es un segmento inicial de L bajo el orden $\leq_L$
y $\leq_L \restriction_{L(\alpha)} = \lhd_\alpha$. □

9.2.14. LEMA. La función $\lhd(\alpha)$ es absoluta para modelos transitivos de ZF-P.

PRUEBA

por teorema 7.1.2 ya que $\lhd(\alpha) = \lhd_\alpha$ está definida por recursión. □

9.2.15. COROLARIO. $(V=L) \rightarrow AE$

PRUEBA

Supongamos $(V=L)$

Por lema 9.2.14, $<_L$ bien ordena a $L=V$

Sea $X \in L$, por ser L transitivo $\Rightarrow X \subset L$

$\Rightarrow X$ es bien ordenado por el buen orden $<_L$ restringido a X. □

9.2.16. COROLARIO. $[ZF+(V=L)] \vdash AE$. □

6a. Prueba de Consistencia Relativa

9.2.17. COROLARIO.

$$CON(ZF) \Rightarrow CON(ZFE)$$

PRUEBA.

Por corolario 9.2.17, $ZF+(V=L) \vdash AE$,

Por corolario 9.2.2 (1), $CON(ZF) \Rightarrow CON(ZFE)$. □

9.3. MINIMALIDAD DEL MODELO L

En esta sección necesitamos que la función $\rho(x)$ (rango(x)) sea absoluta para un cierto M. Con este fin damos una definición recursiva

9.3.1. DEFINICION (ZF-P).

Como $\in$ es bien fundada y limitada por izquerda

Sea G el funcional definido como

$$G(f)=\begin{cases}\sup\{y+1 / y\in Ran(f), y\in ON\} & \text{si } f \text{ es función y } Ran(f)\cap ON\neq 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Entonces podemos definir por recursión la función $\rho(x,\in)=F(x)$ tal que $Dom(\rho(x,\in))=V=WF$

$$y\ \forall x\quad F(x)=G(F\restriction_{x_\in})=G(F\restriction_{x_\in})$$

$$\Rightarrow F(x)=\rho(x,\in)=\sup\{y+1/ y\in Ran(F\restriction_{x_\in}), y\in ON\}$$

$$\rho(x,\in)=\sup\{\rho(z,\in)+1 / z\in x\}\ .\ \square$$

9.3.2. LEMA (ZF). $\rho(x,\in)=\rho(x)$. $\forall x\in V=WF$.

PRUEBA

Supongamos que no, sea x $\in$-minimal tq $\rho(x,\in)\neq\rho(x)$

$\Rightarrow \forall z\in x\quad \rho(z,\in)=\rho(z)$

$\Rightarrow \rho(x,\in)=\sup\{\rho(z,\in)+1 / z\in x\}=\{\rho(z)+1/_{z\in x}\}=\rho(x)$

en donde la última igualdad es por lema 5.1.9.

$\Rightarrow \rho(x,\in)=\rho(x)$ 8 $(\rho(x,\in)\neq\rho(x))$. $\square$

9.3.2. COROLARIO

(a) (ZF − P) $\rho(x,\in)$ es absoluta para modelos transitivos de ZF-P

(b) (ZF) $\rho(x)$ es absoluta para modelos transitivos de ZF

PRUEBA.

(a) Por teorema 7.1.2, ya que $\rho(x,\in)$ esta definido por recursion

(b) por (a) y teorema 7.1.2 ya que $\rho(x)=\rho(x,\in)$. $\square$

9.3.3. LEMA. Si M es clase propia, transitiva y modelo de ZF
Entonces $ON \subset M$.

PRUEBA

Sea $\alpha \in ON \Rightarrow M \not\subset R(\alpha) = \{x / \rho(x) < \alpha\}$ pues M es clase propia,
$\Rightarrow$ hay un $x \in M$ tal que $\rho(x) \geq \alpha$
Pero la función $\rho(x)$ es absoluta para M por corolario 9.3.2. (b)
y $\rho(x)^M \in M$ por ser modelo de ZF y por ser transitiva
como $\rho(x)^M \in M \Rightarrow \rho(x)^M \subset M$
$\Rightarrow \alpha \leq \rho(x) = \rho^M(x) \subset M$
si $\alpha < \rho(x) \Rightarrow \alpha \in M$ porque $\rho(x) \subset M$
si $\alpha = \rho(x) \Rightarrow \alpha \in M$ porque $\rho(x) \in M$. $\square$

