UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGON

DINAMICA DE SISTEMAS SIMPLES APLICADA A INGENIERIA SISMICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A

EUCARIO CRUZ CHAVEZ

MEXICO, D. F. MAYO, 1993

INDICE GENERAL

Página

CAPITULO I
INTRODUCCION

CAPITULO II
GENERALIDADES

CAPITULO III
OSCILACION LIBRE NO AMORTIGUADA

CAPITULO IV
OSCILACION FORZADA NO AMORTIGUADA

CAPITULO V
OSCILACION LIBRE AMORTIGUADA

CAPITULO VI
OSCILACION FORZADA AMORTIGUADA

CAPITULO VII
ANALISIS SISMICO-DINAMICO

CAPITULO VIII
APENDICE

CAPITULO IX
CONCLUSIONES

I

INTRODUCCION

I. INTRODUCCION

El sismo se define como el movimiento vibratorio de la corteza terrestre, el cual causa estragos a las sociedades humanas. Según la O.N.U., en los últimos 25 años han muerto alrededor de 15 000 personas por año, ésto se debe en mayor parte al colapso de edificios. Otros sufren graves daños y, aunque no causan víctimas, sí causan pérdidas económicas al tener que ser derribados por daños. Por lo tanto, es obligación de los Ingenieros Civiles tomar en cuenta la probabilidad de ocurrencia de sismos cuando intervengan en el proyecto, en la construcción y operación de una edificación.

La Ingeniería Sísmica es la disciplina que estudia los daños que los sismos causan a las construcciones, con el objeto de desarrollar técnicas para mitigarlos. Como todas, no es sólo científica, se basa en gran parte en observaciones del comportamiento real de las construcciones durante la ocurrencia de un sismo, así como en experimentación que se realiza sobre sistemas reales y modelos de laboratorio. Sin embargo, para el análisis e interpretación de éstos fenómenos, se debe partir de una buena base científica sólida, y ésta la proporciona la Dinámica, rama de la Física que estudia el equilibrio de los cuerpos en movimiento. Por ésta razón es indispensable que los ingenieros que se inclinen al estudio de los problemas de Ingeniería Sísmica, tengan un conocimiento sólido de los principios de la Dinámica.

En la presente tésis se desarrollan los principios básicos de Dinámica que son útiles para los Ingenieros Sísmicos. Es verdad que la Dinámica es una ciencia básica general que tiene influencia en muchos aspectos prácticos de la ingeniería, por lo que las ideas que en éste trabajo se presentan pueden encontrarse en numerosos libros de texto de Física avanzada. Sin embargo, en la presente tésis, ésos principios básicos se encuentran orientados hacia las aplicaciones en Ingeniería Sísmica y los diferentes conceptos se van introduciendo en forma pausada y ordenada, para que los ingenieros los comprendan, los manejen con soltura y los utilicen para una correcta interpretación de los problemas sísmicos que habrán de planteárseles en el desarrollo de vida profesional.

El Capitulo I, es una amplia y descriptiva introducción sobre el contenido de la presente tésis, que hace mención de cada uno de los Capítulos con un enfoque simple y enfatizado en su contenido.

En el Capítulo II, se dan algunas generalidades, definiciones y explicaciones que ayudarán a interpretar con propiedad el análisis dinámico.

El Capítulo III, contempla yá el estudio de las oscilaciones, en éste caso, las causadas por un impulso que se aplica inicialmente a un cuerpo y luego se retira, originando lo que conoceremos como OSCILACION LIBRE NO AMORTIGUADA.

El Capítulo IV, analiza el mismo caso anterior, sin embar go considerando ahora que la fuerza perturbadora continúa actuando a intervalos periódicos, forzando la estructura a una oscilación determinada; OSCILACION FORZADA NO AMORTIGUADA.

El Capítulo V, va un poco más allá y estudia el caso de la oscilación libre, pero considerando que está presente alguna fuerza de resistencia a la perturbación (amortiguamiento), OSCILACION LIBRE AMORTIGUADA.

La misma consideración se aplica en el Capítulo VI a la oscilación forzada, dando como resultado la OSCILACION FORZADA AMORTIGUADA.

En el Capítulo VII, se explica el análisis sísmico-dinámico. Después de cada capítulo se incluyen los ejercicios correspondientes con la finalidad de aclarar conceptos.

En el Capítulo VIII, Apéndice, se establece un recordatorio del Análisis Estructural por Carga Vertical y por Carga Horizontal. Se utilizan dos métodos muy comunes al estudiante de ingeniería y por ende, al Ingeniero, Método de Ritter y Método de la Rigideces.

En el Capítulo IX, se presentan conclusiones. Estas conclusiones simplemente consisten en extraer y resumir de cada uno de los capítulos precedentes, los conceptos que son más importantes para la Ingeniería Sísmica.

II

GENERALIDADES

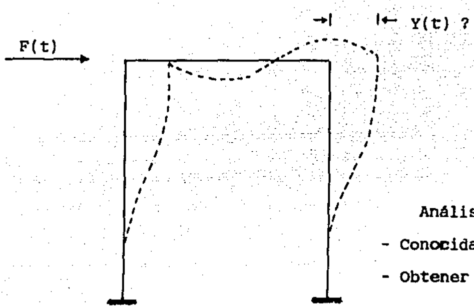
II. GENERALIDADES

Generalmente, al analizar los efectos que las acciones exteriores causan en las estructuras, se omite la influencia del tiempo, como si las acciones se aplicaran súbitamente y se mantuvieran constante indefinidamente. A éste tipo de análisis se le denomina "Análisis Estático", y resulta satisfactorio para muchos de los problemas a los que se enfrenta el Ingeniero Civil.

Sin embargo, para determinado tipo de acciones, no es posible adoptar este criterio simplificatorio, porque son acciones que varían rápidamente en el transcurso del tiempo y en consecuencia, inducen respuestas estructurales en función del tiempo. Tal es el caso de las acciones sísmicas, las acciones del viento y las acciones de la carga viva en los puentes.

Para éste tipo de cargas, se deben realizar "Análisis Dinámicos", que se diferencian del estático, únicamente en que se incluye el efecto del tiempo, pero las relaciones internas entre las fuerzas y deformaciones, se mantienen iguales en ambos análisis.

La siguiente figura sintetiza lo que se entiende por análisis dinámico para una estructura simple.

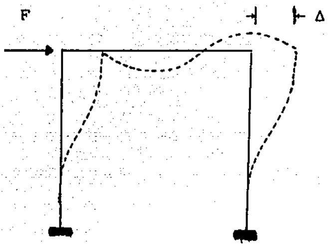


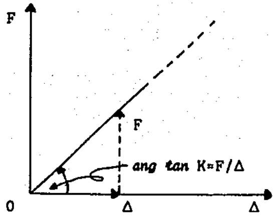
Análisis dinámico:

- Conocida la función F(t)
- Obtener la función Y(t).

En lo que sigue nos ocuparemos del análisis de sistemas elástico-lineales de un grado de libertad. Entenderemos por *sistema* a un conjunto de elementos enlazados entre sí, cuya respuesta ante una acción exterior es predecible. Una estructura, es un sistema cuyos elementos son las losas, las vigas, las trabes, las columnas, sujetos a cargas exteriores que son: el peso, la gravedad, la temperatura, el viento, el sismo; ante las cuales presenta respuestas: momentos, fuerzas cortantes, desplazamientos. Sin embargo, nos referiremos a sistemas y no a estructuras, porque los resultados que obtendremos, son aplicables a sistemas diferentes a los estructurales, por ejemplo; las máquinas.

Los sistemas son *elásticos* cuando recuperan su forma inicial, al cesar la acción que los deformó. Son *elástico-lineales*, cuando las deformaciones son proporcionales a las fuerzas que las causan. En el caso de estructuras, ésta relación queda explicada en la siguiente figura:

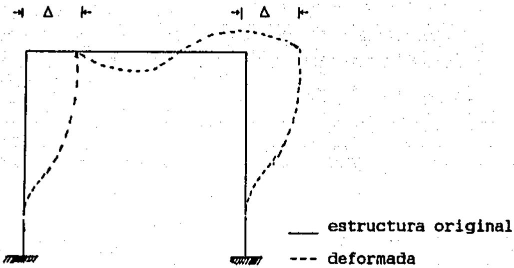




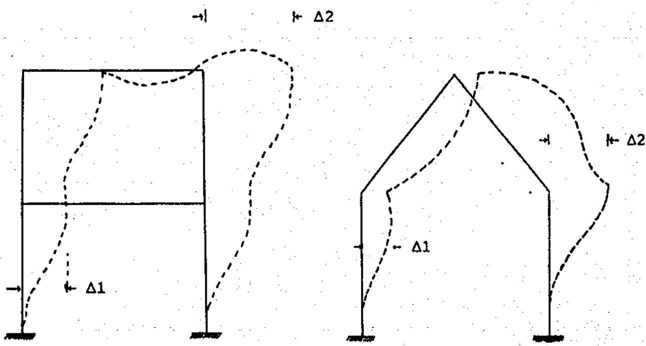
En el caso de estructuras, el *grado de libertad* se define como el número mínimo de datos que se requieren para definir la deformada de una estructura. Un sistema se mueve con un grado de libertad, cuando en un instante cualquiera, su configuración deformada está determinada por un sólo parámetro en función del tiempo. En general, un sistema se mueve con infinitos grados de libertad, cuando un punto en un instante cualquiera, puede tener un desplazamiento independiente de cualquier otro punto, - (salvo la condición de congruencia, continuidad o resistencia). Sin embargo, en nuestro estudio, nos avocaremos a la estructura simple, a la estructura de un sólo parámetro.

Recordemos que la *deformada*, es la forma que toma la estructura bajo la acción de la carga.

En la figura siguiente, se puede entender y apreciar con claridad el significado del concepto anterior :



La anterior, es una estructura simple, es decir, de un grado de libertad, basta conocer Δ, para definir la deformada del marco.



Las anteriores, son estructuras de dos grados de libertad , se requiere conocer $\Delta 1$ y $\Delta 2$ para poder definir la deformada.

Se define como ***rigidez***, a la relación que existe entre las fuerzas aplicadas y las deformaciones producidas.

$$k = \frac{F}{\Delta}$$

Sus unidades son :

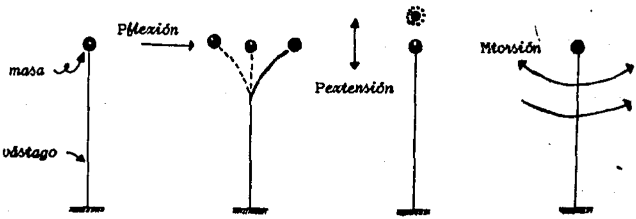
$$\frac{\text{Unidades de fuerza}}{\text{U . de deformación}} = \frac{\text{Ton}}{\text{cm}}$$

Otra forma de definir a la ***rigidez***, es entenderla como la ***fuerza cortante que ocasiona un desplazamiento unitario.***

SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD

Consecuencia de las definiciones anteriores, es que en el sistema de un grado de libertad es posible un modo de vibrar; en el de dos grados de libertad, son posibles dos modos de vi - brar; en el de " n " grados de libertad, son posibles, " n ", modos de vibrar; en el de infinitos grados de libertad, son posibles infinitos modos de vibrar.

Las formas o modos de vibrar que puede adoptar una estructura, son de diversas clases, en el caso más simple de un cantilever, tendríamos los siguientes modos de vibrar: Flexión,Extensión y Torsión.



FLEXION EXTENSION TORSION

Sin embargo, en general, cuando una estructura vibra, lo hace en una combinación de todos los modos; en nuestro estudio nos referiremos principalmente al modo de vibrar en <u>Flexión</u> y ésto será la base de nuestro estudio, considerando que los efectos de flexión son los de importancia en las estructuras.

Se observa entonces que en el sistema anterior (cantilever), tendremos siempre dos clases de cargas.

1) La carga externa P(t) que es la generadora del movimiento (aceleración).

2) La carga de inercia Fi que resiste dicha aceleración (esta fuerza se produce de acuerdo con el Principio de D'Alembert*).

El equilibrio se consigue así:

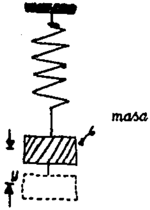
FUERZAS		FUERZAS APLICADAS
	Vrs.	
INTERNAS		FUERZAS DE INERCIA

Resulta necesario el determinar las fuerzas de inercia para conocer los esfuerzos internos.

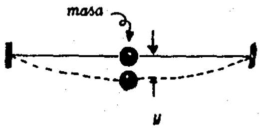
Principio de D'Alembert: Establece la relación entre las fuerzas externas aplicadas a un sistema y las fuerzas de inercia (fuerzas efectivas invertidas)...."La resultante de las fuerzas externas aplicadas a un cuerpo, compuesto por un sistema de partículas, es igual a la suma vectorial de sus fuerzas efectivas que actúan en todas las partículas."

$$R = W \rightarrow P1 \rightarrow P2 \rightarrow P3$$
$$= m1a1 \rightarrow m2a2 \rightarrow m3a3 \rightarrow \ldots$$

Otros ejemplos de sistemas con un grado de libertad:



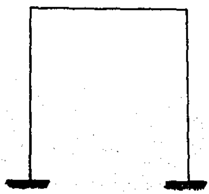
RESORTE



CUERDA

conociendo " Y ", se conoce la posición de la masa.

En lo sucesivo de nuestro estudio, por la simplicidad del dibujo, nos referiremos al péndulo, pero los resultados serán aplicables a cualquier sistema de un grado de libertad, especialmente a la estructura simple siguiente :



OSCILACIONES

La oscilacion de una estructura eslástica, se origina por fuerzas perturbadoras, las cuales crean en ella un desplazamiento de su posición de equilibrio estático. Tales desplazamientos crean fuerzas elásticas que tienden a llevar al cuerpo (estructura), a su condición de equilibrio original. Al retirar la fuerza perturbadora, las fuerzas elásticas hacen que la estrucrura se acelere hasta su posición de equilibrio. Sin embargo, el cuerpo poseerá ahora cierta velocidad cuando pase por su posición de equilibrio y ésto hará que sobrepase dicho punto. Así se forman las *OSCILACIONES*, que pueden disminuir o dejar de ocurrir, según esté presente o nó alguna fuerza de resistencia (amortiguamiento).

Cuando estas oscilaciones son causadas por una fuerza aplicada inicialmente al cuerpo y luego se retira ésta, resulta lo que se conoce como *OSCILACION LIBRE*. Si sobre el cuerpo en oscilación también actúan fuerzas de resistencia, el movimiento se conoce como *OSCILACION LIBRE AMORTIGUADA*.

Cuando las fuerzas perturbadoras continúan actuando a intervalos periódicos, el resultado es una *OSCILACION FORZADA*, que puede ser *CON* o *SIN AMORTIGUAMIENTO*.

Hablando en términos generales, una oscilación es un movimiento periódico que se repite tras un intervalo de tiempo definido. Dicho intervalo de tiempo se llama *período* de la oscilación, se designará con el símbolo T, generalmente medido en *segundos*. Cada repetición del movimiento se denomina *ciclo*, la *frecuencia natural* (n) de la oscilación es el recíproco del período (1/T), se mide en *ciclos por segundo* (el ciclo/segundo se llama también *Hertz* y su símbolo es *Hz*). El máximo desplazamiento de la estructura respecto a su posición de equilibrio se conoce como *amplitud* de la oscilación.

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE,

OSCILACIONES LIBRES.

Movimiento armónico simple (m.a.s.), es el nombre que se emplea para describir el movimiento en línea recta de un cuerpo cuya aceleración es proporcional a su desplazamiento respecto a un origen fijo y siempre se encuentra dirigido hacia dicho origen.

La descripción matemática del movimiento está dada por la ecuación:

$$a = - K x$$

donde: K : es una constante de proporcionalidad

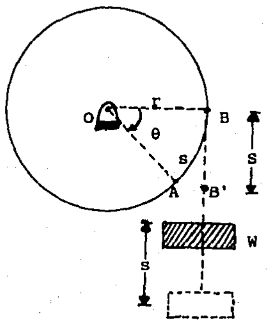
x = desplazamiento con respecto al origen

Sin embargo es preferible denotar K por ω^2, *así* :

$$a = - \omega^2 x$$

la cual es la formulación matemática del movimiento armónico simple. El signo negativo indica que la dirección de la aceleración siempre es opuesta a la del desplazamiento.

La correlación entre el desplazamiento lineal y el desplazamiento angular se presenta en la figura siguiente, donde se muestra una polea que puede girar libremente alrededor de un Eje O, bajo la acción de un peso W suspendido de una cuerda enrollada alrededor de la polea. Conforme el peso desciende S metros, un punto B en el borde de la polea se mueve un arco de igual longitud hasta A.



El desplazamiento angular correspondiente θ, de la polea se halla subtendido por los radios de los puntos B y A. La relación entre el desplazamiento lineal del peso y el desplazamiento angular (en radianes) de la polea está dada por:

$$s = r\,\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt} = r\,\omega = v$$

$$\frac{d^2s}{dt} = r\,\omega^2 = a$$

donde : $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

Resumiendo, vemos que las ecuaciones diferenciales cinemáticas para el movimiento rectilineo y para rotación, son completamente análogas en forma y sólo difieren en símbolos usados.

MOVIMIENTO RECTILINEO	ROTACION
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$
$a\,ds = v\,dv$	$\alpha\,d\theta = \omega\,d\omega$

Se pueden transformar unas en otras por las relaciones :

$$s = r\,\theta$$

$$v = r\,\omega$$

$$a\,t = r\,\alpha$$

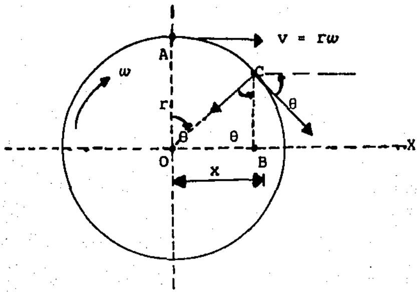
$$a\,n = r\,\omega'$$

donde: at : aceleración tangente a la trayectoria,en el sentido que α gira el radio r.

an : aceleración normal a la trayectoria y siempre dirigida al centro de rotación O.

Las ecuaciones para el movimiento armónico simple pueden deducirse gráficamente, considerando un punto que se mueve a una velocidad constante en una trayectoria circular.

Ahora consideremos por ejemplo, un circulo cuyo radio r, está girando a una velocidad constante ω en rad/seg.



