1
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
A C A T L A N

ANALISIS DEL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DE LA CAPITALIZACION

T E S I S   C O N J U N T A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A N :

SELENE ALVAREZ OCHOA
ARMANDO SANCHEZ SORIA

SANTA CRUZ ACATLAN, NAUCALPAN, EDO. DE MEX. 1993

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA

JEFATURA DEL PROGRAMA DE ACTUARIA Y
MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

SRITA. SELENE ALVAREZ OCHOA
SR. ARMANDO SANCHEZ SORIA
Alumnos de la carrera de Actuaría
Presente.

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 4 de enero de 1993, me complace notificarle que esta Jefatura tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesis: "ANALISIS DEL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DE LA CAPITALIZACION", el cual se desarrollará como sigue:

Introducción
I.- Pensiones por retiro
II.- Cotización dentro de los sistemas de retiro por reparto y por capitalización
III.- Fondo para el financiamiento de retiro por capitalización
IV.- Aplicaciones a la población cubierta por el Instituto Mexicano del Seguro Social
Conclusiones
Bibliografía

Asimismo fue designado como Asesor de Tesis el ACT. CARLOS J. SOTO PEREZ.

Ruego a ustedes tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberán prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la tesis.

E.N.E.P. ACATLAN

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Ac[illegible] de Méx., a 27 de abril de 1993.

ACT. [illegible] RIVERA BECERRA
JE[illegible]RAMA.

JEFATURA DEL PROGRAMA DE
ACTUARIA Y MATEMATICAS
APLICADAS Y COMPUTACION

I N D I C E

CAPITULO III. FONDO PARA EL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DE LA CAPITALIZACION.

INTRODUCCION.

INTRODUCCION.

Desde hace algún tiempo, se observa en varios países lo que se suele llamar la "crisis de pensiones", que es más bien la crisis del financiamiento del seguro obligatorio de pensiones de vejez, invalidez y muerte.

Las raíces de la crisis son múltiples, pero podemos citar entre sus causas externas, los crecientes niveles de precios y salarios, que obligan a "dinamizar" las pensiones mediante ajustes periódicos, sin la posibilidad material de elevar paralelamente las reservas con el fin de obtener el grado de capitalización deseado.

Además, se añaden variaciones en la estructura demográfica de las poblaciones abarcadas por el seguro y por último, en muchos grandes regímenes nacionales la pérdida o merma sensible de las reservas a causa de guerra o inflación.

Aún más, los montos crecientes de los salarios y por ende, también de los ingresos por cotizaciones, acoplados con el inevitable retraso de las pensiones simulaban un aparentemente sólido y hasta un excesivo financiamiento, lo que constituía una tentación para liberar cualitativa y cuantitativamente las prestaciones, lo cual más tarde agravaría la crisis.

Cuando la economía comenzó a estacionarse o a ser regresiva, la crisis de las pensiones se volvió evidente e inquietante.

Particularmente en nuestro país, el interés por buscar una solución adecuada al financiamiento se ha dejado sentir en razón de las condiciones económicas y en la conveniencia de proteger mejor al trabajador.

Por esto desde hace algunos años se han iniciado estudios que tienen el objeto de profundizar y resolver los problemas emanados de Sistemas de Financiamiento aplicados a los Regímenes de Jubilaciones y Pensiones.

Esta tesis, se presenta como una aportación al tema: "EL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DE LA CAPITALIZACION", la cual consideramos como un primer intento por medir las consecuencias y complicaciones que pueden surgir por la acumulación de capital que generan éste tipo de Sistemas.

El objetivo fundamental de esta tesis es analizar las condiciones económico-demográficas en las cuales un Sistema de Retiro por medio de la Capitalización Individual puede funcionar y determinar si la población cubierta por el Régimen Obligatorio del Instituto Mexicano del Seguro Social cuenta con dichas condiciones.

Queremos recalcar la importancia que tiene el estudio a profundidad de estas situaciones, debido a que son la base para analizar las condiciones en las que el Sistema de Capitalización puede saturarse (ésto significa que no se obtengan las tasas de rendimiento necesarias para sostenerlo), provocando que el costo se eleve a niveles en los que no pueda financiarse el Sistema.

Tomando en cuenta que se trata de un tema poco estudiado y aún difícil para personas expertas en las distintas areas que abarca, esperamos que esta tesis sea una base de la cual partir para un estudio más profundo.

En el Capítulo I, se mencionan las principales caracteristicas de las pensiones por vejez o retiro, y señalamos las diferencias bajo las cuales operan en los diversos organismos existentes en México.

Posteriormente, se resumen los diferentes Sistemas de Financiamiento que se han utilizado en la Seguridad Social para financiar las pensiones.

La finalidad del Capítulo I, es situarnos en el entorno de las Pensiones por Retiro, así como de los diferentes Sistemas de Financiamiento.

En el Capítulo II, se calcula la cotización para los Sistemas de Retiro por Reparto y por Capitalización. Partiendo del equilibrio financiero entre las obligaciones y los recursos disponibles, se establece en función de la edad, por una parte, que la fracción del salario que se aporta a la Caja Aseguradora (Institución que tiene por objeto la administración del fondo del Sistema de Retiro) en el curso de la vida activa dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización, depende de la función de permanencia $p(x)$ y de la tasa de interés r. Y por otra parte, que la fracción del salario aportada bajo el Sistema de Retiro por Reparto, depende (bajo el supuesto de una Población Estable), de la función de permanencia $p(x)$ y de la tasa de crecimiento poblacional p.

De ahí, que en el Capítulo III se realice un balance considerando la Cotización Indirecta incluida dentro del precio de bienes y servicios, dado que en el caso del Financiamiento de Retiro por medio del Sistema de Capitalización además de la Cotización Directa aportada por los activos, la Caja recibe el pago de interwses sobre las cuotas aportadas.

A la vez apoyados en un conjunto de Poblaciones Estables, se obtiene como expresión simple para la proporción de sumas constituyentes del fondo por el Sistema de Capitalización, un cociente de las diferencias entre las cotizaciones por Reparto y por Capitalización (numerador) y las tasas de interés y crecimiento poblacional (*denominador*).

Con el propósito de calcular la Cotización Indirecta obtenida por la Caja por medio de la remuneración del capital, modificamos nuestros calculos apegándonos a la realidad.

En el Capitulo IV, se aplican a la Población del Régimen obligatorio del IMSS los resultados de la suma total que posee la Caja en un Sistema de Retiro por Capitalización, a la vez apoyados en un conjunto de Poblaciones Estables calculamos la expresión simple para la proporción de sumas constituyentes del fondo, en la cual se relaciona la cotización obtenida por los Sistemas de Capitalización y Reparto.

Posteriormente, calculamos la Cotización Indirecta destinada a remunerar el capital en un Sistema de Retiro por Capitalización.

Por último en las Conclusiones y Recomendaciones, se pretende ser realista al tratar de establecer líneas de acción muy generales a seguir en un asunto de esta envergadura.

CAPITULO I

PENSIONES POR RETIRO

CAPITULO I

PENSIONES POR RETIRO

1.1 CARACTERISTICAS GENERALES.

En México, la Seguridad Social comienza a organizarse en forma estructurada después de la incorporación del Artículo 123 a la Constitución de los Estados Unidos Mexicanos, donde se establece que: "es de utilidad social el establecimiento de seguros de invalidez, de vejez, de vida, de cesación involuntaria del trabajo, de enfermedades y accidentes, y de otros con fines análogos".

En 1943 se promulga la Ley del Instituto Mexicano del Seguro Social, estableciendo los programas de pensiones por invalidez, vejez y muerte; de salud y de riesgos para los trabajadores, con financiamiento tripartito (trabajadores, empleadores y gobierno), y en donde el instrumento básico para su administración es el Instituto Mexicano del Seguro Social.

La Seguridad Social tiene por finalidad garantizar el derecho humano a la salud, la asistencia médica, la protección de los medios de subsistencia y los servicios sociales necesarios para el bienestar individual y colectivo[1].

El régimen obligatorio del IMSS comprende los seguros de:

I) Riesgos de Trabajo

II) Enfermedades y Maternidad

III) Invalidez, Vejez, Cesantía y Muerte

IV) Guarderías para hijos de aseguradas

V) Retiro[2]

Los dominios de la Seguridad Social en donde podemos encontrar al Actuario, son aquellos que cubren los regímenes a largo plazo, tales como vejez, invalidez, etc.

En lo referente a las pensiones por vejez del IMSS tenemos:

- Se otorgan a partir de los 65 años de edad con al menos 500 cotizaciones semanales pagadas al Instituto (aproximadamente 10 años).

- Esta pensión se compone de una cuantía básica y de incrementos anuales computados de acuerdo con el número de

---

1. ART. 2DO., LEY DEL IMSS, 1989, pp. 87.
2. PUBLICADO EN EL DIARIO OFICIAL DEL 24 FEBRERO DE 1992, SE REFORMA EL ARTICULO 11 DE LA LEY DE IMSS.

cotizaciones semanales reconocidas al asegurado con posterioridad a las primeras quinientas semanas de cotización y en base a la tabla correspondiente al articulo 167 de la Ley del IMSS.

- Para efectos de determinar la cuantia básica anual de la pensión y sus incrementos, se considerará como salario diario el promedio correspondiente a las últimas doscientas cincuenta semanas de cotización.

- "La pensión de invalidez, vejez o cesantia en edad avanzada, incluyendo las asignaciones familiares y ayudas asistenciales que en su caso correspondan, no podrá ser inferior al noventa por ciento del Salario Minimo General que rija para el D.F."[3]

- En 1959, se elimina la facultad del IMSS para organizar los programas sociales de los trabajadores del Gobierno y se crea el ISSSTE (Instituto de Seguridad y Servicios Sociales para los Trabajadores del Estado), como una nueva entidad autónoma responsable de cumplir con este objetivo.

Para las pensiones de vejez del ISSSTE tenemos la

---

3. REFORMA QUE ENTRO EN VIGOR APARTIR DEL 1ERO. DE ENERO DE 1993, MODIFICANDOSE EL ART. 168 DE LA LEY DEL IMSS.

siguiente clasificación:

(a) Pensión por antigüedad:

- Se otorgan con 30 años de antigüedad para los hombres y 28 años de antigüedad para las mujeres.

- El monto del beneficio es el 100% del salario base y no puede ser inferior al 100% del salario mínimo del Distrito Federal.

- El salario base es el promedio del último año de servicio.

(b) Pensión por años de servicio:

- Se otorgan apartir de los 55 años de edad con 15 años de servicio o 780 semanas de cotizaciones.

- El monto del beneficio depende del número de años cotizados. Entre 15 y 25 años: 50% del salario base más un 2.3% por cada año cotizado en exceso de 15.

Entre 26 y 29 años: 80% del salario base más un 5% por cada año cotizado en exceso de 26.

PENSION DE :	I.M.S.S.	I.S.S.S.T.E.
Requisitos mínimos	65 años de edad 500 cotizaciones semanales.	55 años de edad 780 cotizaciones semanales.
Monto del Beneficio	Cuantía básica e incrementos anuales de acuerdo al número de cotizaciones semanales reconocidas.	Depende de los años cotizados: 15-25: 50% del salario mas 2.3 por año cotizado en exceso de 15. 26-29 : 80% del salario mas 5% por año cotizado en exceso de 26.
Salario Base	El correspondiente a las últimas 250 semanas de cotización.	El correspondiente al promedio del último año de servicio.
Pensión Mínima	90% del Salario Mínimo General del D.F.	100% del Salario Mínimo General del D.F.

En resumen podemos decir que la Seguridad Social se regula a través de leyes y reglamentos dictados por el gobierno y que algunos de sus cuerpos legales fundamentales son:

* El Artículo 123 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos.
* La Ley del IMSS.
* La Ley del ISSSTE.
* La Ley del ISSFAM. (Ley del Instituto de Seguridad Social para las Fuerzas Armadas Mexicanas.)

En la actualidad, las pensiones que otorgan el IMSS y el ISSSTE son muy bajas, por lo que paralelamente a estos Sistemas Sociales, algunas empresas preocupándose por el nivel de vida de sus trabajadores jubilados y con la finalidad de ofrecer una mayor seguridad económica al momento del retiro a quienes colaboran con ellas, han implantado Planes de Pensiones, que son sistemas de financiamiento a través de los cuales se formalizan esquemas de ahorro a largo plazo, para cumplir una promesa de beneficios económicos a un grupo de empleados.

Los Planes de Pensiones Privados en México, están regulados legalmente por:

- Ley Federal del Trabajo.
- Ley del IMSS.
- Ley del Impuesto sobre la Renta.

Existen principalmente dos tipos de Planes de Pensiones:

1. Plan de Beneficio Definido.
2. Plan de Contribución Definida o Costo Definido.

En los Planes de Beneficio Definido, la contribución a los mismos depende del beneficio que se otorga, estableciéndose por esto que se fijan las cantidades que recibirán los jubilados y que de ellas dependerán las aportaciones que se hagan al fondo.

En los Planes de Contribución Definida, el beneficio a otorgar depende del nivel de las contribuciones que se lleven a cabo y de la tasa de rendimiento, entendiéndose por esto que se fijan las cantidades que se aportarán al fondo, y que del monto acumulado de los mismos, dependerán los beneficios que reciban los jubilados.

Estos Planes Privados de Pensiones presentan algunas ventajas o beneficios, los cuales podemos dividir en tres clases:

* Beneficios Fiscales :

- Deducción de las Aportaciones del Fondo. Las aportaciones del Fondo son 100% deducibles de impuestos.

- Exención del Impuesto sobre la Renta para las ganancias del capital.

- Exención del Impuesto sobre las Renta a los pagos a pensionados. En caso de que estos sean iguales o menores a 9 veces el Salario Mínimo General Mensual vigente.

* Beneficios Laborales :

- Permanencia y estabilidad del personal.
- Motivación y productividad de los empleados.
- Constituye un sistema de renovación del personal en edad avanzada.

* Beneficios Sociales :

- Contribuir al ahorro interno.
- Mantener el nivel de vida de las familias.

Sustentado en el deterioro del ahorro interno, así como en la ineficiencia e inequidad del Sistema Estatal de Seguridad Social, las autoridades hacendarias crearon el Sistema de Ahorro para el Retiro (llamado S.A.R.), que tiene como objetivo mejorar el nivel de pensiones en México y aumentar el ahorro interno.

El S.A.R. entró en vigor a partir del 1ero. de Mayo de 1992, y es adicional a cualquiera de las prestaciones que otorga el IMSS, y las empresas que tengan un plan privado de pensiones auténtico y que no provengan de una negociación colectiva deben evitar el estar dando una doble prestación.

La base de este sistema es una cuenta individual para cada trabajador, depositada en el Sistema Financiero Nacional, las cuentas tienen dos subcuentas, una correspondiente al Seguro de Retiro y otra al Fondo Nacional de Vivienda.

Sus características principales en lo que a Retiro se refiere, son las siguientes:

- Cuota del 2% del salario base de cotización. Para el Seguro de Retiro el limite para el salario de cotización es de 25 veces el Salario Mínimo General que rija en el D.F., a diferencia de 10 veces el Salario Mínimo General del D.F. que se tiene para las pensiones que otorga el IMSS.

- "Los patrones estarán obligados a cubir las cuotas establecidas, mediante la entrega de los recursos correspondientes en instituciones de crédito para su abono en la subcuenta del Seguro de Retiro, de las cuentas individuales del S.A.R. abiertas a nombre de los trabajadores."[4] La cuota se depositará bimestralmente.

- El trabajador no deberá tener más de una cuenta de Ahorro para el Retiro.

- Las cuotas que reciban las instituciones de crédito, operadoras de las cuentas individuales, deberán ser depositadas a más tardar el cuarto día hábil bancario inmediato siguiente al de su recepción en la cuenta que el Banco de México le lleve al IMSS, actuándo por cuenta del mecionado Instituto, deberá invertir dichos recursos en créditos a cargo del Gobierno Federal.[5]

---

4. PUBLICADO EN EL DIARIO OFICIAL DEL 24 DE FEBRERO DE 1992. SE REFORMA EL ART. 183-C DE LA LEY DEL IMSS.
5. PUBLICADO EN EL DIARIO OFICIAL DEL 24 DE FEBRERO DE 1992. SE REFORMA EL ART. 183-I DE LA LEY DEL IMSS.

- Los intereses que reciben las cuentas en términos reales, no son menores al 2% anual pagaderos mensualmente mediante su reinversión en las respectivas cuentas.

- El trabajador podrá solicitar el traspaso de parte o del total de sus fondos a Sociedades de Inversión administradas por Sociedades de Crédito, Casas de Bolsa, Instituciones de Seguros o Sociedades Operadoras

- Se pueden retirar los fondos a los 65 años de edad, al recibir una pensión del IMSS o del Plan Privado de la empresa, por fallecimiento o invalidez.

- El Retiro se podrá realizar para adquirir una renta vitalicia o en efectivo en una sola exhibición.

- Por desempleo se podrá retirar el 10% del saldo de la cuenta, cada 5 años.

- Los trabajadores tendrán derecho de hacer aportaciones adicionales a su cuenta individual.

1.2 SISTEMAS DE FINANCIAMIENTO.

Los términos Régimen y Sistema Financiero, son sinónimos que nos sirven para definir, la manera de financiar una determinada prestación.

La manera de financiar las obligaciones y beneficios que tiene determinada institución de seguridad social, adopta un conjunto de técnicas y principios que relacionan los ingresos y los egresos con el fin de obtener un equilibrio. La solvencia del régimen depende de este equilibrio y deberá garantizar en todo momento que contará con los medios económicos para hacer frente a sus obligaciones.

Una de las funciones del actuario es la de establecer el régimen financiero que deberá de servir de base para captar los ingresos necesarios para cubrir los egresos que se tienen. Para ello, cuenta con técnicas actuariales desarrolladas a través del tiempo.

El problema que se plantea es el de adoptar dichas técnicas al caso particular de que se ocupe.

Cuando el Sistema Financiero se encuentra definido, es necesario que el actuario se dedique en el futuro a vigilar el equilibrio financiero del mismo, calculando sus resultados a través de técnicas actuariales, denominadas Métodos de Valuación, para poder introducir medidas oportunas en caso de desviación.

Los Métodos de Valuación más importantes para las instituciones de seguridad social son: El Balance Actuarial, las Proyecciones Demográficas y Financieras y las Proyecciones de Costos.

Todo régimen de financiamiento debe cumplir con las siguientes hipótesis:

a) Técnicamente deben determinarse provisiones necesarias para evitar un desequilibrio económico.

b) Los fondos acumulados por aportaciones deben formar una reserva para solventar las desviaciones estadísticas causadas por el suceso de algún siniestro.

c) Las primas deben ser estables en el tiempo para evitar desórdenes administrativos, descontento de los trabajadores, etc.

Para la elección adecuada del régimen, se deben analizar las caracteristicas de las prestaciones que se van a cubrir de acuerdo a los siguientes aspectos:

- Campo de aplicación: Edad, sexo, carácter contributivo, carácter obligatorio o voluntario.

- Desarrollo demográfico: Evolución y crecimiento de la población trabajadora a proteger por el régimen.

- Prestaciones a otorgar: A corto y largo plazo, las cuantias necesarias y el tiempo de espera.

- Factores actuariales y estadisticos: Tablas biométricas, tasas actuariales, número de trabajadores, cuantia de las cotizaciones, volumen y crecimiento de los salarios y probabilidades y dinamismo de las pensiones.

Además se debe cuidar que:

- Las prestaciones se cobren en una sola ocasión durante un periodo de corta duración.

- La acumulación de costos en el tiempo sea suficiente, debido a que en número y en monto las pensiones que dejan de pagarse son inferiores a las que se empiezan a cobrar.

- La capacidad económica de la institución esté en condiciones de destinar parte de los ingresos, a la constitución de reservas.

Conforme a su definición un Régimen Financiero constituye la base estratégica para lograr el desarrollo de la institución, a partir de la constitución de un equilibrio financiero entre las obligaciones (costo de las prestaciones) y los recursos disponibles (prima, fondos de inversiones e importe de la reserva en algunos casos), distribuyendo el costo de la gestión financiera, entre una o varias generaciones de asegurados, lo cual da origen a sistemas que van desde la nula capitalización (Reparto Anual), hasta la máxima (Prima Media General).

Los Sistemas Financieros que vamos a tratar son los siguientes:

a) Sistema de Prima Media General.

b) Sistema de Reparto de Capitales de Cobertura.

c) Sistema de Reparto Anual.

d) Sistema de Primas Escalonadas.

Antes de introducirnos en los principales Sistemas de Financiamiento, definimos las variables que utilizamos para sus cálculos ("Análisis Critico del Equilibrio Financiero del Seguro Social Mexicano" de Noe Rodriguez Ramos).

Sean:

$A(k)$ = Función de ingreso (incluye la producción de intereses) donde:

$$A_t = \int_t^{t+1} A(k)\, dk$$ = Ingreso total del régimen (sin la producción de intereses) en el año $[t, t+1]$.

$B(k)$ = Función continua de egresos o gastos por prestaciones, en donde:

$$B_t = \int_t^{t+1} B(k)\,dk$$ = Total de gastos en el año $[t,t+1]$.

$S(k)$ = Función continua del tiempo t de los salarios de cotización, en donde :

$$S_t = \int_t^{t+1} S(k)\,dk$$ = Cantidad total de salarios sujetos a pago de aportación en el año $[t,t+1]$.

Π = Prima necesaria para equilibrar ingresos y egresos en el lapso considerado.

$V(t) = V_t$ = Reserva en el tiempo t (al principio del año t).

$V = (1+i)^{-1}$ Factor anual de actualización o o descuento.

i = Tasa de Interés.

$\delta = \ln(1+i)$ = Fuerza de interés. Es la tasa continua con la cual crece una unidad de capital bajo una operación de interés.

Si δ es constante:

$$D[\,f(t)\,] = f(t)\,e^{-\delta t} = f(t)\,V^t$$

1.2.1 SISTEMA DE PRIMA MEDIA GENERAL.

En tiempos pasados fue el Sistema de Financiamiento predominante de los seguros obligatorios de pensiones (al menos teóricamente en la mayoría de los países latinoamericanos), incluso fue el Sistema Financiero original del IMSS, utilizado para los cálculos del seguro de Invalidez, Vejez, Cesantía y Muerte (IVCM). Este método se conoce también como Método de Capitalización Colectiva.

Su característica fundamental es la de establecer de una vez y para siempre una misma prima, pagada por todos los asegurados, o por lo menos en un porcentaje fijo sobre el salario, garantizando el financiamiento de todos los gastos por Jubilaciones y Pensiones en curso de pago[6], así como en curso de adquisición[7].

Esta prima es la misma para todas las edades y generaciones de asegurados, independientemente del sexo, del número de beneficiarios, de la peligrosidad del trabajo desempeñado, con diferentes periodos de cotización, de distinta época de afiliación , etc.

---

6. PAGOS PERIODICOS QUE DEBEN EFECTUARSE POR PENSIONES CONCEDIDAS EN AÑOS ANTERIORES.

7. PAGOS PERIODICOS QUE DEBERAN EFECTUARSE POR PENSIONES FUTURAS.

Al iniciarse el régimen, se tendrá una gran cantidad de personas de diferentes edades, y es claro que las personas de edades avanzadas, constituyen pasivos actuariales[8] mayores y disponen de poco tiempo como activos, por lo que si existen cuantías mínimas, el monto de sus pensiones representará un alto costo para el Sistema.

Debe existir un equilibrio actuarial entre el valor de todos los ingresos y el de todos los egresos futuros, conformando una colectividad que implica trasladar la carga financiera de la primera generación de asegurados que es muy alta, a las siguientes, cuyas edades de entrada son menores en promedio y en consecuencia sus cargas son más bajas; la generación actual se subdivide en los trabajadores activos y en los jubilados o pensionados, viudas, huérfanos, inválidos, etc.

Estos últimos, constituyen la carga principal que en vista de la imposibilidad de que paguen una prima, se transfiere el pago de ésta prima a la generación actual de trabajadores activos, así como a los trabajadores futuros.

Lo anterior es posible, gracias a los principios fundamentales que dan pie a las Instituciones de Seguridad

---

8. VALOR PRESENTE ACTUARIAL DE LOS BENEFICIOS QUE SE DERIVAN DEL SEGURO O DEL PLAN.

Social, que son el de la Perennidad, Obligatoriedad y Solidaridad.

En México, se entiende por perennidad a la duración ilimitada del IMSS. Esta calidad nos lleva automáticamente a la comunidad abierta de riesgos, que se compone de la generación actual, es decir, del conjunto cerrado de los efectivos de asegurados[9] y beneficiarios existentes al instante de la observación, y del conjunto abierto de todas las generaciones futuras de asegurados, conjuntamente con los beneficiarios de pensión que de ellos se originarán.

El colocar las operaciones de un seguro en una comunidad abierta de riesgos, constituye el fundamental elemento distintivo de la organización financiera de una Institución de Seguridad Social, a diferencia de una Institución Privada, la cual no posee el privilegio de la perennidad.[10]

En México la Ley del IMSS marca la obligatoriedad del

---

9. ENTIENDASE POR EFECTIVOS DE ASEGURADOS, A TODOS LOS TRABAJADORES ACTIVOS DE 15 A 64 AÑOS DE EDAD.

10. CISS, (1982): "EL FINANCIAMIENTO DE REGIMENES OBLIGATORIOS DE PENSIONES BAJO CONDICIONES DINAMICAS Y LAS NUEVAS MATEMATICAS ACTUARIALES", pp. 236

régimen señalando: "Se implanta en toda la República el Régimen del Seguro Social obligatorio, con las salvedades que la propia ley señala . . . "[11].

La solidaridad financiera en el tiempo y en el espacio de todos los grupos de asegurados, cumple con los requisitos de equidad y reparto, y dará como resultado una disminución de la prima respecto a lo que cobraría una Institución Privada.

Es claro que en los inicios de cualquier Institución, los ingresos que genera la cuota, son muy superiores a los gastos, por lo que el remanente se destina a la constitución de un fondo de reserva, que deberá invertirse en las mejores condiciones de seguridad, rendimiento y liquidez, y de esta manera poder solventar los costos que en el futuro irremediablemente llegarán a ser mayores a la prima establecida, de no ser así, se incurrirá en un desfinanciamiento que obligará a reducir las cuantías de las pensiones y/o incrementar el nivel original de la cuota.

"El monto de las reservas que pueden acumularse mediante este Sistema Financiero es cuantioso y en

---

11. LEY DEL SEGURO SOCIAL, (1989), ART. 5, pp. 92,93

consecuencia difícil de manejar conforme a las condiciones preestablecidas, sobre todo en lo referente a la tasa de productividad del fondo. . . "[12]

Cabe distinguir que la reserva actuarial, debe cumplir con dos funciones:

La Financiera : Reduciendo mediante los productos de su inversión el nivel de la prima necesaria para lograr el equilibrio entre los ingresos y los gastos.

La Actuarial : Respondiendo en todo momento, por todos los compromisos contraídos por concepto de pensiones, ya sean potenciales o correspondientes a las de en curso de pago.

El Sistema de Prima Media General cumple con las dos funciones, de ahí que sea el de más alta capitalización de toda la gama de Sistemas Financieros de la Seguridad Social, esto ocurre cuando se cumplen las estimaciones actuariales a lo largo del tiempo, obteniéndose un capital acumulado considerable.

Algunas ventajas de la aplicación de este sistema son: la invariabilidad de la tasa de cotización, su alto alcance

---

12. SOTO, CARLOS JORGE, "DESEQUILIBRIO FINANCIERO EN REGIMENES SOCIALES DE PENSIONES" , pp. 4

social, la constitución de reservas de cierto volumen para los casos en los que el asegurado se dé de baja.

Algunos de sus inconvenientes son: que en las estimaciones actuariales se consideran como estáticos los factores demográficos (crecimiento poblacional) y biométricos (experiencia de mortalidad invalidez y rotación), no obstante se sabe que en el tiempo varía la distribución de la población por edades y la tasa de crecimiento demográfico, debido al mejoramiento social, al avance de la ciencia médica, etc.

Este hecho conduce a que la validez de las proyecciones hechas a largo plazo pierden su valor. Por otra parte las economías latinoamericanas, resintieron los crecientes aumentos de precios y salarios, que obligaron a efectuar ajustes periódicos a las pensiones, sin la posibilidad material de elevar paralelamente las reservas de pensionados y de activos con el fin de mantener el grado de capitalización exigido. Adicionalmente, el proceso inflacionario incidió en la disminución del valor real de las reservas.

CALCULO DE LA PRIMA MEDIA GENERAL.

En este sistema los ingresos por cotizaciones del año t, se expresan como el producto de la suma del salario S_t del año por la prima P, convirtiéndo la ecuación de equivalencia en:

$$V_0 + P \sum_{0}^{\infty} S_t V^t = \sum_{0}^{\infty} B_t V^t$$ [19]

Sea la relación :

$$P = \frac{\text{Valor Presente Egresos Futuros} - \text{Reserva Actual}}{\text{Valor Presente Salarios Futuros Sujetos a Cotización.}}$$

Para la generación inicial, la prima Π_0 está dada por:

$$\Pi_0 = \frac{\sum_{t=0}^{w} D\left[B_0 \left(t + 1/2\right)\right] - V_0}{\sum_{t=0}^{w} D\left[S_0 \left(t + 1/2\right)\right]}$$

Donde:

- El subíndice "o" indica la generación inicial.
- t + 1/2 indica que los cálculos de egresos y salarios se tomen a la mitad del año.

---

19 CISS (1982): "EL FINANCIAMIENTO DE REGIMENES OBLIGATORIOS... OP. CIT., pp. 296

Para la generación futura, la prima $\Pi(E^{aa}_{t+1/2})$ está dada por :

$$\Pi(E^{aa}_{t+1/2}) = \frac{\sum_{t=0}^{v} D\,[B_{t+1/2}\,(t+\tau+1/2)\,]}{\sum_{t=0}^{v} D\,[S_{t+1/2}\,(t+\tau+1/2)\,]}$$

donde:

$E^{aa}_{t+1/2}$: Representa el número de entradas de nuevos activos del año [t,t+1]

En este caso no existe reserva inicial.

Para la totalidad de las generaciones futuras, la prima

$\overline{\Pi(E^{aa}_{t+1/2})}$ está dada por :

$$\frac{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{T=0}^{v} D[\,B_{t+1/2}\,(t+\tau+1/2)\,]}{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{T=0}^{v} D[\,S_{t+1/2}\,(t+\tau+1/2)\,]}$$

De esta manera la Prima Media General es:

$$\bar{\Pi} = \Pi \, [\, \Pi_o, \, \Pi(\, E^{\alpha\alpha}_{t+1/2} \,) \,] =$$

$$\frac{\sum_{t=0}^{v} D[\, B_o(t+1/2)\,] - V_o + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{v} D[B_{t+1/2}\,(t+\tau+1/2)]}{\sum_{t=0}^{v} D[\, S_o(t+1/2)\,] + \sum_{t=0}^{v} \sum_{\tau=0}^{v} D[\, S_{t+1/2}\,(t+\tau+1/2)]}$$

1.2.2 SISTEMA DE REPARTO DE CAPITALES DE COBERTURA.

Se aplica para financiar pensiones cuyo otorgamiento no depende del tiempo de cotizaciones, sino de la realización del riesgo cubierto. Para el seguro de Riesgos de Trabajo, se considera como el Sistema Financiero más adecuado por la misma naturaleza de sus riesgos, los cuales tienen oscilaciones provocadas por crisis económicas, aunado a que pueden dar origen a siniestros que pueden ocurrir inmediatamente después de asumido el riesgo, implicando un desequilibrio económico si no se prevee un mínimo de capitalización.

Inclusive, el seguro de Riesgos de Trabajo es el único caso que establece la Ley del Seguro Social (Art. 77), en el que expresamente se define al de Reparto de Capitales de Cobertura como su Sistema Financiero.

A este Sistema se le conoce también como Sistema de Reparto de Capitales Constitutivos[14].

---

14 CANTIDAD DE DINERO NECESARIO DESDE EL PUNTO DE VISTA ACTUARIAL PARA GARANTIZAR EL PAGO DE UNA PENSION HASTA QUE SE EXTINGA EL DERECHO.

Su característica fundamental, es que la suma de las cotizaciones de un año debe cubrir la suma de los capitales constitutivos de las nuevas pensiones acordadas en el año, es decir, se consideran como egresos anuales los capitales constitutivos de las pensiones concedidas, y sobre esta base se calcula la prima al relacionarlo con los ingresos o cotizaciones que conforman el volumen anual de salarios. Por lo que el valor de la prima depende de la relación entre el número de nuevos pensionados del año y de los cotizantes activos.

