



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

35
205

Ecuaciones relativistas para dos partículas en
interacción

TESIS

que para obtener el grado académico de

Físico

presenta

Gisela Tamhara Mateos González

México, D.F.

Abril de 1993

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Introducción

El problema de muchos cuerpos relativista es interesante desde el punto de vista meramente conceptual e indudablemente desde el punto de vista observacional.

Los desarrollos experimentales de los últimos años han hecho necesario el conocimiento con cada vez mejor precisión de las propiedades de sistemas ligados tradicionales, así como aquellos con efectos relativistas dominantes; entre estos últimos, podríamos mencionar átomos altamente ionizados y sistemas hadrónicos formados por quarks ligeros. Aunque en principio existen teorías de campo cuánticas, a partir de las cuales uno podría sacar todas las propiedades de estos sistemas, en la práctica se recurre a ecuaciones efectivas de acción a distancia.

Por otra parte, la formulación de una teoría dinámica relativista, no es trivial. Sabemos que en principio teorías tales como QED o QCD contienen la información necesaria para describir sistemas relativistas de muchos cuerpos; sin embargo, extraer esta información de forma sistemática puede volverse muy complicada, el propósito de esta tesis es estudiar este problema para el caso particular de dos cuerpos. Revisaremos algunas ecuaciones cuánticas relativistas de acción a distancia que buscan de una forma efectiva tomar en cuenta los aspectos más relevantes del problema.

En el primer capítulo se presenta la dinámica clásica y relativista de una partícula y se revisa la teoría de constricciones de Dirac.

En el segundo capítulo se muestran las ecuaciones más conocidas en las teorías de acción a distancia, así como las ecuaciones efectivas de teoría cuántica de campos que describen partículas en interacción, como son las ecuaciones de Bethe-Salpeter y Breit.

Una alternativa que se ve en el tercer capítulo, corresponde a ecuaciones relativistas efectivas propuestas por H. Crater y P. Van Alstine, donde se obtiene la ecuación de Dirac para dos partículas en interacción. Por último se revisa el sistema parapositronio en el que se utilizan las ecuaciones de H. Crater y P. Van Alstine para obtener la energía total del sistema y las soluciones completas.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	
CAPÍTULO 1	1
1.1 Introducción	2
1.2 Dinámica clásica y relativista de una partícula	2
1.3 Langrangianos singulares y dinámica relativista	2
1.3.1 Partícula libre	2
1.4 Acoplamiento con campos externos	4
1.5 Teoría de constricciones de Dirac	4
1.6 Partícula clásica con espín	9
1.6.1 Límite no relativista	15
1.6.2 Interacción electromagnética	16
Referencias	17
CAPÍTULO 2	18
2.1 Introducción	18
2.2 Teorema de No Interacción	19
2.3 Electrodinámica de Wheeler y Feynman	20
2.4 Ecuación de Bethe - Salpeter	21
Referencias	27
CAPÍTULO 3	28
3.1 Introducción	28
3.2 Partícula sin espín	29
3.3 Interacción de partículas con espín $\frac{1}{2}$	35
Referencias	37
CAPÍTULO 4	38
4.1 El Parapositronio	38
Referencias	42
DISCUSIÓN Y PERSPECTIVAS	44
Referencias	44

Capítulo 1

En este capítulo se va a hacer una revisión de la dinámica clásica y relativista de una partícula para el caso sin y con espín. Se va a encontrar la ecuación de movimiento para el caso de acoplamiento con un campo externo. Se va a hacer una revisión sobre la teoría de constricciones de Dirac.

1.1 Introducción

Una teoría es relativista cuando es invariante ante el grupo de Poincaré [1].

El grupo de Poincaré incluye las traslaciones y las rotaciones espacio-temporales. Al aplicar un elemento del grupo al cuadvectores x^μ , éste se transforma de la siguiente manera:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu.$$

De aquí se tiene que el grupo de Poincaré tiene 10 parámetros: seis rotaciones contenidas en Λ^μ_ν y cuatro traslaciones contenidas en a^μ .

Los generadores del grupo cumplen con un álgebra de paréntesis de Poisson que está dada por:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [J_{\mu\nu}, P_\rho] &= g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= -g_{\mu\rho}J_{\sigma\nu} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\sigma\mu}. \end{aligned}$$

Elegimos $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1 - 1 - 1 - 1)$. Dichos generadores son el generador de traslaciones P_ρ y el generador infinitesimal de rotaciones $J_{\mu\nu}$. El operador de traslaciones P_ρ se interpreta, en algunos casos, con el operador de energía-momento. Existen dos operadores de Casimir del grupo de Poincaré $W^\mu W_\mu$ y $P^\mu P_\mu$ donde $W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma$.

1.2 Dinámica clásica y relativista de una partícula

Para construir una teoría dinámica relativista clásica, suele ser conveniente tomar como punto de partida la integral de acción,

$$S = \int \mathcal{L} d\tau.$$

En este caso el lagrangiano será un invariante relativista y dependerá de x^μ , las cuales a su vez, estarán determinadas por el parámetro τ . Las ecuaciones de movimiento se encontrarán de manera usual y por construcción serán covariantes. Usualmente se pide que la acción sea invariante ante reparametrizaciones, es decir, que no dependa de la elección del parámetro de evolución τ . Esto a su vez, nos lleva a ecuaciones invariantes ante reparametrizaciones. Sin embargo, una teoría covariante emplea más variables que las necesarias para especificar la configuración de un sistema, esto es, el tiempo se añade como variable dinámica y es necesario introducir constricciones. En las páginas siguientes discutiremos el tratamiento lagrangiano y hamiltoniano necesario en estos casos.

1.3 Lagrangianos singulares y dinámica relativista

Una teoría con constricciones da origen a un lagrangiano singular [2]. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociados a un lagrangiano son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \quad (1)$$

que de manera explícita se escriben,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^s} \ddot{q}^s + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial q^s} \dot{q}^s + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \dot{t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0.$$

donde

$$W_{ik} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k}.$$

esta W_{ik} se denomina matriz wronskiana y a su determinante wronskiano. Las ecuaciones (1) pueden resolverse para las aceleraciones cuando $W = \det |W_{ik}| \neq 0$; si W se anula, el lagrangiano se denomina lagrangiano singular. Veamos un ejemplo.

1.3.1 PARTICULA LIBRE

Tomemos por ejemplo la partícula libre relativista, cuyo lagrangiano es

$$\mathcal{L} = m_0 (\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{dx_\mu}{d\tau} \equiv \dot{x}_\mu$$

La matriz wronskiana resulta,

$$M_{\alpha}^{\mu} = \frac{m_o}{(\dot{x}_{\beta}\dot{x}_{\alpha})^{\frac{1}{2}}} \left[\delta_{\alpha}^{\mu} - \frac{\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\alpha}}{\dot{x}^{\beta}\dot{x}_{\beta}} \right].$$

Escribiendo las ecuaciones de movimiento,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} = 0$$

resulta

$$M_{\alpha}^{\mu} \ddot{x}^{\alpha} = 0.$$

Nótese que el determinante de M_{α}^{μ} es cero, como consecuencia el sistema resulta singular. Para ver esto, demostraremos que M_{α}^{μ} es un proyector; esto es, que proyecta sobre un subespacio y esto hace que una columna o renglón sean cero.

$$M_{\alpha}^{\mu} \ddot{x}^{\alpha} \equiv 0.$$

Tenemos que,

$$\left(\delta_{\alpha}^{\mu} - \frac{\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\alpha}}{\dot{x}^{\beta}\dot{x}_{\beta}} \right) \dot{x}^{\alpha} = \dot{x}^{\mu} - \frac{\dot{x}^{\mu}(\dot{x}^{\alpha}\dot{x}_{\alpha})}{\dot{x}^{\alpha}\dot{x}_{\alpha}} = 0$$

y de aquí

$$\det M_{\alpha}^{\mu} = 0$$

por lo tanto, \mathcal{L} es singular. Una singularidad en el lagrangiano da origen a una restricción; es decir, una relación entre las variables dinámicas del sistema, que siempre es igual a cero. En nuestro ejemplo resulta sencillo encontrar esta restricción. Si,

$$\begin{aligned} P_{\alpha} &= \frac{m_o \dot{x}^{\alpha}}{(\dot{x}^{\beta}\dot{x}_{\beta})^{\frac{1}{2}}} \\ P_{\alpha} P^{\alpha} &= m_o^2 \\ P_{\alpha} P^{\alpha} - m_o^2 &= 0 \\ P^2 - m^2 &= 0; \end{aligned} \tag{2}$$

en general, cuando se cumple una igualdad de este estilo, se dice que las variables se encuentran en la capa de masa.

1.4 Acoplamiento con campos externos

En presencia de campos externos la forma lagrangiana invariante ante el grupo de Poincaré más sencilla es:

$$\mathcal{L} = m_0(\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu)^{\frac{1}{2}} + \frac{q}{c} A_\mu \dot{x}^\mu + g_0 \phi$$

donde A_μ es un campo vectorial y ϕ un campo escalar. Las ecuaciones de movimiento correspondientes son,

$$\frac{d}{d\tau} m \dot{x}_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{q}{c} \dot{x}_\mu A^\mu + g_0 \phi \right) - \frac{q}{c} \frac{dA_\nu}{d\tau}$$

que coincide con la generalización relativista de las ecuaciones de movimiento de Newton con la fuerza de Minkowski, dada por

$$K_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{q}{c} \dot{x}_\nu A^\nu \right) - \frac{q}{c} \frac{dA_\mu}{d\tau}.$$

La constricción equivalente a la ec.(2) es

$$\pi^2 + \mu^2 = 0$$

con $\pi_\alpha = P_\alpha - \frac{q}{c} A_\mu$ $\mu = m + g\phi$; a la sustitución p^α por π^α se le denomina acoplamiento minimal.

Una vez construida la formulación lagrangiana podría plantearse el problema de cómo construir la formulación hamiltoniana correspondiente. Esta última se vuelve particularmente importante cuando se desea pasar al formalismo cuántico, es decir, asociar una teoría cuántica a una teoría clásica. La formulación de una teoría hamiltoniana con constricciones puede realizarse en términos de la teoría desarrollada por Dirac. Dada la relevancia de esta teoría para entender el resto del trabajo, se le van a dedicar algunos párrafos.

1.5 Teoría de constricciones de Dirac

Si se quiere pasar al formalismo hamiltoniano, además de las ecuaciones de Euler-Lagrange, es necesario introducir las variables de momento P_n [3],

$$P_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}(q, \dot{q}, t)$$

nuevamente la condición de que $w \neq 0$ es necesaria para resolver estas ecuaciones de manera única para las \dot{q}^i en términos de p^i y q^i , t . En el caso singular, las coordenadas y los momentos no son independientes

$$\phi(q, p) = 0.$$

Pueden existir varias relaciones independientes de este tipo, entonces, para diferenciarlas se introduce un subíndice $m = 1, \dots, M$;

$$\phi_m(q, p) = 0,$$

estas relaciones se denominan constricciones primarias.

Si ahora se considera la siguiente cantidad $p_n \dot{q}_n - \mathcal{L}$ y se hacen variaciones en q y \dot{q} , se tiene lo siguiente

$$\delta(p_n \dot{q}_n - \mathcal{L}) = \delta p_n \dot{q}_n - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \right) \delta q_n$$

aquí se ve que la variación sólo incluye variaciones en q y p y no en \dot{q} . Esto implica que $p_n \dot{q}_n - \mathcal{L}$ se puede expresar de manera independiente de las velocidades y se denomina hamiltoniano H . Definido de esta manera, el hamiltoniano no es único y se puede expresar como,

$$H^* = H + c_m \phi_m$$

donde c_m son coeficientes que pueden ser cualquier función de las q y p ; esto implica que el hamiltoniano no está determinado de manera única. Es conveniente introducir el formalismo de paréntesis de Poisson entre dos funciones cualesquiera de q y p , esto es, $f(q, p)$ y $g(q, p)$, como

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n}.$$

Con la ayuda de los paréntesis de Poisson, se pueden reescribir las ecuaciones de movimiento. En general para cualquier función g de q y p , tenemos

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial g}{\partial p_n} \dot{p}_n.$$

Si ahora escribimos \dot{q}_n y \dot{p}_n de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{q}_n &= \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \\ \dot{p}_n &= -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}. \end{aligned}$$

En términos de los paréntesis de Poisson \dot{g} se escribe

$$\dot{g} = [g, H] + u_m [g, \phi_m].$$

Al trabajar con este formalismo, no se deben evaluar las constricciones antes de usar los paréntesis de Poisson.

Las constricciones se van a escribir como ecuaciones débiles,

$$\phi_m \approx 0$$

para distinguirlas de las ecuaciones usuales o fuertes.

De manera concisa escribimos \dot{g} ,

$$\dot{g} \approx [g, H_T]$$

donde $H_T = H + u_m \phi_m$.

Como consecuencia de estas ecuaciones de movimiento, se tienen ciertas condiciones de consistencia. Todas las ϕ tienen que ser cero a lo largo del tiempo y $\dot{\phi}$ tiene que ser igual a cero. Estas condiciones se deben de revisar para evitar una inconsistencia. Por ejemplo, se tiene el siguiente lagrangiano $\mathcal{L} = q$ y su ecuación de movimiento $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \rightarrow 1 = 0$, lo cual es una contradicción. Esto nos lleva al hecho de que no se puede escoger un lagrangiano de forma arbitraria; se debe de imponer la condición de que las ecuaciones lagrangianas de movimiento no tengan una inconsistencia.

