

8
2e;



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO
Facultad de Ciencias

El Caos en Biología:
¿Reflejo de un Modelo Matemático?

TESIS

Que para obtener el Título de:

MATEMATICO

Presenta:

María Alexandra Chávez Ross

México, D. F. 1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I. INTRODUCCION.....	1
II. CAOS DETERMINISTA.....	6
2.0. Introducción.....	6
2.1. Caos Determinista.....	6
2.2. Una Definición Topológica del Caos.....	19
2.2.1. Análisis gráfico de las órbitas del sistema.....	22
2.2.2. Puntos periódicos hiperbólicos.....	24
2.2.3. Puntos indiferentes o no-hiperbólicos.....	26
2.2.4. Un modelo de crecimiento de poblaciones.....	27
2.2.5. Parámetro de la familia logística.....	31
2.2.6. Equivalencia topológica.....	43
2.2.7. Caracterización topológica del Caos.....	47
III. CAOS EN MODELOS BIOLÓGICOS.....	72
3.0. Introducción.....	72
3.1. Caos en Biología.....	72
3.2. Modelos en Ecología.....	76
3.2.1. Modelos de crecimiento unidimensional discreto.....	81
3.2.2. Modelos de crecimiento unidimensional continuo.....	93
3.2.3. Modelos de crecimiento discreto para poblaciones no homogéneas.....	94
3.2.3.1. Estructuración por clase de edades.....	95
3.2.3.2. Estructuración por clases de especies. Modelo de crecimiento de Lotka-Volterra.....	98
3.2.3.3. Modelo de competencia de tres especies: un depredador y dos especies distintas de presas.....	99
3.2.3.4. Modelos SEIR de epidemiología.....	100
IV. CAOS EN FENÓMENOS BIOLÓGICOS	
4.0. Introducción.....	102
4.1. Efectos del ruido en sistemas de dinámicas caóticas.....	102
4.2. Caos en fenómenos biológicos.....	104
4.2.1. Fluctuaciones en la población del lince canadiense (Lynx canadensis).....	104
4.2.2. Caos en epidemiología.....	108
4.2.3. Funcionalidad del Caos de M. Conrad.....	109
4.3. Argumentos en contra.....	112
4.3.1. Modelo de Hassell.....	112
4.3.2. Modelos de crecimiento continuo con retraso de una sola especie.....	115
4.3.3. Argumentos de A.A. Berryman y J.A. Millistein.....	116
4.4. Conclusiones.....	121
BIBLIOGRAFIA.....	126

INTRODUCCION

¿Por qué los modelos matemáticos en Biología?

Desde tiempos inmemoriales, el hombre ha intentado comprender la serie de regularidades e irregularidades del mundo que lo rodea. Esto lo ha llevado a un paso más allá de la simple observación y comprensión de los fenómenos naturales. El intento de predecir los acontecimientos posteriores es uno de los resultados de la observación y la comprensión. Esto le ha sido posible, gracias a la existencia de fenómenos que se repiten a lo largo del tiempo. Ya que se ha comprendido perfectamente el mecanismo de cierto fenómeno, la manipulación del mismo es el paso a seguir.

Debido a que las matemáticas son consideradas como un lenguaje universal con la capacidad de proporcionar la herramienta necesaria para la descripción de la naturaleza, el cuantificar los fenómenos naturales ha facilitado su estudio. Sin duda, los fenómenos físicos han sido, al menos en principio, los más inmediatos para interpretar por medio de un lenguaje matemático. La capacidad de abstracción de la mente humana ha permitido desarrollar una vasta teoría matemática, la cual en cooperación con las reglas naturales han intercambiado los papeles en la tarea de comprender a la naturaleza. De esta manera, el desarrollo de las matemáticas ha permitido el desarrollo de la física y viceversa.

Dentro de los fenómenos biológicos, también se han encontrado ciertas reglas que bien pueden ser interpretadas por las matemáticas; aunque esta labor es un tanto más complicada que la de cuantificar la física, por lo menos en cuanto a la mecánica clásica se refiere, pues se trata de modelar fenómenos más complejos cualitativamente hablando. Al parecer, hasta la fecha, no existe una definición de qué es la vida, por lo que ¿cómo vamos a describir algo que ni siquiera está bien definido?. Por consiguiente el observar, tratar de comprender y predecir fenómenos biológicos no es nada trivial y el pedirle ayuda a las matemáticas, es un camino que muchos científicos han decidido tomar. En este trabajo se intenta presentar a la Teoría del Caos como una alternativa para la descripción de ciertos fenómenos biológicos al plantear los argumentos a favor y en contra, que ya se han realizado en cuanto a que algunos fenómenos biológicos se comportan de manera caótica, se desarrollan los conceptos que giran en torno a lo que consideraremos como Caos en biología.

El Caos en Biología

El Caos forma parte del comportamiento de los sistemas complejos. Partiendo de que un sistema complejo es aquel que contiene un gran número de grados de libertad, o lo que es lo mismo, un gran número de variables independientes que lo conforman, se sabe que en biología existen muchos sistemas de este tipo. Sin embargo, también existe un fenómeno intuitivamente contrario que se puede llamar Anticaos, el cual se encarga de describir a aquellos sistemas altamente desordenados que llegan en un momento dado a "cristalizarse" en estructuras altamente ordenadas. [Kauffman,1991]

La selección natural, es el mecanismo más importante que se encarga de mantener una autoconsistencia entre los organismos de un sistema y todo el ecosistema como un conjunto, todo esto en favor de la permanencia de los sistemas biológicos en el "juego de la vida". De esta manera, la dinámica de las partes (los individuos) debe de ser consistente con la dinámica del conjunto (el ecosistema). Cuando esto no sucede, por ejemplo cuando la dinámica de los individuos es inconsistente con la dinámica del ecosistema, la selección natural se

encarga de eliminar a dichos individuos. Si la dinámica de los individuos persiste en ser inconsistente con la dinámica del ecosistema, las características de los organismos cambiarán a través de diversos mecanismos hasta que se alcance una dinámica global aceptable. Es así, como de manera indirecta la selección natural interviene en la dinámica del sistema. [Conrad, 1989]

Se ha propuesto al Caos como la manera de describir los sistemas seleccionados naturalmente. A pesar de que la misma teoría del origen del universo, postula que todo partió del caos al cosmos; es decir, de sistemas totalmente desordenados a sistemas con una estructura altamente ordenada, se ha visto que el fenómeno orden-caos está presente en la evolución de los fenómenos naturales en el transcurso del tiempo. Inicialmente, fue en física donde se observó dicha cualidad en ciertos fenómenos por primera vez. Específicamente nos referimos al fenómeno climatológico que Edward Lorenz describió por medio de la teoría de Sistemas Dinámicos a mediados del presente siglo [Lorenz, 1963]. El observó que bajo ciertas condiciones un fenómeno, a pesar de tener dinámicas complicadas pero bien determinadas, pasaba de ser totalmente predecible a ser impredecible del todo. Es decir, dados dos punto iniciales del sistema tan cercanos como se quiera, podían llegar a tener comportamientos totalmente diferentes a lo largo del tiempo. A este fenómeno lo denominó "el efecto mariposa".

Modelos en Ecología

A pesar de que en biología, en el caso particular de la ecología, el desarrollo de modelos se basó en los modelos estructurados en la demografía; se ha utilizado la misma herramienta matemática que en física para el análisis de sus dinámicas. La historia del desarrollo de la demografía humana, al parecer tiene sus bases en el desarrollo socio-económico del hombre; principalmente con el tránsito hacia el capitalismo dentro de las sociedades urbanas más ricas. John Graunt, comerciante británico, a mediados del siglo XVII en su obra "Natural and Political Observations mentioned in a following index and made upon the Bills

of Mortality" (Observaciones naturales y políticas que se mencionan en el índice que sigue y basadas en las declaraciones de mortalidad), realiza una consideración importante en cuanto a la tasa de crecimiento constante de una población, lo que haría que la densidad poblacional fuera varias veces superior a la existente. No fue sino hasta finales del siglo XVIII, que el economista inglés Thomas Robert Malthus, propuso su teoría del crecimiento geométrico de las poblaciones, mientras que los recursos alimentarios crecen de forma aritmética. Posteriormente, durante el siglo XIX, los estudios del crecimiento poblacional revelaron que dicha tasa podía tener ciertas variaciones en el transcurso del tiempo; ello hizo que Verhulst, en 1830, propusiera el famoso modelo logístico cuya dinámica se describe ampliamente en este trabajo. Durante principios del siglo XX, sobre todo a partir de la Primera Guerra Mundial, se ha seguido trabajando en los modelos de crecimiento de poblaciones, realizando investigaciones a nivel de campo y laboratorio. En 1923, Lotka se convence del carácter general de la ecuación logística y describe el crecimiento de poblaciones con interacciones interespecíficas. Por otro lado Vito Volterra, quien estaba muy interesado en la aplicación de las matemáticas a las ciencias biológicas y sociales, llegó a las mismas ecuaciones de Lotka para describir el crecimiento de una población de individuos de diferentes especies que interactúan por la competencia de los recursos, en la cual, una de las especies es parasitada o depredada. Por lo demás, se sigue manteniendo el supuesto malthusiano [Altesor,1989].

El presente trabajo se divide en tres partes principales. En una de ellas, capítulo dos, se expone de manera explícita y formal lo que se considera como Caos en Matemáticas. Es importante definir bien lo que se pretende buscar dentro de los fenómenos biológicos. Se desarrolla una definición topológica del Caos Determinista, con base en la Teoría de Sistemas Dinámicos; teoría que se utiliza para describir las dinámicas de los diferentes sistemas que describen los fenómenos biológicos, particularmente ecológicos y epidemiológicos. Dichos sistemas se pueden dividir en dos: los continuos y los discretos. Para los continuos se utilizan las ecuaciones diferenciales, que al integrarlas nos darán las soluciones del sistema; o lo que es lo mismo, la evolución en el tiempo de las

variables del sistema que cumplen con las características de las ecuaciones. Y en el caso discreto, la dinámica está determinada por las iteraciones sucesivas de la función que caracteriza la dinámica del sistema. Se observará que el tipo de dinámicas que desarrolle un sistema dependerá de sus parámetros, los cuales contienen la información específica del sistema cuyo comportamiento en el tiempo se desea describir.

Dentro de este mismo capítulo, se establecen las herramientas matemáticas necesarias para identificar el Caos a partir de los datos obtenidos directamente del fenómeno biológico. Esto es de suma importancia para los propósitos de esta tesis, pues este medio servirá para argumentar a favor o en contra de que la mejor manera de describir ciertos fenómenos biológicos es por medio de la Teoría del Caos. El objetivo principal de esta tesis es tratar de mostrar que si en principio es difícil encontrar dinámicas caóticas a partir de los modelos una vez estructurados, no nos debemos limitar y debemos buscar otras maneras de encontrar dichas dinámicas en los fenómenos. Es decir, una vez que se haya comprobado que dichos modelos efectivamente reflejan comportamientos reales; es a través de los mismos datos experimentales que sirven para el cotejamiento de la dinámica del modelo con la dinámica del fenómeno biológico, en lo que nos debemos fundamentar para asegurar la existencia o la no existencia del Caos en biología.

En el capítulo tres se presentan algunos modelos de biología, los cuales bajo ciertas características pueden desarrollar dinámicas caóticas. Este capítulo pretende mostrar los trabajos realizados en torno a la modelación matemática en biología, que ha llevado a algunos científicos a asegurar que el Caos en biología no existe en la naturaleza.

Finalmente, en el capítulo cuatro se exponen los diversos argumentos a favor de la existencia fenomenológica del Caos en biología, a partir del análisis de los datos experimentales de algunos fenómenos. Se plantea la polémica que ha surgido alrededor de estos preceptos y se dan ciertas conclusiones obtenidas a partir del análisis de todo lo anterior.

CAOS DETERMINISTA

2.0. INTRODUCCION

En este capítulo haremos una descripción conceptual y matemática del Caos Determinista; es importante conocer lo que los matemáticos y científicos en general, entienden por este fenómeno antes de entrar a la discusión de este punto.

Después de hacer una caracterización en términos generales expondremos una definición de Caos Determinista, en la que nos basaremos para discutir la existencia del Caos dentro de los modelos matemáticos en biología. Por otro lado, haremos una descripción acerca de las técnicas actualmente utilizadas para analizar series de datos experimentales, biológicos en particular, que son útiles para determinar la hipotética presencia de Caos dentro de dichos fenómenos.

2.1. CAOS DETERMINISTA

Con el afán de los científicos por establecer relaciones entre causa y efecto en los fenómenos de la naturaleza, se han desarrollado modelos matemáticos que los reflejan de la manera más fidedigna

posible. Mientras más fiel sea esa representación más complicada será matemáticamente hablando, debido a que dentro del modelo se deben considerar las diversas hipótesis que satisfacen la dinámica del fenómeno. Posteriormente, se mencionan explícitamente los supuestos ecológicos que Malthus consideró para el desarrollo del crecimiento geométrico de una población, pero que en la realidad, dichas hipótesis son falsas en la mayoría de los casos y al tratar de no tomarlas en cuenta en nuestra representación, la estructura matemática del modelo se complica. Dichas hipótesis, consideran al mayor número posible de variables independientes que intervienen en el comportamiento del fenómeno; y al no considerarlas, obtendremos una idealización de dicho fenómeno que muchas veces tiene una representación matemática sencilla.

Sin embargo, es posible establecer una relación clara entre las diferentes etapas del comportamiento del fenómeno. Es decir, al tratar de describir el comportamiento del fenómeno a lo largo del tiempo, podemos determinar su evolución a corto y largo plazo dado el estado inicial de las variables que intervienen en su descripción. Esto ha sido un gran logro en la humanidad porque, de esta manera, el hombre es capaz de predecir e incluso manipular ciertos fenómenos naturales lo que lo ha llevado a grandes avances tecnológicos. Al hecho de poder determinar el estado del fenómeno a corto o a largo plazo, una vez establecido su estado inicial, es a lo que se le conoce como Determinismo Laplaciano.

A pesar de lo anterior, existen fenómenos que no son predecibles en lo absoluto; fenómenos que al parecer no tienen relación alguna entre sus causas y sus efectos. Estos fenómenos pierden memoria de su disposición inicial o de las causas que originaron su comportamiento y el resultado o efecto es totalmente impredecible. A estos fenómenos se les conoce como azarosos o aleatorios [Dubois, 1987]. Muchas veces lo que sucede con este tipo de fenómenos, es que cuentan con un gran número de variables independientes entre sí que intervienen en su comportamiento y para las cuales, ni siquiera nos es posible encontrar una relación entre sus diferentes dinámicas, por lo que nos es imposible establecer un modelo matemático que nos determine la

dinámica del fenómeno a través del tiempo. Se utilizan conceptos de estadística como una herramienta para describir la evolución en el tiempo de este tipo de fenómenos. Definiremos "azarosidad" como impredecibilidad en la evolución a corto plazo de un sistema [Gückerheimer,1982].

La que sí se tenía perfectamente bien establecida, era la frontera que existía entre los fenómenos azarosos y los fenómenos deterministas. Sin embargo, a mediados del presente siglo, Lorenz se preguntó por qué no se podía predecir el estado del tiempo con dos semanas de anticipación, si se conocían perfectamente las leyes de la hidrodinámica que determinan el movimiento de las nubes, la presencia de ciclones, anticiclones, depresiones atmosféricas, etc. La dificultad para predecir el clima provenía de la enorme complejidad de las ecuaciones que resultaban de tomar en cuenta todos los fenómenos relevantes. Lorenz tuvo la habilidad para simplificar enormemente dichas ecuaciones y obtuvo un sistema de apenas tres ecuaciones diferenciales acopladas. La sorpresa en ese entonces fue encontrar que aún esas tres ecuaciones presentaban soluciones altamente irregulares donde una mínima variación en las condiciones iniciales daba lugar a escenarios completamente diferentes, después de integrar numéricamente las ecuaciones para un tiempo correspondiente a dos semanas. Metafóricamente, él ejemplificó esta irregularidad de su sistema de tres ecuaciones acopladas con el llamado "efecto mariposa", el cual dice que una mariposa que agita sus alas en Pekín puede ser la causa, unos días después, de una tempestad en la costa oeste de los Estados Unidos de América [Haken,1990]. Por lo tanto, la idea de que un sistema tiene un comportamiento aparentemente azaroso debido necesariamente al número de grados de libertad, actualmente se sabe que es completamente falsa. El ejemplo de las ecuaciones de Lorenz nos sirve para aclarar esta idea.

Este caso mostró por primera vez que el comportamiento impredecible puede provenir, intrínsecamente, de la naturaleza de las ecuaciones que rigen al sistema y no del número de variables involucradas en la descripción. Los resultados de Lorenz trajeron una

revolución conceptual importante; un cambio del paradigma científico que dominaba hasta entonces. Nos referimos al Determinismo Laplaciano. En el siglo XVIII, Pierre Simon de Laplace dijo que conociendo en un instante dado las posiciones y velocidades de todas las partículas del mundo entero, se podía conocer su estado presente, pasado y futuro. Esto como ya lo hemos mencionado, permitía un conocimiento pleno de la naturaleza [Haken,1990].

Por otro lado, dos científicos del Institut des Hautes Etudes Scientifiques de Bures-sur-Yvette, David Ruelle y Floris Takens, en el año de 1971, desconociendo el trabajo de Lorenz llegaron a un resultado conceptualmente equivalente con respecto al fenómeno de la turbulencia publicando un artículo hasta la fecha famoso, donde exponen la conjetura de que un sistema agitado por movimientos en los que sólo existen tres frecuencias independientes puede desestabilizarse: sus movimientos se vuelven entonces totalmente irregulares y erráticos [Ruelle & Takens,1971].

Para identificar su origen determinista, se acostumbra llamar "caóticos" a los movimientos que provienen de sistemas cuya relación causa-efecto está bien determinada; pero que bajo ciertas características es imposible predecir su comportamiento; y "aleatorios" a los comportamientos erráticos restantes. El "Caos Determinista" provocó un cambio en el pensamiento científico y estuvo precedido por trabajos de Henri Poincaré e incluso Maxwell a fines del siglo pasado [Dubois,1987]. Con esto resulta un hecho contundente que el Caos puede aparecer en ecuaciones muy sencillas y, lo más importante, deterministas. En la actualidad la gente ya se está acostumbrando a pensar que el Caos puede engendrarse en sistemas con pocos grados de libertad. Lo que ahora se pretende, es buscar leyes y regularidades dentro de este comportamiento para encontrar a otro nivel, más universal todavía, una cierta predecibilidad.[Haken,1990]

2.1.1. Caracterización del Caos Determinista

Por lo que el problema radica en distinguir si el sistema determinista con el que estamos tratando describe comportamientos

impredecibles (sistema caótico) o si tiene un comportamiento bien determinado o predecible (sistema ordenado). Para ello consideremos un sistema matemático, es decir un sistema de ecuaciones diferenciales o en diferencias (caso continuo y caso discreto respectivamente), que describe la evolución de algunas variables que intervienen en la dinámica del fenómeno que se pretende modelar.

En el caso continuo o discreto, definamos como trayectoria a la solución de dicho sistema matemático. Es decir a la función, que siendo continua o discreta, cumple con las ecuaciones diferenciales o en diferencias del sistema. Dicho de otro modo, la trayectoria es la función que describe el comportamiento de las variables del sistema a lo largo del tiempo.

Una vez establecidos estos conceptos, ¿cómo podemos decir si esta trayectoria es resultado de un comportamiento caótico del sistema o si está bien determinada? En otras palabras: ¿Cuál es la diferencia esencial entre una trayectoria regular y una trayectoria caótica? La dinámica no lineal proporciona varias maneras de distinguir entre ambas situaciones. No siempre es posible con una sola herramienta el determinar si un sistema es caótico o no, por eso estudiaremos varios métodos que nos ayudarán a decidirlo.

Veamos entonces una forma muy sencilla de definir lo que es una trayectoria caótica. Para esto consideremos el espacio donde "viven" todas las trayectorias del sistema, para valores fijos de los parámetros, los cuales describen ciertas características propias del fenómeno que se modela y hagámosle una partición en un número finito de pequeñísimas celdas que no se traslapan entre sí. A cada una de estas celdas pongámosle una etiqueta o un número para identificarlas rápidamente. Entonces, para describir la evolución de una trayectoria basta dar la secuencia de etiquetas de las celdas por las cuales pasó, a intervalos de tiempo constante, en el caso de sistemas discretos, dichos intervalos de tiempo pueden corresponder a los intervalos de tiempo de la evolución de dicho sistema. Con esta descripción, una trayectoria sería simplemente una secuencia de etiquetas o números. Como podemos ver, esta descripción no es exacta,

pero si quisiéramos describir con mayor precisión la evolución de dicha trayectoria, tendríamos que tomar una partición más pequeña, en el caso continuo por supuesto. Ahora preguntémosnos: ¿Cómo se vería una trayectoria estable y cómo se vería una trayectoria caótica utilizando esta descripción? Para una trayectoria estable, tendremos una secuencia de etiquetas con un patrón regular; en cambio, para una trayectoria caótica no se verá ningún tipo de patrón en la secuencia de etiquetas.

Más concretamente, para una órbita estable podríamos predecir la celda siguiente simplemente inspeccionando la secuencia de etiquetas que llevaba la trayectoria, ya que de alguna forma el patrón en el que aparecen las etiquetas es regular y se puede intuir cuál va a ser la siguiente celda que se va a ocupar. En cambio, para una trayectoria caótica, nos sería imposible predecir en cuál celda va a caer la trayectoria, ya que la sucesión de etiquetas es totalmente irregular, sin ningún orden aparente, por lo que tratar de predecir la secuencia de celdas sería como tratar de adivinar en qué número va a caer un dado.

Con esto queda claro, por lo menos intuitivamente, la diferencia esencial entre una trayectoria caótica y una regular. Veamos las consecuencias que tiene esta idea de predecir la siguiente celda conociendo la secuencia anterior de celdas. Si conocemos perfectamente la sucesión de celdas que ocupó una trayectoria en el pasado, digamos hasta el tiempo t , ¿podremos decir qué celda va a ocupar la trayectoria al tiempo $t+\Delta t$? La respuesta es obviamente sí, para una trayectoria regular y no para una trayectoria caótica. En este último caso, no importa qué tan larga sea la lista de etiquetas que tengamos del pasado evolutivo, nos será imposible predecir con exactitud cuáles serán las siguientes celdas que ocupará. Al parecer, esta ignorancia del futuro a mediano plazo (y por supuesto a largo plazo) radica en el hecho de que no sabemos con exactitud dónde estaba la trayectoria, lo cual proviene a su vez de la incertidumbre en el valor de las variables dinámicas del sistema.

En general, se puede afirmar que la evolución a futuro de una

trayectoria caótica, de la cual conocemos una buena parte de su pasado, no va a poder ser determinada por culpa de una propiedad intrínseca de ella misma y no por la forma en la que estemos describiendo nuestro sistema. Por otro lado, para una trayectoria regular no tendremos ese problema: podremos predecir el futuro de una partícula si conocemos su pasado. Por lo tanto, para un sistema con comportamiento caótico, no importa qué tantas ni qué tan precisas sean las mediciones que hagamos sobre él, nos va a ser imposible determinar el estado en el que se encuentre en el futuro.

La teoría desarrollada alrededor de este fenómeno irregular es vasta y está basada en la Teoría de Sistemas Dinámicos, ya que se analiza el comportamiento dinámico del sistema; es decir, su evolución o desempeño a lo largo del tiempo, como ya lo habíamos dicho.

El comportamiento periódico es el proceso básico de los fenómenos dependientes del tiempo; está caracterizado por la ocurrencia de sucesos que se repiten a intervalos de tiempo regulares, a cuyo intervalo de tiempo se le denomina período, y al mecanismo físico que da origen a este comportamiento, se le llama oscilador [Dubois, 1963].

Cabe señalar para el caso continuo, que un conjunto de condiciones iniciales (CI) determina de manera única una trayectoria. Este es el concepto básico del Determinismo Laplaciano en sistemas dinámicos. Debido a que en el espacio de las soluciones que pertenecen a cierto sistema no representa más que un solo aspecto del comportamiento en sí, se ha construido otro espacio cuya dimensión está dada por el número de grados de libertad de éste, el cual se denomina espacio fase.

Este espacio fase contiene información cualitativa concreta en forma geométrica del comportamiento. Y debe contener toda la información necesaria para describir la dinámica del sistema estudiado. Cada una de las variables del sistema debe ser independiente de las demás para que así, cada una de ellas aporte su

propia información. Esto quiere decir que si alguna de ellas no está definida subsiste cierta libertad para la determinación del estado considerado [Dubois, 1963].

De esta forma, las órbitas o curvas (también llamadas trayectorias) que habitan en este espacio, describen de manera única la historia del sistema una vez especificadas sus CI. El determinismo implica esta unicidad de las trayectorias en el espacio fase, y que geoméricamente esto se observa con el hecho de que dichas trayectorias no se cortan en dicho espacio. Ya que si por ejemplo, dos órbitas del sistema se cortasen, al seguir alguna de ellas, es decir, al seguir una historia del sistema a partir de ciertas CI y llegar al punto de intersección, no sabríamos cual "camino tomar"; es decir, el sistema no estaría unívocamente determinado. Esta propiedad queda bien descrita por las ecuaciones diferenciales autónomas, ecuaciones del tipo $X=F(X)$, aquéllas que no tienen a la variable temporal de manera explícita. Esto implica que el campo vectorial definido por las variables del sistema permanecerá constante a lo largo del tiempo, lo que no permitirá que las órbitas del sistema se corten.

Para el caso de sistemas discretos, dado que las órbitas del sistema son sucesiones de puntos, dentro del espacio fase, que en este caso particular se llama retrato fase [Devaney, 1989]; la unicidad queda determinada con el hecho de que dicha sucesión de puntos esté originada por la iteración de una función; es decir, que para cada punto que indique un cierto estado del sistema en un tiempo determinado, exista uno y sólo un punto correspondiente a un estado subsecuente del sistema, para que así éste tenga una sola opción que seguir a cada intervalo de tiempo.

La dinámica del sistema, continuo o discreto, puede estar bien determinada por medio de sus puntos de equilibrio. Un punto de equilibrio de un sistema, es aquel estado en el cual permanece el sistema a lo largo del tiempo. Dicho estado de equilibrio puede ser atractor, es decir, que ya sea a corto o largo plazo, el sistema tiende a ese estado particular. En el caso de una o dos dimensiones,

este atractor puede estar representado por un punto dentro del espacio o retrato fase, esto es, un estado al cual el sistema tiende asintóticamente; en términos matemáticos, el punto al cual las trayectorias del espacio convergen. Un ejemplo físico de este sistema es el péndulo sometido a la fricción del aire.

Otro tipo de atractor que existe en sistemas bidimensionales es el llamado "ciclo límite"; representado por una curva cerrada a la cual convergen eventualmente las trayectorias, en el caso de que sea estable. Este atractor es típico de los sistemas continuos disipativos a los cuales se les proporciona cierta energía del exterior para que no cese su movimiento; ejemplo, el péndulo de un reloj.

Finalmente, existen sistemas en los cuales intervienen dos frecuencias distintas para determinar su movimiento. Para ellos el atractor es una órbita que se "enrolla" sobre la superficie de un toro que se encuentra dentro de un espacio fase tridimensional. Por ejemplo, el fenómeno de las mareas puede estar bien representado de esta manera, pues en este fenómeno intervienen dos frecuencias principales: las provocadas por la luna y el sol.

Cuando dos de las frecuencias son inconmensurables, la trayectoria se enrolla sobre la superficie del toro recubriéndola al cabo de cierto tiempo; éste es el caso de un movimiento no periódico en el que el atractor es toda la superficie del toro. Debido a que es muy difícil seguir las órbitas de este sistema, H. Poincaré propuso un método para reducir en una unidad la dimensión necesaria para su representación: las secciones de Poincaré, de las cuales abundaremos posteriormente.

La presencia de atractores dentro del sistema permitirían, a corto o largo plazo, un comportamiento regular del sistema, ya sea que permanezca en un mismo estado a lo largo del tiempo (punto fijo), o que permanezca oscilando en ciclos de períodos determinados (ciclo límite en el caso bidimensional, órbita en la superficie de un toro para el caso de tres dimensiones). Si al mismo tiempo, dadas dos

órbitas dentro del espacio fase, en cuyo estado inicial permanecen suficientemente cerca y al cabo de cierto tiempo, siguen permaneciendo igual de cerca una de la otra, se dice que el sistema es regular y predecible. Pero si por el contrario, el sistema presenta la llamada "sensibilidad a las condiciones iniciales"; es decir, que no importa que tan cercanas demos las condiciones iniciales de dos órbitas en el espacio fase, éstas divergerán una de la otra a lo largo del tiempo, entonces el sistema puede presentar dinámicas cualitativamente complicadas.

Esta propiedad es un indicio de que un sistema puede ser caótico, pues al menos satisface la condición de ser impredecible; y cuando esto sucede, en el caso de sistemas disipativos o no conservativos, el atractor cambia su forma cualitativa. Su estructura debe reflejar dos características aparentemente antagónicas: la atracción a un conjunto del espacio y la divergencia de sus trayectorias. Este tipo de atractores fueron denominados como "atractores extraños" en 1971, por D. Ruelle y F. Takens. La caracterización de estos atractores representa la firma del caos en sistemas disipativos, diferenciándolos de sistemas completamente aleatorios.

El determinismo de las ecuaciones que rigen el comportamiento de un sistema puede ser sólo un sueño inalcanzable en la práctica. Cabe recalcar que esto no depende de qué tan precisos sean nuestros aparatos de medición: en el caso continuo, para conocer la evolución de un sistema caótico, necesitaríamos determinar sus condiciones iniciales con precisión infinita y tener un algoritmo que iterara las ecuaciones también con precisión infinita; como esto no es así, no se puede predecir su evolución [Carretero, 1992].

Ahora podemos preguntarnos ¿qué es lo que necesita tener de especial un sistema matemático, para que dé origen a órbitas irregulares? Pensemos primero en los dados. En este juego ponemos los dados en un cubilete y los agitamos varias veces. Los dados sufren un gran número de choques dentro del cubilete y "pierden memoria" de cuál era su estado inicial. De esta forma, cuando los lanzamos y se

quedan inmóviles sobre la mesa, el resultado es impredecible. Lo mismo pasa en la lotería, donde hay tantas bolitas y tantos choques entre ellas que nos es imposible determinar cuál va a ser el número premiado. Siguiendo este esquema, muchos fenómenos resultan ser azarosos por culpa del número tan grande de grados de libertad. Así mismo, el movimiento browniano de un pequeño granito de polen flotando en un líquido es completamente irregular debido a que sufre una inmensidad de choques con las moléculas del líquido. De igual forma, cabe mencionar la turbulencia en un fluido que involucra un número muy elevado de partículas. De hecho a fines del siglo XIX, el físico austriaco Ludwig Boltzman al tratar de explicar las leyes de la termodinámica que describen las propiedades macroscópicas de los cuerpos, por medio de las propiedades microscópicas; es decir, el movimiento de sus moléculas, desarrolló lo que ahora se conoce como la mecánica estadística. Al tratar de describir el movimiento de las moléculas de un gas, Boltzman dedujo que entre mayor es el número de estados microscópicos distintos de las moléculas, que conllevan a un mismo estado macroscópico del sistema (gas), menos podemos conocer el estado microscópico real del sistema en un instante dado.