Durante los primeros años los ingresos serán mayores a los egresos, por lo que se cobra una cotización calculada considerando como egresos del año a los capitales constitutivos de las pensiones, pero en realidad el egreso efectivo lo constituye el pago de pensiones.

A medida que transcurre el tiempo, la situación se invierte porque cada vez se acumulan más pensiones en curso de pago, correspondientes a pensionados de años anteriores y del mismo año, lo que implica que el egreso real llegue a ser mayor a los capitales constitutivos de las pensiones concedidas en el propio año.

Por lo tanto, este régimen supone la constitución de reservas técnicas formadas por el capital constitutivo no gastado, incluidos intereses, que servirán para responder a las obligaciones de las pensiones en curso de pago. Por lo que la existencia del sobrante al principio del régimen no significa la existencia de un superávit financiero que se puede invertir indiscriminadamente.

La reserva técnica deberá registrarse dentro de los egresos del año, de ésta manera existirá realmente al final de cada año el respaldo actuarial de los compromisos de pensiones.

En este Sistema Financiero al igual que en el de Prima Media General, la reserva técnica cumple con dos funciones, la actuarial, al tener un monto tal que en cualquier momento alcance a responder por el compromiso contraído por la Institución en lo referente a pensiones en curso de pago; y la económica, al obtener un producto derivado de su inversión que contribuya al financiamiento del pago de las pensiones, lográndose de esta manera mantener las aportaciones a un mismo nivel[15].

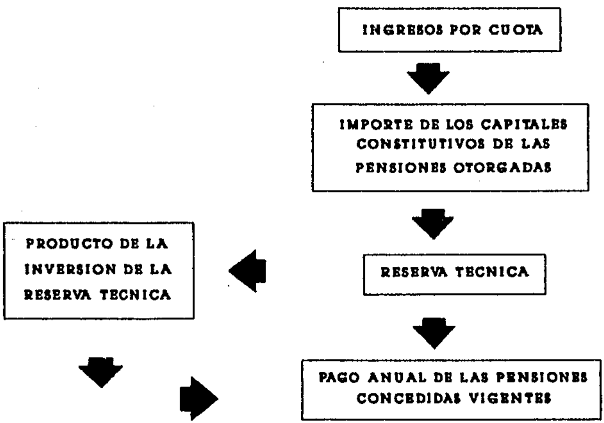
Con respecto a la liquidez de las inversiones de los

---

15 SOTO, CARLOS JORGE, op.cit., pp. 5.

capitales constitutivos, supuestamente debería ser a corto plazo, pero debido al ingreso de nuevos asegurados puede invertirse a largo plazo, obteniendose por lo tanto un mayor beneficio económico.

El siguiente diagrama operativo, ayuda a comprender el funcionamiento del Sistema de Reparto de Capitales de Cobertura en lo relativo al financiamiento de sus prestaciones a largo plazo:



En lo que concierne a la capacidad de absorber el costo del ajuste de pensiones a variaciones del nivel general de salarios, las nuevas pensiones acordadas en el año pueden ser ajustadas enteramente a ellos, lo cual da una ventaja a este tipo de Sistema Financiero, mientras que el ajuste de las pensiones en curso de pago exigiría medios suplementarios.

En consecuencia, el Sistema de Reparto de Capitales de Cobertura, mantiene una posición intermedia entre el Sistema de Reparto Simple y el de Capitalización Colectiva, demográficamente menos sensible que el primero y en cuanto a ajustes a variaciones económicas menos que el segundo. A esta posición intermedia reforzada por el ya aludido grado intermedio de capitalización, debe el Sistema de Reparto de Capitales de Cobertura su rol importante -al lado del Sistema de Reparto Simple- en el Seguro de Pensiones de hoy[16].

CALCULO DE LA PRIMA DE REPARTO DE CAPITALES DE COBERTURA.

En términos generales, la determinación del costo de este Sistema Financiero consiste en valuar los capitales

---

16. CISS. (1982), "EL FINANCIAMIENTO DE LOS REGIMENES OBLIGATORIOS ..., op. cit. pp. 242.

constitutivos de las pensiones originadas en el transcurso del año, divididas entre el volúmen anual de salarios (V.A.S.).

Para cada pensión concedida, tenemos:

$$\Pi = \frac{\text{Valor de la Renta Contingente}}{\text{V.A.S.}}$$

En general:

$$\Pi = \frac{\sum \text{Rentas Contingentes}}{\text{V.A.S.}}$$

$$\Pi = \frac{\sum_{x} M_x \, a_x^{(m)}}{\text{V.A.S.}}$$

$$\Pi = \frac{\sum_{x} M_x \, a_x^{(m)}}{\int_{t}^{t+1} S(K) e^{\int_{t}^{t+1} \delta(\lambda)} dk}$$

donde:

M_x = Monto de la pensión de una persona de edad x.

$a_x^{(m)}$= Valor presente o prima única de una anualidad vitalicia, que otorga el pago de un peso al final de cada año, pagadera *m* veces al año.

V.A.S. = Volúmen anual de salarios.

con:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{D_x} \cdot \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+\frac{t}{m}}$$

En la aplicación de éste Sistema Financiero, debe existir una reserva matemática, cuyo cálculo en cualquier tiempo t es igual a:

$${}_tV(a_x^{(m)}) = a_{x+t}^{(m)}$$

donde:

${}_tV(a_x^{(m)})$ = Reserva de los beneficios contraídos por una anualidad vitalicia emitida en edad x que otorga el pago de un peso al final de cada año pagadera m veces al año.

Relacionando esta fórmula con el monto de las pensiones y el V.A.S. tenemos:

$$ {}_tV(a_x^{(m)}) = \frac{\Sigma\, M_{x+t}\ (a_{x+t}^{(m)})}{V.A.S.} $$

Cabe mencionar que no es necesario descontar las obligaciones futuras, debido a que el principio de este Sistema Financiero consiste en que los trabajadores activos pagan el capital constitutivo correspondiente a las pensiones concedidas en el transcurso del año, lo que origina que no habrá pagos futuros para esas mismas pensiones, ya que el capital constitutivo se encuentra en las reservas.

1.2.3 SISTEMA DE REPARTO ANUAL.

Cuando se trata de riesgos que se cubren con prestaciones en especie o en dinero a corto plazo, como los subsidios del Seguro de Emfermedades y Maternidad, el Método de Financiamiento generalmente aceptado es el de Reparto Anual. Se conoce tambien como Sistema de Reparto Simple.

Sabemos que los riesgos que dan lugar a las prestaciones a corto plazo no se aumentan en forma decisiva con la edad, no producen acumulación de beneficios de un año para otro, ni suponen largos periodos de cotización. Por lo tanto, el Régimen de Reparto Anual puede establecer un equilibrio financiero estricto entre los ingresos por cotizaciones y los egresos por obligaciones, lo que indica que los egresos de un año deben cubrirse mediante las cotizaciones del mismo.

Este sistema utiliza los conceptos primitivos del Seguro de Derrama, que consistía en repartir al final del ejercicio considerado, el costo total de los siniestros entre el número de expuestos al riesgo.

En la práctica, consiste en establecer el equilibrio financiero anual entre ingresos y egresos, al tomar el ejercicio financiero de un año, y con base en las experiencias de realización de los siniestros considerados y de sus respectivos costos, estimar lo que se gastaría durante el año en el otorgamiento de las prestaciones, repartiéndose en forma anticipada entre los expuestos al riesgo durante el ejercicio, o entre sus salarios si la prima se calcula en porciento del salario.

Por su misma naturaleza, la prima está en alto grado codeterminada por la relación entre el número de las pensiones en curso de pago y el número de cotizantes activos, es decir, por el llamado "cociente de carga demográfica". El pago continuado de las pensiones no está asegurado por reservas acumuladas con cotizaciones anteriores de los propios beneficiarios, sino exclusivamente por las cotizaciones de los activos de la misma época en el marco de la comunidad abierta, estableciéndose de este modo una estrecha "solidaridad" del conjunto de activos a favor de los beneficiarios de pensión.

Usualmente, se considera un pequeño excedente para la formación de una reserva de contingencias que cubra gastos extraordinarios y desviaciones eventuales que puedan desequilibrar el Sistema de Financiamiento, logrando nivelar los costos anuales evitando así, la necesidad de cambiar la prima o cotización frecuentemente.

Esta reserva de fluctuaciones y contingencias no se puede considerar una Reserva Técnica por sus montos y finalidad.

Al carecer de Reserva Técnica, no se da capitalización alguna, por lo tanto, este sistema constituye el límite inferior de los sistemas de financiamiento.

La dependencia muy marcada del Sistema de Reparto Simple a las variaciones demográficas de los efectivos pertenecientes a este Régimen, contrasta con la insensibilidad de la prima, calculada bajo condiciones económicas estáticas, con respecto a aumentos posteriores del nivel general de salarios y al ajuste total e inmediato de las pensiones.

La pérdida de las reservas acumuladas en grandes regímenes del Seguro de Pensiones a causa de guerra o inflación, acoplada con la introducción de las "pensiones dinámicas", ha contribuido a la importancia actual del Sistema de Reparto en el seguro obligatorio de pensiones.

Cabe mencionar que las "pensiones dinámicas", se refieren a la utilización de una matemática que integra los factores demográficos y económicos, con sus correspondientes intensidades o tasas de crecimiento de manera directa en los valores básicos y en los mecanismos de cálculo.

CALCULO DE LA PRIMA DE REPARTO ANUAL

Los egresos de un año deben cubrirse mediante las cotizaciones del mismo.

$$\Pi_t = \frac{\text{Egresos del año}}{\text{V.A.S.}}$$

De éste modo se cumple que:

$$\int_t^{t+1} A(k)e^{\int_t^{t+1} \delta(\lambda)d\lambda} dk =$$

$$\Pi_t \int_t^{t+1} S(k)e^{\int_t^{t+1} \delta(\lambda)d\lambda} dk =$$

$$\int_t^{t+1} B(k)e^{\int_t^{t+1} \delta(\lambda)d\lambda}\,dk$$

$$\therefore \quad \Pi_t = \frac{\int_t^{t+1} B(k)e^{\int_t^{t+1} \delta(\lambda)d\lambda}\,dk}{\int_t^{t+1} S(k)e^{\int_t^{t+1} \delta(\lambda)d\lambda}\,dk}$$

1.2.4 SISTEMA DE PRIMAS ESCALONADAS.

Sistema sugerido por el Act. Antonio Zelenka en un estupendo trabajo presentado en 1950 a la 1a Conferencia Internacional de Actuarios y Estadígrafos de la Seguridad Social[17].

El Sistema de Primas Escalonadas destaca por su importancia entre las diversas combinaciones de métodos utilizados en el Financiamiento de los Regímenes de Pensiones, comprendidos entre dos extremos, Reparto Anual y Capitalización.

En el caso del IMSS, a partir de la Valuación Actuarial al 31 de diciembre de 1977, se determinó la necesidad de utilizar el Sistema de Primas Escalonadas para financiar los regímenes de pensiones del seguro de IVCM.

Este método consiste, que un determinado Régimen de Pensiones cuya duración se considera ordinariamente ilimitada en el tiempo, se ha subdividido en una serie de periodos de equilibrio, los cuales generalmente cubren más de cinco años, determinándose una prima constante de tal manera que el total de los ingresos del fondo, sea igual a los egresos que por

---

17. SOTO, CARLOS JORGE, op. cit., pp.5

concepto de pago de beneficios se realicen en el mismo periodo. Además esta prima debe permitir la formación de un fondo de reserva cuya inversión ayude al financiamiento del régimen.

Al siguiente periodo o escalón la prima se incrementará, y así sucesivamente, debido a que la reserva es intocable, dando lugar a un Sistema que se encuentra respecto a primas y reservas entre el de Reparto Anual y el de Capitalización Colectiva, debido a que a largo plazo la prima será menor que la de Reparto y mayor que la de Capitalización Colectiva; y la reserva mayor que la de Reparto que siempre es nula, y menor que la de Capitalización Colectiva.

Mediante este método, los fondos acumulados de reserva no deben aplicarse para cubrir el pago de las obligaciones contraídas, sino a lo más, los intereses de los fondos, agregados a las aportaciones recibidas.

Al respecto, el Profesor Peter Thullen dice: "Si se utiliza el criterio descrito, la elevación de la prima podrá efectuarse a lo más, hasta el tiempo en que la suma de los ingresos por primas del asegurado más los intereses de los fondos ya no sean suficientes para cubrir los egresos".

La elección de la prima aplicable no debe ser arbitraria, particularmente las aplicadas en el periodo inicial, dicha elección estará orientada a que:

a) La prima no debe crecer demasiado rápido de un periodo a otro.

b) Debe tomarse en consideración la capacidad económica de los sectores cubiertos por el régimen, para soportar las cargas económicas correspondientes.

c) En los periodos finales la prima debe alcanzar un valor intermedio entre la prima de Capitalización Colectiva y la prima de Reparto, ambas calculadas con las mismas hipótesis para fines de comparación.

d) La acumulación de los fondos debe tomar en cuenta, la medida en que el mercado interno de capitales tiene capacidad para proveer a la inversión con características de seguridad y productividad.

En el caso del Sistema de Primas Escalonadas, la reserva solo cumple con su función financiera, reduciendo mediante los productos de su inversión, el nivel de la prima necesaria para lograr el equilibrio entre los ingresos y los gastos, siendo por lo tanto un Sistema de Capitalización Parcial.

La idea que se persigue es lograr una capitalización atenuada, de modo que la acumulación de las reservas no sea cuantiosa como en el Régimen de Capitalización Pura, lográndose el equilibrio completo del Sistema de Pensiones cuando se haya establecido una compensación natural al Régimen de Pensiones en el efectivo asegurado, entre quienes salen en goce de beneficios y quienes ingresen (Estado Estacionario).

El Sistema de Primas Escalonadas, más que un nuevo Sistema resultó ser dada la elasticidad que ofrece en su aplicación, una generalización de los Sistemas de Financiamiento.

Podemos afirmar lo anterior, ya que puede operar desde el más bajo nivel de capitalización (periodos anuales), convirtiéndose en el Sistema de Reparto Anual, o en el otro extremo hasta el más alto nivel de capitalización, (fijando solo un escalón por un periodo de duración ilimitada), convirtiéndose de esta manera en el Sistema de Prima Media

General. Ambos casos permiten la recuperación técnica del nivel de capitalización perdido o deseado, en función de las condiciones económicas que se vayan dando mediante aportes convenientes al caso.

CALCULO DE LAS PRIMAS ESCALONADAS.

Se representa con:

i_j : Una tasa de interés aplicable durante, el año j, es decir, una tasa de interés constante en el periodo anual $(j, j+1)$.

$r_j = 1 + i_j$: Factor de acumulación anual durante el año j.

$V_j = \dfrac{1}{r_j} = (1 + i_j)^{-1}$: Factor anual de actualización o descuento.

$d_j = \log r_j$

El valor de r_j depende del entero j.

Los intereses generados en el año, están dados por:

$$I_j = R_{j-1}\, i_j + (\Pi_j S_j - B_j)((1+i_j)^{\frac{1}{2}} - 1) \qquad [18]$$

La reserva técnica al final del año j es:

$$R_j = \underbrace{\underbrace{R_{j-1}}_{\substack{\text{Rva.al} \\ \text{al final} \\ \text{del año} \\ j-1.}} + \underbrace{\underbrace{\underbrace{\Pi_j S_j}_{\substack{\text{Cotizaciones} \\ \text{en el año } j}} - \underbrace{B_j}_{\substack{\text{Gastos} \\ \text{en el} \\ \text{año } j}}}_{\substack{\text{Saldo de las} \\ \text{Cotizaciones menos} \\ \text{los gastos en el} \\ \text{año } j.}} + \underbrace{I_j}_{\substack{\text{Intereses} \\ \text{generados} \\ \text{en el año } j.}}}_{\text{Incremento de la Rva. en el año } j.}}_{\text{Reserva al final del año } j.} \qquad [19]$$

Sean m, n dos números enteros tales que $0 \leq m < n$; y supóngase que durante el periodo (m,n) de n-m años se aplicará una misma prima Π de cotización, es decir:

---

18. DOMINGUEZ LEONCIO, "METODO PARA CALCULAR LAS PROYECCIONES DEMOGRAFICAS Y FINANCIERAS DE LOS SEGUROS DE INVALIDEZ, VEJEZ Y CESANTIA EN EDAD AVANZADA Y MUERTE", pp.226

19. ibid., pp. 227

$$\Pi = \Pi_j \quad \text{para} \quad j = m+1, m+2, \ldots, n-1, n.$$

Entonces Π será la prima escalonada para el periodo (m,n), entonces (m,n) es el periodo máximo de equilibrio correspondiente a la prima escalonada Π, si ocurre que la Reserva Técnica es creciente desde R_m de m hasta alcanzar su valor máximo R_n en n, de modo que la reserva comenzaría a disminuir si después de n continuara cobrándose la misma prima Π.

En la práctica puede ser necesario resolver una de las dos cuestiones siguientes:

1) Fijar primero arbitrariamente el periodo máximo de equilibrio (m,n) y entonces el problema es determinar la correspondiente prima escalonada Π.

2) Fijar primero arbitrariamente una prima escalonada Π que se cobrará desde el inicio de un año m+1, y entonces el problema es determinar el correspondiente periodo máximo de equilibrio (m,n).

Para el primer problema, en el se que da el periodo máximo de equilibrio (m,n), la reserva R_m del año m y las tasas de interés i_j, los salarios S_j y los egresos B_j de los años futuros $j = m+1, m+2, \ldots,$ la fórmula con la que se podrá calcular la correspondiente prima escalonada es:

$$\Pi = B_{n+\frac{1}{2}} V_1 V_2 \ldots V_n + d_n (B_{m+1} V_1 V_2 \ldots V_m V_{m+1}^{\frac{1}{2}} +$$

$$B_{m+2} V_1 V_2 \ldots V_m V_{m+1} V_{m+2}^{\frac{1}{2}} + \ldots + B_{n-1} V_1 V_2 \ldots V_{n-1}$$

$$V_n^{\frac{1}{2}} - R_m V_1 V_2 \ldots V_m)) \;/$$

$$(S_{n+\frac{1}{2}} V_1 V_2 \ldots V_n + d_n (S_{m+1} V_1 V_2 \ldots V_m V_{m+1}^{\frac{1}{2}} +$$

$$S_{m+2} V_1 V_2 \ldots V_m V_{m+1} V_{m+2}^{\frac{1}{2}} + \ldots + S_{n-1} V_1 V_2 \ldots$$

$$V_{n-2} V_{n-1}^{\frac{1}{2}} + S_n V_1 V_2 \ldots V_{n-1} V_n^{\frac{1}{2}}))$$ [20]

El segundo problema es más fácil de resolver porque, dada la prima Π, la reserva R_m del año m, y las tasa de interés i_j, los salarios S_j y los egresos B_j de los años futuros, $j = m+1, m+2 \ldots,$ entonces se pueden calcular las

---

20. ib., pp. 281, PARA CONSULTAR EL DESARROLLO COMPLETO REFERIRSE AL ARTICULO DEL DOCTOR PETER TULLEN: "EL SISTEMA DE PRIMAS ESCALONADAS PARA PENSIONES DEL SEGURO SOCIAL. LOS PERIODOS MAXIMOS DE EQUILIBRIO."

sucesivas reservas técnicas del final de cada uno de los años posteriores al año m con la fórmula:

$$R_j = R_{j-1} + \Pi_j S_j - B_j + I_j$$

Hasta llegar al primer año, m+k+1 por ejemplo, en el que la reserva R_{m+k+1} calculada resulte menor que la reserva R_{m+k} del año precedente m+k.

1.2.5. SISTEMA DE CAPITALIZACION INDIVIDUAL.

La base de este Sistema Financiero es una cuenta individual, la cual se constituye de aportaciones ya sean por parte del empleado o empleador, esto dependerá de las bases preestablecidas para el mismo. Los productos de inversión que generan los fondos, serán capitalizables a las mismas.

Existen varias modalidades posibles, en la más común las cuentas son balanceadas por generación.

Las características específicas del Sistema de Capitalización Individual, dependen de las necesidades y finalidades existentes en el país que se establezca.

En 1980, se efectuó una reforma en Chile que privatiza los Seguros Sociales, mediante la introducción de cuentas de ahorro individuales para financiar el retiro.

Este nuevo esquema chileno, se estructura como un programa de contribución definido del 10%, aplicado a los ingresos de todos los trabajadores de todas las categorías, sin incluir a las Fuerzas Armadas. Este costo es pagado en forma total por el empleado. Este porcentaje se pagará hasta un máximo de 6 veces el salario promedio de todos los trabajadores.

Al momento de iniciarse el nuevo sistema se otorgó a todos los trabajadores un incremento salarial del 18 %, este incremento compensó en parte el mayor costo que significó para los trabajadores el nuevo sistema de pensiones.

Este sistema opera en base a un sistema de reajuste, es decir, los montos de las aportaciones son invertidos en "Unidades de Fomento" (UF), el valor de las (UF), se actualiza diariamente de acuerdo a las variaciones en el Indice de Precios al Consumidor.

Estos fondos de pensiones son manejados por instituciones privadas reguladas por el Gobierno llamadas "Administradoras de Fondos de Pensiones" (AFP). Cada trabajador decide a cual AFP realizará sus contribuciones. Las AFP invierten éstas contribuciones después de hacer una deducción por gastos de administración, en titulos de deuda del gobierno y otras inversiones garantizadas por éste.

Las pensiones de jubilación se pagan a la edad de 65 años para los hombres y de 60 años para las mujeres. Debido a que el sistema está basado en un contribución definida, el monto de la pensión es aquel que se determina actuarialmente, o bien, el resultado de las cotizaciones acumuladas.

Existen dos procedimientos para determinar el monto de la pensión. Bajo el primero las cotizaciones acumuladas son transferidas a una compañía de seguros para la adquisición de rentas vitalicias que incluye beneficios por muerte. Bajo el segundo los jubilados reciben un pago mensual directamente por las AFP, determinado por las expectativas de vida del jubilado y de su familia.

Se considera que en un lapso superior a los 20 años, el nivel de beneficio de la pensión será aproximadamente del 70% del salario final, revaluándose las pensiones para obtener su poder adquisitivo.

Actualmente lo que ayuda a mejorar las pensiones es el Bono de Reconocimiento por los servicios pasados bajo el antiguo sistema y la pensión mínima relativamente alta (alrededor del 85% del salario mínimo legal), la cual es aproximadamente el 50% del sueldo promedio de la población activa.

El nuevo sistema ha generado un gran aumento en el ahorro interno, sin embargo debe considerarse el efecto del gasto que para el Gobierno representan los beneficios mínimos, los Bonos de Reconocimiento por servicios pasados y el déficit del Plan anterior.

Después de once años de operar éste Sistema Chileno ha acumulado una suma equivalente al 25% del PIB, y para el año 2015, se estima que llegará al 90% del PIB [21].

Este Sistema de Pensiones, está en vias de iniciar su funcionamiento en países como Perú, Argentina y Bolivia, y se encuentra en estudio su viabilidad en Venezuela, Colombia y Costa Rica.

En México, el SAR (SISTEMA DE AHORRO PARA EL RETIRO), entró en vigor el 1o. de mayo de 1992, su característica fundamental es que se trata de un Sistema de Financiamiento del Retiro por medio de la Capitalización Individual.

Dado el alcance territorial y la importancia de esta nueva prestación establecida por Ley, referente a la Seguridad Social de los individuos, realizamos en los siguientes capítulos un análisis del Financiamiento de Retiro

---

21. "TEMOR DE QUE EL SAR SEA OTRO INFONAVIT", REVISTA ACCION, 10 FEBRERO 1992, pp. 10.

por medio de la Capitalización Individual, con el objeto de obtener conclusiones prácticas que sean de utilidad a la Nación sobre un tema tan novedoso, carente de experiencia en su aplicación con las condiciones económico-demográficas de México.

CAPITULO II

COTIZACION DENTRO DE LOS SISTEMAS DE RETIRO POR REPARTO Y POR CAPITALIZACION.

CAPITULO II

COTIZACION DENTRO DE LOS SISTEMAS DE RETIRO POR REPARTO Y POR CAPITALIZACION.

Los Sistemas de Reparto y de Capitalización, son los sistemas más utilizados para financiar el pago de las pensiones del Seguro de Vejez.

El Sistema de Reparto procura establecer un equilibrio año con año entre los ingresos que recibe de las cotizaciones que aportan los trabajadores y las retribuciones que paga a los jubilados. La cantidad que se recibe en determinado año se reparte el mismo año.

Es el Sistema más simple y es el que se utiliza con mayor frecuencia en países europeos, entre ellos Francia.

Una vez determinados la edad de retiro y el monto de la jubilación con relación al salario de los activos, el Sistema deriva a un problema clásico de Demografía. Es suficiente con calcular una perspectiva por medio del sexo y de la edad de la población concerniente, para determinar la parte del salario que es necesario descontar para asegurar el pago a los jubilados.

En cambio el Sistema de Capitalización, consiste en constituir un capital para cada individuo durante el curso de su vida activa, capital que se utiliza después para pagar la jubilación.

Existen varias modalidades posibles. En la más frecuente el equilibrio se busca a través de cada generación de trabajadores. Es decir, las personas nacidas un mismo año cotizan a una cuenta que es afectada por aquellos que sobreviven. Las cantidades así reunidas son invertidas por la Caja[22], y los intereses que recibe son acreditados a la misma cuenta.

A partir de la edad de retiro, los sobrevivientes dejan de cotizar y reciben por el contrario una jubilación. La suma que posee la generación continúa proporcionando intereses más y más débiles a medida que dicha suma disminuye. El Sistema está organizado de tal manera que esta suma se anula al dia siguiente que desaparece el último representante de la generación.

Los sistemas privados de pensiones en Estados Unidos funcionan bajo este Sistema, también se emplea en el Sistema

---

22. SE REFIERE A UNA INSTITUCION U ORGANISMO ENCARGADO DE LA ADMINISTRACION DE LOS RECURSOS DEL FONDO.

de Pensiones del personal de la Organización de las Naciones Unidas (O.N.U.).

En resumen, el mecanismo del Sistema de Reparto es muy simple debido a que la cotización que se descuenta a los activos es redistribuida entre los jubilados año con año. Por el contrario, el Sistema de Capitalización supone un ajuste más complejo debido a que el equilibrio no se realiza de inmediato, sino a largo plazo. Entre el momento en que el asegurado comienza a cotizar y el momento en que muere, la Caja recibe además de las contribuciones a los fondos constituidos por las cotizaciones de los trabajadores, los intereses correspondientes. Estos intereses los paga la Economía de un país, como ejemplo podemos considerar que la inversión se realiza en una fábrica de jabones, entonces cada vez que alguien consuma jabones paga inadvertidamente parte de los ingresos que va a tener el Sistema de Capitalización, el cual se beneficia por la retribución del capital de las inversiones que efectúa.

Por lo tanto, para comparar los dos Sistemas necesitamos calcular primero la cotización que debe pagar un individuo en cada caso. Posteriormente, para el Sistema de Capitalización, necesitamos evaluar el capital administrado por la Caja, así como los intereses obtenidos.

Podemos decir que las prestaciones de retiro se pueden considerar desde dos puntos de vista:

Para la colectividad, donde se trata de repartir la producción del año entre trabajadores y jubilados (Sistema de Reparto).

Para el individuo, donde se trata de ahorrar y colocar estos ahorros hasta la edad de retiro (Sistema de Capitalización).

Puesto que la colectividad está formada de individuos, el Régimen de Reparto ejerce ciertos efectos sobre los individuos, así como el Régimen de Capitalización influye en el equilibrio económico del conjunto.

Por lo anterior, nos proponemos determinar las implicaciones económicas para la colectividad bajo la operación de un Régimen de Retiro por Capitalización con relación a un Régimen de Retiro por Reparto. Además de determinar la importancia que tienen los capitales contratados, el monto de interés a pagar, la influencia de la estructura por edad, particularmente del crecimiento demográfico, y la relación que existe entre las cotizaciones exigidas para cada régimen.

A continuación, se desarrolla un modelo simple que con ayuda del concepto de Población Estable[29], nos permite abordar y responder a lo largo de los siguientes capítulos las interrogantes anteriores para el caso de México.

---

29. RECOMENDAMOS CONSULTAR EL ANEXO B PARA TODO LO REFERENTE A CONCEPTOS DE DEMOGRAFIA.

2.1 CALCULO DE LA COTIZACION DEL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DEL SISTEMA DE CAPITALIZACION.

2.1.1 CONDICIONES SIMPLIFICADORAS.

Para no complicar demasiado los cálculos establecemos condiciones simples, y será necesario tomar en cuenta que tratamos de extraer conclusiones prácticas sobre los Sistemas mencionados.

Las hipótesis que se utilizan son:

a) La vida activa comienza a la edad α y termina a la edad β, la cual marca el inicio del periodo de retiro. La edad limite de vida será designada por ω. Todas las personas trabajan desde α hasta β.

b) El salario S es el mismo para todos y no varia al paso del tiempo. Esto significa que no hay promociones ni progreso en el nivel de vida.

c) Las sumas invertidas reportan un interés r y no hay inflación.

d) Existe una única Caja Nacional para el conjunto de la población. Cada trabajador entrega a la Caja una fracción k de su salario.

e) La jubilación entregada es igual al salario.

Por el momento, éstas condiciones son fijas.

2.1.2 SUMA QUE SE ACREDITA A LA CUENTA DE LAS PERSONAS DE EDAD X.

Nos proponemos calcular el monto acumulado o suma $s(x)$ que se acredita a la cuenta de las personas de edad x.

Lo calculamos primero dentro del periodo activo α a β, y calculamos las variaciones dentro del intervalo x a $x + dx$:

1) Sea p(x) la función de permanencia. Los p(x) sobrevivientes aportan a la Caja:

$$k\ S\ p(x)\ dx$$

2) La caja que tiene invertida la suma s(x) y recibe un interés:

$$r\ s(x)\ dx$$

Se tiene entonces:

$$ds(x) = k\ S\ p(x)\ dx + r\ s(x)\ dx$$

que podemos escribir como:

$$s'(x) - r\ s(x) = k\ S\ p(x) \qquad (1)$$

Esta es una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden que sabemos tiene solución y es válida para x variando de α a β.

La ecuación (1) es de la forma:

$$y' + ay = g(x)$$ [24]

Esta ecuación, es una combinación de términos que contienen a y y y'. Una pregunta que cabe hacer es si estos términos pueden identificarse como la derivada de alguna función.

En otras palabras, nos preguntamos si puede escribirse:

$$\frac{dy}{dx} + ay = \frac{d(\ \ )}{dx}\ ?$$

Si es así, entonces la ecuación $y' + ay = g(x)$ tiene la forma:

---

24. RECOMENDAMOS CONSULTAR EL ANEXO A PARA TODO LO REFERENTE A CONCEPTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.

$$\frac{d}{dx}\;(\quad) = g(x)$$

e inmediatamente puede resolverse integrando ambos miembros.

Por lo que para resolver la ecuación (1) se propone:

$$y = e^{-rx}\, s(x)$$

Derivando tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -re^{-rx}\, s(x) + e^{-rx}\, s'(x)$$

Factorizando:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-rx}\; (\; s'(x) - r\, s(x)\;)$$

De (1)

$$\frac{dy}{dx} = e^{-rx}\; (\; k\; S\; p(x)\;)$$

Reagrupando:

$$\frac{dy}{dx} = k\; S\; e^{-rx}\; p(x)$$

Así, si se multiplica a la ecuación (1) por e^{-rx}, entonces puede escribirse el primer miembro de la ecuación resultante como la derivada de la función $e^{-rx}\, s(x)$:

$$e^{-rx}\, s'(x) - r\, e^{-rx}\, s(x) = e^{-rx}\; k\; S\; p(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-rx} s(x) \right) = e^{-rx} k\ S\ p(x)$$

Por lo que al integrar ésta ecuación obtenemos:

$$e^{-rx} s(x) = y = \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\ k\ S\ p(t)\ dt + C$$

$$e^{-rx} s(x) = y = k\ S \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Para buscar una solución particular con $x = \alpha$ tenemos:

$$e^{-r\alpha} s(\alpha) = k\ S \int_{\alpha}^{\alpha} e^{-r\alpha}\ p(x) + C$$

Pero $s(\alpha) = 0$ y se tiene además:

$$\int_{\alpha}^{\alpha} e^{-rx}\ p(x)\ dx = 0$$

De lo anterior resulta que $C = 0$ y

$$e^{-rx} s(x) = k\ S \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt$$

Y la solución buscada es:

$$s(x) = k\ S\ e^{rx} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt \qquad (2)$$

que es válida de α a β y representa la suma $s(x)$ que se acredita a la cuenta de las personas de edad x en el Sistema de Retiro por Capitalización. Este fondo se incrementa durante los años de actividad a través de dos fuentes: por las aportaciones y por el interés del capital.