Escojamos un diámetro del círculo como Eje X y sea A la posición inicial del punto de la circunferencia. La velocidad en ése punto es constante:

$$v = r\omega$$

Su aceleración es la normal debida sólamente al cambio en la dirección de la velocidad, pues su magnitud es constante:

$$a = r\omega^2$$

Después de cada intervalo de t segundos, el punto A llega a la posición C, la velocidad y la aceleración en ése punto son:

$$v = r\omega$$

$$a = r\omega^2$$

Durante éste tiempo, la proyección del punto sobre el Eje X, se mueve de O a B en un desplazamiento x, la proyección de AC sobre el diámetro es:

$$x = r \text{ Sen } \theta$$

$$\frac{dx}{dt} = Vx = r \text{ Cos } \theta \frac{d\theta}{dt} = r\ \omega \text{ Cos } \theta$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ax = -\ r\omega \text{ Sen } \theta \frac{d\theta}{dt} = -\ r\omega^2 \text{ Sen } \theta$$

tomando : $x = r \operatorname{Sen} \theta$

$$a_x = -\omega^2 x$$

Por consiguiente podemos concluir que el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en un movimiento armónico simple, se hayan descritas por sus proyecciones diametrales de un punto que se mueve a una velocidad constante en una trayectoria circular.

ω = velocidad angular constante del radio r.

Un nombre adecuado para ω es *frecuencia circular natural*. El radio r del círculo analizado se le llama *amplitud* del movimiento. El tiempo necesario para completar una oscilación (de ida y vuelta), se llama *periodo* del movimiento. El periodo se determina por el tiempo necesario para que el radio complete una revolución, o sea:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La *frecuencia*, es el número de oscilaciones por segundo, es decir:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = n$$

REPRESENTACION GRAFICA DEL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE.

Como se explicó, la relación desplazamiento-tiempo que define un movimiento armónico simple puede escribirse:

$$x = r \operatorname{Sen} \omega t$$

Derivando respecto al tiempo, se determina la relación velocidad-tiempo.

$$v = r\omega \operatorname{Cos} \omega t$$

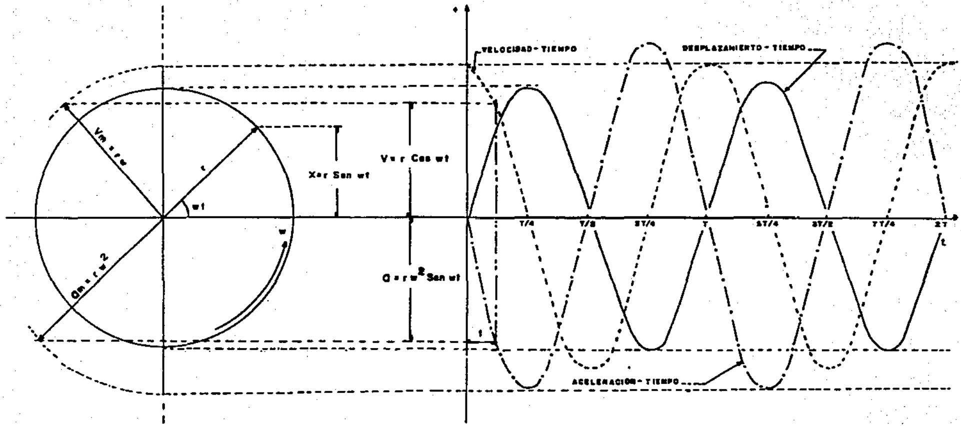
El máximo valor de la velocidad es $V_m = r\omega$

La relación aceleración-tiempo, se obtiene con una nueva derivación respecto al tiempo:

$$a = - r\omega^2 \operatorname{Sen} \omega t$$

El máximo valor de la aceleración es $a_m = r\omega^2$

Un modelo para visualizar las variaciones de éstas ecuaciones es por medio de un círculo auxiliar que permite trazar fácilmente las curvas *desplazamiento-tiempo, velocidad-tiempo, aceleración-tiempo.* Esta técnica nos será muy útil en lo sucesivo, cuando apliquemos éstos conceptos a la estructura simple de un grado de libertad escogida para nuestro estudio:



REPRESENTACION GRAFICA DEL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

Consideremos un punto que se mueve a una velocidad constante alrededor de un círculo de radio r, como se vé en la figura anterior. Represente la posición de éste punto por el vector respectivo r, que se haya girando con la misma velocidad angular ω. Tomando como tiempo cero el instante en que el vector de posición está en posición horizontal, vale escribir la proyección vertical de r como: $x = r \operatorname{Sen} \omega t$, que es el movimiento armónico simple explicado con anterioridad.

En forma similar,la velocidad se puede expresar por la proyección vertical de un vector de longitud $r\omega$, que gira con la misma velocidad angular ω que el vector de posición r, pero siempre está 90° delante de él.

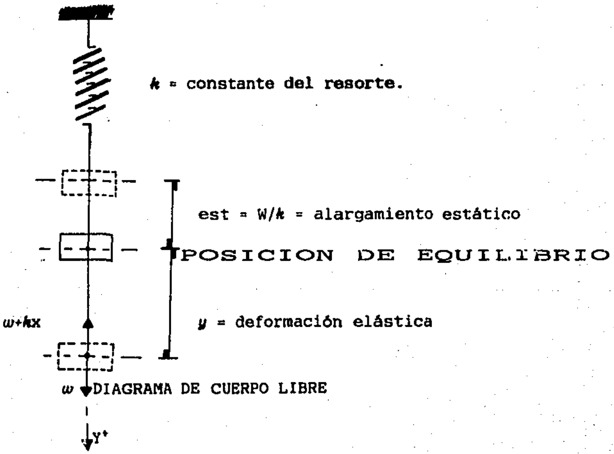
La aceleración se representa por la proyección vertical de un vector de longitud $r\omega^2$, que gira con la misma velocidad angular ω que el vector de posición r, pero está 180° delante él y 90° delante del vector velocidad.

La figura también nos muestra cómo se usan las proyecciones de éstos vectores en rotación para graficar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de una estructura en función del tiempo, algo que como se dijo con anterioridad, nos será de gran utilidad y aplicación en el desarrollo de nuestro estudio.

OSCILACIONES LIBRES

CASO GENERAL :

Consideremos un peso suspendido de un resorte que es desplazado de su posición de equilibrio y luego se deja oscilar li̲bremente, como se muestra en la figura:



Se supone que se desprecian todas las resistencias, tales como la del aire y la fricción interna del resorte. Esto significa que el resorte oscilará indefinidamente bajo la acción de la fuerza variable del resorte sobre el peso. Esto se llama *oscilación libre.*

La ecuación diferencial en éste caso, se establece aplicando la relación entre la fuerza balanceada y la aceleración resultante. Si consideramos como positivos las fuerzas y los desplazamientos hacia abajo:

$$\Sigma Y = (W/g)\,a \quad ; \quad -kY = (W/g)\,a \quad ; \quad a = -(kg/W)\,Y$$

o puesto que:

$$a = d^2Y/dt^2 = -(kg/W)\,Y = -\,\omega^2\,Y \quad \because \quad \omega = \sqrt{kg/W}$$

La cual es la ecuación diferencial de la oscilación libre. Indica que el desplazamiento "Y" es una función del tiempo (t), tal que al ser derivada dos veces con respecto al tiempo, es igual a la función multiplicada por una constante negativa de valor ω^2. Las funciones *seno* y *coseno* se repiten de esta manera. La sustitución de las relaciones:

$$Y = \text{Sen}\ \omega t$$
$$Y = \text{Cos}\ \omega t$$

en la ecuación diferencial de la oscilación libre, muestran que son soluciones de ésa ecuación. La solución más general se obtiene al multiplicar éstas soluciones por las constantes arbitrarias C1 y C2 que, se calculan para que se cumplan las condiciones de oscilación. Con éste procedimiento, la solución completa de la ecuación está dada por la suma de éstas soluciones:

$$Y = C1 \text{ Sen } \omega t + C2 \text{ Cos } \omega t$$

Para determinar las constantes C1 y C2 es necesario entender que la ecuación anterior describe todos los movimientos posibles que puede tener el sistema. Si ahora especificamos que el peso tiene una velocidad "Vo", cuando se dá el desplazamiento inicial "Yo", resultan dos condiciones que pueden usarse para determinar el valor de las constantes de integración.

Tomando t = 0, tenemos:

1ª. condición : $Y = Yo$

2ª. condición : $V = Vo$

Sustituyendo la primera condición:

$$Yo = C1(0) + C2(1) \quad \text{o bien} \quad C2 = Yo$$

Sustituyendo la segunda condición en la relación tiempo--velocidad:

$$V = dY/dt = \omega \, C1 \text{ Cos } \omega t - \omega \, C2 \text{ Sen } \omega t$$

$$Vo = \omega \, C1 \, (1) - \omega \, C2 \, (0) \quad \text{o bien} \quad C1 = Vo/\omega$$

Bajo éstas condiciones, la oscilación se describe con la ecuación:

$$\boxed{Y = \frac{Vo}{\omega} \text{ Sen } \omega t + Yo \text{ Cos } \omega t}$$

El periodo *está dado por:*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}} = 2\pi\sqrt{\frac{est}{g}}$$

Donde el alargamiento elástico es:

$$est = \frac{W}{k}$$

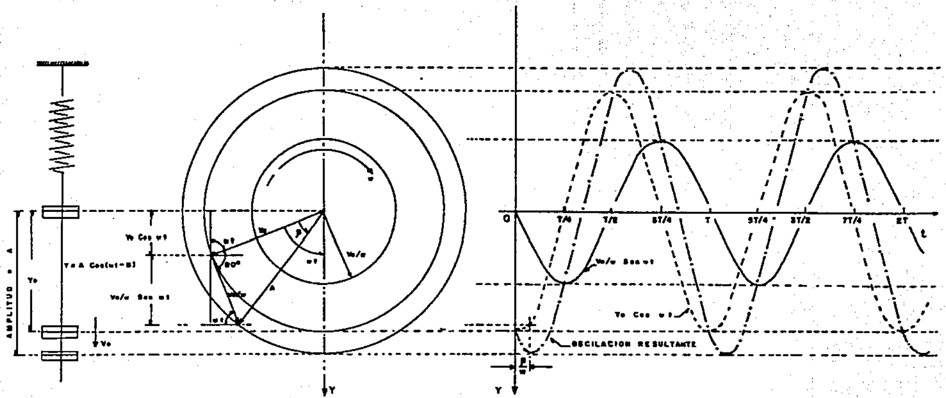
que es el alargamiento producido por el peso cuando cuelga libremente.

La *frecuencia* es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{est}}$$

Se observa que la ecuación de la oscilación, realmente muestra el efecto combinado de dos oscilaciones de la misma frecuencia (la del Seno y la del Coseno de ωt). Si los vectores de posición de éstas oscilaciones se grafican formando un ángulo de 90°, como se muestra, la suma de sus proyecciones sobre el Eje Y será:

$$Y = Yo \text{ Cos } \omega t + \frac{Vo}{\omega} \text{ Sen } \omega t = A \text{ Cos } (\omega t - \beta)$$



CONDICIONES INICIALES

REPRESENTACION GRAFICA

CURVAS DESPLAZAMIENTO - TIEMPO

La figura nos muestra que la suma de dos m.a.s. de la misma frecuencia, constituye otro m.a.s. de la misma frecuencia.

La *amplitud* de la oscilación es:

$$A = \sqrt{Yo^2 + \left(\frac{Vo}{\omega} \right)^2}$$

El *ángulo de fase* se determina:

$$tg\ \beta = \frac{Vo}{\omega Yo}$$

Indica que la oscilación resultante alcanza sus máximos valores de desplazamiento, velocidad y aceleración a los "β/ω" seg de la oscilación "Yo Cos ωt". La oscilación resultante se puede determinar al sumar los desplazamientos de cada oscilación ya sea en forma geométrica o directamente del vector de posición "A".

De éste análisis se puede sacar la siguiente conclusión: el *periodo* y la *frecuencia* de la *oscilación libre* de un cuerpo, son independientes de las condiciones iniciales del movimiento, sólo dependen del peso "W" y de la constante "k", o bien del alargamiento causado por ése peso.

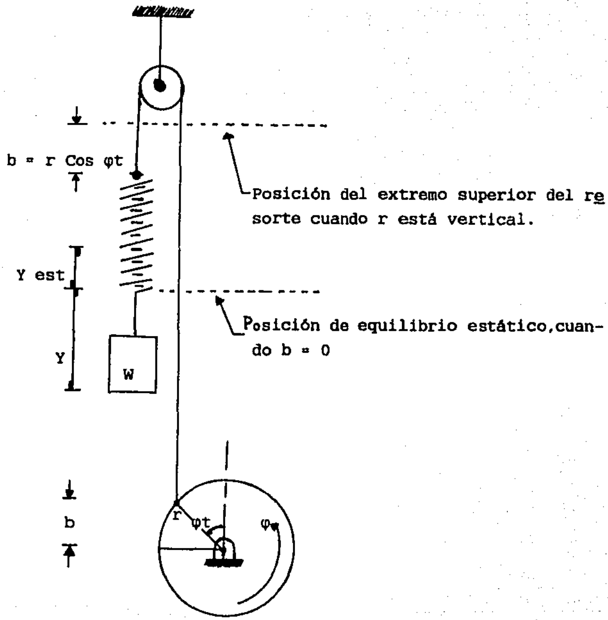
OSCILACIONES FORZADAS

Hasta ahora, se ha considerado oscilaciones libres donde la amplitud sólo depende de las condiciones iniciales del movimiento. La oscilación libre se mantiene por la acción de una fuerza elástica, no balanceada y variable, creada por el movimiento mismo. La oscilación existe sólo después de que ha sido empezada por una fuerza externa perturbadora, la cual luego de desplazar el cuerpo de su posición de equilibrio, deja de actuar sobre el cuerpo.

Sin embargo, las oscilaciones más importantes desde el punto de vista de las aplicaciones en Ingeniería, son las *oscilaciones forzadas* de un sistema. Estas oscilaciones ocurren cuando un sistema está sujeto a una fuerza periódica, es decir, si la fuerza perturbadora no se retira, sino que continúa actuando sobre el cuerpo a intervalos periódicos, se crean "oscilaciones forzadas" en las cuales la frecuencia y la amplitud de la oscilación son alteradas por la frecuencia y la magnitud de la fuerza perturbadora.

En la mayoría de los casos prácticos, la fuerza perturbadora varía con el tiempo acorde con una función *seno o coseno.*

Consideremos ahora, un ejemplo de oscilación forzada que se ilustra en la figura siguiente:



El extremo superior del resorte está conectado por medio de una cuerda rígida con un disco de radio r, que gira con una velocidad angular φ. Si suponemos que la cuerda es bastante larga comparada con el radio r, en la parte superior del resorte se crea un movimiento armónico simple:

$$b = r \cos \varphi t$$

El tiempo t se mide desde que r está verticalmente hacia arriba y b a partir del centro del disco. La extensión del resorte es; Y - b, pues el movimiento hacia abajo de la parte alta del resorte, tiende a superar el alargamiento hacia abajo "Y" causado por la oscilación del peso. Por lo tanto en cualquier momento (instante), la fuerza no balanceada en el resorte es: $k\,(Y-b)$.

Al considerar positivos los desplazamientos, las velocidades y aceleraciones hacia abajo, la ecuación del movimiento es:

$$\Sigma Y = \frac{W}{g}\,a$$

$$-k\,(Y-b) = \frac{W}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Si multiplicamos por g/W y reemplazamos $b = r \cos \varphi t$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{kg}{W}\,Y + \frac{krg}{W}\cos \varphi t$$

Se notará que la fuerza perturbadora se transmite al peso a través del resorte, en lugar de ser aplicada directamente a él.

Denotando el coeficiente de "$\cos \varphi t$" por "h", tenemos:

$$h = \frac{krg}{W}$$

También como sucedió en el caso de la oscilación libre, la expresión kg/W, se puede reeplazar por ω^2. Notemos que ω, es la frecuencia circular natural de una oscilación libre, mientras que en la ecuación resultante del movimiento anterior, φ, es la frecuencia circular de la fuerza perturbadora.

Así podemos escribir:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\omega^2 Y + h \operatorname{Cos} \varphi t$$

La oscilación forzada representada por la anterior ecuación, puede visualizarse como una combinación de una oscilación libre yá analizada, más un nuevo movimiento causado por la fuerza perturbadora. De ésta manera si Y1 representa el desplazamiento debido a la oscilación libre (que es independiente de la fuerza perturbadora) y Y2 el desplazamiento adicional causado por la fuerza perturbadora, el desplazamiento real es:

$$Y = Y1 + Y2$$

Con ésta suposición, la ecuación de la oscilación forzada puede considerarse compuesta de las siguientes partes:

$$\frac{d^2Y1}{dt^2} = -\omega^2 Y1$$

$$\frac{d^2Y2}{dt^2} = -\omega^2 Y2 + h \operatorname{Cos} \varphi t$$

Si sumamos éstas dos ecuaciones, volvemos a la ecuación original. La ecuación penúltima es similar a la ecuación del movimiento de la oscilación libre ya analizada. Por lo tanto, el valor de "Y1" está dado por:

$$Y1 = C1 \text{ Sen } \omega t + C2 \text{ Cos } \omega t$$

Parece razonable que una solución tentativa de la ecuación d^2Y2/dt^2 sea:

$$Y2 = A \text{ Cos } \varphi t$$

Donde la constante "A" que representa la amplitud de la oscilación forzada, se selecciona para satisfacer la ecuación.

Sustituyendo se obtiene:

$$- A \varphi^2 \text{ Cos } \varphi t = - A \omega^2 \text{ Cos } \varphi t + h \text{ Cos } \varphi t$$

de donde el valor de "A" es:

$$- A \varphi^2 + A \omega^2 = h$$

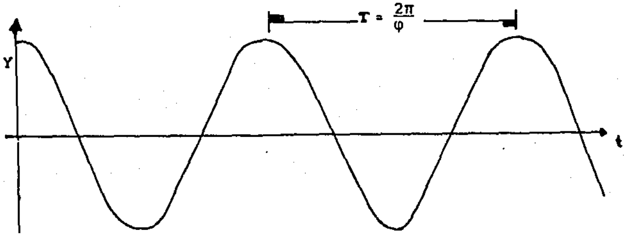
$$\therefore \quad A = \frac{h}{\omega^2 - \varphi^2}$$

Por consiguiente, una solución de la ecuación es:

$$Y2 = A \text{ Cos } \varphi t = \frac{h}{\omega^2 - \varphi^2} \text{ Cos } \varphi t$$

La solución completa de la ecuación que representa la oscilación forzada, es la suma de las soluciones de sus partes:

$$\boxed{Y = Y1 + Y2 = C1 \text{ Sen } \omega t + C2 \text{ Cos } \omega t + \frac{h}{\omega^2 - \varphi^2} \text{ Cos } \varphi t}$$



FACTOR DE AMPLIFICACION

Si se desprecian las oscilaciones libres que pronto se acaban (también se le llama "oscilación transitoria", ya que en realidad es amortiguada por las fuerzas de rozamiento), el máximo desplazamiento (amplitud), de la oscilación forzada, estará dado por la ecuación:

$$A = \frac{h}{\omega^2 - \varphi^2}$$

Si h; es reemplazada por $h = krg/\varphi$, la amplitud de la oscilación forzada es:

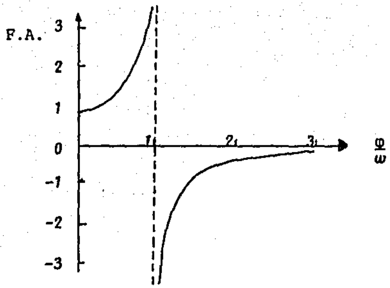
$$A = r \left[\frac{h}{1 - \frac{\varphi^2}{\omega^2}}\right]$$

*En la figura analizada, r representa el desplazamiento máximo de W, cuan*do el disco gira muy despacio. Concluimos que el efecto dinámico de la fuerza perturbadora sobre el desplazamiento máximo, está dado por:

$$\frac{1}{1 - (\frac{\varphi}{\omega})^2}$$

ésto se conoce como *factor de amplificación* (F.A.)