Con las restricciones anteriores, la ecuación para \dot{g} se divide en tres casos:

a) en este caso la ecuación se reduce a $0 = 0$;

b) en el segundo caso, la ecuación se reduce a una ecuación independiente de las u , y debe de ser de la forma

$$\chi(q, p) = 0;$$

c) por último, la ecuación no se reduce a ninguna de las formas anteriores y esto impone una condición sobre los coeficientes u .

Cada ecuación del tipo b) implica que se tiene otra restricción en las variables del hamiltoniano. Estas constricciones se denominan constricciones *secundarias*. La diferencia con las primarias, es que éstas son consecuencia de las ecuaciones $\dot{p}_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}$, mientras que para las secundarias es necesario hacer uso de las ecuaciones lagrangianas de movimiento. Las ecuaciones secundarias se escriben de manera análoga a las primarias

$$\phi_k \approx 0$$

donde $k = M + 1, \dots, M + K$, con K el número de constricciones secundarias. El tercer tipo de ecuaciones,

$$[\phi_j, H] + u_m [\phi_j, \phi_m] = 0$$

imponen una condición sobre las u ,

$$u_m = u_m(q, p)$$

la solución no es única; si se quiere la solución más general que exista, entonces se van a considerar todas las soluciones independientes de la forma $V_{am}(q, p)$ $a = 1, \dots, A$; esto implica,

$$u_m = U_m + v_a V_{am}$$

con v_a arbitrario; si se sustituye esto en el hamiltoniano total, se siguen teniendo las mismas ecuaciones de movimiento.

Se define una variable dinámica R como función de q y p de *primera clase* si tiene paréntesis de Poisson igual a cero con $\phi_{1, \dots, n}$

$$[R, \phi_j] \approx 0 \quad j = 1, \dots, J.$$

Es suficiente que estas condiciones sean débiles. Si el paréntesis es distinto de cero, R es de *segunda clase*.

Si ahora se quiere cuantizar, es necesario separar el caso cuando hay constricciones de primera clase y de segunda clase.

Cuando sólo se tienen constricciones de primera clase, todas las coordenadas dinámicas q y los momentos p , se convierten en operadores que satisfacen las relaciones de conmutación correspondientes a las relaciones de los paréntesis de Poisson de la teoría clásica. Se parte de la ecuación de Schrodinger,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H' \psi$$

con H' el hamiltoniano de primera clase. Ahora se imponen ciertas condiciones suplementarias sobre la función de onda; esto es,

$$\phi_j \psi = 0. \quad (3)$$

Es necesario probar que estas ecuaciones sean consistentes entre sí; al hacer esto se encuentra una condición más para ψ , dada por

$$[\phi_j, \phi_{j'}] \psi = 0. \quad (4)$$

Todas las condiciones se pueden incluir en la condición (3), de manera que (4) no sea una nueva condición sobre ψ

$$[\phi_j, \phi_{j'}] = c_{jj'} \phi_{j'}$$

En general las $c_{jj'}$ van a ser funciones de las coordenadas y los momentos y no van a conmutar con ϕ en la teoría cuántica. Es necesario que estos coeficientes estén del lado izquierdo, de lo contrario las condiciones no son consistentes.

Ahora consideremos el caso en el que se tienen constricciones de segunda clase; supongamos que estas constricciones son las siguientes:

$$q_1 \approx 0 \quad p_1 \approx 0$$

como su paréntesis de Poisson es distinto de cero, son constricciones de segunda clase. Si queremos cuantizar y lo tratamos de hacer de manera análoga al caso en el que se tienen constricciones de primera clase, esto es hacer $q_1\psi = 0$ y $p_1\psi = 0$ nos lleva a una contradicción ya que esto implicaría $(q_1p_1 - p_1q_1)\psi = i\hbar\psi = 0$. Una manera de evitar este resultado absurdo es no tomar en cuenta el primer grado de libertad; se puede trabajar con los otros grados de libertad lo cual implica una nueva definición para los paréntesis de Poisson dada de la siguiente manera,

$$[\xi, \eta] = \frac{\partial \xi}{\partial q_n} \frac{\partial \eta}{\partial p_n} - \frac{\partial \xi}{\partial p_n} \frac{\partial \eta}{\partial q_n}, \quad n = 2, \dots, N.$$

Con estos paréntesis de Poisson podemos pasar a la teoría cuántica. La existencia de constricciones de segunda clase implica que hay ciertos grados de libertad que no son físicamente importantes. Es necesario deshacerse de estos grados de libertad y escribir los nuevos paréntesis de Poisson para los grados de libertad de interés físico. En la teoría clásica se tiene un número de constricciones $\phi_j \approx 0$, algunas de las cuales son de primera clase y otras de segunda clase; se trata de poner la mayor cantidad posible como una combinación de constricciones de primera clase de manera que se tengan constricciones de primera clase. Esto no se puede hacer con todas las constricciones y sobreviven constricciones de segunda clase que vamos a denominar por χ_s , para $s = 1, \dots, S$, donde S es el número de constricciones de segunda clase que no se pueden escribir como constricciones de primera clase. Con estas χ_s se forman todos los paréntesis de Poisson entre ellas; dichos paréntesis de Poisson se arreglan como un determinante,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & [\chi_1, \chi_2] & [\chi_1, \chi_3] & \dots & [\chi_1, \chi_s] \\ [\chi_2, \chi_1] & 0 & [\chi_2, \chi_3] & \dots & [\chi_2, \chi_s] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [\chi_s, \chi_1] & [\chi_s, \chi_2] & [\chi_s, \chi_3] & \dots & \vdots \end{vmatrix}$$

Este determinante nunca se hace cero; por lo tanto podemos escribir la matriz inversa $C_{s's''}$,

$$C_{s's''}[\chi_{s'}, \chi_{s''}] = \delta_{s's''}.$$

Ahora se definen nuevos paréntesis de Poisson para dos cantidades ξ y η acordes con este formalismo:

$$[\xi, \eta]^* = [\xi, \eta] - [\xi, \chi_s] C_{s's'}[\chi_{s'}, \eta].$$

Las ecuaciones son válidas para los paréntesis de Poisson nuevos y para los paréntesis de Poisson viejos,

$$\begin{aligned} [g, H_T]^* &= [g, H_T] - [g, \chi_s] C_{s's'}[\chi_{s'}, H_T] \\ &\approx [g, H_T]. \end{aligned}$$

Todos los términos $[\chi_s, H_T]$ se hacen cero de manera débil, ya que H_T es de primera clase; entonces,

$$\dot{g} \approx [g, H_T]^*$$

Si ahora tomamos una función ξ de q y p y formamos su paréntesis de Poisson con alguna χ , sea χ_s'' ,

$$[\xi, \chi_s''] = 0$$

entonces, antes de trabajar con los paréntesis de Poisson se puede poner

$$\chi_s = 0$$

y se le considera una ecuación fuerte. Ahora se puede pasar a la teoría cuántica tomando las reglas de conmutación correspondientes a los nuevos paréntesis y tomando las ecuaciones fuertes como ecuaciones entre los operadores de la teoría cuántica. Las ecuaciones débiles que quedan son todas de primera clase y se convierten en condiciones suplementarias sobre las funciones de onda. De esta manera se redujo el problema al de tener sólo constricciones de primera clase.

Al pasar al formalismo hamiltoniano queda claro que las constricciones primarias y secundarias no tienen la importancia que tienen las de primera y segunda clase.

1.6 Partícula clásica con espín

Consideremos la partícula libre no relativista. Además de las coordenadas de posición, se van a introducir variables que anticonmuten, conocidas como variables de Grassman [4],

$$\theta'', \theta_5$$

estas variables tomarán en cuenta los grados de libertad del espín.

Se propone el siguiente lagrangiano [5] para la partícula con espín $\frac{1}{2}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\dot{\theta} \cdot \theta.$$

Como las variables θ anticonmutan, no es posible utilizar $\dot{\theta}^2$ como término cinético; pero sí es posible utilizar $\dot{\theta} \cdot \theta$.

Para pasar al hamiltoniano definimos los momentos conjugados.

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}$$

$$\pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_k} = \frac{i}{2}\theta_k.$$

Los paréntesis de Poisson distintos de cero son,

$$\{\dot{x}^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad \{\theta^k, \pi_l\} = \delta_l^k.$$

De la definición de los momentos conjugados obtenemos las constricciones primarias,

$$\chi_k = \pi_k - \frac{i}{2}\theta_k \approx 0.$$

Para saber si hay constricciones secundarias, es necesario verificar que $\dot{\chi} = 0$, lo cual implica

$$\{\chi, H_T\} \approx 0$$

con $H_T = \frac{p^2}{2m} + \lambda^i \chi_i$. En este caso $\{\chi, H_T\} \approx 0$ entonces no hay constricciones secundarias.

El siguiente paso es saber si hay constricciones de segunda clase; para esto revisemos los paréntesis de χ_i con χ_k ,

$$\{\chi_i, \chi_k\} = i\delta_{ik}$$

esto implica que

$$\chi_k = 0$$

y

$$\pi_k - \frac{i}{2}\theta_k = 0.$$

Es posible introducir paréntesis de Dirac en términos de las constricciones de segunda clase; al hacer esto, se puede considerar la siguiente ecuación como ecuación fuerte $\chi_k = 0$, eliminando π_k . Las únicas variables que sobreviven son las θ_i que tienen nuevos paréntesis

$$\{\theta^i, \theta^j\} = i\delta^{ik}.$$

Hay que recordar que las constricciones de segunda clase implican que hay grados de libertad que no son físicamente importantes, y es por esto que podemos eliminar a π_k .

Las ecuaciones se obtienen usando el principio variacional de Weiss. La acción va a estar dada por:

$$S = \int \mathcal{L} dt + \frac{i}{2} \theta(t_1) \cdot \theta(t_2).$$

Para mostrar que este sistema corresponde, en el límite clásico no relativista, a una partícula de espín $\frac{1}{2}$ se realiza una cuantización canónica. Esto último implica pasar de los paréntesis de Poisson a los conmutadores a través de la siguiente relación:

$$\{A, B\}^* \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]$$

si aplicamos esto al paréntesis de θ^i, θ^j , obtenemos

$$[\widehat{\theta}_i, \widehat{\theta}_j]_+ = \hbar \delta_{ij}.$$

Se tiene un álgebra de Clifford en términos de operadores actuando sobre un espacio de vectores. Una representación irreducible de ésta álgebra es

$$\widehat{\theta}^i = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma_i$$

donde las σ_i son las matrices de Pauli. El vector de espín va a estar dado por

$$\begin{aligned}\widehat{S}_i &= -\frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \widehat{\theta}_j \widehat{\theta}_k \\ \widehat{S}_i &= -\frac{\hbar}{4} i \epsilon_{ijk} \sigma_j \sigma_k = -i \frac{\hbar}{2} \sigma_i \\ \widehat{S}_i &= i \frac{\hbar}{2} \sigma_i\end{aligned}$$

de donde la teoría no relativista corresponde a una partícula de espín $\frac{1}{2}$.

Es posible obtener una versión pseudoclásica de la ecuación de Dirac, extendiendo el concepto de supersimetría a variables (pseudovectores y pseudo escalares) que anticonmuten.

Se introduce un parámetro invariante τ para parametrizar las trayectorias. Esto requiere que el lagrangiano sea homogéneo de primer grado en las derivadas respecto a τ . El lagrangiano más general con esta propiedad y que sea invariante bajo la transformación $w_\mu = dx_\mu - i\theta^* \sigma_\mu d\theta + id\theta^* \sigma_\mu \theta$ es,

$$\mathcal{L} = -i\alpha_1 \theta_5 \dot{\theta}_5 - i\alpha_2 \theta_\mu \dot{\theta}^\mu - mc \sqrt{\left(\dot{x}^\mu + \frac{i\beta}{mc} \theta_\mu \dot{\theta}_5 + \frac{i\gamma}{mc} \dot{\theta}_\mu \theta_5\right)^2}.$$

A este lagrangiano se le asocia la siguiente acción

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \mathcal{L}.$$

La expresión general de los generadores de las transformaciones canónicas van a estar dados por:

$$\begin{aligned}G_5 &= -[\pi_5 + i\alpha_1 \theta_5 - \frac{i\alpha}{mc} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\theta}] \\ G_\mu &= -[\pi_\mu + i\alpha_2 \theta_\mu + \frac{i\beta}{mc} P_\mu \theta_5].\end{aligned}$$

El lagrangiano es singular y como consecuencia vamos a tener constricciones. Como en el caso del ejemplo anterior, se tienen dos constricciones primarias que van a

ser π_μ y π_5 . Reescribimos P_μ, π_μ y π_5 ,

$$P_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = mc \frac{\dot{x}_\mu + v_\mu}{\sqrt{(x_\mu + v_\mu)^2}}$$

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\mu} = i\alpha_2 \theta_\mu - \frac{i\gamma}{mc} P_\mu \theta_5$$

$$\pi_5 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_5} = i\alpha_1 \theta_5 + \frac{i\beta}{mc} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta}$$

de P_μ recuperamos la condición de capa de masa $P^2 = m^2 c^2$.