Ahora nos proponemos calcular el *monto acumulado* o suma $s(x)$ que se acredita a la cuenta de las personas de edad x para edades mayores a β (edad de retiro).

1) Los $p(x)$ sobrevivientes no aportan más a la Caja, por el contrario reciben una jubilación S. La suma disminuye entonces en:

$$S\ p(x)\ dx$$

2) El interés cobrado por la caja es:

$$r\ s(x)\ dx$$

Se tiene entonces:

$$ds(x) = -S\ p(x)\ dx + r\ s(x)\ dx$$

que podemos escribir como:

$$s'(x) - r\ s(x) = -S\ p(x) \qquad (8)$$

Esta es una Ecuación Diferencial del mismo tipo que (1), que sabemos tiene solución. Esta vez, (3) es válida para $x > \beta$.

Para resolver la ecuación (3) seguimos el mismo procedimiento utilizado para resolver la ecuación (1). Proponemos:

$$y = e^{-rx}\, s(x)$$

Multiplicamos a la ecuación (3) por e^{-rx}, entonces puede escribirse al primer miembro de la ecuación resultante como la derivada de la función $e^{-rx}s(x)$:

$$e^{-rx}\, s'(x) - re^{-rx}\, s(x) = -e^{-rx}\, S\, p(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-rx}s(x) \right) = -e^{-rx}S\, p(x)$$

Por lo que ésta ecuación puede integrarse obteniendo:

$$e^{-rx}\, s(x) = y = -\int_{\beta}^{x} e^{-rt}\, S\, p(t)\, dt + C$$

$$e^{-rx}\, s(x) = y = -S \int_{\beta}^{x} e^{-rt}\, p(t)\, dt + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Para obtener una solución particular, hacemos $x = w$. Entonces:

$$e^{-rv} s(w) = -S \int_{\beta}^{v} e^{-rx} p(x)\, dx + C$$

Pero $s(w) = 0$. Por lo que el valor de C es:

$$C = S \int_{\beta}^{v} e^{-rx} p(x)\, dx$$

y la ecuación se escribe:

$$e^{-rx} s(x) = -S \int_{\beta}^{x} e^{-rt} p(t)\, dt + S \int_{\beta}^{v} e^{-rt} p(t) dt$$

$$e^{-rx} s(x) = S \int_{x}^{\beta} e^{-rt} p(t)\, dt + S \int_{\beta}^{v} e^{-rt} p(t)\, dt$$

$$e^{-rx} s(x) = S \int_{x}^{v} e^{-rt} p(t)\, dt$$

Finalmente la solución buscada es:

$$s(x) = S\, e^{rx} \int_{x}^{v} e^{-rt} p(t)\, dt \qquad (4)$$

que es válida de β a w y representa la suma $s(x)$ que se acredita a la cuenta de las personas de edad x en el Sistema de Retiro por Capitalización. Este fondo varía por dos causas: la del interés generado por el capital, y por la referente al pago de las pensiones.

2.1.3 FRACCION DEL SALARIO APORTADO COMO COTIZACION AL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DEL SISTEMA DE CAPITALIZACION.

Retomemos las ecuaciones (2) y (4):

$$s(x) = k\ S\ e^{rx} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt$$

$$s(x) = S\ e^{rx} \int_{x}^{\nu} e^{-rt}\ p(t)\ dt$$

Para determinar la constante k, que se aporta a la Caja en el curso de la vida activa dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización, es necesario que las expresiones (2) y (4) tomen el mismo valor para $s(\beta)$, lo cual significa que la suma acumulada a la edad de jubilación debe ser la misma para las personas activas, así como para las jubiladas.

Por lo tanto:

$$k\, S\, e^{r\beta} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx = S\, e^{r\beta} \int_{\beta}^{x} e^{-rx}\, p(x)\, dx$$

$$k = \frac{\int_{\beta}^{v} e^{-rx}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx} \qquad (5)$$

Así, obtenemos que la fracción del salario aportada en el curso de la vida activa dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización, está determinada por la función de permanencia p(x) y la tasa de interés r.

Mientras más elevado sea r más baja será k, sin embargo, existe otro procedimiento que nos permite calcular la fracción k que es necesario aportar a la Caja dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización. Se obtienen diferentes aproximaciones que nos permiten calcular el valor de k, sin necesidad de pasar por el cálculo en continuo, o bien, sin recurrir directamente a un resultado de Poblaciones Estables.

La fracción del salario k, que se aporta a la Caja dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización está dada por:

$$k = \frac{\int_{\beta}^{v} e^{-rx}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx}$$

La ecuación anterior permite calcular la derivada del logaritmo natural de k, es decir;

$$k(r) = \frac{\int_{\beta}^{v} e^{-rx}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx}$$

Si $F(r) = \int_{\beta}^{v} e^{-rx}\, p(x)\, dx$ y $G(r) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx$

Entonces:

$$k(r) = \frac{F(r)}{G(r)}$$

Al aplicar el ln k

$$\ln k(r) = \ln F(r) - \ln G(r)$$

además:

$$f(r,x) = e^{-rx}\, p(x)$$

Al derivar tenemos:

$$F'(r) = \int_{\beta}^{v} \frac{\delta}{\delta r} \left[e^{-rx}\, p(x) \right] dx$$

$$= - \int_{\beta}^{v} x\, e^{-rx}\, p(x)\, dx$$

$$G'(r) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\delta}{\delta r} \left[e^{-rx}\, p(x) \right] dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} x\, e^{-rx}\, p(x)\, dx$$

$$\frac{d}{dr} \ln k = \frac{d}{dr} \ln F - \frac{d}{dr} \ln G$$

$$\frac{k'}{k} = \frac{1}{k} \frac{dk}{dr} = \frac{F'}{F} - \frac{G'}{G}$$

$$\therefore \frac{1}{k}\frac{dk}{dr} = \frac{-\int_{\beta}^{v} x\, e^{-rx}\, p(x)\, dx}{\int_{\beta}^{v} e^{-rx}\, p(x)\, dx} + \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x\, e^{-rx}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx}$$

En esta expresión, el primer término representa la edad media de las personas de edades mayores a β años, y el segundo término representa la edad media de las personas entre α y β años.

De esta manera, podemos hablar de la edad media de los jubilados $\bar{x}_r$ y de la edad media de los activos $\bar{x}_\alpha$.

Por lo tanto, encontramos que:

$$\frac{d \ln k}{dr} = \bar{x}_\alpha - \bar{x}_r$$ [25]

La integral de ésta expresión es:

$$\ln k = (\bar{x}_a - \bar{x}_r) r + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Aplicando la exponencial a esta ecuación:

---

25. KEYFITZ, NATHAN Y GOMEZ DE LEON, JOSE , "CONSIDERATIONS DEMEGRAPHIQUES SUR LES SYSTEMES DE RETRATE.

$$e^{\ln k} = e^{(\bar{x}_a - \bar{x}_r) r + c}$$

$$= e^{(\bar{x}_a - \bar{x}_r) r} \, e^{c}$$

Si $e^{c} = k_o$

entonces:

$$k = k_o \exp \left[(\bar{x}_a - \bar{x}_r) r \right] \qquad (5.1)$$

Donde k nos proporciona una primera aproximación del valor exacto k, sin necesidad de pasar por el cálculo continuo.

En una Población Estacionaria[26] $r = 0$, por lo que :

$$k_o = k(0)$$

$$k_o = \frac{\int_{\beta}^{v} e^{-0x} \, p(x) \, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-0x} \, p(x) \, dx} = \frac{\int_{\beta}^{v} p(x) \, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} p(x) \, dx}$$

---

26. CONSULTAR ANEXO B

$$k_o = \frac{\int_{\beta}^{v} p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} p(x)\, dx}$$

Es decir, k_o es el valor de k dentro de una Población Estacionaria.

Según Nathan Keyfitz y José Gómez de León en su artículo "Considérations Démographiques sur les Systèmes de Retraite", se puede obtener una segunda derivada, que nos daría una mejor aproximación para k:

$$k = k_o \exp \left[r\, (\bar{x}_a - \bar{x}_r) - \frac{r^2}{2}\, (\sigma_a^2 - \sigma_r^2) \right] \qquad (5.II)$$

donde σ_a^2 es la varianza de la población estacionaria entre las edades α y β y σ_r^a es la varianza de la Población Estacionaria, comprendida entre las edades β y v.

Asimismo, dichos autores obtienen al utilizar el mismo método, una aproximación mejor que las dos anteriores al emplear momentos de tercer orden de la composición por edad de la población estacionaria:

$$k = k_o \exp\left[r(\bar{x}_\alpha - \bar{x}_r) - \frac{r^2}{2}(\sigma_\alpha^2 - \sigma_r^2) + \frac{r^3}{6}(k_\alpha - k_r)\right] \quad (5.III)$$

donde k_α y k_r son los momento de tercer orden de los intervalos de edad (α,β) y (β,v) respectivamente.

En el Capitulo IV de esta Tesis, existe un ejemplo numérico tanto de los valores reales de la Cotización k del Sistema de Financiamiento de Retiro por medio Capitalización, así como de los valores obtenidos por medio de las aproximaciones.

2.2 CALCULO DE LA COTIZACION DEL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DEL SISTEMA DE REPARTO.

2.2.1 CONCEPTO DE POBLACION ESTABLE.

El concepto de Población Estable fué introducido en Demografia por Alfred J. Lotka como un caso particular de las Poblaciones Maltusianas.

Las características principales de las Poblaciones Maltusianas son:

La variación exponencial de los fallecimientos, la constancia de las Tasas de Natalidad n, de Mortalidad m y de la Tasa Intrinseca de Crecimiento Natural p. Particularmente interesante es que el reparto por edad es asimismo invariable.

Como complemento de la tasa neta de reproducción del momento, la Tasa Intrinseca de Crecimiento Natural p, es una medida de la reproducción de la población durante un año dado, en el sentido de que proporciona la Tasa de Crecimiento Limite que supone el mantenimiento indefinido de las condiciones de fecundidad y de mortalidad de ese año.

En los desarrollos formales que definen a una Población Estable, incorporamos al sistema de hipótesis que caracterizan a la Población Maltusiana, la hipótesis de una función de fecundidad independiente del tiempo.

Otro interés de la noción de Población Estable, se basa en el hecho de que toda población sometida a partir de cierto momento a condiciones inmutables de mortalidad y fecundidad, se encamina hacia el estado estable, cuyas características quedan determinadas por las Leyes de Mortalidad y de Fecundidad en cuestión.

En otras palabras, se designa por Población Estable a las poblaciónes límite hacia las cuales tienden las Poblaciones Reales cuando la mortalidad y fecundidad permanecen invariables.

También tenemos a las Poblaciones Estacionarias, las cuales son Poblaciones Estables particulares, y son aquellas para las cuales la Tasa Intrínseca de Crecimiento natural es igual a cero.

El Modelo de Población Estable, ha ayudado a comprender mejor el mecanismo de envejecimiento de una población, también permite precisar determinados lazos entre diferentes magnitudes, relacionándolos con una población.

Prácticamente, si se cuenta con una Tasa de Permanencia *p(x)* y una Tasa de Crecimiento *p*, se puede determinar el reparto por edad de la Población Estable.

Las condiciones para una Población Estable o Estacionaria, rara vez se realizan debido a los cambios, ya sea en la función de permanencia o en la densidad de nacimientos. De cualquier manera, estos Modelos son útiles para estudiar planes alternativos para financiar los Seguros de Vida o Sistemas de Ahorro para el Retiro.[27]

Por otra parte, hace mucho tiempo que la noción de Población Estable ha adquirido el derecho de citarse entre las herramientas de la Demografía. Los trabajos como los de Alfred J. Lotka, definitivamente han mostrado el interés y la utilidad del cálculo de la Población Estable correspondiente a un conjunto de condiciones demográficas dadas.

Las características de las Poblaciones Estables, de este modo calculadas, permiten describir muy eficazmente las propiedades de un conjunto de condiciones demográficas.

---

27. BOWERS, GERBER, HICKMAN, JONES, NESBIT, "ACTUARIAL MATHEMATICS", pp. 521.

La mayoría de los demógrafos, están de acuerdo en decir que si uno conoce las condiciones demográficas reales, uno puede calcular una Población Estable correspondiente y ver como el estado real se compara con el estado estable.

Jean Bourgeois-Pichat en su obra "The Concept of a Stable Population application to the study of populations of countries with incomplete population statistics", se esfuerza por demostrar que el concepto de Población Estable es rico en aplicaciones prácticas. Una de ellas la realizamos al analizar el Sistema de Financiamiento del Retiro por medio de la Capitalización.

Existen otro tipo de poblaciones que poseen una parte de las propiedades de las Poblaciones Estables, entre éstas poblaciones tenemos a las que tienen distribución por edad invariable. Se ha demostrado que en esas poblaciones existe a cada instante entre la fecundidad, la mortalidad y la distribución por edad, las mismas relaciones que en una Población Estable. Por consecuencia, para todos los fenómenos donde intervienen la distribución por edad y sus relaciones con la mortalidad y la fecundidad, las poblaciones tienen distribución invariable por edad que son asimilables a las Poblaciones Estables.

Para expresar que las poblaciones con distribución invariable por edad no poseen más que una parte de las propiedades de las Poblaciones Estables, se les ha dado el nombre de Poblaciones Parcialmente Estables.

Numerosas Poblaciones Reales tienen distribución por edad, sino del todo constante, por lo menos poco variable. La mayoría de los países subdesarrollados, es decir, 3/4 partes de la población del Globo, pueden considerarse como Poblaciones Parcialmente Estables.

Las distribuciones por edad de la mayoría de las poblaciones de los países subdesarrollados, pueden interpretarse en términos de fecundidad y de mortalidad; y ésta interpretación conduce a la noción de Población Quasi-Estable.

Una de las características fundamentales de la evolución demográfica mundial actual, está basada en la mortalidad. Partiendo de un nivel de mortalidad correspondiente a una esperanza de vida al nacimiento cercana a 25 años, las diversas poblaciones del mundo se encaminan rápidamente hacia un nivel correspondiente a una esperanza de vida al nacer cercana a 75 años.

Las variaciones de mortalidad tienen pocos efectos sobre la distribución por edad de las poblaciones, debido a que se determina sobre todo por las variaciones de la fecundidad.

Por lo anterior, se puede comprender el porqué la distribución por edad de las poblaciones de los países subdesarrollados cambia poco. Durante largo tiempo la fecundidad y la mortalidad de estas poblaciones ha permanecido en promedio poco variable. A través del tiempo la mortalidad ha comenzado a disminuir, mientras que la fecundidad permanece constante. Estas poblaciones se consideran Quasi-Estables.

Es bueno remarcar que los conceptos de Población Estable y de Población Parcialmente Estable son conceptos teóricos. El estudio de sus propiedades es un problema de Matemáticas-Puras. En cambio, el concepto de Población Quasi-Estable se constituye con la experiencia.

Para nuestros cálculos del Capítulo IV se utilizará un modelo continuo, además asumimos que todas las entradas son por nacimientos y las salidas son por muerte. La migración está excluida y los nacimientos ocurren continuamente.

Sea:

$b(t)$: Función de densidad de nacimientos en el instante t.

$p(x,t)$: Función de permanencia de aquellos nacidos en el instante t, y se conoce como función de permanencia generacional.

Definimos a la Función de Densidad de Población como:

$$l(x,t) = b(t)\ p(x,t)$$

Si $l(x,t)$ es independiente de t:

$$l(x) = e^{\rho t}\ b\ p(x)$$

entonces, se trata de una Población Estable, en donde:

b : Densidad constante de nacimientos, $b > 0$.

ρ : Tasa Intrinseca de Crecimiento Natural.

$p(x)$: Función de permanencia que es independiente del tiempo de nacimiento.

Cuando $\rho = 0$, se trata de una Población Estacionaria, por lo que:

$$l(x,t) = b\ p(x)$$

Para poblaciones humanas b se expresa típicamente como un número de nacimientos por año y la variabilidad de la edad se mide en años.

De acuerdo con:

$$l_x = l_o\ p(x)$$

Reescribimos la ecuación anterior como:

$$l(x,t) = b\ p(x) = l_x$$

donde b juega el papel del radix l_o.

Para una Población Estable, tendríamos la relación:

$$l(x,t) = e^{\rho t}\ b\ p(x) = e^{\rho t}\ lx$$

Una Población Estable tiene una distribución por edad invariable, que se incrementa en tasa constante y tiene Tasas de Nacimiento y Mortalidad constantes, y en donde decimos que:

x : Designa a la edad.

c(x): Proporción de la población a la edad x (Repartición por edad).

b : Tasa Bruta de Natalidad.

p(x) : Proporción de sobrevivientes del nacimiento a la edad x.

La distribución por edad está dada por:

$$c(x) = b\, e^{-p\,x}\, p(x)$$

En una Población Estable el número de personas en un momento dado t es igual a:

$$N(t) = N(0)\, e^{p\,t}$$

El número de personas de edad $\bar{x}$ en el momento t está dado por :

$$N(t)\, c(x) = b\, N(0)\, e^{p\,t}\, e^{-p\,x}\, p(x) = N(x)$$

El total de la población en el instante t, denotado por N(t) para una Población Estable está dado por:

$$N(t) = \int_{o}^{\infty} l(x,t-x)\, dx = e^{p\,t} \int_{o}^{\infty} e^{-p\,x}\, lx\, dx$$

Si $p > 0$ la población crece exponencialmente, y si $p < 0$ la población decrece exponencialmente.

La densidad de nacimientos que originan estas personas, se obtiene dividiendo los sobrevivientes por la probabilidad de sobrevivir hasta la edad x , es decir:

$$B = b\, N(0)\, e^{p\,t}\, e^{-p\,x}$$

Para una Población Estable podemos expresar al número de miembros entre las edades x_o y x_1 como:

$$\int_{x_o}^{x_1} l(x,t-x)\, dx = \int_{x_o}^{x_1} e^{\rho\,(t-x)}\, lx\, dx$$

La expresión exacta para la proporción en cada intervalo es:

$$\int_{x_o}^{x_1} c(x)\, dx = b \int_{x_o}^{x_1} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx$$

2.2.2 NUMERO DE PERSONAS DE EDAD x A $x+dx$ EN EL INSTANTE t.

Para realizar el cálculo de la cotización del Financiamiento de Retiro por medio del Sistema de Reparto, retomaremos algunos conceptos referentes a Poblaciones Estables.

Sabemos que dentro de una Población Estable, la mortalidad y la natalidad son constantes, así como la Tasa de Variación.

Si p es la Tasa de Variación y b la Tasa Bruta de Natalidad, las personas de edad x a $x+dx$ en el instante t, están dadas por:

$$N(t)\ c(x)$$

donde:

N(t): Es la función de nacimientos que relaciona los nacimientos instantáneos de una fecha con los nacimientos instantáneos de fechas anteriores.

c(x): Representa la distribución por edad invariable, que se incrementa en tasa constante y tiene tasas de nacimiento y mortalidad constantes.

y como $c(x) = b\, e^{-\rho x}\, p(x)$ tenemos que:

$$N(t)\, c(x) = N(t)\, b\, e^{-\rho x}\, p(x) \qquad (6)$$

2.2.3 NUMERO DE PERSONAS ACTIVAS Y NUMERO DE PERSONAS JUBILADAS.

De acuerdo con (6), tenemos que el número de personas activas es igual a:

$$A = N(t)\, b \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx \qquad (7)$$

Y el número de personas jubiladas es igual a:

$$B = N(t)\, b \int_{\beta}^{v} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx \qquad (8)$$

2.2.4 FRACCION DEL SALARIO APORTADO COMO COTIZACION AL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DEL SISTEMA DE REPARTO.

Para determinar la constante h que se aporta en el curso de la vida activa dentro de un Sistema de Retiro por Reparto, es necesario que la expresion $h\,A\;S = B\;S$ se cumpla, lo que significa que la suma acumulada a la edad de jubilación debe ser la misma para las personas activas, así como para las jubiladas.

De donde: $h = \dfrac{B}{A}$

es decir:

$$h = \frac{N(t)\; b \int_{\beta}^{v} e^{-\rho x}\; p(x)\; dx}{N(t)\; b \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\; p(x)\; dx}$$

Por lo que:

$$h = \frac{\int_{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx} \qquad (\rho)$$

Así obtenemos que la fracción del salario aportada en el curso de la vida activa dentro de un Sistema de Retiro por Reparto, está determinada por la función de permanencia $p(x)$ y la tasa de variación ρ.

Siguiendo el mismo razonamiento que en la sección 2.1.3, podemos calcular una aproximación del salario h que se aporta a la Caja dentro de un Sistema de Retiro por Reparto, sin necesidad de pasar por el cálculo en continuo, o bien, sin recurrir directamente a un resultado de Poblaciones Estables.

La ecuación (ρ) permite calcular la derivada del logaritmo natural de h, es decir:

$$\frac{1}{h}\,\frac{dh}{d\rho} = -\frac{\int_{\beta}^{v} x\, e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}{\int_{\beta}^{v} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx} + \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x\, e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}$$

El primer término representa la edad media de las personas de edades mayores a β, y el segundo término representa la edad media de las personas de edades entre α y β.

Por lo tanto:

$$\frac{d \ \ln h}{dp} = \bar{x}_a - \bar{x}_r$$

donde:

$\bar{x}_a$: representa la edad media de los activos.

$\bar{x}_r$: representa la edad media de los jubilados.

Por lo que al integrar esta ecuación, obtenemos finalmente la primera aproximación:

$$h = h_o \exp \left[\left(\bar{x}_a - \bar{x}_r \right) \right] \qquad \text{(p.I)}$$

Para obtener la segunda y tercer aproximación Keyfitz y Gómez de León sustituyen p^2 y p^3 en lugar de r en las fórmulas correspondientes a las aproximaciones para k y obtienen:

$$h_o \exp \left[p \left(\bar{x}_a - \bar{x}_r \right) - \frac{p^2}{2} \left(\sigma_a^2 - \sigma_r^2 \right) \right] \qquad \text{(p.II)}$$

donde:

σ^2_α es la varianza de la Población Estacionaria entre las edades α y β, y σ^2_r es la varianza de la Población Estacionaria entre las edades β y v.

$$h_o \exp\left[p\,(\bar{x}_\alpha - \bar{x}_r) - \frac{p^2}{2}\,(\sigma^2_\alpha - \sigma^2_r) + \frac{p^3}{6}\,(k_\alpha - k_r)\right] \quad \text{(D.III)}$$

donde:

k_α y k_r son los momentos de tercer orden de los intervalos de edades (α,β) y (β,v) respectivamente.

2.3 COMPARACION DE LAS FRACCIONES DEL SALARIO APORTADAS COMO COTIZACION AL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DEL SISTEMA DE REPARTO Y DEL SISTEMA DE CAPITALIZACION.

$$k = \frac{\int_{\beta}^{v} e^{-rx}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx}$$

$$h = \frac{\int_{\beta}^{v} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}$$

k y h representan las cotizaciones dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización y por Reparto, respectivamente.

Al compararlas, se observa que dentro de las Condiciones Simplificadoras que establecimos para nuestros cálculos, la cotización *k* dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización a Suma Nula, es igual a la cotización *h* de un

Sistema de Retiro por Reparto dentro de una Población Estable, que tendría por tasa de variación la tasa de interés de las sumas invertidas.

Cuando se habla de tasas de interés, los valores que vienen a la mente son del 3% al 5% Comparándolas con las tasas de variación de las Poblaciones Estables humanas, éstas son muy elevadas, en efecto *p* varia del 0% al 4%. Podemos observar que frecuentemente k es inferior a h y éste resultado proporciona un atractivo al Sistema basado en la Capitalización.

Dentro de tal Sistema, se demanda a la persona activa una cotización más baja que dentro del Sistema por Reparto. Esto evidentemente no es posible, dado que la Caja recibe los intereses sobre las cuentas. Sucede como si, además de la cotización descontada directamente del salario, cada persona, activa o no, pagara una cotización indirecta incluida dentro del precio de bienes y servicios destinada a remunerar el capital.[28]

Para hacer un balance total, se necesita por consiguiente calcular la Contización Indirecta.

---

28. BOURGEOIS-PICHAT, JEAN, "LE FINANCEMENT DES RETRAITES PAR CAPITALISATION", pp. 8

CAPITULO III

FONDO PARA EL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DE LA CAPITALIZACION.

CAPITULO III

FONDO PARA EL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DE LA CAPITALIZACION

En el Capitulo anterior, partiendo del equilibrio financiero entre las obligaciones y los recursos disponibles, se estableció en función de la edad, por una parte, que la fracción del salario que se aporta a la Caja Aseguradora en el curso de la vida activa dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización, depende de la función de permanencia $p(x)$ y de la tasa de interés r. Por otra parte, que la fraccción del salario aportado bajo el Sistema de Retiro por Reparto, depende (bajo el supuesto de una Población Estable) de la función de permanencia $p(x)$ y de la tasa de crecimiento poblacional ρ.

Para realizar un balance total necesitamos calcular para el Sistema de Capitalización, el capital administrado por la Caja, así como la Cotización Indirecta incluida dentro del precio de bienes y servicios, dado que la Caja recibe el pago de interés sobre las cuotas aportadas.

3.1 CALCULO DE LA SUMA TOTAL BAJO EL SUPUESTO DE UNA POBLACION REAL.

3.1.1 CAPITAL PROMEDIO PARA CADA SOBREVIVIENTE PARA EDADES EN LA VIDA ACTIVA.

El capital promedio a la edad x, lo calculamos primero dentro del periodo activo de edades α a β.

Se ha considerado que los sobrevivientes poseen la suma denotada por la ecuación (2):

$$s(x) = k\ S\ e^{rx} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt$$

Cada sobreviviente posee entonces:

$$\frac{s(x)}{p(x)} = k\ S\ \frac{e^{rx}}{p(x)} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt \tag{10}$$

Al analizar la función:

$$F(x) = k\ \frac{e^{rx}}{p(x)} \int_{\alpha}^{x} e^{rt}\ p(t)\ dt \tag{11}$$

que es válida para x comprendida entre α y β, notamos que al utilizar el caso más simple, en donde la tasa de interés r es igual a cero:

Entonces F(x), se escribe:

$$F(x) = \frac{k}{p(x)} \int_{\alpha}^{x} p(t)\, dt$$

Es evidente que $F(\alpha) = 0$.

Calculamos ahora:

$$F(\beta) = \frac{k}{p(\beta)} \int_{\alpha}^{\beta} p(t)\, dt$$

$$F(\beta) = \frac{\dfrac{\int_{\beta}^{v} p(t)\, dt \quad \int_{\alpha}^{\beta} p(t)\, dt}{\int_{\alpha}^{\beta} p(t)\, dt}}{p(\beta)}$$

$$F(\beta) = \frac{1}{p(\beta)} \int_{\beta}^{v} p(t)\, dt = e(\beta)$$

en donde hicimos uso de la igualdad (5), y $e(\beta)$ designa la esperanza de vida a la edad β. A ésta edad, cada sobreviviente posee entonces: $S\, e(\beta)$.

Este es un resultado evidente, ya que al tener 0% como tasa de interés de las sumas invertidas, es necesario que cada sobreviviente posea lo que falta para pagar su jubilación pendiente, con una duración igual a su vida promedio a la edad β. La función $F(x)$ es creciente de α a β.

3.1.2 CAPITAL PROMEDIO PARA CADA SOBREVIVIENTE PARA EDADES POSTERIORES A LA EDAD DE RETIRO.

Se tiene para la suma total la ecuación (4):

$$s(x) = S\, e^{rx} \int_x^v e^{-rt}\, p(t)\, dt$$

y para cada sobreviviente:

$$\frac{s(x)}{p(x)} = \frac{S\, e^{rx}}{p(x)} \int_x^v e^{-rt}\, p(t)\, dt \qquad (12)$$

Al examinar la forma de la función:

$$R(x) = \frac{e^{rx}}{p(x)} \int_{x}^{w} e^{-rt}\, p(t)\, dt \qquad (18)$$

la cual denota el capital promedio para cada sobreviviente, para edades mayores que la edad de retiro.

Suponemos de entrada que la tasa de interés es nula, $r = 0$, y así escribimos:

$$R(x) = \frac{1}{p(x)} \int_{x}^{w} p(t)\, dt = e(x)$$

Para una edad x dada, cada sobreviviente posee $S \;\; e(x)$, donde $e(x)$ designa la esperanza de vida a la edad x. De nuevo el resultado es evidente, lo que se tiene establecido para la edad β, debe verificarse para todas las edades superiores a β, por lo que cada sobreviviente debe poseer lo que hace falta para pagar su jubilación pendiente durante un periodo igual a su vida promedio a la edad w.

La función $R(x)$, es decir $e(x)$, es decreciente de $e(\beta)$ a $e(w)$, donde el valor de $e(w) = 0$.

En el Capitulo IV, se ejemplificarán las fórmulas de

F(x) y R(x) (capital promedio para cada sobreviviente, para edades en la vida activa y posteriores a la edad de retiro, respectivamente), aplicándolas a la población cubierta por el IMSS.

3.2 CALCULO DE LA SUMA TOTAL BAJO EL SUPUESTO DE UNA POBLACION ESTABLE.

En la Sección anterior, se establecieron fórmulas aproximadas que nos permitirán en el Capítulo IV calcular la Suma Total que posee la caja aplicándolas a una Población Real.

Ahora, retomaremos el problema suponiéndo que nos encotramos dentro de una Población Estable con tasa de variación p.

Estas hipótesis permiten obtener una expresión simple de la Suma Total que posee la Caja.

3.2.1 CONJUNTO DE LAS CUENTAS DE LAS PERSONAS EN LA VIDA ACTIVA.

Se tiene considerado que cada individuo, con un promedio de edad x posee:

$$k\, S \frac{e^{rx}}{p(x)} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\, p(t)\, dt$$

Dentro de una Población Estable, el *número de* personas de edad x a $x + dx$ son en número igual a:

$$N(t)\ b\ e^{-p\,x}\ p(x)\ dx$$

y el conjunto de estas personas posee:

$$N(t)\ b\ e^{-p\,x}\ p(x)\ dx \left[k\ S\ \frac{e^{rx}}{p(x)} \int e^{-rt}\ p(t)\ dt \right]$$

reagrupando:

$$k\ S\ N(t)\ b\ e^{(r-p)\,x} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt\ dx$$

El conjunto de las cuentas de las personas de edad α hasta β está dado por:

$$A = k\ S\ N(t)\ b \int_{\alpha}^{\beta} \left[e^{(r-p)\,x} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt \right] dx$$

Para poder integrar con respecto a x, completamos con la derivada de $e^{(r-p)x}$:

$$A = \frac{k\ S\ N(t)\ b}{r-p} \int_{\alpha}^{\beta} (r-p)\ e^{(r-p)\,x} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt\ dx$$

Al integrar por partes tenemos:

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

de donde:

$$u = \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\, p(t)\, dt$$

$$du = e^{-rt}\, p(t)\, dt$$

$$dv = (r - p)\, e^{(r- p)x}\, dx$$

$$v = e^{(r- p)x}$$

por lo tanto:

$$A = \frac{k\ S\ N(t)\ b}{r - p} \left[e^{(r- p)x} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\, p(t)\, dt \Bigg|_{\alpha}^{\beta} \right.$$

$$\left. - \int_{\alpha}^{\beta} e^{(r- p)x}\, e^{-rx}\, p(x)\, dx \right]$$

Valuando en el intervalo de α a β:

$$A = \frac{k\ S\ N(t)\ b}{r - p} \left[e^{(r- p)\beta} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx \right.$$

$$- \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x} \, p(x) \, dx$$

3.2.2 CONJUNTO DE LAS CUENTAS DE LAS PERSONAS JUBILADAS.

Para las personas de edad β y mayores, cada una de ellas posee en promedio a la edad x:

$$\frac{S e^{rx}}{p(x)} \int_{x}^{v} e^{-rt} \, p(t) \, dt$$

Considerando que dentro de una Población Estable, el número de personas de edad *x* a *x + dx* son en número igual a:

$$N(t) \, b \, e^{-\rho x} \, p(x) \, dx$$

El conjunto de éstas personas posee:

$$S \, N(t) \, \frac{b \, e^{(r-\rho)x} \, p(x)}{p(x)} \int_{x}^{v} e^{-rt} \, p(t) \, dt \, dx$$

$$= S \, N(t) \, b \, e^{(r-\rho)x} \int_{x}^{v} e^{-rt} \, p(t) \, dt \, dx$$

El conjunto de las personas jubiladas posee:

$$B = S\ N(t)\ b \int_{\beta}^{v} \left[(r-p)\ e^{(r-p)x} \int_{x}^{v} e^{-rt}\ p(t)\ dt \right] dx$$

$$= S\ N(t)\ b \int_{v}^{\beta} \left[(r-p)\ e^{(r-p)x} \int_{v}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt \right] dx$$

e integrando por partes tenemos:

$$u = \int_{v}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt\ dx$$

$$du = e^{-rt}\ p(t)\ dt$$

$$dv = (r-p)\ e^{(r-p)x}$$

$$v = e^{(r-p)x}$$

$$B = \frac{S\ N(t)\ b}{r-p} \left[e^{(r-p)x} \int_{v}^{x} e^{-rt}\ p(t)\ dt \right|_{v}^{\beta}$$

$$- \int_{v}^{\beta} e^{(r-p)x} \; e^{-rx} \; p(x) \; dx \Bigg]$$

valuando en el intervalo w a β.

$$B = \frac{S\,N(t)\,b}{r - p} \Bigg[e^{(r-p)\beta} \int_{v}^{\beta} e^{-rx} \, p(x) \; dx$$

$$- \int_{v}^{\beta} e^{-px} \, p(x) \; dx \Bigg]$$

$$B = \frac{S\,N(t)\,b}{r - p} \Bigg[\int_{\beta}^{v} e^{-px} \, p(x) \; dx$$

$$- e^{(r-p)\beta} \int_{\beta}^{v} e^{-rx} \, p(x) \; dx \Bigg]$$

3.2.3 CONJUNTO DE LAS SUMAS QUE POSEE EL FONDO.

De lo obtenido en las dos Secciones anteriores, podemos decir que el conjunto de las sumas que posee la Caja es ahora:

$$A + B = \frac{S\,N(t)\,b}{r - \rho} \left[k\, e^{(r-\rho)\beta} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx \right.$$

$$- e^{(r-\rho)\beta} \int_{\beta}^{v} e^{-rx}\, p(x)\, dx + \int_{\beta}^{v} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx$$

$$\left. - k \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx \right]$$

En virtud de la relación:

$$k = \frac{\displaystyle\int_{\beta}^{v} e^{-rx}\, p(x)\, dx}{\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx}$$

tenemos que:

$$A + B = \frac{S\,N(t)\,b}{r - \rho} \left[\int_{\beta}^{v} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx \right.$$

$$\left. - k \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx \right]$$

Introduciendo la cotización h de un Sistema de Retiro por Reparto dentro de una Población Estable:

$$h = \frac{\int_{\beta}^{v} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}$$

Finalmente obtenemos:

$$A + B = \frac{S\, N(t)\, b}{r - \rho} \;(h - k) \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx$$

que representa al Conjunto de las Sumas que posee el fondo bajo el supuesto de una Población Estable.