Al maximizar el desorden molecular se minimiza el conocimiento del sistema. Este desorden en el movimiento de las moléculas de un gas se debe en parte, a la coexistencia de un gran número de acciones elementales independientes que intervienen en el comportamiento del sistema; dicho de una manera más técnica, debido al gran número de variables independientes que intervienen en la descripción del movimiento del sistema, es decir al gran número de grados de libertad de éste [Haken,1990]. Así mismo, podemos seguir enumerando ejemplos donde la aparición del azar proviene del gran número de procesos elementales que están involucrados.

Con todo esto, es tentador decir que el Caos proviene necesariamente de la existencia de un número elevado de grados de libertad, como ya lo habíamos mencionado antes. En un principio se pensó que así era, pero Henri Poincaré (1845-1912) empezó a notar que la existencia de soluciones altamente irregulares no era provocada necesariamente por el número de grados de libertad. Sin embargo, no

fue hasta la revolución del cálculo numérico con las computadoras, que se comprobó que aún sistemas aparentemente sencillos como el sistema de Lorenz [Lorenz,1963], con pocos grados de libertad, presentan comportamientos caóticos.

Consideremos un ejemplo muy ilustrativo conocido como "el corrimiento de Bernoulli". Se toma inicialmente un número irracional entre 0 y 1, y a partir de él se repite la siguiente operación: se multiplica por dos, restándole 1 cada vez que el resultado sea mayor o igual que 1. Es decir, que se aplicará la siguiente iteración:

$$X_{n+1} = (2X_n) \text{ mod}(1). \quad (2.1.)$$

Haciendo el experimento numérico se puede observar que los números que aparecen en esta sucesión de iteraciones es casi indistinguible de una sucesión de números escogidos aleatoriamente.

Para que quede claro cómo funciona este sistema, tomemos como condición inicial a $X_0=0.3125$. Usando esta última ecuación obtenemos la sucesión: $X_1=0.625$, $X_2=0.25$, $X_3=0.5$, $X_4=0$, $X_5=0$, ...

La secuencia resultó finita porque la "semilla" (X_0) fue un decimal. Es fácil encontrar la tasa a la que se pierde información en este proceso. Basta escribir el número original en binario; si para una fracción decimal X_0 se tiene:

$$X_0 = a_1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 + a_2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots + a_n \left(\frac{1}{10}\right)^n, \quad (2.2)$$

donde a_i son las cifras de X_0 que están entre 0 y 9, entonces un número cualquiera entre cero y uno expresado en binario tendrá la forma:

$$Y_0 = b_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + b_n \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad (2.3)$$

donde b_i son las cifras de Y_0 que están entre 0 y 1. En particular, retomando la semilla anterior $X_0=0.3125$ se convierte en binario en $Y_0=0.0101$ ($= 0 \times 0.5 + 1 \times 0.25 + 0 \times 0.125 + 1 \times 0.0625$). Ahora, en binario,

multiplicar por 2 (iterar) no es otra cosa que mover el punto (binario) un lugar a la derecha. Ya que multiplicar por 2 la ecuación anterior, es simplemente disminuir en 1 las potencias de $1/2$. Por lo que la serie de Y_i se verá en esta descripción binaria como: $Y_0=0.0101$, $Y_1=0.101$, $Y_2=0.01$, $Y_3=0.1$, $Y_4=0$, $Y_5=0$, ... En esta descripción resulta evidente que en cada iteración se pierde una cifra: aquélla que se desplaza a la izquierda del punto binario. Por lo tanto, en este proceso se pierde un bit de información por cada iteración.

Vemos claramente que si empezamos con una semilla decimal, llegaremos después de un cierto número de iteraciones al cero (en el caso de que la serie de cifras no sea infinita); o tendremos una serie periódica (en el caso de que la serie de cifras sea periódica). Si tomamos, por ejemplo, la secuencia que inicia con $Y_0=0.001001001001001\dots$ que es periódica e infinita, tendremos que la serie Y_i será también periódica de período 3. Pero si tomamos como semilla a un número irracional, la serie de Y_i será una serie infinita y totalmente aperiódica. Este es un buen ejemplo en donde un algoritmo determinista, ecuación anterior, lleva a resultados irregulares. Vemos entonces que un proceso determinista lleva a resultados que se muestran irregulares, de esta forma podemos construir un generador de sucesiones irregulares de números con un algoritmo determinista. A este tipo de comportamiento irregular se le llama *caos determinista*, ya que proviene de ecuaciones deterministas.

2.2. UNA DEFINICION TOPOLOGICA DEL CAOS DETERMINISTA

La evolución temporal de un sistema puede ocurrir tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. En el primer caso tenemos un flujo y en el segundo un mapeo. Debido a que es posible modelar fenómenos biológicos por medio de mapeos unidimensionales, realizaremos a continuación un análisis de la dinámica particular de estos sistemas discretos. En muchas ocasiones, por medio de ciertos métodos matemáticos que veremos posteriormente, podemos reducir un sistema de dos o más dimensiones (continuo o discreto) a un sistema unidimensional y el analizar la dinámica de dicho sistema unidimensional nos proporcionará una idea bastante aproximada de la dinámica global del sistema. Cabe señalar que los sistemas unidimensionales discretos son un ejemplo de sistemas simples con dinámicas caóticas. Después de dar una serie de definiciones y proposiciones características de la dinámica unidimensional discreta, nos ayudaremos del modelo logístico para dar una descripción matemática formal del caos en sistemas dinámicos discretos.

La dinámica de un mapeo está dada por las iteraciones de la función $f(x)$ tal que $X(n+1)=f(X(n))$. Dado un valor inicial $X(0)$, es decir, un número de habitantes distinto de cero al tiempo $t=0$, el número de pobladores al tiempo $t=n$ es:

$$X(n)=f^n(X(0)). \quad (2.4.)$$

La meta más importante de la teoría de Sistemas Dinámicos es observar y estudiar el comportamiento a largo plazo, de un proceso iterativo. Si este proceso es una ecuación diferencial, cuando dicha ecuación está dada en términos de la derivada de la función (caso de tiempo continuo), cuya variable independiente es el tiempo, la teoría intenta predecir el comportamiento en un futuro distante, cuando el tiempo tiende a infinito; o en un pasado distante, cuando el tiempo tiende a menos infinito. En el caso de tiempo discreto, el proceso evolutivo está dado por las iteraciones de una función, la teoría espera entender el comportamiento a largo plazo de los puntos X , $f(X)$, $f^2(X)$, ..., $f^n(X)$ mientras n sea lo suficientemente grande.

Tomaremos conceptos generales de la teoría de Sistemas Dinámicos que comenzarán con la siguiente serie de definiciones.^[1]

Definición(2.1).- Sea $f:I \rightarrow J$. La función $f(x)$ es un homeomorfismo si $f(x)$ es uno a uno, sobre, y continua, y $f^{-1}(x)$ también es continua.

Definición(2.2).- Sea $f:I \rightarrow J$. La función f es un C^r -difeomorfismo si $f(x)$ es un C^r -homeomorfismo tal que $f^{-1}(x)$ es también C^r .

Los puntos fijos de una función son aquellos que quedan invariantes bajo la función, son puntos x que satisfacen que $f(x)=x$.

Algunas propiedades importantes de f :

Proposición(2.1).- Sea $I=[a,b]$ un intervalo y sea $f:I \rightarrow J$ continua. Entonces f tiene al menos un punto fijo.

Proposición(2.2).- Sea $f:I \rightarrow J$ y considere que $|f'(x)| < 1$ para toda x en I . Entonces existe un único punto fijo para f en I . Aún más

$$|f(x)-f(y)| < |x-y| \quad \forall x,y \in I, \quad x \neq y. \quad (2.5.)$$

Definición(2.3).- Sea $S \subset \mathbb{R}$. Un punto x es un punto límite de S si existe una sucesión de puntos $x_n \in S$ que converge a x . S es un conjunto cerrado si contiene todos sus puntos límites.

Definición(2.4).- Sea $S \subset \mathbb{R}$. S es un conjunto abierto si, para cualquier $x \in S$, existe $c > 0$ tal que todos los puntos t en el intervalo abierto $x-c < t < x+c$ están contenidos en S .

Definición(2.5).- Un subconjunto U de S es denso en S si la cerradura de U es igual a S .

[1] Se tomó la caracterización del Caos Determinista de Devaney. Si se desea consultar las demostraciones ver [Devaney, 1989].

Definición(2.6).- La órbita evolutiva de x es el conjunto de puntos $x, f(x), f^2(x), \dots$ y se denota por $O^+(x)$. Si f es un homeomorfismo, definiremos la órbita completa de x , $O(x)$, como el conjunto de puntos $f^n(x)$ para $n \in \mathbb{Z}$, y la órbita retrospectiva de x , $O^-(x)$, como el conjunto de puntos $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots$

Nuestra meta fundamental es entender el comportamiento de todas las órbitas del mapeo.

Definición(2.7).- El punto x es un punto fijo de f si $f(x)=x$. El punto x es un punto periódico de período n si $f^n(x)=x$. La n positiva más chica para la cual $f^n(x)=x$ es llamada el período principal de x . Denotamos al conjunto de puntos periódicos de período n (no necesariamente principal) como $\text{Per}_n(f)$, y al conjunto de puntos fijos por $\text{Fix}(f)$. El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico forman una órbita periódica.

Los mapeos pueden tener varios puntos fijos. Los mapeos con intervalos de puntos periódicos no son comunes. La mayoría de los sistemas que estudiaremos tendrán puntos periódicos aislados.

Definición(2.8).- Un punto x es eventualmente periódico de período n si x no es periódico, pero existe $m > 0$ tal que $f^{n+i}(x) = f^i(x)$ para toda $i \geq m$. Es decir, $f^i(x)$ es periódica para $i \geq m$.

Definición(2.9).- Sea p un punto periódico de período n . Un punto x tiende asintóticamente a p si $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{in}(x) = p$. El conjunto estable de p , denotado por $W^s(p)$, consiste de todos los puntos asintóticos a p .

Si p es un punto no periódico, definiremos puntos asintóticos recurriendo a $|f^i(x) - f^i(p)| \rightarrow 0$ mientras que $i \rightarrow \infty$. También, si f es invertible, consideraremos puntos asintóticos hacia atrás al tomar $i \rightarrow (-\infty)$ en la definición previa. El conjunto de puntos asintóticos hacia atrás a p , se le conoce como el conjunto inestable de p y se denota como $W^u(p)$.

Definición (2.10).- Un punto x es un punto crítico de f si $f'(x)=0$. El punto crítico es no degenerado si $f''(x) \neq 0$. El punto crítico es degenerado si $f''(x)=0$.

La teoría de Sistemas Dinámicos tiene que estudiar la naturaleza de todas las órbitas del sistema, e identificar al conjunto de órbitas que son periódicas, eventualmente periódicas, asintóticas, etc. Generalmente esta es una tarea imposible. Ya que si por ejemplo, la función es un polinomio cuadrático, buscar explícitamente todos los puntos de período n lleva a resolver la ecuación $f^n(x)=x$, la cual es una ecuación de grado 2^n . Como sabemos, resolver una ecuación de grado mayor que tres resulta imposible analíticamente por lo que se tienen que aplicar métodos numéricos para tales efectos. Generalmente, ni estos métodos numéricos resultan atractivos ya que cometen mucho error; esto se debe a los errores de redondeo que comete cualquier computadora. Estos errores de redondeo pueden llegar a mostrar puntos periódicos donde no existen o a olvidar algunos en el camino. Por eso es que se opta por métodos geométricos o cualitativos que nos ayuden a entender la dinámica de un sistema dado. Por lo tanto, enunciaremos a continuación un método gráfico para encontrar los puntos periódicos de un sistema.

Un método muy eficiente para describir las órbitas o trayectorias de un sistema dinámico es el retrato fase. En el caso de un sistema dinámico en una dimensión, el retrato fase se encuentra sobre la recta real. Veamos cómo se construye este retrato fase.

2.2.1. Análisis gráfico de las órbitas del sistema

Dada la gráfica de una función $f(x)$ ésta no tiene información alguna acerca de la segunda iteración, $f^2(x)$, de $f(x)$; sin embargo, la utilizaremos para obtener información sobre iteraciones mayores y de ahí el retrato fase vía el procedimiento siguiente al que llamaremos análisis gráfico. Identifiquemos la diagonal $A=\{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ con \mathbb{R} de la siguiente manera: trazando una línea vertical desde el punto $(p,0)$ a la gráfica de $f(x)$ y se intersectará en el punto

$(p, f(p))$; después una línea horizontal desde ese punto a Δ intersectándose en $(f(p), f(p))$. Es decir, una línea vertical que sale de Δ hacia la gráfica seguida de una horizontal de regreso a Δ , nos da la imagen del punto p bajo $f(x)$ en la diagonal. De la misma manera podemos encontrar la imagen de $f(p)$ bajo $f(x)$ en la diagonal; es decir, encontrar la segunda iteración de p bajo $f(x)$, $f^2(p)$. Y así sucesivamente se pueden localizar sobre la diagonal todas las iteraciones que se desee. Visualizaremos el retrato fase del mapeo sobre la diagonal Δ . Cabe señalar que este método no es exacto, ya que se trata de un algoritmo gráfico. Si se quiere hacer una mejor aproximación se debe de iterar analíticamente. Sin embargo, es un método muy sencillo y muy rápido de aplicar; lo único que se debe de hacer, es trazar unas líneas sobre la gráfica de la función. Llamaremos justamente retrato fase a los puntos que dejamos pintados sobre la diagonal Δ con el método anterior. Este método nos permite visualizar la dinámica de sistemas unidimensionales, ya que la órbita de un punto dado p es $p, f(p), f^2(p), \text{etc.}$, lo que es justamente el retrato fase que queda impreso sobre Δ cuando se aplica el algoritmo arriba descrito (ver la Fig. (2.1.))

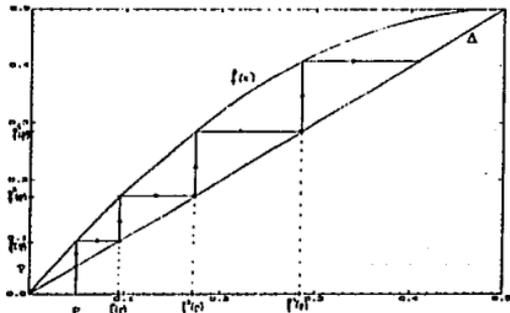


Figura 2.1. Iteración gráfica de una función.

Como podemos observar claramente, los puntos fijos y los puntos periódicos son la clave para el análisis cualitativo de los sistemas dinámicos; por lo que a continuación haremos un análisis de los diferentes tipos que existen.

Podemos notar que los puntos fijos son puntos periódicos de período uno, por lo que generalizaremos el estudio solamente a puntos periódicos.

2.2.2. Puntos periódicos hiperbólicos

Los mapeos simples como $\text{Id}(x)=x$ y $f(x)=-x$ son poco comunes dentro de los sistemas dinámicos, básicamente debido a que todos sus puntos son periódicos, de período uno y dos respectivamente, bajo las iteraciones de este tipo de mapeos.

Los puntos periódicos suelen estar más separados en la línea del retrato fase. Un ejemplo de estos son los puntos periódicos hiperbólicos, los cuales proveen los comportamientos periódicos más sencillos.

Definición(2.11).- Sea p un punto periódico de período n . El punto p es hiperbólico si $|(f^n)'(p)| \neq 1$. El número $(f^n)'(p)$ se llama multiplicador del punto periódico.

Proposición(2.3).- Sea p un punto fijo hiperbólico con $|f'(p)| < 1$. Entonces hay un intervalo abierto U alrededor de p tal que si $x \in U$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$.

Anotaciones:

1. El intervalo $[p-\epsilon, p+\epsilon] \subseteq W^s(p)$.
2. Sea U un intervalo abierto alrededor de p el cual se mapea dentro de $W^s(p)$ por f^n ; claro, bajo la suposición de que $|(f^n)'(p)| < 1$.

Definición(2.12).- Sea p un punto periódico hiperbólico de período n con $|(f^n)'(p)| < 1$. Al punto p se le llama punto periódico atractor, un atractor o un sumidero.

Los puntos periódicos atractores de período n tienen vecindades que son mapeadas en ellas mismas bajo f^n , a esa vecindad se le llama conjunto local estable y se denota W_{loc}^a .

Hay tres tipos diferentes de puntos fijos estables $f'(p)=0$, $0 < f'(p) < 1$ y $-1 < f'(p) < 0$. Donde los dos primeros son atractores monótonos y el último es un atractor oscilante. Los retratos fase son respectivamente:

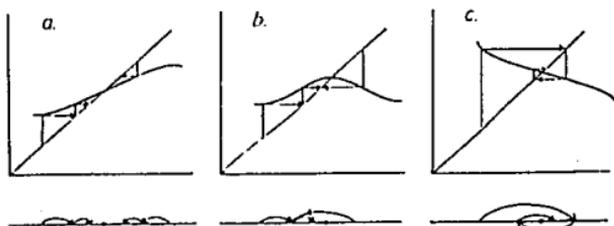


Figura 2.2. Los tres tipos de puntos fijos estables: a) $0 < f'(p) < 1$, b) $f'(p) = 0$, y c) $-1 < f'(p) < 0$.

Proposición(2.4).— Sea p un punto fijo hiperbólico con $|f'(p)| > 1$. Entonces existe un intervalo abierto U de p tal que si $x \in U$, $x \neq p$, entonces existe $k > 0$ tal que $f^k(x) \notin U$.

Definición(2.13).— Un punto fijo p con $|f'(p)| > 1$ es llamado un punto fijo repelente, un repulsor o fuente. La vecindad descrita en la proposición es llamada conjunto local inestable y se denota W_{loc}^u .

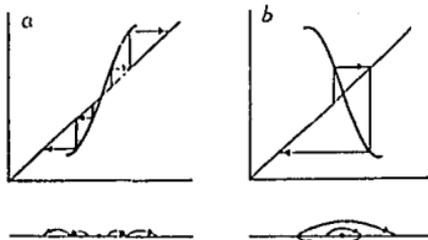


Figura 2.3. Los dos tipos de puntos fijos repulsivos: a) $f'(p) > 1$ y b) $f'(p) < -1$.

De manera similar, los puntos periódicos de período n son repulsores si $|(f^n)'(p)| > 1$. Existen dos tipos de puntos repulsores: puntos repulsores monótonos y puntos repulsores oscilantes, esto se da cuando $f'(p) > 1$ y $f'(p) < -1$ respectivamente. El retrato fase de dichos puntos se puede observar en la figura (2.3.).

2.2.3. Puntos indiferentes o no-hiperbólicos

Los puntos periódicos hiperbólicos tienen, entonces, comportamiento local gobernado por la derivada del punto periódico. Esto no es válido cuando el punto es indiferente o no-hiperbólico (ver Fig. (2.4.)).

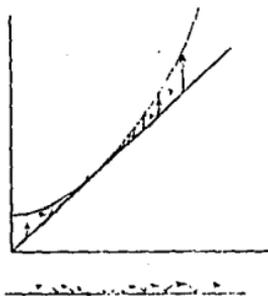


Figura 2.4. Punto fijo indiferente o no-hiperbólico.

Para continuar con el análisis de la dinámica de un mapeo unidimensional discreto, para postular una definición matemática de Caos Determinista para sistemas discretos, contaremos con la ayuda de un mapeo en particular. Nos referimos al mapeo logístico, cuya dinámica es muy representativa de la dinámica de los mapeos unidimensionales discretos, no lineales, que bajo ciertas circunstancias presentan comportamiento caótico.

2.2.4. Un modelo de crecimiento de poblaciones (Modelo Logístico)

Para estudiar el comportamiento del crecimiento de algunas poblaciones, bacterias por ejemplo, se pueden proponer unas ecuaciones que describan analíticamente la variación del número de individuos con el tiempo. Estas ecuaciones nos darán el número de individuos de la población en todo instante, conociendo de antemano cuantos individuos existían en un principio. Estas ecuaciones representan un modelo matemático para el crecimiento de la población. Es claro que este modelo no será una descripción exacta del fenómeno biológico que estamos estudiando, ya que la naturaleza de tales fenómenos es invariablemente mucho más compleja que un simple modelo matemático. Sin embargo, es interesante notar que tales modelos pueden explicar, al menos cualitativamente en buena parte de los casos, muchos aspectos de la población que nos eran desconocidos o inexplicables. Para que un modelo matemático sobre crecimiento de poblaciones sea manejable, es necesario que sea sencillo; pero a su vez, lo suficientemente completo para que no se aleje demasiado del fenómeno biológico real que estamos tratando de describir.

Un ejemplo de esto es el modelo de crecimiento exponencial de una población, realizado por Thomas Robert Malthus (1776-1834), que es muy manejable matemáticamente pero no es muy apegado a la realidad. En este modelo se suponen válidas las siguientes hipótesis:

1. Existencia de espacio suficiente.
2. Recursos suficientes.
3. La no ocurrencia de algún evento catastrófico.
4. Población homogénea.
5. Población aislada.

Con la existencia de espacio suficiente nos referimos a que la población necesita lugar para sus nuevos habitantes. Es importante que los recursos como el alimento nunca escaseen, así como que no ocurra ningún evento catastrófico que elimine a un buen número de pobladores, si no es que a todos. Ejemplos de este tipo de eventos pueden ser terremotos, incendios, huracanes, glaciaciones, etc. Una población homogénea, es aquella en la cual todos los individuos son

demográficamente idénticos, no hay tasas distintas de natalidad y mortalidad en los individuos o grupos de individuos. Se entiende por una población aislada aquella que no tiene contacto con otro tipo de poblaciones, como depredadores por ejemplo.

Es claro que este modelo no es muy apegado a la realidad ya que los supuestos en los que está basado no suceden en la realidad. Es prácticamente imposible encontrar un proceso biológico en el cual exista espacio ilimitado, así como comida en abundancia. El hecho de que la población sea homogénea tampoco es real, ya que cualquier ser vivo tiende a envejecer por lo que su poder de reproducción disminuye y finalmente se agota. En la mayoría de los procesos biológicos existen, además de las imperfecciones arriba mencionadas, catástrofes naturales así como de predadores que interfieren directamente con el crecimiento de los pobladores. Sin embargo comenzaremos con este modelo ya que es muy sencillo de estudiar y poco a poco lo iremos complementando y mejorando con algunas hipótesis extras. Además, la intención de este modelo es principalmente construir un algoritmo que refleje cualitativamente el comportamiento de una población y no que nos dé una descripción exacta del crecimiento de algún animal en especial. Este modelo también nos ayudará a familiarizarnos con la terminología de este tipo de sistemas, así como de los comportamientos más generales que se pueden encontrar en la naturaleza.

Una vez analizadas y consideradas las hipótesis propuestas por Malthus, veremos cómo es el crecimiento de una población a tasa constante cuya reproducción no es de manera continua sino discreta. Es decir, que no se está reproduciendo continuamente sino cada tiempo determinado; por ejemplo: cada año, cada verano, cada mes etc. O lo que es equivalente a pensar en una población a la cual estamos tomando muestreos discretos del número de pobladores. Es difícil decir cual es el intervalo de tiempo que tomaremos para una población específica, ya que para algunas bacterias la tasa de crecimiento es muy alta y es necesario muestrear con mayor frecuencia, cada minuto por ejemplo; en cambio, para algunos mamíferos de gran tamaño es necesario tomar muestreos a intervalos de tiempo mucho mayores, incluso varios años.

Por lo que procederemos a desarrollar paso a paso el modelo matemático de un tipo de crecimiento de poblaciones, reiterando el tipo correspondiente al haber considerado las hipótesis anteriores.

Sea $X(t)$ la variable que indica el número de individuos de una población al tiempo t , entonces $X(t+1)$ es el número de individuos al tiempo $t+1$; es decir, una unidad de tiempo después. De tal forma que si queremos calcular el cambio de individuos de esa población al cabo de una unidad de tiempo, tenemos: $X(t+1)-X(t)$. Por lo que el crecimiento relativo a esa población será:

$$q = \frac{X(t+1)-X(t)}{X(t)} \quad (2.6)$$

donde q es la tasa de crecimiento que propondremos constante. Es decir, según las hipótesis anteriores, el crecimiento de esa población es a tasa constante. Por lo que obtendremos:

$$X(t+1)=X(t)(1+q); \quad (2.7)$$

llamaremos a $q+1$ tasa de remplazo. Dada q y una población inicial $X(0)$, esto es el número de pobladores cuando empezamos a medir, digamos al tiempo cero, tendremos que:

$$X(t)=X(0)(1+q)^t \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

Por otro lado el modelo postulado por Malthus está hecho para un crecimiento continuo de la población de la siguiente forma:

$$X(t)=X(0)e^{kt} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Esta función nos indica claramente que el crecimiento de la población es de manera exponencial; es decir, si hacemos una gráfica de X vs. t , obtenemos el crecimiento exponencial de la población a lo largo del tiempo. A su vez, podemos visualizar este modelo como una progresión geométrica donde la razón de crecimiento está dada por e^k . Cabe hacer notar que cuando $k>0$, la función crece, cuando $k=0$ ésta permanece constante y cuando $k<0$ decrece, tendiendo asintóticamente a cero, es decir que la población tiende a extinguirse.

A continuación encontraremos la relación del modelo continuo de Malthus con el que hemos estado desarrollando. Comparando las ecuaciones, obtenemos:

$$X(t) = X(0)(1+q)^t \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Donde la tasa de remplazo es la razón de crecimiento geométrico de la población; es decir, si $r=1+q$ tenemos la siguiente progresión geométrica:

$$\boxed{X(t) = r^t X(0)} \quad (2.11)$$

Así mismo, de la ecuación (2.5) tenemos:

$$\boxed{X(t+1) = rX(t)} \quad (2.12)$$

Supongamos que llega el momento en que para la cantidad de habitantes, ciertos recursos como el alimento, por ejemplo, ya no son suficientes, es decir que empiezan a escasear; así observamos que la hipótesis 2. ya no se cumple. La población empieza a decrecer, y la tasa de reproducción pasará a ser negativa, no será más constante. En esta ocasión, dado un número máximo de pobladores X_{max} , r dependerá del número de habitantes, osea de la densidad de la población, de la siguiente manera:

$$r(X) = \begin{cases} r \text{ grande} & \text{si } X \ll X_{max} \\ r \text{ chica} & \text{si } X \sim X_{max} \\ r \text{ cero} & \text{si } X = X_{max} \\ r < 0 & \text{si } X > X_{max} \end{cases}$$

En otras palabras, $r(X) = \mu(X_{max} - X)$ por lo que la ecuación de crecimiento de esa población quedará de la siguiente forma:

$$X(t+1) = \mu(X_{max} - X(t))X(t). \quad (2.13)$$

El valor de X al tiempo $t+1$ depende del valor de ésta al tiempo t , es decir, $X(t+1)=F(X(t))$, por lo que la familia de ecuaciones queda como una familia cuadrática de funciones:

$$F_{\mu}(X)=\mu X(X_{\max}-X). \quad (2.14)$$

A esta función se le conoce como función logística. Y es una descripción más apegada a la realidad del fenómeno de crecimiento de una población. Cabe aclarar que el parámetro μ indica la tasa intrínseca de reproducción de una población dada; es decir, μ varía si el tipo de población varía.

Para simplificar la vida, trabajaremos con poblaciones "normalizadas", donde la población tendrá valores entre 0 y 1; esto es que el valor máximo de la población será 1 ($X_{\max}=1$). Nuestro modelo a estudiar queda finalmente determinado por:

$$\boxed{F(X)=\mu X(1-X)} \quad (2.15)$$

A continuación haremos un análisis exhaustivo del comportamiento de este modelo, también conocido como mapeo logístico.

2.2.5. Parámetro de la familia de funciones logísticas

Una vez determinados los conceptos básicos para el análisis de la ecuación logística desde el punto de vista dinámico, proseguimos a estudiar las influencias del parámetro sobre ella.

En general para el crecimiento geométrico de una población con tasa intrínseca de crecimiento r , tenemos que si $r < 1$ la población disminuye su tamaño a lo largo del tiempo, o sea que tiende a la extinción. Si $r=1$, la población no varía y si $r > 1$, la población crece en el tiempo.

Regresando a la ecuación logística, observamos que también la podemos denominar ecuación cuadrática debido a que tiene términos cuadráticos en su configuración:

$$F_{\mu}(x) = \mu x - \mu x^2, \quad (2.16)$$

por lo que gráficamente obtendremos una familia de parábolas, i.e., una parábola diferente (ver Fig.(2.5.)), para cada μ distinta. De esta manera, el parámetro μ es el que tiene la información respecto a la tasa intrínseca de crecimiento de la población. En particular, en el caso de que $\mu < 1$ tenemos que $F_{\mu}^n(x) \rightarrow 0$, matemáticamente hablando, estamos en el caso trivial del comportamiento dinámico de la función.

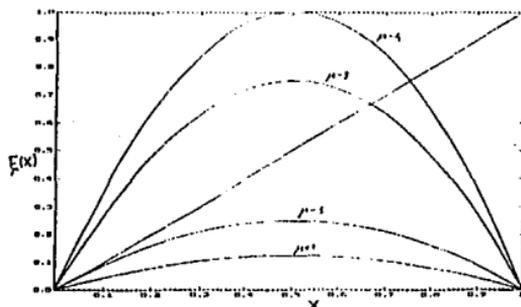


Figura 2.5. Gráficas de la ecuación logística para varios valores del parámetro.

Ya entrados en el análisis dinámico del sistema, por medio de las siguientes proposiciones encontraremos resultados importantes.

Proposición (2.5).-

1. $F_{\mu}(0) = F_{\mu}(1) = 0$ y $F_{\mu}(p_{\mu}) = p_{\mu}$ donde

$$p_{\mu} = \frac{\mu - 1}{\mu} \quad (2.17)$$

2. $0 < p_{\mu} < 1$ si $\mu > 1$.

Cabe hacer notar que $\mu > 0$, pues si $\mu < 0$, tendríamos que el número de población oscilará de valores positivos a valores negativos; así obtendríamos números negativos de población lo cual no tiene validez en la realidad. Así mismo, la realidad nos restringe el caso trivial

matemático, dado que $\mu > 0$ si $\mu < 1$ entonces $\mu - 1 < 0 \Rightarrow \frac{\mu - 1}{\mu} < 0 \Rightarrow p_\mu < 0$, nuevamente obtenemos un número negativo de pobladores cosa que no tiene sentido en el mundo biológico. Por lo que de ahora en adelante nos limitaremos al caso de $\mu > 1$.