Para saber qué tipo de constricciones se tienen se van a analizar los paréntesis de Poisson de χ , χ_5 y χ_μ donde

$$\chi = P^2 - m^2 c^2$$

$$\chi_5 = \pi_5 - i\alpha_1 \theta_5 - \frac{i\beta}{mc} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta}$$

$$\chi_\mu = \pi_\mu - i\alpha_2 \theta_\mu + \frac{i\gamma}{mc} P_\mu \theta_5.$$

Calculando los paréntesis de Poisson se tiene que χ es una constricción de primera clase; estos paréntesis son:

$$\{\chi, \chi\} = 0$$

$$\{\chi, \chi_5\} = 0$$

$$\{\chi, \chi_\mu\} = 0$$

$$\{\chi_5, \chi_5\} = 2i\alpha_1$$

$$\{\chi_5, \chi_\mu\} = i \frac{\beta - \gamma}{mc} P_\mu$$

$$\{\chi_\mu, \chi_\nu\} = 2i\alpha_2 g_{\mu\nu}.$$

Para saber qué clase de constricciones son χ_μ y χ_5 , es necesario analizar la matriz $C_{\alpha\beta}$

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \{\chi_5, \chi_5\} & \{\chi_5, \chi_\mu\} \\ \{\chi_5, \chi_\mu\} & \{\chi_\mu, \chi_\nu\} \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es,

$$\det \| C_{\alpha\beta} \| = -4i\alpha_1 \alpha_2 + \frac{(\beta - \gamma)^2}{m^2 c^2} p^2$$

utilizando $\chi = 0$,

$$\det \| C_{\alpha\beta} \| = -4i\alpha_1 \alpha_2 + (\beta - \gamma)^2$$

si el $\det \| C_{\alpha\beta} \| = 0$, entonces,

$$4\alpha_1\alpha_2 = (\beta - \gamma)^2. \quad (5)$$

Los paréntesis de Poisson importantes y el determinante anterior dependen de $\beta - \gamma$. Es posible hacer una transformación canónica de manera que el lagrangiano original dependa sólo de $\beta - \gamma$. Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{P}_\mu &= 0, \\ 2\alpha_1\dot{\theta}_5 &= -\left(\frac{\beta - \gamma}{mc}\right) \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \\ 2\alpha_2\dot{\theta}_\mu &= -\left(\frac{\beta - \gamma}{mc}\right) P_\mu\dot{\theta}_5. \end{aligned}$$

Con la condición (5), las ecuaciones para $\dot{\theta}_\mu$ y $\dot{\theta}_5$ tienen una solución distinta de cero.

Para saber qué clase de constricciones son χ_μ y χ_5 es necesario analizar la matriz $C_{\alpha\beta}$,

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}.$$

La restricción χ_α es una restricción de primera clase y χ_μ es una restricción de segunda clase. Como hay una restricción de segunda clase es necesario definir unos nuevos paréntesis, que son los paréntesis de Dirac, estos son,

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \chi_\mu\}(C^{-1})^{\mu\nu}\{\chi_\nu, B\}$$

donde C^{-1} es la matriz inversa de

$$C_{\mu\nu} = \{\chi_\mu, \chi_\nu\} = ig_{\mu\nu}.$$

Con los nuevos paréntesis de Dirac se pueden tomar las constricciones de segunda clase igual a cero.

Como se vio, se tienen dos constricciones de primera clase; el hamiltoniano más general que se puede escribir es

$$H = \rho_1(P^2 - m^2c^2) + \rho_2(\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} - imc\pi_5 - \frac{1}{2}mc\theta_5)$$

aquí ρ_2 debe ser una variable de Grassman impar, la manera más general de escribirla es,

$$\rho_2 = \lambda_1\pi_5 + \lambda_2\theta_5$$

con λ_1 y λ_2 constantes; y ρ_1 es,

$$\rho_1 = -\frac{1}{2mc}.$$

Con esto reescribimos el hamiltoniano,

$$H = -\frac{1}{2mc}(P^2 - m^2c^2) + \lambda_1\pi_5(\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}mc\theta_5) + \lambda_2\theta_5(\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} - imc\pi_5).$$

Las ecuaciones de movimiento van a estar dadas por los siguientes paréntesis,

$$\dot{A} = \{A, H\}^*.$$

Las nuevas constricciones son las siguientes,

$$\begin{aligned}\chi &= P^2 - m^2c^2, \\ \chi_D &= \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} - imc\pi_5 - \frac{1}{2}mc\theta_5, \\ \chi'_5 &= \pi_5 + \frac{i}{2}\theta_5\end{aligned}$$

con los siguientes paréntesis de Dirac,

$$\{\chi, \chi'_5\}^* = 0, \quad \{\chi_D, \chi'_5\}^* = 0, \quad \{\chi'_5, \chi'_5\}^* = -i.$$

Es claro que χ y χ_D son constricciones de primera clase mientras que χ_5 es de segunda clase. Se tienen que introducir nuevos paréntesis de Dirac.

El sistema está descrito por cinco variables de Grassman θ_μ, θ_ν que satisfacen la siguiente álgebra de Dirac:

$$\{\theta_\mu, \theta_\nu\}^{**} = ig_{\mu\nu}, \quad \{\theta_\mu, \theta_5\}^{**} = 0, \quad \{\theta_5, \theta_5\}^{**} = -i.$$

Estas variables deben de satisfacer la constricción χ_D ,

$$\chi_D = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} - mc\theta_5 \approx 0.$$

Al hacer el paréntesis $\{\chi_D, \chi_D\}^{**}$, se obtiene la condición de capa de masa que es la constricción χ .

Se cuantiza y se obtienen las siguientes relaciones ,

$$[\theta_\mu, \theta_\nu]_+ = -\hbar g_{\mu\nu}, \quad [\theta_\mu, \theta_5]_+ = 0, \quad [\theta_5, \theta_5]_+ = \hbar.$$

Para los valores siguientes de θ_μ, θ_5 , se puede realizar el álgebra anterior,

$$\begin{aligned}\theta_\mu &= \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\gamma_5\gamma_\mu \\ \theta_5 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\gamma_5.\end{aligned}$$

Las constricciones de primera clase ahora son condiciones sobre los estados,

$$\begin{aligned}(P^2 - m^2 c^2) | \psi \rangle &= 0 \\ (P - mc) | \psi \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Si hacemos $\frac{1}{2}\lambda_1 = i\lambda_2$, con $\lambda_2 = \frac{1}{\hbar}$, escribimos el hamiltoniano como,

$$H = -\frac{1}{2mc}(P^2 - m^2 c^2) + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\gamma}.$$

1.6.1 LÍMITE NO RELATIVISTA

El lagrangiano original lo podemos reescribir de la siguiente manera:

$$L = -\frac{i}{2}\theta_5 \dot{\theta}_5 - \frac{i}{2}\theta_\mu \dot{\theta}^\mu + i \frac{\dot{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\theta}}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}} \theta_5 - mc\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}.$$

Para tomar el límite no relativista ponemos $\tau = x_0 = ct$, y si además consideramos el límite de la restricción χ_D , dado por $mc(\theta_0 - \theta_5)$, el lagrangiano efectivo es

$$\mathcal{L}_{NR} = \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c}\right).$$

Se puede imponer otra restricción χ_0 ,

$$\chi_0 = x_0 - \tau;$$

los paréntesis de Dirac para esta restricción son,

$$\begin{aligned}\{\chi, \chi_0\}^{**} &= 2P_0, \\ \{\chi_D, \chi_0\}^{**} &= \theta_0, \\ \{\chi_0, \chi_0\}^{**} &= 0.\end{aligned}$$

De manera explícita la matriz C queda,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2P_0 & -\theta_0 \\ 2P_0 & 0 & 0 \\ \theta_0 & 0 & i\chi \end{pmatrix}.$$

Para $\chi \neq 0$, existe la matriz inversa C^{-1}

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2P_0} & 0 \\ -\frac{1}{2P_0} & 0 & -\frac{i\theta_0}{2P_0\chi} \\ 0 & \frac{i\theta_0}{2P_0\chi} & -\frac{i}{\chi} \end{pmatrix}.$$

Es posible escoger una combinación de primera clase de las constricciones. Es necesario redefinir los paréntesis de Dirac de manera adecuada; con esto, el nuevo hamiltoniano es:

$$H = \lambda \theta_0 (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} - mc\theta_5) + P_0;$$

escogiendo $\lambda = \frac{2}{\hbar}$, y después de cuantizar,

$$H = \gamma_0 \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\gamma} + mc\gamma_0$$

que reescrito es,

$$H = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} + mc\beta.$$

1.6.2 INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Dentro del esquema anterior, se puede introducir interacción con un campo electromagnético.

En una teoría con constricciones de primera clase no es posible introducir la interacción de una manera arbitraria; es necesario que el carácter de las constricciones no cambie. De otra manera no es posible tener un límite suave cuando se quita la interacción; esto se debe a que si la interacción modifica las constricciones de primera clase en constricciones de segunda clase, los nuevos paréntesis de Dirac que hay que introducir son singulares para la constante de acoplamiento igual a cero.

Se quiere reproducir la ecuación de Dirac para una partícula cargada interactuando con un campo electromagnético externo; entonces la restricción χ_D es, en este caso,

$$\chi_D = \left(P - \frac{e}{c} A \right)_\mu \theta^\mu - mc\theta_5.$$

Las constricciones de segunda clase van a seguir siendo χ_μ y χ'_5 ,

$$\chi_\mu = \pi_\mu - \frac{i}{2} \theta_\mu$$

$$\chi'_5 = \pi_5 + \frac{i}{2} \theta_5.$$

Se va a pedir que el paréntesis de $\{\chi_D, \chi_D\}^{**}$ sea la restricción χ de la teoría, explícitamente,

$$\{\chi_D, \chi_D\}^{**} = i \left[\left(P - \frac{e}{c} A \right)^2 - m^2 c^2 + \frac{ie}{c} F_{\mu\nu} \theta^\mu \theta^\nu \right]$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético. Es necesario verificar que el paréntesis $\{\chi_D, \chi\}^{**}$ se anula. Resulta así,

$$\left\{ \left(P - \frac{e}{c} A \right)^2 - m^2 c^2 + \alpha F_{\mu\nu} \theta^\mu \theta^\nu, \chi_D \right\}^{**} = -2i \left(\alpha - \frac{ie}{c} \right) \left(P - \frac{e}{c} A \right)_\rho F^{\rho\mu} \theta_\mu.$$

La interacción es consistente sólo si no hay momento magnético anómalo, es decir que $\alpha = \frac{ie}{c}$.

Las constricciones de primera clase van a ser:

$$\chi_D = \left(P - \frac{e}{c} A \right)^\mu \theta_\mu - mc\theta_5$$

$$\chi = \left(P - \frac{e}{c} A \right)^2 - m^2 c^2 + \frac{ie}{c} F_{\mu\nu} \theta^\mu \theta^\nu.$$

El lagrangiano que da origen a estas constricciones y a χ_D es,

$$\mathcal{L} = \frac{-i}{2} \theta_5 \dot{\theta}_5 - \frac{i}{2} \theta_\mu \dot{\theta}_\mu - \left[mc - \frac{ie}{2mc^2} F_{\mu\nu} \theta^\mu \theta^\nu - \frac{e^2}{m^2 c^5} F - \mu\nu F_{\rho\lambda} \theta^\mu \theta^\nu \theta^\rho \theta^\lambda \right] \sqrt{\left(\dot{x}_\mu - \frac{i}{mc} \theta_\mu \dot{\theta}_5 \right)^2} - \frac{e}{c} \dot{x} \cdot A.$$

Este lagrangiano da las constricciones correctas, que son,

$$P_\mu = \sqrt{m^2 c^2 - \frac{ie}{c} F_{\mu\nu} \theta^\mu \theta^\nu} \frac{\dot{x}_\mu - \frac{i}{mc} \theta_\mu \dot{\theta}_5}{\sqrt{\dot{x}_\mu - \left(\frac{i}{mc} \theta_\mu \dot{\theta}_5 \right)^2}} + \frac{e}{c} A_\mu,$$

$$\pi_\mu = \frac{i}{2} \theta_\mu,$$

$$\pi_5 = \frac{i}{2} \dot{\theta}_5 - \frac{i}{mc} \left(P - \frac{e}{c} A \right)_\mu \theta^\mu.$$

Referencias

- [1] N.Mukunda, E.C.G. Sudarshan. *Classical Dynamics: A Modern Perspective*. John Wiley & Sons, N.York (1974).
- [2] S.A.Hojman, L.C.Shepley, J. Math. Phys. **32** (1), 142 1991.
- [3] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, N.York (1964) pag.1-43.
- [4] C.A.P. Galvao, C.Teitelboim, J.Math.Phys. **21**, 7, (1980).
- [5] A.Barducci, B.Casalbuoni, L.Lusanna, Il Nuovo Cimento, **35A**, 377, (1976).

Capítulo 2

En este capítulo trataremos las ecuaciones más conocidas en las teorías de acción a distancia, así como las dificultades que estas enfrentan. También describiremos brevemente las ecuaciones efectivas más conocidas de teoría cuántica de campos para describir dos partículas interactuando.