El factor de amplificación há sido graficado en la siguiente figura en función de la razón de frecuencias φ/ω. Así cuando la fuerza perturbadora actúa lentamente en comparación con la frecuencia natural, cuando $(\varphi/\omega) < (1/2)$, el F.A. es escasamente mayor que la unidad. Por lo tanto la deflexión dinámica es escasamente mayor que la producida si la fuerza perturbadora se aplicara estáticamente.



A medida que la frecuencia aplicada tiende a la frecuencia natural, es decir, conforme φ se vá haciendo igual a ω, el F.A. aumenta rápidamente volviendose infinito cuando φ = ω. Físicamente ésto representa (significa), que cuando (φ/ω)= 1, la frecuencia de la fuerza perturbadora coincide exáctamente con la frecuencia natural; es decir, la fuerza perturbadora tiende a empujar al cuerpo en el momento preciso y en la dirección correcta, de manera que la amplitud crece sin límite. La condición existente cuando ambas frecuencias coinciden, se conoce como: *RESONANCIA*.

Conforme φ aumenta por encima del punto de resonancia (φ>ω), el F.A. se vuelve negativo. Físicamente, ésto significa que la fuerza perturbadora está defasada 180° con el movimiento Es decir, es de sentido opuesto al desplazamiento. Se observa que cuando la frecuencia que se imprime se encuentra muy por encima de la frecuencia natural (φ>>>ω), el F.A. tiende a cero y el cuerpo tiende a quedarse quieto. Esto se debe a que la fuerza perturbadora se mueve hacia arriba y hacia abajo tan rápidamente que el cuerpo no la puede seguir debido a su inercia.

TEORIA CLASICA

Los elementos integrantes de los sistemas oscilatorios son:

a) los elementos inertes o masas

b) los elementos restitutivos (rigidéz)

c) los elementos amortiguadores

COMPORTAMIENTO DE LAS MASAS:

En las masas actuarán fuerzas efectivas y de inercia exclusivamente. Como problema de Dinámica clásica, se aceptarán las leyes de Newton:

a) Una partícula de material, no es capáz por sí sola, de alterar el estado de movimiento o reposo en que se encuentre.

b) La derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de una partícula, es igual a la fuerza que la produce:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} = m\,\vec{a} \quad \because \quad m \text{ es cte.}$$

c) A toda acción corresponde una reacción y en conjunto integran un sistema de fuerzas en equilibrio, es decir

$$\vec{F} + (-m\vec{a}) = 0$$

Ecuación que se interpreta como que; " la fuerza efectiva de una partícula y la fuerza de inercia de la misma, están en equilibrio", que no es mas que la segunda Ley de Newton que se llama *Principio de D'Alemlert.*

COMPORTAMIENTO DE LOS ELEMENTOS RESTITUTIVOS:

Estos elementos sólo transforman la energía de deformación en energía cinética y la fuerza que se opera en uno de ésos elementos es función lineal del desalojamiento realtivo de sus extremos, o sea:

$$FR = - K\,y$$

donde: K : constante, puede ser llamada *rigidéz.*

COMPORTAMIENTO DE LOS ELEMENTOS AMORTIGUADORES;

Estos elementos son disipadores de energía del sistema y provocan en la partícula una fuerza directamente proporcional a la velocidad relativa de la misma y con sentido contrario a ella. Si llamamos C, a la cte, de amortiguamiento:

$$FD = - C\,\dot{y}$$

ECUACION GENERAL DEL EQUILIBRIO DINAMICO

También se conoce como "ecuación básica del equilibrio dinámico". Fué planteada en el siglo XVIII por el Físico Francés D'Alembert, quien considera que en un cuerpo en movimiento actúan en un instante dado 4 fuerzas que están en equilibrio, la Fuerza de Inercia, la de Amortiguamiento, la de Restitución Elástica y la Fuerza Exterior.

$$I + R + k = F$$

donde: I : fuerza de inercia debida a la masa del cuerpo.

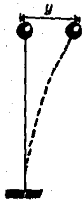
R : fuerza de amortiguamiento, se debe a la fricción interna que se opone al movimiento.

k : fuerza de restitución elástica, por la tendencia del sistema a recuperar su posición inicial.

F : fuerza exterior que ocaciona el movimiento.

Todas éstas fuerzas son variables, funciones del tiempo, por lo que la ecuación del Equilibrio Dinámico es en general, una ecuación diferencial del tiempo (t).

$$I\,\ddot{y}(t) + R\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = F$$



NOMENCLATURA DE LEIBNITZ	N E W T O N
$y(t)$ = desplazamiento	$y(t)$
dy/dt = velocidad	$\dot{y}(t)$
d^2y/dt^2 = aceleración	$\ddot{y}(t)$

El estudio del equilibrio dinámico de los cuerpos se realiza por simplicidad de análisis, estudiando casos particulares de la ecuación de D'Alembert. Se estudiarán en seguida, algunos casos particulares del equilibrio dinámico.

III

OSCILACION LIBRE NO AMORTIGUADA

III . OSCILACION LIBRE NO AMORTIGUADA

En éste caso se supone que el amortiguamiento es cero; R = 0 (caso ideal) y que la fuerza exterior también es cero; F = 0.

El cuerpo inicia su movimiento por la aplicación de un impulso (fuerza de corta duración), que se retira inmediatamente para producir la libre oscilación.

En éstas circunstancias se tiene:

$$I + K = 0$$

Por la segunda ley de Newton:

$$I = \text{masa x aceleración}$$

$$I = m\,\ddot{y}(t)$$

Si el cuerpo es elástico-lineal:

$$K = k\,y(t) \quad \because \quad k : \text{rigidéz}$$

Sustituyendo:

$$m\,\ddot{y}(t) + k\,y(t) = 0$$

Dividiendo entre m:

$$\ddot{y}(t) + \frac{k\,y(t)}{m} = 0$$

$$\ddot{y}(t) + \omega^2\,y(t) = 0 \quad \because \quad \omega^2 = k/m$$

La solución de ésta ecuación es:

$$y(t) = y_o \text{ Cos } \omega t + \frac{\dot{y}_o}{\omega} \text{ Sen } \omega t$$

donde: y_o : desplazamiento inicial del móvil al recibir el impulso.

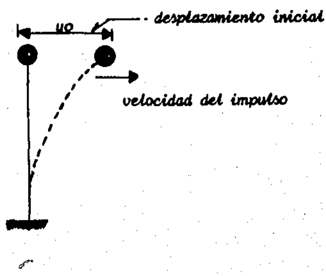
$\dot{y}_o$: velocidad inicial del impulso que pone en movimiento al móvil.

Otra forma de escribir ésta solución es:

$$y(t) = A \text{ Cos } (\omega t - \zeta)$$

donde: A = amplitud $= \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{\dot{y}_o}{\omega}\right)^2}$

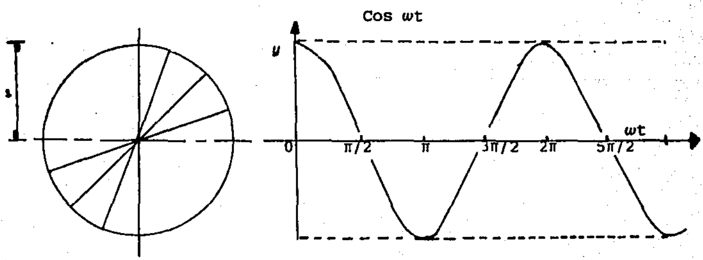
ζ = ángulo de fase = ang tan $\frac{\dot{y}_o}{\omega y_o}$



Dando valores a cada una de las soluciones:

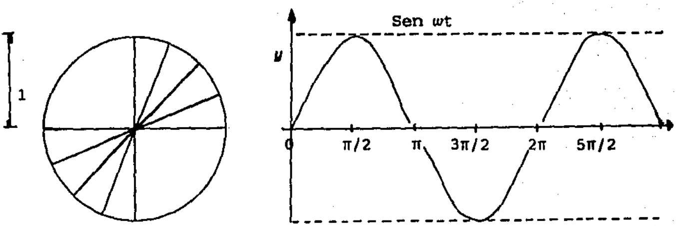
y = Cos ωt

ωt	y = Cos ωt
0	1
$\pi/2$	0
π	-1
$3/2\ \pi$	0
2π	1

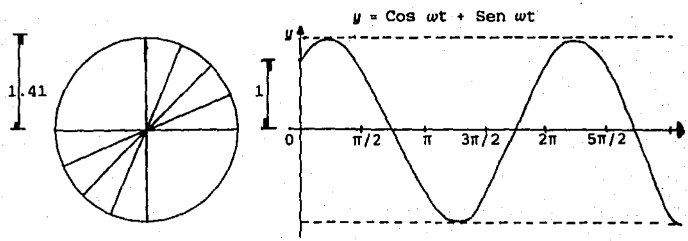


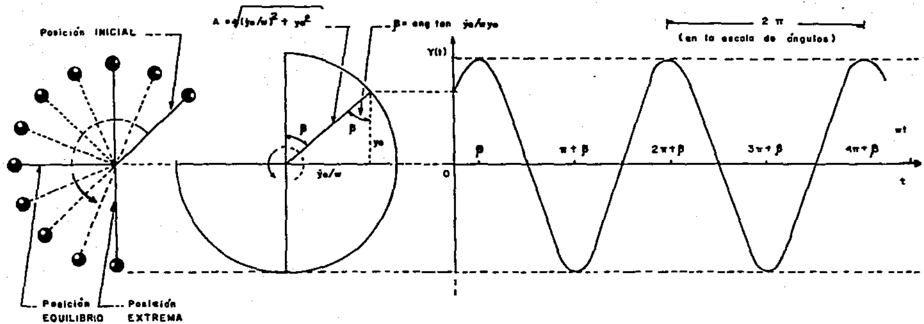
y = Sen ωt

ωt	y = Sen ωt
0	0
$\pi/2$	1
π	0
$3\pi/2$	-1
2π	0



Uniendo gráficamente las dos funciones:





GRAFICA DE DESPLAZAMIENTO - TIEMPO DEL MOVIL REAL
(CURVA ARMONICA)

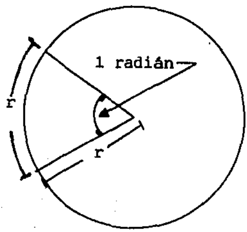
MOVIMIENTO REAL EN OSCILACION LIBRE NO AMORTIGUADA
EN MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE
(M.A.S.)

MOVIL FICTICIO EN MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME
(M.C.U.)

Al tiempo que tarda el móvil en dar una oscilación completa es a lo que conocemos como *periodo.*

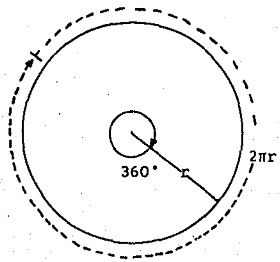
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ω : es la frecuencia angular y es el número de radianes por segundo que recorre el móvil ficticio a lo largo del círculo.



RADIAN : es un ángulo en que el radio es igual al arco.

ángulo = $\frac{\text{arco}}{\text{radio}}$ = 1 (adimensional); por comodidad, "RADIAN"



Podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\frac{360°}{2\pi r} = \frac{1\ \text{RADIAN}}{r}$$

$$1\ \text{RADIAN} = \frac{360°}{2\pi}$$

$$1\ \text{RADIAN} = 57.3°$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

las unidades de T son segundos.

las unidades de ω son 1/seg; por comodidad: RADIAN/seg.

Frecuencia natural:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

las unidades de "n", son ciclos/seg. = HERTZ = Hz

"n", también es el número de vueltas completas en torno al círculo que dá el móvil ficticio.

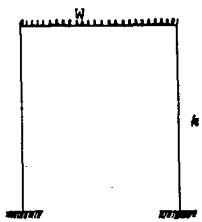
Ahora de la relación:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega = \frac{k}{m}$$

$$T = 2\pi \frac{m}{k}$$

Imaginemos un marco de un sólo grado de libertad, rigidéz k y peso W.

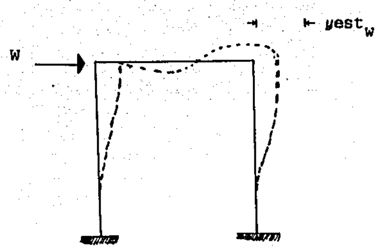


la masa será: $m = W/g$

de donde: g : aceleración de la gravedad = 9.81 m/seg²

Consideremos ahora, que al marco se le aplica una fuerza horizontal estática igual a su peso W.

El desplazamiento $yest_W$, se puede calcular aplicando la definición de rigidéz.



RIGIDEZ = FUERZA/DESPLAZAMIENTO

DESPLAZAMIENTO = FUERZA/RIGIDEZ

$$yest_w = W \ / \ k$$

Por otro lado:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \because \quad m = W/g$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{W}{gk}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{W}{k}} \quad \because \quad W/k = yest_w$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{yest_w}$$

Trabajando en centímetros:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{981}} \doteq 0.2$$

$$T = 0.2 \quad yest_w$$

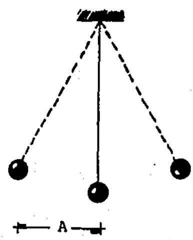
Es decir, el periodo de una estructura de un grado de libertad es igual a 0.2 veces la raíz del desplazamiento en "centímetros", que le ocacionaría una fuerza lateral igual a su peso.

Observemos que T y ω dependen únicamente de las características propias de la estructura, la rigidez k y la masa m. Por tal motivo se les llama: *PERIODO PROPIO,FRECUENCIA PROPIA*, o *PERIODO NATURAL, FRECUENCIA NATURAL.*

A M P L I T U D :

$$A = \sqrt{yo^2 + (\dot{y}o/\omega)^2}$$

La amplitud A, de una oscilación libre no amortiguada, depende de la intensidad de la fuerza que provoca dicha oscilación.



El tiempo que tarda el péndulo en recorrer la amplitud, no depende de la intensidad de la fuerza, sea cual fuere ésta, el tiempo siempre es *constante*.

Recordando la ecuación del desplazamiento:

$$y(t) = A \text{ Cos } (\omega t-\zeta)$$

Al derivar respecto al tiempo, nos dá la velocidad:

$$\dot{y}(t) = - \omega A \text{ Sen } (\omega t-\zeta)$$

Al derivar otra vez respecto al tiempo, obtenemos la aceleración:

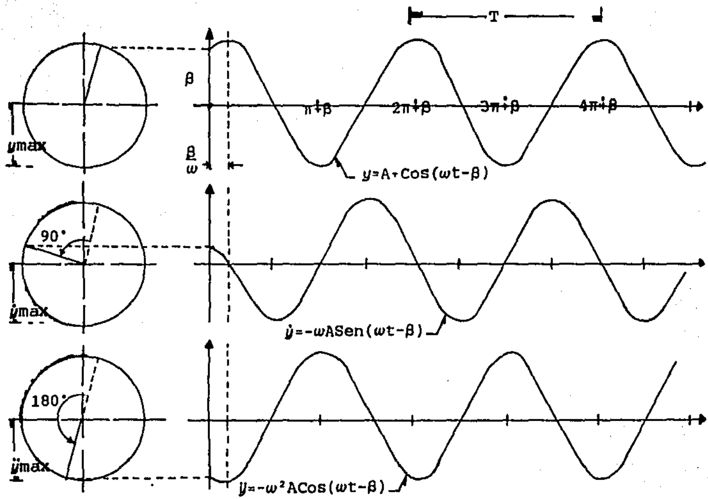
$$\ddot{y}(t) = - \omega^2 A \text{ Cos } (\omega t-\zeta)$$

Tomando en cuenta que las funciones SENO y COSENO, solo varían entre -1 y 1, se deduce que:

$$y\text{max} = A$$
$$\dot{y}\text{max} = \omega \, y\text{max}$$
$$\ddot{y}\text{max} = \omega^2 \, y\text{max}$$

Esto tomando en cuenta que:

$$y\text{max} = A(1) = A$$
$$\dot{y}\text{max} = - \omega A (-1) = \omega A$$
$$\ddot{y}\text{max} = - \omega^2 A (-1) = \omega^2 A$$


T
β
π+β
2π+β
3π+β
4π+β
ymax
β/ω
y=A·Cos(ωt-β)
90°
ẏmax
ẏ=-ωASen(ωt-β)
180°
ÿmax
ÿ=-ω²ACos(ωt-β)

Ⅱ. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo Ⅱ.1

Para el marco del Apéndice (Capítulo Ⅵ de ésta Tésis). Calcule la rigidez, la frecuencia y el período propio, dibuje la gráfica desplazamiento-tiempo. Suponiendo que el amortiguamiento es nulo y que el marco está sujeto a un desplazamiento inicial de 2 cm y a una velocidad inicial de 20 cm/seg. Indique la amplitud máxima de la oscilación.