Si tomamos ahora el Conjunto de los Salarios Pagados como:

$$\sum = S\, N(t)\, b \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx$$

Entonces:

$$\frac{A + B}{\Sigma} = \frac{\dfrac{S\,N(t)}{r - \rho}\, b\,(h-k) \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}{S\,N\,(t)\, b \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}$$

De donde:

$$\frac{A + B}{\Sigma} = \frac{h - k}{r - \rho} \qquad (14)$$

Como se había mencionado, se obtiene un resultado particularmente simple de la razón de la suma que posee la Caja a la masa salarial anual.

Si se cuenta con una red de Poblaciones Estables (Conjunto de Tablas-Tipo de mortalidad que representan las condiciones demográficas de alguna determinada región), se puede obtener a $\frac{A + B}{\Sigma}$ para una gran variedad de situaciones.

La obra de Coale y Demeney[29], suministra precisamente tales redes. Con una se calculan las series de Poblaciones Estables al asociar a las Tablas-Tipo de Mortalidad, una serie de tasas de variación, con la otra se calcula una

29. Op. Cit.

segunda serie de Poblaciones Estables, al asociar a las Tablas-Tipo de Mortalidad, una serie de Tasas Brutas de Reproducción. Con la primera red calculamos k y con la segunda h.

Podemos calcular la razón de la Suma que posee la Caja a la Masa Salarial Anual desde otro punto de vista, basado en las aproximaciones de k y h.

En el momento de la instalación del Régimen de Capitalización, la Caja no hace más que recibir las cuotas, pero $(\beta-\alpha)$ años después, los primeros asegurados empiezan a pensionarse y a exigir su pago correspondiente. A partir de ese momento, la suma que posee la generación de asegurados comienza a disminuir, sin embargo continúa reportando intereses a una tasa r, hasta el momento en que el capital y la generación de asegurados se extinguen. El flujo continuo de generaciones sucesivas define por lo tanto, una cierta composición de los capitales comprometidos, y el ritmo de acumulación del Sistema representa la diferencia entre la tasa de cotización por individuo activo dentro de un Sistema de Retiro por medio de la Capitalización k y la tasa de cotización por individuo activo dentro de un Sistema de Retiro por medio del Reparto h, es decir: $(k-h)$.

Las cantidades *(k-h)*, se acumulan progresivamente de año en año, a partir del momento donde, por ejemplo: la suma que posee el fondo es nula.

Situémonos mientras tanto, en un instante dado de tiempo. Si la población activa en ese momento es P, podemos decir que la población activa t años antes era de $P\,e^{-pt}$, es decir, que la ganancia de la acumulación de las tasas de cotización ha sido de $P\,(k-h)\,e^{-pt}$, o bien, $(k-h)\,e^{-pt}$ si la acumulación se ha realizado por individuo activo. Además, debido a que esta cantidad se ha acrecentado a una tasa de interés r, podemos escribir este incremento como:

$$(k-h)\ e^{-pt}\ e^{rt} = (k-h)\ e^{t(r-p)}$$

Finalmente la Suma Total del fondo acumulada hasta tiempo presente por individuo activo se convierte en:

$$\int_0^\infty (k-h)\ e^{t(r-p)}\ dt \ = \ \frac{k-h}{p-r}$$

expresión que concuerda con la fórmula (14), obtenida con un procedimiento diferente.

Recordemos que existe un método aproximado para el cálculo de k y de h, por lo que ahora utilizaremos las segundas aproximaciones propuestas por Keyfitz y Gómez de León[30], al observar que $h_o = k_o$ podemos encontrar una expresión simplificada de la proporción de la masa salarial que posee la Caja:

$$k = k_o \exp \left[r\ (\bar{x}_o - \bar{x}_r) - \frac{r^2}{2} \ (\sigma_t^2 - \sigma_r^2\ ) \right]$$

$$h = h_o \exp \left[\rho\ (\bar{x}_o - \bar{x}_r) - \frac{r^2}{2} \ (\sigma_a^2 - \sigma_r^2\ ) \right]$$

que representan las segundas aproximaciónes para el cálculo de las cotizaciónes de un Sistema de Retiro por Capitalización y de un Sistema de Retiro por Reparto, respectivamente.

Tomándo en consideración que $h_o = k_o$, una expresión simplificada de la proporción de la masa salarial que posee la Caja, la podemos escribir como sigue:

$$(h - k) = k_o \left[\exp(\ \rho(\bar{x}_a - \bar{x}_r) - \frac{\rho^2}{2} (\sigma_a^2 - \sigma_r^2\ ) \right.$$

$$\left. - \exp(\ r(\bar{x}_a - \bar{x}_r) - \frac{r^2}{2} (\sigma_a^2 - \sigma_r^2\ ) \right]$$

Si $m = (\bar{x}_a - \bar{x}_r)$ y $v = \frac{1}{2} (\sigma_a^2 - \sigma_r^2\ )$. Entonces:

---

30. KEYFITZ NATHAN ET GOMEZ DE LEON JOSE, "CONSIDERATIONS DEMOGRAPHIQUES ... op. cit.

$$\frac{h-k}{r-p} = \frac{k_o}{r-p}\left[\exp\,(pm - p^2v) - \exp\,(rm - r^2v) \right] \quad (44.1)$$

En ésta expresión, es suficiente con conocer los valores de m, v y k_o para estimar el valor de $\frac{h-k}{r-p}$.

Sin embargo, es raro referirse a una población en términos de la diferencia entre las edades medias $\bar{x}_a$ y $\bar{x}_r$, así mismo, en términos de la diferencia entre las varianzas σ^2_a y σ^2_r.

Para evitar este inconveniente, se puede encontrar una expresión que nos permita obtener los valores de m, v y k_o en términos de una esperanza de vida al nacimiento única. En efecto, los tres parámetros reflejan la distribución por edad de la Población Estacionaria asociada a una tabla de mortalidad, y esta distribución se puede caracterizar de manera general por el nivel de mortalidad correspondiente.

Keyfitz y Gómez de León[81] realizan un análisis de la familia de Tablas-Tipo de Mortalidad de Coale y Demeney[82], y nos muestra que en efecto, los parámetros m y v se relacionan linealmente a la esperanza de vida al nacimiento. Además, esta relación no cambia en función del sexo.

---

81. Op. Cit
82. Op. cit

3.3 REVALORIZACION DE LAS CONDICIONES SIMPLIFICADORAS.

La realidad se aparta de las condiciones simplificadoras adoptadas para establecer las fórmulas en la Sección 2.1.1.

Según Jean Bourgeois-Pichat, la adopción de las edades exactas α y β para el ingreso a la actividad y al retiro no parece afectar demasiado los cálculos. Por lo tanto, se podrá sin inconveniente reemplazarlas por las edades promedio.

3.3.1 SALARIOS.

Se puede suponer que el salario es igual para todos, pues así está considerado como un salario promedio.

Por el contrario, no parece muy realista el admitir que este salario promedio no varía al paso del tiempo. La noción misma de desarrollo económico implica un crecimiento de estos salarios.

A continuación modificamos ligeramente las fórmulas para tener en cuenta tal progresión.

3.3.1.1 SUMA QUE SE ACREDITA A LA CUENTA DE LAS PERSONAS DE EDAD X.

Para una generación dada, es decir el conjunto de las personas nacidas el mismo año, todo transcurre como si el desarrollo económico ocasionará un aumento del salario con la edad a una cierta tasa λ.

Se llega entonces a una ecuación del aumento del salario en función de la edad x :

$$\sigma(x) = \sigma(\alpha)\ e^{\lambda(x-\alpha)}$$ [39]

La Ecuación Diferencial (1) se escribe ahora:

$$s'(x) - rs(x) = k\ \sigma(\alpha)\ e^{\lambda(x-\alpha)}\ p(x) \qquad (15)$$

la cual es una Ecuación Diferencial Lineal de primer orden, que sabemos tiene solución y es válida para x variando de α a β.

Se puede resolver tomando:

$$y = e^{-rx}\ s(x)$$

Derivando tenemos:

---

39. BOUERGEOIS-PICHAT J, "LE FINANCEMENT DES RETRATES PAR CAPITALISATION" pp. 134.

$$\frac{dy}{dx} = -r\, e^{-rx}\, s(x) + e^{-rx}\, s'(x).$$

Factorizando:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-rx} \left[s'(x) - r\, s(x) \right]$$

De (15):

$$\frac{dy}{dx} = e^{-rx} \left[k\, \sigma(\alpha)\, e^{\lambda(x-\alpha)}\, p(x) \right]$$

Así, si se multiplica a la ecuación (15) por e^{-rx}, entonces puede escribirse el primer miembro de la ecuación resultante como la derivada de la función $e^{-rx}\, s(x)$:

$$e^{-rx}\, s'(x) - e^{-rx}\, r\, s(x) = e^{-rx} \left[k\, \sigma(\alpha)\, e^{\lambda(x-\alpha)}\, p(x) \right]$$

$$\frac{dy}{dx} \left[e^{-rx}\, s'(x) \right] = e^{-rx} \left[k\, \sigma(\alpha)\, e^{\lambda(x-\alpha)}\, p(x) \right]$$

Por lo que esta ecuación puede integrarse obteniendo:

$$e^{-rx}\, s'(x) = y = \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\, k\, \sigma(\alpha)\, e^{\lambda(t-\alpha)}\, p(t)\, dt + C$$

$$= k\, \sigma(\alpha)\, e^{-\lambda\alpha} \int_{\alpha}^{x} e^{(\lambda-r)t}\, p(t)\, dt + C$$

Si buscamos una solución particular con $x = \alpha$, se ve claramente que la constante $C = 0$.

Se tiene entonces:

$$s(x) = k\, \sigma(\alpha)\, e^{-\lambda\alpha}\, e^{rx} \int_{\alpha}^{x} e^{(\lambda-r)t}\, p(t)\, dt \qquad (16)$$

que es válida de α a β y representa la suma $s(x)$ que se acredita a la cuenta de las personas de edad x en el Sistema de Retiro por Capitalización, tomando en consideración el incremento del salario con la edad a una cierta tasa λ.

Análogamente, de β a v:

$$s(x) = \sigma(\alpha)\, e^{-\lambda x}\, e^{rx} \int_{x}^{v} e^{(\lambda-r)t}\, p(t)\, dt \qquad (16.1)$$

3.3.1.2 FRACCION DEL SALARIO APORTADO COMO COTIZACION AL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DEL SISTEMA DE CAPITALIZACION.

Para obtener el valor de la constante k, necesitamos que las expresiones (15) y (16) tomen el mismo valor para $S(\beta)$, lo cual significa que la suma acumulada a la edad de jubilación, debe ser la misma en ambos casos:

$$k\, \sigma(\alpha)\, e^{-\lambda\alpha}\, e^{rx} \int_{\alpha}^{x} e^{(\lambda-r)}\, p(t)\, dt =$$

$$\sigma(\alpha)\, e^{-\lambda\alpha}\, e^{rx} \int_{x}^{v} e^{(\lambda-r)^{t}}\, p(t)\, dt$$

De donde:

$$k = \frac{\int_{\beta}^{v} e^{-(r-\lambda)x}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-(r-\lambda)x}\, p(x)\, dx} \qquad (17)$$

Todo transcurre entonces como si la tasa de interés no fuera r sino $r - \lambda$.

Si se tiene una progresión en el salario del 3% por año y una tasa de interés del 5%, sucede como si la tasa de interés fuera 5% - 3% = 2%. La Cotización Directa se ve aumentada por la progresión de los salarios.

Dentro del cálculo por generaciones que debemos hacer para calcular k, se puede considerar $\sigma(\alpha)$ constante.

Pero no es éste el caso cuando se desea calcular la Suma Total que posee la Caja.

3.3.1.3 CAPITAL PROMEDIO PARA CADA SOBREVIVIENTE PARA EDADES EN LA VIDA ACTIVA.

Se realiza entonces la suma de los capitales acreditados a las cuentas de las distintas generaciones y del salario que recibieron a la edad α dependiendo de la época en que alcanzaron ésta edad. Si designamos por $\sigma(t)$ el salario al instante t, se tendrá para las personas de edad x:

$$\sigma(\alpha) = e^{-\lambda(x-\alpha)}\ \sigma(t)$$

y cada persona de la edad x a $x + dx$ tendrá en promedio:

$$\frac{s(x)}{p(x)} = k\,\sigma(\alpha)\,e^{-\lambda\alpha}\,\frac{e^{rx}}{p(x)}\int_{\alpha}^{x} e^{(\lambda-r)t}\,p(t)\,dt$$

$$= k\,\sigma(t)\,\frac{e^{-\lambda(x-\alpha)}\,e^{-\lambda\alpha}\,e^{rx}}{p(x)}\int_{\alpha}^{x} e^{(\lambda-r)t}\,p(t)\,dt$$

Entonces:

$$\frac{s(x)}{p(x)} = k\,\sigma(t)\,\frac{e^{(r-\lambda)x}}{p(x)}\int_{\alpha}^{x} e^{(\lambda-r)t}\,p(t)\,dt \qquad (18)$$

Esta es la expresión (10) reemplazando r por $r - \lambda$, los resultados anteriores que conciernen al total que posee la Caja continúan siendo válidos a condición de que se disminuya a la tasa de interés r, la tasa de crecimiento de la economía λ. Esto, aumenta el capital.

3.3.2 INFLACION.

Se ha supuesto también que no hay inflación. Si la Caja invierte juiciosamente las sumas que recibe, el capital se revaloriza y la inflación resulta automáticamente nula.

Más la revaluación no es completa y demanda cierto plazo. Además la ley prevee que una parte del capital que posee la Caja debe invertirse en valores de renta fija que no se revalúan.

La inflación produce entonces un interés negativo que reduce las tasas de interés que intervienen dentro de los cálculos, convirtiendose en tasas de interés muy bajas, del órden de 1% a 2%.

El hecho de que el importe de la jubilación no esté calculado sobre el salario promedio, sino sobre el salario de los mejores años, aporta una dificultad suplementaria.

Es cierto que raramente esté previsto el que la pensión sea igual al salario y que ésta compense a aquél.

3.3.3 COTIZACION INDIRECTA PARA EL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DEL SISTEMA DE CAPITALIZACION A SUMA NULA.

Los cálculos se realizan con el propósito de calcular la Cotización Indirecta deducida por la Caja por intermedio de la remuneración.

Se le obtiene directamente al multiplicar por r la cantidad $\dfrac{(A + B)}{\Sigma}$.

Se tiene entonces:

$$Ci = r \frac{h - k}{r - p} \qquad (19)$$

Recordemos que k es la Cotización Directa de un Sistema de Retiro por Capitalización y h es la cotización para un Sistema de Retiro por Reparto.

La fórmula (19) es válida dentro de las condiciones simplificadoras. Si se tiene un desarrollo económico caracterizado por una tasa de crecimiento λ, se ha considerado que es necesario reemplazar $r - \lambda$ para el cálculo del capital que posee la Caja, pero hace falta siempre multiplicar éste capital por r para obtener la Cotización Indirecta.

Se tiene entonces:

$$Ci = r \frac{h - k'}{r - \lambda - p} \qquad (20)$$

k' es la Cotización Directa calculada con una tasa de interés $r - \lambda$. La cotización dentro de un Sistema por Reparto permanece igual a h.

Se ha realizado un análisis completo de los elementos implicados en el Sistema de Retiro por Capitalización, así como de la Razón de la Masa Salarial que posee la Caja, tanto para una Población Real, como para una Población Estable.

Posteriormente, se revalorizaron las condiciones simplificadoras con la finalidad de obtener resultados apegados a la realidad.

En el Capítulo IV, se aplicarán todas las expresiones obtenidas a fin de ejemplificar el procedimiento, así como para obtener resultados prácticos que nos permitan formular conclusiones y recomendaciones del Análisis del Financiamiento de Retiro por medio del Sistema de Capitalización.

CAPITULO IV

APLICACIONES A LA POBLACION CUBIERTA POR EL INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL.

CAPITULO IV

APLICACIONES A LA POBLACION CUBIERTA POR EL INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL.

4.1 INSTITUO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL.

El Instituto Mexicano del Seguro Social, nace el 19 de enero de 1943, y a la fecha, en un ámbito de alcance nacional, operan 5 ramos de seguros.

Bajo un régimen de cuotas y administración tripartita: empleadores, trabajadores y Estado; sectores que están representados por cuatro miembros cada uno, con sus respectivos suplentes, en un Consejo Técnico que es el representante legal y el administrador del Instituto.

4.1.1 SEGUROS, PRESTACIONES Y CUOTAS.

A continuación realizamos un resumen de los cinco ramos que operan en el IMSS, con sus respectivas prestaciones y cuotas:

IMSS: SEGUROS PRESTACIONES Y CUOTAS

SEGUROS	PRESTACIONES PRINCIPALES	CUOTAS SOBRE SALARIOS
ENFERMEDADES Y MATERNIDAD	ATENCION MEDICA SUBSIDIOS POR: ENFERMEDAD Y MATERNIDAD GASTOS DE FUNERAL	12 %
INVALIDEZ, VEJEZ, CESANTIA EN EDAD AVANZADA Y MUERTE	PENSIONES POR: INVALIDEZ, VEJEZ Y MUERTE	7.4% CON AUMENTOS ANUALES DE 0.2 % HASTA EL 8 %
RIESGOS DE TRABAJO	ATENCION MEDICA SUBSIDIOS POR: INCAPACIDAD PENSIONES POR: INVALIDEZ O MUERTE, DERIVADAS DE UNA ENFERMEDAD O ACCIDENTE DE TRABAJO	2 % EN PROMEDIO YA QUE LA CUOTA DEPENDE DE LA ACTIVIDAD DE LA EMPRESA
GUARDERIAS	PARA HIJOS DE ASEGURADAS	1 %
RETIRO	AHORRO PARA EL RETIRO.	2 %

Las cuotas del seguro de enfermedades y maternidad, y del seguro de invalidez, vejez, cesantía en edad avanzada y muerte, del 12% y 7% de los salarios de los trabajadores respectivamente, son pagadas en un 70% por los empleadores, un 25% por los trabajadores y el 5% restante por el Estado; y las cuotas de los seguros de riesgos de trabajo 2% en promedio, de guarderías 1% y de Retiro 2%, son cubiertas en su totalidad por los empleadores.

4.1.2 FACTORES DE DESEQUILIBRIO.

El IMSS es una entidad sensible ante los cambios de la economía. Los niveles de empleo, salarios y precios, así como los diversos factores monetarios y socio-demográficos inciden en su funcionamiento.

Bajo condiciones de un desarrollo altamente dinámico y estable, el Instituto pudo financiar su operación mostrando una gran capacidad para extender su cobertura, sin embargo, ya para 1988, la contracción del crecimiento económico y el rápido crecimiento de los precios, habían provocado desequilibrios entre los recursos disponibles y los gastos comprometidos, al grado de tener que modificar gradualmente su esquema financiero para ajustar su operación. Por lo tanto, el impacto de la crisis económica se reflejó de la manera siguiente:

a) Impacto en los ingresos.

El proceso recesivo-inflacionario prevaleciente desde los inicios de la década de los ochentas, incidió desfavorablemente al provocar el deterioro gradual de la fuente de ingreso de la Institución, que es el binomio empleo-salario.

Es claro que el descenso de la actividad económica se tradujo en menores niveles de ocupación en el sector formal, y por consiguiente, en ritmos inferiores de crecimiento de los asegurados totales (permanentes y eventuales).

Sobre este aspecto, el Instituto resintió más la disminución del empleo que la propia economía en su conjunto, en virtud de que una proporción importante de la fuerza de trabajo sin ocupación se empleó en el llamado sector informal, en condiciones desventajosas para los trabajadores, para las empresas legalmente constituidas y también para el Seguro Social.

El deterioro de los salarios, proviene del hecho de que el mismo entorno de contracción económica ha generado restricciones financieras en las empresas, impidiéndoles incrementar las remuneraciones a un ritmo igual o similar al de la inflación. De esta forma se ha producido un rezago importante en los incrementos salariales respecto a los incrementos en los precios; esta situación ha compactado la capacidad contributiva de los asegurados, ya que cerca del 80% de los mismos se encuentran en un rango de cotización menor a tres salarios mínimos.

b) Impacto en los egresos.

Por lo que respecta a los gastos, la crisis constituye un factor de gran presión, pues por un lado la inflación tiende a elevarlos - el aumento de la demanda de servicios también influye -, y por otro lado la administración está obligada a reducirlos, debido a la caída de los recursos disponibles. La inflación, provocó alzas considerables en los costos de adquisición de medicamentos, material de curación, etc. Asimismo, por su efecto en el incremento del tipo de cambio y de las tasas de interés, indujo a mayores erogaciones en la adquisición de equipo hospitalario, materiales biológicos y reactivos de importación; así como pagos crecientes por concepto del servicio de los financiamientos contratados por el Instituto.

En adición a lo anterior, la inflación, al propiciar el encarecimiento de la medicina privada, obligó a la población derechohabiente a recurrir más y con mayor frecuencia a los servicios que proporciona el Instituto, y sobre todo, a aquéllos de gran especialización que obviamente tienen un costo más elevado.

No escapa desde luego, el impacto desfavorable que ejerce el proceso inflacionario sobre las prestaciones en dinero. El caso más palpable es el de las pensiones, cuya revisión ha sido necesaria para restituir la capacidad de consumo a la población que en su vida productiva acumuló derechos.

4.1.2.1 EXPECTATIVAS DE VIDA.

Usualmente, se ha creído que los beneficios otorgados no son sino reembolso de las cuotas que se pagan, lo cual no siempre es así, ya que una gran mayoría de los asegurados tienen acreditados derechos en curso de adquisición por un monto mayor que el total de los pagados para este fin, incluyendo los productos de inversión correspondientes; ésto se confirma para el caso de las pensiones por vejez, siendo más crítica la situación financiera para los casos de invalidaz y muerte, por ser mayores las expectativas de vida como pensionados y menores las antigüedades de los pensionados directos, dando como resultado menores aportaciones en promedio, que las requeridas para su adecuado financiamiento.

Otro factor que influye es el considerable aumento en las expectativas de vida de los pensionados, que difícilmente pudo ser tomado en cuenta en los cálculos actuariales efectuados en 1942, como parte del anteproyecto de la ley del Seguro Social que dió vida al Instituto Mexicano del Seguro Social.

Estos cambios significan que la duración en el goce de las pensiones se ha incrementado en relación a los cálculos actuariales originales, convirtiéndose este factor en uno de los que tienen mayor participación en el desfinanciamiento que ya se vislumbra en el futuro; resultando paradójico el que en gran medida, hayan sido las propias Instituciones de Seguridad Social las principales causantes de los cambios observados, sobre todo en la primera y la tercera edad, elevándose además, el gasto médico por ser mayor el riesgo de desarrollar padecimientos crónicos.

4.1.2.2 REFORMAS.

Las diferencias entre el régimen de pensiones que se inició el 19 de enero de 1943 y el que estuvo vigente hasta el 31 de diciembre de 1990, muestran claramente otra de las causas del desequilibrio financiero:

a) Prestaciones que no existían en el régimen inicial.

- Pensiones dinámicas con respecto al Salario Mínimo a partir del 5 de enero de 1989.
- Pensiones al viudo incapacitado.
- Pensiones de ascendencia.
- Compatibilidad entre pensiones y trabajo remunerado.
- Ayuda asistencial al pensionado por atención médica, 20% más.
- Ayuda asistencial al pensionado por soledad, 15% más.
- Asignaciones familiares por la esposa, 15% más.
- Asignaciones familiares por los ascendientes, 10% más

a cada uno.

- Aguinaldo de 30 dias por año.
- Dote matrimonial.
- Gastos médicos a pensionados y sus derechohabientes.
- Prestaciones Sociales.
- Cuantía mínima en porcentaje del Salario.

b) Prestaciones cuyo costo éra inferior al del régimen vigente.

- Incremento en 125% al nivel original de la pensión de viudez.
- Incremento en 110% al nivel original de la cuantía mínima.
- 33.33% adicionales a la cuantía mínima por cesantía en edad avanzada.
- La cuantía básica de las pensiones directas se elevó del 20% al 35%.
- Los aumentos a las pensiones del 1% al 1.25% del salario base, por cada 52 semanas cotizadas, con posterioridad a las primeras 500.
- Las pensiones de orfandad se otorgaban hasta los 16 años, ahora hasta los 25 si estudia y vitalicia si se encuentra incapacitado.

- El tiempo de espera para invalidez o muerte se redujo de 200 a 150 semanas de cotización.
- El tiempo de espera para vejez o cesantía disminuyó de 700 a 500 semanas de cotización.
- Anteriormente era mayor el porcentaje de reducccíón aplicado a las pensiones por cesantía en edad avanzada.
- Reducciones en las limitaciones para pensionarse por viudez.

Todas las reformas mencionadas a la ley original, se otorgaron sin el correspondiente aumento a la cuota, permaneciendo durante 47 años en el 6% de los salarios de cotización, provocándose un fuerte desequilibrio financiero a largo plazo de no tomarse las medidas pertinentes para recuperar el equilibrio necesario para financiar los gastos del régimen de pensiones, ya que sobre todo, las reformas que se dieron a partir del 5 de enero de 1989 - pensiones dinámicas, aumentos en más del 100% - contribuirán al fuerte aceleramiento en el incremento del gasto por pensiones, de tal forma que el incremento de la cuota al 7% de los salarios de cotización en 1991, y sus incrementos de 0.2% hasta llegar al 8% en 1996, serán solo suficientes para reestablecer parcialmente el equilibrio.

A partir de la reforma a la Ley del Seguro Social vigente desde el 5 de enero de 1989, los ingresos del Instituto, en el Seguro de Enfermedades y Maternidad se han visto aumentados en un 3% de los salarios de cotización, lo que permite por primera vez tener la posibilidad de alcanzar en el futuro, el equilibrio financiero en este ramo, desfinanciado a partir del cuarto año de operación del Instituto, es decir, desde 1947; terminándose de hecho con esta acción la transferencia de recursos de pensiones hacia los servicios médicos. La distribución de cuotas para el ramo de Enfermedades y Maternidad sería: patronal del 8.40%; trabajadores del 3% y Estado del 0.60%.

En esta forma, el Estado Mexicano dió el primer gran paso en la consolidación financiera del principal pilar de su Sistema de Seguridad Social, sin olvidar el compromiso que hizo en su campaña el Presidente Salinas con los pensionados, al reformarse la cuantía mínima de las pensiones en un nivel equivalente al del 90% del salario mínimo general del Distrito Federal.

Se elevó a rango de la Ley el aguinaldo anual, en un 100% para quedar en un mes completo del monto de la pensión, en lugar de ser una quincena como estaba previsto.

También, se modificó que las pensiones por invalidez, vejez o cesantía en edad avanzada, incluyendo el importe de las asignaciones familiares y ayudas asistenciales, puedan alcanzar con suficientes semanas de cotización reconocidas el 100% del salario promedio base.

Para sufragar las erogaciones derivadas de los incrementos que antes se mencionan y garantizar su continuidad, se aumentaron las cuotas respectivas en forma proporcional atendiendo el espíritu de la Ley, de soportar mediante contribución tripartita los diversos seguros.

El aumento contemplado en un total del 2% se aplicó en un 1% de inmediato y la diferencia mediante incrementos graduales del 0.2% anual hata que se alcance dicho porcentaje en 1996, según está previsto en el artículo transitorio correspondiente, con la finalidad de atenuar su impacto en la planta productiva del país y en este lapso se puedan realizar oportunamente los ajustes del caso.

Para fortalecer, facilitar, controlar, mejorar la distribución de los recursos y dar mayor transparencia al manejo de cada uno de los ramos de seguros, se llevará su registro contable de ingresos y egresos por separado, en las cifras consolidadas, señalándose expresamente que sus respectivos recursos deben utilizarse para cubrir las prestaciones derivadas exclusivamente del seguro de que se trate.

Se hizo indispensable que las primas correspondientes al Seguro de Riesgos de Trabajo se adecuarán, ya que al estar referidas al importe de las cuotas obrero-patronales del seguro de invalidez, vejez, cesantía en edad avanzada y muerte, el incremento de éstas les afectaria, lo que constituye un inconveniente que fue necesario solucionar, facilitando a la vez el cumplimiento en el pago de esta cuota, a través de fijar porcentajes directamente aplicables al salario base de cotización, sin alterar los importes de la cuota, lográndose un ahorro significativo en gastos y trámites administrativos tanto para el Instituto como para los sujetos obligados.

4.1.2.3 RESERVAS.

El Instituto se constituyó sin capital, y aún antes de realizar el primer cobro de cuotas, comenzó a otorgar prestaciones en especie y en dinero; en consecuencia, durante los primeros años le fue imposible destinar fondos para la constitución de las reservas, ya que era incongruente el que se contara con reservas financieras sin tener las instalaciones necesarias para la prestación de los servicios.

Hasta 1980, se inició la constitución formal de las reservas correspondiente a los ramos de pensiones, para lo cual, fue necesario adoptar el Sistema de Primas Escalonadas, ya que las condiciones requeridas por los sistemas originales, respecto a reservas no se cumplieron por haberse destinado los remanentes en su totalidad a inversiones en infraestructura.

Los ingresos y egresos de cada uno de los ramos de seguro que maneja el Instituto sólo podrán utilizarse para cubrir las prestaciones y reservas que correspondan a cada uno de los respectivos ramos. En todos los casos, la diferencia del importe de las cuotas del seguro de invalidez, vejez, cesantía en edad avanzada y muerte, y demás ingresos de dicho ramo, por un lado, y el pago de las prestaciones y demás egresos del mismo, por el otro, se aplicará a incrementar la reserva respectiva, que deberá invertirse en activos financieros y el producto que se obtenga de su inversión se destinará exclusivamente para cubrir las prestaciones del mencionado ramo de seguro.