9.3.4. TEOREMA. Si M es clase propia transitiva modelo de ZF
$\Rightarrow L \subset M$.

PRUEBA

La razón es que $L = L^M \subset M$.
Por lema 7.1.1 (a), ON es absoluta para M
Por lema 8.2.16, $L(\alpha)$ es absoluta para M. Y como $ON \subset M$ (lema 9.3.3)

$$\Rightarrow L^M = \{x \in M / (\exists \alpha (x \in L(\alpha)))^M\} = \{x \in M / \exists \alpha (x \in L(\alpha))\} = \bigcup_{\alpha \in ON} (L(\alpha))^M = \bigcup_{\alpha \in ON} L(\alpha) = L$$

Por lo tanto $L = L^M \subset M$. $\square$

9.3.5. OBSERVACION. L es el $\subseteq$-menor modelo-clase transitivo de ZF que contiene a ON (ó que es clase propia). $\square$

9.3.6. OBSERVACION. En teorema 9.3.4 y lema 9.3.3 no es necesario que M sea modelo de todo ZF, es suficiente que lo sea de un conjunto finito de axiomas Γ, suficientemente grande para que ordinal, rango, $L(\alpha)$, sean absolutas para modelos transitivos de Γ. $\square$

9.3.7. DEFINICION. $O(M) = M \cap ON$. $\square$

9.3.8. LEMA. Si M es cualquier conjunto transitivo
$\Rightarrow O(M) \in ON$, y es el primer ordinal que no esta en M.

PRUEBA.

Como M es conjunto $\Rightarrow O(M) = M \cap ON$ es conjunto $\Rightarrow O(M) \subsetneq ON$ y $M \not\supseteq ON$
sea $\alpha \in ON$ el primer ordinal tq $\alpha \notin M$. Afirmamos que $\alpha = O(M)$
$\subseteq$] sea $\beta \in \alpha$, por minimalidad de $\alpha \Rightarrow \beta \in M \Rightarrow \beta \in M \cap ON = O(M) \Rightarrow \alpha \subset O(M)$
$\supseteq$] sea $\beta \in O(M) = M \cap ON \Rightarrow \beta \in M$ y $\beta \in ON \Rightarrow$ por M transitivo, $\beta \subset M$ y $\beta \in ON$
1) $\beta = \alpha \Rightarrow \beta \in M$ implica $\alpha \in M$ ↯ $(\alpha \notin M)$. Por lo tanto $\beta \neq \alpha$
2) $\beta \ni \alpha \Rightarrow \alpha \in \beta \subset M \Rightarrow \alpha \in M$ ↯ $(\alpha \notin M)$. Por lo tanto $\alpha \notin \beta$
Por lo tanto $\beta \in \alpha \Rightarrow O(M) \subset \alpha$. $\square$

9.3.9. OBSERVACION. Si M es modelo transitivo de $ZF \Rightarrow$

$$O(M) = M \cap ON = \{\alpha \in M / \alpha \text{ es ordinal}\} = \{\alpha \in M / (\alpha \text{ es ordinal})^M\} = ON^M. \square$$

9.3.10. COROLARIO.

1) Si M es clase propia modelo transitivo de ZF
$\Rightarrow O(M) = ON$

2) Si M es conjunto transitivo modelo de $ZF \Rightarrow$
$O(M) \in ON$ y es el primer ordinal que no pertence a M.

PRUEBA.

2) es por el lema 9.3.8.