Solución:

- Obtención de la RIGIDEZ del marco.

$$k = \frac{F}{\Delta}$$

$$k = \frac{10.00\ \text{Ton}}{2.15\ \text{cm}}$$

$$k = 4.6445\ \text{Ton/cm}$$

- Obtención del PERIODO:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

$$m = W/g = 30/981 = 0.03058\ \text{Ton.seg}^2/\text{cm}$$

$$T = 2\pi\sqrt{0.03058/4.6445}$$

$$T = 0.5098\ \text{seg.}$$

- Obtención de la FRECUENCIA ANGULAR:

$$\omega = 2\pi/T$$

$$\omega = 2\pi/0.5098$$

$$\omega = 12.3238 \text{ rad./seg.}$$

- Cálculo de la AMPLITUD máxima:

DATOS:

$y_o = 2$ cm
$\dot{y}_o = 20$ cm/seg.

$$A = \sqrt{y_o^2 + (\dot{y}_o/\omega)^2}$$

$$A = \sqrt{2^2 + (20/12.3238)^2}$$

$$A = 2.5756 \text{ cm.}$$

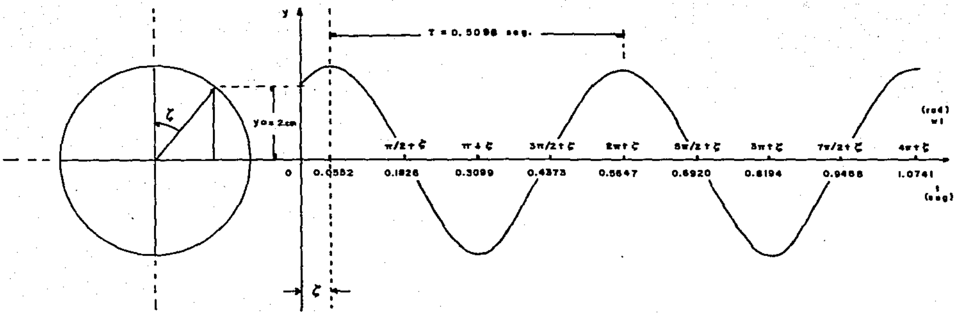
$$\zeta = \text{ang tan } (\dot{y}_o/\omega)/y_o$$

$$\zeta = \text{ang tan } (20/12.3238)/2$$

$$\zeta = \text{ang tan } 0.81144$$

$$\zeta = 39.0579^\circ$$

$$\zeta = 0.6817 \text{ rad.}$$



GRAFICA DESPLAZAMIENTO-TIEMPO

Ejemplo II.2

Para el marco del ejercicio anterior, grafique la variación de la velocidad y de la aceleración del cabezal del marco moviendose en oscilación libre con amortiguamiento nulo y como resultado del impulso inicial yá señalado.

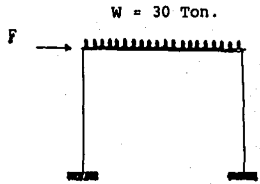
D A T O S :

$y_o = 2$ cm

$\dot{y}_o = 20$ cm/seg.

$\omega = 12.3238$ rad./seg.

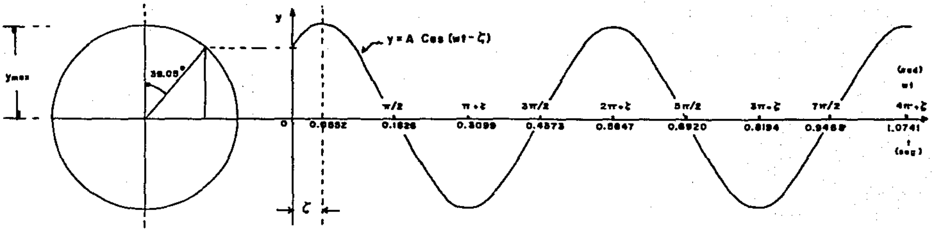
$A = 2.5756$ cm



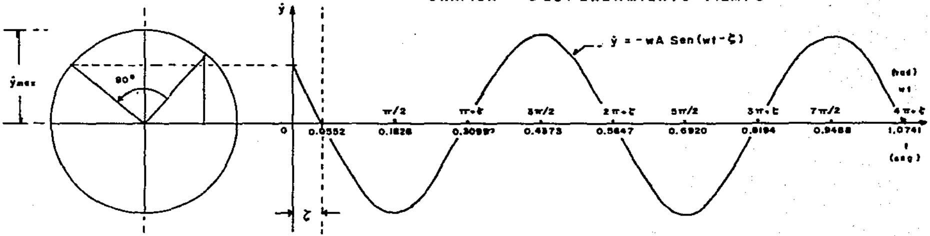
Solución:

$$\begin{aligned}
y_{max} &= A \\
\dot{y}_{max} &= \omega\, y_{max} = \omega A \\
\ddot{y}_{max} &= \omega^2\, y_{max} = \omega^2 A
\end{aligned}$$

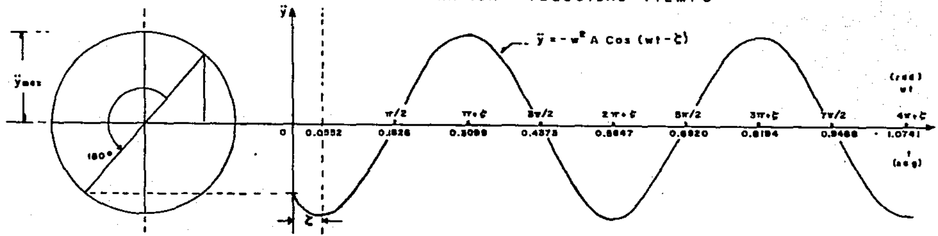
$$\begin{aligned}
y_{max} &= 2.5756 \text{ cm.} \\
\dot{y}_{max} &= (12.3238)(2.5756) = 31.7412 \text{ cm/seg.} \\
\ddot{y}_{max} &= (12.3238)^2(2.5756) = 391.1719 \text{ cm/seg}^2
\end{aligned}$$



GRAFICA DESPLAZAMIENTO-TIEMPO



GRAFICA VELOCIDAD-TIEMPO



GRAFICA ACELERACION-TIEMPO

IV

OSCILACION FORZADA NO AMORTIGUADA

IV . OSCILACION FORZADA NO AMORTIGUADA

En éste caso se considera la oscilación del móvil bajo una fuerza exterior y bajo amortiguamiento cero. Es decir:

$$R = 0 \quad ; \quad F \neq 0$$

Por lo tanto la ecuación del equilibrio dinámico es:

$$I + K = F$$

$$m\,\ddot{y}(t) + k\,y(t) = F(t)$$

Para resolver esta ecuación, es necesario conocer la función F(t). Se consideran algunos subcasos:

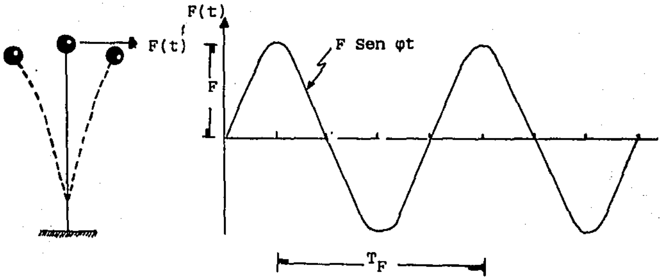
IV.1 OSCILACION FORZADA NO AMORTIGUADA: LA FUERZA EXTERIOR ES ARMONICA.

$$F(t) = F \operatorname{Sen} \varphi t$$

$\because$ F : valor máximo que puede adquirir la fuerza

φ : frecuencia de variación de la fuerza (rad/seg

Esto es, la fuerza exterior varía armónicamente con el tiempo.



T_F : PERIODO de la FUERZA

F : PERIODO de la ESTRUCTURA.

$$T = 2\pi/\varphi \qquad ; \qquad T = 2\pi/\omega$$

La ecuación del equilibrio dinámico queda:

$$m\, y(t) + k\, y(t) = F \text{ Sen } \varphi t$$

Dividiendo entre "m", y recordando que $k/m = \omega^2$

$$y(t) + \omega^2\, y(t) = \frac{F}{m} \text{ Sen } \varphi t$$

La solución de esta ecuación es:

$$y(t) = \underbrace{A \text{ Cos } (\omega t - \zeta)}_{①} + \underbrace{\frac{F}{m}\,\frac{1}{\omega^2 - \varphi^2} \text{ Sen } \varphi t}_{②}$$

①: representa el efecto de la oscilación propia.

②: representa el efecto de la fuerza exterior.

En casos de interés práctico, 2 es mucho mayor que 1, por lo que en forma aproximada se puede escribir:

$$y(t) = \frac{F}{m}\frac{1}{\omega^2-\varphi^2}\operatorname{Sen}\varphi t$$

donde: $\omega^2 = k/m$; $m = k/\omega^2$

$$y(t) = \frac{F}{k}\frac{\omega^2}{\omega^2-\varphi^2}\operatorname{Sen}\varphi t$$

donde: $\frac{\omega^2}{\omega^2-\varphi^2} = \frac{1}{1-(\frac{\varphi}{\omega})^2}$

donde: F/k : desplazamiento estático bajo la acción de la fuerza $F = yest_F$

$$y(t) = yest\ \frac{1}{1-(\varphi/\omega)^2}\operatorname{Sen}\varphi t$$

La función SENO varía entre -1 y 1:

$$ymax = yest_F\ \frac{1}{1-(\varphi/\omega)^2}$$

Sabemos que:

$$\frac{1}{1-(\varphi/\omega)^2} = \text{F.A. (FACTOR DE AMPLIFICACION)}$$

Por lo que:

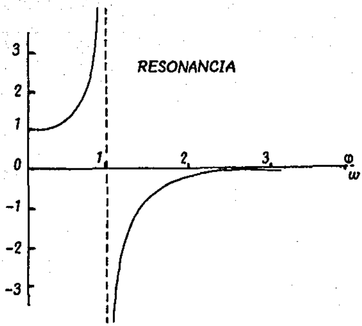
$$\boxed{y\text{max} = y\text{est}_P \times \text{F.A.}}$$

Es decir, el desplazamiento máximo producido por una fuerza dinámica de frecuencia φ, en un móvil de frecuencia propia ω, es igual al desplazamiento estático producido por el valor máximo de la fuerza, multiplicado por el factor de amplificación (F.A.) que vale:

$$\text{F.A.} = \frac{1}{1-(\varphi/\omega)^2}$$

Si le damos valores a la relación de frecuencias, se obtiene:

φ/ω	F.A.
0	1.00
1/2	1.33
$1/\sqrt{2}$	2.00
1	∞
$\sqrt{2}$	-1.00
3/2	0.80
2	-0.33



Cuando $\varphi/\omega = 1$, los desplazamientos tienden al infinito ∞, a este caso se le llama *RESONANCIA*. La resonancia se presenta cuando la frecuencia de la fuerza exterior es igual a la frecuencia propia del móvil, esto es, cuando $\varphi = \omega$.

IV.2 OSCILACION FORZADA NO AMORTIGUADA: LA FUERZA EXTERIOR ES CONSTANTE.

En este caso tendríamos la siguiente ecuación:

$$m\,\ddot{y}(t) + k\,y(t) = F$$

$\because$ F : constante.

Dividiendo entre la masa "m":

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 \, y(t) = \frac{F}{m}$$

La solución de ésta ecuación es:

$$y(t) = \underbrace{A \cos(\omega t - \zeta)}_{1} + \underbrace{\frac{F}{k}(1 - \cos \omega t)}_{2}$$

1 : efecto de la oscilación propia.

2 : efecto de la fuerza exterior.

En casos prácticos 2 es mucho mayor que 1 , por lo que:

$$y(t) = \frac{F}{k}(1 - \cos \omega t)$$

$$\because \quad F/k = yest_F$$

$$\therefore \quad y(t) = yest_F \,(1 - \cos \omega t)$$

La función COSENO varía entre 1 y -1. El valor máximo de " 1-Cos ωt ", es 2, ésto se tiene cuando: Cos ωt = - 1.

$$\boxed{ymax = 2 \; yest_F}$$

Es decir, el desplazamiento máximo debido a la fuerza dinámica constante, es dos veces el desplazamiento causado por la misma fuerza aplicada estáticamente.

Este principio tiene aplicación en el cálculo de cimentaciones para máquinaria.

IV. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo IV.1

Para el marco de los ejercicios anteriores. Calcule el desplazamiento máximo y grafique la variación del desplazamiento con el tiempo, si oscila sin amortiguamiento bajo la acción de u na carga dinámica lateral F.

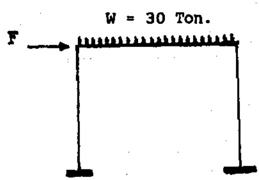
a) Si F varía armónicamente con el tiempo con un valor máximo de 10 Ton, período de 0.62 seg, y frecuencia de 10 rad./seg.

b) Si F permanece constante a lo largo del tiempo con valor de 10 Ton.

Solución:

D A T O S :

F = 10 Ton.
φ = 10 rad./seg.
T_F = 0.62 seg.
ω = 12.3238 rad./seg.
k = 4.6445 ton/cm



a) $y_{max} = y_{est_F}\, F.A.$

$F.A. = 1/[1-(\varphi/\omega)^2]$
$F.A. = 1/[1-(10/12.3238)^2]$
$F.A. = 2.9277$

$$y est_F = F/k$$

$$y est_F = 10/4.6445$$

$$y est_F = 2.1531 \text{ cm}$$

$$y max = y est_F \text{ F.A.}$$

$$y max = (2.1531)(2.9277)$$

$$y max = 6.3035 \text{ cm.}$$

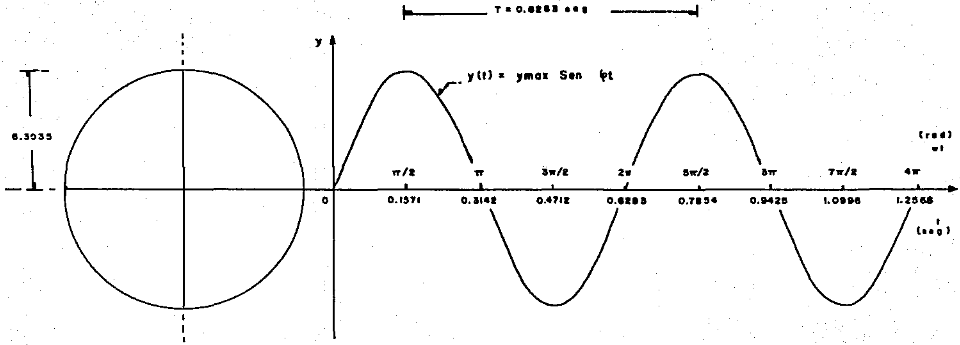
b) $y max = 2\ y est_F$

$$y max = 2(2.1531)$$

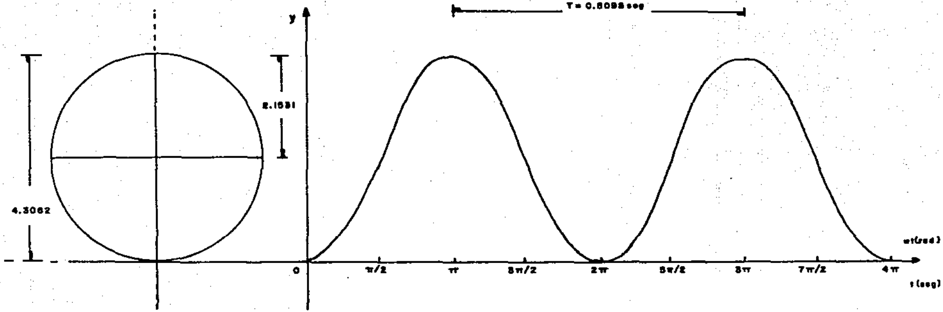
$$y max = 4.3062 \text{ cm.}$$

$$y(t) = y est_F\ (1 - \text{Cos}\ \omega t)$$

ωt	Cos ωt	y
0	1	0
$\pi/2 = 90°$	0	$y est_F$
$\pi = 180°$	-1	$2\ y est_F$
$3\pi/2 = 270°$	0	$y est_F$
$2\pi = 360°$	1	0



GRAFICA DESPLAZAMIENTO-TIEMPO



GRAFICA DESPLAZAMIENTO - TIEMPO

V

OSCILACION LIBRE AMORTIGUADA

V . OSCILACION LIBRE AMORTIGUADA

Se supuso que los sistemas considerados en los Capítulos III y IV, estaban libres de amortiguamiento. En realidad todas las oscilaciones son amortiguadas hasta cierto grado por fuerzas de rozamiento. Estas fuerzas pueden ser de *fricción o roza - miento interno* entre las moléculas de un cuerpo que parece elás - tico.

En éste caso, consideramos que la fuerza exterior que ocaciona el movimiento $F = 0$ y que la fuerza de amortiguamien to, la cual se se debe a la fricción interna que se opone al movimiento $R \neq 0$.

Se tiene entonces que:

$$I + R + K = 0$$

$$m\,\ddot{y}(t) + R(t) + k\,y(t) = 0$$

Para poder resolver ésta ecuación, se requiere conocer la función de amortiguamiento respecto al tiempo $R(t)$.

Si $R(t) = R$, si el amortiguamiento es constante, se dice que el *amortigiamiento* es *seco*. Si el amortiguamiento es en cada instante proporcional a la velocidad que lleva el móvil en ése instante, el *amortiguamiento* se llama *viscoso.*

$$R(t) = \beta\, \dot{y}(t)$$

$\because$ β : constante de proporcionalidad del amortiguamiento viscoso.

Las observaciones realizadas del comportamiento de estructuras reales y de modelos de laboratorio, indican que el amortiguamiento de las edificaciones es aproximadamente viscoso. Por lo que éste caso es el que más interesa en Ingeniería Sísmica. Para él, la ecuación del equilibrio dinámico queda:

$$m\, \ddot{y}(t) + \beta\, \dot{y}(t) + k\, y(t) = 0$$

Dividiendo entre "m":

$$\ddot{y}(t) + \frac{\beta}{m}\, \dot{y}(t) + \frac{k}{m}\, y(t) = 0$$

Recordando que $k/m = \omega^2$ y haciendo que $\beta/m = 2\varepsilon$, de donde "ε" se denomina *factor de amortiguamiento.*

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon\, \dot{y}(t) + \omega^2\, y(t) = 0$$

La solución de ésta ecuación es:

$$y(t) = A^* e^{-\varepsilon t} \operatorname{Cos} (\omega^* t - \zeta^*)$$

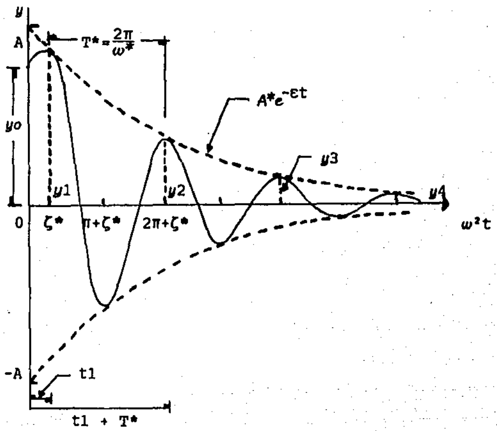
$\because$ A^* : amplitud amortiguada $\sqrt{y_o + \frac{\omega^2 + \varepsilon y_o}{y_o}}$

e : base de los log. naturales, 2.71828182

ω^* : frecuencia amortiguada, $\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$

ζ^* : fase amortiguada, *ang tg* $\frac{\omega^2}{y_o} + \frac{\varepsilon y_o}{y_o}$

El movimiento definido por la ecuación anterior, es oscilatorio con amplitud decreciente. La gráfica del desplazamiento respecto al tiempo toma la siguiente forma:



Aunque éste movimiento en realidad no se repite, el intervalo de tiempo $T^* = 2\pi/\omega^*$, correspondiente a dos puntos sucesivos donde la curva toca una de las curvas límites mostradas en la figura anterior, se llama comúnmente *periodo de la oscilación amortiguada.* El amortiguamiento hace que la amplitud A, se vaya reduciendo en cada ciclo sucesivo.