Existe una restricción para el dominio de esta familia de funciones, como nos indica la proposición siguiente; el intervalo a considerar como dominio es el $[0, 1]$.

Proposición(2.5).-Suponga que $\mu > 1$. Si $x < 0$ entonces $F_\mu^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$. Similarmente si $x > 1$ entonces $F_\mu^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$.

Hemos determinado dos cosas importantes como punto de partida para el análisis del comportamiento dinámico de esta familia de funciones: el dominio de trabajo se restringe al intervalo cerrado $[0, 1]$ y el parámetro μ está acotado inferiormente por 1.

A continuación observaremos las diferentes dinámicas de la función F para valores distintos de μ , es decir cada parámetro nos determinará un comportamiento dinámico distinto. Iniciaremos estudiando el comportamiento para valores de μ entre 1 y 3:

Proposición(2.6).-Sea $1 < \mu < 3$

- 1.- F_μ tiene un punto fijo atractor en $p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$ y un punto fijo repulsor en cero.
- 2.- Si $0 < x < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$.

Existe una ligera particularidad en la dinámica con respecto a $\mu \in (1, 3)$. Tenemos que para $1 < \mu < 2$, p_μ es un punto atractor monótono y para $2 < \mu < 3$, p_μ es un atractor amortiguado, como se muestra en la figura (2.6.).

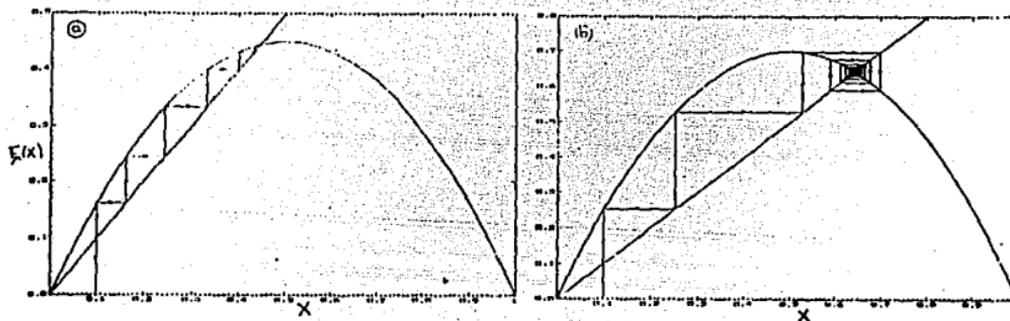


Figura 2.6. a) Atractor monótono $1 < \mu < 2$ ($\mu=1.8$)
y b) Atractor amortiguado $2 < \mu < 3$ ($\mu=2.8$).

Como podemos observar, para los valores del parámetro μ que se encuentren en el intervalo $(1,3)$ la dinámica de la función (dinámica del crecimiento de la población) no va más allá de tener puntos atractores y repulsores. De hecho, el conjunto atractor del sistema consta de un sólo punto. Sin embargo, este comportamiento sufre un cambio cualitativo radical a medida que aumentemos el valor de dicho parámetro μ . Empecemos por analizar, ya que estamos dentro de valores únicamente enteros, el comportamiento para $\mu > 4$. ¿Por qué para este caso en especial?

Debido a que $F(x)$ no puede ser mayor que uno entonces se concluye que $\mu < 4$. Es decir, el valor de nuestro parámetro también está acotado superiormente. Por lo que $1 < \mu < 4$. Nosotros hemos analizado los casos de $1 < \mu < 3$, falta ver que sucede para $3 < \mu < 4$. Sin embargo, hace falta ver cómo es la dinámica para $\mu > 4$, así como observamos el comportamiento de la población para cuando $\mu < 1$. Pero es importante hacer notar, y he ahí la razón de la pregunta anterior, que el comportamiento de la población para parámetros de este tipo dista mucho de ser un caso trivial. Es un ejemplo claro de un comportamiento dinámico recientemente descubierto y que ha desarrollado una vasta teoría a su alrededor.

Para el caso de que $\mu > 4$, existen puntos en el intervalo $I = [0, 1]$ tales que $F_\mu(x) > 1$; y por lo tanto, dejan I después de la segunda iteración. Sea $A_0 \subseteq I$ el conjunto de dichos puntos; es decir, el conjunto de puntos tal que $\forall x \in A_0 \rightarrow F_\mu(x) > 1 \rightarrow F_\mu^2(x) < 0 \rightarrow F_\mu^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$.

Mientras tanto, todos los puntos $y \in I$ y $y \notin A_0$ no abandonan I después de una iteración de F_μ . Sea A_1 dicho conjunto, es decir $A_1 = \{x \in I / F_\mu(x) \in A_0\}$ donde tenemos que si $x \in A_1 \rightarrow F_\mu(x) \in A_0 \rightarrow F_\mu^2(x) > 1 \rightarrow F_\mu^3(x) < 0 \rightarrow F_\mu^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$; o sea que, $A_1 = \{x \in I / F_\mu(x) \in A_0 \text{ y } F_\mu^2(x) \in I\}$, y A_1 consta de dos intervalos ajenos I_0 e I_1 . Inductivamente se construyó $A_n = \{x \in I / F_\mu^n(x) \in A_0 \text{ y } F_\mu^i(x) \in I \forall i < n \text{ y } F_\mu^{n+1}(x) \in I\}$. Si $x \in A_n$, la órbita de x eventualmente abandonará I y se escapará a $-\infty$.

Por otro lado, vemos que $F_\mu(I_0) = F_\mu(I_1) \subseteq I$ y $F_\mu(A_1) \subseteq A_0$ y $F_\mu(A_1') \subseteq A_0$ por lo que I consta de $2^{1+1} = 2^2 = 4$ intervalos ajenos (ver Fig. (2.7)).

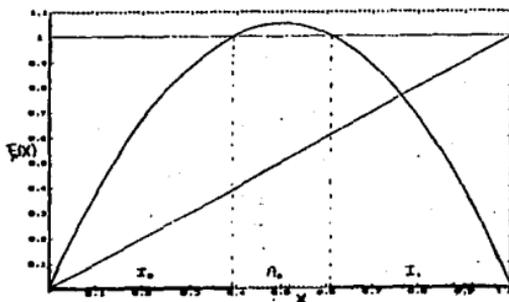


Figura 2.7. Intervalos ajenos de I ($\mu = 4.7$).

En este caso, el conjunto de puntos de equilibrio no triviales del mapeo está formado por un punto inestable. Sea $A_2 = \{x \in I / F_\mu(x) \in I, F_\mu^2(x) \in A_1 \cup A_1', F_\mu^3(x) \in I\}$; F_μ^2 es alternativamente creciente y decreciente en los intervalos de A_2 por lo que la gráfica de F_μ^2 tiene dos máximos. Y A_2 tiene 2^2 intervalos disjuntos. Por lo tanto, inductivamente, A_n es un conjunto que cuenta con 2^n intervalos disjuntos y el conjunto $I - (A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n)$ consta de 2^{n+1} intervalos ajenos (ver la figura (2.8)).

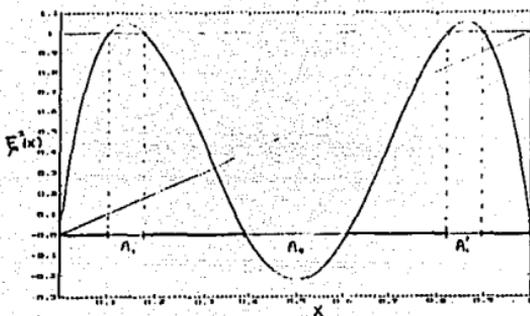


Figura 2.8. Sucesión de intervalos ajenos de I ($\mu=4.2$).

Así mismo, observamos que la gráfica de F_μ tiene $2^0=1$ máximos en I , F_μ^2 tiene $2^1=2$ máximos en I , y así inductivamente F_μ^{n+1} tiene 2^n máximos en I . De igual manera, vemos que el conjunto $I-A_0$ tiene dos intervalos cerrados I_0 e I_1 . El conjunto $I-(A_0 \cup A_1 \cup A_1')$ tiene $2^2=4$ intervalos cerrados en I . Y así, inductivamente el conjunto $I-(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n)$ tiene 2^{n+1} intervalos cerrados en I . Sea $\Lambda = I - (A_n)$ el conjunto de puntos que nunca abandonan I . El cual contiene 2^{n+1} intervalos cerrados en I . F^n cruza la recta $y=x$, 2^n veces. U otra manera de verlo, es que el conjunto de puntos de período n tiene 2^n elementos; es decir, $|\text{Per}_n(F)|=2^n$ (ver Fig. (2.9.)).

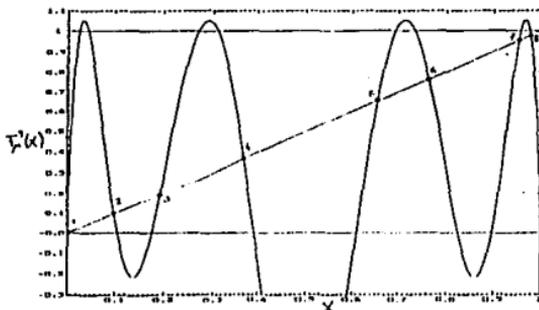


Figura 2.9. Gráfica de F^n vs. x . En este caso podemos observar los 2^n puntos de período n ($n=3$, $\mu=4.2$).

Este conjunto tiene la característica fractal del conjunto de Cantor [Devaney, 1989].

Teorema(2.1).- Si $\mu > 4$, entonces Λ es de Cantor.

Por lo que a groso modo hemos visto, la órbita de F_μ para $\mu > 4$, ya sea que un punto tienda a $-\infty$ bajo iteraciones de F_μ o que su órbita entera caiga en Λ .

Existe otra característica acerca del conjunto Λ la cual está bien determinada por la siguiente definición:

Definición(2.14).-Un conjunto $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ es hiperbólico repulsor (atractor) para f si Γ es cerrado, acotado e invariante bajo f y existe $N > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| > 1$ (respectivamente < 1) para toda $n \geq N$ y toda $x \in \Gamma$.

De esta forma y dada que Λ es cerrado, acotado pues $\Lambda \subseteq I$, entonces para el mapeo cuadrático F_μ para $\mu > 4$, Λ es invariante bajo F_μ ; así que, por lo tanto Λ es un conjunto hiperbólico repulsor para $N=1$. El conjunto de equilibrio del sistema es igual a Λ , pero en este caso no es un conjunto atractor, sino un conjunto repulsor, de estructura fractal, pues todo punto que no pertenezca a Λ , tarde o temprano abandonará I .

Por lo que mientras para $\mu < 1$ sólo existe un punto fijo atractor (punto trivial), para $\mu > 4$ existe un conjunto Λ fijo (invariante bajo F) de estructura "extraña" y repulsor. Pero ¿qué sucede para $1 < \mu < 4$? Ya vimos que para $1 < \mu < 3$ existe un punto atractor (no trivial). Hace falta analizar la dinámica de la función logística para $3 < \mu < 4$. Sabemos que existen dos puntos de equilibrio, dos puntos X^* tales que, $F(X^*) = X^*$, uno de ellos es la solución trivial. Si $\lambda^{(1)}(X^*)$ es la primera derivada de la logística valuada en el punto de equilibrio, ésta cambiará su valor según el valor de $X^* \neq 0$, que depende del parámetro μ . En particular, para $1 < \mu < 3$ se tiene que $\lambda^{(1)} = 2 - \mu$ de tal forma que $|\lambda^{(1)}| < 1$. Entonces $X^* \in [0, 1]$ es un punto

localmente estable, atrayendo a todas las trayectorias que se originan en ese mismo intervalo. A medida que el parámetro aumente, el máximo de $F(X)$ se volverá cada vez más pronunciado, y tendremos que $\lambda^{(1)}(X^*) < -1$, lo que implica que $|\lambda^{(1)}(X^*)| > 1$, por lo que para entonces X^* no será más estable, en particular esto sucede para $\mu > 3$ (ver Fig. (2.10.)).

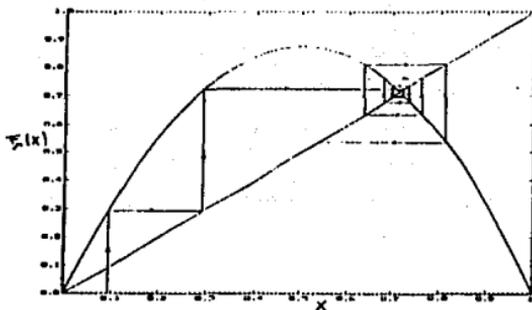


Figura 2.10. Punto fijo inestable de F para $\mu > 3$ ($\mu = 3.5$).

Para el análisis de las trayectorias para $\mu > 3$ tomamos en cuenta la segunda iteración de $F(X)$, esto es que $X_{t+2} = F^2(X)$, donde $\lambda^2(X^*) = [\lambda^{(1)}]^2$. Por lo que así tenemos que si $|\lambda^{(1)}| > 1$ entonces $|\lambda^{(2)}| > 1$. Sin embargo, mientras X^* sea estable, será la única solución de $F^2(X^*) = X^*$. Para $\mu > 3$, observamos que la identidad interseca tres veces a $F^2(X)$, que tendrá dos máximos unimodales, lo que significa la aparición de dos nuevos puntos de equilibrio, pero en este caso biperiódicos. Dichos puntos son estables, de tal manera que el sistema se alterna en un ciclo estable de período dos. En este caso, el conjunto de puntos de equilibrio consta de dos puntos atractores de período dos y un punto fijo inestable. El atractor del sistema será un ciclo de período dos (ver Fig. (2.11.))

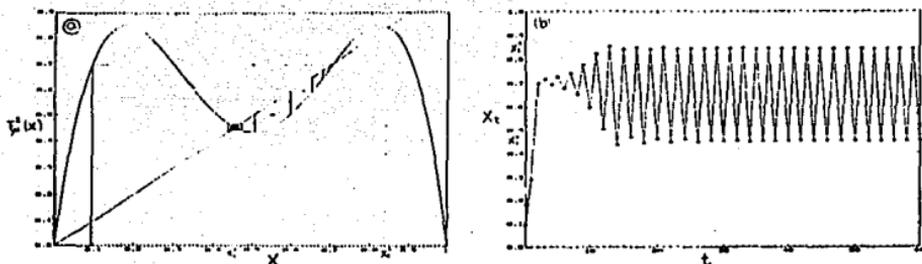


Figura 2.11. Para $\mu > 3$ ($\mu=3.4$) alteraciones gráficas de F^2 vs. X , donde se observan dos puntos estables. b) Gráfica X vs. t donde la población oscila entre dos densidades distintas.

La estabilidad de dicho ciclo depende nuevamente del valor de $\lambda^{(2)}$ en esos dos puntos. De hecho, cuando nacen los dos puntos estables, $\lambda^{(1)}=+1$, después decrecerá (a medida que μ aumenta) hasta alcanzar el valor $\lambda^{(1)}=-1$; y más allá de este valor ($|\lambda^{(2)}|>1$), a medida que el máximo unimodal de $F(X)$ continúe pronunciándose, los puntos de período dos se bifurcarán hasta dar lugar a un ciclo estable de período 4. Si se prosigue de esta manera, aparecerá una cascada de bifurcaciones en ciclos estables de período 2^k , si k es el número de puntos estables. En este caso el atractor del sistema consta de k puntos de período 2^k (ver gráfica de F^k vs. X) para alguna $3 < \mu < 4$, pero $\mu < \mu_c$ ($\mu=3.55$). (Fig.(2.12.))

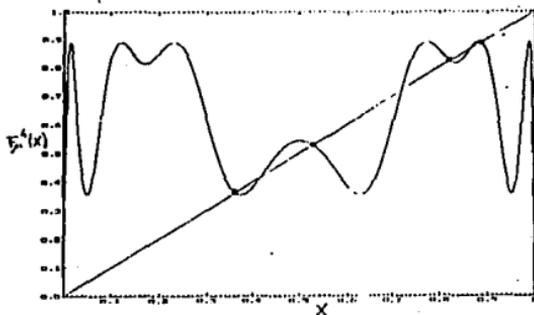


Figura 2.12. F^k y sus k puntos fijos estables ($k=4$, $\mu=3.55$).

Este fenómeno de bifurcaciones no se puede generalizar para todas las funciones $F(X)$ con un solo máximo unimodal que se puede ir pronunciando [May, 1976]. Sin embargo, para las funciones que sí satisfacen esta propiedad continuaremos con el análisis. A pesar de que este proceso produce una sucesión infinita de ciclos de período 2^n ($n \rightarrow \infty$) el intervalo, al que llamaremos ventana, de valores del parámetro para los cuales cualquier ciclo de dicha cascada es estable, disminuye progresivamente su tamaño. Entonces tenemos que el proceso completo de bifurcaciones es convergente, acotado superiormente por un valor crítico del parámetro, el cual es el punto de acumulación de la sucesión de ciclos estables. En el caso de la logística, tenemos que $\mu_c = 3.5700$. Más allá de este punto de acumulación de la sucesión de valores del parámetro para los cuales las trayectorias tienden a ciclos estables, hay un número infinito de puntos fijos con diferentes periodicidades. Por consiguiente hay un número infinito de ciclos periódicos. Incluso hay un número infinito de trayectorias aperiódicas, aunque acotadas, para las cuales no importa que tanto se deje correr la serie de tiempo de $F(X)$, el patrón nunca se repite. Es entonces cuando nos encontramos en una situación bautizada por Li y Yorke como "caótica".

Para funciones suaves y sensibles como $F(X)$ de las ecuaciones anteriores, un hecho matemático implícito es que para cualquier valor del parámetro específico, hay un único ciclo que es estable y que esencialmente atrae a cualquier punto inicial de las trayectorias. Esto significa que hay un ciclo que "contiene" a todos los puntos iniciales. El número infinito restante de otros ciclos, junto con las trayectorias asintóticas y aperiódicas, contienen un conjunto de puntos que a pesar de ser incontable tiene medida cero. Cualquier ciclo estable en particular contiene un rango muy estrecho de valores del parámetro.

A continuación, estudiaremos la estructura matemática de las funciones analíticas [May, 1976]. Para cierto valor del parámetro, en el caso de la logística, $\mu = 3$, observamos que para valores mayores que tres, ocurre la primera bifurcación. A este tipo de bifurcación la llamaremos tangencial, porque justo para ese valor del parámetro, $\mu = 3$

por ejemplo, la identidad es tangente a $F^2(X)$, en varios puntos; de tal forma que el punto de equilibrio sigue siendo débilmente estable, o lo que es lo mismo, asintóticamente estable. Y para valores mayores del parámetro, la identidad intersecta a $F^2(X)$ en los dos puntos estables. A las bifurcaciones subsecuentes las conocemos como bifurcaciones de pitchfork. Así, con lo dicho anteriormente, podemos concluir que mientras que se varíen los parámetros de $F(X)$, las unidades dinámicas fundamentales son ciclos con período base k , que surgen de bifurcaciones tangenciales; junto con su cascada asociada de períodos armónicos $2^n k$, que se originan de bifurcaciones de pitchfork. Recordando que para funciones analíticas sensibles, hay un ciclo estable para cada valor del parámetro de $F(X)$.

El rango completo de valores del parámetro de $F(X)$ ($0 < \mu < 4$ en la logística), está hecho de un número infinito de ventanas, algunas grandes y otras estrechas, de las cuales cada una corresponde a cada una de las unidades dinámicas básicas. Estas ventanas se dividen unas de otras por medio de los puntos de acumulación de los períodos armónicos $2^n k$, a partir de los cuales el sistema es realmente caótico, sin ciclo atractor alguno.

Pero ¿cómo es que los diferentes comportamientos cíclicos del sistema están repartidos en las diferentes ventanas? Una primera aproximación a la respuesta de dicha pregunta, es dar el número de puntos de período k que hay en el intervalo completo. Es decir, proporcionar las soluciones distintas de $F^{(k)}(X^*) = X^*$. Si la función $F(X)$ tiene un máximo unimodal suficientemente pronunciado, cada iteración sucesiva duplica el número de máximos, de tal forma que $F^{(k)}(X)$ tiene 2^{k-1} máximos. Todas estos máximos y valles intersectan 2^k veces a la identidad, produciendo un igual número de puntos fijos; es decir, un número 2^k de soluciones distintas de la ecuación anterior. También tomamos en cuenta las soluciones de dicha ecuación cuyo período es un submúltiplo de k . En particular, los dos puntos fijos de $F(X)$ de las ecuaciones anteriores son soluciones degeneradas de $F^{(k)}(X^*) = X^*$ para cualquier valor k .

Una vez contado el número de puntos de período k dentro del intervalo, utilizando técnicas de teoría combinatoria, se puede dar una lista genérica del orden en el que aparecen los diversos ciclos [May, 1976]. El catálogo del número total de puntos fijos y su orden de aparición es relativamente fácil de construir. Pero para cualquier función $F(X)$ en particular, el método numérico para encontrar las diferentes ventanas de valores del parámetro, dentro de las cuales cualquier ciclo o su respectivo armónico es estable, es muy tedioso y poco elegante. Por lo que para cada ciclo estable de período k , es más interesante conocer los parámetros para los cuales:

- (1) El primer ciclo, por bifurcaciones tangenciales, aparece.
- (2) El ciclo base se vuelve inestable, dando lugar a una cascada de bifurcaciones de ciclos armónicos de período 2^k , por medio de las bifurcaciones de pitchfork.
- (3) Todos los armónicos se vuelven inestables (puntos de acumulación de la sucesión de ciclos de período $k2^n$).

Para el ejemplo paradigmático de la logística, vemos que en el intervalo del parámetro, $[1, 4]$, existe un mosaico infinito, unidimensional de ventanas, para las cuales hay un único ciclo de período k o uno de sus subarmónicos, los cuales atraen a todos los puntos iniciales. La ventana correspondiente a $1 < \mu < 3.5700$, para $k=1$, es quizás la más ancha y llamativa de todas. Más allá del primer punto de acumulación, las ventanas subsecuentes son más estrechas, aún para ciclos de períodos pequeños y las ventanas se vuelven aún más estrechas a medida que k aumenta. En la figura (2.13.), se observa la dinámica de los puntos de equilibrio de la función logística en términos del parámetro μ . Cabe añadir que esta gráfica se realizó dejando iterar la función muchas veces (sin graficar) y graficando solo los puntos de equilibrio contra los diferentes valores del parámetro. Esto se hizo dejando iterar la función 10000 veces y graficando los 200 puntos siguientes. De esta manera se puede visualizar toda la dinámica que puede alcanzar la función logística, según el valor de su parámetro. La cascada de bifurcaciones es un paso previsorio al caos que satisfacen las funciones unidimensionales y unimodales como ésta. Lo anterior, es un ejemplo de cómo la

dinámica caótica de los modelos proviene de una dinámica en particular; es decir, generalmente el caos no aparece de manera repentina conforme se varía el valor del parámetro.

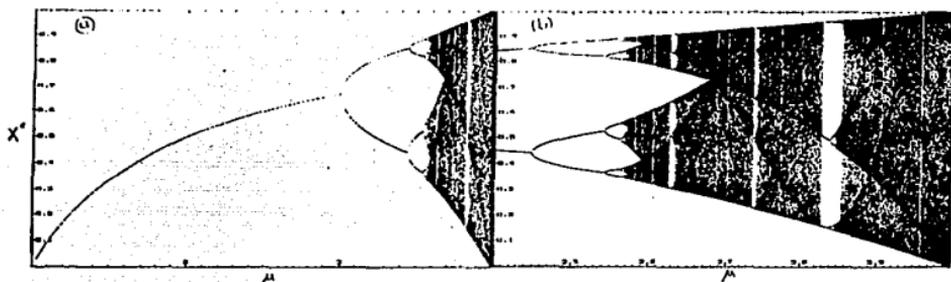


Figura 2.13. Gráfica de X^n vs. μ . a) $1 < \mu < 4$ y b) $3.4 < \mu < 4$.

Una vez hecho este análisis a grosso modo del mapeo logístico, observamos que éste nos describe cómo el crecimiento de una población puede alcanzar complejidades de tipo aparentemente estocástico. Todo depende del valor del parámetro μ . Así mismo vemos que para valores un poco mayores que 4, obtenemos un conjunto muy característico que se va formando a partir de las iteraciones de F_μ . Haremos hincapié en la estructura dinámica de este mapeo en este peculiar conjunto Λ , que se encuentra en el retrato fase del modelo.

2.2.6. Equivalencia topológica

Construiremos un mapeo completamente equivalente a F_μ , pero de estructura mucho menos compleja para un mejor entendimiento de su dinámica. Tomando en cuenta que dos mapeos son equivalentes si tienen la misma dinámica.

Sea Σ_2 un espacio cuyos elementos son sucesiones infinitas de ceros y unos, es decir $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) / s_j = 0 \text{ o } s_j = 1\}$. Σ_2 es el espacio de sucesiones de los dos símbolos 0 y 1. Así que generalizando, Σ_n es el espacio que consta de sucesiones infinitas de números entre 0 y $n-1$.

A continuación veamos que podemos hacer de Σ_2 un espacio métrico; es decir, que podemos definir una métrica en él.

Sea $s=(s_0, s_1, s_2, \dots)$, $t=(t_0, t_1, t_2, \dots) \in \Sigma_2$ defino la distancia entre s y t de la siguiente manera:

$$d[s, t] = \sum \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \quad (2.18)$$

Dado que $|s_i - t_i| = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i = t_i \\ 1 & \text{si } s_i \neq t_i \end{cases}$ entonces $\sum \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum 1/2^i = 2 \therefore d[s, t]$ converge.

Proposición(2.10).-d es métrica en Σ_2 .

Proposición(2.11).-Sea $s, t \in \Sigma_2$ y suponga $s_i = t_i$ para $i=0, 1, \dots, n$. Entonces $d[s, t] \leq 1/2^n$. Inversamente si $d[s, t] < 1/2^n$, entonces $s_i = t_i$, $\forall i < n$.

Con esta proposición podemos saber si dos sucesiones están cerca o no, según sus primeros términos; es decir dos sucesiones están cerca una de la otra si sus primeras n entradas coinciden.

A continuación definiremos al mapeo de corrimiento.

Definición(2.18).-El mapeo de corrimiento está dado por $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ tal que $\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$.

Cabe señalar que este mapeo de corrimiento, es el mapeo $X_{t,1} = 2X_t$ (modulo 1) para los número reales. Donde σ es un mapeo dos a uno porque: si $s=(s_0, s_1, s_2, \dots)$ y $t=(t_0, s_1, s_2, \dots)$, entonces $\sigma(s)=(s_1, s_2, \dots)=s(t) \therefore s$ es no inyectiva. Pero σ es sobreyectiva pues $\forall s \in \Sigma_2 \exists t \in \Sigma_2$ tal que $\sigma(s)=t$.

Proposición(2.12).- $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es continua.

Los puntos periódicos del mapeo corresponden a sucesiones que se

repite; es decir, sucesiones del tipo $s = (s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}, s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}, s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}, \dots)$. Entonces hay 2^n puntos de período n para σ , cada uno generado por las 2^n sucesiones finitas que hay de longitud n .

Así mismo, debemos agregar que existen puntos eventualmente periódicos. De hecho, cualquier sucesión eventualmente repetitiva, que a la larga tenga el mismo valor en todos sus términos, es eventualmente periódica; aún más, es eventualmente fija.

Otro aspecto así de interesante del mapeo de corrimiento, σ , es que el conjunto de puntos periódicos forma un subconjunto denso de Σ_2 .

Proposición(2.13)..-El conjunto $\text{Per}(\sigma)$ es denso en Σ_2 .

Cabe aclarar que no todos los puntos en Σ_2 son periódicos o eventualmente periódicos. Cualquier sucesión no repetitiva puede ser no periódica. Aún más, existen órbitas no periódicas en Σ_2 . Es decir, hay puntos en Σ_2 , cuya órbita se aproxima arbitrariamente a cualquier secuencia de Σ_2 . De hecho, las órbitas no periódicas de Σ_2 exceden en número a las órbitas periódicas de Σ_2 . Existen órbitas que no son periódicas que llenan densamente a Σ_2 ; es decir, hay puntos en Σ_2 cuyas órbitas eventualmente tienden a alguna sucesión de Σ_2 .

Ejemplo: Sea $s^* = (01|00\ 01\ 10\ 11|000\ 001\ \dots\ | \dots)$; s^* se construye formando bloques de ceros y unos de longitud n , luego de longitud $n+1$, etc. Claramente, alguna iteración de s^* aplicada a s^* nos da una sucesión que concuerda con cualquier sucesión dada en un número arbitrariamente grande de sitios.

Definición(2.19)..-A un mapeo con órbitas densas se le conoce como topológicamente transitivo.

Proposición(2.14)..-

* La cardinalidad del conjunto $\text{Per}(\sigma)$ es 2^n .

* El conjunto $\text{Per}(\sigma)$ es denso en Σ_2 .

* Existe una órbita densa en Σ_2 .

Ahora queda por establecer una relación entre el mapeo de corrimiento, con el mapeo logístico $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ para μ suficientemente grande. De hecho $\mu > 4$.

Recordemos que existe un conjunto Λ llamado conjunto de Cantor, el cual tiene la propiedad de nunca dejar el intervalo I bajo las iteraciones de F_μ . Mientras que todo punto que no pertenezca a dicho conjunto abandona I tendiendo a $-\infty$ después de muchas iteraciones de F_μ . También es importante recordar que $\Lambda \subseteq I_0 \cup I_1$. Por lo que dado $x \in \Lambda$, la órbita de x nunca deja Λ y por lo tanto caerán en I_0 o en I_1 .

Definición(2.20).-El itinerario de X es una sucesión $s(X) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ donde

$$s_j = \begin{cases} 0 & \text{si } F_\mu^j(X) \in I_0 \\ 1 & \text{si } F_\mu^j(X) \in I_1 \end{cases} \quad (2.19)$$

de esta manera el itinerario de X es una sucesión infinita de ceros y unos, es decir $s(X) \in \Sigma_2$.

Teorema(2.2).-Si $\mu > 4$ entonces $s: \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ es un homeomorfismo.

Por lo que este teorema nos dice que Λ y Σ_2 como conjunto son lo mismo. Pero aún más importante, es el hecho de que s también nos da una equivalencia entre la dinámica de F_μ en Λ y la dinámica de σ en Σ_2 .

Teorema(2.3).- $s \circ F_\mu = \sigma \circ s$.

Definición(2.21).-Sean $f: A \rightarrow A$ y $g: B \rightarrow B$ dos mapeos. Se dice que f y g son topológicamente conjugados, si existe un homeomorfismo $h: A \rightarrow B$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Al homeomorfismo h se le conoce como conjugación topológica.