1) Por lema 9.3.3, $ON \subset M \Rightarrow O(M) = M \cap ON = ON. \square$

9.3.11. TEOREMA. Hay una conjunción finita Ψ de axiomas de ZF tal que: $\forall M[M \text{ transitivo} \wedge \Psi^M \rightarrow L^M = L(O(M))]$

PRUEBA.

Por lema 7.1.4 y por observación 7.1.5, existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in ZF$ tq
$ZF \vdash \forall M(M \text{ transitivo} \wedge \varphi_1^M \wedge \ldots \wedge \varphi_n^M \rightarrow \chi \text{ es absoluta para } M)$
donde χ puede ser la noción de ordinal, rango, $L(\alpha)$, etc.

También hay una conjución finita α de axiomas de ZF para probar que: "no hay ordinal máximo", $\neg\exists x(x \text{ es ordinal} \wedge \forall y[y \text{ ordinal} \rightarrow y \leq x])$

Sea $\Psi = (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \wedge \alpha$

Afirmamos que $\forall M[M \text{ transitivo} \wedge \Psi^M \rightarrow L^M = L(O(M))]$

supongamos que M es transitivo y que Ψ^M PD $L^M = L(O(M))$

como ("no hay un ordinal máximo")$^M \Rightarrow O(M)$ es ordinal límite

$\Rightarrow L(O(M)) = \bigcup_{\alpha \in M} L(\alpha)$

y por la absolutez de $L(\alpha)$,

$$\Rightarrow L^M = \{x \in M / (x \in L)^M\} = \{x \in M / (\exists\alpha(x \in L(\alpha)))^M\} = \{x \in M / \exists\alpha \in M (x \in L(\alpha))\}$$
$$= \bigcup_{\alpha \in M} L(\alpha) = L(O(M))$$

la tercera igualdad es por la absolutez de $L(\alpha)$

la cuarta igualdad es porque si $x \in L(\alpha)$ y $\alpha \in M \Rightarrow$ por absolutez de $L(\alpha)$ y porque $[L(\alpha)]^M = \{x \in M / (x \in L(\alpha))^M\} = \{x \in M / x \in L(\alpha)\}$ concluimos que $x \in L^M(\alpha) \Rightarrow x \in M. \square$

9.3.12. TEOREMA. Hay una conjunción finita χ de axiomas de $ZF+(V=L)$ tal que

1) Si M es clase propia transitiva y χ^M, entonces $M=L$

2) $\forall M\,[M \text{ transitivo} \wedge \chi^M \rightarrow M=L(o(M))]$

PRUEBA.

Sabemos que $L^M=\{x\in M/(\exists\alpha(x\in L(\alpha)))^M\}\subset M$ (i)

Ahora sea ψ la conjunción del teorema anterior 9.3.11

y definimos $\chi=\psi\wedge(V=L)$

Si M es transitivo y $\chi^M \Rightarrow (V=L)^M \Rightarrow (\forall x\,(x\in L))^M \Rightarrow \forall x\in M\,(x\in L^M) \Rightarrow M\subset L^M$ (ii)

Por (i) y (ii), $M=L^M$

1) por teorema de minimalidad 9.3.4, $L=L^M\subset M$

como $M=L^M \implies M=L$

2) por teorema 9.3.11 $L^M=L(o(M))$

como $M=L^M \implies M=L(o(M))$. □

9.4. LA HIPOTESIS GENERALIZADA DEL CONTINUO HGC

9.4.1. DEFINICION (AC). HGC (La hipotesis generalizada del Continuo) es el enunciado

$$\forall \alpha\,(2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1})$$

donde

1) $\omega_0 = \omega$
2) $\omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$ el menor cardinal $> \omega_\alpha$
3) γ límite $\omega_\gamma = \sup\{\omega_\alpha / \alpha < \gamma\}$. □

9.4.2. TEOREMA. Si $V=L$, entonces para todo ordinal α infinito, $\mathcal{P}(L(\alpha)) \subset L(|\alpha|^+)$

PRUEBA

Por corolario 9.2.16 $(V=L) \to AC$, como tenemos $V=L$ entonces tenemos AC.