Consideremos la amplitud máxima entre dos ciclos sucesivos:

$$y1 = A^* \, e^{-\varepsilon t1}$$

$$y2 = A^* \, e^{-\varepsilon(t1+T^*)}$$

$$\frac{y1}{y2} = \frac{e^{-\varepsilon t1}}{e^{-\varepsilon(t1+T^*)}} = e^{\varepsilon T^*}$$

Tomando logarítmos naturales:

$$\text{Log}\,\frac{y1}{y2} = \varepsilon T^*$$

$$\underbrace{\text{Log}\, y1 - \text{Log}\, y2}_{\delta} = \varepsilon T^*$$

$$\delta = \varepsilon T^*$$

$$\boxed{\varepsilon = \delta/T^*}$$

$\because$ δ : decremento logarítmico.

Este resultado se aplica para determinar experimentalmente el amortiguamiento de edificios, se considera una propiedad favorable.

VIBRACION FORZADA: es una prueba para determinar el amortiguamiento con un excitador, el cual tiene un peso de peso de 2 toneladas.

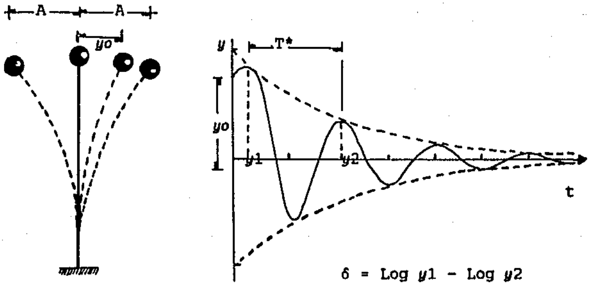
VIBRACION AMBIENTAL: utiliza aparatos muy sencilles que determinan la oscilación de los edificios provocada por el ruido ambiental.

PORCENTAJE DE AMORTIGUAMIENTO :

A la relación ε/ω expresada en *por ciento*, se le llama *porcentaje de amortiguamiento* y se designa por "υ".

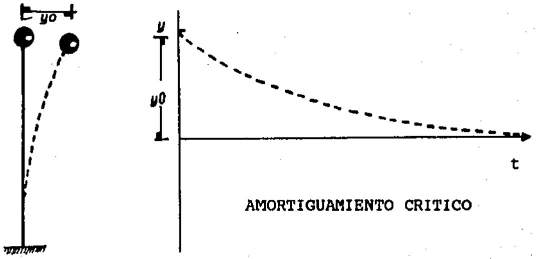
$$\upsilon = \frac{\varepsilon}{\omega}$$

Si $\upsilon = 1$, $\varepsilon = \omega$, se tiene un *amortiguamiento crítico*, en éste caso, al separar el móvil de su posición de equilibrio, éste regresa lentamente a ella sin oscilar.



$$\delta = \text{Log } y1 - \text{Log } y2$$
$$\varepsilon = \delta / T^*$$
$$\upsilon = \varepsilon / \omega$$

$\upsilon < 1$



AMORTIGUAMIENTO CRITICO

$\upsilon = 1$

Habíamos indicado que:

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$$

Tomando en cuenta que: $\upsilon = \varepsilon/\omega$

$$\omega^* = \omega \sqrt{1 - (\varepsilon/\omega)^2}$$

$$\omega^* = \omega \sqrt{1 - \upsilon^2}$$

Por observaciones en estructuras reales y en modelos de laboratorio, se sabe que en las estructuras comunes de edificación, los valores de "υ" son muy bajos, varían entre 2% y 7%. Un valor promedio representativo es $\upsilon = 5\ \%$.

Conservadoramente, si $\upsilon = 10\ \% = 0.10$

$$\begin{aligned} \omega^* &= \omega \sqrt{1 - (0.10)^2} \\ &= \omega \sqrt{0.99} \\ &= \omega\ (0.995) \end{aligned}$$

Es decir; que prácticamente:

$$\omega^* \approx \omega \quad ; \quad T^* \approx T$$

Por lo que puede escribirse:

$$y(t) = A^*\ e^{-\upsilon\omega t}\ \mathrm{Cos}\ (\omega t - \zeta^*)$$

$$\because \quad A = \sqrt{y_o + (\frac{\dot{y}_o}{\omega} + \upsilon y_o)^2}$$

$$\zeta^* = \text{ang tan}\ \frac{(\dot{y}_o/\omega) + \upsilon y_o}{y_o}$$

Derivando el desplazamiento respecto al tiempo:

$$\dot{y}(t) = A^{*}\, e^{-\upsilon\omega t} (-\upsilon\omega) - \text{Sen } (\omega t-\zeta^{*})\ \omega$$

$$\dot{y}(t) = - (-\upsilon\omega^{2})\, A^{*}\, e^{-\upsilon\omega t} \text{Sen } (\omega t-\zeta^{*})$$

Derivando nuevamente respecto al tiempo:

$$\ddot{y}(t) = - A^{*}\, (-\upsilon\omega^{2})\, e^{-\upsilon\omega t} (-\upsilon\omega) \text{ Cos } (\omega t-\zeta^{*})\ \omega$$

$$\ddot{y}(t) = (-\upsilon\omega^{4})\, A^{*}\, e^{-\upsilon\omega t} \text{Cos } (\omega t-\zeta^{*})$$

V. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo V.1

Para el marco de los ejercicios anteriores. Dibuje la gráfica desplazamiento-tiempo, considerando que tiene un amortiguamiento del 5 % y que oscila libremente, después de que se le aplica un impulso con un desplazamiento inicial de 2 cm y una velocidad inicial de 20 cm/seg.

Solución:

D A T O S :

$yo = 2$ cm

$yo = 20$ cm/seg

$\upsilon = 5\ \% = 0.05$

$\omega^* = \omega = 12.3238$ rad/seg

$T^* = T = 0.5098$ seg.

$$A^* = \sqrt{(yo)^2 + [(yo/\omega)+(\upsilon yo)]^2}$$

$$A^* = \sqrt{(2)^2 + [(20/12.3238)+(0.05)(2)]^2}$$

$$A^* = 2.6398 \text{ cm}$$

$$\zeta^* = \text{ang tan } [(yo/\omega)+(\upsilon yo)]/yo$$

$$\zeta^* = \text{ang tan } [(20/12.3238)+(0.05)(2)]/2$$

$$\zeta^* = \text{ang tan } 0.8614$$

$$\zeta^* = 40.7429^\circ$$

$$\zeta^* = 0.7111 \text{ rad.}$$

$$y_{max} = A^* \, e^{-\upsilon\omega t} \, Cos\ (\omega t-\zeta^*)$$

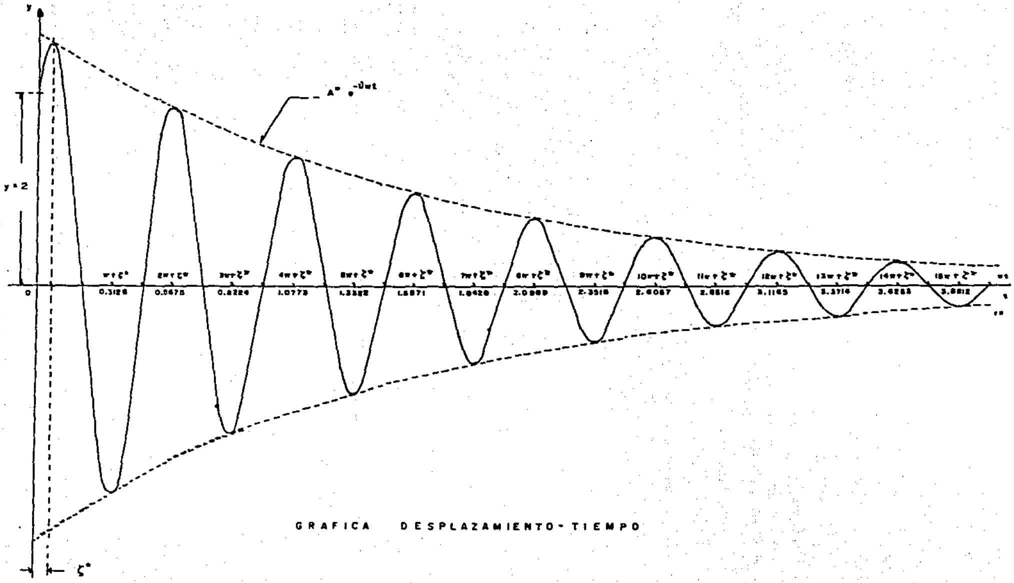
Cuando $Cos\ (\omega t-\zeta^*) = 1$; $\omega t = \zeta^*$

$$y_{max} = A^* \, e^{-\upsilon\omega t}$$

$$y_{max} = (2.6398)(2.718281)^{-(0.05)(0.7111)}$$

$y_{max} = 2.5476$ cm.

ωt (rad)	t(seg)	$A^* \, e^{-\upsilon\omega t}$	$Cos(\omega t-\zeta^*)$	y (cm)
$\zeta^* = 0.7111$	0.0577	2.5476	1	2.5476
$\pi/2+\zeta^* = 2.2819$	0.1851	2.3552	0	0
$\pi+\zeta^* = 3.8527$	0.3126	2.1773	-1	-2.1773
$3\pi/2+\zeta^* = 5.4235$	0.4400	2.0128	0	0
$2\pi+\zeta^* = 6.9943$	0.5675	1.8608	1	1.8608
$5\pi/2+\zeta^* = 8.5651$	0.6949	1.7202	0	0
$3\pi+\zeta^* = 10.1359$	0.8224	1.5903	-1	-1.5903
$7\pi/2+\zeta^* = 11.7067$	0.9498	1.4702	0	0
$4\pi+\zeta^* = 13.2775$	1.0773	1.3591	1	1.3591
$9\pi/2+\zeta^* = 14.8483$	1.2047	1.2564	0	0
$5\pi+\zeta^* = 16.4191$	1.3322	1.1615	-1	-1.1615
$11\pi/2+\zeta^* = 17.9899$	1.4596	1.0738	0	0
$6\pi+\zeta^* = 19.5607$	1.5871	0.9927	1	0.9927
$13\pi/2+\zeta^* = 21.1314$	1.7145	0.9177	0	0
$7\pi+\zeta^* = 22.7022$	1.8420	0.8484	-1	-0.8484
$15\pi/2+\zeta^* = 24.2730$	1.9694	0.7843	0	0
$8\pi+\zeta^* = 25.8438$	2.0969	0.7251	1	0.7251
$17\pi/2+\zeta^* = 27.4146$	2.2243	0.6703	0	0
$9\pi+\zeta^* = 28.9854$	2.3518	0.6197	-1	-0.6197
$19\pi/2+\zeta^* = 30.5562$	2.4792	0.5729	0	0
$10\pi+\zeta^* = 32.1270$	2.6067	0.5296	1	0.5296
$21\pi/2+\zeta^* = 33.6978$	2.7341	0.4896	0	0
$11\pi+\zeta^* = 35.2686$	2.8616	0.4526	-1	-0.4526
$23\pi/2+\zeta^* = 36.8398$	2.9890	0.4184	0	0
$12\pi+\zeta^* = 38.4102$	3.1165	0.3868	1	0.3868
$25\pi/2+\zeta^* = 39.9810$	3.2439	0.3576	0	0
$13\pi+\zeta^* = 41.5518$	3.3714	0.3306	-1	-0.3306
$27\pi/2+\zeta^* = 43.1226$	3.4988	0.3056	0	0
$14\pi+\zeta^* = 44.6934$	3.6263	0.2825	1	0.2825
$29\pi/2+\zeta^* = 46.2642$	3.7537	0.2612	0	0
$15\pi+\zeta^* = 47.8350$	3.8812	0.2415	-1	-0.2415
$31\pi/2+\zeta^* = 49.4058$	4.0086	0.2232	0	0



GRAFICA DESPLAZAMIENTO - TIEMPO

VI

OSCILACION FORZADA AMORTIGUADA

VI . OSCILACION FORZADA AMORTIGUADA

Si el sistema considerado en el Capítulo anterior está sujeto a una fuerza periódica F(t). La ecuación del equilibrio dinámico queda en éste caso:

$$m\,\ddot{y}(t) + R\,(t) + k\,y(t) = F(t)$$

Suponiendo un amortiguamiento viscoso:

$$m\,\ddot{y}(t) + \beta\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = F(t)$$

Para resolver ésta ecuación necesitamos conocer la fun - ción F(t). Consideraremos los casos siguientes:

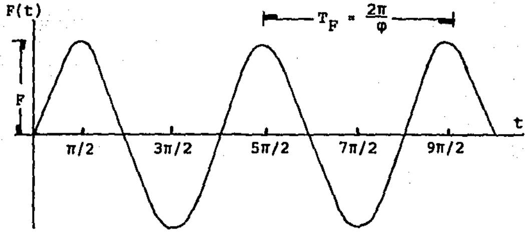
VI.1 OSCILACION FORZADA AMORTIGUADA, LA FUERZA EXTERIOR ES UNA FUNCION ARMONICA DEL TIEMPO.

Se tiene entonces que:

$$F(t) = F\ \text{Sen}\ \varphi t$$

$\because$ F : valor máximo que toma la fuerza.

φ : frecuencia de la fuerza.



La ecuación del equilibrio dinámico para el amortigua - miento viscoso queda:

$$m\,\ddot{y}(t) + \beta\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = F \text{ Sen } \varphi t$$

Dividiendo entre "m" y considerando que: $k/m = \omega^2$; $\beta/m = 2\varepsilon = 2\upsilon\omega$, se tiene:

$$\ddot{y}(t) + 2\,\upsilon\omega\,\dot{y}(t) + \omega^2\,y(t) = \frac{F}{m} \text{ Sen } \varphi t$$

La solución de ésta ecuación se puede escribir:

$$y(t) = \underbrace{A^* e^{-\upsilon\omega t} \text{ Cos } (\omega t - \zeta^*)}_{1} + \underbrace{\frac{F}{k} (F.A.)^* \text{ Sen } (\varphi t - \zeta)}_{2}$$

∵ ① : representa el efecto de la oscilación propia.

② : representa el efecto de la fuerza.

(F.A.)* : factor de amplificación dinámica amortiguado que vale:

$$(F.A.)^* = \sqrt{[1-(\varphi/\omega)^2]^2 + A\,\upsilon^2\,(\varphi/\omega)^2}$$

$$\xi \; : \; \text{fase} = \textit{ang tan}\ \frac{2\,\upsilon(\varphi/\omega)}{1-(\varphi/\omega)^2}$$

En los casos de interés práctico ② es mucho mayor que ①. Por lo que aproximadamente:

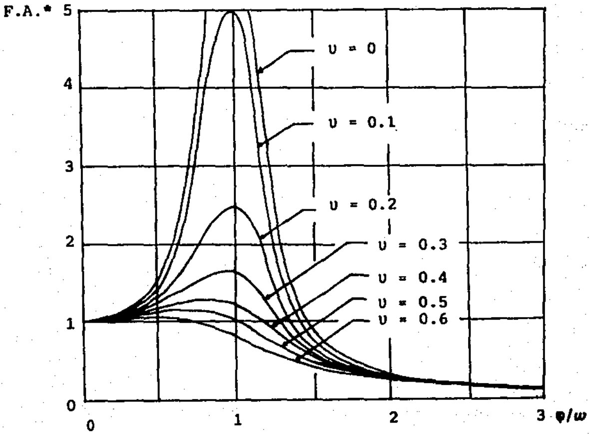
$$y(t) = \frac{F}{k}\,(F.A.)^*\ \text{Sen}\ (\varphi t-\xi)$$

∵ $F/k = yest_F$ *(desplazamiento estático debido a la fuerza de valor máximo F.)*

Para una mejor interpretación de los conceptos anteriores. Tabulemos y grafiquemos el factor de amplificación en función de la razón de frecuencias para distintos valores del porcentaje de amortiguamiento:

υ	φ / ω				
	0	0.5	1.0	1.5	2
	(FA)*	(FA)*	(FA)*	(FA)*	(FA)*
0	1	1.33	∞	0.800	0.333
0.1	1	1.32	5	0.777	0.330
0.2	1	1.28	2.50	0.721	0.322
0.3	1	1.24	1.67	0.649	0.309
0.4	1	1.17	1.25	0.577	0.294
0.5	1	1.10	1	0.512	0.277
0.6	1	1.04	0.83	0.456	0.270

$$F.A.^{*} = \frac{1}{\sqrt{[1-(\varphi/\omega)^2]^2+4\upsilon^2(\varphi/\omega)^2}}$$



Observamos que la amplitud de la oscilación forzada puede mantenerse pequeña escogiendo una constante de amortigua = miento viscoso β, grande, o manteniendo la frecuencia natural y la frecuencia forzada bastante separadas.

El valor máximo de F.A.* no ocurre para $\varphi/\omega = 1$ .Para ello si consideramos que $\varphi/\omega = Z$, tenemos:

$$F.A.^* = \frac{1}{\sqrt{(1-Z^2)^2 + 4\upsilon^2 Z^2}}$$

Derivando respecto a Z, se obtiene:

$$Z = \sqrt{1 - 2\upsilon^2}$$

υ	Z	FA*max
0.1	0.9899	5.0252
0.2	0.9592	2.5515
0.3	0.9055	1.7471
0.4	0.8246	1.3638
0.5	0.7071	1.1547
0.6	0.5291	1.0416

Se observa que la amplificación disminuye al aumentar el amortiguamiento. La zona de RESONANCIA queda definida por:

$$0.7 \leq \frac{\varphi}{\omega} \leq 1.3$$

VI.2 OSCILACION FORZADA AMORTIGUADA: LA FUERZA EXTERIOR ES UNA FUERZA CUALQUIERA.

Si se supone amortiguamiento viscoso, la ecuación del equilibrio dinámico se puede escribir:

$$m\,\ddot{y}(t) + \beta\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = F(t)$$

Dividiendo entre "m" y recordando que: $k/m = \omega^2$; $\beta/m = 2\varepsilon = 2\upsilon\omega$.