2.1 Introducción

Básicamente hay dos formas de describir la interacción de un sistema de muchas partículas; una de ellas corresponde a considerar que las partículas interactúan directamente entre sí; estas son las llamadas teorías de acción a distancia. La otra, corresponde a introducir campos como mediadores de esta interacción.

Las teorías de acción a distancia eran el punto de vista predominante desde Newton hasta las épocas de Maxwell y Einstein.

El concepto actual de campo se desarrolló a partir de estudios de electromagnetismo. Las ecuaciones de Maxwell dieron a estas entidades el carácter de independientes y con grados de libertad propios, siendo las partículas simplemente sus fuentes.

El advenimiento de la teoría cuántica a principios de siglo reforzó la importancia del concepto de campo: la descripción de una partícula involucra la introducción de un campo $\phi(x)$. Con el tiempo se sentaron las bases de las teorías clásicas y cuánticas de campos como las teorías fundamentales para describir la naturaleza. Una característica muy importante de estas teorías es la facilidad con que se introducen las simetrías tanto internas como del espacio-tiempo. Desgraciadamente no siempre es posible extraer en forma cerrada toda la información que uno requiere para predecir las propiedades específicas de un sistema dado. Se recurre entonces a ecuaciones aproximadas y efectivas (no siempre extraídas de primeros principios) que esencialmente eliminan a los campos que median la interacción.

Por otro lado, las teorías de acción a distancia sufrieron un fuerte revés a principio de siglo por la dificultad de introducir acciones que se propagaran no de manera instantánea sino que requirieran un tiempo finito tal como es el caso de la luz.

En las últimas décadas se ha retomado el concepto de acción a distancia como un punto de vista alternativo para obtener ecuaciones de movimiento efectivas clásicas o de primera cuantización [1]. Uno de los trabajos pioneros a este respecto fue realizado por Dirac en 1949 [2].

En la teoría de acción a distancia hay dos brechas.

La primera de ellas comienza con Schwarzschild, Tetrode y Fokker, continuando por Dirac y que va a la electrodinámica de Wheeler y Feynman que es, a su vez, un caso especial de la mecánica relativista de van Dam y Wigner. Esta brecha está marcada por teorías manifiestamente covariantes y de muchos tiempos. Las fuerzas entre las partículas actúan a lo largo de los conos de luz, o en el caso de van Dam y Wigner, a través de la región espacial entre el pasado y el futuro de los conos de luz. En el caso de la electrodinámica de Wheeler y Feynman, esta estructura se puede ver como un vestigio de la teoría de campo que no ha sido removido: aparece por el tiempo finito requerido para el campo electromagnético de propagarse de una partícula a otra.

La otra brecha a la cual pertenece la mecánica relativista predictiva, comienza con un artículo de Dirac[2], que se basa de entrada, en una formulación hamiltoniana. El problema de construir una dinámica relativista es vista como el problema de encontrar un grupo de generadores del grupo de Poincaré que dependa de coordenadas y momentos canónicos que satisfagan las relaciones de Poisson. En este caso las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales acopladas; además la teoría es una teoría de un sólo tiempo. En este contexto cabe señalar que con frecuencia se piensa que una teoría hamiltoniana de acción a distancia no puede ser lógicamente coherente debido al teorema de *no interacción*.

2.2 Teorema de no interacción

Si uno quiere una formulación hamiltoniana, donde las líneas de universo sean invariantes (sólo para el caso de partículas puntuales), que las coordenadas físicas sean las coordenadas canónicas y que las ecuaciones de movimiento sean ecuaciones de partículas en interacción para todo tiempo, se llega a una incompatibilidad entre las condiciones anteriores; esta incompatibilidad se demostró con el teorema de *no interacción* (Jordan, Mukunda, Sudarshan [3]). En este teorema se demuestra que las cuatro condiciones anteriores sólo funcionan para la dinámica de una partícula libre. Si hay interacción entre las partículas una de las condiciones debe de desaparecer. La condición que se elimina con más frecuencia es el requerimiento de que las coordenadas físicas sean las coordenadas canónicas.

Una última alternativa que trataremos con más cuidado y que es la finalidad de la tesis, consiste en establecer un conjunto de ecuaciones de movimiento dinámicas con los requerimientos de invariancia apropiados, y analizar directamente la com-

patibilidad entre ellas.

2.3 Electrodinámica de Wheeler y Feynman

La electrodinámica de Wheeler y Feynman [4] se caracteriza por el siguiente principio de acción

$$J = - \sum_a m_a c \int [(-da_\mu)(da^\mu)]^{\frac{1}{2}} + \sum_{a < b} \frac{e_a e_b}{c} \int \int \delta[(a_\mu - b_\mu)(a^\mu - b^\mu)] da_\nu db^\nu$$

$= \textit{extremo}.$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a esta acción son:

$$m_a c^2 \ddot{a}_\mu^{(a)} = e_a \sum_{b \neq a} F_{\mu\rho}^{(b)(a)} \dot{a}^\rho$$

estas ecuaciones son integrodiferenciales, donde

$$F_{\mu\nu}^{(b)}(x) = \frac{\partial A_\nu^{(b)}(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu^{(b)}(x)}{\partial x^\nu}$$

se puede interpretar como el campo que siente la partícula a en un punto x debido a la partícula b y $A_\mu(x)$ es el vector potencial de la partícula b en el punto x .

Los campos A son solución a las ecuaciones de Maxwell, siendo la suma de mitad potencial avanzado, mitad potencial retardado,

$$A_m^{(b)}(x) = \frac{1}{2} R_\mu^{(b)}(x) + \frac{1}{2} S_\mu^{(b)}(x)$$

R_μ y S_μ son los potenciales retardados y avanzados respectivamente. Las interacciones tienen lugar a lo largo de los conos de luz del pasado y del futuro.

Las cantidades conservadas en esta teoría son sumas de las expresiones de la partícula libre más una contribución de interacción. El cuadrivector de energía-momento P_μ y el tensor del momento angular del centro de masa $M_{\mu\nu}$ tienen la siguiente forma:

$$P_\mu = \sum_a m_a \dot{a}_\mu + P'_\mu$$

$$M_{\mu\nu} = \sum_a m_a (a_\mu \dot{a}_\nu - a_\nu \dot{a}_\mu) + M'_{\mu\nu}$$

donde P'_μ y $M'_{\mu\nu}$ son las contribuciones de interacción.

En las ecuaciones de movimiento no aparecen efectos radiativos; para incluir dichos efectos, se introduce la teoría del absorbedor perfecto de Wheeler y Feynman

[5], dando así una explicación de por qué sólo se observan potenciales retardados. esto se vería de la siguiente manera en las ecuaciones de movimiento,

$$m_a c^2 \dot{a}_\mu = e_a \dot{a}^\nu \left[\sum_b F_{\mu\nu}^{b_r} + \frac{1}{2} [F_{\mu\nu}^{a_r} - F_{\mu\nu}^{a_o}] - \frac{1}{2} [F_{\mu\nu}^{b_r} - F_{\mu\nu}^{b_o}] \right].$$

La condición del absorbedor es que el campo $\sum F_{\mu\nu}^{b_r} - F_{\mu\nu}^{b_o}$ se debe anular. El tercer término es absorbido -el medio absorbe la mitad del retardado y la mitad del avanzado. Entonces, las ecuaciones de movimiento quedan,

$$m_a c^2 \ddot{a}_\mu = e_a \dot{a}^\nu \left[\sum F_{\mu\nu}^{b_r} + \frac{1}{2} [F_{\mu\nu}^{a_r} - F_{\mu\nu}^{a_o}] \right].$$

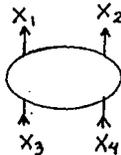
De esta manera se tiene la descripción de un sistema de partículas en interacción, así como una manera distinta de interpretar la causalidad: el pasado y el futuro van a definir lo que pasa en el presente.

La formulación hamiltoniana de este problema no es trivial, así como la elección del parámetro de evolución τ que no sólo determina las posiciones $\vec{x}_i(\tau)$ sino que además establece una selección de los tiempos asociados a cada partícula. Este problema se hereda cuánticamente.

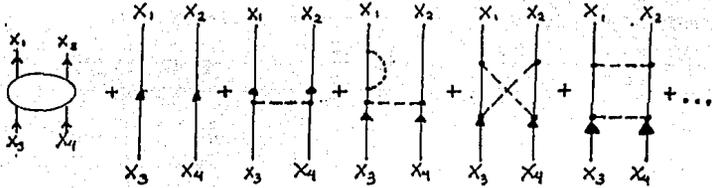
2.4 Ecuación de Bethe-Salpeter

La mejor ecuación conocida para representar, a partir de primeros principios, la interacción entre dos partículas es la ecuación de Bethe-Salpeter. Dicha ecuación se obtiene a partir de teoría cuántica de campos.

La cantidad fundamental para describir el estado de un sistema de partículas va a ser la amplitud $\chi(x_1, x_2)$ en analogía a la función de onda asociada a una partícula $\psi(x)$. La ecuación de Bethe-Salpeter [6] va a ser la ecuación dinámica asociada a χ . De manera similar a la función de Green $G(x, x')$ que permite conocer la evolución de $\psi(x)$, la evolución de $\chi(x_1, x_2)$ queda determinada por un propagador de cuatro puntos $K(x_1, x_2; x_3, x_4)$. La expresión explícita de este propagador queda determinada una vez que se selecciona un hamiltoniano para la teoría cuántica de campos correspondiente. Gráficamente la interacción de las partículas se representa [7] por:



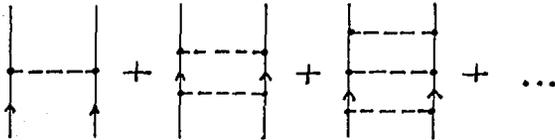
cuando la interacción corresponde a dos fermiones que intercambian un bosón, por ejemplo dos electrones intercambiándose fotones, tenemos,



matemáticamente,

$$K(1, 2, 3, 4) = S_{F^A}(1, 3)S_{F^B}(2, 4) - \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 \times \\ S_{F^A}(1, 5)S_{F^B}(2, 6)G(5, 6; 7, 8)S_{F^A}(7, 3)S_{F^B}(8, 4)$$

donde S es el propagador de una sola partícula y G representa la suma de todas las gráficas que pueden contribuir a la interacción de todas las partículas. La expresión de G no puede darse en forma cerrada y en general se recurre a aproximaciones; la más usual corresponde a la llamada aproximación escalera en la cual se consideran únicamente diagramas de la forma



en ese caso, la amplitud satisface la siguiente ecuación

$$\chi_k(x_1, x_2) = -g_0^2 \int d^4x_5 d^4x_6 S_F^A(x_1 - x_5)S_F^B(x_2 - x_6) \\ \times \Delta_F(x_5 - x_6)\chi_k(x_5, x_6),$$

donde Δ_F es el propagador del mesón que en electrodinámica sería un fotón y g_0^2 es la constante de acoplamiento que en electrodinámica cuántica vale e^2 ($\sim \frac{1}{137}$ en unidades naturales).

En forma diferencial la ecuación anterior se escribe,

$$(\gamma^A \cdot \partial + m)(\gamma^B \cdot \partial + m)\chi_k(x_1, x_2) = G_0^2 \Delta_F(x_1 - x_2)\chi_k(x_1, x_2);$$

en el sistema centro de masa resulta,

$$\left[\left(\sum \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} P + p \right) \gamma^{(1)} - im_1 c \right) \left(\sum \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} P - p \right) \gamma^{(2)} - im_2 c \right) \right] \psi(x_\nu) i \Delta_F(x_\nu) \psi(x_\nu).$$

La función de onda ψ es una función del cuadrivector $x_\nu = (\mathbf{r}, ict)$ donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es la coordenada relativa y $t = t_1 - t_2$ es el tiempo relativo; p es el operador $i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$ y P es un cuadrivector constante. Si no trabajamos en la aproximación de escalera esta ecuación se convierte en una ecuación integro diferencial. Su generalización con campos externos se puede encontrar en la literatura.

Esta ecuación tiene dos problemas, el primero es que tiene una integral que no se puede escribir en forma cerrada; segundo, depende de dos variables de tiempo, una para cada electrón y como consecuencia no se puede reducir a una forma hamiltoniana. El primero de estos problemas se origina del hecho de que una teoría cuántica relativista sólo conserva la carga total del sistema pero no el número de partículas; el segundo de pedir covariancia relativista. Cuando se hacen los cálculos "prácticos" se considera interacción efectiva electrón-electrón.

Parte de la finalidad de la tesis es estudiar mecanismos alternativos para generar estas interacciones. Dentro de estos mecanismos el más conocido es la llamada interacción de Breit [8], la cual es válida a primer orden en g^2 . Es posible construir un hamiltoniano efectivo en el caso relativista donde un electrón en interacción deben incluir la expansión en la constante de acoplamiento. El escoger γ como operador de un electrón, del hamiltoniano de Dirac

$$h_D = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta c^2 + V(r) \quad (1)$$

donde $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ y β son matrices de Dirac, \mathbf{p} el momento y V el potencial nuclear, permite sumar las series en potencias de $\frac{1}{c}$.