Así queda completamente determinado, que mapeos que son topológicamente conjugados son completamente equivalentes

dinámicamente hablando. Por ejemplo, si f es topológicamente conjugado a g vía h y p es tal que $f(p)=p$, entonces $h(p)$ es fijo en g ; de hecho $h(p)=h(f(p))=g(h(p))$. Simultáneamente h da una correspondencia uno a uno entre $\text{Per}(f)$ y $\text{Per}(g)$. También, las órbitas eventualmente periódicas y las órbitas asintóticas para f van a órbitas similares para g por medio de h ; y además f es topológicamente transitiva si y sólo si g lo es.

En nuestro caso particular, dado que F_μ en Λ es topológicamente conjugada a σ en Σ_2 , y una vez analizadas las características anteriores para σ ; entonces tenemos que se satisface el siguiente teorema:

Teorema(2.4)..-Sea $F_\mu(X)=\mu X(1-X)$ con $\mu > 4$, entonces

- * La cardinalidad de $\text{Per}_n(F_\mu)$ es 2^n .
- * $\text{Per}(F_\mu)$ es denso en Λ .
- * F_μ tiene una órbita densa en Λ .

Hemos observado que la dinámica del mapeo cuadrático varía cualitativamente de manera drástica al ir variando el parámetro μ . Las dinámicas son bastante sencillas para bajos valores del parámetro y se van complicando conforme el valor de éste aumenta. Pues consiguientemente, tenemos que este mapeo llega a mostrar dinámicas singulares, recientemente descubiertas y estudiadas, para ciertos valores de μ ; nos referimos al comportamiento caótico de las órbitas de un sistema dinámico.

2.2.7. Caracterización topológica del caos

A continuación tenemos una serie de definiciones y ejemplos que caracterizan de manera formal a este fenómeno dinámico.

Definición(2.22)..-Dado $f:J \rightarrow J$, se dice que f es topológicamente transitiva, si para cada $R(\cdot)$ par Cde intervalos abiertos $U, V \subseteq J$ existe una $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Intuitivamente, un mapeo topológicamente transitivo tiene puntos que eventualmente se mueven bajo la iteración de una vecindad arbitraria a otra. Consecuentemente, el sistema dinámico no se puede descomponer en dos subconjuntos abiertos disjuntos que son invariantes bajo el mapeo. Además, es claro que si el mapeo posee órbitas densas, entonces es topológicamente transitivo.

Definición(2.23). - $f: J \rightarrow J$ tiene dependencia sensitiva en las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier vecindad N de x , existe y en N y $n \geq 0$ tal que

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \delta. \quad (2.20)$$

Veamos como $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ para $\mu > 4$, posee dependencia sensitiva en las condiciones iniciales en Λ :

Sea δ un diámetro menor que el diámetro de $A_0 = \{x \in I / F_\mu(x) \in I\}$ (donde A_0 es el intervalo entre I_0 e I_1). Sea $x, y \in \Lambda$. Si $x \neq y$ entonces $s(x) \neq s(y)$, por lo que los itinerarios de x, y deben diferir en al menos una iteración. Sea ésta la n -ésima, entonces tenemos que $F_\mu^n(x)$ y $F_\mu^n(y)$ caen en lados opuestos de A_0 . Por lo tanto, $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \delta$.

Como ejemplo de un mapeo topológicamente transitivo, pero que no es sensible a las condiciones iniciales, está la rotación irracional del círculo; es decir, $f: S^1 \rightarrow S^1$ tal que $f(\theta) = \theta + 2\pi k$, pues todos los puntos mantienen la misma distancia después de cualquier iteración.

Definición(2.24). -Sea V un conjunto. $f: V \rightarrow V$ se dice caótica en V si:

- * f tiene dependencia sensible en condiciones iniciales.
- * f es topológicamente transitiva.
- * los puntos periódicos son densos en V .

De manera resumida, un mapeo caótico tiene tres ingredientes que caracterizan su sabor de manera íntegra:

- * Imprevisibilidad
- * Incorruptibilidad
- * Un elemento de regularidad

En medio del comportamiento azaroso debido a las primeras dos propiedades del mapeo, existen elementos de regularidad; es decir, de comportamiento regular llamados puntos periódicos, los cuales son densos en V .

Es así, como para $\mu > 4$, la función logística satisface todas estas condiciones, por lo que podemos concluir que el mapeo logístico es un buen ejemplo de un modelo matemático de dinámicas de poblaciones, que presenta caos.

2.3. CAOS EN SERIES DE TIEMPO

Analizar el conjunto de datos obtenidos en el transcurso de cierto tiempo, en un experimento en el laboratorio o en el campo, nos dará indicios de la dinámica real del sistema. A este conjunto de datos le llamaremos "serie de tiempo". Usando la teoría de Sistemas Dinámicos no lineales, mostraremos como ciertas propiedades de algunos sistemas biológicos se pueden ir determinando poco a poco a partir de dicha serie de tiempo. Como ya lo habíamos mencionado antes, no es sino a partir de 1980 cuando se comenzó el desarrollo de esta rama de estudio, que ha cambiado la perspectiva del comportamiento de algunos fenómenos biológicos. El punto de vista cambió para algunos científicos, precisamente debido a que de este modo se ha podido identificar Caos en algunos sistemas.

A pesar que a partir de entonces se ha publicado mucho acerca de los diferentes métodos numéricos, ha sido poco tiempo para poder establecer herramientas matemáticas fuertes y consistentes para el análisis de los datos. Por lo que han surgido una serie de inconvenientes en cada método, de los cuales hablaremos posteriormente. Uno de los principales problemas -independientemente del método numérico que se utilice para analizar los datos- que se tienen al trabajar directamente con la serie de tiempo experimental, es el hecho de que el ruido ambiental interactúa con la dinámica que gobierna al sistema; lo cual ha ocasionado que se confunda el caos determinístico propio del sistema, con la azarosidad del ruido. Quizás a todo esto se deba que ciertos biólogos nieguen la teoría del caos en los sistemas biológicos.

Sin embargo, los datos experimentales contienen información mucho más rica que la información misma que se puede obtener de los propios modelos, ya que es obtenida de la naturaleza misma y la cual, independientemente de cualquier modelo ya establecido en particular, puede ser utilizada para desenterrar la dinámica multivariada de un sistema, comenzando por el análisis de la evolución de una sola variable [Nicolis, 1984].

Por lo que a continuación daremos la interpretación, desde el punto de vista de sistemas dinámicos de las series de tiempo.

2.3.3. Métodos gráficos

Este quizás sea el método más inmediato a seguir, una vez obtenida la serie de tiempo del sistema que estemos analizando. La finalidad es asociar un mapeo unidimensional al graficar la serie de datos. Dicho mapeo es una ecuación en diferencias con una sola variable de la siguiente manera: $X_{t+1} = T(X_t)$, donde $T: X_t \rightarrow X_{t+1}$ es un mapeo unidimensional. Si se logra identificar algún mapeo en especial, se procede a realizar el análisis de estabilidad cuya teoría se ha presentado en la sección anterior de este capítulo. Es importante hacer notar que la asociación de dicho mapeo sólo es posible si el movimiento del sistema es en máximo dos dimensiones. Para un sistema con más de dos grados de libertad el método a seguir es diferente, como lo veremos posteriormente. Es sorprendente como las propiedades de la dinámica del sistema continuo o discreto están capturadas por dicho mapeo. Según Lorenz (1963) a partir de T , "un investigador que no conozca la naturaleza de las ecuaciones que gobiernan el sistema, puede formar un esquema empírico de predicciones". Dicho esquema puede ser útil a los investigadores que pretendan modelar el sistema subyacente a la dinámica observable [Schaffer, 1985].

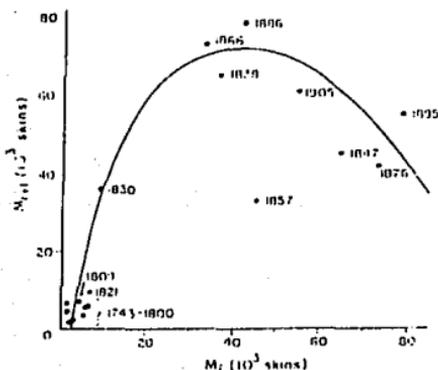


Figura 2.14. Los valores sucesivos de la serie de tiempo del número máximo de pieles de Lince Canadiense obtenidos de 1735 a 1905 mapeados uno contra otro y el mapeo unidimensional asociado.

Para el análisis de la dinámica del Lince Canadiense se graficaron los puntos de la serie de tiempo. Se graficaron los números máximos sucesivos de pieles de los animales que se lograron

obtener desde 1735 hasta 1905, en Canadá (X' vs. X). El mapeo asociado está indicado por la función $X'=F(X)=aX^n \exp(-bX)$, con $n=2$ y con un máximo unimodal (ver figura (2.14.)).

2.3.2. Construcción del atractor

Se comienza con el estudio de una sola variable, ya que a veces es muy difícil, si no es que imposible, conocer a todas las variables involucradas en el comportamiento del sistema. Una vez determinada alguna variable de estudio, es importante visualizar su evolución dentro de un espacio multidimensional abstracto, estructurado por todas las variables. Nos referimos al espacio fase del sistema. Donde como ya es sabido, un punto dentro de este espacio nos indica un estado instantáneo del sistema, por lo que una curva, llamada órbita o trayectoria, es una sucesión de estados instantáneos del sistema.

A medida de que el tiempo transcurre, algunos científicos esperan que el sistema alcance un estado que lo rija de manera permanente; es decir, un comportamiento estable del mismo, lo cual cuestionaremos más adelante. Esto lo podemos observar, dentro del espacio fase, como la convergencia de una familia de trayectorias a algún subconjunto fijo del espacio, donde el sistema permanecerá eventualmente atrapado. Por lo que se puede concluir que de la naturaleza de este conjunto invariante, llamado atractor, se obtendrá mucha información del comportamiento a lo largo del tiempo, de sus variables y la relación que exista entre cada una de ellas, esto es de la naturaleza del acoplamiento de las variables evolutivas.

La descripción de los atractores nos dará una descripción del sistema. Anteriormente ya se ha dado la lista de los diferentes atractores que existen en la teoría de Sistemas Dinámicos. Por lo que ahora conviene detectar esos atractores, a partir de las series de tiempo. La característica del atractor nos dará el número mínimo de variables que intervienen en el comportamiento del sistema. Por lo que determinar la dimensión del atractor es indispensable. Empezando con los atractores enlistados anteriormente, se sabe que la dimensión de un punto estable es cero, por lo que se necesita al menos una variable en el caso de un atractor monótono, o sea que el número de variables independientes para describir dicho sistema será al menos

una, por lo que la dimensión del espacio fase que contenga dicho punto atractor será al menos igual a uno. Para un atractor definido por una curva en el espacio fase, como es el caso de los ciclos límite, su dimensión es igual a uno; por lo que el número mínimo de variables independientes necesario para modelar la dinámica de un ciclo límite es dos, entonces la dimensión del espacio fase será igual a dos. En el caso de un atractor toroidal correspondiente a un fenómeno cuasiperiódico, la trayectoria convergerá a un toro bidimensional, para lo cual se requiere de mínimo tres variables independientes que definan el espacio fase.

Matemáticamente, a los atractores definidos anteriormente -puntos estables, ciclos límite y toros- se les considera como estructuras topológicas suaves caracterizadas por una dimensión entera. Pero actualmente, también se han analizado atractores que bajo esta perspectiva matemática, no son dichas estructuras topológicas sino que son formas geométricas que no son suaves y cuya dimensión no es entera, a las cuales se les denomina como atractores extraños, cuya estructura geométrica característica es la de un fractal. Los atractores extraños exhiben comportamientos altamente irregulares o caóticos. Por lo que si se trata de buscar un comportamiento caótico para un sistema determinado, es necesario buscar el atractor extraño que rijan dicha dinámica altamente irregular. Cabe hacer notar que tanto para atractores de característica suave como los de característica fractal, su dimensión está limitada a ser menor que el número de variables que describen el comportamiento evolutivo del sistema o lo que es lo mismo, menor que la dimensión del espacio fase.

Una vez definiendo qué es lo que hay que buscar, hay que decir cómo lo buscaremos a partir de una serie de tiempo:

Para sistemas deterministas, dado el conjunto de variables, $\{X_k(t)\}$ tal que $k = 0, 1, \dots, n-1$ que provienen de dicho sistema, éstas deben cumplir con un sistema de ecuaciones no lineales de primer orden cuya estructura es generalmente desconocida, pero que dado un conjunto de datos iniciales, $\{X_k(0)\}$, se podrá determinar la evolución completa del sistema. Se sabe que de forma alternativa, según nos indica la Teoría de Sistemas Dinámicos, dicho sistema de ecuaciones se puede reescribir como una ecuación de orden n para

cualquiera de las variables. Sea $X_0(t)$ la variable correspondiente a alguna serie de tiempo particular del sistema; entonces, la ecuación obtenida es:

$$dX_0(t)/dt=f(X_0(t), X_0'(t), X_0''(t), \dots, X_0^{(n-1)}(t)), \quad (2.21)$$

donde f generalmente no es lineal. De este modo en lugar de considerar a $X_k(t)$ para cada $k=0,1,2, \dots, n-1$, consideraremos sólo a $X_0(t)$ y al conjunto de sus derivadas correspondiente $X_0^{(k)}$ para toda $k=1,2,3, \dots, n-1$. Las cuales determinan las n variables que conforman el espacio de fases. Así es como, en un principio, de una serie de tiempo unidimensional podemos "desdoblar" la dinámica del sistema a una dinámica multidimensional.

Sugerido inicialmente por Ruelle, es más conveniente considerar a $X_0(t)$ y al conjunto de variables obtenidas de ella misma, al recorrer su valor un tiempo fijo τ , en lugar de trabajar con el conjunto de derivadas arriba mencionado. Entonces, el espacio de fases queda determinado por:

$$X_0(t), X_0(t+\tau), X_0(t+2\tau), X_0(t+3\tau), \dots, X_0(t+(n-1)\tau), \quad (2.22)$$

de esta manera, dado un valor fijo de τ , el conjunto de variables será linealmente independiente, requisito único indispensable para definir el espacio fase.

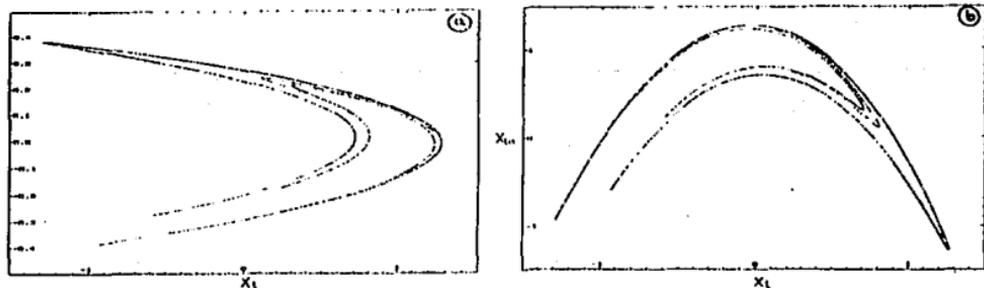


Figura 2.15. a) Mapeo de Henón obtenido del sistema de ecuaciones $X_{t+1}=1-aX_t^2+Y_t$ ($a=1.4$), $Y_{t+1}=bX_t$ ($b=0.3$) b) Mapeo de Henón reconstruido de la serie de tiempo de X con el método de Ruelle y Takens ($\tau=1$).

Para clarificar los resultados de este excelente método, observemos el mapeo de Henón graficado directamente de las iteraciones de las ecuaciones (gráfica de Y vs. X) y dicho mapeo reconstruido para una serie de tiempo de una sola variable del sistema ($X(t)$ vs. $X(t+\tau)$ con $\tau=1$) obtenida computacionalmente por medio del método de Ruelle y Takens (ver figura (2.15.)).

De la misma manera, se ha reconstruido el atractor para el modelo de crecimiento de una población de un predador y dos especies de presas cuyo modelo está determinado por un sistema de tres ecuaciones diferenciales con tres variables. En la figura (2.16.) están representados tanto el atractor en la fase caótica obtenido a partir de dichas ecuaciones y el atractor reconstruido por medio de la serie de tiempo de una sola variable (para los mismos valores de los parámetros), para el caso en el que $\tau=8$.

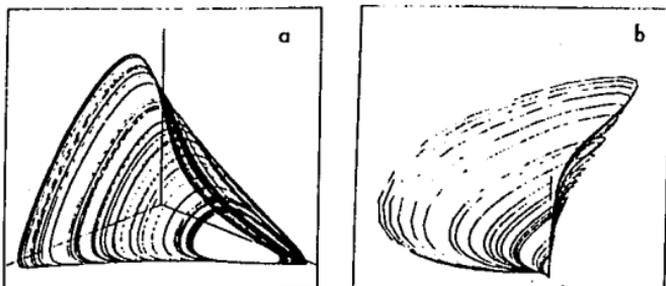


Figura 2.16. a)Atractor extraño construido a partir de las ecuaciones del modelo de Gilpin. b)Atractor extraño reconstruido con la serie de tiempo de una sola variable del modelo de Gilpin, para $\tau=8$.

2.3.3. Secciones de Poincaré

Muchas veces el sistema que se va a analizar es multidimensional, por lo que en él están involucradas varias variables dinámicas. Se dirá que el sistema es N-dimensional si tiene N variables dinámicas. Si quisiéramos hacer una representación gráfica de este sistema, necesitaríamos igual de ejes cordenados como de variables

dinámicas, es decir N. Este es un problema muy serio, ya que como sabemos es fácil visualizar objetos en 2 dimensiones y es ya un poco confuso hacerlo en 3; pero si nuestro sistema es de más de 3 dimensiones, nos es imposible hacer una gráfica de su evolución. Por esta razón se recurre muy seguido a las secciones de Poincaré.

Una sección de Poincaré es simplemente un corte de la trayectoria solución que vive originalmente en un espacio de dimensión N (para el caso de un sistema N-dimensional continuo). Para realizar una de estas secciones es necesario tomar la intersección de la trayectoria solución con algún plano bidimensional. Esto lleva simplemente a fijar N-2 variables, de tal modo que el objeto que nos quede sea bidimensional y se pueda graficar directamente.

Formalizando un poco esta idea, pensemos en un sistema que tiene N variables dinámicas, X_1 , y que las soluciones para éstas están dadas por N funciones $f_i(t)$ dependientes del tiempo. Por lo tanto, la trayectoria solución será la curva paramétrica N-dimensional definida por:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= f_1(t) \\ X_2(t) &= f_2(t) \\ &\vdots \\ X_N(t) &= f_N(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Una sección de Poincaré de esta trayectoria se obtendría tomando N-2 de las funciones $X_i(t)$ de la ecuación anterior e igualándolas a N-2 constantes C_i . Tomemos, sin pérdida de generalidad, que las N-2 funciones que se escogieron fueron las últimas N-2; de esta forma, la sección de Poincaré sería la gráfica del sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= f_1(t) \\ X_2(t) &= f_2(t) \\ X_3(t) &= C_1 \\ X_4(t) &= C_2 \\ &\vdots \\ X_N(t) &= C_{N-2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

que simplemente serían las parejas de puntos $(f_1(t), f_2(t))$ de la trayectoria solución que cortaron la sección de Poincaré. De esta forma, el estado del sistema en cada uno de estos puntos de la sección está bien determinado como $(f_1(t), f_2(t), C_1, C_2, \dots, C_{N-2})$.

Si seguimos la evolución temporal de la trayectoria solución, observaremos que ésta corta la sección de Poincaré una y otra vez obteniendo así una serie de puntos. Sea t_i el instante del i -ésimo corte, quedando así el punto $(x_1(t_i), x_2(t_i))$ (que abreviaremos \vec{x}_i) sobre la sección. Llamaremos mapeo de Poincaré la función F que nos lleva de cualquier punto \vec{x}_i al punto \vec{x}_{i+1} . Es decir, que cualesquiera dos puntos consecutivos de la sección de Poincaré estarán relacionados por la siguiente ecuación:

$$\vec{x}_{i+1} = F(\vec{x}_i) \quad \text{vi.} \quad (2.25)$$

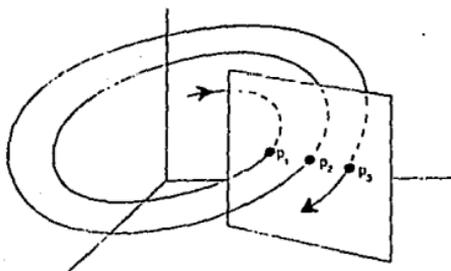


Figura 2.17. Sección de Poincaré de una trayectoria en un espacio fase tridimensional.

Con todo esto ya nos es posible visualizar en 2 dimensiones sistemas multidimensionales. Para ejemplificar dicho método observemos el corte, en este caso bidimensional, de las trayectorias que habitan en un espacio fase tridimensional (figura (2.17.)). Las ecuaciones que gobiernan dicho sistema se pueden observar como un mapeo del plano en sí mismo, y si las curvas solución de dicho sistema viven en aproximadamente dos dimensiones, el mapeo asociado a

la gráfica de puntos de la sección de Poincaré (mapeo de Poicaré) será un mapeo unidimensional como los mencionados en la sección anterior de métodos gráficos. De hecho, otra manera de obtener el mapeo unidimensional que contenga las propiedades de la dinámica total del sistema, es por medio de las secciones de Poincaré del atractor original del sistema. Es decir, primero se construye el atractor y posteriormente se toma una sección de Poincaré a partir de la cual se obtiene un mapeo unidimensional aproximado. Para ilustrar esto último es bueno observar el mapeo de Poincaré obtenido a través de una sección de Poincaré del atractor reconstruido para el modelo de crecimiento de la población del Lince Canadiense (figura (2.18.)).

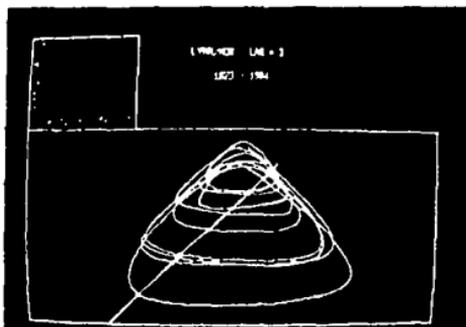


Figura 2.18. Atractor (visto desde arriba) reconstruido para el ciclo del Lince Norteamericano. En el recuadro superior izquierdo, se observa el mapeo de Poincaré correspondiente.

2.3.4. Exponentes de Liapunov

Como se mencionó anteriormente, con el ejemplo de las ecuaciones de Lorenz para modelar el clima, el Caos puede aparecer en sistemas aparentemente sencillos y con pocos grados de libertad, si pequeñas variaciones en las condiciones iniciales producen efectos totalmente distintos a mediano o largo plazo (e incluso a corto plazo para algunos sistemas). Por lo tanto, vemos que es muy importante analizar cómo evolucionan dos condiciones iniciales muy cercanas. Si estas condiciones iniciales dan lugar a trayectorias que no se separan una de la otra, entonces el movimiento es regular. Pero si la separación

entre las trayectorias crece muy rápidamente, entonces nos va a ser imposible predecir el estado final de una condición inicial dada, ya que una incertidumbre muy pequeña en dicha condición inicial va a producir una incertidumbre enorme al transcurrir el tiempo.

Por lo tanto, una manera de cuantificar qué tan caótica es una trayectoria es midiendo el crecimiento de la separación entre ésta última y otra trayectoria cercana. Para esto tomemos dos condiciones iniciales muy cercanas, X_0 y X_1 . En lo que sigue usaremos X_1 en lugar de $X_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ (donde x_i son las variables dinámicas del sistema) para simplificar la notación. Sigamos entonces la separación entre estas dos condiciones cercanas, $\delta X(t)$, a lo largo del tiempo:

$$\delta X(t) = X_1(t) - X_0(t) \quad (2.26)$$

Entonces, $|\delta X(t)|$ nos dirá como va a evolucionar la separación. Propongamos en primera instancia que la separación $\delta X(t)$ crece exponencialmente con el tiempo (es decir muy rápidamente con el tiempo):

$$|\delta X(t)| = \exp(\lambda t). \quad (2.27)$$

Si definimos δX_0 como la separación inicial entre las dos condiciones iniciales ($|\delta X_0| = |\delta X(0)|$), entonces se sigue que:

$$|\delta X(t)| = |\delta X_0| \exp(\lambda t). \quad (2.28)$$

En la ecuación (2.28), λ nos dice qué tan rápido es el crecimiento exponencial de la separación. Aunque λ sea muy pequeño, si es mayor que cero, habrá una divergencia exponencial de las condiciones iniciales cercanas.

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta X(t)|}{|\delta X_0|} \quad (2.29)$$

Por lo antes mencionado, tendremos que el sistema es impredecible si $\lambda > 0$. Hasta el momento hemos hablado de condiciones iniciales cercanas, pero no hemos especificado qué tan cercanas deben estar. Entonces, tomemos el límite cuando están infinitamente cercanas, es decir tomemos el límite cuando $|\delta X_0|$ tiende a cero, y

definamos la siguiente cantidad como *exponente de Liapunov*, cuando t tiende a infinito:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta X(t)|}{|\delta X_0|} \quad (2.30)$$

Tomando la ecuación anterior se puede definir un exponente de Liapunov para cada una de las variables dinámicas x_i , obteniendo así N exponentes de Liapunov:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta x_i(t)|}{|\delta x_{i0}|} \quad (2.31)$$

Tendremos entonces N exponentes de Liapunov (uno para cada variable dinámica): $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Existirán entonces 3 posibles comportamientos para las condiciones iniciales cercanas (CIS) según los valores de los exponentes de Liapunov:

- $\lambda < 0$ → las CIS se acercan exponencialmente con el tiempo.
- $\lambda = 0$ → las CIS mantienen la misma distancia con el tiempo.
- $\lambda > 0$ → las CIS se separan exponencialmente con el tiempo.

Ya sea que se pueda calcular un exponente de Liapunov para cada variable y ver en que variables existe contracción ($\lambda < 0$), y en que variables divergencia ($\lambda > 0$); lo más importante es saber si las condiciones iniciales cercanas van a diverger o no, por lo que en general no se calculan los exponentes de Liapunov para todas las variables, sino que simplemente se calcula el exponente de Liapunov de la trayectoria con la última ecuación.

2.3.5. Espectro de potencias y función de autocorrelación

Además de los exponentes de Liapunov, se puede recurrir a otros indicadores para detectar la presencia del Caos. Uno de ellos es el espectro de potencias que es simplemente la norma al cuadrado de la transformada de Fourier (TF) de alguna de las variables dinámicas. Tomemos una trayectoria:

(a) Para una trayectoria periódica, todas las variables dinámicas tienen que ser periódicas y del mismo período. La TF de cualquiera de ellas nos dará, en el caso ideal, una delta de Dirac centrada en la frecuencia (ver figura (2.19.)).



Figura 2.19. Espectro de potencias para una señal periódica.

(b) Para una trayectoria cuasiperiódica, como su nombre lo indica, las variables dinámicas serán funciones cuasiperiódicas del tiempo. Es decir, que no serán estrictamente periódicas, pero mostrarán un patrón repetitivo con cierta regularidad. Es como si tomásemos una función periódica y la "alargáramos" y "comprimiéramos" ligeramente en el eje temporal, por pedazos; lo que obtendríamos sería justamente una función cuasiperiódica. Realizando la TDF de una de estas funciones obtendremos una función que es cero en todo el espectro, salvo en una región alrededor. Este es el espectro de potencias para una señal caótica, cuyo aspecto es una banda más o menos irregular con picos densos en todo el intervalo, mostrando que el conjunto de los puntos periódicos es denso (figura (2.20.)).

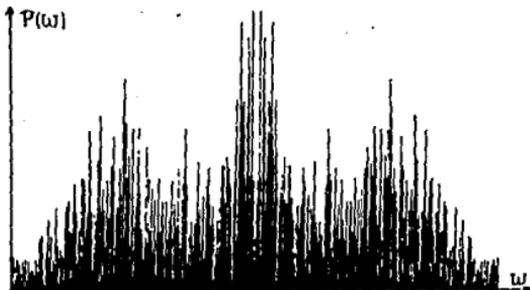


Figura 2.20. Espectro de potencias para una señal caótica.

(c) Una trayectoria azarosa es tan irregular que la evolución temporal de sus variables dinámicas es totalmente aleatoria, no existe ninguna frecuencia aparente con la que se repitan sus valores. Es más, si tomamos el tiempo entre máximos consecutivos de una variable dinámica obtendremos una lista de datos que es totalmente indiscernible de una sucesión aleatoria. Al tomar la TDF de una trayectoria azarosa obtendremos una serie de picos distribuidos en casi todo el espectro, sin que exista ninguno predominante. En el caso ideal el espectro de potencias del azar puro, se vería como una función constante, ya que cualquier valor de las variables ocurre con la misma probabilidad.

Durante su evolución temporal, una trayectoria caótica va perdiendo información de su pasado, por lo que entre más tiempo haya transcurrido se vuelve más difícil decir dónde estaba la partícula inicialmente. Existe una manera cuantitativa de calcular qué tanta información va perdiendo el sistema, para ello usamos la función de autocorrelación. La función de autocorrelación, como su nombre lo indica, da una medida de qué tan correlacionados están los valores de una serie de mediciones. En otras palabras, dice qué tanta información tiene el sistema comparada con la cantidad de información que tenía anteriormente. Por lo tanto, si la función de autocorrelación decrece estamos perdiendo información, y si crece estamos "ganando" información. Hay que recalcar que la "ganancia" de información se mide con respecto a la cantidad de información inicial, i.e. el sistema no puede tener en ningún momento más información que la que tenía en un principio.

La función de autocorrelación se define como:

$$C = 1/n \sum_{i=1}^n x_i x_{i+1} \quad (2.32)$$

donde $x_j = x_j - \langle x \rangle$ y $\langle x \rangle = 1/n \sum x_k$. Pero esta forma de calcular la función de autocorrelación es muy poco operacional, por lo que se usa una manera alternativa para obtenerla. El teorema de Wiener- Khinchin [Champney 1987] dice que la función de autocorrelación de una serie de datos es igual a la transformada de Fourier del cuadrado de la norma de la transformada de Fourier de los datos originales. Esto corresponde a:

$$C(x) = TF(P(x)) = TF(|TF(x)|^2), \quad (2.33)$$

donde $C(x)$ denota la función de autocorrelación, TF la transformada de Fourier y $P(x)$ el espectro de potencias. En la práctica, como ya vimos, suele ser necesario substituir la TF por su versión numérica TDF . A continuación ejemplificaremos la utilidad de la del espectro de potencias y la autocorrelación para mostrar Caos en un fenómeno biológico en epidemiología (ver figura (2.21)).