4.1.2.4 CARRERA SALARIAL.

Otro factor de desequilibrio es el no tomar con la debida precisión el monto efectivamente pagado a cuenta de los futuros beneficios para la determinación de sus propias cuantías, situación que se agrava cuando la base de las aportaciones es el salario del trabajador asegurado, puesto que los montos de las pensiones se fijan a partir del último o de los últimos salarios de contribución, habiendo sido normalmente menores los que sirvieron como base a las aportaciones; y si además, se incluyen los casos de evasión parcial o total que se dan con cierta frecuencia, será muy difícil, alcanzar o seguir conservando indefinidamente el aparente equilibrio financiero.

Es importante considerar la carrera salarial de cada individuo como asegurado para determinar el monto de su pensión, para ser realmente equitativos. De otro modo, saldrá favorecido generalmente, el que menos aporta en términos de su último salario, es decir, aquel cuyo salario inicial sea más pequeño respecto al salario final.

En la búsqueda por mejorar la situación actual del trabajador mexicano, se estableció el S.A.R., que como ya sabemos se sustenta en el Sistema Financiero de Capitalización Individual. En el futuro se piensa continuar con este Sistema cada vez de una forma más independiente, por lo que consideramos valioso nuestro análisis del Sistema de Capitalización Individual.

4.2 CALCULO DE LA SUMA TOTAL BAJO EL SUPUESTO DE UNA POBLACION REAL.

La Población Real que hemos considerado es la Población cubierta por el Régimen Obligatorio del IMSS, agrupada por quinquenios de edad.

Tomando en consideración las condiciones simples establecidas en el Capítulo II, para no complicar demasiado los cálculos, las hipótesis que manejaremos serán las siguientes:

- La vida activa comienza a la edad de 15 años, la cual correponde a la variable α utilizada en las fórmulas y el inicio del periodo de retiro comienza a la edad de 65 años marcado por la Ley del IMSS, el cual corresponde a la variable β. La edad límite de vida designada por ω serán los 100 años.

- El salario S es el mismo para todos y no varía al paso del tiempo, lo que significa que no hay promociones ni progreso en el nivel de vida.

- No hay inflación y las sumas invertidas reportan un interés r, manejamos para el interés porcentajes del 0% al 5%, para tener una visión más general.

- Existe una única Caja Aseguradora para el conjunto de la Población, en éste ejemplo numérico podemos considerar al IMSS cumpliendo tal función.

- La jubilación entregada es igual al último salario.

Para ésta Sección, estas condiciones son fijas, sin olvidar que en la Sección 4.4 pretendemos apegarnos a la realidad por lo que estas hipótesis simplificadoras serán reemplazadas por otras.

4.2.1 CALCULO DEL CAPITAL PROMEDIO PARA CADA SOBREVIVIENTE PARA EDADES EN LA VIDA ACTIVA Y POSTERIORES A LA EDAD DE RETIRO.

Las fórmulas que nos dan el capital promedio para cada sobreviviente, se dan en la Sección 3.1. y se identifican con los números (11) y (12) respectivamente.

$$F(x) = k \frac{e^{rx}}{p(x)} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rt}\, p(t)\, dt \qquad \alpha < x < \beta$$

$$R(x) = \frac{e^{rx}}{p(x)} \int_{x}^{v} e^{-rt}\, p(t)\, dt \qquad \beta < x < \omega$$

Las tablas que nos han servido como base son las Tablas-Tipo de Mortalidad de Coale y Demeney correspondientes a la Familia Oeste, por considerar que son las más empleadas en las estimaciones demográficas, principalmente por su flexibilidad y por el hecho que no reflejan ninguna mortalidad regional. Además, para los fines de análisis que aquí nos ocupan, los resultados no diferirían muy marcadamente si variaramos el Modelo Regional Base.

Un dato importante es la esperanza de vida que prevalece en México, tanto femenina como masculina, por lo que manejamos esperanza de vida masculina al nacimiento de aproximadamente 68.57 años, y esperanza de vida femenina al nacimiento de aproximadamente 72.5 años. Las Tablas-Tipo de Coale y Demeney que corresponden a éstas esperanzas de vida son las del Nivel 22, dichas tablas se pueden consultar al final del Anexo III.

Para la Ecuación (11), la suma de la columna de las L(x) en los intervalos correspondientes multiplicada por e^{-rt}, nos proporciona el valor de:

$$\int_{\alpha}^{x} e^{-rt} p(t)\, dt.$$

Posteriormente, necesitamos calcular el valor de k, que es la cotización necesaria para el Financiamiento de Retiro por medio del Sistema de Capitalización, el cual está dado por la Ecuación (8):

$$k = \frac{\int_{\beta}^{v} e^{-rx}\ p(x)\ dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\ p(x)\ dx}$$

El valor de p(x) que se encuentra fuera de la integral, corresponde a los sobrevivientes a la edad x, se obtiene directamente de la columna de la Tabla-Tipo de Coale y Demeney correspondiente a l(x).

Finalmente, se realiza el producto de todos los términos y obtenemos el valor por quinquenios de F(x) para cinco tasas de interés.

Para la Ecuación (12), seguimos el procedimiento señalado para la Ecuación (11), a excepción de que no necesitamos calcular el valor de k, debido a que los sobrevivientes de edades posteriores a la edad de retiro, ya no realizan aportación alguna.

Para los valores de $R(x)$ correspondientes a la tasa de interés $r = 0\%$, verificamos la igualdad establecida en la Sección 3.1.2, donde:

$$R(x) = e(x)$$

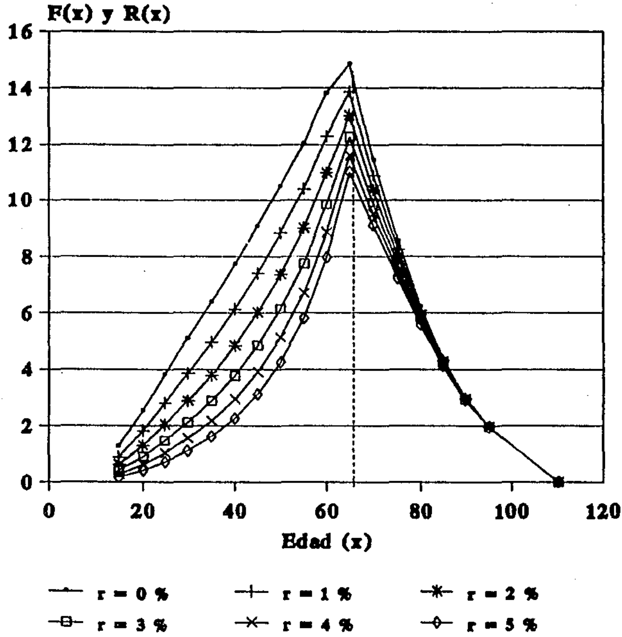
A continuación, se encuentra una tabla que nos proporciona los valores de $F(x)$ y $R(x)$ para la Tabla-Tipo de Mortalidad Femenina Serie Oeste con esperanza de vida al nacimiento de 72.5 años y su gráfica correspondiente.

Además tenemos la tabla que corresponde a los valores de $F(x)$ y $R(x)$ para la Tabla-Tipo de Mortalidad Masculina Serie Oeste con esperanza de vida al nacimiento de 68.57 años y su gráfica correspondiente.

Valores de F(x) y R(x) para la Tabla-Tipo de Mortalidad Femenina Serie Oeste (72.5 años) y seis tasas de interés.

x años	*Tasas de interés*					
	0	1	2	3	4	5
15-19	1.267	0.884	0.608	0.411	0.274	0.181
20-24	2.536	1.816	1.281	0.890	0.611	0.414
25-29	3.812	2.800	2.028	1.450	1.023	0.714
30-34	5.097	3.842	2.860	2.103	1.530	1.102
35-39	6.393	4.947	3.787	2.870	2.155	1.605
40-44	7.710	6.126	4.827	3.773	2.928	2.258
45-49	9.063	7.398	6.004	4.846	3.893	3.116
50-54	10.489	8.800	7.363	6.145	5.118	4.256
55-59	12.040	10.391	8.973	7.753	6.705	5.803
60-64	13.816	12.279	10.958	9.818	8.829	7.967
65-69	14.845	13.869	13.012	12.256	11.586	10.992
70-74	11.440	10.867	10.353	9.891	9.474	9.097
75-79	8.535	8.229	7.948	7.691	7.455	7.238
80-84	6.224	6.077	5.940	5.813	5.695	5.584
85-89	4.378	4.318	4.262	4.209	4.159	4.112
90-94	2.980	2.961	2.943	2.926	2.910	2.895
95-100	1.971	1.967	1.963	1.960	1.956	1.953

Valores de F(x) y R(x) para la Tabla-Tipo de Mortalidad Femenina

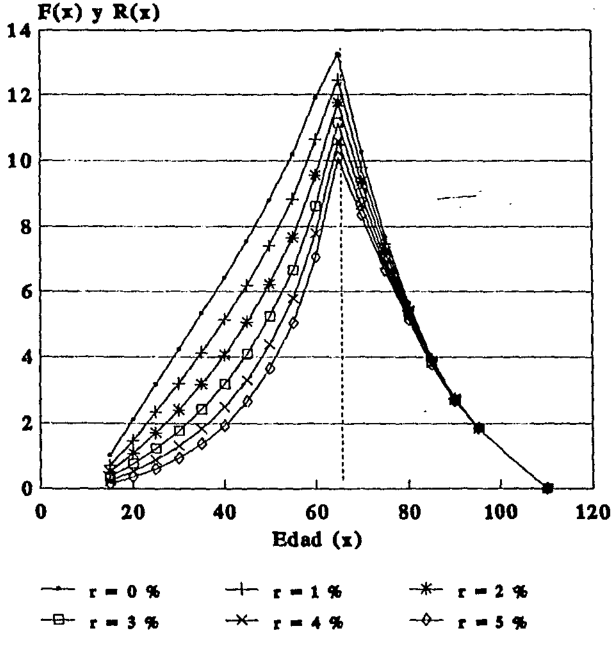


Serie Oeste (72.5)

Valores de F(x) y R(x) para la Tabla-Tipo de Mortalidad Masculina Serie Oeste (68.57 años) y seis tasas de interés.

x *años*	*Tasas de interés*					
	0	1	2	3	4	5
15-19	1.016	0.712	0.506	0.344	0.223	0.148
20-24	2.100	1.458	1.069	0.745	0.513	0.349
25-29	3.163	2.332	1.696	1.216	0.861	0.603
30-34	4.232	3.203	2.394	1.767	1.290	0.932
35-39	5.313	4.128	3.173	2.413	1.819	1.359
40-44	6.413	5.117	4.048	3.177	2.476	1.916
45-49	7.555	6.194	5.048	4.091	3.300	2.650
50-54	8.783	7.404	6.223	5.216	4.362	3.642
55-59	10.175	8.829	7.663	6.653	5.779	5.024
60-64	11.892	10.637	9.549	8.603	7.777	7.052
65-69	13.260	12.469	11.769	11.137	10.584	10.089
70-74	10.251	9.788	9.371	8.994	8.651	8.340
75-79	7.696	7.449	7.222	7.014	6.822	6.646
80-84	5.631	5.514	5.404	5.302	5.207	5.118
85-89	3.989	3.942	3.897	3.855	3.816	3.779
90-94	2.749	2.734	2.720	2.706	2.694	2.682
95-100	1.849	1.846	1.843	1.840	1.837	1.835

Valores de F(x) y R(x) para la
Tabla-Tipo de Mortalidad Masculina



Serie Oeste (68.57)

4.2.2 CALCULO DE LAS SUMAS TOTALES QUE POSEE LA CAJA EXPRESADAS EN SALARIOS ANUALES.

La mortalidad femenina y masculina en México es inmediata a las Tablas-Tipo utilizadas para el cálculo de los coeficientes de las tablas anteriores correspondientes a los valores de F(x) y R(x). Se puede entonces aplicar a los efectivos de la Población cubierta por el Régimen Obligatorio del IMSS al 31 de diciembre de 1991 para calcular la suma total que posee la Caja.

A continuación, se encuentra la Población cubierta por el Régimen Obligatorio del IMSS, agrupada por quinquenios y sexo.

Posteriormente, se encuentra la tabla que proporciona los detalles del cálculo de las Sumas Totales que posee la Caja expresadas en salarios anuales para cinco tasas de interés que van del 0% al 5%, tanto para la Población Masculina, como para la Femenina del IMSS.

REGIMEN OBLIGATORIO DEL IMSS
ASEGURADOS Y PENSIONADOS

EDAD	MUJERES	HOMBRES
15-19	402,744	535,508
20-24	772,276	1,312,692
25-29	611,346	1,362,647
30-34	429,453	1,104,998
35-39	306,339	849,103
40-44	200,113	610,934
45-49	126,829	441,698
50-54	79,909	316,231
55-59	53,507	236,257
60-65	27,762	118,301
65-69	36,383	137,449
70-74	28,642	82,471
75-79	20,274	46,885
80-84	11,740	21,487
85-89	4,278	8,439
90-94	1,195	2,531
95-100	237	386
	3,113,026	7,187,917
TOTAL		10,300,943

Población Femenina en el Régimen Obligatorio del IMSS al 31 de diciembre de 1991.

Sumas Totales que posee la Caja expresadas en Salarios Anuales

Edad	Efectivos	Coef. r = 0%	Suma Total por Edad	Coef. r = 1%	Suma Total por Edad	Coef. r = 2%	Suma Total por Edad
15-19	402,744	1.267	510,157.3	0.884	356,099.1	0.608	244,699.5
20-24	772,276	2.536	1,958,835.3	1.816	1,402,416.4	1.281	989,060.3
25-29	611,345	3.812	2,330,699.2	2.800	1,711,941.0	2.028	1,239,964.7
30-34	429,453	5.097	2,188,842.0	3.842	1,649,900.4	2.860	1,228,143.6
35-39	306,339	6.393	1,958,470.8	4.947	1,515,406.8	3.787	1,160,103.2
40-44	200,113	7.710	1,542,842.9	6.126	1,225,887.4	4.827	965,862.7
45-49	126,829	9.063	1,149,464.7	7.398	938,264.1	6.004	761,446.0
50-54	79,909	10.489	838,161.2	8.800	703,231.5	7.363	588,383.4
55-59	53,507	12.040	644,230.7	10.391	556,005.4	8.973	480,127.7
60-64	27,762	13.816	383,564.7	12.279	340,884.3	10.958	304,213.1
65-69	36,383	14.845	540,100.4	13.869	504,611.9	13.012	473,416.3
70-74	28,642	11.440	327,648.1	10.867	311,252.1	10.353	296,534.9
75-79	20,274	8.535	173,047.1	8.229	166,825.8	7.948	161,136.2
80-84	11,740	6.224	73,070.0	6.077	71,342.0	5.940	69,736.7
85-89	4,278	4.378	18,729.1	4.318	18,473.1	4.262	18,232.4
90-94	1,195	2.980	3,562.5	2.961	3,539.7	2.943	3,518.2
95-100	237	1.971	466.7	1.967	465.8	1.963	464.9
15-w	3,113,026	Total:	14,641,892.5	Total:	11,476,546.7	Total:	8,985,043.9
15-64	3,010,277						
65-w	102,749						

Edad	Efectivos	Coef. r = 3%	Suma Total por Edad	Coef. r = 4%	Suma Total por Edad	Coef. r = 5%	Suma Total por Edad
15-19	402,744	0.411	165,635.0	0.274	110,546.5	0.181	72,834.7
20-24	772,276	0.890	687,536.6	0.611	471,633.7	0.414	319,447.0
25-29	611,345	1.450	886,147.6	1.023	625,449.0	0.714	436,502.8
30-34	429,453	2.103	903,318.2	1.530	657,105.9	1.102	473,303.5
35-39	306,339	2.870	879,140.1	2.155	660,078.8	1.605	491,573.8
40-44	200,113	3.773	754,972.6	2.928	585,926.0	2.258	451,940.2
45-49	126,829	4.846	614,629.2	3.893	493,778.9	3.116	395,140.7
50-54	79,909	6.145	491,053.3	5.118	408,977.1	4.256	340,107.5
55-59	53,507	7.753	414,859.7	6.705	358,743.0	5.803	310,527.0
60-64	27,762	9.818	272,555.9	8.829	245,101.0	7.967	221,183.8
65-69	36,383	12.256	445,898.1	11.586	421,540.9	10.992	399,910.5
70-74	28,642	9.891	283,291.8	9.474	271,346.6	9.097	260,546.8
75-79	20,274	7.691	155,924.4	7.455	151,142.7	7.238	146,748.8
80-84	11,740	5.813	68,243.8	5.695	66,854.2	5.584	65,559.6
85-89	4,278	4.209	18,005.9	4.159	17,792.8	4.112	17,592.0
90-94	1,195	2.926	3,497.8	2.910	3,478.5	2.895	3,460.2
95-100	237	1.960	464.0	1.956	463.2	1.953	462.4
15-w	3,113,026	Total:	7,045,174.1	Total:	5,549,858.6	Total:	4,406,841.2
15-64	3,010,277						
65-w	102,749						

Población Masculina en el Régimen Obligatorio del IMSS al 31 de diciembre de 1991.

Sumas Totales que posee la Caja expresadas en Salarios Anuales

Edad	Efectivos	Coef. r = 0%	Suma Total por Edad	Coef. r = 1%	Suma Total por Edad	Coef. r = 2%	Suma Total por Edad
15-19	535,508	1.016	543,948.4	0.712	381,168.7	0.506	271,201.1
20-24	1,312,592	2.100	2,756,695.6	1.458	1,914,207.1	1.069	1,402,627.2
25-29	1,362,647	3.163	4,309,376.5	2.332	3,177,966.7	1.696	2,310,550.9
30-34	1,104,998	4.232	4,676,712.0	3.203	3,539,530.6	2.394	2,644,917.4
35-39	849,103	5.313	4,511,307.3	4.128	3,505,189.5	3.173	2,693,946.4
40-44	610,934	6.413	3,918,102.3	5.117	3,126,442.0	4.048	2,473,279.0
45-49	441,698	7.555	3,336,844.0	6.194	2,735,845.3	5.048	2,229,667.7
50-54	316,231	8.783	2,777,406.8	7.404	2,341,427.9	6.223	1,967,936.3
55-59	236,257	10.175	2,403,858.9	8.829	2,085,836.1	7.663	1,810,350.4
60-64	118,301	11.892	1,406,838.8	10.637	1,258,321.6	9.549	1,129,683.6
65-69	137,449	13.250	1,821,256.5	12.459	1,712,510.2	11.759	1,616,266.7
70-74	82,471	10.251	845,404.6	9.788	807,270.6	9.371	772,852.1
75-79	46,885	7.696	360,822.7	7.449	349,248.4	7.222	338,619.2
80-84	21,487	5.631	121,000.8	5.514	118,477.8	5.404	116,127.2
85-89	8,439	3.989	33,664.0	3.942	33,265.1	3.897	32,889.4
90-94	2,531	2.749	6,956.6	2.734	6,918.9	2.720	6,883.1
95-100	386	1.849	714.2	1.846	713.0	1.843	711.8
15-w	7,187,917	Total:	33,830,909.9	Total:	27,094,339.3	Total:	21,818,509.5
15-64	6,888,269						
65-w	299,648						

Edad	Efectivos	Coef. r = 3%	Suma Total por Edad	Coef. r = 4%	Suma Total por Edad	Coef. r = 5%	Suma Total por Edad
15-19	535,508	0.344	184,224.9	0.223	119,596.2	0.148	79,057.3
20-24	1,312,592	0.745	978,516.6	0.513	673,413.2	0.349	457,734.5
25-29	1,362,647	1.216	1,657,256.3	0.861	1,173,805.9	0.603	821,980.0
30-34	1,104,998	1.767	1,952,586.2	1.290	1,425,457.5	0.932	1,030,283.1
35-39	849,103	2.413	2,049,233.6	1.819	1,544,230.9	1.359	1,154,079.1
40-44	610,934	3.177	1,940,778.9	2.475	1,511,871.2	1.916	1,170,374.1
45-49	441,698	4.091	1,807,062.9	3.300	1,457,423.5	2.650	1,170,675.6
50-54	316,231	5.216	1,649,526.3	4.362	1,379,526.4	3.642	1,151,786.1
55-59	236,257	6.653	1,571,788.5	5.779	1,365,378.9	5.024	1,186,972.1
60-64	118,301	8.603	1,017,773.6	7.777	920,000.7	7.052	834,225.7
65-69	137,449	11.137	1,530,813.0	10.584	1,454,701.3	10.089	1,386,704.6
70-74	82,471	8.994	741,716.6	8.651	713,489.2	8.340	687,843.8
75-79	46,885	7.014	328,843.4	6.822	319,839.5	6.645	311,535.2
80-84	21,487	5.302	113,935.2	5.207	111,889.4	5.118	109,978.5
85-89	8,439	3.855	32,535.5	3.816	32,201.8	3.779	31,887.1
90-94	2,531	2.706	6,849.2	2.694	6,817.0	2.682	6,786.5
95-100	386	1.840	710.7	1.837	709.6	1.835	708.6
15-w	7,187,917	Total:	17,564,151.3	Total:	14,210,352.2	Total:	11,592,611.8
15-64	6,888,269						
65-w	299,648						

4.2.3 CALCULO DE LA RAZON QUE POSEE LA CAJA EXPRESADO EN TERMINOS DE LA MASA SALARIAL.

De las tablas anteriores correspondientes a las Sumas Totales que posee la Caja expresadas en salarios anuales, podemos obtener directamente los resultados siguientes:

Para la Población Femenina del Régimen Obligatorio del IMSS:

Tasa de Interés	Total que posee la Caja
5%	4'406,841.2 * S
4%	5'549,858.6 * S
3%	7'045,174.1 * S
2%	8'985,043.9 * S
1%	11'476,546.7 * S
0%	14'641,892.5 * S

Para la Población Masculina del Régimen Obligatorio del IMSS:

Tasa de Interés	Total que posee la Caja
5%	11'592,611.8 * S
4%	14'210,352.2 * S
3%	17'564,151.3 * S
2%	21'818,509.5 * S
1%	27'094,339.3 * S
0%	33'830,909.9 * S

La masa salarial anual total es igual a los efectivos de 20 a 64 años, multiplicados por el salario S, es decir:

La masa salarial anual total femenina es:

3'010,277 * S

La masa salarial anual total masculina es:

6'888,269 * S

La razón de la suma que posee la Caja a la masa salarial anual es entonces:

Razón de la Suma que posee la Caja a la Masa Salarial Anual del Régimen Obligatorio del I.M.S.S.

Población Femenina

$$\frac{14,641,892.5\ S}{3,010,277\ S} = 4.86 \quad \text{para } r = 0\%$$

$$\frac{11,476,546.7\ S}{3,010,277\ S} = 3.81 \quad \text{para } r = 1\%$$

$$\frac{8,985,043.9\ S}{3,010,277\ S} = 2.98 \quad \text{para } r = 2\%$$

$$\frac{7,045,174.1\ S}{3,010,277\ S} = 2.34 \quad \text{para } r = 3\%$$

$$\frac{5,549,858.6\ S}{3,010,277\ S} = 1.84 \quad \text{para } r = 4\%$$

$$\frac{4,406,841.2\ S}{3,010,277\ S} = 1.46 \quad \text{para } r = 5\%$$

Población Masculina

$$\frac{33,830,909.9\ S}{6,888,269\ S} = 4.91 \quad \text{para } r = 0\%$$

$$\frac{27,094,339.3\ S}{6,888,269\ S} = 3.93 \quad \text{para } r = 1\%$$

$$\frac{21,818,509.5\ S}{6,888,269\ S} = 3.17 \quad \text{para } r = 2\%$$

$$\frac{17,564,161.3\ S}{6,888,269\ S} = 2.55 \quad \text{para } r = 3\%$$

$$\frac{14,210,352.2\ S}{6,888,269\ S} = 2.06 \quad \text{para } r = 4\%$$

$$\frac{11,592,611.8\ S}{6,888,269\ S} = 1.68 \quad \text{para } r = 5\%$$

Actualmente, la masa salarial anual total del país representa el 23% del PIB. Generalmente el patrimonio de una nación es igual a cuatro o cinco veces la masa salarial; en el caso específico de México, con 4.34 veces la masa salarial anual obtendríamos el patrimonio de la nación.

Sin embargo, nuestro ejemplo numérico no se refiere al total de la Población Activa Mexicana, sino solamente a la Población cubierta por el Régimen Obligatorio del IMSS, en éste caso, la masa salarial del IMSS representa el 10.5% del PIB, por lo que necesitamos multiplicar la razón que posee la Caja del Sistema de Retiro por Capitalización con respecto a la masa salarial anual, por 2.19% para así poder comparar los resultados obrenidos con el patrimonio de la nación.

Para la Población Femenina obtenemos:

Tasa de Interés	Razón que posee la Caja
0%	10.64
1%	8.34
2%	6.53
3%	5.12
4%	4.03
5%	3.20

Para la Población Masculina obtenemos:

Tasa de Interés	Razón que posee la Caja
0%	10.75
1%	8.61
2%	6.94
3%	5.58
4%	4.51
5%	3.68

Así la Caja tendrá de 3.20 a 10.75 veces la masa salarial anual siempre que la tasa de interés esté comprendida entre el 5% y el 0% , ya sea que el resultado se obtenga a partir de una población femenina o masculina. Esta es una cantidad considerable, cuando se admite que el patrimonio de la nación es igual a 4.34 veces la masa salarial.

4.3 CALCULO DE LA SUMA TOTAL BAJO EL SUPUESTO DE UNA POBLACION ESTABLE.

4.3.1 CALCULO DE LA SUMA QUE POSEE LA CAJA PARA EL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DEL SISTEMA DE CAPITALIZACION A SUMA NULA.

Si se cuenta con una red de Poblaciones Estables, se puede obtener la razón de la suma que posee la Caja a la masa salarial anual para una gran variedad de situaciones. En nuestro caso, nos interesa que posea la característica de tener una esperanza de vida al nacimiento de 72.5 para las mujeres o esperanza de vida al nacimiento de 68.57 para los hombres.

La razón de la suma que posee la Caja a la masa salarial anual está dada por:

$$\frac{A + B}{\Sigma} = \frac{h - k}{r - p}$$

Se identifica como la Ecuación (14) y podemos encontrarla en la Sección 3.2.

Para resolver el numerador necesitamos encontrar las cotizaciónes para el Financiamiento de Retiro por medio del Sistema de Reparto y por medio del Sistema de Capitalización, las cuales están dadas por:

$$k = \frac{\int_{\beta}^{v} e^{-rx}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx}$$

$$h = \frac{\int_{\beta}^{v} e^{-r\rho}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-r\rho}\, p(x)\, dx}$$

Se identifican como ecuaciones (5) y (ρ) respectivamente.

Como se mencionó en la Sección 3.2., la obra de Coale y Demeney suministra precisamente las redes con las que se calculan las series de Poblaciones Estables al asociar a las Tablas-Tipo de Mortalidad, una serie de tasas de variación, con la otra se calcula una segunda serie de Poblaciones

Estables, al asociar a las Tablas-Tipo de Mortalidad una serie de Tasas Brutas de Reproducción. La primera red permite calcular k y la segunda h.

En la Sección 4.2, se mencionó el procedimiento para calcular k, ahora mencionaremos el procedimiento para calcular h:

- En la obra de Coale y Demeney existe una sección de tablas que en base a la Tasa Bruta de Reproducción nos proporcionan la Tasa Intrínseca de Crecimiento Natural ρ, necesaria para el cálculo de h. Por lo tanto, basta ubicar el Nivel 22 que corresponde a la esperanza de vida femenina y sustituir el valor de ρ, de la misma manera que sustituimos el valor de la tasa de interés r para nuestros cálculos de k.

Para resolver el denominador de la ecuación (14), necesitamos sustituir los valores de la tasa de intéres y de la Tasa de Crecimiento Natural.

La parte de la tabla que nos proporciona las Tasas Intrínsecas de Crecimiento Natural correspondientes a las Tasas Brutas de Reproducción es la siguiente:

MODELO OESTE

MUJERES

NIVEL DE MORTALIDAD 22

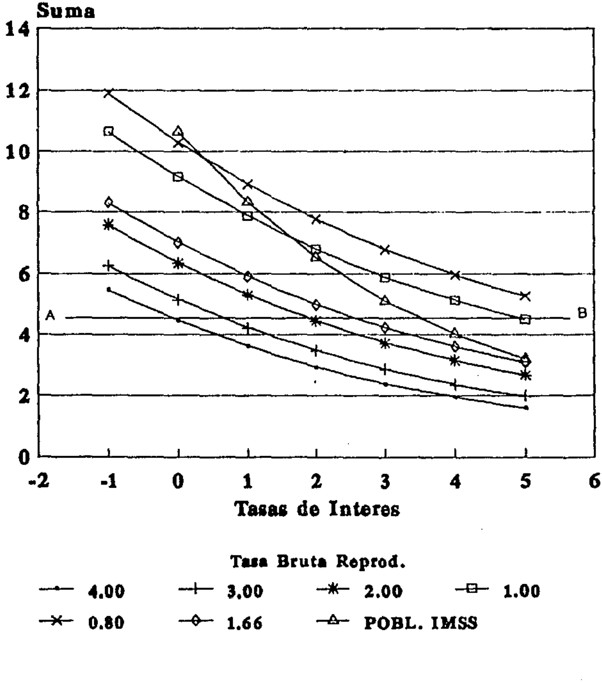
GRR(29) =	0.80	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00
TASA DE CRECIMIENTO =	-9.16	-1.53	22.83	37.53	48.17	56.54

A modo de ejemplo, a continuación se tiene dispuesta la tabla que corresponde a los cálculos detallados para el fondo que posee la Caja dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización a Suma Nula de la Tabla-Tipo de Mortalidad Femenina de la Serie Oeste que tiene una esperanza de vida al nacimiento de 72.5 años y su gráfica respectiva.

Caja dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización a suma nula.
Cálculos detallados para la Tabla-Tipo de Mortalidad Femenina de
Coale y Demeney, (serie Oeste): Esperanza de vida al nacer = 72.5 años.

Tasa Bruta Reprod	Tasa interés r	Tasa Crec. p	r - p %	h %	k %	h - k %	h - k / r - p
4.00	5	4.817	0.183	3.91	3.62	0.29	1.58
	4	4.817	-0.817	3.91	5.50	-1.59	1.95
	3	4.817	-1.817	3.91	8.24	-4.33	2.38
	2	4.817	-2.817	3.91	12.17	-8.26	2.93
	1	4.817	-3.817	3.91	17.71	-13.8	3.62
	0	4.817	-4.817	3.91	25.37	-21.46	4.46
	-1	4.817	-5.817	3.91	35.78	-31.87	5.48
3.00	5	3.753	1.247	6.08	3.62	2.46	1.97
	4	3.753	0.247	6.08	5.50	0.58	2.35
	3	3.753	-0.753	6.08	8.24	-2.16	2.87
	2	3.753	-1.753	6.08	12.17	-6.09	3.47
	1	3.753	-2.753	6.08	17.71	-11.63	4.22
	0	3.753	-3.753	6.08	25.37	-19.29	5.14
	-1	3.753	-4.753	6.08	35.78	-29.7	6.25
2.00	5	2.283	2.717	10.91	3.62	7.29	2.68
	4	2.283	1.717	10.91	5.50	5.41	3.15
	3	2.283	0.717	10.91	8.24	2.67	3.72
	2	2.283	-0.283	10.91	12.17	-1.26	4.45
	1	2.283	-1.283	10.91	17.71	-6.8	5.30
	0	2.283	-2.283	10.91	25.37	-14.46	6.33
	-1	2.283	-3.283	10.91	35.78	-24.87	7.58
1.66	5	1.606	3.394	14.13	3.62	10.51	3.10
	4	1.606	2.394	14.13	5.50	8.63	3.60
	3	1.606	1.394	14.13	8.24	5.89	4.23
	2	1.606	0.394	14.13	12.17	1.96	4.97
	1	1.606	-0.606	14.13	17.71	-3.58	5.91
	0	1.606	-1.606	14.13	25.37	-11.24	7.00
	-1	1.606	-2.606	14.13	35.78	-21.65	8.31
1.00	5	-0.153	5.153	26.77	3.62	23.15	4.49
	4	-0.153	4.153	26.77	5.50	21.27	5.12
	3	-0.153	3.153	26.77	8.24	18.53	5.88
	2	-0.153	2.153	26.77	12.17	14.6	6.78
	1	-0.153	1.153	26.77	17.71	9.06	7.86
	0	-0.153	0.153	26.77	25.37	1.4	9.15
	-1	-0.153	-0.847	26.77	35.78	-9.01	10.64
0.80	5	-0.916	5.916	34.78	3.62	31.16	5.27
	4	-0.916	4.916	34.78	5.50	29.28	5.96
	3	-0.916	3.916	34.78	8.24	26.54	6.78
	2	-0.916	2.916	34.78	12.17	22.61	7.75
	1	-0.916	1.916	34.78	17.71	17.07	8.91
	0	-0.916	0.916	34.78	25.37	9.41	10.27
	-1	-0.916	-0.084	34.78	35.78	-1	11.90

SUMA QUE POSEE LA CAJA DE RETIRO PARA SIETE TASAS DE INTERES



EXPRESADA EN MASA SALARIAL ANUAL

Hasta este momento, hemos calculado la razón que posee la Caja a la masa salarial anual con fórmulas exactas, pero existen algunas aproximaciones que facilitan el procedimiento, por lo que realizaremos para efectos de comparación los cálculos correspondientes.