Para encontrar la interacción de Breit se propone que, a semejanza del caso no relativista, el hamiltoniano se puede escribir como

$$H = h_D + h_D(1) + h_D(2) + g(1,2)$$

aquí h_D está dado por ec.(1) y $V(r)$ es un potencial externo, mientras $g(1,2)$ es un potencial efectivo que modela la interacción fermión-fermión. Se considera que la interacción $g(1,2)$ debe obtenerse a partir de la expresión explícita del elemento de matriz que representa la dispersión de dos partículas A y B que pasan de un estado ψ_A, ψ_B con energías ϵ_A, ϵ_B a estados ψ_C, ψ_D con energías ϵ_C, ϵ_D ; esto es,

$$S_{AB \rightarrow CD} = e^2 \iint \bar{\Phi}_C(x_1) \bar{\Phi}_D(x_2) \gamma_a^\mu D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) \gamma_2^\nu \Phi_A(x_1) \Phi_B(x_2) d^4 x_1 d^4 x_2$$

donde $D_{\mu\nu}$ es el propagador del fotón. En la norma de Lorentz

$$D_{\mu\nu}^L = g_{\mu\nu} \Delta,$$

con $\Delta(x) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|)$. En la norma de Coulomb,

$$D_{\mu\nu}^C = \left[g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{(\partial \cdot \eta)^2} - \frac{\eta_\mu \partial_\nu + \partial_\mu \eta_\nu}{(\partial \cdot \eta)^2} \right] \Delta,$$

donde $\eta = (0, 0, 0, i)$ en el sistema inercial de referencia en el cual cuantizamos el campo de fotones. Sustituimos $D_{\mu\nu}$ en la norma de Lorentz y realizamos la integral temporal, resulta

$$S_{AB \rightarrow CD} = \delta(\omega_{AC}, \omega_{BD}) e^2 \iint \bar{\Phi}_C(x) \bar{\Phi}_D(y) \gamma^\mu(x) \frac{\cos \omega R}{R} \gamma^\mu(y) \Phi_A(x) \Phi_B(y) d^3x d^3y$$

con,

$$\omega = \omega_{AC} = |\epsilon_A - \epsilon_C| = \omega_{BD} = |\epsilon_B - \epsilon_D|; \quad (2)$$

R es la distancia entre los electrones. Al hacer la integración temporal desapareció el tiempo relativo que sí está presente en la ecuación de Bethe-Salpeter.

El elemento de matriz ec.(2) pudo haberse obtenido utilizando una interacción efectiva

$$g(1, 2) = \frac{1 - \alpha_1 \alpha_2}{R} \cos \omega R.$$

Si se hubiera trabajado en la norma de Coulomb, la interacción efectiva que se hubiera obtenido, es

$$g(1, 2) = \frac{1}{R} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R} \cos \omega R + (\alpha_1 \cdot \partial_1)(\alpha_2 \cdot \partial_2) \left(\frac{\cos \omega R - 1}{\omega^2 R} \right).$$

Estas interacciones efectivas poseen muchas propiedades que no esperaríamos de entrada para una buena formulación hamiltoniana. Por ejemplo, dependen de las energías de un electrón y son explícitamente dependientes de la norma. La expresión del potencial está ligada con la elección de las funciones de onda de un electrón y sólo en el caso particular en que estas funciones de onda sean definidas como soluciones de una ecuación de Dirac de la forma

$$H = c\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 + V(r),$$

darán los elementos de matriz de g que serán independientes de la norma.

En el límite no relativista estos hamiltonianos se reducen, en la norma de Lorentz, a:

$$g(1, 2) = \frac{1}{r_{12}} - \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{r_{12}} - \frac{\omega^2 r_{12}}{2}$$

y en la norma de Coulomb

$$g_B(1, 2) = \frac{1}{r_{12}} - \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{r_{12}} - \frac{(\alpha_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\alpha_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{2r_{12}^3}.$$

Esta última expresión es la más usada y tiene la enorme ventaja de no depender de la diferencia de energías, de tal suerte que la ecuación correspondiente se puede intentar resolver por cualquier método, además del perturbativo, mientras que para las interacciones dependientes de la diferencia de energías esto se tiene que discutir.

La expresión para $g_B(1, 2)$ puede también obtenerse de la cuantización de la llamada interacción de Darwin, reemplazando las matrices α de Dirac por el vector de velocidad \mathbf{v} clásico

$$v_D = \frac{e^2}{r} \left(-1 + \frac{1}{2c^2} \left[\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + \frac{(\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] \right).$$

Esta expresión fue obtenida por primera vez por Darwin en 1920, y la idea consiste en calcular explícitamente el potencial electromagnético retardado producido por la partícula a en la posición de la partícula b , y sustituir en la interacción $J_\mu^{(a)} f_b^{\mu\nu}$. Para hacer lo anterior [9], se hace una aproximación a orden cero de la función de Lagrange de un sistema de cargas (aquí no se toma en cuenta el retardo de los potenciales); esto es,

$$\mathcal{L}^{(0)} = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}.$$

El segundo término es la energía potencial para las cargas en reposo. Al hacer la siguiente aproximación ($\frac{v^2}{c^2}$) se elige una de las cargas del sistema y se determinan los potenciales del campo que producen todas las cargas restantes en el punto en el que se encuentra la primera carga.

Los potenciales retardados están dados por

$$\phi = \int \frac{\rho_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV$$

$$A = \frac{1}{c} \int \frac{j_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV.$$

Si las velocidades de las cargas son pequeñas comparadas con la de la luz, entonces la distribución de las cargas no cambia considerablemente durante el tiempo $\frac{R}{c}$, entonces, es posible hacer un desarrollo de $\rho_{t-\frac{R}{c}}$ y $j_{t-\frac{R}{c}}$ en serie de potencias de $\frac{R}{c}$. Esto implica que ϕ queda,

$$\phi = \int \frac{\rho dV}{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \rho dV$$

aquí $\int \rho dV = 0$, por lo tanto,

$$\phi = \int \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \rho dV.$$

Para el potencial A se hace de manera análoga, salvo que uno se queda con el desarrollo a primer orden debido a que ya es de segundo orden en c ; entonces A es de la forma

$$A = \frac{1}{c} \int \frac{\rho v}{R} dV.$$

Para el caso en el que hay una sola partícula, los potenciales se escriben

$$\phi = \frac{e}{R} + \frac{e}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2},$$

$$A = \frac{ev}{cR}.$$

Por otro lado sabemos que

$$A' = A + \nabla f$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

con

$$f = \frac{e}{2c} \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Sustituyendo ϕ y f en las expresiones para ϕ' y A' , obtenemos,

$$\phi' = \frac{e}{R}$$

$$A' = \frac{ev}{cR} + \frac{e}{2c} \nabla \frac{\partial R}{\partial t}$$

calculando A' ,

$$A' + e \frac{[v + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]}{2cR}.$$

Si el campo es producido por varias cargas, hay que sumar estas expresiones para todas ellas.

Si ahora hacemos un desarrollo a segundo orden del primer término de la función de Lagrange para una carga e_a , en presencia de un campo externo, dada por,

$$L_a = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} - e_a \phi + \frac{e_a}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

sustituyendo ϕ' y A , la función lagrangiana queda

$$\begin{aligned} L &= \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \\ &= \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 R_{ab}} [\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})]. \end{aligned}$$

Este último término es el término de Darwin.

Las correcciones a este potencial para incluir términos válidos a orden superior a $\frac{v^2}{c^2}$, dan origen a términos complicados que han sido deducidos recientemente.

La problemática de tres o más partículas, tanto a nivel de teoría cuántica de campos como a nivel de mecánica clásica, es un problema muy complicado y muy poco estudiado.

Referencias

- [1] Relativistic Action at a distance: Classical and Quantum Aspects. Proceedings, España, 1981, **162**, Springer-Verlag, Ed. J.Llosa, Berlín.
- [2] P.A.M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
- [3] D.G. Currie, T.F. Jordan, E.C.G. Sudarshan, Rev. Mod. Phys. **35**, 35 (1963).
- [4] R.P. Feynman, J.A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. **17**, 157 (1945).
- [5] R.P. Feynman, J.A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. **21**, 425 (1949).
- [6] H.A. Bethe, E.E. Salpeter. *Quantum Mechanics of one -and two- electron atoms*. Plenum publishing corporation, N.Y. (1977).
- [7] D. Lurié *Particles and Fields*. Interscience Publishers, N.Y. (1968), p.417.
- [8] O. Gorceix, P. Indelicato, J.P. Desclaux, J. Phys. **B 20**. 639, (1987).
- [9] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Teoría Clásica de los Campos*, Vol.II, Ed. reverté. España, (1981), pag. 235-240.
- [10] R. Marnelius, Phys. Rev. **D, 10**, 2535 (1974).

Capítulo 3

En este capítulo se va a seguir el trabajo realizado por H. Crater y P. Van Alstine en el que encuentran las ecuaciones que describen clásicamente la interacción entre partículas sin espín, que interactúan a través de potenciales efectivos. Se parte de las constricciones del sistema y se busca la compatibilidad entre ellas; luego se cuantiza este sistema, trabajando las constricciones de manera análoga al caso clásico. Después se encuentran las ecuaciones de Dirac para dos partículas con espín $\frac{1}{2}$ interactuando; para ello se va a hacer uso de las variables de Grassman y al igual que en el caso clásico y cuántico, se va a buscar la compatibilidad entre las constricciones del sistema.

3.1 Introducción

Usualmente se representa a una partícula libre, como se vio en el capítulo 1, por

$$H = p^2 + m^2 \approx 0. \quad (1)$$

En este trabajo, Crater y Van Alstine suponen que las partículas, al interactuar, preservan su identidad de forma que siguen satisfaciendo de manera independiente las constricciones semejantes a (1). La interacción entre las partículas es a través de potenciales efectivos; dichos potenciales poseen un caracter tensorial bien definido en términos de las transformaciones de Lorentz y en el caso de interacción vectorial y escalar, se introducen a través del acoplamiento minimal; esto es,

$$\begin{aligned} p_i^\mu &\rightarrow \pi_i^\mu = p_i^\mu - A_i^\mu \\ m_i &\rightarrow M_i = m_i + S_i. \end{aligned} \quad (2)$$

La covariancia de las ecuaciones, así como su correcto comportamiento en el límite no relativista, restringen la forma general de los potenciales.

Utilizando las ecuaciones (2) y sustituyendo en (1), las constricciones para la partícula 1 y 2 respectivamente, se escriben

$$\begin{aligned} H_1 &= \pi_1^2 + M_1^2 \approx 0 \\ H_2 &= \pi_2^2 + M_2^2 \approx 0. \end{aligned} \quad (3)$$

3.2 Partícula sin espín

El primer caso que se va a analizar es el de dos partículas sin espín [1], interactuando a través de potenciales efectivos. Cada partícula aparece en un potencial externo con la otra partícula como fuente.

Para este sistema se propone el siguiente hamiltoniano de Dirac:

$$H = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2;$$

una condición suficiente para que H_1 y H_2 se conserven de manera simultánea en τ (parámetro de evolución), es que las constricciones sean de primera clase, es decir,

$$\{H_1, H_2\} \approx 0. \quad (4)$$

Las variables x_i^μ , p_j^ν satisfacen el álgebra siguiente

$$\{x_i^\mu, p_j^\nu\} = g^{\mu\nu} \delta_{ij}.$$

Se introducen variables canónicas relativa y de centro de masa

$$x = x_1 - x_2, \quad p = \frac{1}{\omega} (\epsilon_2 p_1 - \epsilon_1 p_2).$$

Para asegurar la cinemática relativista correcta, es necesario que la variable de momento se reduzca a la expresión usual del centro de masa. Dichas variables son:

$$P = p_1 + p_2, \quad P^2 = -\omega^2$$

aquí ω es la energía total en el centro de masa. Es necesario introducir la siguiente restricción:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{p} \approx 0 \quad (5)$$

esta restricción se impone de manera externa; sin ella el análisis sería muy complicado.

Los potenciales A se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_1^\mu &= \alpha_1 p_1^\mu + \beta_1 p_2^\mu \\ A_2^\mu &= \alpha_2 p_2^\mu + \beta_2 p_1^\mu \end{aligned} \quad (6)$$

donde las α y las β son independientes del momento relativo p y dependen del momento total P ; además van a depender de x a través de x_\perp (perpendicular a P). La x_\perp es

$$x_\perp^\mu = \left(g^{\mu\nu} - \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \right) x_\nu \quad (7)$$

Dependen a través de esta coordenada ya que es la coordenada covariante más sencilla. Es posible reescribir la expresión para los potenciales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\pi_1^\mu &= E_1 \hat{P}^\mu + G_1 p^\mu \\ \pi_2^\mu &= E_2 \hat{P}^\mu - G_2 p^\mu\end{aligned}\quad (7)$$

en donde E_i y G_i son funciones escalares.