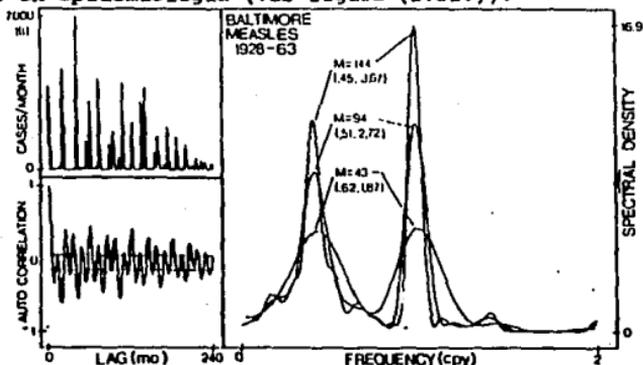


Figura 2.21. Espectro de potencias (cuadro grande) que registra el período de incidencia del sarampión en la ciudad de Baltimore, U.S.A. de 1928 a 1963 (espectro caótico). En el cuadro superior izquierdo se muestra la serie de tiempo correspondiente y en el cuadro inferior izquierdo la función de autocorrelación, la cual tiende a cero.

2.3.6. Dimensión de Hausdorff y dimensión de Correlación

Medir la dimensión del atractor es de suma importancia debido a dos factores. Primero, esta medida nos indicará el número mínimo de variables independientes que intervienen en la dinámica del sistema, que como ya habíamos dicho antes, en la práctica es casi imposible determinar los grados de libertad del sistema en observación o lo que es lo mismo, la dimensión del espacio fase. En segundo lugar, lograr identificar un "atractor extraño" en la dinámica del sistema es una manera de distinguir entre caos determinista y azar puro, ya que la dinámica del sistema alrededor de dicho atractor es una dinámica caótica, es decir una dinámica aperiódica (multiperiódica) e

impredecible al cabo de un tiempo considerablemente largo, siendo sensible a las condiciones iniciales (ver definición (2.24)).

Determinar la dimensión del atractor no es tarea fácil. Muchas veces la dificultad radica a la hora de calcularla por medio de la computadora. En el caso de la dimensión de correlación establecida por Grassberger y Procaccia, existe la ventaja de que ésta se puede calcular de una manera bastante efectiva con los datos obtenidos computacionalmente. Además de que existe una relación matemática entre dicha dimensión y la dimensión de Hausdorff.

Dimensión de Hausdorff:

Si trato de ajustar una curva irregular con segmentos de recta, o trato de hacer una cubierta de un conjunto con celdas, siendo δ el tamaño de cada segmento o el tamaño de la longitud del lado de cada celda, entonces la longitud de la curva está dada por:

$$L(\delta) = k\delta^{1-D}, \quad (2.34)$$

donde el exponente D es llamado la dimensión fractal. La dimensión característica de la ecuación anterior puede cambiar a medida de que cambie δ . Considerando la relación en la escala logarítmica:

$$\log L(\delta) = (1-D)\log \delta, \quad (2.35)$$

una característica planteada por la teoría de la medida es el encontrar una medida relativa, para la dimensión D dada, que no dependa de la escala de δ . Hausdorff propuso a k , como la intersección asintótica del mapeo (2.35) con el eje Y como dicha medida. Al tratar de aproximar la curva irregular por medio de un polígono, la medida lineal aproximada k se puede calcular al sumar las longitudes de los lados de tamaño δ , después de ser elevados a la potencia D ; es decir, el número de lados del polígono o el número de celdas es:

$$N = k\delta^{-D}, \quad (2.36)$$

donde cada lado tiene una longitud δ^D , de tal forma que la medida

aproximada es $N\delta^D = k$. Si tenemos una escala lineal de medida, n , tenemos que la medida D -dimensional es $k = n^D$. Esta relación escalar sugiere la siguiente medida de dimensión:

$$D = \frac{\ln(k)}{\ln(n)}, \quad (2.37)$$

donde k es el múltiplo por el cual la medida D -dimensional aumenta y n es el múltiplo por el cual la medida lineal correspondiente aumenta. Conocemos a D como dimensión fractal. A partir de la idea anterior, formalizaremos la definición de la dimensión de Hausdorff:

$$D_n = \lim[\ln C / \ln(1/\delta)] \text{ mientras } \delta \rightarrow 0, \quad (2.38)$$

C es la cardinalidad de la δ -cubierta mínima del conjunto. Por ejemplo, C puede ser el número de lados del polígono. Si la relación lineal (2.35) es realmente efectiva para toda δ , entonces tenemos que la dimensión fractal y la dimensión de Hausdorff son iguales ($D = D_n$). En la práctica D_n nunca se puede obtener, debido a la resolución finita de los aparatos de medición. Por lo que enfocaremos la discusión en la dimensión fractal más que en la dimensión de Hausdorff.

Dimensión de Correlación:

Primeramente describiremos, paso a paso, el método numérico para la estimación de dicha dimensión:

1. Dada una serie de tiempo, ya sea que la hayamos obtenido por medio de las mediciones experimentales o que la hayamos calculado en la computadora, fijamos su longitud; es decir, el número de datos de dicha serie, digamos un número entero N , tomados a intervalos de tiempo constante:

$$X_0(t_1), X_0(t_2), \dots, X_0(t_N),$$

pero para simplificar la notación, lo reescribimos de la siguiente manera:

$$X_0(1), X_0(2), \dots, X_0(N).$$

2. Dada la dimensión del espacio de fase ambiente n , construiremos K puntos a partir de los datos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{X}_1 &= (X_0(1), X_0(1+\tau), \dots, X_0(1+(n-1)\tau)), \\ \vec{X}_2 &= (X_0(2), X_0(2+\tau), \dots, X_0(2+(n-1)\tau)), \\ &\vdots \\ \vec{X}_K &= (X_0(K), X_0(K+\tau), \dots, X_0(K+(n-1)\tau)),\end{aligned}\quad (2.39)$$

donde K es tal que $N=K+(n-1)\tau$.

3. Calculamos la función de correlación $C_n(r)$, que da la fracción del número de parejas distintas de puntos que distan menos (o igual) que una longitud dada r :

$$C_n(r) = (1/n_p) \sum \sum H(r - |\vec{X}_i - \vec{X}_j|), \quad (2.40)$$

donde la H es la función de Heaviside:

$$H(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq 0 \\ 0 & \text{si } X < 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

y n_p es el número de parejas distintas de \vec{X}_i y \vec{X}_j :

$$n_p = K(K-1)/2, \quad (2.42)$$

de esta manera la función de correlación es monótona creciente desde cero para $r=0$, hasta 1 cuando $r = \max(|\vec{X}_i - \vec{X}_j|)$.

4. Grasberger y Procaccia demostraron que para valores de N y n suficientemente grandes y r suficientemente pequeña, se obtiene la siguiente aproximación:

$$\ln C_n(r) = D_0 \ln r, \quad (2.43)$$

por lo que D_0 es la pendiente de la relación lineal obtenida entre el logaritmo de la función de correlación y el logaritmo de la

longitud de correlación r . Así que es necesario determinar la región, si es que existe, donde las curvas de dicha relación se aproximan lo más posible a líneas rectas; o sea que el calcular el tamaño de la región lineal. Para eso se grafica, la derivada del logaritmo de la función de correlación con respecto al logaritmo de r , contra el logaritmo de r , y se busca el intervalo donde la función sea aproximadamente constante. Dicho intervalo $[r_{\min}, r_{\max}]$ será la llamada región lineal (ver figura (2.22.)).

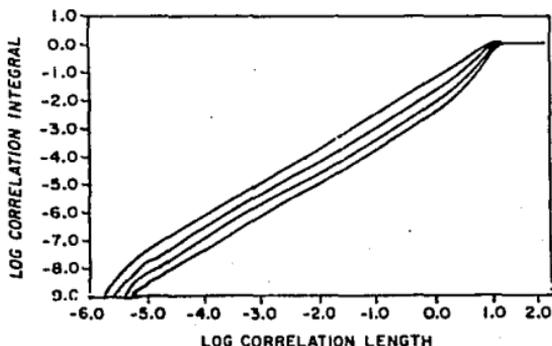


Figura 2.22. El logaritmo de la función de correlación para el atractor de Henón, calculada con 1000 puntos de la serie de tiempo para diferentes dimensiones del espacio ambiente ($n=3,4,5$ y 6).

5. Finalmente calculamos el valor de D_c para diferentes valores de n . Cabe señalar que D_c no se calcula por medio de los valores numéricos de su derivada. La derivada se calcula para encontrar la región escalar, después se regresa al logaritmo de $C_n(r)$ y se calcula la pendiente de la recta encontrada en dicha región.

Dificultades para determinar la dimensión de un atractor:

Existe una lista de inconvenientes para determinar la dimensión de un atractor a partir de los datos experimentales. El teorema de Takens, el cual se deriva del teorema de Whitney, nos afirma que a partir del conjunto $S = \{\vec{X}_k = X_0(K), X_0(K+\tau), \dots, X_0(K+(n-1)\tau)\}$ podemos construir al conjunto atractor del sistema bajo las siguientes suposiciones: Todos los puntos obtenidos de los datos directamente

medidos están dentro del atractor, esto es, que se considera que el comportamiento transitorio inicial desaparece y se supone que hay un número infinito de valores medidos no afectados por el ruido ambiental. Si el conjunto de datos satisface las suposiciones anteriores, el teorema afirma que para toda dimensión n suficientemente grande, existe un espacio ambiente entre el conjunto atractor y el conjunto S .

Observamos que existe un fundamento teórico (matemático) fuerte que nos permite buscar un atractor a partir de nuestra serie de tiempo. Pero en la práctica, las condiciones del teorema nunca se cumplen debido a que no existen datos experimentales sin ruido ambiental; en el caso de los datos obtenidos por medio de las computadoras existe lo que se llama ruido numérico que se debe al redondeo de las cifras.

Otro de los inconvenientes es a la hora de determinar la longitud de la serie de tiempo. El número de datos requeridos depende del algoritmo que se utilice para calcular la dimensión que se haya escogido, incluso es lógico pensar que el algoritmo variará dependiendo del tipo de dimensión que se desea calcular. De hecho, el número de datos depende de la misma distribución de los puntos en el atractor. Si la órbita visita raras veces al atractor de estructura fractal, se requerirá de un gran número de datos. Por lo que resulta incómodo buscar algo que de antemano, se necesita conocer.

En el caso de la dimensión de correlación, el problema radica en encontrar la región lineal que corresponda a la curva que mejor se aproxime a una línea recta. La estimación de dicha región se hace de manera numérica también, para la cual no hay un criterio bien establecido. Lo que se puede decir es que para conjuntos de datos muy bien comportados los diferentes criterios devuelven en esencia, el mismo resultado. Pero quizás este no sea el caso para datos con ruido. Generalmente, al tratar de calcular r_{\min} y r_{\max} por diferentes criterios se llegarán a resultados totalmente diferentes. No se ha llegado a un criterio universal para calcular la región lineal.

Sin embargo la mayoría de las veces, no nos interesa el valor absoluto de D_c , sino más bien observar como cambia su valor conforme las condiciones fisiológicas cambien; por lo que se puede obtener un rango de valores para D_c en un intervalo de r_{\min} y r_{\max} . [Albano et.al., 1987].

Otro factor importante es determinar el tiempo de muestreo. Es decir, cada cuánto tiempo se deben tomar mediciones del experimento y también es necesario saber cuánto durará el período total de muestreo. La dimensión de correlación depende sensiblemente de dicho intervalo; el que el intervalo tienda a cero no necesariamente significa que el valor de D_c será más preciso. Inclusive si T , período de tiempo entre medición y medición, es muy pequeño pueden resultar valores de D_c también muy bajos. Es decir, si T tiende a cero D_c puede tender a cero.

Otro argumento en contra de que T no es necesariamente muy pequeño es que para asegurar que la correlación que existe entre dos puntos distintos en el atractor se debe a la geometría misma de éste y no a que sus componentes fueron muestreadas a intervalos de tiempo muy pequeños, se considera que dichos puntos estén separados por un valor de T muy grande. Por otro lado, el intervalo de muestreo está relacionado con la eficacia del encajamiento aproximado entre el conjunto S y el atractor original. La existencia de una función de encajamiento en un espacio de dimensión n se demuestra para conjuntos infinitos de datos sin ruido, mostrando que dichos datos pueden sustituir las $n-1$ derivadas del dato medido $X_0(t)$. En la práctica, este caso analítico ideal se aproxima con conjuntos finitos con ruido, para los cuales la T correspondiente debe ser suficientemente pequeña para poder realizar las aproximaciones locales de las derivadas. Por lo que un valor arbitrariamente grande no sirve [Albano et.al., 1987].

Estos dos últimos argumentos sugieren que valores arbitrariamente grandes y arbitrariamente pequeños son insatisfactorios. Entonces, se debe pensar como elegir un valor intermedio para T . Albano & Rapp seleccionó este valor intermedio basándose en el valor crítico T_c , valor correspondiente al primer cero obtenido de la función de autocorrelación de la serie de tiempo. En base a esto se fija el valor intermedio del tiempo de

muestreo por medio de la relación $T_c = nT$, con n la dimensión del espacio huésped. Broomhead y King propusieron utilizar un valor del tiempo característico igual a $1/f^*$, donde f^* es la frecuencia más grande del espectro de potencias correspondiente a la serie de tiempo. Este valor $1/f^*$ está relacionado con el valor del intervalo de tiempo para el cual la función de autocorrelación vale cero por medio del teorema de Wiener-Khinchine, donde se toma en cuenta el hecho de que el espectro de potencias es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación. De manera alternativa, Simm sugiere que el tiempo de muestreo debe ser $T_c/n < T < T_c$, donde n es la dimensión del espacio ambiente.

Relación entre la dimensión de correlación y la dimensión fractal:

Considerando una cubierta del atractor por medio de hypercubos (celdas) de longitud δ y una serie de tiempo $\{X_k\}_{k=1}^N$. La probabilidad p_i para una X_k arbitraria de caer en una celda i es

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mu_i, \quad (2.44)$$

donde μ_i es el número de puntos de la serie $\{X_k\}$ que caen en la celda i . Se tiene que:

$$C(\delta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i \mu_i^2 = \sum_i p_i^2, \quad (2.45)$$

utilizando la desigualdad de Schwartz obtenemos la siguiente desigualdad:

$$C(\delta) = N(\delta) \langle p_i^2 \rangle \geq N(\delta) \langle p_i \rangle^2 = 1/N(\delta) = \delta^D, \quad (2.46)$$

por lo tanto si $0 < \delta < 1$ tenemos que:

$$\delta^{D_c} \geq \delta^D \rightarrow D_c \leq D. \quad (2.47)$$

Es importante mencionar que sí es posible distinguir Caos Determinista de ruido azaroso, pues sumergiendo al atractor dentro del espacio fase cuya dimensión vaya aumentando, se encuentra que $C(r) \sim r^n$, donde n es la dimensión del espacio fase. (ver Fig.(2.23.))

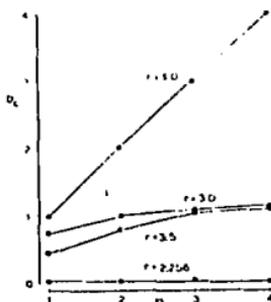


Figura 2.23. La dimensión de Correlación D_c para diferentes valores de la dimensión del espacio ambiente n . a) Señal con ruido b) Señal caótica para diferentes valores del parámetro c) Señal biperiódica, con $D_c=0$ debido a que la serie de tiempo consiste de un conjunto de subconjuntos ajenos entre sí.

CAOS EN MODELOS BIOLÓGICOS

3.0. INTRODUCCION

En este capítulo analizaremos varios modelos de crecimiento de poblaciones y veremos para qué valores de sus parámetros es posible que presenten una dinámica caótica.

3.1. CAOS EN BIOLOGIA

Al observar que la evolución de algunos fenómenos biológicos son de alguna manera regulares y que, pensando en que presentan cierta causalidad, se ha empleado a menudo la teoría matemática de sistemas dinámicos para su representación; en particular, mencionaremos el trabajo realizado en la modelación matemática por ecólogos, epidemiólogos y fisiólogos, en algunos de los cuales, se han utilizado conceptos provenientes de la física [Altesor, 1989].

Hasta hace relativamente poco, se creía que los sistemas dinámicos biológicos deberían tender a un estado o punto de equilibrio al cabo de cierto tiempo. Se partía de la estabilidad de los sistemas y cuando ocurrían fluctuaciones, lo atribuían al "ruido ambiental"; es decir, a causas externas al sistema. Incluso lo atribuían a los errores en las mediciones, datos obtenidos

experimentalmente, o en casos extremos, a signos patológicos del mismo sistema; pero no a una consecuencia de una propiedad característica de éste.

Esta idea fué cambiando a partir de los años setentas, cuando algunos ecólogos sospecharon que dicho desorden podía ser parte del sistema. Aún cuando las ecuaciones de los modelos matemáticos tenían un carácter totalmente determinista, la dinámica tenía comportamientos similares a los comportamientos correspondientes a fenómenos totalmente azarosos. Nos referimos al Caos Determinista dentro de los fenómenos biológicos.

A pesar de que el Caos fue encontrado en un principio en fenómenos biológicos, los mismos biólogos han tendido a ignorarlo debido quizás a dos razones. Primeramente al análisis que May hizo del modelo de la función logística, el cual dió la creencia de que el Caos sólo se podía originar dentro del contexto de los sistemas dinámicos discretos. También está el hecho de que hasta 1980, no se sabía buscar comportamiento caótico en los mismos datos experimentales. Sin embargo, hoy en día, ya que se tiene herramienta suficiente para analizar las fluctuaciones dentro de las series de tiempo; los biólogos rechazan que estas irregularidades se observen desde el punto de vista del Caos Determinista, o ignoran del todo a dicho comportamiento. Los ecólogos en particular, por principio apoyan la teoría del Balance Natural dentro de los ecosistemas; es decir, el hecho de que las poblaciones tiendan a un punto de equilibrio. Pero es sabido que las poblaciones naturales frecuentemente exhiben grandes variaciones. De hecho la abundancia tanto relativa como absoluta de las diferentes especies, generalmente es fluctuante. De manera similar en epidemiología, el patrón de incidencia de una enfermedad en una población es complicado cuando el ciclo de incidencia es fluctuante. Debido a esto se concluye que las perturbaciones azarosas son muy importantes dentro del comportamiento del sistema, o que la componente determinística es caótica [Schaffer, 1987].

Pero, ¿qué se considera "Caos" dentro de los sistemas biológicos? Las caracterizaciones que los biólogos dan a este fenómeno particular de los sistemas no lineales es la siguiente; [Schaffer 1987]

- 1) La ecuación de evolución es totalmente determinística.
- 2) La dinámica del sistema es compleja, desde el punto de vista del análisis de estabilidad: Para ciertas características del sistema, la dinámica está regida por atractores extraños -atractores que no son ni periódicos ni cuasiperiódicos-. El comportamiento alrededor de ellos está caracterizado por apariciones de grandes dispersiones del movimiento de manera similar a un comportamiento azaroso, a pesar de que la dinámica subyacente es de carácter determinista.
- 3) Sensibilidad en las condiciones iniciales: Esto significa que dadas dos trayectorias inicialmente cercanas, éstas divergerán a lo largo del tiempo. Es decir, que las pequeñas diferencias en las condiciones iniciales serán amplificadas. Lo que implica que para cualquier error, por pequeño que éste sea, al determinar las condiciones iniciales del sistema no será posible predecir su evolución a largo plazo.
- 4) Camino al Caos: El comportamiento irregular característico del Caos tiene una precedencia bien determinada. No es repentina dentro del comportamiento del sistema, ya que éste sufre una serie de transiciones a medida que se varía algún parámetro específico.
- 5) Geometría fractal: El movimiento dentro del espacio fase se desenvuelve dentro de una dimensión fractal no entera. Esto se debe, en parte, a la secuencia de "estiramientos" y "doblamiento" de las trayectorias en el espacio fase, creando una estructura de "autosemejanza" en las trayectorias.

Una vez definido de manera concreta el fenómeno de Caos, aunque sea sólo de manera cualitativa, podremos dar una buena descripción del tipo de fluctuaciones que presentan los diferentes sistemas hasta ahora modelados en biología.

Los siguientes son algunos de los fenómenos biológicos, además de los fenómenos en ecología y epidemiología, que han indicado tener comportamiento caótico:

1. En la fisiología se ha propuesto un punto de vista alternativo contrario al concepto de enfermedades caóticas, donde el Caos es útil para modelar el "azar acotado" inherente en la función de salud de los sistemas fisiológicos.

2. En la neurofisiología pueden producirse modificaciones cualitativas de las oscilaciones, en los procesos que son rítmicos; como sucede en los desarreglos del ciclo vigilia-sueño, o en las enfermedades maniaco-depresivas de ciclo rápido [Goldberger et.al., 1987].

3. La variabilidad genética debido al gran número de genotipos distintos que existen, manifiesta signos caóticos en las frecuencias génicas. De hecho este polimorfismo caótico es más la regla que la excepción [May, 1990].

En este trabajo nos limitaremos a presentar algunos modelos ecológicos y de epidemiología. Para estas ramas de la biología existe una amplia gama de modelos trabajados que pueden llegar a presentar dinámicas caóticas. Primero, hablaremos de los diferentes tipos de modelos matemáticos que hay dentro de la dinámica de crecimiento de poblaciones, rama de estudio de los ecólogos.

3.2. MODELOS EN ECOLOGIA

La dinámica poblacional describe y explica los cambios numéricos de las poblaciones y de los procesos, particularmente biológicos, que determinan dichos cambios a lo largo del tiempo. Definiremos a una población como un conjunto de individuos de una misma especie, que interactúan y se reproducen entre sí, compartiendo un espacio determinado y que, normalmente, no establecen contacto con otros grupos de especies.

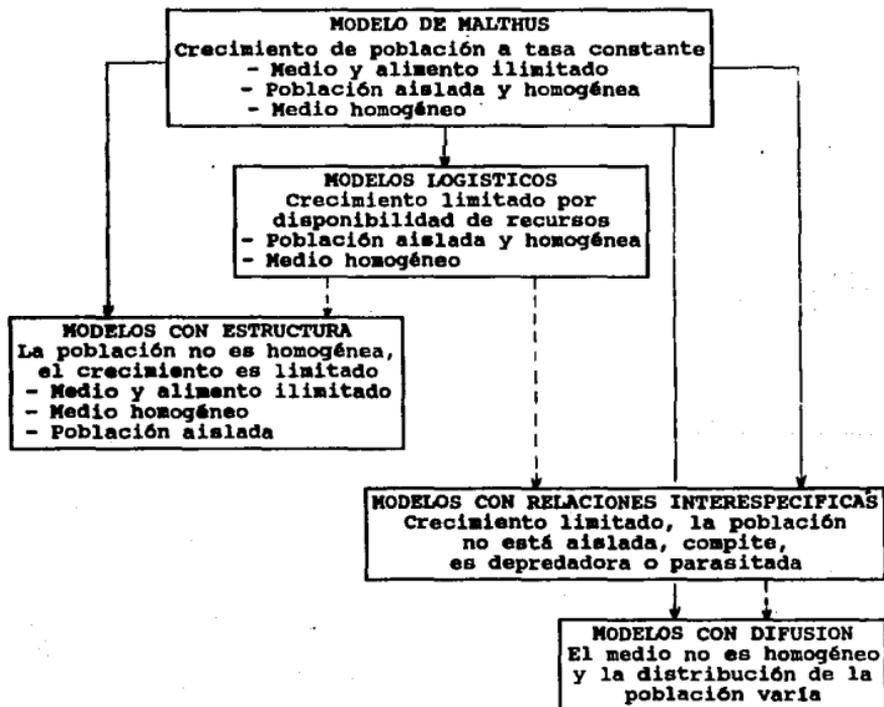


Figura 3.1. Clasificación de los modelos en ecología.

La construcción del modelo depende de las características del crecimiento de la población. Primordialmente, los podemos dividir en modelos de crecimiento a tasa constante y modelos con densodependencia. El esquema anterior (Fig. (3.1.)), nos da una clara clasificación de los diferentes modelos [Altesor,1989]

En cuanto a los modelos densodependientes, los ecólogos creían hasta hace treinta años aproximadamente, que este factor regulador tendía a mantener a la población a una densidad constante; o al menos, la hacían variar periódicamente. Las variaciones irregulares se debían a factores externos, como ya lo habíamos mencionado anteriormente. Sin embargo, gracias a que uno de los objetivos últimos de los ecólogos es la predicción de la evolución de las poblaciones, se han analizado los modelos matemáticos; de tal forma que los resultados a los que se han llegado, han sugerido lo contrario. Nos referimos a las propiedades caóticas de los modelos matemáticos en ecología.

Existen ciertas implicaciones, desde el punto de vista práctico, para el hecho de que las ecuaciones simples y determinísticas posean trayectorias que parecen, en principio, alguna clase de ruido. Significa que, por ejemplo, las fluctuaciones erráticas en los datos para poblaciones de animales, no necesariamente se deben a una azarosidad en el medio ambiente o a errores en el muestreo; sino que ellas pueden ser simplemente, derivadas de un crecimiento rígidamente determinístico. Alternativamente, se observa que dentro del régimen caótico se manifiesta la sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que inhibe la predicción a largo plazo.

Debido a que los modelos con densodependencia son unos de los que presentan caos, discutiremos algunos de ellos para los que se han hecho cotejamientos con fenómenos naturales. Estos modelos son para poblaciones que crecen en algún medio ambiente limitado, lo que es un factor mucho más apegado a la realidad. Ahí donde se han tomado en cuenta las siguientes premisas:

a) Potencialmente, las poblaciones crecen de manera exponencial.

b) Hay una retroalimentación debido a la dependencia en la densidad de la población, que reduce progresivamente la tasa de crecimiento inicial.

A pesar de toda la teoría desarrollada con respecto a las propiedades caóticas de los modelos matemáticos, una de las cuestiones que se plantean los ecólogos es la de saber si es que este comportamiento lo desempeñan o no, las poblaciones en la naturaleza. Es decir, si estas propiedades matemáticas sólo son eso, propiedades meramente del modelo matemático. Por lo que es necesario verificar si las condiciones caóticas dadas por el modelo, pueden o no corresponder a situaciones concretas.

Así fue como trabajaron con poblaciones experimentales, simuladas en computadoras [May,1990]. Estos estudios han mostrado transiciones descritas por las ecuaciones, en particular el paso al caos. Pero estas poblaciones no están sumergidas dentro de un medio ambiente natural, son poblaciones aisladas, lo cual no permite que sea una verificación al cien por ciento del modelo con la realidad. Los estudios realizados contaron con el uso de grandes computadoras, en las cuales se hicieron simulaciones del crecimiento de poblaciones, en un mundo imaginario, donde se controlaban todos los parámetros reguladores del sistema. Y se analizaron los "seudodatos" obtenidos, que representaban los efectivos de una población al cabo de un gran número de generaciones.

Dada una serie cronológica, sucesión de datos obtenida al realizar mediciones a intervalos de tiempo regulares; quisieron proponer una forma para determinar la posibilidad de que en esta serie existiera la presencia de un comportamiento caótico del sistema. En los ochentas, desarrollaron técnicas basadas en lo conocido acerca de los "atractores extraños". Dichas técnicas, que ya hemos mencionado y descrito anteriormente, son puramente fenomenológicas; ya que permiten conocer la dinámica meramente cualitativa del sistema, sin la necesidad de comprender los mecanismos biológicos ni las interacciones que están en juego.

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

La utilidad que conlleva a determinar si un sistema biológico es caótico o aleatorio radica básicamente, como lo hemos dicho antes, en proponer otra alternativa a la descripción de las fluctuaciones no regulares del sistema, las cuales no permiten predecir su comportamiento. Esto se ve reflejado en el modelo que, en principio, permitiría predecir estados posteriores del sistema; pero que para ciertas condiciones, la conjetura laplaciana ya no tiene sentido alguno.

A continuación planteamos los modelos de crecimiento con densodependencia. Debido a que el factor de densodependencia interviene directamente con la tasa de crecimiento, la cual a su vez contiene los factores de natalidad y mortalidad, hablaremos de natalidad y mortalidad densodependientes los cuales intervienen en la regulación del sistema. Dicha regulación es la habilidad de la población para mantener su densidad alrededor de un valor llamado capacidad de carga. Según Nicholson, la competencia es el único factor que ejerce control sobre ella, para él, la competencia depende de la capacidad de crecimiento de la población y la capacidad de los individuos para explotar los recursos del medio.

Smith, en 1935, propuso que la tasa de mortalidad, m , densodependiente está dada por una relación lineal de la siguiente manera:

$$m = bD + e$$

donde, b , es el coeficiente densodependiente; e , el coeficiente densoindependiente y, D , es la densidad de la población. Por lo que al graficar la mortalidad contra la densidad en escalas logarítmicas, se interpreta a la pendiente de la curva resultante como un indicador de la fuerza o debilidad del factor mortalidad, dependiente de la densidad. Si la pendiente está entre 0 y 1, hay una subcompensación de la mortalidad sobre el crecimiento poblacional. Cuando la pendiente es igual a 1, significa que existe una compensación exacta de la mortalidad en el crecimiento de la población; y es cuando la población recupera su nivel de equilibrio. A este tipo de competencia se le denomina "contest" en los términos ecológicos. Si la pendiente es mayor que 1, ya no habrá relación alguna entre población estable

y capacidad de carga, y es cuando pueden aparecer dinámicas complejas, como dinámicas irregulares o caóticas.

En el caso de competencia tipo "contest", una vez que la densidad alcanza cierto umbral, cierto número de individuos continúa recibiendo la misma cantidad de alimentos para sobrevivir, y el resto de los individuos muere. En contrapuesta se encuentra el tipo de competencia denominada "scramble", en el cual, todos los individuos continúan obteniendo una cantidad de alimento equivalente, pero no es la suficiente para sobrevivir y en consecuencia todos los individuos mueren. Ver figura (3.2).

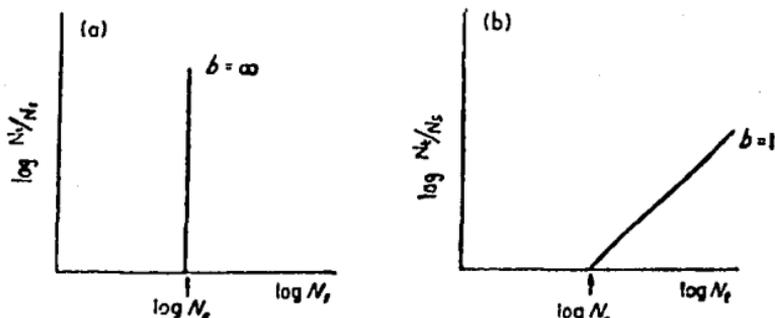


Figura 3.2. Relación de densodependencia para competencias a) "scramble" y b) "contest".