Ahora sea $\alpha \geq \omega$ y sea $A \in \mathcal{P}(L(\alpha)) \Rightarrow A \subset L(\alpha)$

Observación 1. $\alpha \geq \omega \Rightarrow |\alpha| = |L(\alpha)|$

Dado que $\alpha \subset L(\alpha) \Rightarrow |\alpha| \leq |L(\alpha)|$

Probemos $|L(\alpha)| \leq |\alpha|$ por inducción

Supongamos que $\forall \beta < \alpha\,(\beta \geq \omega \to |L(\beta)| = |\beta|) \Rightarrow \forall \beta < \alpha\,(|L(\beta)| \leq |\alpha|)$

•) α límite $\Rightarrow |L(\alpha)| = |\bigcup_{\beta<\alpha} L(\beta)| \leq \sum_{\beta<\alpha} |L(\beta)| \doteq \sum_{\beta<\alpha} |\beta| \leq \sum_{\beta<\alpha} |\alpha| \leq |\alpha||\alpha| = |\alpha|$

••) si $\alpha = \beta+1 \Rightarrow$ por H.I $|L(\beta)| = |\beta| = |\alpha|$ y $L(\alpha) = D(L(\beta))$

$\Rightarrow$ por proposición 8.2.7 $|D(L(\beta))| \leq |L(\beta)|$ ya que $L(\beta)$ es infinito

$\Rightarrow |L(\alpha)| = |D(L(\beta))| \leq |L(\beta)| = |\beta| = |\alpha|$.

Por lo tanto $|\alpha| = |L(\alpha)|$ para $\alpha \geq \omega$

Tenemos que $A \subset L(\alpha)$

Sea $X = L(\alpha) \cup \{A\} \Rightarrow |X| = |L(\alpha)| = |\alpha|$

Observacion 2. X es transitivo ya que $y \in X \Rightarrow \begin{cases} y \in L(\alpha) \Rightarrow y \subseteq L(\alpha) \subseteq X \\ y = A \Rightarrow y \subseteq L(\alpha) \subseteq X \end{cases}$

$\Rightarrow$ por corolario (AE) 7.2.11 con $Z=V$ y $\chi = \varphi_1 \wedge \cdots \varphi_n$ del Teorema 9.3.12

y $X = L(\alpha) \cup \{A\} \Rightarrow$

$\exists M[M$ es transitivo $\wedge X \subseteq M \wedge |M| \leq \max\{\aleph_0, |X|\} \wedge (\chi^M \leftrightarrow \chi)]$

$\Rightarrow |M| \leq \max\{\aleph_0, |X|\} = \max\{\aleph_0, |\alpha|\} = |\alpha| \Rightarrow |M| \leq |\alpha|$

como $X \subseteq M$ y $|\alpha| = |X| \Rightarrow |\alpha| = |X| \leq |M|$. Por lo tanto $|M| = |\alpha|$

Como $V=L$, χ se cumple y χ^M se cumple, entonces por teorema 9.3.12.2)

$M = L(o(M))$, como $|M| = |\alpha| \Rightarrow |o(M)| = |M \cap ON| \leq |M| = |\alpha| < |\alpha|^+ \Rightarrow |o(M)| < |\alpha|^+$

$\Rightarrow o(M) < |\alpha|^+ \Rightarrow L(o(M)) \subseteq L(|\alpha|^+)$

$\Rightarrow A \in X \subseteq M = L(o(M)) \subseteq L(|\alpha|^+) \Rightarrow A \in L(|\alpha|^+) \Rightarrow \mathcal{P}(L(\alpha)) \subset L(|\alpha|^+)$. □