Las constricciones se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= p_1^2 + m_1^2 + \Phi_1(x, p_1, p_2) \approx 0 \\ \mathcal{H}_2 &= p_2^2 + m_2^2 + \Phi_2(x, p_1, p_2) \approx 0\end{aligned}\quad (8)$$

con,

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= M_1^2 - m_1^2 + \pi_1^2 - p_1^2 \\ \Phi_2 &= M_2^2 - m_2^2 + \pi_2^2 - p_2^2\end{aligned}\quad (9)$$

La ec.(3) se convierte en

$$2p_1 \cdot \partial \Phi_2 = 2p_2 \cdot \partial \Phi_1 + \Phi_1, \Phi_2 \approx 0 \quad (10)$$

si escogemos

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi(x_\perp, p_1, p_2) \quad (11)$$

con x_\perp ec.(6), entonces la ecuación anterior se convierte en una igualdad fuerte.

La ec.(11) da origen a la siguiente constricción:

$$\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2 = 2P \cdot p + (\epsilon_2 - \epsilon_1)\omega + m_1^2 - m_2^2 \approx 0 \quad (12).$$

Haciendo uso de esta constricción y de $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \omega$, se obtiene el siguiente hamiltoniano:

$$\mathcal{H}_1 \approx \mathcal{H}_2 = p_\perp^2 - b^2(\omega) + \Phi \approx 0 \quad (13)$$

donde $p^2 = p_\perp^2 - (\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{p})^2$ y

$$b^2 = \frac{\omega^4 - 2\omega^2(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}{4\omega}.$$

Para que haya compatibilidad entre (4) y (12) es necesario que se cumpla la siguiente igualdad

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{1}{\omega}(m_1^2 - m_2^2) \quad (14).$$

Las variables ϵ_i se interpretan como las energías conservadas del sistema c.m. de las partículas y explícitamente se escriben:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{(\omega^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2\omega} \\ \epsilon_2 &= \frac{(\omega^2 + m_2^2 - m_1^2)}{2\omega}\end{aligned}$$

La combinación de las constricciones que no involucra a $\mathbf{P} \cdot \mathbf{p}$, da origen al siguiente hamiltoniano que incorpora la cinemática relativista correcta,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\equiv \frac{\epsilon_2}{\omega} \mathcal{H}_1 + \frac{\epsilon_1}{\omega} \mathcal{H}_2 \\ &= p^2 - b^2(\omega) + \Phi \\ &\approx \mathcal{H}_1 \approx \mathcal{H}_2 \approx 0.\end{aligned}\tag{15}$$

Es útil introducir las siguientes variables:

$$\begin{aligned}m_\omega &= \frac{m_1 m_2}{\omega} \\ \epsilon_\omega &= \frac{(\omega^2 - m_1^2 - m_2^2)}{2\omega}\end{aligned}$$

se interpretan como la masa reducida relativista y la energía de una partícula ficticia con movimiento relativo. Al utilizar estas variables, sólo se trabaja con la interacción. Reescribiendo b^2 en términos de estas variables,

$$b^2 = \epsilon_\omega^2 - m_\omega^2.$$

Con la expresión anterior y con la definición $\mathcal{P}^\mu = p^\mu + \epsilon_\omega \hat{P}^\mu$, podemos reescribir la ec. (12) de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}^2 + m_\omega^2 + \Phi \approx 0\tag{16}$$

en el c.m $\mathcal{P}^\mu = (\epsilon_\omega, \vec{p})$. Para el caso sin interacción, esta expresión se reduce a la ec. de Klein-Gordon.

Las partes de interacción vectorial y escalar llevan a la compatibilidad entre las constricciones de manera independiente. Las expresiones para los potenciales escalares y vectoriales son

$$\begin{aligned}\Phi_s &\equiv M_1^2 - m_1^2 \\ &= M_2^2 - m_2^2 = 2m_1 S_1 + s_1^2 = 2m_2 S_2 + s_2^2 \\ \Phi_A &= -2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{A}_1 + A_1^2 = -2\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{A}_2 + A_2^2.\end{aligned}\tag{17}$$

De estas expresiones y tomando $G_1 = G_2 \equiv G$, que es la solución algebraica más simple para G , encontramos la siguiente expresión

$$E_1^2 - 2GE_1\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{p} - (E_2^2 + 2Ge_2\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{p}) = \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - 2\omega\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{p}$$

que implica que en la constricción de capa de masa,

$$E_1^2 - E_2^2 = \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2. \quad (18)$$

Tomando esta expresión como una condición fuerte junto con $G_1 = G_2$, sólo hay dos combinaciones escalares independientes de E_1 , E_2 y G y se denominan \mathcal{A} y \mathcal{V} . En términos de estas variables la expresión para la cc.(7), se convierte en

$$\begin{aligned} \pi_1^\mu &= E_1(\mathcal{A}, \mathcal{V})\hat{\mathbf{P}}^\mu + G(\mathcal{A})p^\mu \\ \pi_2^\mu &= E_2(\mathcal{A}, \mathcal{V})\hat{\mathbf{P}}^\mu - G(\mathcal{A})p^\mu \end{aligned} \quad (19)$$

Si se definen variables escalares adicionales como $G(\epsilon_i - \mathcal{A}_i(\mathcal{A}, \mathcal{V})) \equiv E_i$, podemos reescribir la ecuación (17) y encontrar la forma de G escogiendo $\mathcal{V} = 0$ y $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = F(\mathcal{A})$, esta es

$$G^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{2F(\mathcal{A})}{\omega}} \right). \quad (20)$$

Si escogemos $F(\mathcal{A}) = 0$ entonces $G = 1$, en este caso, el potencial \mathcal{A}_i^μ es temporal; si se escoge $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, ($\mathcal{V} = 0$), se tiene un cuadvector electromagnético. Estos dos casos tienen la misma dinámica clásica; sin embargo, cuánticamente estos casos producen una dinámica distinta.

Las variables \mathcal{A} y \mathcal{V} van a ser generales. Los invariantes S , \mathcal{V} y \mathcal{A} se relacionan con los potenciales de energía (E_i) y masa (M_i). Se exige que estas relaciones den los límites clásico y no relativista correctos. Hay dos casos para encontrar estas relaciones: el primero, es tener $\mathcal{V} \neq 0$ y $\mathcal{A} = 0$. Si se le hacen las siguientes modificaciones $m_\omega \rightarrow M_\omega = m_\omega + S$ y $\mathcal{P}^\mu \rightarrow \pi^\mu = \mathcal{P}^\mu - \mathcal{V}\hat{\mathbf{P}}^\mu$ a la cc.(16), el sistema hamiltoniano que se obtiene es

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^2 + M_\omega^2 \\ &= p^2 - (\epsilon_\omega - \mathcal{V}^2 + (m_\omega + S)^2) \\ &\approx H_1 \approx H_2 \approx 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Si se hace el límite en el que la partícula dos se vuelve infinitamente pesada, $\epsilon_\omega \rightarrow \epsilon_1$ y $m_\omega \rightarrow m_1$, entonces la ec.(21) se convierte en la constricción de Klein-Gordon para una partícula en un potencial escalar y vectorial externo. La relación entre E y \mathcal{V} es la siguiente:

$$\begin{aligned} E_1(0, \mathcal{V})^2 &= (\epsilon_1 - \mathcal{A}_1)^2 \approx \epsilon_1^2 - 2\epsilon_\omega \mathcal{V} + \mathcal{V}^2 \\ E_2(0, \mathcal{V})^2 &= (\epsilon_2 - \mathcal{A}_2)^2 \approx \epsilon_2^2 - 2\epsilon_\omega \mathcal{V} + \mathcal{V}^2, \end{aligned} \quad (22)$$

y la relación entre M y S ,

$$\begin{aligned} M_1^2(\mathcal{A} = 0, S) &= (m_1 + S_1)^2 = m_1^2 + 2m_\omega S + S^2 \\ M_2^2(\mathcal{A} = 0, S) &= (m_2^2 + s_2)^2 = m_2^2 + 2m_\omega S + S^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Para potencial débil, las expresiones anteriores dan el límite no relativista correcto. Haciendo, una expansión a $\mathcal{O}(\frac{1}{c^2})$ de la ec.(21), se obtiene la siguiente energía en el c.m.:

$$\begin{aligned} \omega &= m_1 + m_2 + \frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} + \mathcal{V} + S \\ &- \frac{(\mathbf{p}^2)^2}{8} \left[\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right] + \frac{\mathbf{p}^2 \mathcal{V}}{m_1 m_2} + \frac{\mathcal{V}^2}{2(m_1 + m_2)} \frac{\mathcal{V} S}{(m_1 + m_2)} \\ &- \frac{\mathbf{p}^2 S}{2} \left[\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right] + \frac{S^2}{2(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

El segundo caso, $\mathcal{V} = 0$ y $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = F(\mathcal{A})$ da un A_i^μ que no es temporal, sólo espacial. Escogiendo G dada por la ec.(20), se encuentra

$$E_i = E_i(\mathcal{A}, 0) = G(G - F(\mathcal{A})).$$

El hamiltoniano es de la forma,

$$\begin{aligned} \pi_i^2 + m_i^2 &\approx G^2(p^2 - (\epsilon_i - F(\mathcal{A}))^2 + m_i^2) \\ &= G^2(p^2 - (\epsilon_\omega - F(\mathcal{A}))^2 + m_\omega^2). \end{aligned} \quad (24)$$

La energía del c.m. está dada por,

$$\omega = m_1 + m_2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + F(\mathcal{A}) - \frac{(\mathbf{p}^2)^2}{8} \left[\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right] + \frac{\mathbf{p}^2 F(\mathcal{A})}{m_1 m_2} + \frac{F(\mathcal{A})}{2(m_1 + m_2)}.$$

En el límite no relativista, $F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$; tomando $\mathcal{A} = -\frac{\alpha}{r}$ y haciendo una transformación canónica, se obtiene el término de Darwin; al cuantizar, se obtiene la interacción de Breit para partículas sin espín.

En el caso más general, \mathcal{V} y \mathcal{A} contribuyen a la parte temporal de la interacción vectorial. Es posible escribir E_1^2 y E_2^2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E_1^2(\mathcal{A}, \mathcal{V}) &\approx G^2((\epsilon_1 - \mathcal{A})^2 - 2\epsilon_\omega \mathcal{V} + \mathcal{V}^2) \\ &= G^2(\epsilon_1 - \mathcal{A})^2 \\ E_2^2(\mathcal{A}, \mathcal{V}) &\approx G^2((\epsilon_2 - \mathcal{A})^2 - 2\epsilon_\omega \mathcal{V} + \mathcal{V}^2) \\ &= G^2(\epsilon_2 - \mathcal{A})^2. \end{aligned}$$

Estas expresiones se reducen a los casos temporales y electromagnéticos si $\mathcal{A} = 0$ o $\mathcal{V} = 0$, respectivamente. El nuevo hamiltoniano se escribe de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_i = \pi_i^2 + M_i^2 \approx 0 \approx \mathcal{H} \approx G^2(p^2 + 2\epsilon_\omega \mathcal{A} - \mathcal{A}^2 + 2\epsilon_\omega \mathcal{V} - \mathcal{V}^2 + 2m_\omega S + s^2 + m_\omega - \epsilon_\omega^2). \quad (25)$$

Ahora, se va a cuantizar el formalismo anterior y para ello se construyen las versiones cuánticas de \mathcal{H}_i . Las variables del sistema van a ser p y \hat{P} . Si tomamos a $E_i = G(\epsilon_i - \mathcal{A}_i)$ como hermitiana, entonces las expresiones dadas en (19) se escriben de la siguiente forma hermitiana,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 \psi &= (\pi_1^2 + M_1^2) \psi = 0 \\ \mathcal{H}_2 \psi &= (\pi_2^2 + M_2^2) \psi = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

En este caso, la constricción (4) se convierte en una condición fuerte sobre ψ :

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{p} = 0. \quad (27)$$

La contraparte cuántica de las constricciones $\mathcal{H} \approx 0$, se convierte en la siguiente ecuación

$$\mathcal{H} \psi = 0. \quad (28)$$

En el sistema c.m. ($P^0 = \omega, \mathbf{P} = 0$), esta ecuación es, explícitamente,

$$\begin{aligned} G^2[p^2 - (\epsilon_\omega - \mathcal{A})^2 + 2\epsilon_\omega \mathcal{V} - \mathcal{V}^2 + (m_\omega + S)^2 \\ - \frac{1}{2} \nabla \ln G \cdot \mathbf{p} - \frac{1}{2} \nabla^2 \ln G - \frac{3}{4} (\nabla \ln G)^2] \psi = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

si se hace $\phi = G\psi$, la ecuación anterior es,

$$[p^2 - (\epsilon_\omega - \mathcal{A})^2 + 2\epsilon_\omega \mathcal{V} - \mathcal{V}^2 + (m_\omega + S)^2 + \frac{1}{2} \nabla \ln G + \frac{1}{4} (\nabla \ln G)^2] \phi = 0 \quad (30)$$

Esta última ecuación describe dos partículas sin espín interactuando a través de potenciales escalar, temporal y electromagnético. Si \mathcal{V} , S o \mathcal{A} no dependen de p , la ecuación tiene una estructura de momento tan simple como la ecuación de Schrödinger no relativista. La ec.(30) se reduce a la de Schrödinger no relativista con una energía potencial $S + \mathcal{V} + \mathcal{A}$. En el límite cuando una de las partículas se vuelve infinitamente pesada, la ec.(30) se reduce a la ec. de Klein-Gordon para una partícula en presencia de un potencial vectorial y escalar.