Podemos concluir entonces, que determinar dicho umbral de densidad de población es importante para el análisis de la dinámica del sistema. La competencia intraespecífica se da tanto en poblaciones de la misma especie como en poblaciones con dos o más clases distintas de especies. Cabe señalar que los factores densodependientes de dicha competencia son de central importancia en la dinámica de las poblaciones naturales, como lo veremos en algunos de los modelos citados posteriormente [Altesor, 1989].

A continuación daremos la lista de algunos modelos matemáticos de ecología que llegan a presentar dinámicas caóticas:

3.2.1. MODELOS DE CRECIMIENTO UNIDIMENSIONAL DISCRETO

En un principio, para modelar poblaciones de una sola especie que se reproducen a intervalos de tiempo discreto y cuyas generaciones no se traslapan, se suelen utilizar las ecuaciones en diferencias unidimensionales. Muchas poblaciones biológicas, en particular poblaciones de insectos, se comportan de esta manera. Dicha ecuación expresa a la densidad de la población al tiempo $t+1$ en términos de la densidad de la misma en una unidad de tiempo anterior, de la siguiente manera [May 1976]:

$$X_{t+1} = F(X_t), \quad (3.1)$$

donde la función $F(X)$, es la llamada función densodependiente. Cabe señalar que la interpretación de la variable X como densidad de una población es meramente desde el punto de vista ecológico; sin embargo, existe una amplia gama de interpretaciones dentro de la misma biología. Por ejemplo en la genética, donde la ecuación describe el cambio de la frecuencia de los genes en el tiempo; en la epidemiología, la variable significa la fracción de la población infectada al tiempo t .

Para averiguar acerca del comportamiento dinámico de la ecuación es necesario estudiar las iteraciones de F , para cada valor de los parámetros una vez establecidos. De manera subsecuente está el análisis de los puntos de equilibrio de la ecuación. Dicha estabilidad, como ya se ha descrito en el capítulo anterior, depende del valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de equilibrio.

La función $F(X)$ tiene como característica, dentro de los modelos biológicos que están en la literatura y regidos por la ecuación (3.1), la de poseer un máximo al cual se le llama máximo unimodal de la función; dicha característica es importante para el análisis de estabilidad. Por otro lado, siempre debe de existir el cero como punto de equilibrio; es decir, $F(0)=0$, ya que no puede haber ningún

tipo de crecimiento a partir de cero pobladores (este aspecto se debe a las interpretaciones biológicas del modelo, más que a las propiedades matemáticas).

Es así como ya hemos estudiado en particular la estabilidad del modelo logístico, cuya ecuación de densodependencia está dada por la parábola:

$$F(X) = \mu X(1-X). \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2.), comparada con otros modelos recientes, tiene la desventaja de ser más abstracta; pero la ventaja de tener un espectro de comportamientos dinámicos que tienen una riqueza compleja para su estudio analítico. Con los pies en la tierra, la ecuación anterior es útil para modelar poblaciones discretas, con generaciones que no se translanan -como ya lo habíamos mencionado anteriormente- donde se observa que las poblaciones tienden a un comportamiento monótono hacia un punto de equilibrio estable. Mientras que las poblaciones del laboratorio tienden hacia un comportamiento caótico o un comportamiento oscilatorio, en el mejor de los casos (ciclos límite estables), su comportamiento puede ser exageradamente no lineal por ausencia de muchos factores de mortalidad dentro del laboratorio.

En el capítulo anterior, hemos hecho ya el análisis exhaustivo de la ecuación anterior. Hemos expuesto bajo qué condiciones refleja el crecimiento de una población, así como mostrado la dinámica misma del modelo. Además, hemos dado las condiciones necesarias para que se presente un comportamiento caótico y analizado dicha dinámica caótica en particular. A continuación expondremos ejemplos particulares del modelo descrito por la ecuación (3.1.).

El siguiente modelo describe el comportamiento de una población con tendencia a crecer de manera exponencial a bajas densidades, al igual que el modelo logístico. Pero esta vez con tendencia a decrecer exponencialmente, para un número suficientemente grande de pobladores; es decir, dicho modelo queda fielmente representado por la siguiente ecuación no lineal:

$$X_{t+1} = X_t \exp[r(1-X_t)],$$

(3.3)

donde nuevamente, el parámetro r determina el tipo de comportamiento. Este modelo es plausible para una población de una sola especie, la cual está regulada por una enfermedad epidémica a densidades altas de población [May, 1976].

El valor de X para el cual $F(X)$ alcanza su valor máximo es $X=1/r$. Dicho máximo es una joroba suave debido a la analiticidad de F ; es decir, F es una función sensible con un máximo unimodal (ver figura (3.3.)). De manera análoga al caso logístico, analizaremos la estabilidad de dicho sistema determinando los puntos de equilibrio. En este caso son: $X^*=0$ y $X^*=1$, donde $F(X^*)=X^*$; los cuales, como nos podemos percatar, no dependen del valor del parámetro r . En particular se puede observar que si $r=1$, entonces el máximo es alcanzado en el punto de equilibrio $X^*=1$.

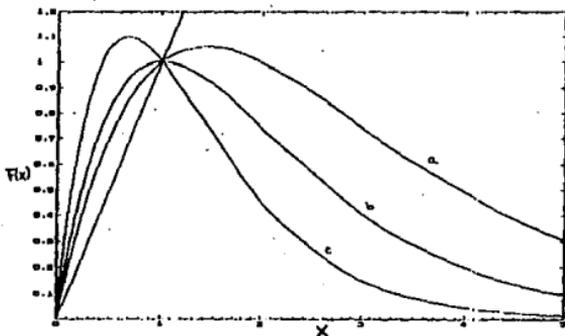


Figura 3.3. Gráficas de $F(X)=X\exp[r(1-X)]$.
para: a) $r < 1$, b) $r = 1$, c) $r > 1$

Debemos recordar que para que haya crecimiento en la población, la tasa de crecimiento per cápita deba ser positiva. Sin embargo, este modelo no está normalizado, por lo que no existe una cota superior en el valor del parámetro r ; es decir, $r \geq 0$. Calculando la derivada y evaluándola en los puntos de equilibrio, tenemos que $X^*=0$ es inestable para cualquier valor de r y $X^*=1$ es estable para $0 < r < 2$. En el caso particular de que $r=0$, dado que $F'(X^*)=1-r$; $X^*=1$ es un

punto asintóticamente atractor, para $0 < r < 1$ será atractor monótono y para $1 < r < 2$ será un atractor amortiguado.

Las condiciones del modelo para dinámicas caóticas se muestran en la tabla (3.1.). Es importante recalcar que el tipo de caos de dicho modelo es similar al de la ecuación cuadrática; es decir, hay un valor del parámetro para el cual sucede una bifurcación tangencial, ($r=2$), donde recordamos que el punto de equilibrio estable se vuelve inestable dando lugar a un ciclo de periodo 2. Y a medida que se aumenta el valor de r surge una cascada de bifurcaciones de Pitchfork antes de la primer ventana caótica. En la figura (3.4.) se observa el diagrama de X^* vs. r , donde se describe la dinámica del sistema en función del parámetro manipulable como lo hicimos en el modelo anterior.

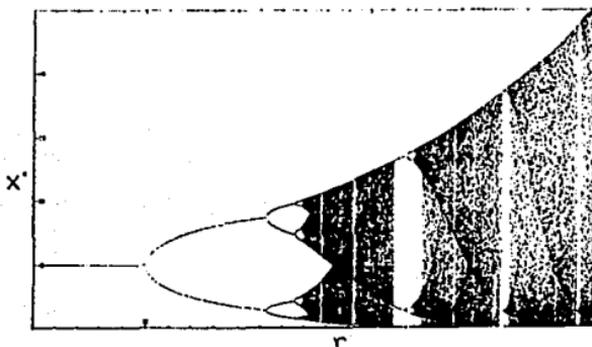


Figura 3.4. Puntos estables en función del parámetro r de $F(X) = X \exp[r(1-X)]$.

A continuación veremos otros tipos de modelos de crecimiento discreto, con dinámicas cualitativamente diferentes a los dos anteriores. De manera general, dichos modelos están descritos por la ecuación:

$$X_{t+1} = r X_t^{(1-f(X_t))}, \quad (3.4)$$

donde la función $f(X)$ indica el término de densodependencia del crecimiento.

Haciendo un estudio de la mortalidad de una población como función de la densidad de la misma, podemos obtener una idea clara de la densodependencia del modelo. Graficando mortalidad vs. densidad (número de pobladores en un tiempo dado) se observa, en la escala logarítmica, (al graficar $\log X_t/X_0$ vs. $\log X_t$) donde X_0 es el número de sobrevivientes de la población al tiempo t , que para $X_t=X_c$ se tiene que $\log X_t/X_0=0$. Es decir, la recta obtenida en la escalas logarítmicas interseca a la absisa por lo que hay valores para los cuales $\log X_t/X_0 < 0$. En ese momento tenemos que $X_t < X_0$, lo que significa que la tasa de mortalidad será negativa; es decir, que hay más sobrevivientes que número de pobladores. Esto sólo sucede cuando la reproducción o la inmigración intervienen antes de que los sobrevivientes sean muestreados (la inmigración es un aspecto no considerado para la elaboración del modelo, pues se supone una población aislada). Suponiendo que, por lo menos a bajas densidades, el número de pobladores al tiempo $t+1$ es directamente proporcional al número de sobrevivientes de la población al tiempo t ; es decir, $X_{t+1}=\lambda X_t$, y debido a la particularidad mencionada anteriormente, el modelo quedará mejor descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= rX_t && \text{si } X_t < X_c \\ X_{t+1} &= rX_t^{(1-f(X_t))} && \text{si } X_t > X_c. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Lo que significa que a bajas densidades de población el crecimiento será exponencial y para densidades mayores que el valor crítico el crecimiento será según lo indica la potencia de X_t . El valor crítico, X_c , indica el umbral a partir del cual entra en acción el factor de mortalidad densodependiente [Altesor, 1989]. Donde $f(X) > 0$ para cualquier X , pues de otra manera, si $f(X) < 0$, la potencia siempre sería mayor que 1, lo que indicaría que la población crece indiscriminadamente para cualquier densidad de la población. En el caso de que $f(X)=1$, entonces $F(X)=r$, la densidad de población sería constante para un número de pobladores mayor que X_c . Es importante señalar que ahora $F(X)$ tendrá una singularidad en el valor crítico X_c ; es decir, $F(X)$ no será analítica, y en el caso de que $F(X) > 1$, la función tendrá un pico en lugar de un máximo unimodal. Gracias a que ahora F es cualitativamente diferente a los otros dos casos, son de

esperarse dinámicas de crecimiento y sobre todo condiciones caóticas cualitativamente distintas.

Como caso particular, tomemos el modelo de Varley y Gradwell (1970) y Morris (1959) y con la colaboración posterior de Hassell, donde $f(x)=b$. Es decir, las ecuaciones están dadas por:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= rX_t & \text{si } X_t < 1 \\ X_{t+1} &= rX_t^{(1-b)} & \text{si } X_t > 1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde r es el parámetro de la tasa de crecimiento y b el parámetro de densodependencia. En la figura (3.5) podemos ver dicha función, para un valor fijo del parámetro r , y para diferentes valores de b entre 0 y 2. Los puntos de equilibrio son: $X^*=0$ y $X^*=r^{1/b}$. En este caso es importante señalar que si tomamos el análisis de mortalidad de la ecuación, en particular cuando $\log X_t/X_{t+1}=0$, vemos que el valor crítico del modelo coincide con el punto de equilibrio no trivial, es decir, $X_c=r^{1/b}$. Y para $r=1$ tenemos que $X_c=1$. Es por eso que en el sistema (3.6), $1 = \min\{X_c\}$, es el valor crítico considerado.

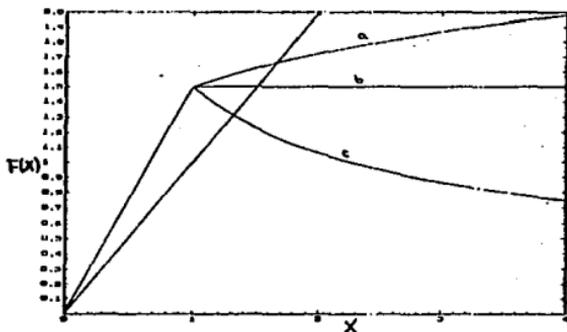


Figura 3.5. Diferentes gráficas de la función definida por el sistema (3.6) para: a) $b < 1$, b) $b = 1$, c) $b > 1$.

Calculando la derivada en cada uno de los intervalos, observamos que $X^*=0$ es inestable y $X^*=r^{1/b}$ es estable para $0 < b < 2$. La estabilidad del punto de equilibrio no trivial sólo depende del

parámetro b . Tenemos que $F'(X^*) = 1-b$, con $X^* = r^{1/b}$, entonces si $0 < b < 1$, tenemos que X^* es un atractor monótono y si $1 < b < 2$, X^* es un atractor amortiguado; y en el caso de que b tienda a un valor muy cercano a 2, $X^* = r^{1/b}$, es un punto asintóticamente atractor. Las características de la dinámica caótica del modelo según el valor de b están descritas en la tabla (3.1), y la gráfica de los puntos estables en función del parámetro r se muestra en la figura (3.6).

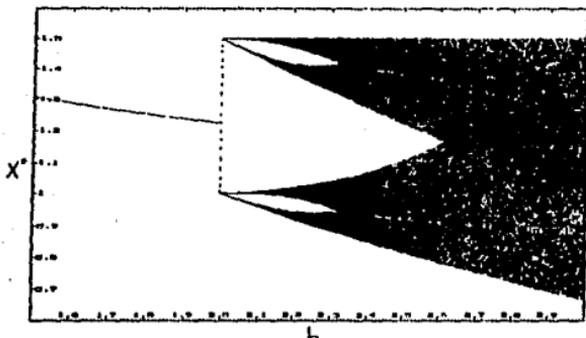


Figura 3.6. Puntos estables en función del parámetro b de la ecuación (3.6).

Otros dos modelos cuya función de densodependencia $F(X)$, es no analítica; pero su estructura es distinta a la de las dos últimas mencionadas, son los siguientes:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= rX_t & \text{si } X_t \leq 1/2 \\ X_{t+1} &= r(1-X_t) & \text{si } X_t > 1/2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde r es el parámetro de crecimiento per cápita de la población. El decrecimiento densodependiente es lineal. La gráfica de dicha función para varios valores del parámetro está en la figura (3.7). Donde nuevamente el punto de equilibrio igual a 0 es inestable para cualquier $r \geq 1$, y el punto de equilibrio $X^* = r/(1+r)$ que sólo existe para $r \geq 1$, es siempre inestable pues $F'(X^*) = -r$. El análisis de la dinámica caótica está dada en la tabla (3.2). Cabe señalar que

dicho modelo es una aproximación lineal al modelo logístico, y que también puede tener dinámicas caóticas. La gráfica de los puntos estables se puede observar en la figura (3.8.).

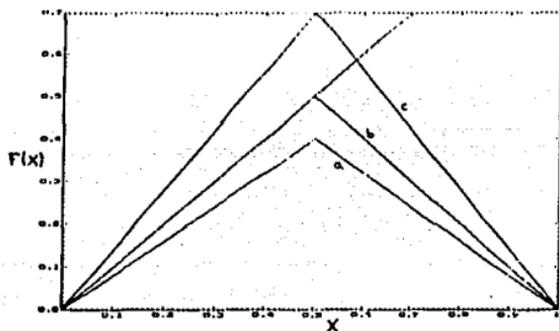


Figura 3.7. Diferentes gráficas de la función definida por el sistema (3.7) para: a) $r < 1$, b) $r = 1$, c) $r > 1$.

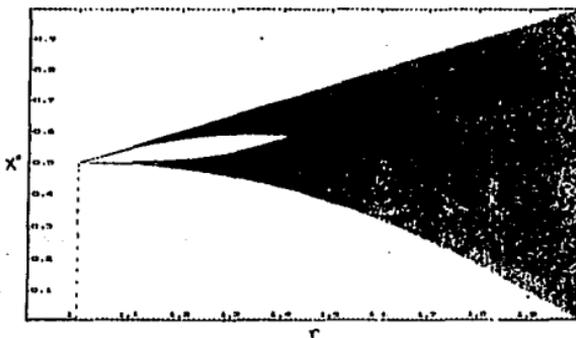


Figura 3.8. Puntos estables en función del parámetro r de la ecuación (3.7).

El otro modelo está representado por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= (r/2)X_t && \text{si } X_t \leq 1/2 \\ X_{t+1} &= rX(1-X_t) && \text{si } X_t > 1/2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

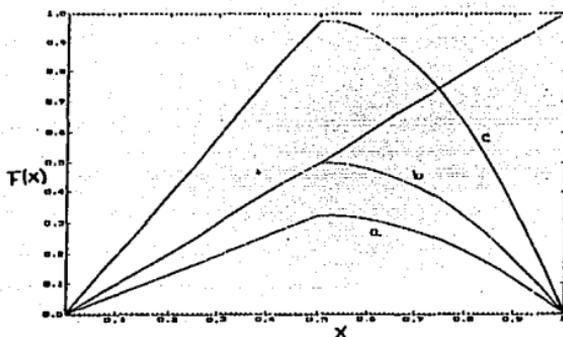


Figura 3.9. Diferentes gráficas de la función definida por el sistema (3.8) para: a) $r < 1$, b) $r = 1$, c) $r > 1$.

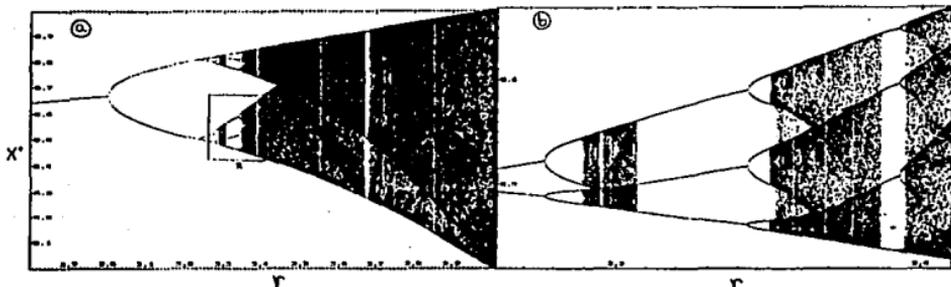


Figura 3.10. a) Puntos estables en función del parámetro r de la ecuación (3.8) y b) Ampliación del recuadro R

Se observa nuevamente que $X^* = 0$ es un punto de equilibrio, el cual es atractor para $0 < r < 2$. Cuando $r = 2$, habrá un conjunto de puntos estables $E = (0, 1/2]$, y se puede comprobar fácilmente que para $X > 1/2$ se tiene que $F(X) \in E$. Para $r > 2$ tendremos nuevamente el comportamiento del tipo

de la ecuación logística, donde $X^* = (r-1)/r$. Las gráficas de la función para distintos valores de r están representadas en la figura (3.9.). La dinámica caótica de este modelo también se encuentra en la tabla (3.2.), y la gráfica de los puntos estables en función del parámetro r se puede observar en la figura (3.10.).

F(X)	$\mu X(1-X)$	$X \exp(r(1-X))$	rX	si $X \leq 1$
			rX^{1-b}	si $X > 1$
Parámetro controlable	μ	r		b
Punto fijo inestable	3.0000	2.0000		2.0000
Empieza región caótica	3.5700	2.6924		2.0000
Primer ciclo extraño	3.6786	2.8332		2.6180
Ciclo de período tres	3.8284	3.1024		3.0000
Termina región caótica	4.0000	$+\infty$		$+\infty$
Ciclos estables en la región caótica?	si	si		no

Tabla 3.1. Dinámica de algunos modelos en función de sus parámetros

F(X)	rX	si $X \leq 1/2$	$(r/2)X$	si $X \leq 1/2$
	$r(1-X)$	si $X > 1/2$	$rX(1-X)$	si $X > 1/2$
Parámetro controlable		r		r
Punto fijo inestable	1.0000		3.0000	
Empieza región caótica	1.0000		3.4400	
Primer ciclo extraño	1.4142		?	
Ciclo de período tres	1.6180		3.6700	
Termina región caótica	2.0000		4.0000	
Ciclos estables en la región caótica?		no		?

Tabla 3.2. Dinámica de algunos modelos en función de sus parámetros

El modelo que tomaremos a continuación ha sido utilizado con datos del crecimiento de la población de ciertos insectos, su ecuación es:

$$X_{t+1} = rX_t(1+aX_t)^{-b}, \quad (3.9)$$

Si $b=0$, el crecimiento será a tasa constante, una vez fijado el valor de la tasa de crecimiento per cápita, r . Entonces, para $b>0$ tenemos que la tasa de crecimiento densodependiente crecerá hasta un valor fijo igual a r cuando X tienda a 0 y será pequeño, a medida que X crezca mucho. Calculando el valor máximo de la función por medio de la derivada, encontramos el valor de la capacidad de carga el cual es $X_c = 1/a(b-1)$. En la figura (3.11.) se pueden observar distintas gráficas de la función descrita por la ecuación (3.9.), para distintos valores de a y b .

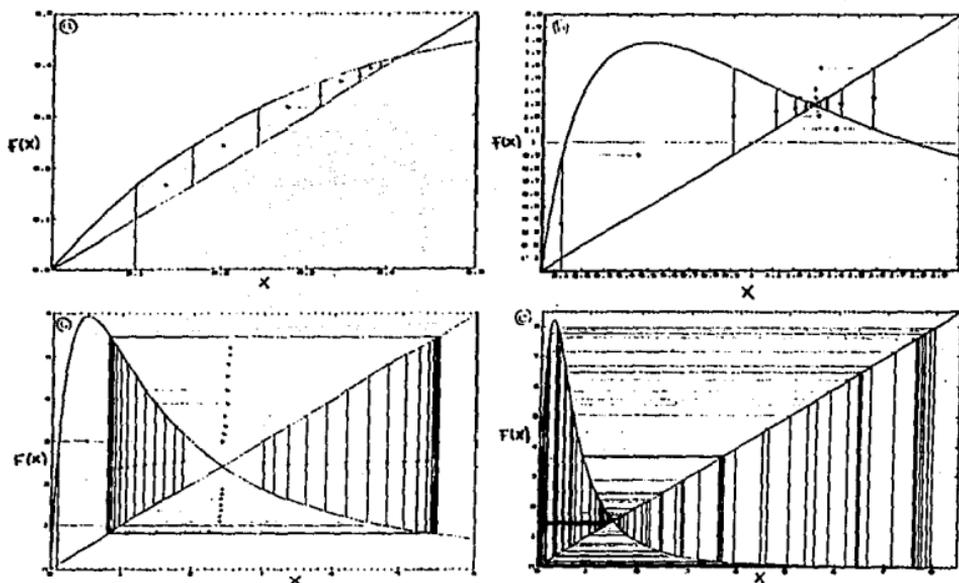


Figura 3.11. Diferentes gráficas de la función (3.9) para:
a) $r=2$, $b=2$; b) $r=12$, $b=2$; c) $r=40$, $b=3$; d) $r=100$, $b=5$.

Realizando el análisis de estabilidad, observamos que el punto de equilibrio no trivial es $X^* = (r^{1/b} - 1)/a$, cuya estabilidad depende del valor de los parámetros r y b , pues la derivada de la función $F(X) = rX_t(1+aX_t)^{-b}$ valuada en dicho punto es: $F'(X^*) = 1 - b(1+r^{-1/b})$; a partir de la cual se obtiene que para $0 < b(1+r^{-1/b}) < 2$, X^* es estable. Por lo que el parámetro a sólo interviene en la localización del punto. En el caso particular de que $a=1$, en el análisis realizado por May en 1976, se obtuvieron los siguientes comportamientos del sistema dependiendo de los valores de r y b :

i) Para $0 < r < 7.39$ habrá puntos de equilibrio estable, para todo valor de b .

ii) Para $7.39 < r < 12.50$ el punto se vuelve inestable para valores suficientemente grandes de b .

iii) Para $12.50 < r < 14.77$ aparecen varios ciclos armónicos de periodo 2^n .

iv) Para $r > 14.77$ y b suficientemente grande, aparece el comportamiento caótico.

En la gráfica de b vs. r , figura (3.12), aparecen las fronteras entre las diferentes regiones de los valores de dichos parámetros a partir de las cuales el comportamiento de la ecuación (3.9) es cualitativamente distinto.

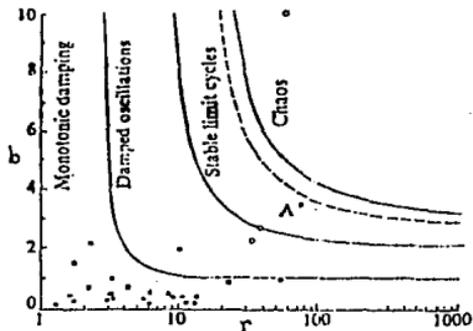


Figura 3.12. Frontera entre dinámicas distintas del modelo descrito por la ecuación (3.9)

3.2.2. MODELOS DE CRECIMIENTO UNIDIMENSIONAL CONTINUO

Ahora analicemos algunos modelos de crecimiento continuo de una sola especie cuyo período de gestación es considerablemente largo. En este tipo de modelos, la tasa actual de crecimiento depende de la densidad de la población en algún momento en el pasado. Como ejemplo simple tenemos la logística con retardo:

$$dx/dt=rX(t)[1-X(t-T)], \quad (3.10)$$

cuyo tiempo de retraso, T , también se puede deber a que los recursos no se renuevan instantáneamente. Dicho modelo sólo acepta puntos estables o ciclos límites como atractores; sin embargo, también puede exhibir comportamientos caóticos.

Un modelo en particular, estudiado por May, es el de la dinámica de población para una cierta especie de ballenas; cuya ecuación es:

$$dx/dt=DX(t)+BX(t-T)[1-X^z(t-T)], \quad (3.11)$$

donde $X(t)$ es el número de ballenas que han alcanzado una madurez reproductiva, D es la tasa de crecimiento actual, B es la tasa de crecimiento per cápita, la cual es retrasada para reflejar el largo período de gestación; y la constante z nos da la intensidad de la densodependencia. El análisis de estabilidad nos dice que para toda z tal que $z < 2[(B/D)-1]$, el sistema tiene un punto de equilibrio estable para toda T . Para valores de z mayores, se observa una cascada de bifurcaciones parecida a la observada en el atractor de Rossler [Shaffer, 1984]. Y para valores de dicho parámetro aún más grandes, May observó una órbita aparentemente caótica; la cual para valores todavía más grandes de z , se colapsa en un ciclo relativamente simple. Sin embargo, para los valores del parámetro medidos experimentalmente, el sistema tiende a un punto de equilibrio estable. Por lo que no se puede contar con fluctuaciones irregulares dentro de la densidad de población observada en la naturaleza.

Un modelo parecido refleja la manera de producción de glóbulos rojos, dado por Makey y Glass [Mackey & Glass, 1977]. La ecuación planteada es la siguiente:

$$dX/dt = -DX(t) + BX(t-T) / [1 + X^2(t-T)]. \quad (3.12)$$

Los modelos de ecuaciones diferenciales con retraso no son únicamente para poblaciones de una sola especie. El trabajo de Shibata y Saito [Shibata & Saito], ha mostrado el llamado caos de "tipo toroidal" para poblaciones de dos especies distintas de crecimiento continuo. Para ciertos valores del parámetro, encontraron soluciones caóticas coexistentes; y para otros, un ciclo límite coexistiendo con una banda aparentemente caótica.

3.2.3. MODELOS DE CRECIMIENTO DISCRETO PARA POBLACIONES NO HOMOGENEAS

La no homogeneidad de la población se debe a que ésta puede estar estructurada en diferentes clases, ya sea de edades o de especies. En el caso de la ecuación logística, la población es homogénea; sin embargo, existen interacciones entre los individuos de esa misma especie. De hecho, la mortalidad de individuos es proporcional a los encuentros que haya entre ellos. Como ya habíamos mencionado anteriormente, según Nicholson, la competencia intraespecífica es lo único que influye directamente con el factor de densodependencia de los modelos. Por lo que el modelo cuadrático será un caso particular de una población con estructura, solamente que en este caso, la estructuración es en una sola clase de especie de una misma generación; es decir, la estructuración en clases de edades cuenta con una sola clase.

3.2.3.1. Estructuración por clases de edades

El modelo que presentaremos ahora es una extensión del caso unidimensional trabajado por May en 1976, cuya estructura queda planteada de la siguiente manera:

$$X_{t+1} = L(t) \cdot X_t, \quad (3.13)$$

donde $X_t = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))_t$ es el vector de población, que da el número de individuos en cada clase de edad al tiempo t . Como se puede observar, hay n clases de edades distintas. $L(t)$ es un operador de \mathbb{R}^n en sí mismo con estructura matricial, la denominada matriz de proyección de Leslie, donde los $l_{i+1,i}$, con $i \in [1, 2, \dots, n-1]$, indican la fracción de individuos que sobreviven en la clase de edad i y que pasan a la clase de edad $i+1$. La tasa de crecimiento per cápita de los pobladores de cada clase de edad, queda indicada por $l_{1,j} = m_j$. De esta forma, la matriz de Leslie está configurada de la siguiente manera:

$$L(t) = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots & \dots & m_n \\ l_{2,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_{3,2} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & l_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

En el caso de densoindependencia las tasas de crecimiento per cápita son constantes, por lo que los modelos son lineales y cuyas propiedades son bien conocidas. Para el caso particular de una clase de edad o una clase reproductiva, cuya tasa de reproducción sea dependiente de la densidad de la población, el modelo (3.13.) queda reducido al modelo indicado por la ecuación (3.1.).

Para el caso en que $n=2$ y las tasas $m_i = m_i(t)$ con $i=1,2$, tenemos el modelo de densodependencia de Leslie, tal que $l_{2,1} = s$, indica la fracción de individuos de la clase 1 que sobreviven y pasan a la clase 2, y $l_{2,2} = 0$. Las tasas de crecimiento per cápita son los factores de densodependencia exponencial, por ejemplo; es decir, el vector de la población al tiempo $t+1$ queda como:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} (b_1 X_1 + b_2 X_2) \exp[-a(X_1 + X_2)] \\ S X_1 \end{bmatrix}_t, \quad (3.15)$$

donde b_i con $i=1,2$ son las tasas máximas de reproducción per cápita para cada clase de edad. Este modelo cuenta con cuatro parámetros posibles de manipular. Por comodidad, introduciremos una simetría artificial: $b_1=b_2=r$; además, fijaremos el valor de $a=0.1$ y $S=1$. Dichas consideraciones no afectan el análisis de estabilidad del sistema, y r será el único parámetro manipulable. Entonces, el modelo simplificado por analizar será:

$$\begin{aligned} [X_1]_{t+1} &= r(X_1+X_2)_t \exp\{(-0.1) \exp[(X_1+X_2)_t]\} \\ [X_2]_{t+1} &= r(X_1+X_2)_{t-1} \exp\{(-0.1) \exp[(X_1+X_2)_{t-1}]\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

de donde podemos observar que ambas ecuaciones son iguales, sólo que $[X_1]_{t+1}$ está desplazada una unidad de tiempo a la derecha. Del análisis de estabilidad se observa que:

- i) Para $r=7.5$ la población tiende a un punto de equilibrio.
- ii) Para $r>10.05$ aparece la primera bifurcación en un ciclo de longitud 3.
- iii) Para $r=14$ aparece un ciclo de 6 puntos, que da lugar a un ciclo de período 12 para $r=16$.
- iv) Para $r>14$ aparece una cascada de bifurcaciones.
- v) Para $r=17$ aparece una órbita caótica asociada a un atractor extraño.