9.4.3. COROLARIO. $V=L \to HGC$

PRUEBA

Supongamos $V=L$. Por teorema 9.4.2

Para todo cardinal $\kappa \geq \omega \Rightarrow \mathcal{P}(\kappa) \subseteq \mathcal{P}(L(\kappa)) \subseteq L(\kappa^+)$, pues $\kappa \subseteq L(\kappa)$ por prop. 8.2.9(9)

de donde $2^\kappa \leq |L(\kappa^+)| = \kappa^+$ por observación 1 del teorema 9.4.2

Pero $2^\kappa \geq \kappa^+$ por el Teorema de Cantor. Por lo tanto $2^\kappa = \kappa^+$

De aquí que $\forall \alpha (2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1})$. □

9.4.4. COROLARIO

1) $ZF + (V=L) \vdash HGC$

2) $ZF + (V=L) \vdash AE + HGC$

PRUEBA

1) por corolario 9.4.3

2) por corolario 9.4.3 y por corolario 9.2.17. □

7a. Prueba de Consistencia Relativa

9.4.5. COROLARIO

1) $CON(ZF) \Rightarrow CON(ZF + HGC)$

2) $CON(ZF) \Rightarrow CON(ZFE + HGC)$.

PRUEBA

Por corolario 9.4.4 y por corolario 9.2.2 y observación 9.2.1. □

CAPITULO 10

LIMITACIONES DEL METODO DE MODELOS INTERNOS

Veremos ahora que no es posible probar la consistencia relativa de un enunciado falso en L, por el método de modelos internos. Damos 3 lemas previos

10.1. LEMA. $L^L = L$

PRUEBA

$\subseteq]$ $L^L = \{x \in L / (x \in L)^L\} \subseteq L$

$\supseteq]$ Como en ZF se prueba : $(V=L)^L$ ya que L es modelo de V=L

$\Rightarrow (\forall x\, L(x))^L \Rightarrow \forall x (x \in L \to x \in L^L) \Rightarrow L \subseteq L^L$. □

10.2. LEMA. Si M es clase propia transitiva modelo de ZF $\Rightarrow M^L = L$.

PRUEBA

$\subseteq]$ $M^L = \{x \in L / (x \in M)^L\} \subseteq L$

$\supseteq]$ Como M es clase propia transitiva modelo de ZF $\Rightarrow$ por teorema 9.3.4

$L \subseteq M$ (teorema de Minimalidad de L)

$\Rightarrow$ en ZF se prueba que $\forall x (x \in L \to x \in M)$

Como L es modelo de ZF $\Rightarrow$ en ZF se prueba

$[\forall x (x \in L \to x \in M)]^L \Leftrightarrow \forall x (x \in L \to (x \in L^L \to x \in M^L))$

sustituyendo $L^L = L$ utilizando lema 10.1, obtenemos

$\forall x (x \in L \to (x \in L \to x \in M^L))$ que es tautológicamente equivalente a $\forall x (x \in L \to x \in M^L) \Rightarrow L \subset M^L$. Por lo tanto $M^L = L$. □

10.3. LEMA. Sea φ fórmula y M, N clases no vacías.
Entonces $(\varphi^M)^N \leftrightarrow \varphi^{(M^N)}$

PRUEBA

Inducción sobre φ

observación $M^N = \{x \in N / (x \in M)^N\} \subset N$

1) $((x \in y)^M)^N \leftrightarrow (x \in y)^N \leftrightarrow (x \in y) \leftrightarrow (x \in y)^{(M^N)}$

$((x \approx y)^M)^N \leftrightarrow (x \approx y)^N \leftrightarrow (x \approx y) \leftrightarrow (x \approx y)^{(M^N)}$

todos los $\leftrightarrow$ son por definición de relativización

2) H.I para α, β

$((\neg\alpha)^M)^N \leftrightarrow (\neg(\alpha^M))^N \leftrightarrow \neg(\alpha^M)^N \leftrightarrow \neg\alpha^{(M^N)} \leftrightarrow (\neg\alpha)^{(M^N)}$

$((\alpha \wedge \beta)^M)^N \leftrightarrow (\alpha^M \wedge \beta^M)^N \leftrightarrow (\alpha^M)^N \wedge (\beta^M)^N \leftrightarrow \alpha^{(M^N)} \wedge \beta^{(M^N)} \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta)^{(M^N)}$

En ambos casos el tercer $\leftrightarrow$ es por H.I

y los demás $\leftrightarrow$ son por definición de relativización.