3.3 Interacción de partículas con espín $\frac{1}{2}$

Ahora se va a describir dinámica de dos partículas con espín $\frac{1}{2}$ interactuando [2]. Como vimos en el capítulo 1, la manera de introducir el espín pseudoclásico para cada partícula, se hace a través de las variables de Grassman.

Al igual que en el caso sin espín, se va a pedir compatibilidad entre las constricciones; para ello, es necesario introducir variables supersimétricas, para cada partícula; dichas variables preservan la supersimetría y en el límite no relativista dan las ecuaciones correctas; estas variables son

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_1^\mu + \frac{i\theta_1^\mu\theta_{51}}{\tilde{M}_1} \\ \tilde{x}_2 &= x_2^\mu + \frac{i\theta_2^\mu\theta_{52}}{\tilde{M}_2}.\end{aligned}\quad (32)$$

Se define además

$$\tilde{x}_\perp = (g_{\mu\nu} + \hat{P}_\mu\hat{P}_\nu)(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)_\nu.\quad (31)$$

En términos de las variables de Grassman, la ec. de Dirac corresponde a una constricción en las variables dinámicas,

$$S = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\theta} + m\theta_5,\quad (33)$$

la otra constricción es la condición de capa de masa

$$\frac{1}{i}\{S, S\} = \mathcal{H} = p^2 + m^2 \approx 0.\quad (34)$$

Estas dos constricciones son compatibles entre sí, esto implica $\{S, \mathcal{H}\} = 0$. Las constricciones de la partícula 1 y 2 son, respectivamente, en presencia de interacción escalar,

$$\begin{aligned}S_1 &= p_1 \cdot \theta_1 + \tilde{M}_1\theta_{51} \approx 0 \\ S_2 &= p_2 \cdot \theta_2 + \tilde{M}_2\theta_{52}\end{aligned}\quad (35)$$

ó explícitamente,

$$\begin{aligned}S_1 &= p_1 \cdot \theta_1 + M_1\theta_{51} - i\frac{\partial M_1}{M_2} \cdot \theta_2\theta_{52}\theta_{51} \approx 0 \\ S_2 &= p_2 \cdot \theta_2 + M - 2\theta_{52} + i\frac{\partial M_2}{M_1} \cdot \theta_1\theta_{51}\theta_{52} \approx 0.\end{aligned}\quad (36)$$

Si se introduce interacción vectorial, donde $\tilde{E}_i = E_i(x_{\perp})$,

$$\begin{aligned}(\tilde{x}_1)''_E &= x_1'' - \frac{i\theta_1'' \theta_1 \cdot \hat{P}}{\tilde{E}_1} \\(\tilde{x}_2)''_E &= x_2'' - \frac{i\theta_2'' \theta_2 \cdot \hat{P}}{\tilde{E}_2}\end{aligned}\quad (37)$$

se modifica S_1 y S_2 de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}S_1 &= E_1 \hat{P} \cdot \theta_1 + p \cdot \theta_1 + m_1 \theta_{51} + i \frac{\partial E_1}{E_2} \cdot \hat{P} \cdot \theta_1 \hat{P} \cdot \theta_2 \\S_2 &= E_2 \hat{P} \cdot \theta_2 + p \cdot \theta_2 + m_2 \theta_{52} + i \frac{\partial E_2}{E_1} \cdot \theta_2 \hat{P} \cdot \theta_2 \hat{P} \cdot \theta_1.\end{aligned}\quad (38)$$

Al hacer una expansión en los términos que tienen variables de Grassman, se incluye la interacción supersimétrica entre las partículas. Es por esto, que se debe de preservar la supersimetría mientras se trabaja la compatibilidad entre las constricciones. Las constricciones para dos partículas con espín $\frac{1}{2}$, bajo interacción vectorial, escalar y electromagnética, son:

$$\begin{aligned}S_1 &= \tilde{\pi}_1 \cdot \theta_1 + \tilde{M} \theta_{51} \\S_2 &= \tilde{\pi}_2 \cdot \theta_2 + \tilde{M}_2 \theta_{52}.\end{aligned}\quad (39)$$

Para que las constricciones sigan siendo compatibles es necesario modificar $\tilde{\pi}_i$, \tilde{E}_i y \tilde{M}_i , que ahora son:

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_1'' &= \tilde{E}_1 \hat{P}'' + G p'' + i \theta \cdot \partial G \theta_{1\perp}'' + i \theta_2 \cdot \partial G \theta_{2\perp}'' \\ \tilde{\pi}_2'' &= \tilde{E}_2 \hat{P}'' - G p'' - i \theta_1 \cdot \partial G \theta_{1\perp}'' - i \theta_2 \cdot \partial G \theta_{2\perp}'',\end{aligned}\quad (40)$$

donde,

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1 &= E_1 - iG \frac{\partial E_1}{E_2} \cdot \theta_1 \hat{P} \cdot \theta_1 + iG \frac{\partial E_1}{E_2} \cdot \theta_2 \hat{P} \cdot \theta_2 + G^2 \theta_1 \cdot \partial \frac{\theta_2 \cdot \partial E_1}{E_1 E_2} \hat{P} \cdot \theta_1 \hat{P} \cdot \theta_2 \\ \tilde{E}_2 &= E_2 + iG \frac{\partial E_2}{E_1} \cdot \theta_1 \hat{P} \cdot \theta_1 + iG \frac{\partial E_2}{E_2} \cdot \theta_2 \hat{P} \cdot \theta_2 + G^2 \theta_2 \cdot \partial \frac{\theta_1 \cdot \partial E_2}{E_1 E_2} \hat{P} \cdot \theta_1 \hat{P} \cdot \theta_2\end{aligned}\quad (41)$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{M}_1 &= M_1 + iG \frac{\partial M_1}{M_1} \cdot \theta_1 \theta_{51} - iG \frac{\partial M_1}{M_2} \cdot \theta_2 \theta_{52} + G^2 \theta_1 \cdot \partial \frac{\theta_2 \cdot \partial M_1}{M_1 M_2} \theta_{51} \theta_{52} \\ \tilde{M}_2 &= M_2 + iG \frac{\partial M_2}{M_1} \cdot \theta_1 \theta_{51} - G i \frac{\partial M_2}{M_2} \cdot \theta_2 \theta_{52} + G^2 \theta_2 \cdot \partial \frac{\theta_1 \cdot \partial M_2}{M_1 M_2} \theta_{51} \theta_{52}.\end{aligned}\quad (42)$$

Desarrollando esto en la expresión para S_1 y S_2 , las constricciones se escriben:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= G(\theta_1 \cdot p + \frac{M_1 \hat{P}_{51} + E_1 \hat{P} \cdot \theta_1}{G} + i \partial \ln G \cdot \theta_2 \theta_{1\perp} \cdot \theta_{2\perp} \\
 &\quad + i \frac{\partial E_1}{E_2} \cdot \theta_2 \hat{P} \cdot \theta_2 \hat{P} \cdot \theta_1 - i \frac{\partial M_1}{M_2} \cdot \theta_2 \theta_{52} \theta_{51}) \\
 S_2 &= G(-\theta_2 \cdot p + \frac{M_2 \theta_{52} + E_2 \hat{P} \cdot \theta_2}{G} - i \partial \ln G \cdot \theta_1 \theta_{2\perp} \cdot \theta_{1\perp} \\
 &\quad - i \frac{\partial E_2}{E_1} \cdot \theta_1 \hat{P} \cdot \theta_1 \hat{P} \cdot \theta_2 - i \frac{\partial M_2}{M_1} \cdot \theta_1 \theta_{51} \theta_{52}), \tag{42}
 \end{aligned}$$

Con estas constricciones se cumple,

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{i} \{S_1, S_2\} = \tilde{\pi}_1^2 + \tilde{M}_1^2$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{i} \{S_2, S_2\} = \tilde{\pi}_2^2 + \tilde{M}_2^2.$$

Las ecuaciones de Dirac para dos partículas para el sistema anterior son:

$$\begin{aligned}
 S_1 \psi &= (\tilde{\pi} \cdot \theta_1 + \tilde{M}_1 \theta_{51}) \psi = 0 \\
 S_2 \psi &= (\tilde{\pi}_2 \cdot \theta_2 + \tilde{M}_2 \theta_{52}) \psi = 0; \tag{43}
 \end{aligned}$$

que en forma covariante se escriben como:

$$\begin{aligned}
 S_1 \psi &= \gamma_{51} (\gamma_1 \cdot (p_1 - \tilde{A}_1) + m_1 + \tilde{S}_1) \psi = 0 \\
 S_2 \psi &= \gamma_{52} (\gamma_2 \cdot (p_2 - \tilde{A}_2) + m_2 + \tilde{S}_2) = 0 \tag{44}
 \end{aligned}$$

en el sistema c.m., estas ecuaciones toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 S_1 \psi &= \gamma_{51} G (\gamma_1 \cdot p + \frac{(M_1 - E_1 \gamma_1^0)}{G} + \frac{i}{2} \gamma_2 \cdot \nabla \ln G \gamma_2 \cdot \gamma_1 \\
 &\quad + \frac{i}{2} \gamma \cdot \frac{\nabla E_1}{E_2} \gamma_2^0 \gamma_1^0 - \frac{i}{2} \gamma_2 \cdot \frac{\nabla M_1}{M_2}) \psi = 0 \\
 S_2 \psi &= \gamma_{52} G (-\gamma_2 \cdot p + \frac{(M_2 - E_2 \gamma_2^0)}{G} - \frac{i}{2} \gamma_1 \cdot \nabla \ln G \gamma_1 \cdot \gamma_2 \\
 &\quad - \frac{i}{2} \gamma_1 \cdot \frac{\nabla E_2}{E_1} \gamma_1^0 \gamma_2^0 + \frac{i}{2} \gamma_1 \cdot \frac{\nabla M_2}{M_1}) \psi = 0. \tag{45}
 \end{aligned}$$

Estas dos últimas expresiones son las ecuaciones de Dirac para las dos partículas en interacción.

Referencias

- [1] H.W. Crater, P. Van Alstine, Phys. Rev. D, **30**, 2585 (1984).
- [2] H.W. Crater, P. Van Alstine, Phys. Rev. D, **34**, 1932 (1986).

Capítulo 4

En este capítulo se va a poner un ejemplo de un problema resuelto con las ecuaciones de Dirac del capítulo anterior. El problema es el del sistema del parapositronio.

4.1 El Parapositronio

El parapositronio es un sistema en el cual se tiene un electrón y un positrón interactuando con espín total cero.

Para este sistema nuestras ecuaciones son:

$$\begin{aligned} D_1 \psi &\equiv \gamma_1^5 S_1 \psi = 0 \\ D_2 \psi &\equiv \gamma_2^5 S_2 \psi = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Para tener una estructura electromagnética se introduce la sustitución mínima ec.(3.2) en las ecuaciones anteriores, de manera que sigan siendo compatibles; estas ecuaciones son,

$$\begin{aligned} D_1 \psi &= (\pi_1 \cdot \gamma_1 + m_1) \psi = 0 \\ D_2 \psi &= (\pi_2 \cdot \gamma_2 + m_2) \psi = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Elevando al cuadrado las expresiones anteriores y haciendo uso de las propiedades de las matrices γ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= S_1^2 = \pi_1^2 - \frac{1}{2} \sigma_1^{\mu\nu} F_{1\mu\nu} + m_1^2 \\ \mathcal{H}_2 &= S_2^2 = \pi_2^2 - \frac{1}{2} \sigma_2^{\mu\nu} F_{2\mu\nu} + m_2^2. \end{aligned} \quad (3)$$

De manera análoga al análisis realizado en el caso de partícula sin espín, se obtiene la siguiente ecuación de onda en el sistema c.m., con $\mathcal{A} = -\frac{\alpha}{r}$:

$$\{\mathbf{p}^2 + m_\omega^2 - (\epsilon_\omega - \mathcal{A})^2 + \frac{\mathcal{A}'}{r} \left[\frac{\omega + m_1}{\omega(\epsilon_1 + m_1)} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{\omega + m_2}{\omega(\epsilon_2 + m_2)} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \right]\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\nabla^2 \mathcal{A}}{2} \left[\frac{\omega + m_1}{\omega(\epsilon_1 + m_1)} + \frac{\omega + m_2}{\omega(\epsilon_2 + m_2)} - \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{2}{3} \sigma_1 \cdot \sigma_2 \right) \right] \\
 & + \frac{1}{6} (3\sigma_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} - \sigma_1 \cdot \sigma_2) \left[\frac{\mathcal{A}''}{\omega} + \frac{\mathcal{A}'}{r\omega} \right] \phi = 0. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Las matrices γ de Dirac aparecen en las expresiones para \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 y \mathcal{H} a través de $\sigma_i^{\mu\nu}$, como las $\sigma_i^{\mu\nu}$ son diagonales por bloques representación quiral, entonces las ecuaciones de onda son diagonales por bloque en la representación quiral de las γ . Esta representación se relaciona con la representación usual, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ch}^0 &= -\gamma^5 \\
 \gamma_{ch} &= \gamma \\
 \gamma_{ch}^5 &= \gamma^0.
 \end{aligned}$$