A continuación presentaremos el modelo particular analizado por Altessor en 1989, en donde la población se estructura en dos clases de edad y el factor de regularización densodependiente actúa sobre la segunda clase únicamente. Esta estructuración de la población, se debe precisamente al factor de densodependencia; es decir, la población se divide en el grupo que no presenta natalidad ni mortalidad densodependiente y en el grupo que sí presenta esta dependencia en la densidad de la población. El factor densodependiente de nueva cuenta es exponencial, de tal forma que el modelo queda indicado por la siguiente matriz de proyección:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \cdot \exp(-X) \\ c & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Se calcula, para facilitar el análisis, una matriz equivalente de tal forma que el modelo queda estructurado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= aX_t + b \cdot \exp(-X_t) Y_t \\ Y_{t+1} &= X_t \end{aligned} \quad (3.18)$$

se puede observar que a medida que aumente el número de hembras de la primera clase, disminuye la fecundidad de las hembras de la segunda clase; afectando el tamaño de la primera clase, una unidad de tiempo después. En este caso la matriz de proyecciones equivalente a A , es una matriz hipotética, en la cual los individuos de la primera clase tienen un cien por ciento de supervivencia; a excepción del segundo grupo, donde todos mueren una unidad de tiempo posterior.

Haciendo el análisis de estabilidad por medio de los valores propios [Alterson, 1989], es decir, si λ es un valor propio de la matriz, entonces $\lambda = [dF/dX]_{X^*}$, donde $F = F(X_t, X_{t-1})$, tal que a partir de la segunda ecuación de (3.18), se obtiene que $Y_t = X_{t-1}$. En el caso unidimensional, λ es el valor de la pendiente de la función en su intersección con la recta a 45° . El punto de equilibrio de este sistema es $X^* = \ln b / (1-a)$, donde $b > 1-a > 0$. Donde X^* se vuelve inestable cuando $\lambda = -1$ y esto sucede para $b = (1-a) \exp\{2a/(1-a)\}$.

El camino al caos de este sistema es por medio de una cascada de bifurcaciones. Si $a=0.25$, entonces $b=1.46$ para que el punto de equilibrio estable se vuelva inestable. Si fijamos el valor de a ($a=0.25$), entonces la dinámica de la población al variar el valor de b es la siguiente:

- i) Para $0.75 < b < 1.46$, existe un único punto de equilibrio X^* .
- ii) Para $1.46 < b < 7.96$, aparecen dos puntos de equilibrio atractores.
- iii) Para $b=7.96$, aparece una órbita atractora de período 4.
- iv) Para $b=19.5$, aparece la región caótica.
- v) Para $b=44.8$, aparece una órbita de período 3.

3.2.3.2. Estructuración por clases de especies. Modelo de crecimiento de Lotka-Volterra.

Si la población esta estructurada por diferentes clases de especies que compiten entre sí, una de ellas es la presa y la otra es el depredador. Para modelar la competencia es necesario que la interacción entre ellas sea negativa. Con analogía al modelo logístico, este modelo queda determinado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= r_1(K_1 - X_1 - \beta_{12}X_2)X_1 \\ X_{t+1} &= r_2(K_2 - X_2 - \beta_{21}X_1)X_2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde β_{ij} es la tasa de declinamiento per cápita ocasionada por X_j sobre X_i . El efecto de competencia de una población sobre otra se cuantifica como el grado en que un individuo de la otra población, afecta la tasa de crecimiento per cápita de la población en cuestión. Si a_{ij} es dicho cuantificador, entonces el coeficiente de competencia está dado por: $\beta_{ij} = a_{ij}/a_{ii}$, donde a_{ii} es dicho cuantificador para la misma especie; es decir, $a_{ii} = r_i/K_i$, para toda i . Entonces, matricialmente el modelo queda estructurado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{t+1} = \left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_t \quad (3.20)$$

A continuación, discutiremos el modelo de competencia entre dos especies con la estructura señalada anteriormente, pero con cuantificadores densodependientes. Es decir, el modelo está dado por dos ecuaciones en diferencias no lineales:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= X_t \exp[r(1 - X_t/K) - aY_t] \\ Y_{t+1} &= aX[1 - \exp(-aX_t)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Este modelo es una extensión de las ecuaciones de parásito-huésped trabajadas por Nicholson-Bailey [Nicholson, Bailey, 1935], que describen las interacciones entre una población de artrópodos herbívoros y sus insectos parásitos. El modelo original es inestable

para todos los valores del parámetro. Este modelo es una extensión que elimina ese comportamiento, que no refleja la realidad, incluyendo términos de densodependencia en la presa. Dicho modelo sin presa ha sido estudiado por May, cuya estabilidad ya se analizó en la sección 3.2.1.

A diferencia del modelo trabajado por May en una dimensión, al introducir al predador se ha producido un comportamiento cualitativamente diferente. El análisis de estabilidad se hizo por medio de los valores propios. A priori, se esperarían ciclos límite de período entero. Los ciclos son difíciles de determinar con sólo observar dos trayectorias, de una o de las dos poblaciones, en función del tiempo. A lo más, éstas permitirán hacer una distinción entre dichos ciclos y otro tipo de comportamiento. Si r es la tasa de crecimiento de la presa, se observa que la dinámica de este sistema cae en una región caótica o en una región de ciclos límite de períodos extremadamente grandes, para valores cercanos a los valores de r para una sola especie.

La existencia de comportamiento caótico en modelos de competencia entre dos especies, puede ser de mucha importancia para la interpretación de los patrones de fluctuaciones para poblaciones de artrópodos en la naturaleza; ya que esto indica, que hay un largo tiempo de coexistencia entre el predador y la presa con límites bien definidos, pero con una naturaleza aparentemente azarosa [Beddinton et.al., 1975].

3.2.3.3. Modelo de competencia de tres especies: un predador y dos especies distintas de presas.

Este modelo es descrito por un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden. La dinámica es la siguiente: en ausencia de predadores, una presa autocompite a la otra; de esta manera, la presa sobreviviente será el platillo favorito de los predadores y así la segunda presa tendrá la oportunidad de recuperarse. Las ecuaciones de Lotka-Volterra reflejan dicho comportamiento de la siguiente manera:

$$[1/X(t)]dX_i/dt=r_i+\sum a_{ij}X_j(t) \quad (3.22)$$

Se encontró que la existencia de órbitas caóticas dentro de este modelo se da para un mínimo de 5 especies, las cuales pueden llegar a tener fluctuaciones caóticas. Posteriormente, Gilpin y Arneodo et. al. [Gilpin, 1979] corroboraron esta idea, dando la posibilidad de órbitas homocíclicas. Con una simple aproximación a la homociclicidad, el simple "caos espiral" da lugar a un "caos de tornillo" más complicado -en el espacio fase, las órbitas giran de tal manera que forman una espiral, en el caso del "caos espiral", y en el caso del "caos de tornillo", las órbitas se enrollan en forma de un tornillo; es decir, la estructura del atractor extraño será aún más compleja.

3.2.3.4. Modelos SEIR de epidemiología.

Es un ejemplo de sistemas forzados. Se utiliza para modelar la incidencia de enfermedades infantiles como el sarampión, varicela, paperas, etc., donde hay un factor externo debido a las diferentes estaciones del año. El forzamiento periódico de sistemas no lineales nos llevan a flujos periódicos, cuasiperiódicos e incluso caóticos. Este modelo consta de parejas de ecuaciones diferenciales ordinarias, en las cuales el número de individuos se clasifica de la siguiente manera: susceptibles (S), expuestos pero no infectados (E), infecciosos (I) y recuperados (R):

$$\begin{aligned} dS(t)/dt &= u[1-S(t)] - bI(t)S(t), \\ dE(t)/dt &= bS(t)I(t) - (u+a)E(t), \\ dI(t)/dt &= aE(t) - (u+g)I(t), \\ dR(t)/dt &= gI(t) - uR(t). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Donde $(1/u)$ es la esperanza de vida promedio de los individuos, $(1/a)$ el período de latencia promedio, $(1/g)$ el período infeccioso promedio. El parámetro b es el coeficiente de transmisión. Este sistema muestra oscilaciones débiles alrededor de un punto fijo. El factor que influye en las discrepancias de las trayectorias, es la antes mencionada tasa de transmisión de la enfermedad. Muchos autores

han sustituido dicho factor por la función, $b(t)=b_0[1+b_1\cos(2\pi t)]$. Estudios numéricos, tanto para el sistema de ecuaciones como para la función $b(t)$, indican dos descubrimientos interesantes: primeramente, existe el fenómeno de bifurcaciones del período de las soluciones; y segundo, para ciertos valores del parámetro se observan soluciones coexistentes de períodos grandes y pequeños.

CAOS EN FENOMENOS BIOLÓGICOS

4.0. INTRODUCCION

Una vez establecidos todos los conceptos básicos y necesarios con respecto al Caos Determinista y su interpretación en los modelos biológicos, entraremos a la discusión sobre la polémica que existe acerca de la existencia de fenómenos biológicos intrínsecamente caóticos. Es decir, como ya lo habíamos mencionado en el capítulo anterior, hasta la fecha existe la duda con respecto a la fenomenología caótica de los sistemas biológicos que hay en la naturaleza. Después de discutir la influencia del ruido en los sistemas de dinámicas caóticas, este capítulo se divide en tres partes. En una de ellas, se exponen las opiniones que hay en favor de que el Caos no es sólo una característica de los modelos matemáticos; en otra, los argumentos en contra de que los fenómenos biológicos pueden presentar dinámicas caóticas y en la última, daremos nuestras conclusiones.

4.1. EFECTOS DEL RUIDO EN SISTEMAS DE DINAMICAS CAOTICAS

Detectaremos la presencia de ruido en la dinámica del sistema por medio del análisis de los mapeos de Poincaré. Para mapeos con puntos fijos estables, añadir ruido resulta en una nube no uniforme de puntos. Sin embargo mientras se mueve el parámetro pasando de la

región de bifurcaciones a la región caótica, se alcanza a discernir con mayor fidelidad la estructura de un mapeo determinado, por lo que será posible inferir la dinámica del sistema subyacente a dicho mapeo. (Ver figura (4.1.)). En cambio para el caso de un punto estable con ruido, tratar de discernir la dinámica será más difícil, pues se puede confundir con un fenómeno simplemente ruidoso.

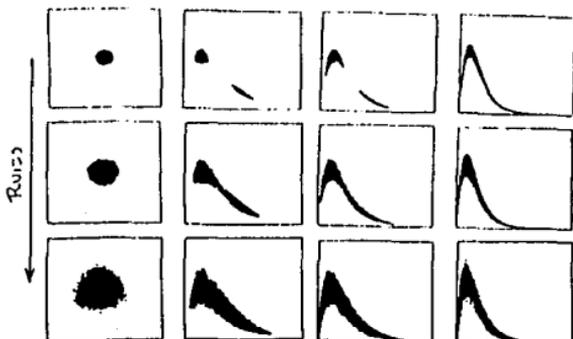


Figura 4.1. Iteraciones de un mapeo unidimensional en presencia de ruido. De izquierda a derecha: la dinámica corresponde a un punto fijo estable, a un ciclo biperiódico, a un ciclo de período 4 y a una dinámica caótica.

Esta perspectiva nos puede llevar a la conclusión, contraria a nuestra intuición, de que la estructura fractal disminuye a medida que la componente determinística del sistema se vuelve más compleja. Para probar esta afirmación, se considera el siguiente mapeo:

$$F(X) = (1+z)X \exp[r(1-X)], \quad (4.1.)$$

donde z es ruido de tipo gaussiano centrado en $z=0$. Al iterar 5000 veces la ecuación (4.1.) y encajar la serie de tiempo resultante en dimensiones mayores sucesivas, se calcula la cota inferior de la dimensión fractal, utilizando el método de Grassberguer y Procaccia, que ya hemos discutido en el capítulo dos. A continuación, se calcula la dimensión del espacio ambiente, n , para diferentes valores del parámetro manipulable, r , y se compara con la dimensión fractal D_c , obtenida a partir de las series de tiempo. De donde obtenemos lo siguiente:

Para $r=1.0$, tenemos un punto de equilibrio estable y la dimensión de las series de tiempo igualan a n , para cada valor de n . Para $r=2.256$, existen dos puntos estables, i.e., un ciclo estable de período dos, se obtiene una dimensión fractal igual a cero para cualquier n , debido a que los puntos se encuentran en dos subconjuntos del intervalo. Finalmente, para mapeos en la región caótica, en particular para $r=3.0$ y para $r=3.5$, la dimensión fractal se aproxima a una asíntota alrededor de uno. En otras palabras, D_c tiende a uno a medida que n aumenta. Por lo que para mapeos en la región caótica, es posible inferir correctamente la naturaleza unidimensional de la dinámica subyacente a la serie de tiempo, aún en la presencia de grandes cantidades de ruido. Sin embargo, para mapeos con puntos fijos estables, por ejemplo para $r=1$, dicha inferencia no es posible. Ya que D_c tiende a infinito conforme n crece. Por lo que se puede concluir que encontrar la dimensión del sistema que contiene ruido es una tarea difícil de realizar, o incluso imposible. [Schaffer & Kott, 1986]

4.2. CAOS EN FENOMENOS BIOLÓGICOS

Recordando que sólo trabajaremos con los fenómenos ecológicos y epidemiológicos, empezaremos con presentar aquéllos en los que se han encontrado señales de Caos.

4.2.1. Fluctuaciones en la población del lince canadiense (*Lynx canadensis*).

Al analizar los datos obtenidos del comportamiento cíclico característico de la población del Lince Canadiense, durante cierto período, de 1735 a 1934 (casi 200 años) se observó que las frecuencias de sus fluctuaciones permanecieron aproximadamente constantes mientras que la amplitud variaba. Es posible observar esto dentro del espectro de potencias obtenido a partir de la serie de tiempo de alguna variable de dicho sistema, como ya lo habíamos mencionado en el capítulo anterior, (ver figura (4.2.)). A pesar de que dentro de dicho espectro se observa que hay un pico muy alto que

corresponde al período de 10 años, se cuestiona el hecho de que el aspecto ruidoso del espectro provenga de las fluctuaciones azarosas dentro del período de 10 años, o a la existencia de un determinismo complejo subyacente a la dinámica de crecimiento, es decir, al caos.

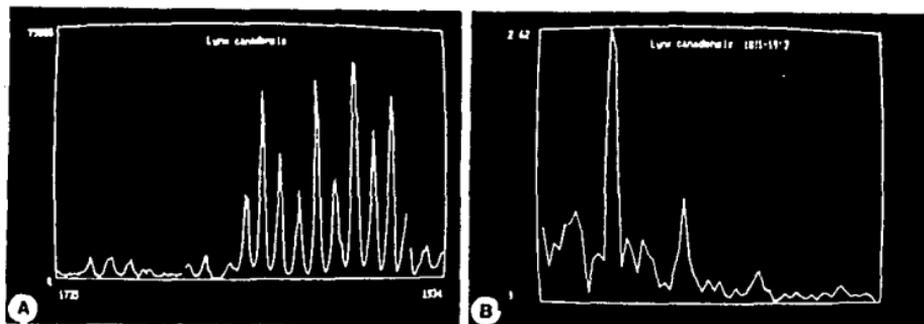


Figura 4.2. a) Número de pieles recopiladas anualmente desde 1735 a 1934. b) Espectro de potencia correspondiente.

Debido a que el espectro de potencias no nos permite distinguir la presencia de caos, de lo que los ecólogos determinan como estocasticidad; es necesario buscar una firma aún más fuerte de dicho fenómeno dentro de las fluctuaciones del sistema. El determinar la existencia de un atractor extraño en el espacio fase, es un indicio muy fuerte de un comportamiento caótico a pesar de que no es una tarea sencilla. En este caso se consideró un tiempo de tres años para calcular el atractor extraño del ciclo del Lince Canadiense. Como ya lo habíamos dicho, generalmente los ecólogos están imposibilitados para realizar un censo de todas las especies dentro de sus comunidades, por lo que sería imposible visualizar a todo el sistema completo, i.e., muestrear todas las variables, dentro del espacio fase. Debido a esto, se reconstruye la órbita a partir de la serie de tiempo de una sola variable; como por ejemplo, de la densidad de la población por medio del método de Ruelle y Takens (capítulo dos). En la figura (4.3.) se muestran las trayectorias construidas dentro del espacio fase para la serie de tiempo que se obtuvo de 1821 a 1913. Observamos, que las órbitas exhiben "estiramientos" y "doblamiento" sucesivos, la firma típica de atractores extraños unidimensionales.

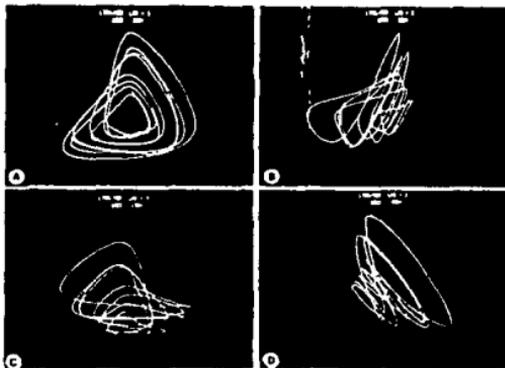


Figura 4.3. Varias perspectivas del atractor extraño reconstruido para la serie de tiempo obtenida del ciclo del Lince canadiense.

El análisis del mapeo asociado, sugiere que las fluctuaciones observadas pueden representar una órbita periódica, con ruido superpuesto. Esto se sugirió debido a que el movimiento está dentro de una superficie bidimensional, para la cual las secciones de Poincaré se pueden relacionar por medio de un mapeo unidimensional; es decir, al parametrizar una sección de Poincaré en el intervalo $I=[0,1]$ se obtiene un mapeo no invertible, de dicho intervalo en sí mismo.

Si suponemos que $F:I \rightarrow I$ es una curva unimodal con algún parámetro que se puede manipular, i.e., $F=F(r,X)$; entonces se ve que es posible inferir la naturaleza del determinismo subyacente al sistema. En particular, se procede a calcular los exponentes de Liapunov, los cuales también se pueden calcular directamente de las trayectorias reconstruidas [Wolf & Swift, 1984], aunque desgraciadamente, esto requiere de un mayor número de datos que los que se tienen para el ciclo del lince.

Al cotejar los datos con el mapeo de Poincaré, se observa que dicho mapeo puede estar representado por la siguiente ecuación diferencial que representa la dinámica de este sistema continuo:

$$dX/dt = aX^n \exp(bX), \quad (4.2.)$$

La dinámica de dicha ecuación varía desde puntos fijos hasta caos; sin embargo, la escasez de datos no permitirá identificar o inferir la componente determinista del sistema. Además de que los datos experimentales del lince contienen cantidades substanciales de ruido, ruido ambiental o ruido debido a otros factores por ejemplo socioeconómicos, sobre todo en muestreos que duren tanto tiempo. Por lo que se procede de la siguiente manera:

Se analizan las series de tiempo obtenidas de la ecuación (4.2.), para diferentes valores de n . Se observa que los exponentes de Liapunov crecen de valores negativos, a valores muy cercanos a cero hasta valores positivos. El punto fijo se vuelve inestable dando lugar a dos puntos fijos hasta alcanzar un ciclo de período trece en la región caótica. Por lo que si la dinámica es inherentemente estable, al agregar ruido se observa una nube de puntos que rodean al punto fijo. De esa nube será difícil descubrir la forma de algún mapeo en particular, además de que los datos parecerán provenir de una distribución azarosa. Si el punto fijo es inestable, el ruido lleva al sistema alrededor de un mapeo dándole una forma claramente discernible; de hecho, al agregar ruido, se puede lograr que los exponentes de Liapunov sean positivos. Debido a todo esto, observamos que un ciclo biperiódico en presencia de ruido puede actuar como un atractor extraño funcionalmente hablando. Por lo que se concluye que la dinámica subyacente al ciclo del Lince Canadiense está entre una órbita biperiódica y caos. (Ver figura(4.4.)) [Schaffer,1984].

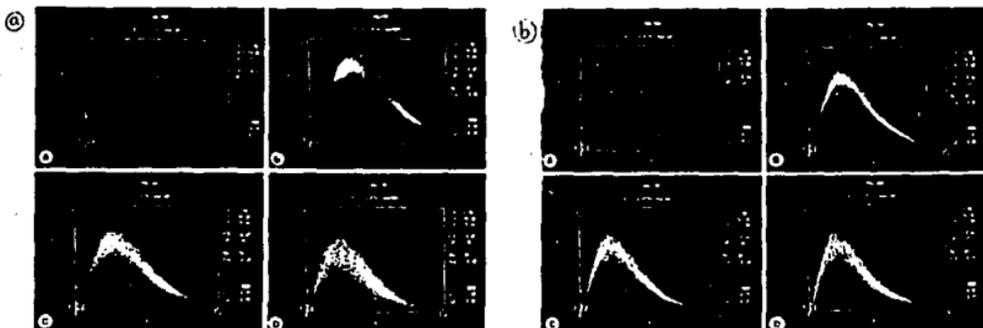


Figura 4.4. Efectos del ruido en la dinámica de la ecuación (4.2.). a) $n=1.9$ y el ciclo biperiódico es menos estable. b) $n=2.0$ el ciclo biperiódico ha sido reemplazado por lo que parece ser un ciclo de período 13 en la región caótica.

4.2.2. Caos en epidemiología.

El siguiente fenómeno por analizar se encuentra dentro de los fenómenos epidemiológicos, donde se aplica el método de Ruelle y Takens para tratar de identificar caos dentro del sistema. Se trata de las transmisiones de enfermedades infecciosas como el sarampión, paperas y varicela (viruela loca). En el capítulo anterior, mostramos el modelo matemático de dicho fenómeno (SEIR). En sólo dos casos, únicamente es posible observar la presencia de ciclos anuales con ruido superpuesto (paperas y varicela). Para el caso restante del sarampión, se sugiere fuertemente la existencia de un atractor extraño.

Para una epidemia de sarampión que recayó en las ciudades de Nueva York y Baltimore, de 1928 a 1963, se tomaron datos antes de la campaña de vacunación que erradicaría la enfermedad por completo. Se analizaron los espectros de potencias cuasicontínuos, donde el pico más alto sucede para una frecuencia correspondiente a un período de aproximadamente de un año. Más allá de eso, sólo se puede decir que el espectro es bastante ruidoso o continuo.

Utilizando el método de Takens con un tiempo $\tau=3$ meses, donde τ es el período de tiempo considerado para la construcción de la serie de tiempo a partir de una sola variable del sistema, se construyeron espacios fase de tres dimensiones. Para ambas ciudades, casi todas las trayectorias caen en la superficie de un cono con el vértice cerca del origen. Por lo que al parecer, se trabajaron con flujos bidimensionales que se pueden encajar en un espacio de tres dimensiones. A partir del mapeo de Poincaré, se sugiere que la colección de puntos se asemeja a mapeos unimodales no invertibles (ver figura (4.5.)); los cuales son del tipo de mapeos analizados por May y que ya mencionamos en el capítulo tres. Es importante recordar que dichas funciones presentan un camino al caos por medio de una cascada de bifurcaciones. Al examinar las órbitas y los mapeos para el sarampión, se nos sugiere fuertemente que se está en presencia de un atractor extraño con ruido, debido nuevamente a la geometría

fractal de las órbitas dentro del espacio fase [Schaffer y Kott,1986]. Cabe señalar que existe gran similitud entre el atractor extraño construido por medio de las series de tiempo medidas experimentalmente, y el calculado por medio de la serie de tiempo que se obtuvo del modelo SEIR para valores de los parámetros dentro de la región caótica [Schaffer,1987].

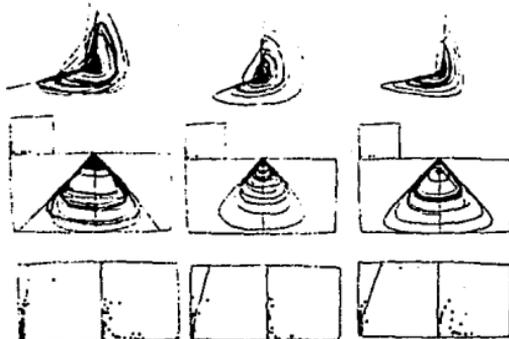


Figura 4.5. De arriba hacia abajo: Atractor reconstruido con el número de individuos infectados. Atractores vistos desde arriba con sus respectivas secciones de Poincaré. Las secciones de Poincaré magnificadas (izquierda) y el mapeo de Poincaré correspondiente (derecha). De izquierda a derecha: Datos de Nueva York, datos de Baltimore y datos obtenidos a partir del modelo SEIR en la región caótica.

4.2.3. Funcionalidad del caos de M. Conrad.

Debido a que es muy válido tratar de explicar por qué los diferentes sistemas biológicos se comportan de determinada manera una vez conocida su fisiología, M. Conrad se preocupa por dar una explicación funcional del Caos Determinista dentro de los sistemas biológicos en general, y los ecológicos en particular. Se basa en el principio de que los sistemas biológicos interesantes de estudiar son aquéllos que permanecen dentro del "juego de la vida"; es decir, los que permanecen vivos. Para que esto sea posible, es importante que la dinámica de las partes sea consistente con la dinámica del conjunto y viceversa; considerando a los organismos del sistema biológico como las parte, y al medio ambiente como el conjunto.

El mecanismo más importante para mantener dicha consistencia es aquel implementado por la selección natural; es decir, si la dinámica de un individuo es inconsistente con la dinámica del ecosistema, la selección natural lo eliminará de éste. Por lo que de manera indirecta, la dinámica del conjunto es seleccionada por la dinámica de las partes. Sin embargo, si la dinámica del conjunto insiste en ser inconsistente con la dinámica de los organismos, los organismos cambiarán a través de la variación y la selección hasta lograr la consistencia.

Sin embargo, no podemos esperar que la selección sea el único mecanismo que rija la dinámica biológica. Existe la teoría sistemática de la variabilidad biológica que puede estar bien explicada por medio de la dinámica caótica; nos referimos a la Adaptabilidad. Entendemos por adaptabilidad, a la habilidad de los sistemas para continuar funcionando en presencia de un medio ambiente desconocido, donde generalmente el sistema estudiado es un sistema viviente.

La principal cuestión que surge en la Teoría de la Adaptabilidad es aquella que trata de encontrar una relación entre las propiedades estadísticas del sistema biológico al menos en apariencia, y las propiedades estadísticas del medio ambiente. Por otro lado, debido a que el Caos es más sencillo de analizar funcionalmente hablando para muchas estructuras y procesos biológicos, se puede hacer esa misma pregunta para una explicación en términos de los conceptos de los sistemas dinámicos. Es decir, nos gustaría saber cuál es la posible relación entre las diferentes componentes de la Teoría de Adaptabilidad y los diferentes conceptos de la estabilidad dinámica; en pocas palabras, la relación entre Adaptabilidad y Caos.

Se considera que existe una habilidad intrínseca para modificarse en los sistemas biológicos, que se correlaciona con las inestabilidades de los modelos dinámicos. En el caso de una habilidad para modificarse intrínseca de los genes, tenemos la forma más

importante de adaptabilidad de los sistemas. Otra forma de como es que este factor influye en la estabilidad de los sistemas, es por ejemplo el hecho de que los perturbadores del medio ambiente pueden ser absorbidos por las inestabilidades del sistema. En el caso particular de la inestabilidad del comportamiento neuronal o la variabilidad genética, ésta puede proteger a la dinámica de una población de las perturbaciones exteriores y permitirle parecer altamente estables. De la misma manera, la estabilidad del estado en el que se encuentran los flujos internos de la columna vertebral, por ejemplo, se puede obtener a expensas de las inestabilidades dinámicas intrínsecas a los sistemas nervioso e inmunológico.

No todos los términos de la habilidad para modificarse están conectados con procesos intrínsecamente azarosos. En la ausencia de información acerca del medio ambiente, el cambio de un regimen del sistema a otro puede ser aparentemente azaroso, pero en la realidad esta situación es completamente determinística. En nuestro lenguaje, se refiere a la dinámica intrínsecamente caótica de los fenómenos biológicos. Esta habilidad para modificarse intrínseca de los sistemas biológicos, como ya lo hemos dicho anteriormente, se debe al movimiento estocástico o a la dinámica caótica. Cómo ya se ha mencionado también, distinguir estas dos posibilidades puede ser imposible, pero para la explicación funcional del Caos no es necesaria. El movimiento azaroso siempre está presente, ya sea en mayor o menor grado, dentro del comportamiento del sistema; en cambio, "si un sistema biológico obedece dinámicas caóticas, esto asegurará que el sistema es caótico. Si el sistema obedece dinámicas que no son sensibles a las condiciones iniciales, es posible que los efectos del movimiento Browniano⁽¹⁾ serán muy despreciables para tener una contribución significativa a la adaptabilidad" [Conrad,1986].

(1) Se considera movimiento Browniano, al movimiento estocástico de una pequeña partícula que flota en un fluido, debido al choque con las moléculas de dicho fluido.

Las dinámicas neuromusculares, inmunológicas y hormonales son consecuencia de la acción de la selección natural en los organismos. En cambio, la dinámica de las poblaciones es una consecuencia indirecta de esta selección en los organismos que las componen; de alguna manera, es posible visualizar a la dinámica de las poblaciones desde un punto de vista funcional, en el sentido de que dichos sistemas satisfagan la autoconsistencia de los ecosistemas.

Si la población es altamente estable, su densidad será reducida; y si esto sucede, la adaptabilidad también quedará reducida. Esta es una razón para que los regímenes caóticos en la dinámica de las poblaciones puedan servir para mantener la adaptabilidad del sistema. Esto último se puede deber, por ejemplo, al hecho de que el comportamiento impredecible de cierta presa no permita que sea atrapada por el depredador, puesto que si una población oscila de una manera muy regular, sería fácil para el depredador anticiparse al mecanismo dinámico de dicha población y exterminarla.

4.3. ARGUMENTOS EN CONTRA

Ahora presentaremos los argumentos en contra de la existencia de un comportamiento caótico dentro de los sistemas ecológicos. Los argumentos provienen de los resultados que se obtienen al tratar de verificar la validez de los modelos matemáticos, por medio de la estimación del valor de los parámetros característicos de la población en cuestión.