Las aproximaciones para k están dadas por las Ecuaciones (5.I) y (5.II) y las aproximaciones para h están dadas por las Ecuaciones (9.I) y (9.II), así como la aproximación para la Razón que posee la Caja a la masa salarial está dada por la Ecuación (14.I) y es:

$$\frac{h - k}{r - p} = \frac{k_o}{r - p} \left[\exp\,(pm - p^2 v) - \exp\,(rm - r^2 v) \right]$$

Al analizar a la Familia Oeste de Tablas-Tipo de mortalidad Keyfitz y Gomez de León, encontraron que los parámetros m y v, se ligan linealmente a la esperanza de vida al nacimiento, y que esta relación no cambia en función del sexo. A continuación, se encuentra dispuesta la tabla que nos proporciona éstos valores para diferentes niveles de mortalidad:

VALORES DE -m, v, PARA DIFERENTES NIVELES DE MORTALIDAD DE LAS TABLAS-TIPO DE MORTALIDAD DE COALE Y DEMENEY

e(0)	*-m*	*v*
50.0	32.076	65.448
52.5	32.138	69.945
55.0	32.201	64.443
57.5	32.264	63.941
60.0	32.327	63.438
62.5	32.390	62.936
65.0	32.453	62.434
67.5	32.515	61.931
70.0	32.578	61.249
72.5	32.641	60.927
75.0	32.703	60.424
77.5	32.766	59.922

Para estimar los valores de m y v a partir de e_o, Keyfitz y Gómez de León sostienen que es suficiente con interpolar linealmente entre los valores correspondientes a la tabla anterior, y que los parámetros m y v del tablero anterior fueron obtenidos de un resultado de Tablas de Mortalidad Femenina, se pueden aplicar igualmente a la población masculina, es suficiente con utilizar el parámetro k_o masculino correspondiente.

A continuación, se encuentra la tabla que nos proporciona los valores obtenidos por medio de aproximaciones, de la razón que posee la Caja a la masa salarial. Y una tabla comparativa de los resultados exactos y aproximados:

Caja dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización a Suma Nula.
Tabla-Tipo de Mortalidad Femenina de Coale y Demeney, (Serie Oeste). Esperanza de vida = 72.5 años.

Tasa Bruta Reprod.	Tasa interés r	Tasa Creo. p	r − p %	1A APROX. h %	1A APROX. k %	h − k %	1A APROX. (h − k)/(r − p)	2A APROX. h %	2A APROX. k %	h − k %	2A APROX. (h − k)/(r − p)
4.00	5	4.817	0.183	5.27	4.96	0.31	1.69	4.57	4.26	0.31	1.69
	4	4.817	-0.817	5.27	6.88	-1.61	1.97	4.57	6.24	-1.67	2.04
	3	4.817	-1.817	5.27	9.53	-4.26	2.34	4.57	9.02	-4.45	2.45
	2	4.817	-2.817	5.27	13.21	-7.94	2.82	4.57	12.89	-8.32	2.95
	1	4.817	-3.817	5.27	18.30	-13.03	3.41	4.57	18.19	-13.62	3.57
	0	4.817	-4.817	5.27	25.37	-20.10	4.17	4.57	25.37	-20.80	4.32
	-1	4.817	-5.817	5.27	35.16	-29.89	5.14	4.57	34.95	-30.38	5.22
3.00	5	3.753	1.247	7.45	4.96	2.49	2.00	6.84	4.26	2.58	2.07
	4	3.753	0.247	7.45	6.88	0.57	2.31	6.84	6.24	0.60	2.43
	3	3.753	-0.753	7.45	9.53	-2.08	2.76	6.84	9.02	-2.18	2.90
	2	3.753	-1.753	7.45	13.21	-5.76	3.29	6.84	12.89	-6.05	3.45
	1	3.753	-2.753	7.45	18.30	-10.85	3.94	6.84	18.19	-11.35	4.12
	0	3.753	-3.753	7.45	25.37	-17.92	4.77	6.84	25.37	-18.53	4.94
	-1	3.753	-4.753	7.45	35.16	-27.71	5.83	6.84	34.95	-28.11	5.91
2.00	5	2.283	2.717	12.04	4.96	7.08	2.61	11.67	4.26	7.41	2.73
	4	2.283	1.717	12.04	6.88	5.16	3.01	11.67	6.24	5.43	3.16
	3	2.283	0.717	12.04	9.53	2.51	3.50	11.67	9.02	2.65	3.70
	2	2.283	-0.283	12.04	13.21	-1.17	4.13	11.67	12.89	-1.22	4.31
	1	2.283	-1.283	12.04	18.30	-6.26	4.88	11.67	18.19	-6.52	5.08
	0	2.283	-2.283	12.04	25.37	-13.33	5.84	11.67	25.37	-13.70	6.00
	-1	2.283	-3.283	12.04	35.16	-23.12	7.04	11.67	34.95	-23.28	7.09
1.66	5	1.609	3.391	15.00	4.96	10.04	2.96	14.77	4.26	10.51	3.10
	4	1.609	2.391	15.00	6.88	8.12	3.40	14.77	6.24	8.53	3.57
	3	1.609	1.391	15.00	9.53	5.47	3.93	14.77	9.02	5.75	4.13
	2	1.609	0.391	15.00	13.21	1.79	4.58	14.77	12.89	1.88	4.81
	1	1.609	-0.609	15.00	18.30	-3.30	5.42	14.77	18.19	-3.42	5.62
	0	1.609	-1.609	15.00	25.37	-10.37	6.44	14.77	25.37	-10.60	6.59
	-1	1.609	-2.609	15.00	35.16	-20.16	7.73	14.77	34.95	-20.18	7.73
1.00	5	-0.153	5.153	26.67	4.96	21.71	4.21	26.67	4.26	22.41	4.35
	4	-0.153	4.153	26.67	6.88	19.79	4.77	26.67	6.24	20.43	4.92
	3	-0.153	3.153	26.67	9.53	17.14	5.44	26.67	9.02	17.65	5.60
	2	-0.153	2.153	26.67	13.21	13.46	6.25	26.67	12.89	13.78	6.40
	1	-0.153	1.153	26.67	18.30	8.37	7.26	26.67	18.19	8.48	7.35
	0	-0.153	0.153	26.67	25.37	1.30	8.50	26.67	25.37	1.30	8.50
	-1	-0.153	-0.847	26.67	35.16	-8.49	10.02	26.67	34.95	-8.28	9.78
0.80	5	-0.916	5.916	34.21	4.96	29.25	4.94	34.04	4.26	29.78	5.03
	4	-0.916	4.916	34.21	6.88	27.33	5.56	34.04	6.24	27.80	5.66
	3	-0.916	3.916	34.21	9.53	24.68	6.30	34.04	9.02	25.02	6.39
	2	-0.916	2.916	34.21	13.21	21.00	7.20	34.04	12.89	21.15	7.25
	1	-0.916	1.916	34.21	18.30	15.91	8.30	34.04	18.19	15.85	8.27
	0	-0.916	0.916	34.21	25.37	8.84	9.65	34.04	25.37	8.67	9.47
	-1	-0.916	-0.084	34.21	35.16	-0.95	11.31	34.04	34.95	-0.91	10.83

Caja dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización a Suma Nula. Comparación de Cálculos Exactos y Aproximados para la Tabla-Tipo de Mortalidad Femenina de Coale y Demeney, Serie Oeste, (72.5 años).

		EXACTO	EXACTO	1A APROX.	1A APROX.	2A APROX.	2A APROX.	EXACTO	1A APROX.	2A APROX.
Tasa Bruta	Tasa interés	h %	k %	h %	k %	h %	k %	(h − k)/(r − p)	(h − k)/(r − p)	(h − k)/(r − p)
4.00	5	3.91	3.62	5.27	4.96	4.57	4.26	1.58	1.69	1.69
	4	3.91	5.50	5.27	6.88	4.57	6.24	1.95	1.97	2.04
	3	3.91	8.24	5.27	9.53	4.57	9.02	2.38	2.34	2.45
	2	3.91	12.17	5.27	13.21	4.57	12.89	2.93	2.82	2.95
	1	3.91	17.71	5.27	18.30	4.57	18.19	3.62	3.41	3.57
	0	3.91	25.37	5.27	25.37	4.57	25.37	4.46	4.17	4.32
	−1	3.91	35.78	5.27	35.16	4.57	34.95	5.48	5.14	5.22
3.00	5	6.08	3.62	7.45	4.96	6.84	4.26	1.97	2.00	2.07
	4	6.08	5.50	7.45	6.88	6.84	6.24	2.35	2.31	2.43
	3	6.08	8.24	7.45	9.53	6.84	9.02	2.87	2.76	2.90
	2	6.08	12.17	7.45	13.21	6.84	12.89	3.47	3.29	3.45
	1	6.08	17.71	7.45	18.30	6.84	18.19	4.22	3.94	4.12
	0	6.08	25.37	7.45	25.37	6.84	25.37	5.14	4.77	4.94
	−1	6.08	35.78	7.45	35.16	6.84	34.95	6.25	5.83	5.91
2.00	5	10.91	3.62	12.04	4.96	11.67	4.26	2.68	2.61	2.73
	4	10.91	5.50	12.04	6.88	11.67	6.24	3.15	3.01	3.16
	3	10.91	8.24	12.04	9.53	11.67	9.02	3.72	3.50	3.70
	2	10.91	12.17	12.04	13.21	11.67	12.89	4.45	4.13	4.31
	1	10.91	17.71	12.04	18.30	11.67	18.19	5.30	4.88	5.08
	0	10.91	25.37	12.04	25.37	11.67	25.37	6.33	5.84	6.00
	−1	10.91	35.78	12.04	35.16	11.67	34.95	7.58	7.04	7.09
1.66	5	14.13	3.62	15.00	4.96	14.77	4.26	3.10	2.96	3.10
	4	14.13	5.50	15.00	6.88	14.77	6.24	3.60	3.40	3.57
	3	14.13	8.24	15.00	9.53	14.77	9.02	4.23	3.93	4.13
	2	14.13	12.17	15.00	13.21	14.77	12.89	4.97	4.58	4.81
	1	14.13	17.71	15.00	18.30	14.77	18.19	5.91	5.42	5.62
	0	14.13	25.37	15.00	25.37	14.77	25.37	7.00	6.44	6.59
	−1	14.13	35.78	15.00	35.16	14.77	34.95	8.31	7.73	7.73
1.00	5	26.77	3.62	26.67	4.96	26.67	4.26	4.49	4.21	4.35
	4	26.77	5.50	26.67	6.88	26.67	6.24	5.12	4.77	4.92
	3	26.77	8.24	26.67	9.53	26.67	9.02	5.88	5.44	5.60
	2	26.77	12.17	26.67	13.21	26.67	12.89	6.78	6.25	6.40
	1	26.77	17.71	26.67	18.30	26.67	18.19	7.86	7.26	7.35
	0	26.77	25.37	26.67	25.37	26.67	25.37	9.15	8.50	8.50
	−1	26.77	35.78	26.67	35.16	26.67	34.95	10.64	10.02	9.78
0.80	5	34.78	3.62	34.21	4.96	34.04	4.26	5.27	4.94	5.03
	4	34.78	5.50	34.21	6.88	34.04	6.24	5.96	5.56	5.66
	3	34.78	8.24	34.21	9.53	34.04	9.02	6.78	6.30	6.39
	2	34.78	12.17	34.21	13.21	34.04	12.89	7.76	7.20	7.25
	1	34.78	17.71	34.21	18.30	34.04	18.19	8.91	8.30	8.27
	0	34.78	25.37	34.21	25.37	34.04	25.37	10.27	9.65	9.47
	−1	34.78	35.78	34.21	35.16	34.04	34.95	11.90	11.31	10.83

4.4 COTIZACION INDIRECTA EXPRESADA EN PORCENTAJE DEL SALARIO PARA EL FINANCIAMIENTO DE RETIRO POR MEDIO DEL SISTEMA DE CAPITALIZACION A SUMA NULA.

En la Sección 3.3, se realizó un análisis revalorizando las condiciones simplificadoras establecidas para nuestros cálculos iniciales.

Las edades exactas α y β para el ingreso a la actividad y al retiro, pueden reeplazarse por las edades promedio sin inconveniente.

También se puede considerar que el salario es igual para todos, pues así esta considerado como un salario promedio. Sin embargo, admitir que éste salario promedio no varía al paso del tiempo no es muy realista, por lo que se modifican ligeramente las fórmulas con la finalidad de tomar en consideración esta progresión del salario. Lográndose así, obtener una nueva ecuación para la cotización del Financiamiento de Retiro por medio del Sistema de Capitalización k:

$$k = \frac{\int_{\beta}^{\nu} e^{-(r-\lambda)x}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-(r-\lambda)x}\, p(x)\, dx}$$

A esta ecuación, la identificamos con el número (17), y la interpretamos como si la tasa de interés no fuera r sino $r - \lambda$, por lo que se aumenta la Cotización Directa debido a la progresión de los salarios. Esto implica que nuestros resultados referentes al total que posee la Caja continúan siendo válidos a condición de que se disminuya a la tasa de interés r, la tasa de crecimiento de la economía λ, lo cual aumenta el capital.

Asimismo, se analizó que la inflación produce un interés negativo que reduce las tasas de interés que intervienen dentro de los cálculos, implicando tasas de interés reales muy bajas, lo cual nuevamente aumenta el capital.

En esta Sección, se tiene como propósito calcular la Cotización Indirecta deducida por la Caja por medio de la remuneración del capital, la cual se obtiene directamente al multiplicar por r la cantidad $\dfrac{A + B}{\Sigma}$.

Se tiene entonces:

$$C_i = r \frac{h - k}{r - p}$$

Sin olvidar que k es la Cotización Directa de un Sistema por Capitalización y h es la cotización para un Sistema por Reparto.

La fórmula anterior enumerada como (10), es válida dentro de las condiciones simplificadoras. Si se tiene un desarrollo económico caracterizado por una tasa de crecimeinto λ, será necesario reemplazar r por $r - \lambda$ para el cálculo de capital que posee la Caja, y posteriormente multiplicar éste capital por r, para obtener la cotización indirecta, es decir:

$$C_i = r \frac{h - k'}{r - \lambda - p}$$

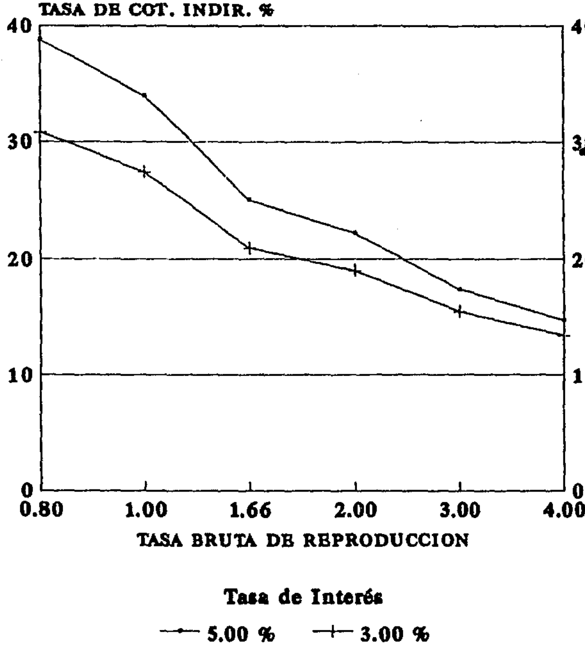
en donde k' es la Cotización Directa calculada con una tasa de interés $r - \lambda$ para un Sistema de Retiro por Capitalización, y h es la cotización dentro de un Sistema de Retiro por Reparto.

A continuación, se tiene dispuesta una tabla que nos porporciona la Cotización Indirecta expresada en porcentaje del salario dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización a suma nula, dentro de la Serie Oeste de Poblaciones Estables de Coale y Demeney con esperanza de vida al nacimiento de 72.5 años por considerar el caso de México y Tasa Bruta de reproducción de 166 por cada 100 mujeres aproximadamente, además se encuentra su gráfica correspondiente y la tabla necesaria para su cálculo.

Cotización Indirecta expresada en porcentaje del salario dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización a Suma Nula dentro de la Serie Oeste de Poblaciones Estables de Coale y Demeney (tasa de interés del 5% y 3%; y tasa de crecimiento de la economía del 3%). La Jubilación es igual al salario. Esperanza de vida al nacimiento = 72.5 años.

Tasa Bruta	Tasa Interés	$\frac{h-k}{r-i-p}$	*Cotización Indirecta* $\frac{r(h-k)'}{r-i-p}$
4.00	5 %	2.93	14.66%
	3 %	4.46	13.37%
3.00	5 %	3.47	17.37%
	3 %	5.14	15.42%
2.00	5 %	4.45	22.26%
	3 %	6.33	19.00%
1.66	5 %	5.01	25.06%
	3 %	6.99	20.96%
1.00	5 %	6.78	33.91%
	3 %	9.15	27.45%
0.80	5 %	7.75	38.77%
	3 %	10.27	30.82%

COTIZACION INDIRECTA
PARA DOS TASAS DE INTERES



EXPRESADA EN MASA SALARIAL ANUAL

Caja dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización a Suma Nula.
Tomando como tasas de interés al 3% y al 5% y una tasa de crecimiento de la Economía del 3%.
Cálculos detallados para la Tabla-Tipo de Mortalidad femenina de Coale y Demeney, (serie Oeste): Esperanza de vida al nacer = 72.5 años.

Tasa Bruta	Tasa interés r	Tasa Crec. p	r - p - 1 %	h %	k %	h - k %	$\frac{h-k}{r-p-1}$
4.00	5 %	4.817	-2.817	3.91	12.17	-8.260	2.93
	3 %	4.817	-4.817	3.91	25.37	-21.460	4.46
3.00	5 %	3.753	-1.753	6.08	12.17	-6.090	3.47
	3 %	3.753	-3.753	6.08	25.37	-19.290	5.14
2.00	5 %	2.283	-0.283	10.91	12.17	-1.260	4.45
	3 %	2.283	-2.283	10.91	25.37	-14.460	6.33
1.66	5 %	1.609	0.391	14.13	12.17	1.960	5.01
	3 %	1.609	-1.609	14.13	25.37	-11.240	6.99
1.00	5 %	-0.153	2.153	26.77	12.17	14.600	6.78
	3 %	-0.153	0.153	26.77	25.37	1.400	9.15
0.80	5 %	-0.916	2.916	34.78	12.17	22.610	7.75
	3 %	-0.916	0.916	34.78	25.37	9.410	10.27

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

El objetivo de esta tesis fue analizar las condiciones económico-demográficas en las cuales el Sistema de Retiro por medio de la Capitalización Individual puede funcionar sin saturarse; y determinar si la población cubierta por el Régimen Obligatorio del IMSS cuenta con dichas condiciones.

Una vez terminada esta Tesis podemos concluir que para el caso de México y en particular para la Población cubierta por el Régimen Obligatorio del IMSS, el Sistema de Retiro por medio de la Capitalización Individual no puede funcionar sin ocasionar la saturación del mismo.

A lo largo de las siguientes páginas se encuentra el fundamento de nuestra conclusión.

Después de aplicar a la Población Femenina y Masculina del Régimen Obligatorio del IMSS las relaciones obtenidas para el Sistema de Retiro por medio de la Capitalización, referentes al capital propio de cada generación en función de la edad, encontramos que el fondo manejado por la Caja para la Población Femenina alcanza la magnitud de 3.20 a

10.64 veces la masa salarial anual y para la Población Masculina alcanza la magnitud de 3.68 y 10.75 veces la masa salarial anual, utilizando tasas de interés del 0% al 6% respectivamente.

Esta es una cantidad considerable, cuando se admite que generalmente el patrimonio de una nación es igual a cuatro o cinco veces la masa salarial.

En particular para México la riqueza de la nación es igual a 4.34 veces la masa salarial anual. Lo cual nos lleva a concluir que al no haber capital suficiente, resulta difícil la supervivencia a largo plazo del Sistema de Capitalización dadas las condiciones económico-demográficas de México. Incluso si la Caja posee todo el capital, lo cual es apenas creíble, el interés permanecería por debajo de lo que necesita para funcionar.

Posteriormente, para facilitar los cálculos nos apoyamos en el conjunto de Poblaciones Estables de Coale y Demeney, las cuales permiten el trazado de un diagrama para obtener el capital propio del fondo como función de las tasas de interés, natalidad y mortalidad. Con el fin de obtener un capital menor a 4 veces la masa salarial, se llega a que la mortalidad, la natalidad y la tasa de interés deben ser muy altas.

Después de realizar los cálculos detallados correspondientes para la Caja dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización a suma nula para la Tabla-Tipo de Mortalidad Femenina de Coale y Demeney (serie Oeste), con Esperanza de vida al nacer de 72.5 años. Podemos concluir que si se admite que el capital de la nación es igual a 4.34 veces la masa salarial como en el caso de México, la Caja no puede funcionar para todas las situaciones colocadas por arriba de la recta AB = 4.34 de la gráfica que ilustra a esta tabla.

En general, podemos decir que el patrimonio de una nación es igual a 5 veces la masa salarial para los países con desarrollo capitalista, por lo que si nos situamos por arriba de la recta igual a 5 veces la masa salarial, consideramos que el Sistema no puede funcionar. Una mortalidad más fuerte reduce todas las curvas y aumenta las posibilidades de funcionamiento. Así, el Sistema exige una fuerte natalidad y una fuerte mortalidad para poder funcionar.

Se han transladado sobre la gráfica que ilustra los cálculos correspondientes para la Caja dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización, los seis puntos correspondientes al cálculo efectuado sobre la Población Femenina del Régimen Obligatorio del IMSS al 31 de diciembre de 1991. Se encuentra una curva muy próxima a aquella correspondiente a una Tasa Bruta de Reproducción igual a 1.66. Sin embargo, la variación que se observa se debe a que en México no se tiene una Población Estable, pero resulta muy interesante y útil obtener los resultados correspondientes debido a que todas las poblaciones tienden a la estabilidad.

Adicionalmente, se realizaron los cálculos aproximados para una Caja dentro de un Sistema de Retiro por Capitalización; los cuales se obtienen de una manera sencilla, sin embargo su aproximación no la consideraríamos del todo aceptable, pues dependería de la finalidad y repercusión de los mismos el confiar en dicha aproximación..

No se debe perder de vista que aunque el Régimen de Retiro por Capitalización influye en el equilibrio económico del conjunto, esto no impide funcionar a ciertos sistemas parciales, por lo que es la generalización al conjunto de la población lo que es imposible.

Finalmente, realizamos el cálculo de la Cotización Indirecta expresada en porcentaje del salario para el Sistema de retiro por Capitalización, dentro de la serie Oeste de Poblaciones Estables Femeninas de Coale y Demeney (tasas de interés del 3% y 5% y tasa de crecimiento de la economia del 3%), considerando la jubilación igual al salario. Seguido encontramos la gráfica que ilustra esta tabla.

Dentro de la situación demográfica de México para una Tasa Bruta de Reproducción de 166 por cada 100 mujeres y mortalidad femenina del orden de los 72.5 años, resulta una Cotización Indirecta del 25.06% para una tasa de interés del 5% y de 20.96% para una tasa de interés del 3%.

Esto revela que, dentro de las condiciones investigadas, es necesario distribuir por el mecanismo de remuneración del capital, una suma que representa el 25.06% y 20.96% (tasa de interés del 5% y 3% respectivamente) del conjunto de los salarios. Este porcentaje es muy alto y dificil de alcanzar para una nación que cuenta con una mortalidad general bastante baja y constante y con proceso de intensa disminución en la fecundidad; amén de los fuertes rezagos socio-económicos que afectan el nivel de vida de su población. Además de lo que hemos dicho de la razón de la masa salarial al patrimonio de una nación, hace pensar que tal porcentaje no puede ser alcanzado y que en consecuencia el Sistema no puede funcionar.

No obstante, sólo un examen de las cuentas nacionales puede permitir responder a la pregunta planteada. Jean-Bourgeois Pichat comenta que las sumas distribuidas son del órden del 20% de la masa salarial. La gráfica final muestra entonces que muy pocos países se encuentran dentro de las condiciones demográficas donde el Sistema puede funcionar, aún suponiendo que todo el patrimonio esté en poder de la Caja.

Hasta este momento ya fueron analizados los resultados obtenidos para el caso de México bajo los supuestos y métodos desarrollados a lo largo de ésta Tesis, y coincidimos en decir que tales resultados hacen difícil la supervivencia a largo plazo de un Sistema de Capitalización Individual. Esto implica que deben estudiarse este tipo de Sistemas con mayor detenimiento y profundidad para confirmar o rechazar los resultados obtenidos.

Si tomamos como punto de partida para este tipo de problemas nuestra tesis, una investigación más profunda debería promoverse a alto nivel por el Banco de México, Colegio de México, etc., y que involucre a un equipo interdisciplinario de Demógrafos, Economistas, Actuarios, Financieros, Estadísticos, etc., dedicados a investigar los lineamientos a seguir para evitar que el Sistema se sature, encontrando las condiciones en las que puede o no funcionar el Sistema de Capitalización, tema de interés Mundial.

Algunos comentarios para finalizar nuestro análisis son los siguientes:

Los países industrializados ante este Sistema, se encuentran en circunstancias particularmente desventajosas. Su nivel de mortalidad es bajo y su tasa de crecimiento débil. Además, de la creciente participación de mano de obra femenina dentro de la población económicamente activa de estos países rebaja el nivel medio de la mortalidad de la población activa y por consecuencia, de la población jubilada. Dentro de éstas condiciones, además con tasas de de interés superiores al 3% debido al costo indirecto parece imposible que el Sistema de Capitalización pueda aplicarse a la totalidad del país.

Al analizar la tabla de cotizaciones dentro de una óptica de Reparto podemos constatar que no importa la tasa de crecimiento de la población, la cotización de Reparto aumenta cuando la mortalidad disminuye, y éste aumento es más elevado cuando la tasa de crecimiento es más débil. En segundo lugar, sin importar para qué nivel de mortalidad, la cotización disminuye a medida que el crecimiento aumenta, y esto no depende del nivel de mortalidad. Finalmente, cuando la mortalidad y la fecundidad disminuyen, el aumento de la cotización de Reparto se vuelve considerable.

Podemos decir que este Sistema por naturaleza tiende a facilitar su instauración dentro de un contexto de crecimiento de la población, pero poco a poco y a medida que el crecimeiento disminuye, la prima de Reparto aumenta considerablemente.

Desde el punto de vista de la Capitalización, podemos observar que como el cálculo de la cotización para el Sistema de Capitalización se realiza sobre una generación, los cambios de la fecundidad no provocan efecto alguno sobre la tasa de cotización del trabajador, todo depende de la tasa de interés, en lo que concierne a la mortalidad, su influencia sobre la prima individual es exactamente la misma que sobre un Régimen de Reparto.

Resulta interesante comparar los dos Sistemas , ya que en general, cuando $r > p$, los trabajadores prefieren en términos de cotización un Sistema de Capitalización que un Sistema de Reparto.

Pero en la Seguridad Social no se puede preferir al Sistema de Capitalización solo por esta ventaja, debido a que por una parte, el Sistema de Capitalización no se puede generalizar al total de la población sin asfixiar las reservas de capitales del país en cuestión.

La edad de entrada al Régimen hará la diferencia del Sistema a escoger, ya sea el de Reparto o el de Capitalización, dependiendo de las diferentes combinaciones de r y p.

Suponiendo que en el momento de la instauración de un Régimen de Reparto existiera el voto, los jovenes trabajadores, votarían contra la instauración del Régimen, y los viejos trabajadores votarían a su favor. Para saber cual sería el resultado de la votación, sería suficiente con conocer el número de votantes de cada grupo.

Dentro de éste contexto, podemos decir que el punto más importante es que por definición, el Sistema de Reparto postula la perennidad del Régimen, en el sentido que todo depende de la renovación continua de generaciones, siempre dentro del mismo Régimen. Si se permitiera que los trabajadores jóvenes abandonaran al Sistema y que financiaran su propio retiro por medio de un Sistema de Capitalización, las personas de más de 65 años se encontrarían un día sin el soporte material para su retiro, y tendrían toda la razón de protestar contra esta injusticia, debido a que en sus tiempos, ellos sostuvieron a otros jubilados con la idea de ser sostenidos en su turno.

En este sentido, el Sistema de Reparto crea su propia inercia y, aunque cada vez se vuelve más caro, el contrato debe continuar. En el otro extremo se encuentra la imposibilidad de establecer el Sistema de Capitalización Individual a todo el mundo.

En la práctica, los Sistemas de Retiro a nivel nacional se organizan entre estos dos extremos, pudiendo en algunos casos, encontrar un Sistema Mixto donde coexistan Capitalización Individual y Reparto como en el caso de México.

Dentro de un Sistema Mixto, es evidente que el hecho de cotizar y de tener derecho a la Seguridad Social no excluye la posibilidad de participar al mismo tiempo en un Sistema Privado. No obstante, es imposible imaginar que los trabajadores con sueldos mínimos puedan pagar esta doble cotización de Reparto y de Capitalización. Por lo tanto, se excluyen de la fórmula mixta y para ellos el Sistema sería uno de Reparto.

Nosotros recomendaríamos un Sistema Mixto, en vez de un Sistema de Reparto Puro o de Capitalización Individual. Un Sistema Mixto en el cual parte de los fondos de las cotizaciones de los trabajadores puedan ser invertidos dentro de un Sistema de Capitalización Colectivo. Evidentemente, restaría aún, el problema de la erosión que ocasiona la inflación sobre un Sistema de Capitalización. Aunque, las tasas reales de rendimiento fueran disminuidas a causa de la inflación, los capitales se revalorizan adecuadamente en la mayoría de los paises industrializados. Si la erosión monetaria se tornara acrecentada y el rendimiento real de los capitales se volviera negativo, entonces sería el conjunto de la economia el que se encontrara en peligro y no solamente la Seguridad Social.

ANEXO A

CONCEPTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

A N E X O A

CONCEPTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Con la elaboración de este Anexo, se pretende mencionar algunos conceptos básicos de Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden, los cuales consideramos facilitarán el entendimiento de los desarrollos matemáticos correspondientes a los Capítulos II y III.

Una Ecuación Diferencial es una expresión matemática que involucra al menos una derivada de una función desconocida, la cual puede estar involucrada explícitamente a través de la prescencia de diferenciales.

Si la función *f* está definida por $y = f(x)$, entonces la diferencial *y* que se representa por *dy* está dada por:

$$dy = f'(x)\ dx$$

donde:

x: Está en el dominio de f'.

Δ_x: Es un incremento arbitrario de x.

Cuando una ecuación contiene una o más derivadas con respecto a una variable particular, a esa variable se le llama: Variable Independiente.

Una variable es llamada Dependiente si una derivada de esa variable aparece en la Ecuación Diferencial.

El órden de una Ecuación Diferencial será la potencia de la derivada de más alto orden de la ecuación.

Ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3 \qquad \text{Ecuación Diferencial de } 2^{\circ} \text{ órden.}$$

El grado de una Ecuación Diferencial es el máximo exponente asociado con la derivada de orden mayor de la ecuación.

Ejemplo:

$$\frac{d^4y}{dx^4}^{2} - 1 = x^9 \frac{dy}{dx} \qquad \text{Ecuación Diferencial } 2^{\circ} \text{ grado, } 4^{\circ} \text{ órden.}$$

El tipo más simple de Ecuación Diferencial es una ecuación de primer órden de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Si la escribimos con diferenciales tenemos:

$$dy = f(x)\ dx$$

Es útil clasificar los diferentes tipos de ecuaciones en:

- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Son las que contienen únicamente derivadas totales.

- Ecuaciones Diferenciales Parciales: Son las que contienen derivadas parciales.

Las Ecuaciones Diferenciales se consideran Lineales si cada término de la ecuación no contiene grados mayores a uno. La linealidad se atribuye a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Se consideran No Lineales cuando no se cumple lo anterior.