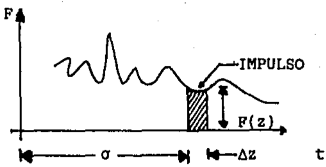
$$\ddot{y}(t) + 2\,\upsilon\omega\,\dot{y}(t) + \omega^2\,y(t) = \frac{F}{m}\,(t)$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

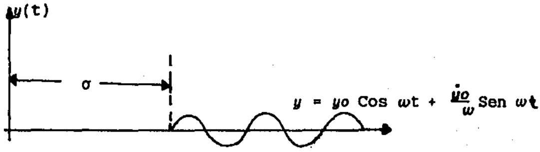
$$y(t) = \frac{1}{\omega}\int \frac{F(\sigma)}{m}\,e^{-\upsilon\omega(t-z)}\ \text{sen}\ \omega(t-Z)\,dz$$

$\because$ σ : representa el tiempo de la fuerza.

Para un mejor entendimiento de la anterior expresión, se obtendrá físicamente. Suponemos que la fuerza varía con el tiempo en esta forma:



Consideramos únicamente un impulso (fuerza que actúa en un pequeño intervalo de tiempo en el instante "σ"). A este impulso F(σ), se deben los desplazamientos que se suponen armónicos.



Si $y_o = 0$; $y = \frac{\dot{y}_o}{\omega}$ Sen ωt

Pero el tiempo es t-σ, porque cuando t<σ, todavía no actúa el impulso:

$$y = \frac{\dot{y}_o}{\omega} \text{ Sen } \omega(t-\sigma)$$

Por otro lado aplicando el principio de la cantidad de movimiento:

Fuerza x tiempo = masa x velocidad

$$F(\sigma)\ d\sigma = m\ \dot{y}o$$

$$F(\sigma)\ d\sigma = m \frac{\omega y}{\text{Sen}\ \omega(t-\sigma)}$$

$$y = \frac{F(\sigma)}{\omega\ m}\ \text{Sen}\ \omega(t-\sigma)\ d\sigma$$

Pero y, se debe a un impulso, por lo que sustituimos por dy.

$$dy = \frac{F(\sigma)}{\omega\ m} \text{Sen}\ \omega(t-\sigma)\ d\sigma$$

El desplazamiento total es la suma (integral) de los des plazamientos de todos los impulsos:

$$y = \frac{1}{\omega} \int \frac{F(\sigma)}{m}\ \text{Sen}\ \omega(t-\sigma)\ d\sigma$$

Si en la deducción anterior, se incluye el amortiguamien to, se llega a:

$$y = \underbrace{\frac{1}{\omega} \int \frac{F(\sigma)}{m}\ e^{-\upsilon\omega(t-\sigma)}\ \text{Sen}\ [\omega(t-\sigma)]\ d\sigma}_{Ⓐ}$$

que es la expresión obtenida con anterioridad. A la integral A se le llama la *Integral de Duhamel* y es de gran importancia en Ingeniería Sísmica.

VI.3 OSCILACION FORZADA AMORTIGUADA: LA FUERZA EXTERIOR ES EL EFECTO DE UN SISMO.

Un sismo se define por el acelerograma que da la variación de la aceleración del terreno en la base de la estructura ($\ddot{U}o(t)$).

N O M E N C L A T U R A :

$y(t)$: desplazamiento de la estructura relativo a su base.

$\dot{y}(t)$: velocidad de la estructura relativo a su base.

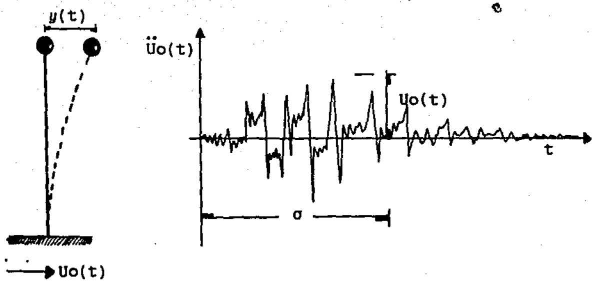
$\ddot{y}(t)$: aceleración de la estructura relativo a su base.

$U(t)$: desplazamiento del terreno.

$Uo(t)$: desplazamiento del terreno en la base de la estructura.

$\dot{U}o(t)$: velocidad del terreno en la base de la estructura.

$\ddot{U}o(t)$: aceleración del terreno en la base de la estructura.



Denominando $U_h(t)$ al desplazamiento del terreno por sismo a la profundidad h, Uo(t) al desplazamiento del terreno a la profundidad o, en la base de una estructura, $y(t)$ al desplazamiento relativo de la estructura respecto a su base, en la masa de la estructura actuará durante un sismo la aceleración $\ddot{y}(t) + \ddot{U}o(t)$ y como no actúa no actúa ninguna fuerza exterior la ecuación del equilibrio dinámico de una estructura de un grado de libertad queda:

$$m\,[\ddot{y}(t) + \ddot{U}o(t)] + \beta\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = 0$$

de donde puede obtenerse:

$$m\,\ddot{y}(t) + \beta\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = -\,m\,\ddot{U}o(t)$$

Dividiendo entre "m":

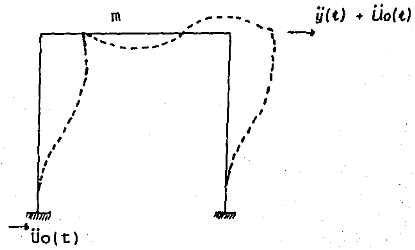
$$\ddot{y}(t) + 2\,\upsilon\omega\,\dot{y}(t) + \omega^2\,y(t) = \ddot{U}o(t)$$

Se elimina el signo negativo por ser irrelevante en el segundo miembro de la igualdad anterior, ya que el signo es alternante.

Comparando ésta última expresión con la escrita al final del subcaso anterior es evidente que la solución es:

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int \ddot{U}o(\sigma)\; e^{-\upsilon\omega(t-\sigma)}\, \mathrm{Sen}\,[\omega(t-\sigma)]\; d\sigma$$

Es importante destacar que el comportamiento sísmico pue analizarse <u>como si actuase una fuerza exterior</u> de valor $- m\,\ddot{U}o(t)$, pero en realidad el sismo no es un problema de fuerza exterior impuesta a la estructura, sino de deformación impuesta.



Interesa el desplazamiento máximo, para el cual se ten - drán los elementos mecánicos internos máximos.

Este vale:

$$y\text{max} = \frac{1}{\omega} \left| \int \ddot{U}o(\sigma)\, e^{-\upsilon\omega(t-\sigma)} \text{ Sen } [\omega(t-\sigma)]\, d\sigma \right|_{\text{max}}$$

Al valor máximo de ésta integral se le llama *espectro de velocidad* y se representa por "Sv":

$$Sv = \left| \int \ddot{U}o(\sigma)\, e^{-\upsilon\omega(t-\sigma)} \text{Sen } [\omega(t-\sigma)\, d\sigma \right|_{\text{max}}$$

$$\boxed{y\text{max} = \frac{Sv}{\omega}}$$

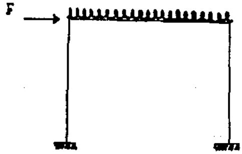
VI. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

EJEMPLO VI.1

En el marco de los ejercicios anteriores. Con amortiguamiento υ = 5 %, queda sujeto a una fuerza dinámica de variación armónica cuyo valor es de 10 Ton, y cuya frecuencia es de 10 rad/seg Calcule el máximo desplazamiento y dibuje la variación del desplazamiento respecto al tiempo.

Solución:

D A T O S :



F = 10 Ton.
φ = 10 rad/seg.
T_F = 0.62 seg.
ω = 12.3238 rad/seg.
k = 4.6445 ton/seg.
υ = 5 % = 0.05

$$y_{max} = y_{est_F}\,(FA)^*\ \mathrm{Sen}\,(\varphi t-\xi)$$

$$(FA)^* = 1/\sqrt{[1-(\varphi/\omega)^2]^2 + 4\,\upsilon^2(\varphi/\omega)^2}$$

Como el valor máximo de la función SENO es 1, se tiene:

$$y_{max} = y_{est_F}\,(FA)^*$$

$$y_{est_F} = F/k$$
$$y_{est_F} = 10/4.6445$$
$$y_{est_F} = 2.1531 \text{ cm.}$$

$(FA)^* = 1/\sqrt{[1-(10/12.3238)^2]^2 + 4(0.05)^2(10/12.3238)^2}$

$(FA)^* = 2.8484$

$y_{max} = (2.1531 \text{ cm})(2.8484)$

$y_{max} = 6.1328$ cm.

FASE de la FUERZA:

$\xi = \text{ang tan } [2\,\upsilon(\varphi/\omega)] \,/\, [1-(\varphi/\omega)^2]$

$\xi = \text{ang tan } [2(0.05)(10/12.3238) \,/\, [1-(10/12.3238)^2]$

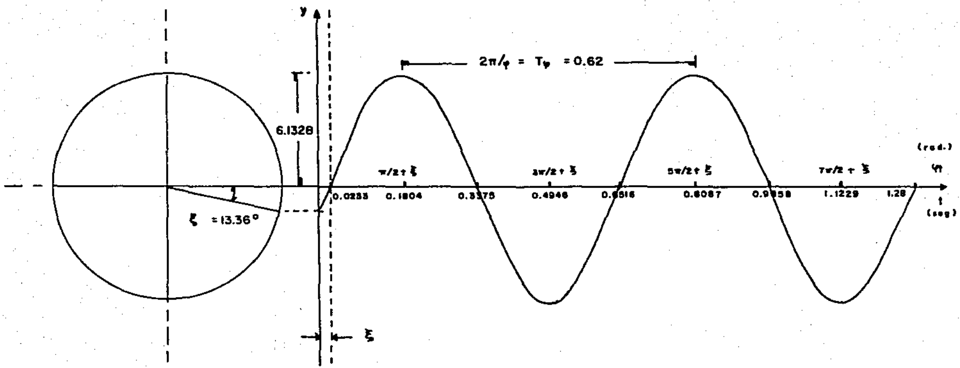
$\xi = \text{ang tan } 0.2376$

$\xi = 13.3636\ °$

$\xi = 0.2332$ rad.

$\xi = \frac{1}{2\pi}\ (0.5098 \text{ seg.})(0.2332 \text{ rad.})$

$\xi = 0.0189$ seg.



GRAFICA DESPLAZAMIENTO-TIEMPO

VII

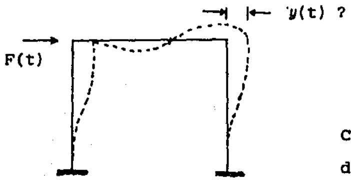
ANALISIS SISMICO-DINAMICO

VI.ANALISIS SISMICO-DINAMICO

Definición

Se denomina análisis dinámico al procedimiento que permite calcular la respuesta de una estructura, en función del tiempo, ante la acción de una carga que es también variable con el tiempo. La respuesta que con mayor frecuencia se calcula es el desplazamiento, ya que si se conoce la posición de los puntos de la estructura en cada instante, es posible también conocer los elementos mecánicos internos en cada instante.

Se ilustra en seguida la definición anterior para el caso sencillo de una estructura de un sólo grado de libertad:

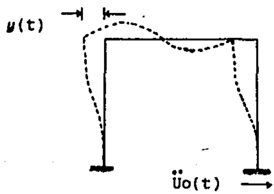


Conocida la función $F(t)$ determinar $y(t)$.

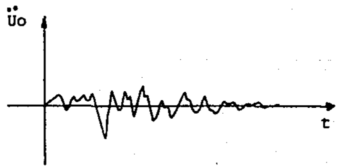
Se observa que la diferencia de un análisis dinámico con un análisis estático estriba en que el primero incluye el efecto del tiempo en tanto que el segundo, no. Aparte de esto, los dos procedimientos se rigen por los mismos principios; las relaciones entre fuerzas internas y desplazamientos son idénticas.

Las acciones exteriores variables con el tiempo y que requie-- ren análisis dinámicos son por ejemplo el sismo, el viento y la carga de los vehiculos sobre los puentes. Otras acciones tienen una variación muy lenta con el tiempo y por ello se caracteri-- zan como cargas estáticas, por ejemplo las cargas vivas sobre - los edificios.

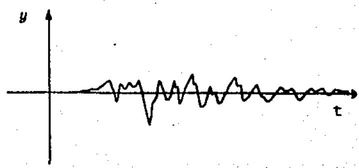
Cuando la acción exterior es el sismo, el análisis se denomina "sismico-dinámico" y en forma sencilla se resume como sigue:



Conocida la función:
$\ddot{U}o(t)$ (acelerograma de un sismo en la base de la estructura.)



Encontrar la función:
$y(t)$ (desplazamiento de la parte superior de la estructura.)



En el caso de estructuras de un grado de libertad, puede sim-- plificarse el problema porque el desplazamiento que interesa es el <u>máximo</u>, que como se vió en el Capítulo anterior, vale:

$$y\max = \frac{1}{\omega}\left|\int_0^t \ddot{U}o(\tau)e^{-\upsilon\omega(t-\tau)}\ \text{Sen}[\omega(t-\tau)]\ d\tau\right|_{\max}$$

Al valor absoluto máximo de la integral:

$$\int_0^t \ddot{U}o(\tau)e^{-\upsilon\omega(t-\tau)}\ \text{Sen}[\omega(t-\tau)]\ d\tau$$

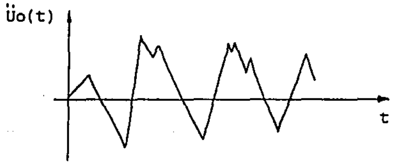
se le llama "Espectro de velocidad" y se le representa por Sv:

$$Sv = \left|\int_0^t \ddot{U}o(\tau)e^{-\upsilon\omega(t-\tau)}\ \text{Sen}[\omega(t-\tau)]\ d\tau\right|_{\max}$$

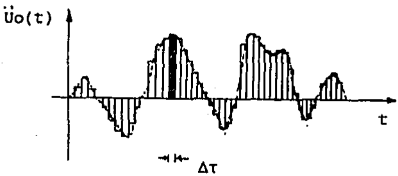
$$y\max = \frac{Sv}{\omega}$$

La integral anterior no puede resolverse directamente porque - la función $\ddot{U}o(\tau)$ no es integrable. Esta función es el acelero-- grama registrado en la base de la estructura durante el sismo - cuyo efecto interesa estudiar.

La integral se resuelve por diferencias finitas, discretizando el acelerograma en impulsos que actúan a un intervalo $\Delta\tau$.



ACELEROGRAMA REAL



ACELEROGRAMA DISCRETIZADO

Se recomienda tomar $\Delta\tau = 0.10$ T, siendo T el período de la estructura por analizar.

De esta manera:

$$Sv = \left| \sum_{0}^{t} \ddot{U}o(\tau) e^{-\upsilon\omega(t-\tau)} \, \text{sen}[\omega(t-\tau) \, \Delta\tau \right|_{max}$$

Existen programas de computadora que aplican este procedimiento para la obtención de espectros a partir del acelerograma.

De la expresión obtenida para la oscilación libre no amortiguada:

$$y(t) = A \operatorname{Cos}(\omega t - \zeta)$$

$$y_{max} = A$$

Derivando se obtiene la velocidad:

$$\dot{y}(t) = -\omega A \operatorname{Sen}(\omega t - \zeta)$$

$$\dot{y}_{max} = \omega A$$

$$\dot{y}_{max} = \omega y_{max}$$

Derivando otra vez se obtiene la aceleración:

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 A \operatorname{Cos}(\omega t - \zeta)$$

$$\ddot{y}_{max} = \omega^2 A$$

$$\ddot{y}_{max} = \omega^2 y_{max}$$

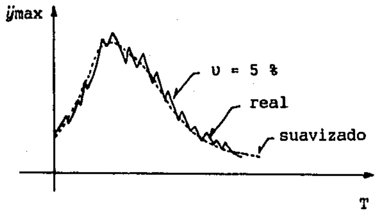
$$\ddot{y}_{max} = \omega \dot{y}_{max}$$

De estos resultados se infiere que a partir del espectro de velocidad se pueden obtener espectros de desplazamiento "Sd" y de aceleración "Sa" mediante las expresiones:

$$Sd = Sv/\omega$$

$$Sa = \omega Sv$$

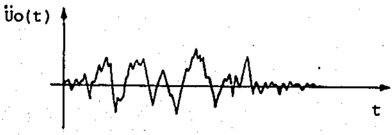
En la práctica de diseño el más usual es el espectro de acele raciones, gráfica que en función del período de una estructura permite obtener la aceleración máxima de la misma durante un - sismo conocido por su acelerograma.



ESPECTRO DE ACELERACIONES

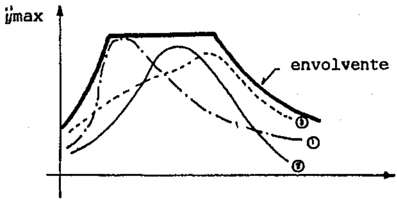
(espectro de respuesta para un sismo cuyo acelerograma se conoce.)

Del cálculo se obtiene una curva irregular, con muchos picos, la que se suaviza por procedimientos matemáticos.



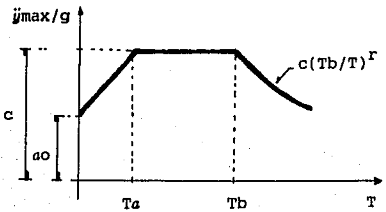
ACELEROGRAMA

A la envolvente de los espectros de respuesta de los sismos - que probablemente ocurrirán en la vida de la estructura, se le llama espectro de diseño.



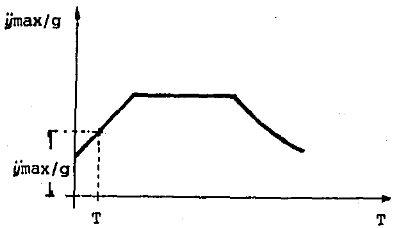
Espectro de Diseñocomo envolvente de espectros de respuesta.

Los reglamentos de construcción suelen incluir espectros de - diseño para las estructuras en la zona de su jurisdicción.



Espectro de Diseño en Reglamentos Mexicanos.

Por lo que con fines de diseño, el problema se reduce a cal-- cular el período T de la estructura, con éste entrar al espectro de diseño y obtener la aceleración sísmica máxima:



La fuerza equivalente que se considerará para el análisis -- sísmico será:

$$F = m \cdot \ddot{y}max$$

$$F = (\omega/g) \cdot \ddot{y}max$$

$$F = \omega \cdot \text{Lectura en el espectro}$$

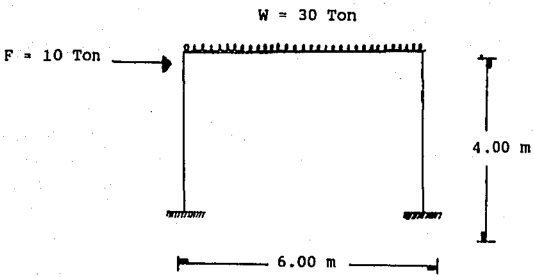
A ésta lectura en el espectro correspondiente al período T de de la estructura, se le denomina "Coeficiente Sísmico".