4.3.1. Modelo de Hassell(1975).

Dada una serie de datos obtenida de mediciones directas hechas con poblaciones naturales o de laboratorio, se procede a determinar los valores correspondientes de los parámetros del modelo densodependiente dado por la ecuación (3.9.). Los valores de los parámetros determinan las diferentes dinámicas del sistema, de tal forma que se puede hacer una comparación de la dinámica del modelo con la dinámica de las poblaciones reales. En otras palabras, se comparan las diferentes clases de estabilidad teórica con las

diferentes clases de estabilidad experimental. Se debe recordar que para poblaciones de una sola especie, tenemos que en el laboratorio hay una muy buena aproximación a una situación de una sola especie en un ambiente homogéneo, con suplemento constante de alimento y sin competencia intraespecífica (depredador-presa).

Existe un factor de densodependencia determinado por el parámetro b (capítulo tres). Estos valores del parámetro se obtienen experimentalmente por medio de un ajuste por mínimos cuadrados a la recta en la gráfica de mortalidad vs. densidad, en la escala logarítmica. (Ver figura (4.6.)).

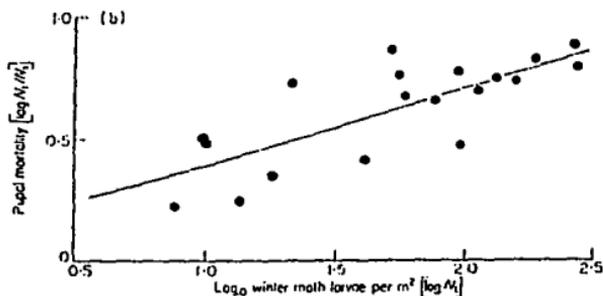


Figura 4.6. Relación de densodependencia por un ajuste de mínimos cuadrados.

La tasa de crecimiento per cápita se obtiene al evaluar el promedio de máxima fecundidad por adulto, menos la suma de los promedios de las tasas de mortalidad densodependientes que actúan durante el ciclo de vida. De esta manera calculamos el valor de los parámetros, r y b , para los cuales es fácil observar que casi todos caerán dentro de la zona de comportamiento dinámico con un punto fijo monótonamente atractor (Fig.(3.12.)). Sólo existe un punto, el que corresponde a la *Leptinotarsa*, que tiene un equilibrio inestable y cae dentro de la zona de los ciclos límite estables; lo cual es el resultado de un factor de densodependencia muy fuerte, con una tasa de crecimiento per cápita muy grande. De acuerdo con Harcourt (1971), las poblaciones de la *Leptinotarsa* fluctúan marcadamente con tendencia a una "sobrecompensación" de generación en generación [Hasell et. al., 1976].

El cotejamiento de dicho modelo con poblaciones de laboratorio es más satisfactorio en cuanto a la riqueza de las diferentes dinámicas posibles que el sistema es capaz de representar. Como ya lo dijimos, dichos sistemas están bien descritos por modelos del tipo de la ecuación (3.9.), considerando que las generaciones permanecen más o menos discretas. En este caso, se muestra concretamente que las fluctuaciones dentro de la dinámica de poblaciones son intrínsecas al sistema, y no son de alguna manera "impuestas" por los factores del medio ambiente que lo rodea; las que en este caso se denominan factores de mortalidad densoindependientes.

Con estimaciones del valor de los parámetros r y b para diferentes clases de especies, se observa que la dinámica de las poblaciones cae dentro de la estabilidad, ya sea por medio de atractores monótonos o atractores amortiguados. Sin embargo, existen especies cuya dinámica cae dentro del margen de ciclos límite. (ver puntos huecos de la Fig. (3.12.)).

Finalmente, existe el ejemplo trabajado por Nicholson (1954) cuyos datos, obtenidos a partir de una población de *blowflies*, muestran que pueden estar bien descritos por medio de dinámicas caóticas. En el análisis de mortalidad, con otro tipo de larvas de dicha especie, se observa que el parámetro de mortalidad densodependiente b es muy grande (ver Fig. (4.7.)). De hecho $b > 100$ resulta consistente con la competencia intraespecífica por los recursos, entre organismos de la misma especie, de tipo "scramble". El valor de b es independiente de la cantidad de comida dentro del sistema para cada experimento, la cual sólo afecta el valor del parámetro a . La estimación de la tasa de crecimiento per cápita se obtiene a través del promedio de huevos fértiles por adulto. Al colocar el valor correspondiente a dicha dinámica de población en el espacio de los parámetros, se observa que éste se ubica perfectamente en la región caótica (Fig. (3.12.)).

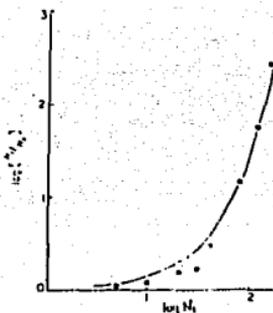


Figura 4.7. Análisis de mortalidad con $b > 100$.

Gracias a lo dicho anteriormente, podemos concluir que los experimentos en el laboratorio soportan firmemente la estructura del modelo representado por la ecuación (3.9.). Así mismo, podemos decir que el que ocurran frecuentemente oscilaciones en las poblaciones dentro del laboratorio no es sorprendente; debido a la tendencia a la competencia de tipo "scramble" por los recursos ($b \rightarrow \infty$) en un ambiente confinado, y debido a la ausencia general de mortalidad densoindependiente ($\lambda \rightarrow$ máxima fecundidad por adulto) [Hassell et al., 1976].

4.3.2. Modelos de crecimiento continuo con retraso de una sola especie.

El modelo de crecimiento continuo con retraso trabajado por May para modelar el crecimiento de cierta especie de ballena, representado por la ecuación (3.11.), donde de hecho ya mencionamos que pese a que dicho modelo presenta dinámicas caóticas para ciertos valores del parámetro, éstos valores no son alcanzados por la dinámica de dichas ballenas en la naturaleza.

4.3.3. Argumentos de A.A.Berryman Y J.A.Millistein.

Los científicos A.A Berryman y J.A. Millistein publicaron un artículo, en el que especialmente argumentan en contra de la existencia del Caos en los sistemas biológicos [Berryman & Millistein,1989]. En él, comentan que a pesar de que los sistemas ecológicos contienen las semillas del caos, debido a la dinámica antagónica que presentan por medio del factor de densodependencia, no hay evidencia empírica y argumentos ecológicos (evolutivos) que sostengan que los ecosistemas se comporten normalmente de manera caótica. Sin embargo, esto no quiere decir que no se den los casos; y esto será debido a manipulaciones humanas de los sistemas, ya sea aumentando las tasas de crecimiento o retardando el proceso regulador, al que ellos llaman retroalimentación negativa del sistema. Ellos definen que un sistema es caótico cuando la retroalimentación negativa es dominada, la mayoría de las veces, por un crecimiento con retroalimentación positiva. En nuestros términos, es el caso de una tasa de crecimiento per cápita suficientemente grande que no permita que la influencia del atractor característico del sistema, o del factor regulador también llamado densodependiente, lo haga tender a un valor estable.

Uno de los fundamentos de dicha afirmación se basa en el hecho, descrito anteriormente en este capítulo, de que Hassell, Lawton y May no encontraron evidencia alguna de comportamiento caótico en poblaciones de campo; y que a pesar de eso, la noción de que las fluctuaciones en el crecimiento de las poblaciones se debe al Caos Determinista ha persistido, aunque la "evidencia" sea más ilusoria que científica.

Desde la perspectiva de los Sistemas Dinámicos, las condiciones que ellos mencionan para la existencia de caos en los sistemas son en primer lugar debido a que los puntos de equilibrio del sistema deben ser localmente inestables, mientras el sistema sea globalmente estable. En segundo, el hecho de que el exponente de Liapunov debe ser positivo, lo que sucede si el sistema siempre está dominado por retroalimentación positiva para que crezca continuamente; y debido a que la retroalimentación negativa debe sobrecompensar a tal grado que

la población se mueva lejos del punto de equilibrio donde la retroalimentación positiva domina. De esta manera, en estos sistemas la retroalimentación negativa actúa como factor perturbador más que como factor regulador. Por ejemplo, en el caso del control humano de las pestes o epidemias por medio de las campañas de vacunación, se reduce a la población infecciosa a densidades tan bajas, que en lugar de exterminarlas o que alcancen una densidad constante, se promueve que permanezcan creciendo. Cuando una retroalimentación negativa actúa muy rápidamente hace que el sistema permanezca cerca de sus puntos de equilibrio, donde los exponentes de Liapunov son negativos, y raramente estarán bajo la influencia de retroalimentación positiva; estos sistemas no presentarán Caos Determinista. Cabe hacer notar, que en el ejemplo del sistema caótico que se menciona, es el caso de un sistema manipulado por el hombre (campañas de vacunación).

Así mismo, agregan que no hay duda alguna en que los sistemas ecológicos contienen las semillas del caos, debido a que todos tienen procesos con retroalimentación positiva. Ejemplos de ello son, la reproducción, la cooperación, la competencia intraespecie y también debido a que sus "retrasos temporales", para el caso de sistemas continuos, ocurren generalmente en el término de retroalimentación negativa. Como por ejemplo, la respuesta numérica de la computadora en el caso de poblaciones simuladas, el agotamiento y recuperación de recursos, etc. Además admiten el hecho de que los sistemas ecológicos se comportan de manera impredecible, pero la pregunta es si es que esta impredecibilidad se debe al Caos Determinista o a disturbios ambientales de carácter estocástico, como la mayoría de los ecólogos suelen asegurar.

El análisis de estabilidad es una herramienta que nos permite encontrar una respuesta; esto se logra al mover al sistema de su estado de equilibrio y observar su comportamiento subyacente en un medio ambiente constante. Pero debido a que los sistemas ecológicos no se pueden aislar, entonces la otra alternativa es realizar los análisis de estabilidad en los modelos matemáticos obtenidos de los datos reales. Para esto, en la práctica de la modelación generalmente se sostiene la idea de que los sistemas ecológicos no presentan Caos, normalmente.

Además sugieren que la lógica de la hipótesis caótica es incluso cuestionable, debido a que si por ejemplo los sistemas ecológicos son intrínsecamente caóticos, entonces debido a que el caos es más factible dentro de los sistemas con un gran número de grados de libertad, los sistemas complejos deberían de ser aún más caóticos. Y si le agregamos el hecho de que la impredecibilidad del ecosistema se debe a la estructura determinista, entonces se espera observar caos tanto en medios estables como en medios variables con la misma frecuencia. Sin embargo, la evidencia ha mostrado que los sistemas complejos en ambientes estables son generalmente más predecibles; tomando como sistemas complejos, a aquellos con gran número de grados de libertad.

Otra observación en contra, que sustentan los autores de dicho artículo, es que dentro del espacio del parámetro de la función logisitica (grafica de X^n vs. μ), se observa que los máximos y mínimos de las densidades de la población divergen rápidamente a medida que entran en la región caótica. De hecho se observa una densidad creciente de puntos de la gráfica cerca del cero, cuando el valor del parámetro excede el punto donde aparece el ciclo de período tres. La población pasa cada vez más tiempo a bajas densidades, donde la probabilidad de extinción aumenta. Si se considera una densidad poblacional del 1% como un umbral de extinción, se observa que en el caso de la logística la extinción determinística aumenta rápidamente mientras entra en el dominio caótico, donde hay una probabilidad del 0.6 de extinción (Fig.(4.8.)).

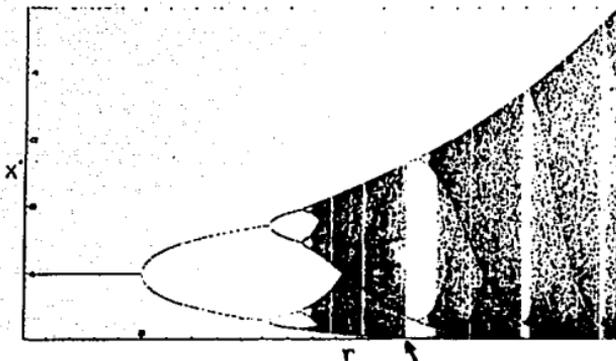


Figura 4.8. Espacio del parámetro de la función logística en la que se indica la región donde la probabilidad de "extinción determinística" aumenta rápidamente.

Este último argumento iría en contra del hecho de que la "Selección Natural" favorece valores del parámetro que minimizan la posibilidad de extinción. Consecuentemente la hipótesis alternativa de que los sistemas biológicos son anticaóticos, parece más factible.

Sin embargo, mencionan otras maneras de manipular a los sistemas biológicos para que alcancen los valores de los parámetros característicos de su comportamiento caótico: al incrementar las tasas de crecimiento por medio de biotecnología, al estimular el crecimiento económico, etc. También se puede crear comportamiento caótico al imponer una retroalimentación negativa tal, que el sistema permanezca lejos de su punto de equilibrio; como es el ejemplo de las epidemias, citado anteriormente.

Por otro lado, Adam Lomnicki [Lomnicki, 1989] comenta que a pesar de estar de acuerdo con Berryman y Millistein en que los sistemas ecológicos no parecen ser caóticos, discute los argumentos expuestos por estos científicos. El sugiere que los estudios de los modelos teóricos de la partición de los recursos entre los individuos, y la monopolización de los mismos por algunos miembros de la población muestran que la estabilidad de las funciones $F(X)$ de

densodependencia de la ecuación (3.1.) del capítulo anterior, se debe a particiones desiguales y a la manipulación de los recursos. Con esto sugiere que las semillas del caos dentro de los sistemas biológicos, además de deberse a una alta tasa de reproducción (retroalimentación positiva), se deben a la partición homogénea de los recursos entre los organismos y a su falta de habilidad para la monopolización de los mismos. Por lo que de esta manera, no es necesario recurrir a mecanismos evolutivos para explicar la reducción de la densidad de las poblaciones (retroalimentación negativa). Sin embargo, el punto más débil del argumento de Berryman y Millistein se debe a que utilizan la explicación evolutiva de la selección de grupo, como mecanismo de retroalimentación negativa del sistema.

Agrega que es difícil imaginar como la selección de grupo pueda sobreponerse a la selección individual, para que exista una tendencia a tasas de reproducción más grandes. Esto es particularmente cierto bajo condiciones naturales donde los grupos locales no están totalmente aislados y pueden ser inhibidos por diversos inmigrantes desde el punto de vista genético. Por otro lado, las diferencias individuales en la entrada de recursos pueden ser explicadas por la dinámica de crecimiento de individuos en competencia; mientras que la monopolización de los recursos por los individuos más fuertes, también se puede explicar por medio de la acción de la selección individual y el concepto de una estrategia evolutiva estable.

Coincide con el hecho de que los sistemas ecológicos pueden ser llevados a comportamientos caóticos por medio de la manipulación humana del sistema, dando el ejemplo particular de que por medio de la agricultura, se homogeneizan los recursos, ocasionando una desestabilidad en el sistema.

4.4. CONCLUSIONES

Por los argumentos presentados anteriormente, nos podemos percatar de que la polémica acerca de la existencia fenomenológica del Caos Determinista en los sistemas biológicos gira en torno a diversos puntos.

Uno de ellos, según nos comenta Nisbet es que el problema puede venir desde el momento de querer determinar la densodependencia del crecimiento de las poblaciones, a partir de los datos experimentales. Esta dificultad se ha presentado en el estudio de los modelos ecológicos a lo largo de casi medio siglo. Según este autor, "es indiscutible que existen muchas poblaciones para las cuales las pruebas estándar fallan al revelar cualquier dependencia en la densidad, del tipo invocado en los modelos simples unidimensionales" [Nisbet, et. al., 1989].

Por otro lado, se sabe que la densodependencia es una noción básica para el concepto de Caos en biología, al igual que el concepto de retroalimentación es de central importancia en la noción general de Caos en los Sistemas Dinámicos [Berryman y Millistein, 1989]. Así mismo, Altesor presenta al factor de densodependencia como factor regulador del sistema que hace tender a la densidad de la población, en principio, a un valor particular. Sin embargo, señala el caso en el que el factor de densodependencia es tan fuerte que lleva a la población a padecer comportamientos fluctuantes. De hecho, su modelo analizado es estructurado, en términos del momento en el que dicho factor de densodependencia entra en acción en la dinámica de crecimiento del sistema [Altesor, 1989].

Una vez que suponemos la existencia de los términos de densodependencia en el crecimiento de los sistemas ecológicos, se ha mostrado que en la naturaleza (poblaciones de campo), dichos factores no alcanzan los valores suficientes para que los sistemas lleguen a tener dinámicas caóticas.

Por otro lado, se ha comprobado que dichos sistemas ecológicos pueden estar bastante bien representados por los modelos matemáticos. Sin embargo, dichos modelos son de carácter determinista y para ciertas características presentan dinámicas caóticas. En base a esto, se ha desencadenado una gran discusión con respecto a la existencia del caos en los sistemas ecológicos, tomando en cuenta el valor de los parámetros alcanzados por dichos sistemas. Por un lado, la Teoría de la Adaptabilidad argumenta que la región caótica de los valores de los parámetros del sistema es la mejor descripción de los fenómenos biológicos en favor de la adaptabilidad. Por otro lado, se argumenta que una vez que el sistema haya alcanzado dichos valores de sus parámetros, la probabilidad de extinción de las especies aumenta en gran medida. Y se afirma que el proceso de selección natural no permitirá que esto suceda; por lo tanto, en la naturaleza no es posible alcanzar los valores del parámetro de la región caótica. Sin embargo, si nos referimos al sistema de insectos que Hassell estudió en 1987 (mosca blanca *viburnum*), citado por Altesor y con datos generados por computadora, donde demostró la medida en que la densodependencia en la población de dicha mosca es evidente; en este caso en particular, vemos que esto sucede a nivel de las hojas, sin embargo en la totalidad del arbusto ya no podemos asegurar lo mismo. Por consiguiente, es posible que en este caso dicha población presente fenómenos tan comunes como la extinción local, debido a un comportamiento caótico. Con esto queremos decir que una población puede extinguirse gracias a las fluctuaciones caóticas, sólo a un nivel local.

Otro aspecto por resaltar es el hecho de que los ecólogos tienden al punto de vista del balance natural, como un cierto paradigma que rige el comportamiento de los sistemas ecológicos. La existencia de fluctuaciones azarosas dentro del sistema se deben entonces, a las interacciones con el medio ambiente cuyas dinámicas son en su mayoría estocásticas. Por medio de su Teoría de Adaptabilidad, Conrad, al dar una explicación funcional del caos, nos muestra como es que la naturaleza da cabida al caos para la descripción de las fluctuaciones observables de los sistemas biológicos. En el caso particular de los sistemas ecológicos, nos dice de cómo la impredecibilidad inherente a los sistemas caóticos,

permite la sobrevivencia de varias especies; este caso se extiende a funciones neurológicas como por ejemplo el vuelo impredecible de una mariposa, el cual se debe a un mecanismo neuronal caótico, permitiendo así su sobrevivencia frente a varias clases de depredadores. También añade el ejemplo de la variabilidad genética como mecanismo principal de adaptación, que en el caso particular del sistema inmunológico, existe una gran variedad de anticuerpos capaces de enfrentarse a una gran diversidad de microorganismos. En pocas palabras, entre más variabilidad mayor adaptabilidad, i.e., entre más fluctuante sea el sistema, mayor es su poder de adaptación; por ende, el que los sistemas biológicos presenten una dinámica fluctuante es un factor aún más probable que la Teoría del Balance Natural de los ecosistemas. Además, agrega que dichas fluctuaciones son de carácter determinista [Conrad,1986].

Aunque por otro lado, a través de la evidencia experimental obtenida, parece ser que las condiciones que un sistema debe cumplir para alcanzar dinámicas caóticas son demasiado difíciles de lograr. De hecho el que se haya encontrado dicha dinámica para cierta clase de insectos dentro del laboratorio, nos daría a entender, al menos en principio, que el medio ambiente natural nunca cumplirá con las condiciones necesarias para que el sistema desarrolle dinámicas caóticas.

Sin embargo, pese a toda la estructura matemática desarrollada para los modelos biológicos (ecológicos), éstos no son más que una aproximación al sistema real. En el caso del modelo de Hassell, el cual es cotejado con los datos experimentales, sólo se podría verificar que es un muy buen modelo, pero que, sin embargo, no deja de ser sólo una aproximación a la realidad. Esto significa que en la práctica, dichos modelos no reflejan todos los factores que conforman al sistema y su dinámica; en parte debido a la gran variedad de especies que interaccionan entre sí en la naturaleza, lo que implica que haya un mayor número de grados de libertad, además del gran número de grados de libertad que se deben a la dinámica de una sola especie. Por lo que el decir que los datos experimentales cotejados con el modelo no exhiben comportamientos caóticos, es una afirmación demasiado aventurada.

Incluso muchas veces es casi imposible el siquiera saber qué variable muestrear, al querer obtener una serie de tiempo del sistema para su análisis numérico. Este hecho, añadido al que la herramienta para detectar Caos a partir de las series de tiempo no está del todo depurada, ha implicado un gran obstáculo para determinar la dinámica caótica del sistema.

Otro problema muy importante al tratar de construir el atractor a partir de la serie de tiempo, para poder identificar dinámicas caóticas del mismo, es determinar tanto la longitud de la serie y el algoritmo que calcule la dimensión del atractor. Pues para cada algoritmo utilizado para determinar dicha dimensión fractal, se puede obtener un valor diferente. Así como para cada tipo de dimensión que se desee obtener (Hausdorf, Correlación, etc.) se necesita utilizar un cierto número de datos de la serie de tiempo.

Finalmente cabe añadir los problemas para determinar la dinámica del sistema debido al ruido obtenido en las series de tiempo. De hecho, este es el punto principal en el que los ecólogos se basan para asegurar que la dinámica del sistema es en realidad azarosa. Sin embargo, es posible que ese ruido aparente sea parte del sistema y que en realidad el único problema que existe es el de determinar una escala de observación del espectro de potencias. Esto lo aseguramos debido a que en varias ocasiones, al tratar de analizar el espectro de potencias de una serie de tiempo determinada, se pudo llegar a observar un solo pico para cierta frecuencia correspondiente a algún período en particular; pero que al observar dicho espectro a otra escala, por ejemplo al hacerle una ampliación, nos encontremos con un espectro de potencias cuasicontinuo característico del comportamiento caótico. Es decir, el pico que existía en otra escala sigue existiendo en la nueva, pero no de manera tan pronunciada que no permita observar los otros picos de menor amplitud que corresponden a otros períodos del sistema. Este aspecto tiene su significado biológico, y es que quizás ese ruido no sea un verdadero ruido añadido al sistema por fluctuaciones externas a él, sino que en realidad refleja pequeñas fluctuaciones caóticas del sistema. Por ejemplo en el caso de una población de gran número de individuos, para los cuales sólo una pequeña parte desempeña dinámicas caóticas.

A pesar de que de alguna manera se han podido analizar los datos experimentales con ruido, esto no ha permitido que se pueda discernir perfectamente un sistema caótico de uno estable. Este es el caso del análisis de los datos obtenidos para la población del lince canadiense, en el que mapeo de un ciclo biperiódico estable con ruido no se puede distinguir del mapeo caótico con ruido.

Debido a esto, sería mucho mejor que se implementara una técnica para analizar datos filtrados; es decir diseñar un filtro de los datos experimentales, que permita poderlos observar sin presencia de las diferentes clases de ruido ambiental.

Pese a todo el trabajo, tanto teórico como experimental que se ha desarrollado en torno al estudio de la dinámica de algunos fenómenos biológicos, falta mucho por hacer todavía. Se considera como un problema abierto el lograr determinar, sin ambigüedad alguna, que los fenómenos biológicos presentan dinámicas caóticas, y en el caso de que se esté en contra de esta posibilidad, hace falta dar argumentos todavía más convincentes.

- ALBANO, A.M., MEES, A.I., GUZMAN, G.C. y RAPP, P.E. (1987), Data requirements for reliable estimation of correlation dimensions. pp.209-220.
- ALTESOR, A.I. (1989), Un modelo con densodependencia para poblaciones estructuradas. México. pp.1-66.
- BEDDINGTON, J.R., FREE, C.A., y LAWTON, T.H. (1975), Dynamic complexity in predator-prey models framed in difference equations. Nature V.225.
- BERRYMAN, A.A. y MILLISTEIN, J.A. (1989), Are Ecological Systems Chaotic- And If Not Why Not? Elsevier Science Publishers. U.K. pp.26-28.
- CARRETERO, Ricardo. (1992), La transición al Caos en un Péndulo Extensible. Tesis de Licenciatura. UNAM, México.
- CASATI, G. (1990) De Los Billares Al Caos De Los Átomos. Mundo Científico. No.115 V.11 pp.756-762.
- CASWELL, H. (1987), A general formula for the sensitivity of population growth rate to changes in life history parameters. Theoretical Population Biology. No.14 pp.215-230.
- CHAITIN, G.G. (1990), El Azar De Los Números. Mundo Científico. No.115 Vol.11 pp.772-777.
- CHAMBERT, J.L. y DALMEDICO, A.D. (1990), Henri Poincaré, El Precursor. Mundo Científico. No.115 V.11 pp.722-730.
- CHAMPENEY, D.C. (1987), A handbook of Fourier Theorems. Cambridge University Press. Cap. 11 pp.103-117.
- CONRAD, M. (1986), What is the use of Chaos? Princeton University Press. pp.3-14.
- DEVANEY, R. (1989), An Introduction To Chaotic Dynamical Systems. 2^o Ed. Adison Westley Press.
- DEVANEY, R. (1987), Chaotic Burst in Nonlinear Dynamical Systems. Science. V.235. Boston University. U.S.A. pp.342-347.
- DUBOIS, M. (1987), El Orden Caótico. Mundo Científico. No.68. V.7. pp.428-438.
- ECKMANN, J.P. y MASHAAL, M. (1990), La Física del Desorden. Mundo Científico. No.115. V.11 pp.716-720.
- ESTEVA, L.P. (1985), Matemáticas y Caos. Ciencias. No.8. pp.8-13.
- FORD, J. (1983), How random is in a coin toss? Physics Today. pp.40-47.
- GILPIN, M.E. (1979), Spiral chaos in a predator-prey model. Am. Natur. V.113. pp.306-8.
- GLASS, L. y MACKAY, M. (1988), From clocks to chaos. The rythms of life. Princeton University Press.
- GOLDBERGER, A.L. y WEST, B.J. (1987), Chaos in Biological Systems. pp.1-4.

- GRASSBERGER, P. y PROCACCIA, I. (1983), Characterization of Strange Attractors. *Physical Review Letters*. No.5. V.50. pp.346-349.
- GRASSBERGER, P. y PROCACCIA, I. (1983), Measuring the strangeness of attractors. *Physica* 9D. pp.189-208.
- GUCKENHEIMER, J. (1982), Noise in chaotic systems. University of California. U.S.A. pp.358-361.
- GUCKENHEIMER, J., OSTER, G. y IPAKTCHIA, (1976), The Dynamics of Density Dependent Population Models. pp.101-147.
- HAKEN, H. (1990), El Caos Determinista. *Mundo Científico*. No.108. V.10 pp.1210-1217.
- HASELL, M.P. (1975), Density Dependence in single-species populations. U.K. pp.283-295.
- HASELL, M.P., LAWTON, J.H. y MAY, R.M., (1976), Patterns of Dynamical Behavior in Single Species Populations. Princeton University Press. pp.471-482.
- HENON, M. (1989), La Dispersión Caótica. *Mundo Científico*. No.92. V.9. pp.620-628.
- KAUFFMAN, S.A. (1990), Antichaos and adaptation. *Scientific American*. pp.64-70.
- LAWTON, J.H., BEDDINGTON, J.R., FREE, C.A. (1975), Dynamic complexity in predator-prey models framed in difference equations. *Nature*. V.255. pp.58-60.
- LI, T.Y. y YORKE, J.A. (1975), Periodic three implies chaos. *Am. Math. Monthly*. 82[1985]
- LOMNICKI, A. (1989), Avoiding Chaos. *Tree*. No.8. V.4.
- MAY, R. (1990), El Caos en Biología. *Mundo Científico* No.115. V.11. pp.746-754.
- MAY, R. (1976), Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*. V.261. pp.459-467.
- MAY, R. y SUGIHARA, G. (1990), Applications of fractals in Ecology. *Tree*. No.3. V.5. (1990) pp.79-86.
- MAY, R. (1974), Biological populations with nonoverlapping generations: Stable Points, Stable Limits & Chaos. *Science* V.156. pp.645-647.
- MEZARD, M. y TOULOUSE, G. (1990), De los Vidrios de Espin a las Redes de Neuronas. *Mundo Científico*. No.115. V.11. pp.778-785.
- MURRAY, J.D. (1989), *Mathematical Biology*. Springer-Verlag. Berlín.
- NICOLIS, C. (1984), Is there a climatic attractor? *Nature*. No.5986. V.113. pp.529-532.
- NICOLIS, C. (1990), ¿Puede Bascular el Clima? *Mundo Científico*. No.115 V.11. pp.742-745.
- NICHOLSON, A.J. y BAILEY, V.A. (1935), *Proc. Zool. Soc. Lond.* pp.551-98.
- NISBET, R., BLYTHE, S. y GURNEY, B. (1989), Avoiding chaos. *Tree*. V.4 No.8.
- NUNEZ, A.N., SALAS, A.L., VARGAS, C.A. y VICENTE, L. (1991), Sobre predecibilidad y caos en sistemas clásicos. *Educación Química*. 3[1] pp.64-70.
- RUELLE, D. (1989), *Chaotic evolution and strange attractors*. Cambridge University Press.
- RUELLE, D. y TAKENS, F. (1971), On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical physics*. 20[167].
- SCHAFFER, W.M. (1984) Stretching and folding in Lynx fur returns: evidence for strange attractors in nature? *The American Naturalist*. No.6. V.124. pp.798-820.

- SCHAFFER, W.M., y KOT, M. (1986), Differential systems in ecology and epidemiology. pp.158-177.
- SCHAFFER, W.M., (1987), Chaos in ecology and epidemiology. pp.233-248.
- SCHAFFER, W.M., (1985), Ecology. 66[1] pp.93-106.
- SCHUSTER, H.G. (1984), Deterministic Chaos.
- SIMO, C. (1990), Cómo entender el Caos Determinista. Mundo Científico. No.115. V.11.
- SPARROW, P. (1988), An Introduction to the Dynamics of Unimodal Maps. U.K. pp.1-47.
- THOMAE, S. GROSSMANN, S. (1981), Correlations and spectra of periodic generated by the Logistic Parabola. Journal of Statistical Physics. No.3. V.26. pp. 485-504.
- WEST, B. (1987), Fractals, intermittency and morphogenesis. pp.305-315.