Una solución de una Ecuación Diferencial es una función y, tal que satisfaga idénticamente a la Ecuación Diferencial. No siempre se tiene a y como función de x.

La solución puede ser de dos tipos:

- Solución Explicita: Está despejada la y
- Solución Implicita: No está despejada la y.

SOLUCION A ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.

Son de la forma:

$$y' = f(x,y)$$

donde:

f: Es una función dada de dos variables.

Se le llama solución a cualquier función $y = \varphi(x)$, con cuya derivada se satisface idénticamente la ecuación $y' = f(x,y)$.

El tipo más sencillo de Ecuación Diferencial de Primer Orden ocurre cuando f sólo depende de x. En este caso:

$$y' = f(x)$$

y se busca una función $y = \varphi(x)$, cuya derivada sea la función dada f. De lo aprendido en Cálculo Elemental, se sabe que φ es una antiderivada de f y se escribe:

$$y = \varphi(x) = \int^{x} f(t)\,dt + C$$

donde: C es una constante arbitraria.

La notación $\int^{x} f(t)\,dt$, se utiliza para denotar una antiderivada de la función f, es decir $F(x) = \int^{x} f(t)\,dt$, designa una función representativa de la clase de funciones cuyas derivadas son iguales a f. Todos los miembros de esta clase se incluyen en la expresión $f(x) + C$, donde C es una constante arbitraria.

Para las ecuaciones de la forma $y' = f(x)$, sólo se requiere un proceso de integración para eliminar la derivada de y y obtener la propia y.

Al considerar la ecuación $y' = f(x,y)$, no existe un método general satisfactorio para obtener soluciones de esta ecuación. Por el contrario, existen varios métodos cada uno de los cuales es aplicable a una cierta clase de ecuaciones de la forma $y' = f(x,y)$.

Consideraremos primero la Ecuación Lineal de Primer Orden:

$$y' + p(x)\ y = g(x)$$

donde:

p y g son funciones continuas dadas, definidas en algún intervalo $\alpha < x < \beta$.

Comenzaremos con la ecuación:

$$y' + ay = 0$$

donde:

a es una constante real.

Esta ecuación puede resolverse directamente. Se necesita una función y cuya derivada sea $(-a)$ veces la propia y. Obviamente $y = e^{-ax}$ tiene esta propiedad y, por lo tanto satisface la ecuación $y' + ay = 0$.

Aún más:

$$y = c\,e^{-ax}$$

donde:

C es una constante arbitraria.

Como C es arbitaria, la ecuación $y = c\,e^{-ax}$ representa una infinidad de soluciones de la Ecuación Diferencial $y' + a\,y = 0$.

Geométricamente, la ecuación $y = c\,e^{-ax}$, representa una familia de curvas de un parámetro, llamadas Curvas Integrales de la ecuación $y' + ay = 0$. Especificar una solución particular equivale a tomar una curva integral particular de la familia de curvas de un parámetro. Para hacer ésto, por lo general conviene prescribir un punto (x_o, y_o), por el cual debe pasar la curva integral, es decir, buscar una solución $y = \varphi(x)$ tal que:

$$\varphi(x_o) = y_o$$

Tal condición se llama condición inicial.

Ya que y denota a $\varphi(x)$ también podemos escribir:

$$y = y_o \quad \text{en} \quad x = x_o$$

Una Ecuación Diferencial de Primer Orden y una condición inicial constituyen un problema con valores iniciales.

Por ejemplo, la Ecuación Diferencial: $y' + a\,y = o$ y la condición inicial $y(0) = 2$ constituyen un problema con valores iniciales. Las soluciones de esta Ecuación Diferencial, están dadas por la ecuación:

$$y = c\,e^{-ax}$$

La solución particular que satisface a la condición inicial $y(0) = 2$, se determina sustituyendo $x = 0$ y $y = 2$ en la ecuación $y = c\,e^{-ax}$

$$2 = c\, e^{-2(0)}$$

$$2 = c\, e^{0}$$

$$c = 2$$

Entonces $c = 2$ y la solución deseada es:

$$y = \varphi(x) = 2\, e^{-ax}$$

Esta es la única solución del problema dado con valores iniciales.

Consideremos ahora la ecuación:

$$y' + a\, y = g(x)$$

Si $a = 0$, entonces el primer miembro de la ecuación es simplemente la derivada de y, y la solución está dada por la ecuación:

$$y = \varphi(x) = \int^{x} f(t)\, dt + C$$

con f reemplazada por g.

Si $a <> 0$, entonces el primer miembro de la ecuación $y' + ay = g(x)$, es una combinación de términos que contienen a y y y'. Una pregunta que cabe hacer es si éstos términos pueden identificarse como la derivada de alguna función. En otras palabras, ¿ Puede escribirse ?

$$\frac{dy}{dx} + a\,y = \frac{d}{dx}(\quad)$$

Si es así, entonces la ecuación $y' + a\,y = g(x)$ tiene la forma:

$$\frac{d}{dx}(\quad) = g(x)$$

e inmediatamente puede resolverse, integrando ambos miembros.

Un indicio de la manera de proceder puede hallarse observando nuevamente la solución:

$$y = c\,e^{-ax}$$

de la ecuación:

$$y' + a\,y = 0$$

Reescribiendo $y = c\,e^{-ax}$ en la forma:

$$y\,e^{ax} = c$$

y derivando a continuación ambos miembros, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}(y\,e^{ax}) = 0$$

o bien:

$$\frac{dy}{dx} e^{ax} + a\,e^{ax}\,y = e^{ax}\left[\frac{dy}{dx} + a\,y\right] = 0$$

Así , si se multiplica la ecuación $y' + ay = g(x)$ por e^{ax}, entonces puede escribirse el primer miembro de la ecuación resultante como la derivada de la función $y\, e^{ax}$;

$$e^{ax}\, y' + a\, e^{ax}\, y = e^{ax}\, g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\, y \right) = e^{ax}\, g(x)$$

La ecuación anterior puede integrarse obteniendo:

$$e^{ax}\, y = \int^{x} e^{at}\, g(t)\, dt + C$$

donde C es una constante arbitraria. De aquí que la solución de la ecuación $y' + ay = g(x)$ es:

$$y = \varphi(x) = e^{-ax} \int^{x} e^{at}\, g(t)\, dt + C\, e^{-ax}$$

Por lo tanto, para una función dada g, el problema de determinar una solución de la ecuación dada por $g(x)$ se reduce a evaluar la antiderivada de la ecuación dada por $\varphi(x)$.

La dificultad que esta presenta depende de g, sin embargo $\varphi(x)$ da una fórmula explícita para la solución de $y = \varphi(x)$. La constante C puede determinarse si se prescribe una condición inicial.

Ejemplo:

Encontrar la solución del problema con valores iniciales:

$$y' + 2y = e^{-x} \quad . . . \; (1)$$

$$y(0) = 3 \quad . . . \; (2)$$

Comparando *(1)* con $y' + ay = g(x)$ encontramos que $a = 2$. Por lo tanto multiplicamos *(1)* por e^{2x}, obteniendo:

$$e^{2x}\, y' + 2e^{2x}\, y = e^{2x}\, e^{-x}$$

El primer miembro es la antiderivada de $e^{2x}y$ en consecuencia la ecuación puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\, y \right) = e^{x}$$

integrando obtenemos:

$$y\, e^{2x} = e^{x} + C,$$

y por lo tanto,

$$y = e^{-x} + C\, e^{-2x}$$

que es una solución de la ecuación *(1)* para cualquier valor de C. Con el fin de satisfacer la condición inicial, se sustituye $x = 0$ y $y = 3$ que obtenemos de (2), en la ecuación $y = e^{-x} + C e^{-2x}$

$$3 = e^{-0} + C e^{-2(0)}$$

$$3 = 1 + C$$

$$\therefore \quad C = 2$$

Entonces la solución de problema con valores iniciales es:

$$y = e^{-x} + 2 e^{-2x}$$

Es *importante* considerar que muchos problemas significativos al folmularse en términos matemáticos requieren la determinación de una fórmula desconocida, los cuales se resuelven con la utilización de Ecuaciones Diferenciales.

No todas las Ecuaciones Diferenciales tienen solución, ni es su existencia una pregunta puramente matemática. Si un problema que tenga sentido está correctamente formulado como una Ecuación Diferencial, entonces el problema matemático debe tener solución, tal es el caso de las fórmulas planteadas en los Capítulos II y III.

ANEXO B

CONCEPTOS DE DEMOGRAFIA.

ANEXO B

CONCEPTOS DE DEMOGRAFIA.

Con la elaboración de este Anexo, se pretende hacer mención de algunos términos básicos de la Demografía, logrando así tener una visión más general sobre ésta área. Además, mencionamos las aportaciones de algunos demógrafos que consideramos de utilidad. (Este anexo se organizó en orden alfabético para facilitar su consulta.)

BOURGOIS-PICHAT, JEAN (1912):

Demógrafo francés Miembro de 1942 a 1953 , y luego Director de 1962 a 1971 del Institut National d'études Démographiques (INED) de París, y que se distingue por un particular ingenio en el tratamiento estadístico de la población. Su permanencia de 1953 a 1962 al servicio de la población en las Naciones Unidas, le dió ocasión para profundizar y clarificar la teoria de las Poblaciones Estables y de introducir con este motivo las nociones de Poblaciones Quasi-estables y de Poblaciones Semi-estables. Una visión del conjunto de sus trabajos sobre estos temas, la podemos encontrar en la publicación de las Naciones Unidas: "El Concepto de Población Estable".

COHORTE:

Conjunto de personas o de parejas que han vivido un mismo acontecimiento durante un periodo dado, generalmente un año civil.

Se habla de generaciones, cuando se trata de cohortes de nacimientos.

COCIENTE DE MORTALIDAD:

Para una edad dada x, es la frecuencia de los fallecimientos que intervienen en un grupo de individuos que han llegado hasta ésta edad x antes de que el grupo alcance una edad ulterior $x + a$ y se denota por: ${}_{a}q_{x}$.

Por ejemplo:

${}_{1}q_{0}$: Denota un Cociente Anual.

Se dice además que un Cociente de Mortalidad mide la probabilidad a una edad x de fallecer antes de la edad $x + a$.

Si consideramos como l_x al efectivo de personas de un grupo (sin migraciones), que alcanza el aniversario x; y como l_{x+1} al efectivo que sobrevive al aniversario $x + 1$, entonces:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

CRECIMIENTO DE LA POBLACION:

Variación de los efectivos de una población durante un periodo.

El crecimiento de la población entre dos fechas 1 y 2, sea $P_2 - P_1$, es la suma del Crecimiento Natural, que consiste de: nacimientos - defunciones (N - D); y de la Migración Neta: inmigraciones — emigraciones (I - E), es decir:

$$P_2 - P_1 = (N - D) + (I - E)$$

CRECIMIENTO INSTANTANEO DE LA POBLACION.

Limite *R(t)* de la variación del efectivo de una población en un intervalo de tiempo, cuando este intervalo tiende a cero.

También *R(t)*, designa al efectivo de la población en la fecha t.

$$R(t) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{P(t+\Delta_t) - P(t)}{\Delta_t}$$

R(t) es también la diferencia entre nacimientos instantáneos y las defunciones instantáneas.

$R(t) = N(t) - D(t)$ en el caso de una población cerrada.

DEMOGRAFIA:

Estudio de las poblaciones humanas en relación con su renovación por medio de los nacimientos, de las defunciones y de los movimientos migratorios.

DEMOGRAFIA MATEMATICA:

Presentación del análisis de las magnitudes demográficas y de las relaciones existentes entre ellas utilizando el lenguaje matemático.

La utilización de éste lenguaje permite una precisión acrecentada dentro del razonamiento y los resultados. Además puede constituir una herramienta poderosa para el descubrimiento de las relaciones entre las magnitudes en juego. La expansión de la Demografía Matemática se inició con los trabajos de Alfred Lotka, fundamentados en la asimilación de las magnitudes usuales de la Demografía a las magnitudes del análisis infinitesimal, lo que continúa siendo aún uno de los principales filones de los desarrollos de la Demografía Matemática.

Tenemos que:

$$d_{x,x+1} = \int_{x}^{x+1} d(\varepsilon)\, d\varepsilon = l_x - l_{x+1}$$

donde:

$$l_x = l_o - \int_o^x d(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

Como para los años vividos en el intervalo de edad $(x,\ x + dx)$, el total de años vividos se escribirá:

$$\int_o^\omega l_x\, dx$$

y la esperanza de vida al nacimiento equivale a:

$$\frac{1}{l_o} \int_o^\omega l_x\, dx$$

Más generalmente:

$$e(x) = \frac{1}{l_x} \int_x^\omega l(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

- El efectivo a una fecha t cualquiera es $P(t)$.
- La función de nacimientos en la fecha t es $N(t)$.
- La función de fallecimientos en la fecha t es $D(t)$.
- Las tasas instantáneas de mortalidad $m(t)$, de natalidad $n(t)$, de crecimiento $R(t)$, se definen respectivamente como sigue:

$$n(t) = \frac{N(t)}{P(t)}$$

$$m(t) = \frac{D(t)}{P(t)}$$

$$R(t) = \lim_{\Delta t \to o} \frac{D(t + \Delta t) - P(t)}{P(t)\Delta t} = \frac{P'(t)}{P(t)}$$

Si la población está cerrada, es decir, sin intercambios migratorios con el exterior, $R(t)$ es la tasa instantánea de crecimiento natural, y entonces:

$$R(t) = n(t) - m(t)$$

De todas formas, como:

$$dP(t) = P(t)\, R(t)\, dt$$

entonces: $$P(t) = P(o)\, e^{\int_o^t R(t)\, dt}$$

EDAD ALCANZADA:

Edad exacta alcanzada por los diferentes miembros de una generación, o de un grupo de generaciones, en el transcurso de un periodo de uno o de varios años civiles.

ENVEJECIMIENTO DE LA POBLACION:

Modificación de la estructura por edad, que se traduce en un aumento de la proporción de las personas de edad avanzada.

Es una modificación progresiva de la distribución por edades de los miembros de esta población que da un peso cada vez más considerable a las edades alcanzadas y correlativamente un peso cada vez más bajo a las edades jóvenes.

EFECTIVO DE LA POBLACION:

No. de personas activas en una población dada, y se obtiene a través de los censos periódicos.

ESPERANZA DE VIDA A LA EDAD X:

Según una tabla de mortalidad, es el número medio de años que le quedan de vida a una persona que ha alcanzado la edad x.

Se denota por: e_x y se calcula a través de los supervivientes, l_x, l_{x+1}, l_{x+2}, ... según la fórmula:

$$e_x = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots}{l_x}$$

fórmula que tiene su equivalencia en la expresión:

$$e_x = \frac{1}{l_x} \int_x^{\infty} l(c)\, dc$$

que hace intervenir a la función de supervivencia l(x).

ESPERANZA DE VIDA AL NACER:

Según una Tabla de Mortalidad, es el número medio de años de vida de una persona tomado desde el nacimiento.

Se denota por e_o y se calcula:

$$e_o = \frac{1}{2} + \frac{l_1 + l_2 + \ldots}{l_o}$$

fórmula que tiene su equivalencia en la expresión:

$$e_o = \frac{1}{l_o} \int_o^{\infty} L(x)\, dx$$

e_o es un buen índice resumido de las condiciones de mortalidad de una generación o de un periodo.

ESTACIONARIA, ESTACIONARIO:

Además de calificar a la población de éste nombre, califica también a un fenómeno cuyas características son inmutables en el tiempo.

ESTRUCTURA DE UNA POBLACION:

Es la composición de una población según diversas características específicamente demográficas como son: sexo, edad, estado civil, etc., consideradas aisladamente o en asociación.

La mejor manera de expresar las estructuras es eligiendo de forma apropiada determinados efectivos para reducir su total a un número redondo (1000 , 10,000 , etc.)

FENOMENO ESTACIONARIO:

Fenómeno cuyas caracteristicas de intensidad y calendario son inmutables en el tiempo.

FORMULA DE GOMPERTZ:

Fórmula propuesta en 1825 por el Actuario inglés Gompertz, referente al Cociente Instantáneo de Fertilidad expresado como una función exponencial de la edad:

$$q(x) = A\, e^{kx}$$

GENERACION:

Cohorte particular constituida por el conjunto de las personas nacidas durante un periodo dado, generalmente el año civil.

LOTKA, ALFRED (1880 - 1949):

Demógrafo norteamericano, cuyos trabajos se han ocupado sobre todo de la Demografía Matemática.

Los resultados de sus investigaciones en éste terreno están reunidas esencialmente en su "Teoría Analítica de las Asociaciones Biológicas (Tomo II, 1939)". En ésta obra desarrolló la teoría de las Poblaciones Estables, tanto desde el punto de vista estático, así como una forma hacia la cual se encamina toda población sometida a unas leyes de fecundidad y mortalidad invariables; así se ve llevado a definir la Tasa Intrínseca de Crecimiento Natural, llamada también Tasa de Lotka. Los trabajos de Lotka constituyen la base de los modernos desarrollos en Demografía Matemática.

MODELO:

Por modelo entendemos una construcción que trata de representar un fenómeno demográfico o una población, haciendo intervenir eventualmente magnitudes de naturaleza que explican ciertos mecanismos de operación de éste fenómeno o de formación de ésta población.

MODELOS DE POBLACION:

Reflejan el hecho de que una población es un conjunto renovado, debido a que los nacimientos en una fecha t, provienen de mujeres nacidas con anterioridad a ésta fecha; tenemos así:

$$N(t) = \int_{0}^{w} N(t-x)\ l(x,t)\ f(x,t)\ dt$$

Donde la probabilidad de supervivencia del nacimiento a la edad x se denomina $p(x) = \frac{l_x}{l_0}$ en una generación dada. A w se le considera como el límite de la vida humana, $f(x,t)$ es nula al márgen del intervalo (α,β) en que las mujeres están en la edad de fertilidad.

En cuanto a la población, está ligada a los nacimientos del pasado por la relación:

$$P(t) = \int_{0}^{w} N(t-x)\ l(x,t)\ dx$$

Si la tasa de crecimiento es constante: $R(t) = r$ y $P(t) = P(0)\ e^{rt}$, tenemos una Población Exponencial.

Semejante población aparece cuando la mortalidad es constante $l(x,t) = l(x)$ y los nacimientos varían en tasa constante $N(t) = N(0)\ e^{rt}$.

Entonces:

$$P(t) = \int_{0}^{w} N(0)\ e^{r(t-x)}\ l(x)\ dx$$

$$= e^{rt} \int_{o}^{v} N(-0)e^{-rx}\ l(x)\ dx$$

y:

$$P(0) = \int_{o}^{v} N(-x)\ l(x)\ dx$$

en éste caso:

$$P(0) = \int_{o}^{v} N(0)\ e^{-rx}\ l(x)\ dx$$

por lo tanto tenemos:

$$P(t) = P(0)\ e^{rt}$$

Estas poblaciones de mortalidad constante y nacimientos de variación exponenecial, hacen que la propia población sea exponencial; a este tipo de poblaciones se les denomina: Poblaciones Maltusianas, haciendo referencia a Malthus que evocaba la tendencia natural de las poblaciones a crecer en progresión geométrica.

NACIMIENTOS INSTANTANEOS:

Límite *N(t)* de la relación de los nacimientos en un intervalo de tiempo que tiende a cero:

$$N(t) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{N(t,\ t+\Delta t)}{\Delta t}$$

Estando medido el tiempo en años, la función *N(t)* tiene una dimensión anual y los nacimientos en el intervalo infinitesimal *(t, t+Δt)* son en número de N(t) dt.

POBLACION.

La noción de población es muy amplia, la mayoría de las veces se refiere a un conjunto de habitantes de un territorio (estado, provincia, ciudad, municipio, etc.).

Es un conjunto de individuos que coexisten en un momento dado y delimitado de acuerdo a unos criterios variados de pertenencia.

Puede designar así mismo, fracciones variadas de ese conjunto (población masculina, femenina, urbana, escolar, etc.), que constituyen subpoblaciones con respecto a él.

Prácticamente casi todos los análisis de población se realizan con una descomposición de base por sexo y edad. Del examen de la estructura por edad de una población se extrae la noción de envejecimiento de la población, que alude el proceso caracterizado por la importancia en aumento que adquieren las personas de edad.

POBLACION ACTIVA:

Población constituida por el conjunto de las personas que tienen empleo, o que lo están buscando.

Estas dos categorías suelen denominarse: Población Activa Empleada y Población Disponible en Busca de Empleo, y se ponen en evidencia en los censos de población.

POBLACION QUASI-ESTABLE:

Población cerrada con mortalidad variable y fecundidad constante. A diferencia de las Poblaciones Estables y de las Poblaciones Semi-Estables que se presentan como construcciones teóricas, las Poblaciones Quasi - Estables no han dado lugar a semejantes desarrollos, ésta situación es sensiblemente la misma en que se encuentra la mayoría de los paises subdesarrollados, en los cuales a descendido la mortalidad, pero donde la fecundidad no ha variado sensiblemente.

El resultado de tal situación, es que la estructura por edad de éstas poblaciones también ha permanecido invariable, de modo que el modelo de referencia para el estudio de las Poblaciones Quasi-Estables en general es la Población Semi-Estable.

POBLACION ESTABLE:

La Demografía utiliza a menudo el concepto de Población Estable. Esta es una población en donde la mortalidad, la natalidad, así como la tasa de variación son constantes.

POBLACION ESTABLE EQUIVALENTE:

En un momento t dado, es una Población Estable con unas características de fecundidad y de mortalidad que a partir de ese momento prevalecerán en otra población, y que se identificará con ésta otra población, cuando ésta haya alcanzado su estado estable límite.

POBLACION ESTACIONARIA:

Es una Población Estable con tasa de crecimiento nulo. Su resultado es que el perfil de la pirámide por edades es idéntica al perfil de la curva de supervivencia, la Tasa Bruta de Natalidad es igual a la inversa de la Esperanza al Nacer y que el efectivo constante de la población es igual al producto de los nacimientos anuales esperados.

Así, el fenómeno del envejecimiento de la población se atribuye al descenso de la mortalidad.

POBLACION MALTUSIANA:

1. Población que recurre a la prevención de los nacimientos.
2. En sentido matemático es una población cerrada, con estructura por edad invariable.

Esta denominación, se debe a Lotka y hace referencia a Malthus cuando éste evoca el crecimiento de la población en progresión geométrica frente al crecimiento de las subsistencias en progresión aritmética. Esta denominación es ambigüa, puesto que también se ha utilizado el concepto de Población Maltusiana para designar a las poblaciones que aplican las consignas de limitación de los nacimientos citados por Malthus para limitar el crecimiento demográfico, en lugar de la definición matemática empleada por Lotka, que define a la Población Maltusiana por la invariabilidad de la estructura por edad y de la tabla de mortalidad, así como el crecimiento exponencial de los nacimientos.

POBLACION SEMI-ESTABLE.

Es una población cerrada con una estructura por edad invariable.

Las Poblaciones Semi-Estables poseen la propiedad de que en cada instante coinciden con las Poblaciones Estables correspondientes a las condiciones del momento. El resultado es que, entre la estructura por edad de una Población Semi-Estable y las características de esta misma población durante el año (tasas de natalidad, tasas de mortalidad, datos de mortalidad, etc.), cada año existen las mismas relaciones que en las Poblaciones Estables que tienen éstas características. Utilizando éstas relaciones se pueden estimar determinadas características desconocidas de una

Población Semi-Estable, partiendo de las características de ésta.

POBLACION TIPO:

Población definida por una característica de estructura, generalmente la estructura es por edad.

PROBABILIDAD DE SOBREVIVENCIA:

Probabilidad de que una persona con edad x, sobreviva a la edad $x+a$. Se denota por: ${}_ap_x$.

Con los datos de una tabla de mortalidad:

$${}_ap_x = \frac{l_{x+a}}{l_x}$$

PROBABILIDAD DE FALLECIMIENTO:

Probabilidad de que una persona con edad x , fallezca antes de alcanzar la edad $x+1$. Se denota por: q_x

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

en donde:

l_x: Denota el número de personas que están con vida en la edad x.

d_x: Denota el número de personas que fallecen en el intervalo de edades $(x, x+1)$, teniendo la edad x y antes de alcanzar la edad $x+1$.

TABLA:

Manera de describir como, en una cohorte sobrevienen los acontecimientos relativos a uno o a varios fenómenos, según la antigüedad de la cohorte.

TABLA DE MORTALIDAD:

Exhibe para una población hipotética, todos los individuos de la misma edad x, su historia subsecuente de vida y de muerte, basándose en un número inicial arbitrario de recién nacidos, generalmente una potencia de 10, que representa el efectivo en la edad 0 años y se llama: raíz o radix de la tabla.

Para la serie de aniversarios x, la tabla de mortalidad proporciona:

l_x: El número de personas que están con vida en la edad x.

d_x: El número de personas que fallecen en el intervalo de edades $(x, x+1)$, teniendo la edad x y antes de alcanzar la edad $x+1$.

q_x: La probabilidad de que una persona con edad x, fallezca antes de alcanzar la edad $x+1$.

p_x: La probabilidad de que una persona con edad x, sobreviva a la edad $x+1$.

A la edad en la cual ya no existen sobrevivientes, se le denota por w.

La sucesión l_x debe ser decreciente, debido a que no hay nuevos ingresos que sustituyan a los que salen.

Relaciones:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

$$l_{x+1} = l_x - d_x$$

$$d_x = l_x (q_x)$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

En la literatura, frecuentemente encontramos tablas a las que se les ha añadido la siguiente columna:

T_x: Denota el número total de años vividos más allá de la edad x, por los l_x sobrevivientes a esa edad.

$$T_x = \sum_{x}^{v} l_\varepsilon$$

e_x : denota la esperanza de vida a la edad x

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

TABLA TIPO:

Tabla teórica surgida del análisis de un conjunto de tablas observadas.

Las Tablas-Tipo se presentan en forma de calendarios tipo y suelen ayudar a resolver las lagunas de la observación demográfica; para ello se identifican las magnitudes observadas como magnitudes correspondientes de una Tabla-Tipo conveniente; y a continuación por medio de la identificación de los datos de la Tabla-Tipo, se infieren las magnitudes desconocidas o erróneas.

TABLA TIPO DE MORTALIDAD:

Tablas que para un nivel dado de determinados parámetros (vida media, cocientes en diversas edades, esperanza de vida al nacer, etc.), da cuenta del calendario probable de mortalidad, tal como se desprende de las tablas de mortalidad existentes.

Actualmente se dispone de cuatro juegos principales de

Tablas-Tipo, establecidos a partir de maneras definidas de análisis estadístico de tablas existentes. Las Tablas-Tipo de las Naciones Unidas (1955) y de Coale y Demeney (1961), se presentan como series de datos numéricos correspondientes a abanicos de esperanza de vida al nacer.

Las de Ledermann (1969), están basadas en un análisis estadístico mucho más depurado, se ofrecen más como medios para estimar la totalidad de las magnitudes de una tabla a partir del dato de uno de dos parámetros que como un conjunto de series numéricas estereotipadas. Las tablas de Brass (1971) constituyen una fórmula de tablas de supervivencia cuyos elementos se definen relacionándolos con los de una tabla definida a través de la función logística.

TASA:

Relación entre los acontecimientos acaecidos en una población durante un periodo y la población media; o bien, relación en una fecha dada entre el efectivo de una subpoblación y el efectivo de una población de la que ésta subpoblación forma parte.

TASA BRUTA DE MORTALIDAD:

Relación entre las defunciones de un año y la población media de ese año, y más general, relaciones entre las defunciones de un periodo y el número correspondiente de personas-año durante el periodo.

La Tasa Bruta de Mortalidad, llamada simplemente Tasa de Mortalidad, está influida por la estructura por edad de la población, así y en idéntica circunstancia cuanto más alta sea la proporción más alta será la Tasa Bruta de Mortalidad.

TASA BRUTA DE NATALIDAD:

Relación entre los nacimientos vivos de un año y la población media de ese año, y más general es la relación entre los nacimientos vivos de un periodo y el número correspondiente de personas-año durante el periodo.

La Tasa Bruta de Natalidad, llamada también Tasa de Natalidad, está influida por la composición por edad de la población. Pero la relativa importancia de las mujeres en edad de procrear, así como la del conjunto de las clases adultas de la población, varía poco de una población a otra, de modo que la Tasa Bruta de Natalidad se ve menos afectada que la Tasa Bruta de Mortalidad por las diferencias de estructura por edad de las poblaciones.

TASA DE CRECIMIENTO:

En una población es la relación entre el crecimiento de una población durante un año y la población media de ese año, y más general es la relación del crecimiento durante un periodo con el número correspondiente de personas-año durante el periodo.

TASA DE CRECIMIENTO NATURAL:

En una población, es la tasa de crecimiento calculada unicamente con el crecimiento natural en el numerador.

Esta tasa a_n es igual a la diferencia entre la tasa de natalidad *n* y la tasa de mortalidad *m* en el periodo considerado, es decir, $a_n = n - m$

TASA INSTANTANEA DE CRECIMIENTO:

En una población es el limite *R(t)* entre la relación de la variación relativa del efecivo de una población sobre un intervalo de tiempo, y la longitud de éste intervalo cuando tiende a cero.

Así pues, si *P(t)* designa al efectivo de la población en la fecha *t*, tenemos:

$$R(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{P(t)\,\Delta t} = \frac{P'(t)}{P(t)}$$

Al considerar la derivada de *P(t)* supone que la serie discreta de los efectivos conocidos P_t de una población, sea sustituido por una función definida por la serie continua de valores del tiempo t y que se identifica con los valores de P_t en los que tales valores son conocidos. Dado que el tiempo está medido en años, la función *R(t)* tiene una dimensión anual y el crecimiento de la población el intervalo infinitesimal $(t, t+\Delta t)$ vale:

$$d\,P(t) = P(t)\,R(t)\,dt$$

Y el efectivo de la población apartir del dato de la tabla instantánea de crecimiento se determina por la fórmula:

$$P(t) = P(0)\,e^{\int_0^t R(t)\,dt}$$

R(t) es también la diferencia de la Tasa Bruta de Natalidad y la Tasa Bruta de Mortalidad.

$R(t) = n(t) - m(t)$ en el caso de la población cerrada.

TASA INSTANTANEA DE MORTALIDAD:

Relación *m*(t) entre las defunciones instantáneas en una fecha t y el efectivo *P(t)* de la población en esa fecha.

Así tenemos:

$$m(t) = \frac{D(t)}{P(t)}$$

TASA INSTANTANEA DE NATALIDAD:

Relación $n(t)$ entre los nacimientos instantáneos en una fecha t, y el efectivo $P(t)$ de la población en esa fecha.

Así tenemos:

$$n(t) = \frac{N(t)}{P(t)}$$

TASA INTRINSECA DE CRECIMIENTO NATURAL:

En cuanto a la Tasa de Crecimiento de la Población que es la de los nacimientos, se determina aproximadamente mediante la fórmula:

$$\rho = \frac{1}{\bar{a}} \ln R_o$$

donde:

$\bar{a}$: Es la edad media efectiva de las madres al nacer sus hijos.

$$\bar{a} = \frac{\int_o^v x\, p(x)\ f(x)\ dx}{\int_o^v p(x)\ f(x)\ dx}$$

$$y \quad R_o = \int_o^v p(x)\ f(x)\ dx$$

Proporciona como complemento de la Tasa Neta de Reproducción del momento, una medida de la reproducción de la población durante un año dado en el sentido de que proporciona la Tasa de Crecimiento Limite que supone el mantenimiento *indefinido* de las condiciones de fecundidad y de mortalidad de éste año, en una Población Estable.

TASA NETA:

Tasa calculada teniéndo en cuenta los efectivos originados por la existencia de uno o de varios fenómenos perturbadores.

En la práctica las tasas netas son tasas relacionadas con el efectivo inicial, a excepción de la Tasa Neta de Reproducción.

ANEXO C

TABLAS-TIPO DE MORTALIDAD Y POBLACIONES ESTABLES.

ANEXO C

TABLAS - TIPO DE MORTALIDAD.

Para nuestros cálculos utilizamos las Tablas-Tipo de Mortalidad Serie Oeste "REGIONAL MODEL LIFE TABLES AND STABLE POPULATIONS" de Coale y Demeney, por lo que consideramos de gran importancia mencionar la descripción y explicación de dichas tablas.

Se utilizó la segunda edición, la cual incorpora una extensión en rango a diferencia de las tablas originales; una extensión que puede ser muy útil en aplicaciones a poblaciones con baja mortalidad. En la primera edición las Tablas Modelo terminaban con un intervalo abierto apartir de la edad 80. En la segunda edición, las Tablas de Mortalidad y Poblaciones Estables, se tabulan en intervalos de 5 años de edad hasta los 100 años.