Es importante hacer notar que estas consideraciones son válidas para estructuras con comportamiento elástico-lineal.

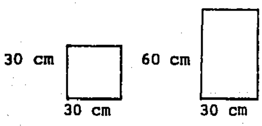
VIII

APENDICE

Analicemos el siguiente sistema:



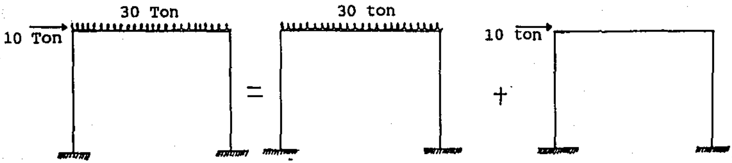
D A T O S :



COLUMNA TRABE

E = 200 000 Kg/cm^2 (CONCRETO REFORZADO)

En el marco anterior, para su solución, se pueden sepa - rar la acción de sus cargas y analizarlas por separado, de la siguiente forma:



CARGA VERTICAL

CARGA HORIZONTAL

METODO DE RITTER.

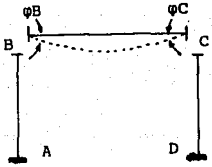
a) ANLISIS POR CARGA VERTICAL:

a.1 Momentos de Inercia.

$$\text{COLUMNAS : } I_c = \frac{30 \times 30^3}{12} = 67\ 500 \text{ cm}^4$$

$$\text{TRABE : } I_t = \frac{30 \times 60^3}{12} = 540\ 000 \text{ cm}^4$$

a.2 Rigideces.



r_{BA} = 4 EI/L = 4E(67 500)/400 = 675 E

$\varphi B = \varphi C$ (SIMETRIA)

r_{BC} = 2 EI/L = 2E(540 000)/600 = $\underline{1\ 800\ E}$

Σ = 2 475 E

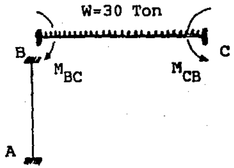
a.3 Factores de Distribución.

Fd_{BA} = 675 E/2 475 E = 0.27

Fd_{BC} = 1 800 E/2 475 E = $\underline{0.73}$

Σ = 1.00

a.4 Momentos de Empotramiento Perfecto (b/n). - +



$|M_{BC}| = |M_{CB}|$

$$M_{BC} = \frac{\omega l^2}{12} = \frac{WL}{12} = \frac{30x6}{12} = 15 \text{ ton-m}$$

$M_{AB} = M_{BA} = 0$

a.5 Momento de Desequilibrio (nudo B).

$Md_B = Me_{BA} + Me_{BC}$

$Md = 0 + 15 = + 15$ Ton-m

a.6 Momentos debidos al giro.

$M\varphi_{BC} = - 15(0.73) = - 10.95$ Ton-m

$M\varphi_{BA} = - 15(0.27) = - 4.05$ Ton-m

$\Sigma = - 15.00$ Ton-m

a.7 Momentos de Transporte.

$Mt_{AB} = ft\ M\varphi_{BA} = \frac{1}{2}(-4.05) = - 2.025$ Ton-m

$ft = \frac{1}{2}$ (barra doblemente empotrada de EI = Cte.)

NOTA : No se transporta de B a C, porque ya se impuso la condición de SIMETRIA ($\varphi_{BC} = 2\ EI/L$).

a.8 Momentos Totales.

$Mtotal = Me + M\varphi + Mt$

$M_{BC} = 15.00 - 10.95 = 4.05$

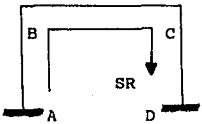
$M_{BA} = 0 \quad - 4.05 = - 4.05$

0.00

M_{AB} = - 2.025 Ton-m

NOTA : éstos momentos son de b/n.

a.9 Momentos Flexionantes.

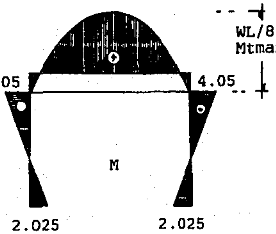


Los momentos flexionantes son de izquierda a derecha y dependen de un sentido de recorrido (SR).

M_{AB} = + 2.025 (se cambia de signo al de b/n, porque es contrario al de izquierda a derecha).

M_{BA} = - 4.050 (se conserva el signo al de b/n, porque es en la dirección de izquierda a derecha).

M_{BC} = - 4.050

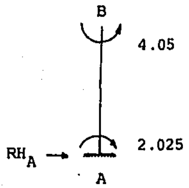


a.10 Fuerzas Cortantes.

Por simetría:

$Rv_A = Rv_D = W/2 = 15$ Ton

Aislando AB:



Aplicando la definición de momento flexionante:

$- 4.05 = - RH_A (4) + 2.025 \quad \because \quad RH_A = 1.52$ Ton

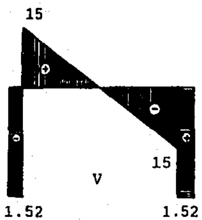


DIAGRAMA DE CORTANTES

a.11 Fuerzas Normales.

Los cortantes en la trabe, son normales en la columna y viceversa. Por lo tanto tenemos:

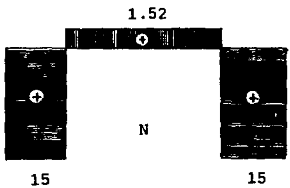
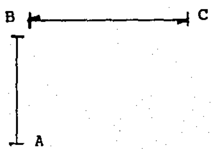


DIAGRAMA DE FUERZAS NORMALES

b) <u>ANALISIS POR CARGA HORIZONTAL.</u>

b.1 Rigideces.



$\varphi_B = -\varphi_C$ (ANTIMETRIA)

$$r_{BC} = \frac{6\ EI}{L} = \frac{6x540,000}{600}\ E = \quad 5\ 400\ E$$

$$r_{BA} = \frac{4\ EI}{L} = \frac{4x67,500}{400}\ E = \quad \underline{675\ E}$$

$$\Sigma = \quad 6\ 075\ E$$

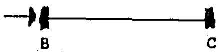
b.2 Factores de distribución.

$$Fd_{BC} = 5,400\ E/6,075\ E = \ 0.89$$

$$Fd_{BA} = \ 675\ E/6,075\ E = \ \underline{0.11}$$

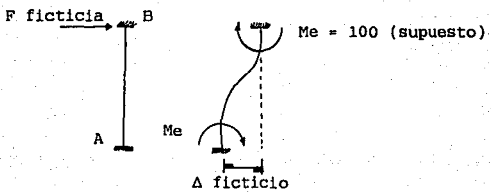
$$1.00$$

b.3 Momentos de Empotramiento.



$Me_{BC} = 0$

Para la barra AB:



b.4 Momento de desequilibrio.

$Md_B = 0 + 100 = + 100$ Ton-m

b.5 Momentos debidos al giro.

$M\varphi_{BC} = 0.89(-100) = - 89$ Ton-m

$M\varphi_{BA} = 0.11(-100) = - 11$ Ton-m

$\Sigma = -100$ Ton-m

b.6 Momentos debidos al Transporte.

$Mt_{BA} = M\varphi_{BA} \; ft_{BA}$

$Mt_{BA} = - 11(\frac{1}{2}) = - 5.50$ Ton-m (b/n)

NOTA :no se transporta de B a C porque yá se impuso la condición de antimetría.

b.7 Momentos Totales.

$M_T = Me + M\varphi + Mt$

$M_{T_{BC}} = 0 + (-89) + 0 = - 89$ Ton-m

$M_{T_{BA}} = 100 + (-11) = + 89$ Ton-m

$\Sigma = 0$

$M_{T_{AB}} = 100 + 0 + (-55) = 94.5$ Ton-m

b.8 Momentos Flexionantes $_{SR}$

M_{AB} = - 94.50 Ton-m

M_{BA} = 89.00 Ton=m

M_{BC} = 89.00 Ton-m

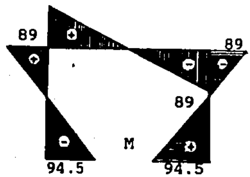
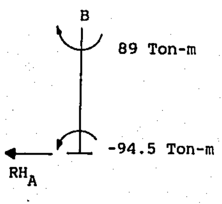


DIAGRAMA DE MOMENTOS
(ficticios)

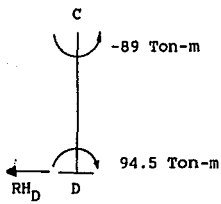
Aislando la columna AB:



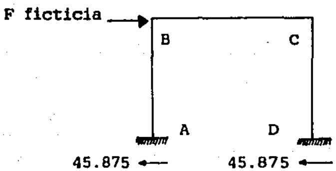
Aplicando la definición de Momento:

$$89 = RH_A\ (4) - 94.50 \quad \because \quad RH_A = 45.87 \text{ Ton}$$

Aislando la columna CD:



de donde por definición: $RH = 45.87$ Ton



F ficticia = 45.875 x 2 = 91.75 Ton

$$\alpha = \frac{\text{F real}}{\text{F ficticia}} = \frac{10.00}{91.75} = 0.1090$$

$\alpha = 0.1090$

Multiplicando los momentos ficticios por "α", obtenemos los momentos reales debidos a una fuerza F = 10 Ton.

$$M_{AB} = -\ 94.50(0.1090) = -\ 10.30 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BA} = \ 89.00(0.1090) = \ 9.70 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BC} = \ 89.00(0.1090) = \ 9.70 \text{ Ton-m}$$

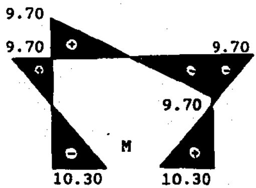
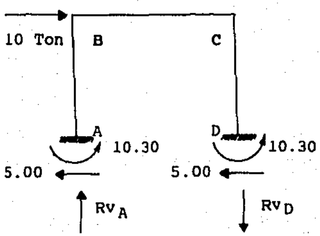


DIAGRAMA DE MOMENTOS
(reales)

Poniendo en equilibrio el marco total:



$\Sigma M_D = 0$

$Rv_A(6) - 10.30 + 10(4) - 10.30 = 0 \quad \because \quad Rv_A = -3.23$ Ton ↓

Por $\Sigma Fy = 0 \qquad \therefore \quad Rv_D = 3.23$ Ton ↑

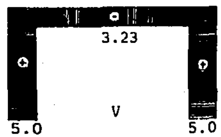


DIAGRAMA DE CORTANTES

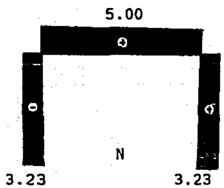
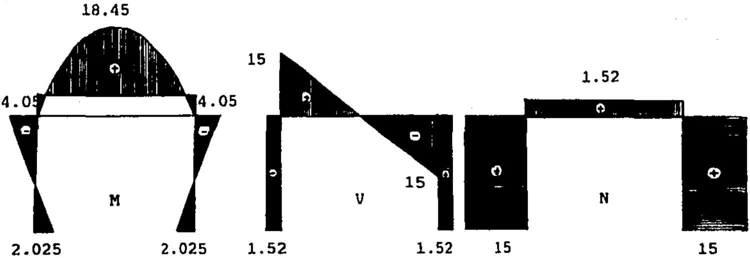
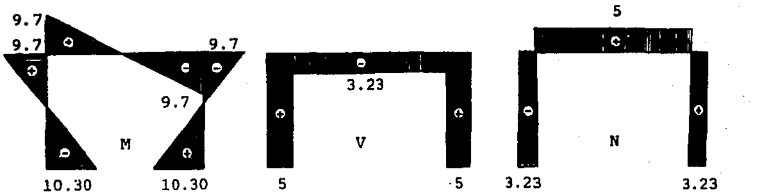
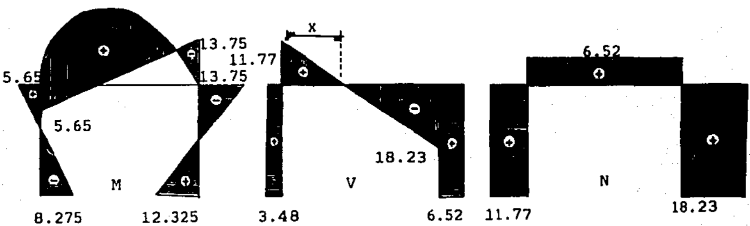


DIAGRAMA DE NORMALES

Ahora sumamos los elementos obtenidos en cada análisis:





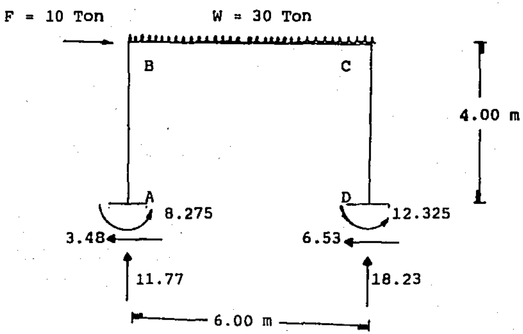


Obtención del momento máximo:

$$\frac{30}{6} = \frac{11.77}{x} \qquad \because \qquad x = 2.354 \text{ m}$$

$$Mmax = 5.65 + [\tfrac{1}{2}(11.77 x 2.354)] = 19.50 \text{ Ton-m}$$

Reacciones en el Marco:



Comprobación del equilibrio entre fuerzas y reacciones:

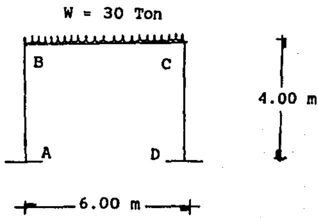
$\Sigma Fx = 0$; $10.00 - 3.48 - 6.52 = 0$; $10.00 - 10.00 = 0$
$\Sigma Fy = 0$; $11.77 - 30.00 + 18.23 = 0$; $30.00 - 30.00 = 0$
$\Sigma M_D = 0$; $11.77(6) - 8.275 + 10(4) - 30(3) - 12.325 = 0$

$$110.6 - 110.6 = 0$$

METODO DE LAS RIGIDECES

Las incógnitas en éste método son los *desplazamientos* de los nudos (los nudos son los apoyos, extremos libres en voladizos o en los puntos donde concurren dos o más miembros).

a) ANALISIS POR CARGA VERTICAL



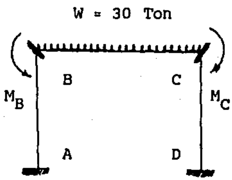
D A T O S :

$I_c = I \quad = \quad 67\ 500\ cm^4$

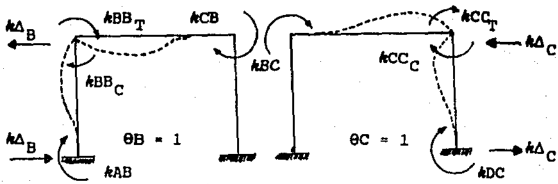
$I \quad = 8I \quad = \quad 540\ 000\ cm^4$

$E = Cte. = \quad 200\ 000\ Kg/cm^2$

a.1 Solución Particular.



a.2 Solución Complementaria.



a.3 Momentos de Empotramiento en los nudos B y C:

$$M_B = -\omega L^2/12 = -WL/12 = -(30x6)/12 = -15.00 \text{ Ton-m}$$

$$M_C = \omega L^2/12 = WL/12 = (30x6)/12 = 15.00 \text{ Ton-m}$$

a.4 Rigideces en los nudos para los diferentes estados de deformación:

Para $\theta B = 1$	Para $\theta C = 1$
$kAB = 2EI/L = 2EI/4 = 0.5\ EI$	$kBC = 2EI/L = 2E(8I)/6 = 8EI/3$
$kBB_C = 4EI/L = 4EI/4 = EI$	$kCC_T = 4EI/L = 4E(8I)/6 = 16EI$
$kBB_T = 4EI/L = 4E(8I)/6 = 16EI/3$	$kCC_C = 4EI/L = 4EI/4 = EI$
$kCB = 2EI/L = 2E(8I)/6 = 8EI/3$	$kDC = 2EI/L = 2EI/4 = 0.5\ EI$
$k\Delta_B = \pm 6EI/L^2 = \pm 6EI/4^2 = \pm 3EI/8$	$k\Delta_C = \pm 6EI/L^2 = \pm 6EI/4^2 = \pm 3EI/8$

a.5 Las ecuaciones de equilibrio son:

$$M_B + kBB\ \theta B + kBC\ \theta C = 0$$
$$M_C + kCB\ \theta B + kCC\ \theta C = 0$$

Sustituyendo valores:

$$-15.00 + 19EI/3\ \theta B + 8EI/3\ \theta C = 0$$
$$15.00 + 8EI/3\ \theta B + 19EI/3\ \theta C = 0$$

a.6 Solución del sistema:

$$\theta B = 4.090909/EI$$
$$\theta C = -4.090909/EI$$

a.7 Cálculo de los momentos reales en el marco.

$$M_{AB} = k_{AB}\ \theta_B$$

$$M_{BA} = k_{BB_C}\ \theta_B$$

$$M_{BC} = k_{BB_T}\ \theta_B + k_{BC}\ \theta_C - M_B$$

$$M_{CB} = k_{CB}\ \theta_B + k_{CC_T}\ \theta_C + M_C$$

$$M_{CD} = k_{CC_C}\ \theta_C$$

$$M_{DC} = k_{DC}\ \theta_C$$

Sustituyendo valores:

$$M_{AB} = 0.5\ EI(4.090909/EI) = 2.0454$$

$$M_{BA} = EI(4.090909/EI) = 4.0909$$

$$M_{BC} = (16EI/3)(4.090909/EI) + (8EI/3)(-4.090909/EI) - 15 = -4.09$$

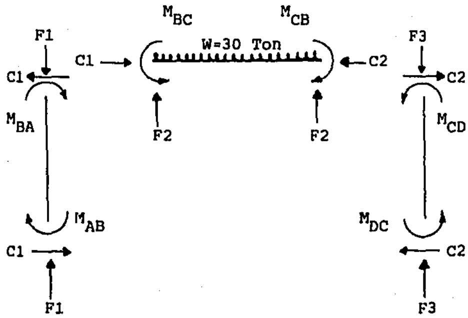
$$M_{CB} = (8EI/3)(4.090909/EI) + (16EI/3)(-4.090909/EI) + 15 = 4.09$$

$$M_{CD} = EI(-4.090909/EI) = -4.0909$$

$$M_{DC} = 0.5\ EI(-4.090909/EI) = -2.0454$$

a.8 Cálculo de las reacciones en el marco.

Tomando base en los resultados anteriores, podemos calcular las reacciones internas del sistema:



Donde:

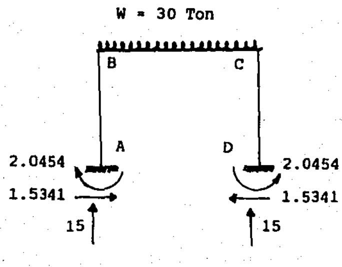
$C1 = (M_{AB} + M_{BA})/L = (2.0454 + 4.0909)/4 = 1.5341$ Ton.