Nuestra función de onda chiral es

$$\Psi_{ch} = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} \psi_{++} \\ \psi_{+-} \\ \psi_{-+} \\ \psi_{--} \end{pmatrix}$$

entonces la condición $\mathcal{H}\Psi = 0$, para $\phi = \psi_{++}, \psi_{--}$ implica,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{p}^2 + m_\omega^2 - (\epsilon_\omega - \mathcal{A})^2 + (\nabla \ln G \times \mathbf{p}) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \pm i[(\epsilon_2 - \mathcal{A})\sigma_1 \\
 & + (\epsilon_1 - \mathcal{A}\sigma_2) \cdot \nabla \ln G + \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2)\nabla^2 \ln G + (\nabla \ln G)^2] \phi = 0, \quad (5)
 \end{aligned}$$

y para $\phi = \psi_{+-}, \psi_{-+}$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{p}^2 + m_\omega^2 - (\epsilon_\omega - \mathcal{A})^2 + (\nabla \ln G \times \mathbf{p}) \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \pm i[(\epsilon_2 - \mathcal{A})\sigma_1 \\
 & + (\epsilon_1 - \mathcal{A}\sigma_2) \cdot \nabla \ln G + \frac{1}{6}(3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2)[\nabla^2 \ln G + 2(\nabla \ln G)^2] \\
 & - \frac{1}{3}(3\sigma_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_2 \hat{\mathbf{r}} - \sigma_1 \cdot \sigma_2) \left[\ln'' G - \frac{\ln' G}{r} + 2(\nabla \ln G) \right] \phi = 0. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Para la función singlete, con masas iguales, la ec.(6) se reduce a

$$[\mathbf{p}^2 + m_\omega^2 - (\epsilon_\omega - \mathcal{A})^2] \phi_s = 0 \quad (7)$$

Por supuesto, encontrar una solución a esta ecuación de segundo orden no garantiza resolver la ecuación de Dirac de dos cuerpos que es de primer orden. de hecho, una vez que evaluemos Ψ , la solución a la ecuación de Dirac será:

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \gamma_1^5 D - 1\gamma_1^5 \gamma_2^5 D_2 \gamma_2^5 \Psi \\
 &= (-\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\gamma}_1 + m_1)(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\gamma}_2 + m_2) \Psi \\
 &= \tilde{D}_1 \tilde{D}_2 \Psi.
 \end{aligned}$$

Esta función de onda nos da la solución completa al sistema acoplado de 16 componentes. Las ecuaciones $D_1\psi = 0$ y $D_2\psi = 0$ se resuelven con

$$\begin{aligned}\psi_{ch} &= (\widetilde{D}_1\widetilde{D}_2)_{ch}\Psi_{ch} \\ &= (-\pi_1 \cdot \gamma_1 + m_1)_{ch}(-\pi_2 \cdot \gamma_2 + m_2)_{ch} \frac{1}{G} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_s \\ \phi_s \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

de manera explícita,

$$\psi = 2m^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{m} \left\{ \left[\frac{\omega}{2} - \mathcal{A} \right] + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cdot \mathbf{p} \right\} \phi_s \\ \frac{1}{G} \phi_s \\ \frac{1}{G} \phi_s \\ -\frac{1}{m} \left\{ \left[\frac{\omega}{2} - \mathcal{A} \right] - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cdot \mathbf{p} \right\} \phi_s \end{pmatrix}.$$

Si deseamos obtener la solución en la representación usual y utilizamos la siguiente transformación unitaria que relaciona la representación chiral con la representación usual,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_1^0 \gamma_1^5) \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_2^0 \gamma_2^5) \psi_{ch}$$

sustituyendo la expresión de ψ_{ch} ,

$$\psi = -2m \begin{pmatrix} \left\{ \left[\frac{\omega}{2} - \mathcal{A} \right] + \frac{m}{G} \right\} \phi_s \\ \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right] \cdot \mathbf{p} \phi_s \\ \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right] \cdot \mathbf{p} \phi_s \\ \left\{ \left[\frac{\omega}{2} - \mathcal{A} \right] - \frac{m}{G} \right\} \phi_s \end{pmatrix}$$

si definimos $\chi \equiv \left(\frac{\omega}{2} - \mathcal{A} \right) + \frac{m}{G}$, la expresión anterior se reescribe

$$\psi = -2m\chi \begin{pmatrix} \phi_s \\ \frac{1}{\chi} \sigma_1 \cdot \mathbf{p} \phi_s \\ -\frac{1}{\chi} \sigma_2 \cdot \mathbf{p} \phi_s \\ -\frac{1}{\chi^2} \sigma_1 \cdot \mathbf{p} \cdot \sigma_2 \cdot \mathbf{p} \phi_s \end{pmatrix}.$$

Busquemos soluciones de (7) con $\mathcal{A} = -\frac{\alpha}{r}$. Al igual que se encuentra la solución para el átomo de hidrógeno, factorizamos la parte angular de la radial. En nuestro caso, la ecuación radial es la siguiente:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{d}{dx} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2} - \frac{2}{x} \right] f_l(x) = \frac{\epsilon_\omega - m_\omega^2}{\epsilon_\omega^2 \alpha^2} f_l(x).$$

En esta expresión,

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right]^{\frac{1}{2}} \equiv l - \delta_l;$$

Tenemos entonces,

$$f_l(r) = (\epsilon_\omega \alpha r)^\lambda \exp[-(m_\omega^2 - \epsilon_\omega^2)^{\frac{1}{2}} r] \\ \times F\left[\left(\lambda + 1 - \frac{\epsilon_\omega \alpha}{(m_\omega^2 - \epsilon_\omega^2)^{\frac{1}{2}}}\right), 2\lambda + 2; 2(m_\omega^2 - \epsilon_\omega^2)^{\frac{1}{2}} r\right],$$

donde $F[a, b; \rho]$ es la función hipergeométrica confluyente. Haciendo el cálculo de manera análoga al del átomo de hidrógeno, se obtiene una fórmula de Balmer relativista,

$$\epsilon_\omega^2 - m_\omega^2 = -\frac{\epsilon_\omega^2 \alpha^2}{(n - \delta_l)^2}$$

lo cual nos da la siguiente energía total

$$\omega = m\sqrt{2} \left[1 + \left[1 + \frac{\alpha^2}{(n - \delta_l)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}};$$

haciendo una expansión $\mathcal{O}(\alpha^4)$, la energía es,

$$\omega = 2m - \frac{m\alpha^2}{4n^2} - \frac{m\alpha^4}{2n^3(2l+1)} + \frac{11m\alpha^4}{64n^4} + \mathcal{O}(\alpha^6),$$

la cual coincide con el espectro que se obtiene en teoría de campo para el parapositronio. Se obtiene una familia de soluciones ψ_{nlm} para el parapositronio, de la forma

$$\psi_{nlm} e^{-i\omega t} \chi \begin{pmatrix} \phi_{sntlm} \\ \frac{1}{\chi} \sigma_1 \cdot \mathbf{p} \phi_{sntlm} \\ -\frac{1}{\chi} \sigma_2 \cdot \mathbf{p} \phi_{sntlm} \\ -\frac{1}{\chi^2} \sigma - 1 \cdot \mathbf{p} \sigma_2 \cdot \mathbf{p} \phi_{sntlm} \end{pmatrix}$$

donde las ϕ_{sntlm} estan dadas por

$$\phi_{sntlm} = (\epsilon_\omega \alpha r)^\lambda \exp[-(m_\omega^2 - \epsilon_\omega^2)^{\frac{1}{2}} r] F[(-n+l+1), 2\lambda+2; 2(m_\omega^2 - \epsilon_\omega^2)^{\frac{1}{2}} r] Y_l^m(\theta, \phi) | S=0)$$

y son eigenestados de \mathbf{J}^2 y J_z con eigenvalores $j(j+1) = l(l+1)$, $m_j = m$. La expresión para ϕ es una función bien comportada. La parte radial se grafica en la figura para distintos valores de n, l, λ como función de $\epsilon_\omega \alpha r$.

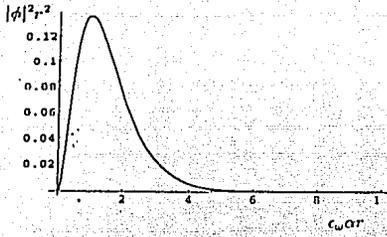
El comportamiento de este sistema es muy parecido al del átomo de hidrógeno clásico. Si comparamos la ecuación radial y la función hipergeométrica confluyente para el átomo de hidrógeno relativista[2] con la ecuación para el parapositronio, vemos que son casi iguales. La diferencia es que la expresión para la energía del átomo relativista dada por

$$\epsilon = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha Z}{n - k + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}} \right)^2}}$$

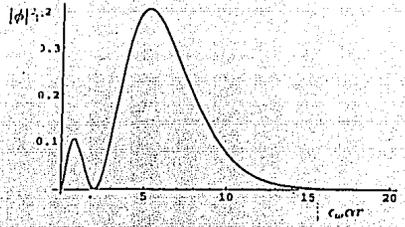
es una expresión cerrada mientras que para el parapositronio la expresión para la energía total no es una expresión cerrada.

Referencias

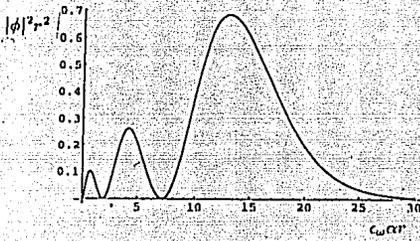
- [1] H.W. Crater, P. Van Alstine, *Phys. Rev. D*, **36**, 3007 (1987).
- [2] H.A. Bethe, E.E. Salpeter, *Quantum Mechanics of one -and two- electron atoms*, Plenum Publishing Corporation, N.Y. (1977), pag.68.



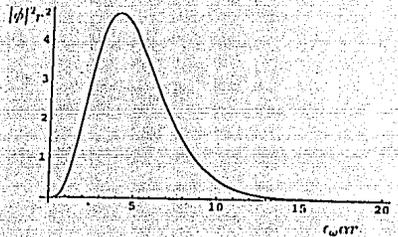
(a)



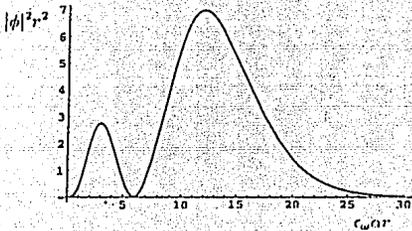
(b)



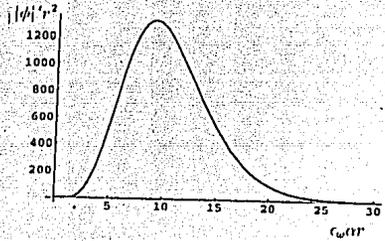
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 1: Gráficas de $|\phi|^2$ vs. $\epsilon_\omega \alpha r$. Los estados que aparecen son: (a) $n = 1, l = 0$ (1s). (b) $n = 2, l = 0$ (2s). (c) $n = 3, l = 0$ (3s). (d) $n = 2, l = 1$ (2p). (e) $n = 3, l = 1$ (3p). (f) $n = 3, l = 2$ (3d).

Discusión y Perspectivas

La finalidad de esta tesis es una búsqueda - no exhaustiva - de ecuaciones cuánticas relativistas de acción a distancia. Se vio que existen varias alternativas. En el caso clásico, las ecuaciones de movimiento podrían ser no locales en el tiempo, como es el caso de Wheeler y Feynman, o podrían ser ecuaciones efectivas locales. La forma hamiltoniana de estas ecuaciones podría inducir ecuaciones cuánticas, tal como ocurre en el caso de partícula libre. Por otra parte, las ecuaciones cuánticas podrían obtenerse a diferentes ordenes de aproximación a partir de ecuaciones cuánticas como es el caso de las ecuaciones de Bethe-Salpeter y de Breit.

Una última alternativa que estudiamos con más cuidado, corresponde a proponer la forma general de las ecuaciones relativistas efectivas a partir de ciertas suposiciones. Este camino es el que se usa de manera común; sin embargo, los resultados que de él se obtienen son muy buenos[1]. Pensamos que sería valioso tratar de extender estos trabajos para: i) el caso en que una partícula es mucho más masiva que la otra; ii) el caso en que se tienen potenciales externos. El primer punto permitiría, por ejemplo, calcular correcciones para sistemas hidrogenoides; el segundo punto permitiría obtener con dos electrones. Recordemos que esta clase de sistemas son de los más estudiados actualmente[2] y los resultados numéricos que se obtienen deben competir con experimentos de la más alta precisión.

Otra extensión relevante de estas ecuaciones cuánticas relativistas y efectivas, corresponde a sistemas de más de dos partículas. Para ello se esperarían interacciones de más de dos cuerpos, lo cual en sí mismo es interesante.

No sólo el planteamiento de este tipo de ecuaciones es un problema de frontera. Los métodos para resolverlas involucran interrogantes no suficientemente exploradas como es el caso de sistemas con partículas de espín $\frac{1}{2}$. Todo ello hace que la mecánica cuántica relativista de partículas en interacción sea un área que atrae cada día más la atención.

Referencias

- [1] H. Crater, P. Van Alstine, Phys. Rev. D **37**, 1982 (1988).
- [2] A. Schäfer, G. Soff, P. Indelicato B. Müller, W. Greiner, Phys. Rev. A **40**, 7362 (1989).