3) H.I para ψ, por demostrar para $\exists x \psi$

$$((\exists x \psi)^M)^N \leftrightarrow [\exists x (x \in M \wedge \psi^M)]^N$$
$$\leftrightarrow \exists x (x \in N \wedge x \in M^N \wedge (\psi^M)^N)$$
$$\leftrightarrow \exists x (x \in N \wedge x \in M^N \wedge \psi^{(M^N)})$$
$$\leftrightarrow \exists x (x \in M^N \wedge \psi^{(M^N)})$$
$$\leftrightarrow (\exists x \psi)^{M^N}$$

el primero, segundo y quinto $\leftrightarrow$ es por definición de relativización;
el tercero es por H.I.,
el cuarto es por la observación $M^N \subset N$, lo que implica $M^N \cap N = M^N$. $\square$

10.4. TEOREMA. No se puede probar la consistencia relativa de enunciados falsos en L, por el método de modelos internos.

Formalmente:

Sea M clase; y φ enunciado tales que

1) $ZF \vdash (\neg\varphi)^L$ (φ falso en L)

2) $ZF \vdash \sigma^M$ para todo axioma de ZF

3) $ZF \vdash (UM \subseteq M \wedge ON \subset M)$

Entonces

$CON(ZF) \Longrightarrow ZF \nvdash \varphi^M$

PRUEBA

Observación. Como $ON \subset M$ ($ZF \vdash ON \subset M$) $\Rightarrow ZF \vdash \exists x (M(x))$

Supongamos que $CON(ZF)$ y $ZF \vdash \varphi^M$

Como L es modelo de ZF, entonces

$ZF \vdash (\varphi^M)^L$ (*)

por lema 10.3 $ZF \vdash (\varphi^M)^L \leftrightarrow \varphi^{(M^L)}$ (**)

Por (*) y (**) $ZF \vdash \varphi^{(M^L)}$

Por lema 10.2, $M^L = L \Rightarrow ZF \vdash \varphi^L$

pero por 1) $ZF \vdash (\neg\varphi)^L$

$\Rightarrow ZF \vdash \varphi^L$ y $ZF \vdash (\neg\varphi)^L \Rightarrow ZF$ es inconsistente $\otimes(CON(ZF))$

Por lo tanto: $CON(ZF) \Rightarrow ZF \nvdash \varphi^M$

BIBLIOGRAFIA

Amor, J.A.

[1] Axiomatizabilidad y Completud en Lógica de Primer Orden. Vínculos Matematicos 160. 1988.

[2] Forcing y Pruebas de Independencia. Aportaciones Matemáticas 9. SMM. 1990.

Amor, J.A. y Rojas R.

[1] Sistemas Formales. Vínculos Matemáticos 149. 1991.

Enderton, H.B.

[1] Elements of Set Theory. Academic Press. 1977.

[2] Una Introducción Matemática a la Lógica. UNAM. 1987.

Efimov, N.V.

[1] Geometría Superior. Mir. 1984.

Eves, H.

[1] Estudio de las Geometrías. Volumen I. UTEHA. 1985

Gutiérrez Aguilar, M.R.

[1] Algunas Reflexiones Sobre el Axioma de Elección. Tesis Profesional UNAM. 1985.

Hunter

[1] Metalógica. Paraninfo.

Kunen, K

[1] Set Theory. An Introduction to Independence Proofs. North Holland. 1980.

Nagel y Newman

[1] El Teorema de Gödel. CONACYT. 1981.

Rojas, R.

[1] Consistencia Relativa de la Geometría Hiperbólica Plana (Modelo de Poincaré). Tesis Profesional UNAM. 1979.