Las Tablas de Mortalidad proveen una suscinta descripción de cual es el aspecto más prominente del estado de la mortalidad humana; las diferentes probabilidades de morir como función de la edad.

Un chequeo superficial de las Tablas de Mortalidad existentes, computadas de información estadística directa, es suficiente para establecer que la documentación disponible es severamente limitada. Las limitaciones se deben no solo a la calidad del material disponible, sino también a su cobertura geográfica e histórica.

Las Tablas-Tipo de Mortalidad se requieren para utilizarse en situaciones en que no se tiene información directa a la mano.

Las limitaciones en la fuente del material para la construcción de Tablas-Tipo de Mortalidad pueden apreciarse recordando algunos factores históricos. No fué hasta mediados del siglo XVII que los patrones de regularidad al morir fueron sujetos a investigación científica. Se crearon diversas Tablas-Tipo de Mortalidad, con intentos cada vez más frecuentes de obtener medidas de mortalidad. La Tabla-Tipo de Mortalidad vino gradualmente a ocupar un lugar central en estudios de población, como un plan de descripción o como una herramienta analítica.

Desde el punto de vista de la información estadística empleada, podemos distinguir tres clases generales de

Tablas-Tipo de Mortalidad:

- La primera consiste de tablas basadas en datos proporcionados por sistemas continuos de registro, tales como nacimientos y muertes registradas por autoridades civiles o eclesiásticas, registros de hospitales, o registros de tribunales y bautizos. Prácticamente todas las primeras tablas se basaron en registros de estas fuentes. Todas las Tablas de Mortalidad de ésta clase, son de lejana consideración como una base para construir Tablas-Tipo de Mortalidad.

- Una segunda clase, se elaboran de Tablas de Mortalidad construidas por medio de información de censos. Si una cohorte que pertenece a una población cerrada es enumerada en dos puntos de tiempo, una tasa de sobrevivencia puede calcularse. Un examen de las distribuciones por edad reportadas en los censos en algunos países, indican los ajustes drásticos que han sido necesarios antes de poder calcular tasas realistas de sobrevivencia.

El mismo argumento se emplea si los cálculos están basados en un censo en que la distribución por edad está dada por una función exponencial de la forma e^{ra}. Por lo tanto, al elaborar las Tablas-Tipo de Mortalidad no éra posible considerar una Tabla de Mortalidad de ésta clase.

El razonamiento anterior llevó a Coale y Demeney a construir su estudio solo considerando tablas del tercer tipo que son:

- Aquellas calculadas en la base del uso conjunto de datos originados por:

  a) Registros continuos.

  b) Por enumeración de la población en un momento dado.

En la actualidad la mayoría de la población mundial vive en paises en donde estadisticas vitales o censos, o ambos son deficientes, y por lo tanto la mayoría carece de datos estadisticos que permitirian el cálculo de Tablas de Mortalidad de suficiente calidad para servir de base para Tablas-Tipo de Mortalidad.

Una extensa colección de Tablas de Mortalidad del tercer tipo fueron recolectadas. Antes de aceptar la colección como una base potencial para la construcción de Tablas-Tipo de Mortalidad, fue necesario realizar una selección. Después de las eliminaciones, se obtuvo una colección básica que contiene a 326 Tablas de Mortalidad Masculinas y a 326 Tablas de Mortalidad Femeninas, en las cuales se ve la información de mortalidad para Africa, Asia, America Latina, America del Norte, Europa y Oceanía.

El primer camino fue encontrar una expresión matemática válida para todas las edades y después formular lo que se llama una Ley de Mortalidad. Gompertz avanzó con su conocida fórmula que encuentra una aplicación extensiva en la graduación de la función q_x de registros de Tablas de Mortalidad que muestran irregularidades edad con edad.

La alternativa más cercana para describir un patrón típico de mortalidad es simplemente el presentar una serie de tablas que retendrían la forma numérica de las Tablas de Mortalidad convencionales. El uso de las Tablas-Tipo de Mortalidad en un sentido amplio se practicó durante los pasados dos y medio siglos, cuando nunca un registro para un tiempo y lugar dados de una Tabla de Mortalidad, fué aplicado a la población no directamente asociada con la experiencia incorporada en esa tabla.

Asumpciones típicas fueron que un país con relativa alta mortalidad alcanzaría el patrón de mortalidad registrado en otro país en un cierto número de años.

El primer intento de construir una Tabla-Tipo de Mortalidad que resumiera patrones de edad de la mortalidad en diversos países, en una forma que pudiera asociarse con un valor arbitrario específico de un parámetro indicando el nivel de mortalidad que se había llevado acabo se realizó en 1940 en "Office of Population Research". El parámetro escogido fué la esperanza de vida a la edad 10; los valores de q_x se determinaron por regresión lineal.

La experimentación con estimaciones de Poblaciones Estables y los resultados deseados al tomarse en consideración el efecto de diferentes patrones de mortalidad en esas estimaciones, fueron primeramente responsables para el desarrollo de las Tablas-Tipo de Mortalidad contenidas en la obra de Coale y Demeney.

Con la experiencia incorporada en las fuentes de materiales, cuatro tipos de patrones de mortalidad fueron identificados y desarrollados en cuatro grupos de Tablas-Tipo de Mortalidad.

La colección resultante se entiende mejor pensándola como Tablas de Mortalidad pertenecientes a cuatro familias dependientes de un parámetro. Ese parámetro es cualquiera seleccionado arbitrariamente de la Tabla de Mortalidad, al cual puede asignarsele cualquier valor dentro del rango de experiencia de mortalidad humana.

Las cuatro familias tienen diferentes patrones de mortalidad por edad, patrones de una naturaleza regional que llamaron: Oeste, Norte, Sur y Este.

Calcularon un total de más de 5000 Poblaciones Estables, asociadas con las 200 Tablas-Tipo de Mortalidad (25 para cada sexo en cada una de las 4 familias regionales). Calcularon el recíproco de la tasa de nacimientos, y varios parámetros de cada Población Estable, incluyendo la proporción de sobrevivientes en cada intervalo de cinco años, la tasa de nacimientos, tasa de defunciones y la tasa de crecimiento. Acompañando a cada distribución estable por edad, se tiene una distribución por edad de muertes que pueden ocurrir en la Población Estable.

Las cuatro familias de Tablas-Tipo de Mortalidad son el resultado de una búsqueda para diversos patrones distintivos en la variación de tasas de mortalidad con la edad. La búsqueda se originó en la imposibilidad de encontrar un único parámetro aceptable de toda la experiencia de mortalidad confiable.

La representación de las Tablas-Tipo de Mortalidad por medio de la llamada Transformación Logística, introducida por W. Brass, es una forma alternativa de representar un grupo de tablas como si estuvieran contenidas en un plano bi-dimensional.

El sistema logístico puede usarse como si consistiera de dos transformaciones; la primera de tasas específicas de edad en una función de sobrevivencia, y la segunda es la transformación de la función de sobrevivencia a valores logísticos. Supóngase que $p(a)$ y $q(a)$ son las proporciones que sobreviven a la edad a y mueren antes de alcanzar la edad a respectivamente, de acuerdo a un calendario por edad específico de mortalidad dado.

Supóngase después que $p_s(a)$ y $q_s(a)$ son proporciones sobreviviendo y muriendo de acuerdo a un calendario estándar.

Por definición:

$$\text{Logit } p(a) = \frac{1}{2} \log (p(a)/q(a))$$

Parte de su motivación para construir éstas familias de Tablas-Tipo de Mortalidad, fue proveer de una herramienta de investigación que prometiera ser útil en el estudio de cambios históricos en la población de Europa. Las Tablas-Tipo proporcionaron valiosas formas de estimación para éste proyecto, y para estudios de Demografía Histórica.

Las cuatro familias de Tablas-Tipo, también proveen una base para estimar Tablas de Mortalidad en poblaciones fuera de las que marcan las tablas modelo por sí mismas, sugieren utilizar las Tablas-Tipo de la familia Oeste en las circunstancias usuales de países subdesarrollados donde no existe una guía realista de los patrones de edad de mortalidad que prevalecen.

Los principales pasos en los cálculos de los cuatro grupos de Tablas-Tipo de Mortalidad fueron:

1) Intercorrelación de matrices para ${}_nq_x$ y $\log({}_nq_x)$, fueron calculadas para los datos del Norte, Sur, Este y Oeste.

2) La mínima raíz de la regresión linal para ${}_nq_x$ y de $\log({}_nq_x)$ en e^o_{10} fueron estimadas para ambos sexos en las cuatro regiones.

3) Los valores de ${}_nq_x$ estimados de la regresión logarítmica son siempre superiores a los de la regresión de Tasas de Mortalidad sin transformar en extremos máximo y mínimo de expectativas de vida observadas, y los valores de la regresión logarítmica, son siempre menores en el rango medio. En otras palabras, las dos líneas de regresión siempre se intersectan doblemente con el rango de observaciones. Entre las dos intersecciones, la media de los valores ${}_nq_x$ de las dos regresiones se utilizó.

4) De diversos valores de la variable independiente (e^o_{10}) , ${}_nq_x$, fueron calculadas a edades: 0, 1, 5, 10, ... 75. Para cada conjunto de ${}_nq_x$, l_1, l_5, $l_{10}, \ldots, l_{80}$, fueron computadas con l_o tomado como 100,000. Después de la edad 80, l_x se calculó con la fórmula de Gompertz:

$$l_x = l_{80} \exp \left[-(\mu(80)/k)\ e^{k(x-80)} - 1 \right]$$

donde:

$$k = \log \left[\mu(105) - \mu(77.5) \right] / 27.5$$

$$\mu(105) = 0.551 + 1.75({}_5q_{75}) \quad \text{para hombres}$$

$$\mu(77.5) = (l_{75} - l_{80})/{}_5L_{75}$$

5) ${}_nL_x$ y e^o_x fueron estimados mediante el uso de la fórmula:

$$ {}_1L_0 = k_0 \, l_0 + (1 - k_0)l_1 $$

$$ {}_4L_1 = k_1 \, l_1 + (4 - k_1)l_5 $$

$$ {}_5L_x = k_x \, l_x + (5 - k_x)l_{x+5} \qquad x = 5,10, \ldots 75 $$

${}_5L_x$(x = 80,85,90 y 95) se calcula por aproximación numérica de la integral $\int_x^{x+5} l(y)\,dy$, utilizando la expresión de Gompertz para l(y) en intervalos de medio año, T_{100} se calculó como: $\int_{100}^{\infty} l(x)\,dx$:

$$ T_x = \sum_x^{95} {}_5L_y + T_{100} $$

$$ e^o_x = \frac{T_x}{l_x} $$

6) Las tasas de mortalidad a una edad específica (${}_nm_x$) se calculan de la fórmula:

$$ {}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} $$

7) Las tasas de sobrevivencia de 5 años para proyectar grupos de 5 años de edad (${}_5 P_x$), se calculan de la fórmula:

$$ {}_5 P_x = \frac{{}_5 L_{x+5}}{{}_5 L_x} \qquad x = 0,\ 5,\ \ldots,\ 95 $$

La primera tasa de sobrevivencia es la proporción sobreviviendo al final de intervalo de 5 años de personas nacidas durante el intervalo estimado como: $\dfrac{{}_5 L_0}{{}_5 l_0}$.

La última tasa de sobrevivencia es de las personas arriba de 95 años en el comienzo de un intervalo (y sobre 100 al final), estimado como: $\dfrac{T_{100}}{T_{95}}$.

8) Ambas tablas masculinas y femeninas se calcularon por regresión de ${}_n q_x$ en e^0_{10}.

Sujeto a algunas reservas, las Tablas-Tipo de Mortalidad pueden usarse como sustitutos de tablas calculadas con Métodos Actuariales usuales. Esta sustitución es especialmente útil para calculos demográficos estandar, tales como proyecciones de población.

Cada una de las más de 5,000 distribuciones estables por edad es una combinación de una Tabla-Tipo de Mortalidad y una Tasa de Incremento. La proporción de personas en 22 intervalos de edad fueron calculadas en intervalos del 1, 1-5, 5-10, ...95-100, 100+. La expresión exacta para la proporción en cada intervalo es:

$$\int_{a1}^{a2} c(a)\, da = b \int_{a1}^{a2} e^{-ra}\, p(a)\, da$$

En los cálculos, la siguiente aproximación fué empleada:

$$\int_{a1}^{a2} e^{-ra}\, p(a)\, da \cong e^{-r\bar{a}} \int_{a1}^{a2} p(a)\, da$$

Esta fórmula aproximada es lo suficientemente exacta si se toma el valor interior $\bar{a}$ apropiado. Para todo intervalo hasta la edad 80, $\bar{a}$ se toma como $\frac{(a_1 + a_2)}{2}$ y $\int_{a1}^{a2} p(a)\, da$, se toma de la columna L_x. Después de 80, la integral se evaluó en fracciones de un año de edad, de la expresión *p(a)* de Gompertz. Este refinamiento es necesario debido a las asumpciones de que $\bar{a}$ es $\frac{(a_1 + a_2)}{2}$ conduce a resultados imprecisos.

Una característica importante de una Población Estable, es el Calendario Fundamental de Fertilidad. Un Calendario de Fertilidad y un Calendario de Mortalidad determinan completamente la Tasa Intrínseca de Crecimiento. Existe una familia de Calendarios de Fertilidad que en conjunción con una Tabla de Mortalidad dada, puede producir la misma Tasa Intrínseca de Crecimiento, y por lo tanto la misma Población Estable. La relación entre la fertilidad y la Tasa Intrínseca de Crecimiento está dada por la ecuación:

$$\int_{o}^{v} e^{-\rho a}\, p(a)\, m(a)\, da = 1$$

Lotka calcula ρ (tasa intrínseca de crecimiento), de Calendarios de Fertilidad y Mortalidad derivando una serie de potencias. La forma de Calendarios de Fertilidad tienen sólo variabilidad limitada. En todas las poblaciones donde se tienen registros por lo general la fertilidad es cero hasta cerca de los 15 años de edad, se incrementa fácilmente a un único pico, y cae fácilmente a cero por las edades de 45-50. La edad media del Calendario de la Fertilidad es usualmente entre las edades 26-33.

Variaciones en la estructura del Calendario de Edad de la Fertilidad ocurren debido a diferentes costumbres que gobiernan la edad de cohabitación, del uso de anticonceptivos, etc. Pero en todos los calendarios los momentos más altos con respecto a la media no son lo suficientemente grandes para afectar a ρ, y existe una relación cercana y constante de la varianza a la media que el conocimiento de la tasa bruta de reproducción (el área por debajo del calendario de edad) y la edad media del calendario, es suficiente para estimar ρ con un márgen de error muy pequeño.

Así mismo, las variaciones en los momentos más altos del calendario de fertilidad no son importantes al determinar ρ, la edad media del calendario de fertilidad tiene una influencia fuerte en la tasa de incremento, especialmente cuando la fertilidad es alta.

Por lo tanto, cada Población Estable es consistente con diferentes Tasas Brutas de Reproducción (GRR), para calendarios de fertilidad con diferentes edades medias.

Puede demostrarse que b = GRR $c(\bar{m})$, donde $c(\bar{m})$ es la proporción de la población femenina a la edad media del calendario de fertilidad.

En las Tablas "GRR" de Coale y Demeney, la cantidad dada es la Tasa Bruta de Reproducción donde $\bar{m}$ = 29 años. Calcularon la ρ implicada por éste calendario de fertilidad dado, y el calendario de mortalidad relevante, ρ la calcularon por un método recursivo. Utilizaron $\rho = (\log R_o)/T$; $\Gamma = \mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2\, \rho + \ldots$; y $\frac{\mu_2}{2\mu_1} = 0.7$, por calendarios de fertilidad humana. Este valor aproximado de ρ es muy cercano a la ρ de la ecuación integral:

$$\int_0^{w} e^{-\rho a}\, p(a)\, m(a)\, da = 1.$$

La edad promedio de cada población se calculó como la suma de la proporción de la población en cada intervalo de edad, multiplicado por la edad media de las personas en el intervalo. La edad media del intervalo de a a $a + n$, se tomó como:

$$a + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{12} (p + m)$$

donde m es la Tasa de Mortalidad en el intervalo. La edad promedio a la *muerte* se calculó sumando la proporción de muertes en cada intervalo de edad, multiplicado por la edad media de aquellos que fallecen en dicho intervalo, con correlación de $\frac{n\,p^2}{12}$ por intervalos de anchura n.

GLOSARIO DE SIMBOLOS UTILIZADOS EN LAS TABLAS

NOTACION EN LAS TABLAS-TIPO DE MORTALIDAD.

$_nq_x$ Probabilidad a la edad *x* de morir antes de alcanzar la edad *x+n*.

$_nd_x$ Número de fallecimientos entre las edades *x* y *x+n*, fuera de una cohorte original de 100,000.

$_nm_x$ Tasa de Mortalidad en la población de la Tabla-Tipo Mortalidad, (número de fallecimientos por años vividos por persona) entre las edades *x* y *x+n*.

l_x Número de sobrevivientes a la edad *x* fuera de una cohorte original de 100,000.

$_nL_x$ Número de años vividos por persona entre la edad *x* y *x+n* por una cohorte original de 100,000. Esta columna da la distribución por edad en una Población Estacionaria con 100,000 muertes y nacimientos anuales.

$P(x)$ $\dfrac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x}$ Proporción de vivos 5 años después de un grupo dado en una Población Estacionaria. Nótese que la entrada después de la edad cero en ésta columna P(Nacimiento) es $\dfrac{{}_5L_0}{{}_5l_0}$, P(0-4) es $\dfrac{{}_5L_5}{{}_5L_0}$, y que la entrada después de la edad 95 es $\dfrac{T(100)}{T(95)}$.

T_x Número de años vividos por persona a la edad x y en adelante por una cohorte original de 100,000.

e_x^o Promedio numérico de años faltantes de vivir (esperanza de vida) a la edad x.

En las columnas primera y última de las Tablas de Mortalidad se muestran las edades exactas $x = 0, 1, 5, \ldots,$ 100. Nótese que la anchura del intervalo de edad, denotado por el subíndice n en la notación convencional es implícito en la secuencia de éstas edades exactas. Por lo tanto, la anchura del primer intervalo es un año (entre la edad exacta

0 y 1), la anchura del segundo intervalo es 4 años (entre las edades exactas 1,5), y de ahí en adelante la anchura de cada intervalo es de 5 años hasta la edad 100. La última línea de las tablas se refieren al intervalo de edad "abierta", desde la edad exacta 100 en adelante.

MODELO OESTE

NIVEL 22

FEMENINA

TABLA-TIPO DE MORTALIDAD

Edad(x)	1000q(x)	d(x)	1000m(x)	l(x)	L(x)	P(x)	T(x)	e(x)
0	22.82	2,282	23.29	100,000	97,980	0.97642	7,250,000	72.500
1	4.69	458	1.18	97,718	389,720	0.99589	7,152,012	73.190
5	2.23	217	0.45	97,260	485,702	0.99812	6,762,291	69.528
10	1.82	176	0.36	97,043	484,791	0.997[illegible]	6,276,589	64.679
15	2.96	287	0.59	96,867	483,644	0.99646	5,791,798	59.791
20	4.16	402	0.83	96,580	481,934	0.99536	5,308,153	54.961
25	5.16	497	1.04	96,178	479,697	0.99422	4,826,219	50.180
30	6.45	617	1.29	95,681	476,925	0.99250	4,346,522	45.427
35	8.63	821	1.73	95,064	473,350	0.98960	3,869,597	40.705
40	12.33	1,162	2.48	94,243	468,426	0.98453	3,396,248	36.037
45	18.92	1,761	3.82	93,081	461,177	0.97647	2,927,822	31.455
50	28.63	2,614	5.81	91,320	450,324	0.96426	2,466,645	27.011
55	43.68	3,874	8.92	88,705	434,229	0.94431	2,016,322	22.731
60	69.29	5,878	14.34	84,831	410,048	0.90948	1,582,093	18.650
65	115.24	9,098	24.40	78,953	372,930	0.85041	1,172,045	14.845
70	191.66	13,388	42.21	69,855	317,143	0.75306	799,115	11.440
75	308.18	17,402	72.86	56,467	238,828	0.62832	484,972	8.536
80	455.69	17,801	118.63	39,065	150,060	0.46569	243,144	6.224
85	633.89	13,479	192.88	21,263	69,882	0.29027	93,084	4.378
90	809.87	6,305	310.80	7,785	20,285	0.13782	23,202	2.980
95	935.59	1,385	495.31	1,480	2,796	0.04157	2,917	1.971
100	1,000.00	95	786.15	95	121	0.00000	121	1.272

MODELO OESTE
NIVEL 22
MASCULINA

TABLA-TIPO DE MORTALIDAD

Edad(x)	1000q(x)	d(x)	1000m(x)	l(x)	L(x)	P(x)	T(x)	e(x)
0	30.99	3,099	31.85	100,000	97,309	0.96690	6,856,974	68.570
1	6.18	599	1.55	96,901	386,142	0.99409	6,759,666	69.759
5	3.45	332	0.69	96,302	480,595	0.99700	6,373,524	66.183
10	2.84	272	0.57	95,969	479,193	0.9960[illegible]	5,892,929	61.404
15	5.27	504	1.06	95,697	477,275	0.99374	5,413,736	56.572
20	7.34	699	1.47	95,193	474,287	0.99264	4,936,461	51.857
25	7.39	698	1.48	94,494	470,794	0.99215	4,462,174	47.222
30	8.35	783	1.68	93,796	467,100	0.99050	3,991,380	42.554
35	10.77	1,001	2.16	93,013	462,661	0.98678	3,524,280	37.890
40	15.91	1,464	3.21	92,012	456,544	0.97948	3,061,618	33.274
45	25.59	2,317	5.18	90,548	447,177	0.96716	2,605,074	28.770
50	40.91	3,610	8.35	88,231	432,490	0.94733	2,157,897	24.457
55	65.95	5,581	13.62	84,621	409,710	0.91712	1,725,407	20.390
60	102.52	8,103	21.56	79,040	375,752	0.87229	1,315,697	16.646
65	158.13	11,217	34.22	70,937	327,763	0.80512	939,945	13.250
70	242.17	14,463	54.81	59,720	263,889	0.70272	612,182	10.251
75	361.00	16,338	88.10	45,257	185,441	0.57321	348,293	7.696
80	509.78	14,742	138.69	28,919	106,297	0.41516	162,851	5.631
85	681.16	9,657	218.82	14,177	44,130	0.25125	56,554	3.989
90	840.03	3,797	342.46	4,520	11,088	0.11631	12,424	2.749
95	947.06	685	531.01	723	1,290	0.03489	1,336	1.848
100	1,000.00	38	821.10	38	47	0.00000	47	1.218

FORMULAS ENUMERADAS.

NUMERO	FORMULA	RESTRICCION
(1)	$s'(x) - r\, s(x) = k\, S\, p(x)$	$\alpha < x < \beta$
(2)	$s(x) = k\, S\, e^{rx} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\, p(t)\, dt$	$\alpha < x < \beta$
(3)	$s'(x) - r\, s(x) = -\, S\, p(x)$	$x > \beta$
(4)	$s(x) = S\, e^{-rx} \int_{x}^{v} e^{-rt}\, p(t)\, dt$	$x > \beta$
(5)	$k = \dfrac{\int_{\beta}^{v} e^{-rx}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx}\, p(x)\, dx}$	
(5.1)	$k = k_o \exp\left[\, (\bar{x}_a - \bar{x}_r)\, r \,\right]$	

FORMULAS ENUMERADAS.

NUMERO	FORMULA	RESTRICCION
	dondes $k_o = \dfrac{\int_{\beta}^{v} p(x)\,dx}{\int_{\alpha}^{\beta} p(x)\,dx}$	
(5.II)	$k = k_o \exp \left[r\,(\bar{x}_a - \bar{x}_r) - \dfrac{r^2}{2}\,(\sigma_a^2 - \sigma_r^2) \right.$	
(5.III)	$k = k_o \exp \left[r\,(\bar{x}_a - \bar{x}_r) - \dfrac{r^2}{2}\,(\sigma_a^2 - \sigma_r^2) + \dfrac{r^3}{3}\,(k_a - k_r) \right]$	
(6)	$N(t)\,c(x) = N(t)\,b\,e^{-\mu x}\,p(x)$	
(7)	$A = N(t)\,b \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\mu x}\,p(x)\,dx$	$\alpha < x < \beta$
(8)	$B = N(t)\,b \int_{\beta}^{v} e^{-\mu x}\,p(x)\,dx$	$x > \beta$

FORMULAS ENUMERADAS.

NUMERO	FORMULA	RESTRICCION
(9)	$h = \dfrac{\int_{\beta}^{v} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho x}\, p(x)\, dx}$	
(9.I)	$h = h_o \exp\left[(\bar{x}_{\alpha} - \bar{x}_r) \right]$	
(9.II)	$h = h_o \exp\left[\rho\, (\bar{x}_{\alpha} - \bar{x}_r) - \dfrac{\rho^2}{2} (\sigma_{\alpha}^2 - \sigma_r^2) \right]$	
(9.III)	$h = h_o \exp\left[\rho\, (\bar{x}_{\alpha} - \bar{x}_r) - \dfrac{\rho^2}{2} (\sigma_{\alpha}^2 - \sigma_r^2) + \dfrac{\rho^3}{3} (k_{\alpha} - k_r) \right]$	
(10)	$\dfrac{s(x)}{p(x)} = k\, S\, e^{rx} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\, p(t)\, dt$	$\alpha < x < \beta$
(11)	$F(x) = k\, \dfrac{e^{rx}}{p(x)} \int_{\alpha}^{x} e^{-rt}\, p(t)\, dt$	$\alpha < x < \beta$

FORMULAS ENUMERADAS.

NUMERO	FORMULA	RESTRICCION
(12)	$\dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{S\ e^{rx}}{p(x)} \int_x^v e^{-rt}\ p(t)\ dt$	$x > \beta$
(13)	$R(x) = \dfrac{e^{rx}}{p(x)} \int_x^v e^{-rt}\ p(t)\ dt$	$x > \beta$
(14)	$\dfrac{A + B}{\Sigma} = \dfrac{(h - k)}{r - \rho}$	
(14.1)	$\dfrac{h - k}{r - \rho} = \dfrac{k_o}{r - \rho} \left[\exp(\rho m - \rho^2 v) - \exp(rm - r^2 v) \right]$	
(15)	$s'(x) - r\ s(x) = k\ \sigma(\alpha)\ e^{\lambda(x-\alpha)}\ p(x)$	
(16)	$s(x) = k\ \sigma(\alpha)\ e^{-\lambda\alpha}\ e^{rx} \int_\alpha^x e^{(\lambda-r)t}\ p(t)\ dt$	$\alpha < x < \beta$
(16.1)	$s(x) = \sigma(\alpha)\ e^{-\lambda x}\ e^{rx} \int_\alpha^x e^{(\lambda-r)t}\ p(t)\ dt$	$x > \beta$

FORMULAS ENUMERADAS.

NUMERO	FORMULA	RESTRICCION
(17)	$k = \dfrac{\int_{\beta}^{v} e^{-(r-\lambda)x}\, p(x)\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-(r-\lambda)x}\, p(x)\, dx}$	
(18)	$\dfrac{s(x)}{p(x)} = k\, \sigma(t)\, \dfrac{e^{(r-\lambda)x}}{p(x)} \int_{\alpha}^{x} e^{(\lambda-r)t}\, p(t)\, dt$	
(19)	$C_i = r\, \dfrac{h-k}{r-\rho}$	
(20)	$C_i = r\, \dfrac{h-k'}{r-\lambda-\rho}$	

donde:

k' es la cotización directa calculada con una tasa de interés $r - \lambda$.

BIBLIOGRAFIA.

B I B L I O G R A F I A

1. BELMONT GONZALEZ, BLAS, (1981): "Modelo para la Valuación de un Régimen de Jubilaciones y Pensiones derivado de un Contrato Colectivo de Trabajo, con Base en el Sistema de Prima Escalonada", Tesis Profesional, ENEP Acatlán, UNAM.

2. BOURGEOIS-PICHAT, JEAN, "Aplicación de la Teoría de las Poblaciones Estables a un Sistema de Seguridad Social", Conferencia dictada en el Seminario sobre Temas Demográficos, en la Subsede del CELADE, en el mes de septiembre de 1970. San José Costa Rica (1971) Serie DS No. 3

3. ____________, (1978) " Le Financement des Retraites par Capitalisation", Population 5, 1115-1136.

4. ____________, (1966) "The concept of a Stable Population apllication to the study of populations of countries with incomplete population statistics, United Nations, New York 1966.

5. BOWERS, GERBER, HICKMAN, JONES, NESBIT, (1986), "Actuarial Mathematics", Society of Actuaries.

6. BUSTAMANTE JERALDO, JULIO DR., et al, (1991): "Fondos de Pensiones", Seminario de la Bolsa Mexicana de Valores, Junio 1991, México, D.F.

7. BOYCE, WILLIAM E AND DI PRIMA, RICHARD C., "Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera", Editorial Limusa, 3a. Edición, México, D.F., 1985.

8. COALE, ANSLEY AND DEMENEY, PAUL, "Regional Model Life Tables and Stable Populations", Academic Press, INC., New York, 1983.

9. DOMINGUEZ FENELON, LEONCIO, (1989): "Método para Calculas las Proyecciones Demográficas y Financieras de los Seguros de Invalidez, Vejez, Cesantía en Edad Avanzada y Muerte", Subdirección General de Finanzas del IMSS, México, D.F.

10. FERNANDEZ DAVILA, RAFAEL, et al, (1992): "Análisis del S.A.R. y su implicación en los Planes Privados de Pensiones", Asociación Mexicana de Actuarios Consultores en Planes de Beneficios para Empleados, A.C., México, D.F., Abril 1992.

11. GOMEZ DE LEON CRUCES JOSE Y PARTIDA BUSH VIRGILIO, (1991):,"Algunos Aspectos de los Beneficios de un Sistema de Pensiones mediante Capitalización Individual", Secretaría de Programación y Presupuesto, Abril 1991.

12. JORDAN, C.W. "Life Contingencies", Society of Actuaries.

13. KEYFITZ NATHAN et GOMEZ DE LEON, JOSE, "Considérations Démographiques sur les Systèmes de Retraite", Population, 4-5, 1980, 815-836.

14. PRESSAT, ROLAND, "Diccionario de Demografía", Colección Ciencias Geográficas, Oikos-Tau, S.A. Ediciones, Barcelona España, 1987.

15. RAINVILLE, EARL D, "Ecuaciones Diferenciales Elementales", Editorial Trillas, México, D.F., 1983.

16. RODRIGUEZ RAMOS, NOE, (1980): "Análisis Crítico del Equilibrio Financiero del Seguro Social Mexicano", Tesis Profesional, ENEP Acatlán, UNAM.

17. SANCHEZ CHIBRAS, J. ANTONIO y ARRIAGA PARRA, MARIO, "Elementos del Cálculo Actuarial", Tesis Profesional, ENEP Acatlán, UNAM, 1981.

18. SOTO PEREZ, CARLOS JORGE, (1991):"Aplicación de Bases Biométricas Dinámicas a la Valuación Actuarial de Pensiones", Comisión Americana de Actuaria y Financiamiento de la CISS, XVIII Reunión, Rio de Janeiro, Brasil, 1991.

19. ___________, (1991): "Desequilibrio Financiero en los Regimenes Sociales de Pensiones", Quinta Conferencia Regional Americana de la AISS, Ottawa, Canada, 1991.

20. ___________, (1990), "Pensiones. Diagnóstico y Medida del Impacto Financiero", Comisión Americana de Actuaría y Financiamiento, Conferencia Interamericana de Seguridad Social, México, D.F. diciembre de 1990.

21. CELADE, (1990): "Boletin Demográfico: Proyecciones de Población de América Latina 1950-2025", Año XXIII, No. 45, Santiago de Chile, CELADE, Enero 1990.

22. CISS, (1982): "El Financiamiento de Regimenes Obligatorios de Pensiones Bajo Condiciones Dinámicas y las Nuevas Matemáticas Actuariales", Seguridad Social AÑO XXXI, Nums. 135-136, Epoca V, Secretaría General de la CISS, México, D.F.

23. GRUPO BURSATIL MEXICANO S.A. DE C.V.,(1992): "Fondos de Pensiones", CASA DE BOLSA.

24. GRUPO SOCIMER INTERNATIONAL BANK,(1990): "Proposición de Reforma al Sistema Previsional Mexicano", Dirección de Estudios y Proyectos, Agosto 1990,