$C2 = (M_{CD} + M_{DC})/L = (4.0909 + 2.0454)/4 = 1.5341$ Ton.

$F2 = \omega L/2 = W/2 = 30/2 = 15.0000$ Ton.

$F1 = F2 = F3 = 15.0000$ Ton.

a.9 Reacciones en el marco.



a.10 Comprobación del equilibrio entre fuerzas externas y reacciones.

$\Sigma F_X = 0$; $1.5341 - 1.5341 = 0$

$\Sigma F_y = 0$; $15 - 30 + 15 = 0$; $30 - 30 = 0$

$\Sigma M_D = 0$; $15(6) + 2.0454 - 30(3) - 2.0454 = 0$; $90 - 90 = 0$

a.11 Diagrama de los elementos mecánicos.

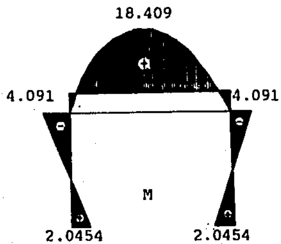


DIAGRAMA DE MOMENTOS

(Ton-m)

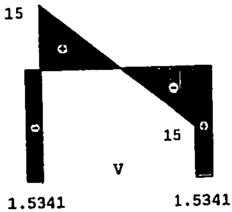


DIAGRAMA DE CORTANTES

(Ton)

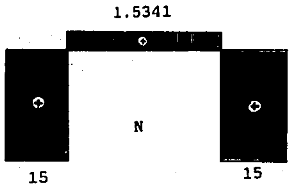
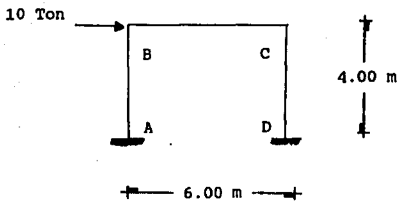


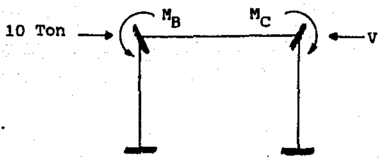
DIAGRAMA DE NORMALES

(Ton)

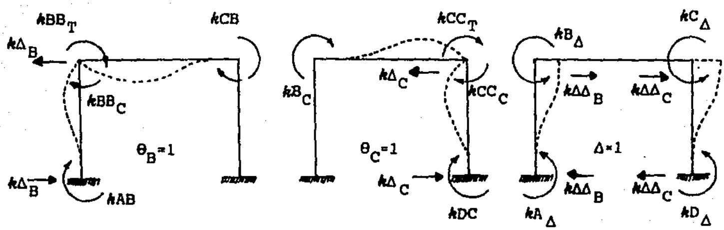
b) <u>ANALISIS POR CARGA HORIZONTAL.</u>



b.1 Solución Particular.



b.2 Solución Complementaria.



b.3 Momentos de Empotramiento en los nudos: $\curvearrowright +$ $\rightarrow +$

$M_B = 0$

$M_C = 0$

$V = -10$ Ton.

b.4 Rigideces en los nudos para los diferentes estados de deformación.

Para $\theta_B = 1$

$kAB = 2EI/4 = 0.5\ EI$

$kBB_C = 4EI/4 = EI$

$kBB_T = 4E(8I)/6 = 16EI/3$

$kCB = 2E(8I)/6 = 8EI/3$

$k\Delta_B = \pm 6EI/4^2 = \pm 3EI/8$

Para $\theta_C = 1$

$kBC = 2E(8I)/6 = 8EI/3$

$kCC_T = 4E(8I)/6 = 16EI/3$

$kCC_C = 4EI/4 = EI$

$kDC = 2EI/4 = 0.5 EI$

$k\Delta_C = \pm 6EI/4^2 = \pm 3EI/8$

Para $\Delta = 1$

$kA_\Delta = 6EI/4^2 = - 3EI/8$

$kB_\Delta = -6EI/4^2 = - 3EI/8$

$kC_\Delta = -6EI/4^2 = - 3EI/8$

$kD_\Delta = -6EI/4^2 = - 3EI/8$

$k\Delta\Delta_B = \pm 12EI/4^3 = \pm 3EI/16$

$k\Delta\Delta_C = \pm 12EI/4^3 = \pm 3EI/16$

b.5 Las ecuaciones de equilibrio son:

$$M_B + kBB\ \theta_B + kBC\ \theta_C + kB_\Delta \Delta = 0$$
$$M_C + kCB\ \theta_B + kCC\ \theta_C + kC_\Delta \Delta = 0$$
$$V + k\Delta_B\ \theta_B + k\Delta_C\ \theta_C + (k\Delta\Delta_B + k\Delta\Delta_C)\ \Delta = 0$$

Susituyendo valores:

$$0 + 19EI/3\ \theta_B + 8EI/3\ \theta_C - 3EI/8\ \Delta = 0$$
$$0 + 8EI/3\ \theta_B + 19EI/3\ \theta_C - 3EI/8\ \Delta = 0$$
$$-10 - 3EI/8\ \theta_B - 3EI/8\ \theta_C + 3EI/8\ \Delta = 0$$

b.6 Solución del sistema:

$$\theta_B = 1.212121/EI$$
$$\theta_C = 1.212121/EI$$
$$\Delta = 29.090909/EI$$

b.7 Cálculo de los momentos reales en el marco:

$$M_{AB} = kAB\ \theta_B - kA_\Delta \Delta = 0.5EI(1.21/EI) - (3EI/8)29.09/EI$$
$$M_{BA} = kBB_C\ \theta_B - kB_\Delta \Delta = EI(1.21/EI) - (3EI/8)29.09/EI$$
$$M_{BC} = kBB_T\ \theta_B + kBC\ \theta_C = (16EI/3)1.21/EI + (8EI/3)1.21/E\ I$$

$M_{CB} = kCB\ \theta_B + kCC_T\ \theta_C = (8EI/3)1.21/EI + (16EI/3)1.21/E$

$M_{CD} = kCC_C\ \theta_B - kC_\Delta\ \Delta = EI(1.21/EI) - (3EI/8)29.09/EI$

$M_{DC} = kDC\ \theta_C - kD_\Delta\ \Delta = 0.5EI(1.21/EI) - (3EI/8)29.09/EI$

De donde se obtiene:

$M_{AB} = -\ 10.3030$ Ton-m

$M_{BA} = -\ 9.6969$ Ton-m

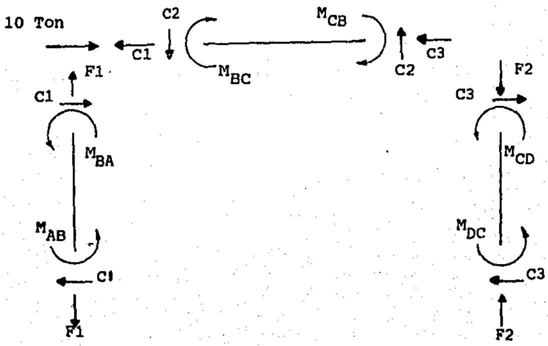
$M_{BC} = 9.6969$ Ton-m

$M_{CB} = 9.6969$ Ton-m

$M_{CD} = -\ 9.6969$ Ton-m

$M_{DC} = -\ 10.3030$ Ton-m

b.8 Cálculo de las reacciones.



Donde:

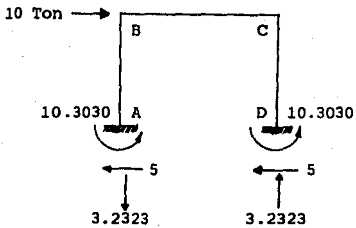
$C1 = (M_{AB} + M_{BA})/L = (10.3030 + 9.6969)/4 = 5.0000$ Ton

$C2 = (M_{BC} + M_{CB})/L = (\ 9.6969 + 9.6969)/6 = 3.2323$ Ton

$C3 = (M_{CD} + M_{DC})/L = (9.6969 + 10.3030)/4 = 5.0000$ Ton

$F1 = C2 = F2 = 3.2323$ Ton

b.9 Reacciones en el marco.



Comprobación del equilibrio entre fuerzas externas y reacciones:

$\Sigma F_x = 0$; $10.0000-5.0000-5.0000 = 0$; $10-10 = 0$

$\Sigma F_y = 0$; $-3.2323+3.2323 = 0$

$\Sigma M_D = 0$; $-3.2323(6)-10.3030+10(4)-10.3030 = 0$; $-40+40 = 0$

b.11 Diagrama de los elementos mecánicos.

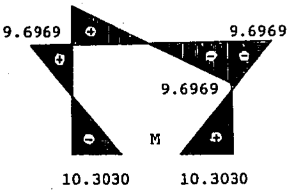


DIAGRAMA DE MOMENTOS
(Ton-m)

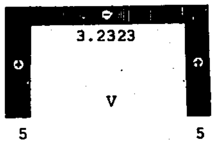


DIAGRAMA DE CORTANTES
(Ton)

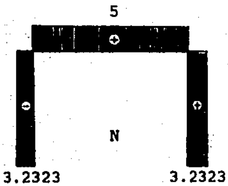
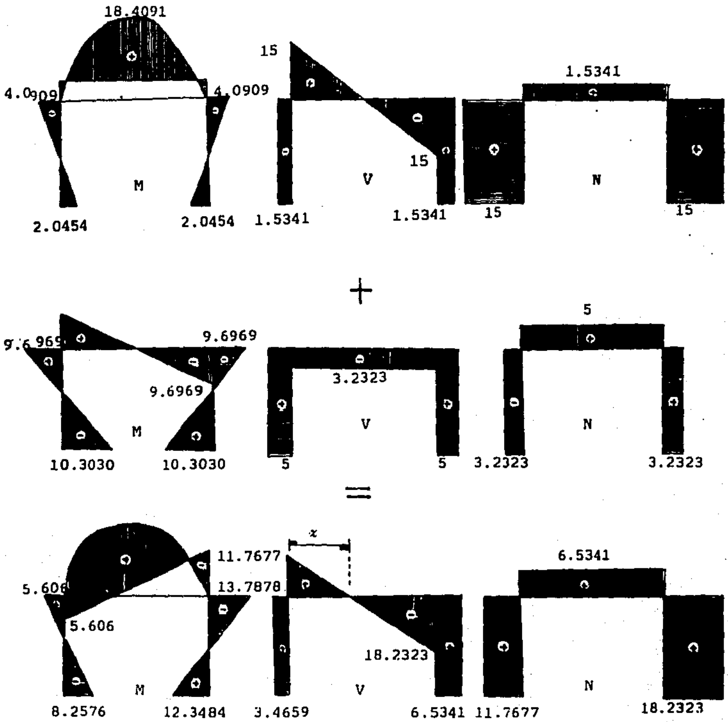


DIAGRAMA DE NORMALES
(Ton)

Ahora sumemos los elementos obtenidos en cada análisis:



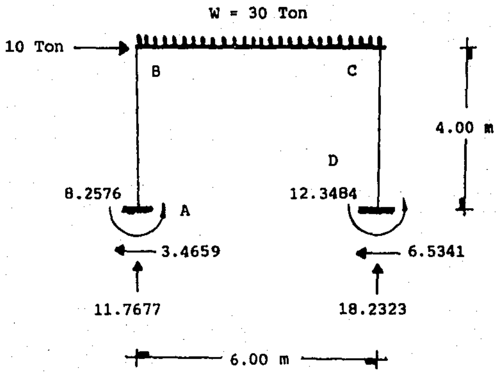
Obtención del momento máximo (Mmáx).

$$\frac{30}{6} = \frac{11.7677}{x} \quad \therefore \quad x = 2.3535 \text{ m}$$

$$Mmáx = 5.606 + [\tfrac{1}{2}(11.7677 \times 2.3535)]$$

$$Mmáx = 19.4536 \text{ Ton-m}$$

Reacciones en el marco:



Comprobación de equilibrio entre fuerzas externas y

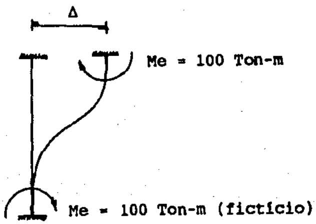
$$\Sigma F_x = 0 \; ; \; 10.0000-3.4659-6.5341 = 0 \; ; \; 10-10 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \; ; \; 11.7677+18.2323-30.0000 = 0 \; ; \; 30-30 = 0$$

$$\Sigma M_D = 0 \; ; \; 11.7677(6)-8.2576+10(4)-30(3)-12.3484 = 0$$

$$110.606-110.606 = 0$$

OBTENCION DEL DESPLAZAMIENTO LATERAL (Δ):



$Me = r_i\,\Delta$

$\because$ r_i : rigidéz lineal $= 6EI/L^2$ (barra recta con EI = Cte.)

$$Me = \frac{6EI}{L^2}\,\Delta$$

$$\Delta = \frac{MeL^2}{6EI} = \frac{100\times10^5\times400^2}{6\times2\times10^5\times67500} = 19.7531 \text{ cm}$$

$\Delta fict. = 19.7531$ cm

$\alpha = 0.1090$

$\Delta real = \Delta fict.\ \alpha = 19.7531 x 0.1090$

$\Delta real = 2.1531$ cm

Es decir, el desplazamiento lateral real que experimenta el marco por la acción de la fuerza externa F = 10 Ton, es: $\Delta = 2.1531$ cm.

OBTENCION DE LA RIGIDEZ DEL MARCO.

$$k = \frac{F}{\Delta}$$

$$k = \frac{10.0000 \text{ Ton}}{2.1531 \text{ cm}}$$

$$k = 4.6445 \text{ Ton/cm}$$

OBTENCION DEL PERIODO.

$$T = 2\pi \sqrt{m/k}$$

$$\because\ m : W/g = 30/981 = 0.3058 \text{ Ton-seg}^2/\text{cm}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.03058 \text{ Ton-seg}^2/\text{cm}}{4.6445 \text{ Ton/cm}}}$$

$T = 0.5098$ seg.

OBTENCION DE LA FRECUENCIA ANGULAR.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{0.5098} = 12.3240 \text{ rad/seg}$$

$\omega = 12.3240$ rad/seg.

IX

CONCLUSIONES

C O N C L U S I O N E S

1 . - El efecto del sismo, es uno de los efectos más importantes que deben considerarse en el análisis de estructuras. Para el caso de estructuras sencillas, los reglamentos de construcción contienen disposiciones que deben aplicarse para el análisis. Sin embargo, el Ingeniero Civil sólamente podrá aplicar adecuadamente ésas disposiciones si conoce los fundamentos de las mismas. Por ésa razón, debe tener un claro conocimiento de los principios de la Dinámica Estructural en que se basa el "análisis sísmico" y en que se basan los reglamentos de construcción.

2 . - Aún cuando suele idealizarse el análisis por sismo a una estructura como el efecto de una carga lateral que obra sobre la estructura, es importante tener en cuenta que:

a) En verdad no existe ninguna fuerza lateral durante el sismo. El sismo es un efecto de deformación impuesta. Lo que en realidad existe es un movimiento en la base de la estructura.

b) Los efectos que la vibración sísmica causan en la estructura son "efectos dinámicos" y por lo tanto están en función del tiempo, es decir, dependen de la "historia de carga" de la estructura y dependen de las características dinámicas propias de la misma.

3 . - El amortiguamiento es una característica favorable de las estructuras. A mayor amortiguamiento, los desplazamientos inducidos por una acción dinámica exterior, serán menores y una vez que cesa ésa acción, la estructura recuperará más rápidamente su posición de equilibrio. Por ésta razón resulta importante definir cual es el amortiguamiento real de las edificaciones que comúnmente se construyen. Para eso pueden realizarse experimentos de vibración forzada en las que el factor de amortiguamiento se obtiene por la realción del decremento logarítmico entre el periodo.

4 . - El amortiguamiento tiene un efecto tan importante, que nos abre otra posibilidad de diseñar las estructuras para que se comporten adecuadamente bajo la acción sísmica; en vez de darle mayor resistencia para soportar los efectos sísmicos, se le dá mayor amortiguamiento para que los efectos sísmicos sean menores. Este enfoque de diseño sísmico está actualmente en proceso de investigación y desarrollo.

5 . - Los espectros sísmicos que se han obtenido en éste trabajo a partir de los fundamentos de la Dinámica, son es

pectros elásticos porque en las ecuaciones fundamentales de equilibrio se ha incluido la hipótesis de que el comportamiento de la estructura es elástico-lineal, es decir, que durante todo el proceso, la relación entre fuerzas y deformaciones es constante y que al cesar la acción sísmica, la estructura recupera su forma original.

Esta hipótesis no se cumple en las estructuras reales sujetas a sismos violentos, ya que en ellos, el sistema incurre en un comportamiento inelástico: las fuerzas no son proporcionales a las deformaciones y la estructura queda con una "deformación heredada" al pasar el sismo intenso.

Para obviar ésta dificultad, se desarrollan espectros inelásticos o se corrigen los espectros elásticos tomando en cuenta la "ductilidad" de la estructura. Este tema se escapa del alcance de ésta Tesis.

6 . - El autor de éste trabajo espera haber demostrado ante los estudiantes de Ingeniería Civil, la estrecha relación que existe entre las materias llamadas "teóricas" (Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias, Cálculo Diferencial e Integral, Dinámica) y las llamadas "practicas" (Diseño Estructural, Diseño Sísmico, Ingeniería Sísmica) y se vería ampliamente recompensado por su esfuerzo si con ésta demostración se logra que los estudiantes se vean alentados a fortalecer sus conocimientos básicos de teoría.

BIBLIOGRAFIA

1 .- Fundamentos de Ingeniería Sísmica.
E. Rosenblueth, N.M. Newmark
Editorial Diana
México, 1982

2 .- Dinámica de Suelos y Estructuras
aplicadas a Ingeniería Sísmica.
Rafael Colindres Selva.
Editorial Limusa.
México, 1983

3 .- Dinámica
Jerry H. Ginsberg, Joseph Genin
Editorial Interamericana.
México, 1980

4 .- Mecánica para Ingenieros, Dinámica.
Ferdinand L. Singer
Editorial Harper & Row Latinoamericana.
México, 1984.

5 .- Mecánica Vectorial para Ingenieros, Dinámica.
Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr.
Editorial Mc Graw-Hill.
México, 1990.

6 .- Apuntes de la clase de "Ingeniería Sísmica".
Profr. Ing. Amilcar Galindo Solórzano.
ENEP Aragón-UNAM.
Edo. de Mex., 1989.

7 .- Apuntes de "Análisis Estructural I".
J.Luis Camba C., Francisco Chacón G.,Francisco Pérez A.
Facultad de Ingeniería - UNAM.
México D.F., 1982.